20. Приложения логического языка первого порядка к моделированию математических теорий. Аксиоматические и структурные теории, примеры (не меньше трех), их развитие. Понятие теорем и элементарных теорий

Билет: 12, 26.

В математике можно выделить два способа формирования теорий: аксиоматический подход и структурный подход.

**Аксиоматический подход:**

Из некоторых соображений выбирается сигнатура , выбираются предложения сигнатуры , которые объявляются истинными, то есть аксиомами. Развитие аксиоматической теории состоит в исследовании тех интерпретаций сигнатуры , в которых истинны все аксиомы теории, а также в получении следствий из аксиом.

**Определение 1:** Аксиоматическая теория , где - некоторая сигнатура, , где - множество предложений сигнатуры .

**Определение 2**: Предложения из *Г* называются аксиомами теории

**Определение 3**: Теорема теории - любое логическое следствие из *Г,* то есть *А -* теорема , если и .

**Определение 4**: Множество теорем теории называется её замыканием , то есть . Часто под теорией понимают её замыкание.

**Определение 5**: В общем случае под элементарной теорией будем понимать любое логически замкнутое множество предложений рассматриваемой сигнатуры.

*Примеры:*

**1. Теория групп**: , где = - предикат равенства, - символ групповой операции, - символ единичного элемента.

Аксиомы теории групп:

1. - ассоциативность операции ;
2. *-* существование единичного элемента;
3. *-* существование обратного элемента;

**Теорема 1:**  - уравнение в группе всегда имеет решение, причем единственное.

**2. Теория отношений эквивалентности:**

Аксиомы теории отношений эквивалентности:

1. - рефлексивность;
2. - симметричность;
3. - транзитивность;

**Теорема 2 (теорема о факторизации):**  - эту теорему также называют теоремой теории отношений эквивалентности.

**Структурный подход:**

Данный способ формирования теории начинается с изучения какой-либо конкретной математической структуры или класса структур и тогда, естественно, возникает вопрос о полной аксиоматизации этого класса, т.е. о выборе множества аксиом так, чтобы множество следствий из этих аксиом совпадало с множеством истинных в рассматриваемом классе структур утверждений.

Заранее задан некоторый конкретный универсум и задана некоторая конкретная структура:

*-* тем самым, у нас есть множество теорем теории (пусть и неявно).

*Примеры:* Наиболее ярким примером структурной теории является планарная Евклидова геометрия. - множество точек плоскости, , .

, .

А.Тарским была предложена система из 16 аксиом, из которых следует любая теорема планарной Евклидовой геометрии:

1. - симметричность;
2. ;
3. - транзитивность расстояния;

c

acbd - ромб, - точка пересечения диагоналей.

b

d

a