**3. Понятие интерпретации формул логического языка первого порядка. Определение истинностного значения формул, примеры. Понятие структуры заданной сигнатуры. Основные понятия, связанные с интерпретацией: общезначимые, выполнимые и невыполнимые формулы, примеры; понятия логического следования, равносильных формул, примеры; понятие модели множества формул, примеры. Понятие изоморфизма структур, примеры и контрпримеры. Элементарно эквивалентные структуры, примеры и контрпримеры**

*Билеты 2, 16*

Пусть изначально заданы - нелогическая сигнатура, - тип сигнатуры . – формула сигнатуры , – множество переменных формулы , имеющих в свободное вхождение. Интерпретация формулы называется отображение, определенное на множестве в котором:

1. Каждому предикатному символу ставит в соответствие конкретное отношение соответствующей арности. Если -местный предикатный символ, то
2. Каждому -местному функциональному символу ставит в соответствие конкретное отображение :
3. Каждой свободной переменной ставит в соответствие конкретный объект

Интерпретация термов и формул

1. Интерпретация термов

Если – простейший терм (т.е. константа из или символ свободной переменной), то его интерпретация совпадает с интерпретацией этой константы или переменной (т.е. непосредственно задается отображением ).

Если – сложный терм, т.е. , где – термы, а – функциональный символ,   
то

1. Интерпретация формул
   1. Пусть – атомарная формула, т.е. , где – термы, а – предикат
   2. Пусть и – формулы
   3. Формулы с кванторами

– множество всех возможных интерпретаций, которые совпадают со всеми интерпретациями , за исключением, может, самой переменной . Возможно, что в правых частях формул и берутся по бесконечному множеству интерпретаций, которые соответствуют всевозможным переборам переменной . Если формулы является предложением, то важно, как интерпретируются предикаты и функции и нет необходимости интерпретировать свободные переменные.

Алгебраической системой или структурой сигнатуры называется сужение интерпретации на сигнатуру :   
. Она называется содержательной, если в ней дополнительно проинтерпретировать объекты универса и несодержательной в противном случае.

Формула называется общезначимой или тождественно истинной, если она истинна в любой интерпретации.

Формула называется невыполнимой или тождественно ложной, если она ложна в любой интерпретации.

Формула называется выполнимой, если существует интерпретация, в которой она истинна.

Интерпретация, в которой формула истинна называется моделью формулы, а в которой ложна – контрмоделью формулы.

– из формулы логически следует формула , т.е. любая модель формула – это модель и формулы .

– формулы и логически равносильны, если из и .

Изоморфизм между структурами

- нелогическая сигнатура, и – содержательные интерпретации , , . Изоморфизм между и – такое взаимно-однозначное отображение между универсами , что

1. Для любого -местного предикатного символа и любого набора имеем
2. Для любого -местного функционального символа и любого набора имеем

Если структуры и изоморфны, то . По теореме о факторизации множество структур разделяются на классы эквивалентности. Структуры из одного класса изоморфны, из разных классов – нет. На изоморфных структурах будут истинны одни и те же предложения. Обратное не верно. К примеру: и – теория равенства линейных форм. , т.к. по теореме Кантора – счетно, а – несчетно, соответственно между ними нет биекции. Иногда изоморфные структуры называют эквивалентными. Пример приводит к понятию слабой эквивалентности , когда множество их истинных предложений совпадает. Из эквивалентности следует слабая эквивалентность, но не наоборот.

Пример. Изоморфизм отношения эквивалентности.

1. – свойство рефлексивности
2. – свойство симметричности, т.к. – взаимно-однозначное и – изоморфизм между и , то – взаимно-однозначное и – изоморфизм между и
3. – свойство транзитивности, т.к. – изоморфизм между и , – изоморфизм между и , то – изоморфизм между и .