**20. Приложения логического языка первого порядка к моделированию математических теорий. Аксиоматические и структурные теории, примеры (не меньше трех), их развитие. Понятие теорем и элементарных теорий**

*Билеты 12, 26*

В математике можно выделить два способа формирования теорий: аксиоматический подход и структурный подход.

**Аксиоматический подход:**

Из некоторых соображений выбирается сигнатура , выбираются предложения сигнатуры , которые объявляются истинными, то есть аксиомами. Развитие аксиоматической теории состоит в исследовании тех интерпретаций сигнатуры , в которых истинны все аксиомы теории, а также в получении следствий из аксиом.

Определение 1: Аксиоматическая теория , где - некоторая сигнатура, , где - множество предложений сигнатуры .

Определение 2: Предложения из Г называются аксиомами теории

Определение 3: Теорема теории - любое логическое следствие из Г, то есть А - теорема , если и .

Определение 4: Множество теорем теории называется её замыканием , то есть . Часто под теорией понимают её замыкание.

Определение 5: В общем случае под элементарной теорией будем понимать любое логически замкнутое множество предложений рассматриваемой сигнатуры.

Примеры:

1. Теория групп: , где = - предикат равенства, - символ групповой операции, - символ единичного элемента.

Аксиомы теории групп:

- ассоциативность операции ;

- существование единичного элемента;

- существование обратного элемента;

Теорема 1: - уравнение в группе всегда имеет решение, причем единственное.

2. Теория отношений эквивалентности:

Аксиомы теории отношений эквивалентности:

- рефлексивность;

- симметричность;

- транзитивность;

Теорема 2 (теорема о факторизации): - эту теорему также называют теоремой теории отношений эквивалентности.

**Структурный подход**:

Данный способ формирования теории начинается с изучения какой-либо конкретной математической структуры или класса структур и тогда, естественно, возникает вопрос о полной аксиоматизации этого класса, т.е. о выборе множества аксиом так, чтобы множество следствий из этих аксиом совпадало с множеством истинных в рассматриваемом классе структур утверждений.

Заранее задан некоторый конкретный универсум и задана некоторая конкретная структура:

- тем самым, у нас есть множество теорем теории (пусть и неявно).

Пример. Наиболее ярким примером структурной теории является планарная Евклидова геометрия. - множество точек плоскости, , .

, .

А.Тарским была предложена система из 16 аксиом, из которых следует любая теорема планарной Евклидовой геометрии:

- симметричность;

;

- транзитивность расстояния;

c

- ромб, - точка пересечения диагоналей.

b

d

a