



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»
КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе №3 по курсу "Анализ алгоритмов"

Тема Алгоритмы сортировки

Студент Якуба Д. В.

Группа ИУ7-53Б

Оценка (баллы) _____

Преподаватели Волкова Л.Л., Строганов Ю.В.

Москва — 2020 г.

Оглавление

Введение	3
1 Аналитическая часть	5
1.1 Алгоритм сортировки пузырьком	5
1.2 Алгоритм сортировки вставками	5
1.3 Алгоритм сортировки выбором	5
2 Конструкторская часть	7
2.1 Блок-схема алгоритма сортировки пузырьком	7
2.2 Блок-схема алгоритма сортировки вставками	7
2.3 Блок-схема алгоритма сортировки выбором	7
2.4 Модель вычислений	11
2.5 Трудоемкость алгоритмов	11
2.5.1 Соглашение	11
2.5.2 Алгоритм сортировки пузырьком	11
2.5.3 Алгоритм сортировки вставками	15
2.5.4 Алгоритм сортировки выбором	18
3 Технологическая часть	22
3.1 Требования к программному обеспечению	22
3.2 Средства реализации программного обеспечения	22
3.3 Листинг кода	23
3.4 Тестирование программного продукта	24
4 Исследовательская часть	25
4.1 Пример работы программного обеспечения	25
4.2 Технические характеристики	27
4.3 Время выполнения алгоритмов	27

Заключение	31
Литература	31

Введение

Цели лабораторной работы

1. изучение алгоритмов сортировки пузырьком, вставками и выбором;
2. реализация алгоритмов сортировки пузырьком, вставками и выбором;
3. проведение сравнительного анализа трудоёмкости алгоритмов на основе теоретических расчетов и выбранной модели вычислений;
4. сравнительный анализ алгоритмов на основе экспериментальных данных;
5. подготовка отчёта по лабораторной работе;
6. получение практических навыков реализации алгоритмов на ЯП Kotlin.

Определение

Сортировка - это процесс перегруппировки заданной последовательности объектов в некотором определённом порядке. Такой определённый порядок позволяет, в некоторых случаях, эффективнее работать с заданной последовательностью.

Пусть требуется упорядочить N элементов: E_1, E_2, \dots, E_n . Каждый элемент представляет из себя запись E_j , содержащую некоторую информацию и ключ K_j , управляющий процессом сортировки. На множестве ключей определено отношение порядка $<$ так, чтобы для любых трёх значений ключей a, b, c выполнялись следующие условия:

- Либо $a < b$, либо $b < c$, либо $a = b$;
- Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Данные условия определяют математическое понятие линейного и совершенного упорядочения, а удовлетворяющие им множества поддаются сортировке большинством методов.

Задачей сортировки является нахождение такой перестановки записей $p(1)p(2)...p(n)$ с индексами $1, 2, ..., N$, после которой ключи расположились бы в порядке неубывания.

$$K_{p(1)} \leq K_{p(2)} \leq ... \leq K_{p(n)} \quad (1)$$

1 | Аналитическая часть

1.1 Алгоритм сортировки пузырьком

Алгоритм заключается в повторяющихся проходах по сортируемому массиву. За каждый проход элементы последовательно сравниваются попарно. В том случае, если два элемента расположены не по порядку, то они меняются местами [1]. Этот процесс повторяется до тех пор, пока элементы не будут упорядочены, то есть, в случае массива элементов размером n , проходы повторяются $n - 1$ раз.

1.2 Алгоритм сортировки вставками

Алгоритм заключается в следующей последовательности действий: элементы просматриваются по одному, и каждый новый элемент вставляется в подходящее место среди ранее упорядоченных элементов [1].

В начальный момент времени отсортированная последовательность пуста. На каждом шаге алгоритма выбирается один из элементов входных данных и помещается на нужную позицию в уже отсортированной последовательности до тех пор, пока набор входных данных не будет исчерпан. В любой момент времени в отсортированной последовательности элементы удовлетворяют требованиям к выходным данным алгоритма.

1.3 Алгоритм сортировки выбором

Алгоритм заключается в следующей последовательности действий: сначала выделяется наименьший (наибольший) элемент последовательности и каким-либо образом отделяется от остальных, затем выбирается

наименьший (наибольший) из оставшихся и т.д. [1]

Вывод

Были рассмотрены алгоритмы сортировки пузырьком, вставками и выбором. В данной работе стоит задача реализации рассмотренных алгоритмов. Также будет необходимо оценить теоретическую оценку алгоритмов и проверить её экспериментально.

2 | Конструкторская часть

2.1 Блок-схема алгоритма сортировки пузырьком

Блок-схема алгоритма сортировки пузырьком предоставлена на рисунке 2.1.

2.2 Блок-схема алгоритма сортировки вставками

Блок-схема алгоритма сортировки вставками предоставлена на рисунке 2.2.

2.3 Блок-схема алгоритма сортировки выбором

Блок-схема алгоритма сортировки выбором предоставлена на рисунке 2.3.

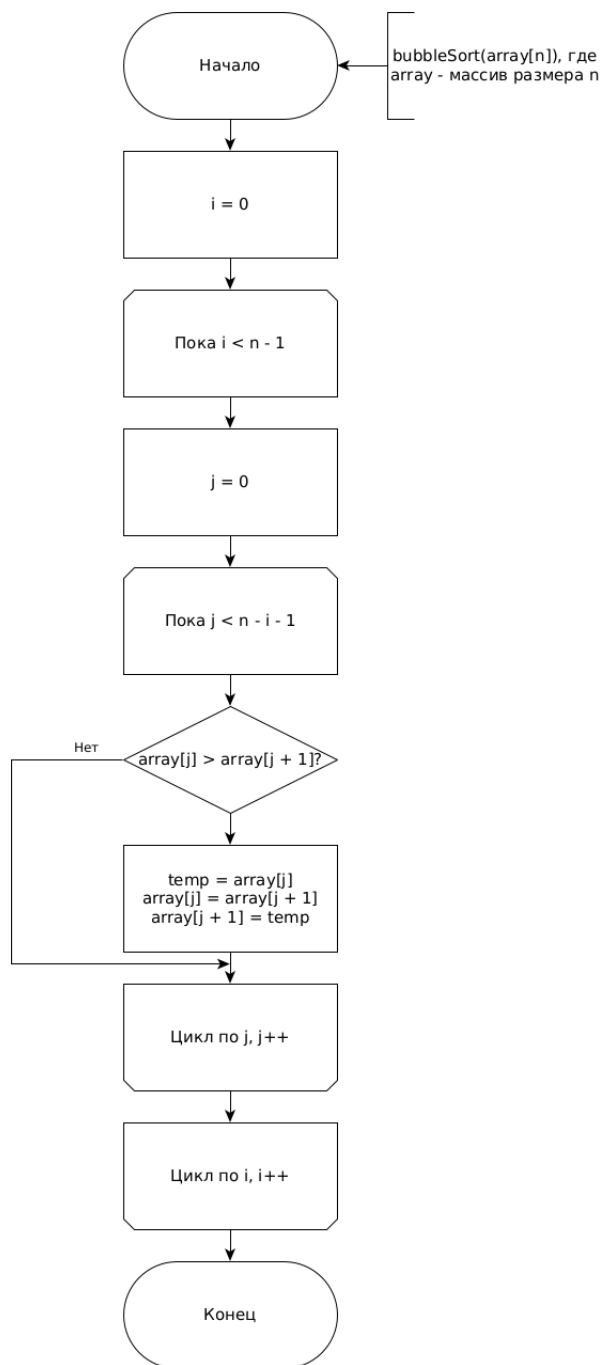


Рис. 2.1: Блок-схема алгоритма сортировки пузырьком.

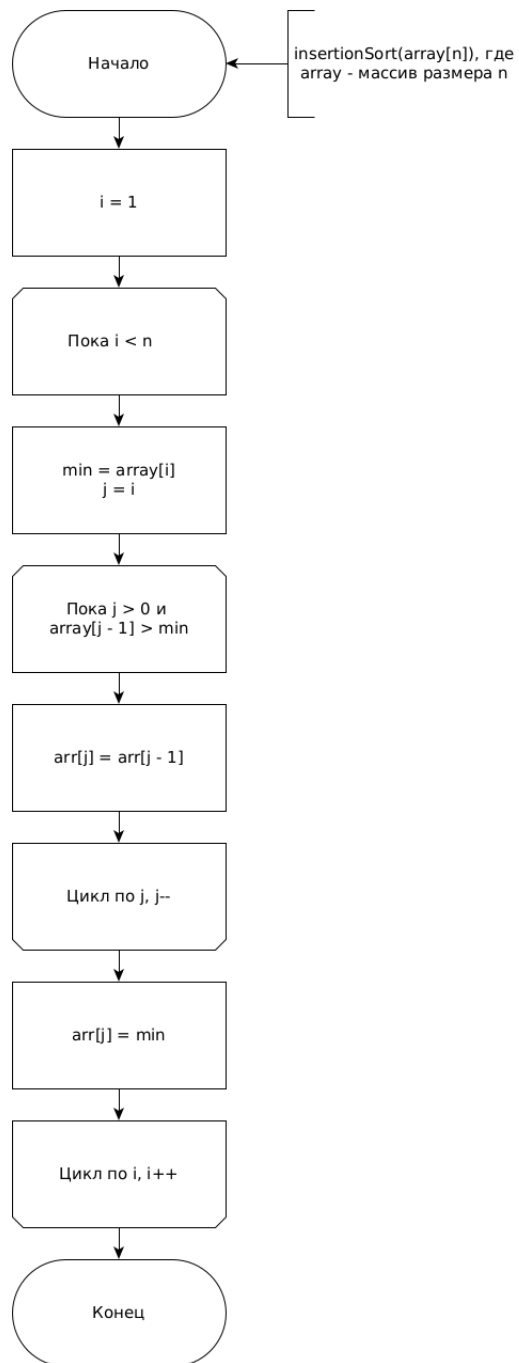


Рис. 2.2: Блок-схема алгоритма сортировки вставками.

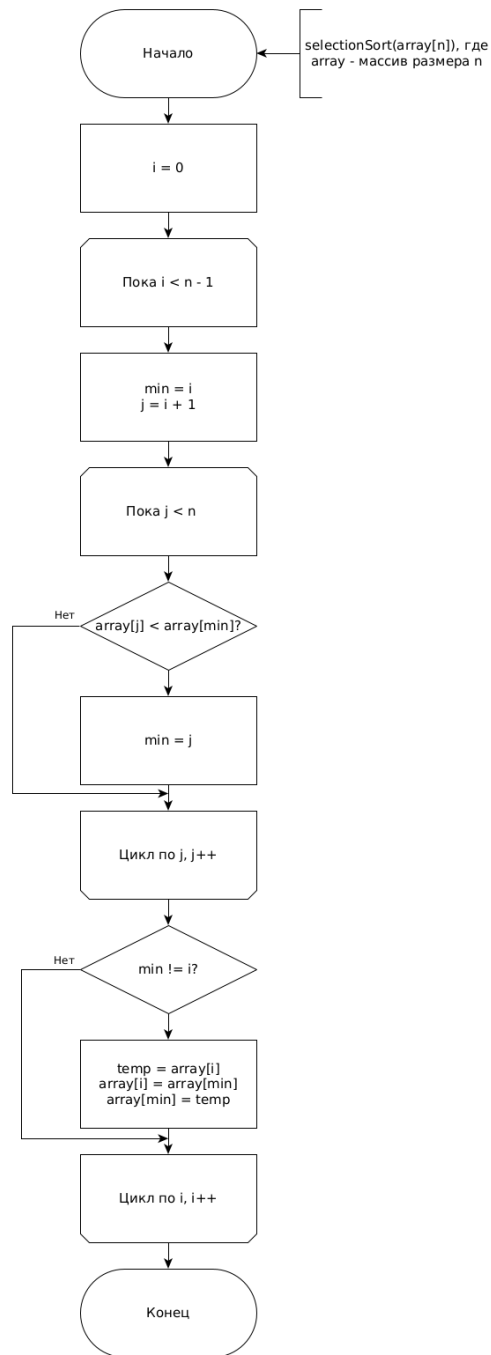


Рис. 2.3: Блок-схема алгоритма сортировки выбором.

2.4 Модель вычислений

ля последующего вычисления трудоемкости необходимо ввести модель вычислений:

1. операции из списка (2.1) имеют трудоемкость 1;

$$+, -, /, \%, ==, !=, <, >, <=, >=, [], ++, --, + =, - =, * =, \% = \quad (2.1)$$

2. трудоемкость оператора выбора **условие then A else B** рассчитывается, как (2.2);

$$f_{if} = f_{\text{условия}} + \begin{cases} f_A, & \text{если условие выполняется,} \\ f_B, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.2)$$

3. трудоемкость цикла рассчитывается, как (2.3);

$$f_{for} = f_{\text{инициализации}} + f_{\text{сравнения}} + N(f_{\text{тела}} + f_{\text{инкремента}} + f_{\text{сравнения}}) \quad (2.3)$$

4. трудоемкость вызова функции равна 0.

2.5 Трудоёмкость алгоритмов

2.5.1 Соглашение

Далее под некоторой величиной *size* будет подразумеваться длина переданного массива.

2.5.2 Алгоритм сортировки пузырьком

Трудоёмкость алгоритма сортировки пузырьком будет включать включать в себя:

- цикл по $i \in [0..size - 1]$;
- цикл по $j \in [0..size - 1 - i]$, включённый в цикл по i .

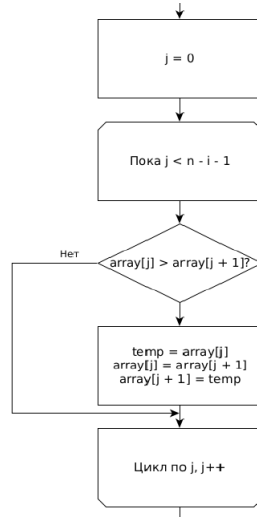


Рис. 2.4: Часть блок-схемы, определяющая f_j и f_{jbody} .

При этом для цикла по j из части блок-схемы, представленной на рисунке 2.4, будем иметь:

$$f_j = 1 + 3 + \frac{1 + (size - 1)}{2}(1 + 3 + f_{jbody}) \quad (2.4)$$

где f_{jbody} - это трудоёмкость тела цикла, которая определяется выражением:

$$f_{jbody} = 5 + \begin{cases} 0, & \text{лучший случай} \\ 9, & \text{худший случай} \end{cases} \quad (2.5)$$

Для цикла по i из части блок-схемы, представленной на рисунке 2.5, будем иметь:

$$f_i = 1 + 2 + (size - 1)f_j \quad (2.6)$$

Как итог, имеем в лучшем случае:

$$f = f_i = 3 + (size - 1)\left(4 + \frac{size}{2}(4 + 5)\right) \quad (2.7)$$

$$f = -1 + 4size + \frac{9}{2}size^2 - \frac{9}{2}size \approx \frac{9}{2}size^2 = O(size^2) \quad (2.8)$$

В худшем случае:

$$f = f_i = 3 + (size - 1)(4 + \frac{size}{2}(4 + 14)) \quad (2.9)$$

$$f = -1 + 4size + 9size^2 - 9size \approx 9size^2 = O(size^2) \quad (2.10)$$

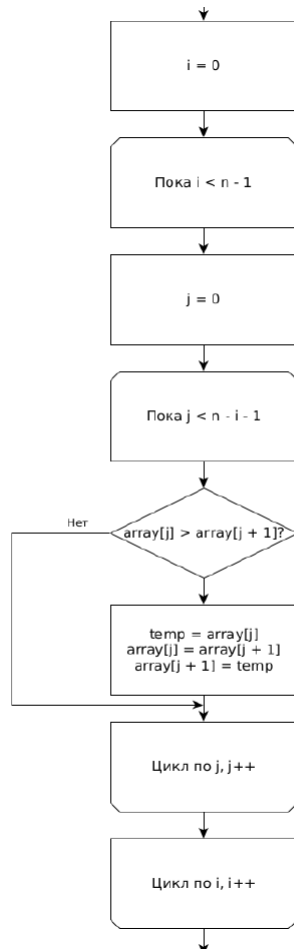


Рис. 2.5: Часть блок-схемы, определяющая f_i .

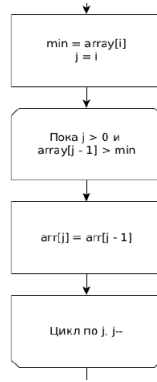


Рис. 2.6: Часть блок-схемы, определяющая f_j и f_{jbody} .

2.5.3 Алгоритм сортировки вставками

Трудоёмкость алгоритма сортировки вставками будет включать в себя:

- цикл по $i \in [1..size]$;
- цикл по $j \in [i..0]$, включённый в цикл по i .

При этом для цикла по j из части блок-схемы, представленной на рисунке 2.6, будем иметь:

$$f_j = 3 + 4 + \frac{size}{2} \begin{cases} 4, & \text{лучший случай} \\ 1 + 4 + f_{jbody}, & \text{худший случай} \end{cases} \quad (2.11)$$

где f_{jbody} - это трудоёмкость тела цикла, которая определяется выражением:

$$f_{jbody} = 4 \quad (2.12)$$

Для цикла по i из части блок-схемы, представленной на рисунке 2.7, будем иметь:

$$f_i = 1 + 1 + (size - 1)(1 + 1 + f_j) \quad (2.13)$$

Как итог, имеем в лучшем случае:

$$f = f_i = 2 + (size - 1)(9 + 2size) \quad (2.14)$$

$$f = 2size^2 + 7size - 7 \approx 2size^2 = O(size^2) \quad (2.15)$$

В худшем случае:

$$f = f_i = 3 + (size - 1)\left(4 + \frac{size}{2}(4 + 14)\right) \quad (2.16)$$

$$f = -1 + 4size + 9size^2 - 9size \approx 9size^2 = O(size^2) \quad (2.17)$$

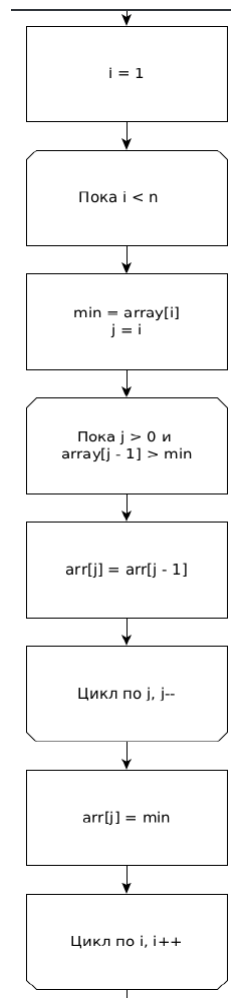


Рис. 2.7: Часть блок-схемы, определяющая f_i .

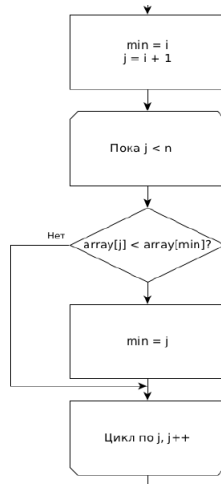


Рис. 2.8: Часть блок-схемы, определяющая f_j и f_{jbody} .

2.5.4 Алгоритм сортировки выбором

Трудоёмкость алгоритма сортировки выбором будет включать в себя:

- цикл по $i \in [0..size - 1]$;
- цикл по $j \in [i + 1..size]$, включённый в цикл по i .

При этом для цикла по j из части блок-схемы, представленной на рисунке 2.8, будем иметь:

$$f_j = 3 + 1 + \frac{size}{2}(1 + 1 + f_{jbody}) \quad (2.18)$$

где f_{jbody} - это трудоёмкость тела цикла, которая определяется выражением:

$$f_{jbody} = \begin{cases} 3, & \text{лучший случай} \\ 4, & \text{худший случай} \end{cases} \quad (2.19)$$

Для цикла по i из части блок-схемы, представленной на рисунке 2.9, будем иметь:

$$f_i = 1 + 1 + (size - 1)(1 + 1 + 2 + f_j) \quad (2.20)$$

Как итог, имеем в лучшем случае:

$$f = f_i = 2 + (size - 1)(4 + 4 + \frac{size}{2}(1 + 1 + 3)) \quad (2.21)$$

$$f = -6 + \frac{11}{2}size + \frac{5}{2}size^2 \approx \frac{5}{2}size^2 = O(size^2) \quad (2.22)$$

В худшем случае:

$$f = f_i = 2 + (size - 1)(4 + 4 + \frac{size}{2}(1 + 1 + 4)) \quad (2.23)$$

$$f = -6 + 5size + 3size^2 \approx 3size^2 = O(size^2) \quad (2.24)$$

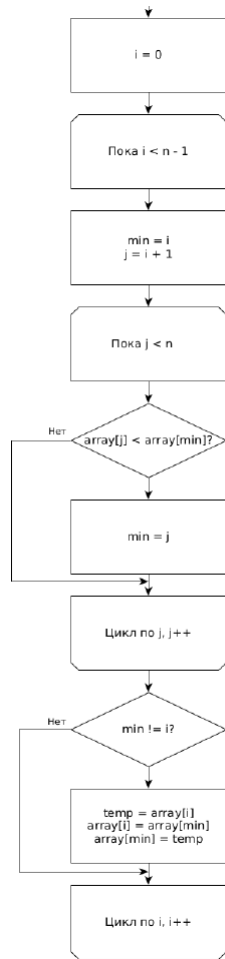


Рис. 2.9: Часть блок-схемы, определяющая f_i .

Вывод

На основе теоретических данных, полученных из аналитического раздела, были построены схемы рассматриваемых алгоритмов сортировок, оценены их трудоёмкости в лучшем и худшем случаях.

3 | Технологическая часть

3.1 Требования к программному обеспечению

Программное обеспечение принимает на вход массив целочисленных значений.

В результате выполнения программы должен быть получен упорядоченный по возрастанию массив.

3.2 Средства реализации программного обеспечения

При написании программного продукта был использован язык программирования Kotlin [2].

Данный выбор обусловлен следующими факторами:

- Возможность портирования алгоритмов для работы с Android;
- Возможность часто употреблять выражение "Ко-ко-котлин" или "Котик";
- Большое количество справочной литературы, связанной с ЯП Java.

Для тестирования производительности реализаций алгоритмов использовалась утилита `measureTimedValue`.

При написании программного продукта использовалась среда разработки IntelliJ IDEA.

Данный выбор обусловлен тем, что язык программирования Kotlin - это разработка компании JetBrains, поставляющей данную среду разработки.

3.3 Листинг кода

В листингах 3.1 - 3.3 предоставлены реализации рассматриваемых алгоритмов.

Листинг 3.1: Функция реализации алгоритма сортировки пузырьком

```
1 fun bubbleSort(arr: IntArray)
2 {
3     var i = 0;
4     while (i < arr.size - 1)
5     {
6         var j = 0;
7         while (j < arr.size - 1 - i)
8         {
9             if (arr[j] > arr[j + 1])
10                 arr[j + 1] = arr[j].also { arr[j] = arr[j + 1] }
11             j++
12         }
13         i++
14     }
15 }
```

Листинг 3.2: Функция реализации алгоритма сортировки вставками

```
1 fun insertionSort(arr: IntArray)
2 {
3     var i = 1;
4     while (i < arr.size)
5     {
6         var min = arr[i]
7         var j = i;
8         while (j > 0 && arr[j - 1] > min)
9         {
10             arr[j] = arr[j - 1]
11             j--
12         }
13         arr[j] = min
14         i++
15     }
16 }
```

Листинг 3.3: Функция реализации алгоритма сортировки выбором

```
1 fun selectionSort(arr: IntArray)
```



```

2 {
3     var i = 0;
4     while (i < arr.size - 1)
5     {
6         var j = i + 1
7         var min = i
8         while (j < arr.size)
9         {
10             if (arr[j] < arr[min])
11                 min = j
12             j++
13         }
14         if (min != i)
15             arr[i] = arr[min].also { arr[min] = arr[i] }
16         i++
17     }
18 }

```

3.4 Тестирование программного продукта

В таблице 3.1 приведены тесты для функций, реализующих алгоритм сортировки пузырьком, вставками и выбором. Тесты пройдены успешно.

Начальный массив	Ожидаемый результат	Полученный результат
[5, 4, 3, 2, 1]	[1, 2, 3, 4, 5]	[1, 2, 3, 4, 5]
[0, 0, 0]	[0, 0, 0]	[0, 0, 0]
[1, 2, 3]	[1, 2, 3]	[1, 2, 3]
[-8, 2, 3, -2]	[-8, -2, 2, 3]	[-8, -2, 2, 3]
[]	[]	[]

Таблица 3.1: Тестирование функций

Вывод

Спроектированные алгоритмы сортировок были реализованы и протестированы.

4 | Исследовательская часть

4.1 Пример работы программного обеспечения

Ниже на рисунках 4.1- 4.2 предоставлены примеры работы каждого из алгоритмов на введённых пользователем данных.

```
Number of elements:
10
Array elements: -666 777 -1337 5051 322 228 0 1234567890 505 314505
Ready in bubble sort:
-1337 -666 0 228 322 505 777 5051 314505 1234567890
Ready in selection sort:
-1337 -666 0 228 322 505 777 5051 314505 1234567890
Ready in insertion sort:
-1337 -666 0 228 322 505 777 5051 314505 1234567890

Process finished with exit code 0
```

Рис. 4.1: Пример работы ПО.

```
Number of elements:
20
Array elements: 20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
Ready in bubble sort:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Ready in selection sort:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Ready in insertion sort:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Process finished with exit code 0
```

Рис. 4.2: Пример работы ПО.

4.2 Технические характеристики

Технические характеристики ЭВМ, на котором выполнялись исследования:

- ОС: Manjaro Linux 20.1.1 Mikah
- Оперативная память: 16 Гб
- Процессор: Intel Core i7-10510U

При проведении замеров времени ноутбук был подключен к сети электропитания.

4.3 Время выполнения алгоритмов

Алгоритмы тестировались на данных, сгенерированных случайным образом один раз.

Результаты замеров времени приведены в таблицах 4.1 - 4.3. На рисунках 4.3 и ?? приведены графики зависимостей времени работы алгоритмов от количества элементов в случаях передачи упорядоченного, неупорядоченного и упорядоченного в обратном порядке массива. В таблице СП - Сортировка Пузырьком, СВст - Сортировка Вставками, СВыб - Сортировка выбором.

Таблица 4.1: Замеры времени для упорядоченных массивов

Размер массива	СП	СВст	СВыб
100	1818544	1630961	1826308
200	2182084	1647635	2144446
300	2836575	1640207	2530081
400	3666706	1640022	2924786
500	4561938	1645407	3594866
1000	12282615	1654109	8634889
1500	25296835	1662390	17374004
2000	43069012	1700609	29104145
3000	91881622	1810398	61997393
4000	165458964	1823571	105764286
5000	248940636	1766772	164210924

Вывод

При сравнении результатов замеров времени заметно, что скорость работы классического алгоритма однозначно отстаёт от скорости работы улучшенного Алгоритма Копперсмита-Винограда. Уже на 600 элементах улучшенный алгоритм Копперсмита-Винограда работает быстрее классического на $\approx 8\%$. При нечётном количестве строк и столбцов матриц улучшенный алгоритм способен быть медленнее $\approx 4\%$, при факте того, что классический алгоритм похожей динамики не имеет. Обычный алгоритм Копперсмита-Винограда начинает выигрывать по скорости классический только по достижению 300 строк и столбцов в матрице, при факте того, что в случае матрицы с нечётной размерностью он всё ещё будет проигрывать. При размерности 600 он будет выигрывать у классической реализации на $\approx 3\%$. В случае матриц размера меньше 400 на 400 его использование не будет целесообразным.

Таблица 4.2: Замеры времени для упорядоченных в обратном порядке массивов

Размер массива	СП	СВст	СВыб
100	1902381	1770645	1712426
200	2690147	2035881	1948340
300	3973067	2809635	2299634
400	6108805	3078558	2837866
500	8344909	3876786	3483199
1000	28119897	10741734	9179446
1500	59508253	21659401	17961391
2000	102249552	37367527	30242327
3000	218854972	78513340	65218978
4000	379629421	131840967	114500414
5000	592686305	197947307	173933001

Таблица 4.3: Замеры времени для неупорядоченных массивов

Размер массива	СП	СВст	СВыб
100	1592950	1498909	1460379
200	2200640	1562519	1680307
300	3280409	1808384	2038358
400	4728961	2184299	2558087
500	6573267	2566161	3166091
1000	21195842	5769483	8411547
1500	45146080	11233626	17161009
2000	79173129	18556919	28673064
3000	166840980	38942468	64444295
4000	280142359	66181509	102043152
5000	449032194	99391239	172713187

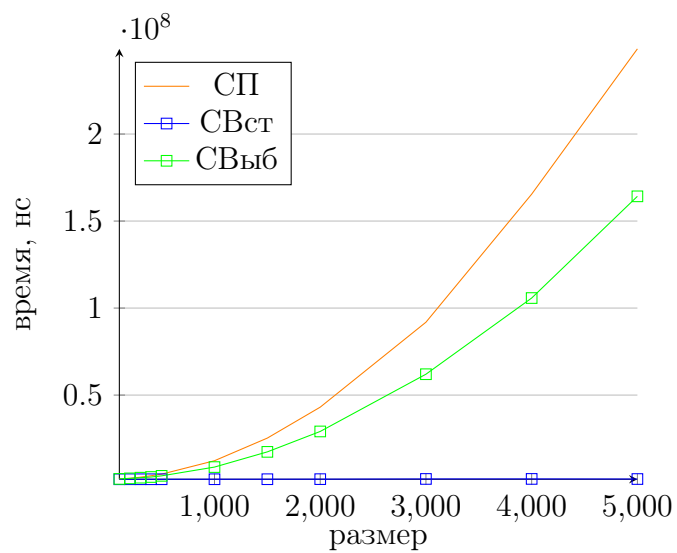


Рис. 4.3: Зависимость времени работы от размера отсортированных массивов

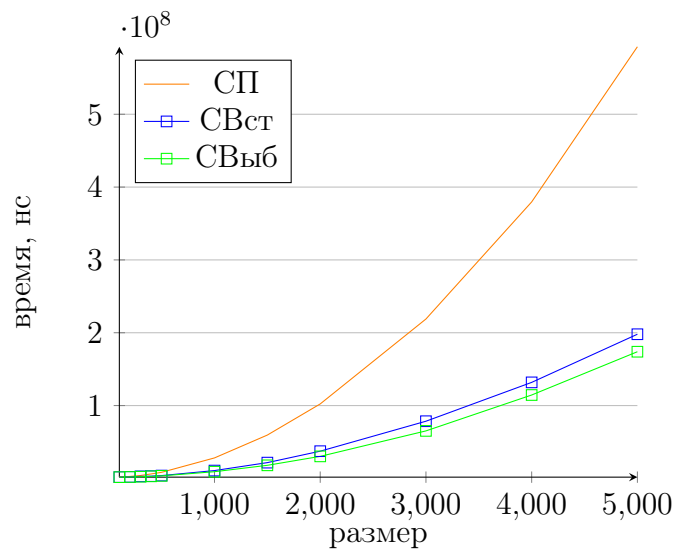


Рис. 4.4: Зависимость времени работы от размера отсортированных в обратном порядке массивов

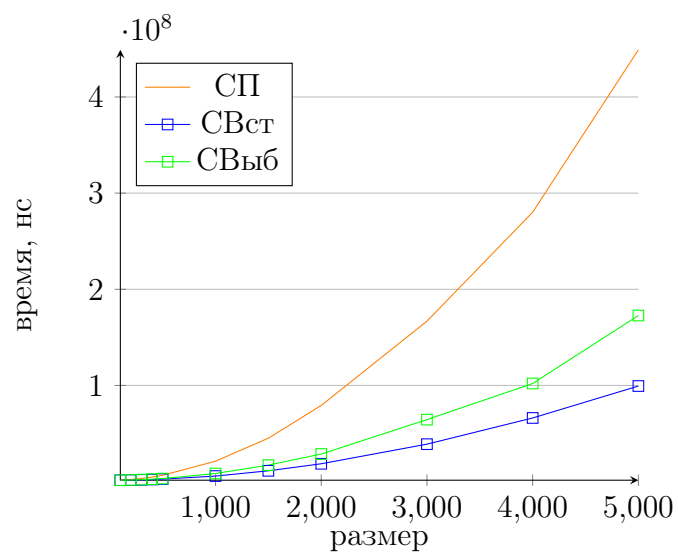


Рис. 4.5: Зависимость времени работы от размера массивов, заданных случайным образом

Заключение

В ходе выполнения лабораторной работы:

- были изучены алгоритмы умножения матриц: классический, Копперсмита-Винограда и улучшенный Копперсмита-Винограда;
- были реализованы алгоритмы умножения матриц: классический, Копперсмита-Винограда и улучшенный Копперсмита-Винограда;
- был произведён анализ трудоёмкости указанных алгоритмов на основе теоретических расчётов и выбранной модели вычислений;
- был выполнен сравнительный анализ производительности алгоритмов на основе полученных экспериментальных данных;
- был подготовлен отчёт по проделанной работе;
- были получены практические навыки реализации алгоритмов на ЯП Kotlin.

Исследования показали, что использование алгоритма Копперсмита-Винограда способно оправдать себя только в случае матриц, размерность которых не менее 400. При этом выигрыш будет составлять $\approx 0.2\%$ только в случае чётной размерности. Реализация улучшенного алгоритма Копперсмита-Винограда показывает результаты быстрее классического алгоритма уже при размерности матрицы 100. Чем больше элементов в матрице, тем заметнее разница во времени работы этих двух алгоритмов. При размерности матрицы 600 модифицированный алгоритм Копперсмита-Винограда показывает себя лучше классического алгоритма на $\approx 8\%$.

Литература

- [1] Кнут Дональд. Сортировка и поиск. Вильямс, 2000. Т. 3 из *Искусство программирования*. с. 834.
- [2] Kotlin language specification [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://kotlinlang.org/spec/introduction.html> (дата обращения 09.10.2020).