Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Содержание работы

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
   - вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{X}_n)$ и $S^2(\vec{X}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
   - вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{X}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;
   - вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;
2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объёма выборки из индивидуального варианта:
   - на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;
   - на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

1 Вариант 21, выборка

$\vec{x} = ($
-14.34, -16.97, -14.09, -14.74, -16.69, -13.85, -15.55, -14.62, -13.30, -15.52,
-14.75, -16.51, -17.15, -16.87, -15.06, -13.60, -14.48, -14.71, -14.17, -13.88,
-14.55, -15.37, -14.81, -16.05, -17.06, -15.86, -15.12, -15.98, -14.16, -15.81,
-15.06, -16.19, -16.22, -16.19, -14.87, -15.62, -15.86, -15.25, -16.34, -14.44,
-14.72, -15.17, -15.24, -14.44, -15.93, -14.87, -16.53, -15.76, -15.12, -12.91,
-16.06, -16.06, -14.89, -15.57, -13.59, -16.84, -13.88, -14.33, -15.45, -16.58,
-16.05, -14.34, -13.55, -16.78, -14.15, -14.28, -14.40, -13.98, -16.23, -15.35,
-14.77, -15.61, -15.59, -15.64, -14.76, -17.18, -15.13, -15.01, -14.21, -13.91,
-16.55, -15.44, -14.03, -16.44, -15.57, -15.07, -16.28, -16.30, -15.74, -14.03,
-14.85, -15.73, -15.81, -14.42, -14.14, -15.14, -15.49, -16.42, -14.22, -14.20,
-17.17, -15.82, -14.96, -14.75, -14.98, -13.64, -14.00, -17.29, -14.51, -16.18,
-15.70, -15.07, -14.28, -14.55, -13.85, -15.36, -15.74, -14.61, -16.32, -15.34
)

2 Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Дана случайная величина X, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Интервальной оценкой с коэффициентом доверия γ (γ-доверительной интервальной оценкой) параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma$$

Поскольку границы интервала являются случайными величинами, то для различных реализаций случайной выборки $\vec{X}$ статистики $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ могут принимать различные значения.

Доверительным интервалом с коэффициентом доверия γ (γ-доверительным интервалом) называют интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))$, отвечающий выборочным значениям статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$.

3 Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания:

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X}) t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$\overline{X}$ – точечная оценка математического ожидания;
$S^2(\vec{X})$ – точечная оценка дисперсии;
n – объем выборки;
γ – уровень доверия;
$t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}$ – квантили соответствующих уровней распределения Стьюдента с n - 1 степенями свободы.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для дисперсии:

$$\underline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}$$

$$\overline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}}$$

$S^2(\vec{X})$ – точечная оценка дисперсии;
n – объем выборки;
γ – уровень доверия;
$t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}$ – квантили соответствующих уровней распределения $\chi^2(n-1)$ с n - 1 степенями свободы.

4 Текст программы

Листинг 1: Реализация

```
function main()
    X=[-14.34,-16.97,-14.09,-14.74,-16.69,...
        -13.85,-15.55,-14.62,-13.30,-15.52,...
        -14.75,-16.51,-17.15,-16.87,-15.06,...
        -13.60,-14.48,-14.71,-14.17,-13.88,...
        -14.55,-15.37,-14.81,-16.05,-17.06,...
        -15.86,-15.12,-15.98,-14.16,-15.81,...
        -15.06,-16.19,-16.22,-16.19,-14.87,...
        -15.62,-15.86,-15.25,-16.34,-14.44,...
        -14.72,-15.17,-15.24,-14.44,-15.93,...
        -14.87,-16.53,-15.76,-15.12,-12.91,...
        -16.06,-16.06,-14.89,-15.57,-13.59,...
        -16.84,-13.88,-14.33,-15.45,-16.58,...
        -16.05,-14.34,-13.55,-16.78,-14.15,...
        -14.28,-14.40,-13.98,-16.23,-15.35,...
        -14.77,-15.61,-15.59,-15.64,-14.76,...
        -17.18,-15.13,-15.01,-14.21,-13.91,...
        -16.55,-15.44,-14.03,-16.44,-15.57,...
        -15.07,-16.28,-16.30,-15.74,-14.03,...
        -14.85,-15.73,-15.81,-14.42,-14.14,...
        -15.14,-15.49,-16.42,-14.22,-14.20,...
        -17.17,-15.82,-14.96,-14.75,-14.98,...
        -13.64,-14.00,-17.29,-14.51,-16.18,...
        -15.70,-15.07,-14.28,-14.55,-13.85,...
        -15.36,-15.74,-14.61,-16.32,-15.34];
```

```
    % Уровень доверия
    gamma = 0.9;
    % Объем выборки
    n = length(X);
    % Точечная оценка мат. ожидания
    mu = mean(X);
    % Точечная оценка дисперсии
    s2 = var(X);

    % Нижняя граница доверительного интервала для мат. ожидания
    muBot = findMuBot(n, mu, s2, gamma);
    % Верхняя граница доверительного интервала для мат. ожидания
    muTop = findMuTop(n, mu, s2, gamma);
    % Нижняя граница доверительного интервала для дисперсии
    s2Bot = findS2Bot(n, s2, gamma);
    % Верхняя граница доверительного интервала для дисперсии
    s2Top = findS2Top(n, s2, gamma);

    % Вывод полученных ранее значений
    fprintf('mu (Точечная оценка математического ожидания) = %.3f\n', mu);
    fprintf('S2 (Точечная оценка дисперсии) = %.3f\n', s2);
    fprintf('muBot (нижняя граница доверительного интервала для математического ожидания) = %.3f\n', muBot);
    fprintf('muTop (верхняя граница -//-) = %.3f\n', muTop);
    fprintf('s2Bot (нижняя граница доверительного интервала для дисперсии) = %.3f\n', s2Bot);
    fprintf('s2Top (верхняя граница -//-) = %.3f\n', s2Top);

    % Создание массивов точеных оценок
    muArray = zeros(1, n);
    s2Array = zeros(1, n);
    % Создание массивов границ доверительных интервалов
    muBotArray = zeros(1, n);
    muTopArray = zeros(1, n);
    s2BotArray = zeros(1, n);
    s2TopArray = zeros(1, n);

    for i = 1 : n
        mu = mean(X(1:i));
        s2 = var(X(1:i));
        % Точечная оценка математического ожидания
        muArray(i) = mu;
        % Точечная оценка дисперсии
        s2Array(i) = s2;
        % Нижняя граница доверительного интервала для математического ожидания
        muBotArray(i) = findMuBot(i, mu, s2, gamma);
        % Верхняя граница доверительного интервала для математического ожидания
        muTopArray(i) = findMuTop(i, mu, s2, gamma);
```

```matlab
        % Нижняя граница доверительного интервала для дисперсии
        s2BotArray(i) = findS2Bot(i, s2, gamma);
        % Верхняя граница доверительного интервала для дисперсии
        s2TopArray(i) = findS2Top(i, s2, gamma);
    end

    % Построение графиков
    plot(1 : n, [(zeros(1, n) + mu)', muArray', muBotArray', muTopArray']);
    xlabel('n');
    ylabel('y');
    legend('$\hat \mu(\vec x_N)$', '$\hat \mu(\vec x_n)$', ...
        '$\underline{\mu}(\vec x_n)$', '$\overline{\mu}(\vec x_n)$', ...
        'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 18);
    figure;
    plot(1 : n, [(zeros(1, n) + s2)', s2Array', s2BotArray', s2TopArray']);
    xlabel('n');
    ylabel('z');
    legend('$\hat S^2(\vec x_N)$', '$\hat S^2(\vec x_n)$', ...
        '$\underline{\sigma}^2(\vec x_n)$', '$\overline{\sigma}^2(\vec x_n)$', ...
        'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 18);
end

% Функция поиска нижней границы доверительного интервала для математического ожидания
function muBot = findMuBot(n, mu, s2, gamma)
    muBot = mu - sqrt(s2) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
end

% Функция поиска верхней границы доверительного интервала для математического ожидания
function muTop = findMuTop(n, mu, s2, gamma)
    muTop = mu + sqrt(s2) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
end

% Функция поиска нижней границы доверительного интервала для дисперсии
function s2Bot = findS2Bot(n, s2, gamma)
    s2Bot = ((n - 1) * s2) / chi2inv((1 + gamma) / 2, n - 1);
end

% Функция поиска верхней границы доверительного интервала для дисперсии
function s2Top = findS2Top(n, s2, gamma)
    s2Top = ((n - 1) * s2) / chi2inv((1 - gamma) / 2, n - 1);
end
```

5 Результаты расчетов и графики для выборки варианта 21

1. Точечные оценки $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно.

   $\hat{\mu}(\vec{x}_n) =$, $S^2(\vec{x}_n) =$

2. Вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания DX.

3. Вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}(\vec{x}_n)$, $\overline{\sigma}(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX.

```
mu (Точечная оценка математического ожидания) = -15.221
S2 (Точечная оценка дисперсии) = 0.968
muBot (нижняя граница доверительного интервала для математического ожидания) = -15.370
muTop (верхняя граница -//-) = -15.072
s2Bot (нижняя граница доверительного интервала для дисперсии) = 0.792
s2Top (верхняя граница -//-) = 1.215
```

Рис. 1: Поток вывода программы.

4. На координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n), y = \underline{\mu}(\vec{x}_n), y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

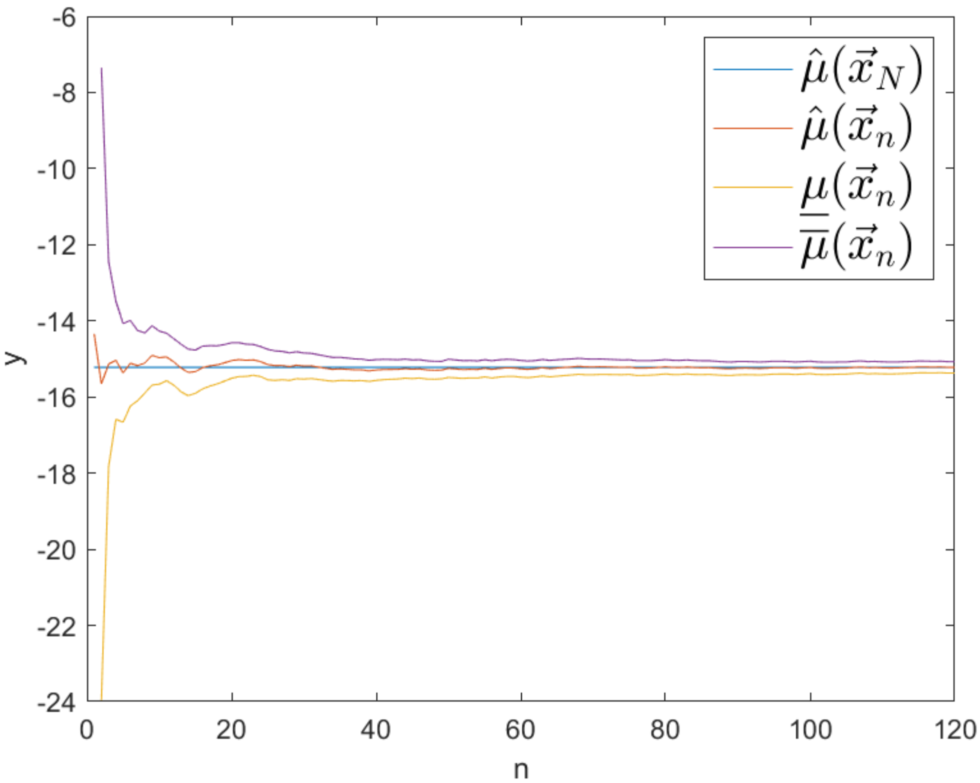

Рис. 2: Прямая $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$ и графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n), y = \underline{\mu}(\vec{x}_n), y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

5. На координатной плоскости Ozn построить прямую $z = \hat{S}^2(\vec{x}_N)$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n), z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n), z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

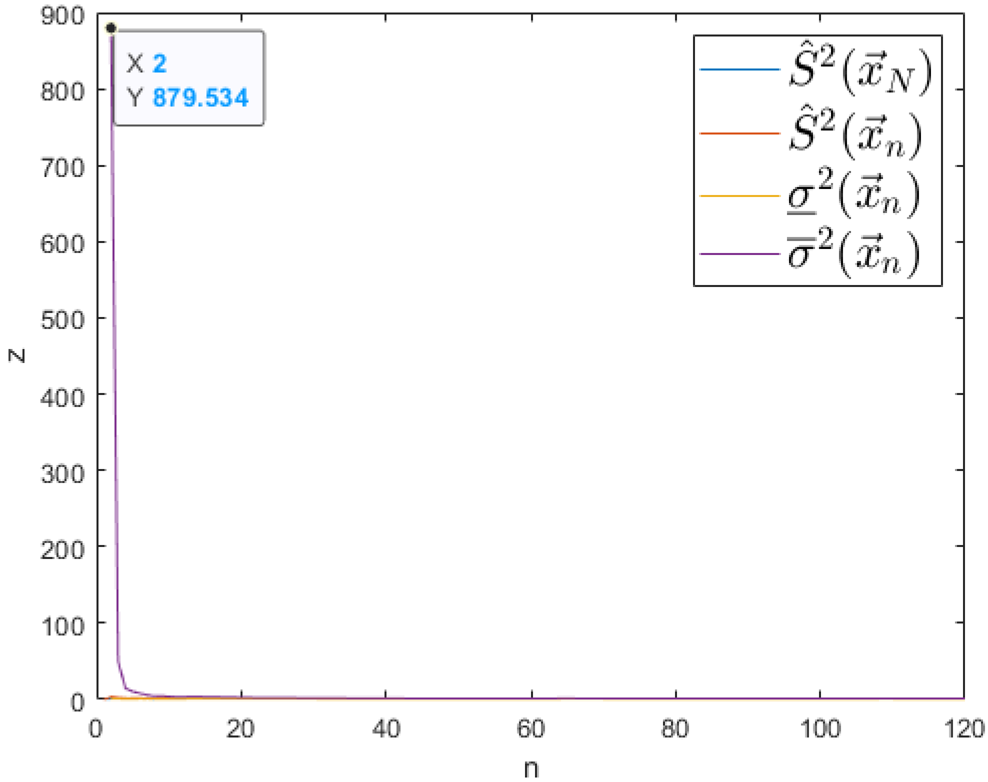

Рис. 3: Прямая $z = \hat{S}^2(\vec{x}_N)$ и графики функций $z = S^2(\vec{x}_n), z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n), z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

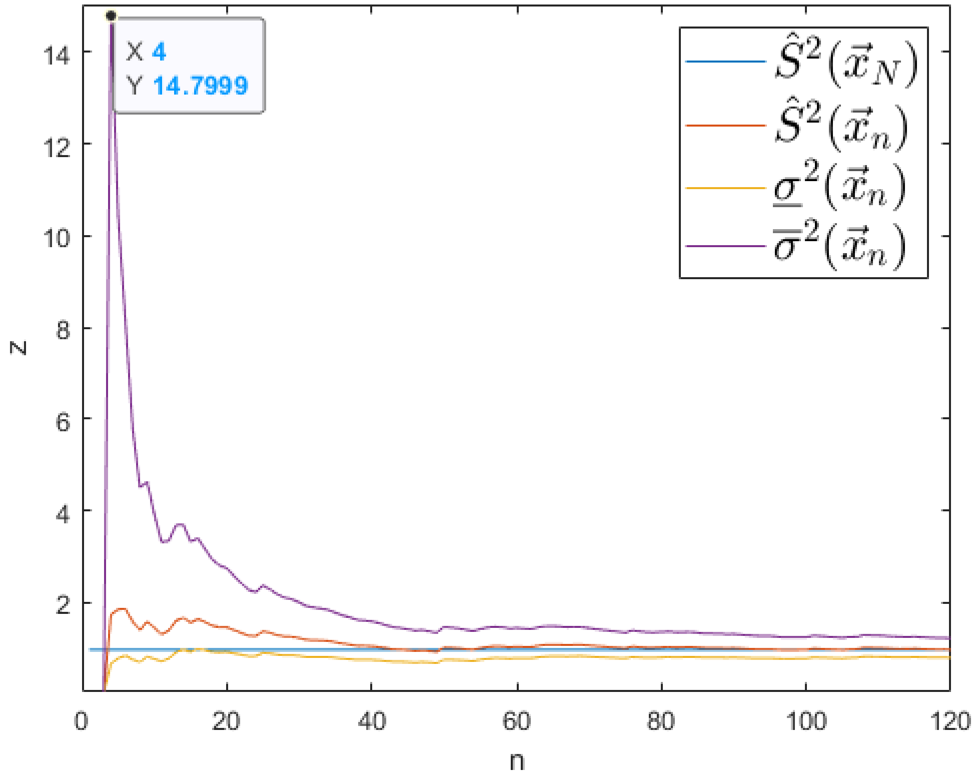

Рис. 4: Прямая $z = \hat{S}^2(\vec{x}_N)$ и графики функций $z = S^2(\vec{x}_n), z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n), z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

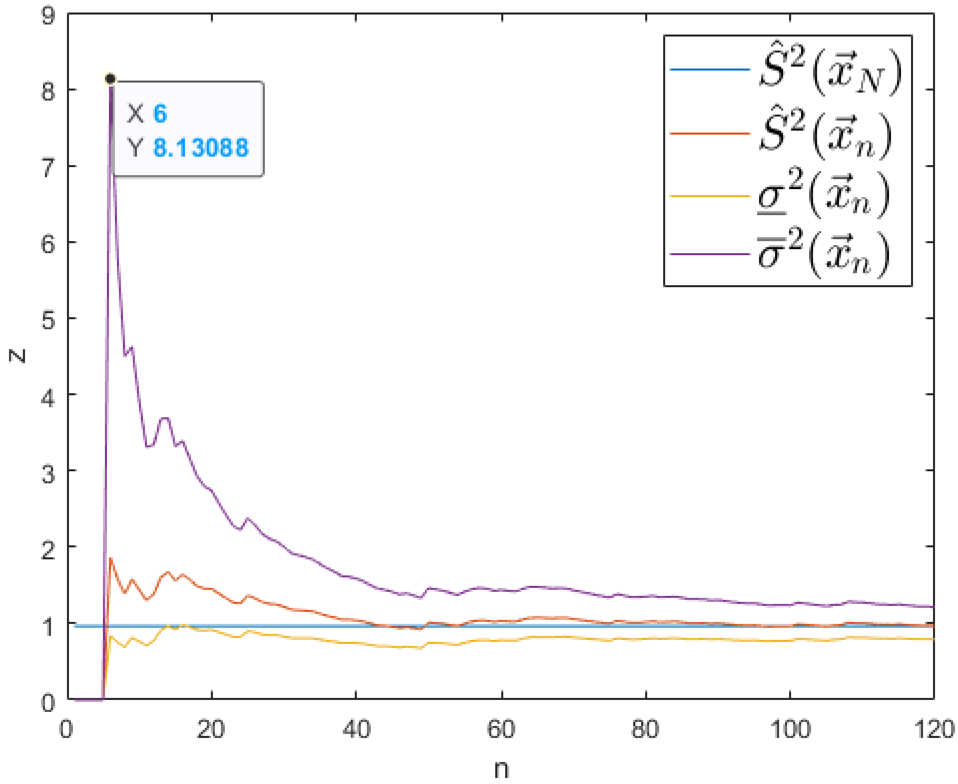

Рис. 5: Прямая $z = \hat{S}^2(\vec{x}_N)$ и графики функций $z = S^2(\vec{x}_n), z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n), z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.