**16. Логический вывод. Теоремы о полноте и об адекватности дедуктики. Теорема о компактности, пример ее использования**

*Билеты 9, 23*

*Логический вывод* – это рассуждение, в ходе которого осуществляется переход от исходного суждения (высказывания, формулы) с помощью логических правил к заключению – новому суждению (высказыванию, формуле).

*Теорема о полноте дедуктики*. Если , то.

Док-во от противного. Пусть и , тогда никакое поисковое дерево не является деревом доказательства, а значит, существует хотя бы одна неблокированная ветвь. Пусть – полное поисковое дерево для утверждения   
вида «». В нем есть неблокированная ветвь , насыщенная относительная параметром , которое может быть и бесконечным. Для простоты будем считать, что в сигнатуре множества формул и формулы нет функциональных символов. Зададим интерпретацию сигнатуры , в которой содержаться только предикатные символы: .

Для любого -местного предикатного символа и для любого набора констант положим:

Индукцией по правилам построения формул можно показать, что при таком расширении истинны все формулы ветки . Поскольку насыщенна относительно , то она содержит все формулы из и , а значит, это модель для и контрмодель для . Следовательно, . Получили противоречие.

Теорема об адекватности дедуктики. .

Теорема о компактности. Компактность – перенос свойств с конечных подмножеств бесконечного множества на это множество. Если и , то , что и .

Док-во. Воспользуемся теоремой об адекватности дедуктики. Т.к. , то и поэтому существует дерево доказательств у которого все ветви блокированы. Это означает, что все ветви конечны и дерево конечно тоже. Значит, множество гипотез, стоящих на этих ветвях, конечно. А это и есть множество .

Пример. , . Доказать, что .

От противного, пусть . По теореме о компактности – существует конечное подмножество , из которого логически следует . Можно считать, что - первые формул . : .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

– модель и контрмодель , следовательно, , а это противоречие.