**11. Логический вывод. Определение поискового дерева, правила его расширения. Лемма о поисковых последовательностях**

*Билет 6, 20*

Логический вывод — это рассуждение, в ходе которого осуществляется переход от исходного суждения (высказывания, формулы) с помощью логических правил к заключению — новому суждению (формуле). Поисковое дерево — дерево доказывающее логическое следование или приводящее контрмодель.

Правила расширения дерева:

1. Дерево, состоящее из одного узла, помеченного формулой , является поисковым деревом с корнем . Единственный узел этого дерева считаем неиспользованным.
2. Если в дереве есть неиспользованный узел , которому приписана формула, являющаяся посылкой одного из правил вывода, то с помощью этого правила каждая неблокированная ветвь , проходящая через узел , расширяется следующим образом:
   1. если правило разветвляющее, то из концевого узла ветви проводятся две дуги, оканчивающиеся новыми вершинами, которым приписываются формулы-заключения данного правила
   2. если правило, соответствующее узлу , – не разветвляющее, то к концевому узлу ветви присоединяются последовательно один к другому новые узлы, помеченные формулами-заключениями.
   3. Уточнения требуют случаи применения правил и поскольку они связаны с выбором параметра . Используя правило , в качестве выбирается параметр с наименьшим номером, не входящий в список исключений в посылке данного правила. При использовании правила выбирается параметр с наименьшим номером, не встречающийся в расширяемой ветви, в том числе и в списке . После расширения дерева считаем узел использованным, а вновь построенные узлы – неиспользованными.
3. Дерево также можно расширить, добавляя к концевым узлам неблокированных ветвей новый узел, помеченный очередной формулой из множества или формулой вида , и считать его неиспользованным.

Лемма. О поисковых последовательностях

Пусть является последовательностью поисковых деревьев для утверждения и – множество параметров, используемых в дереве . Если существует интерпретация сигнатуры на универсуме , в которой истинны все формулы из множества и формула , то для каждого существует интерпретация сигнатуры , являющаяся расширением , такая, что в есть ветвь, все формулы которой истинны в интерпретации .

Доказательство.

Для утверждение леммы очевидно. Пусть существует интерпретация сигнатуры , являющаяся расширением интерпретации , такая, что в есть ветвь , все формулы которой истинны в , и пусть дерево получено из применением некоторого правила вывода к узлу .

Если , то ветвь будет искомой ветвью и в дереве . При этом интерпретация символов из множества , если такие есть, может быть произвольной.

Пусть теперь . Если имеет вид , и , то формулы, присоединяемые к концевой вершине ветви в соответствии с правилом вывода, будут истинны в интерпретации . Если же получено из добавлением нового параметра , то берем в качестве произвольный элемент из , тогда присоединяемые к формулы и будут истинными в полученной интерпретации .

Пусть теперь имеет вид и при этом получено из добавлением параметра . Поскольку формула истинна в интерпретации , то существует интерпретация , совпадающая с всюду, кроме возможно переменной , такая, что . Положим , и тогда присоединяемая к формула будет истинной в .