Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Содержание работы

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
   - вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{X}_n)$ и $S^2(\vec{X}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
   - вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{X}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;
   - вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;
2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объёма выборки из индивидуального варианта:
   - на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;
   - на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

1 Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Дана случайная величина X, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Интервальной оценкой с коэффициентом доверия γ (γ-доверительной интервальной оценкой) параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma$$

Поскольку границы интервала являются случайными величинами, то для различных реализаций случайной выборки $\vec{X}$ статистики $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ могут принимать различные значения.

Доверительным интервалом с коэффициентом доверия γ (γ-доверительным интервалом) называют интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))$, отвечающий выборочным значениям статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$.

2 Формулы для вычисления границ γ- доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Формулы для вычисления границ γ- доверительного интервала для математического ожидания:

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$\overline{X}$ – точечная оценка математического ожидания
$S^2(\vec{X})$ – точечная оценка дисперсии
n – объем выборки
γ – уровень доверия
$t_{\frac{1+\gamma}{2}}$ – квантили соответствующих уровней распределения Стьюдента с n - 1
Формулы для вычисления границ γ- доверительного интервала для дисперсии:

$$\underline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}}$$

$$\overline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}$$

$S^2(\vec{X})$ – точечная оценка дисперсии
n – объем выборки
γ – уровень доверия
$h_{\frac{1+\gamma}{2}}$ – квантили соответствующих уровней распределения хи-квадрат с n - 1

3 Текст программы

Листинг 1: Функция жоппы

```
function main()
    X=[-5.05,-5.74,-6.39,-5.01,-4.94,-6.32,-4.73,-5.44,-4.79,-5.40,...
        -4.50,-3.43,-5.21,-5.22,-5.07,-5.51,-4.45,-5.24,-6.50,-4.99,...
        -5.42,-3.30,-5.06,-5.38,-6.48,-3.31,-5.56,-6.50,-5.22,-5.68,...
        -4.80,-6.67,-4.95,-5.32,-5.68,-6.32,-3.72,-4.59,-6.33,-5.03,...
        -4.49,-4.80,-6.04,-6.21,-3.60,-3.93,-5.89,-5.29,-7.41,-3.73,...
        -6.61,-4.34,-5.99,-5.24,-4.08,-4.68,-5.38,-6.38,-4.66,-3.67,...
        -4.61,-4.54,-4.51,-5.43,-6.47,-5.31,-4.30,-6.32,-5.82,-3.44,...
        -5.92,-4.76,-4.45,-3.52,-4.91,-5.65,-5.02,-5.00,-5.26,-4.98,...
        -6.16,-6.21,-4.42,-6.20,-5.84,-5.58,-5.34,-5.21,-5.78,-7.80,...
        -5.21,-4.79,-4.53,-4.78,-6.39,-7.04,-4.82,-5.53,-3.52,-6.24,...
        -3.58,-5.01,-5.79,-4.80,-6.04,-5.15,-7.03,-4.71,-4.38,-5.77,...
        -4.05,-5.76,-5.86,-6.45,-4.81,-5.68,-7.48,-3.97,-5.16,-3.48];

    % Уровень доверия
    gamma = 0.9;
    % Объем выборки
    n = length(X);
    % Точечная оценка матожидания
    mu = mean(X);
    % Точечная оценка дисперсии
    s2 = var(X);

    % Нижняя граница доверительного интервала для матожидания
    muLow = findMuLow(n, mu, s2, gamma);
    % Верхняя граница доверительного интервала для матожидания
    muHigh = findMuHigh(n, mu, s2, gamma);
    % Нижняя граница доверительного интервала для дисперсии
    s2Low = findS2Low(n, s2, gamma);
    % Верхняя граница доверительного интервала для дисперсии
    s2High = findS2High(n, s2, gamma);

    % Вывод полученных ранее значений
    fprintf('mu = %.3f\n', mu);
    fprintf('S2 = %.3f\n', s2);
    fprintf('muLow = %.3f\n', muLow);
    fprintf('muHigh = %.3f\n', muHigh);
    fprintf('s2Low = %.3f\n', s2Low);
    fprintf('s2High = %.3f\n', s2High);

    % Создание массивов точеных оценок
    muArray = zeros(1, n);
    s2Array = zeros(1, n);
    % Создание массивов границ доверительных интервалов
    muLowArray = zeros(1, n);
    muHighArray = zeros(1, n);
    s2LowArray = zeros(1, n);
```

```matlab
    s2HighArray = zeros(1, n);

    % Цикл от 1 до n
    for i = 1 : n
        mu = mean(X(1:i));
        s2 = var(X(1:i));
        % Точечная оценка матожидания
        muArray(i) = mu;
        % Точечная оценка дисперсии
        s2Array(i) = s2;
        % Нижняя граница доверительного интервала для матожидания
        muLowArray(i) = findMuLow(i, mu, s2, gamma);
        % Верхняя граница доверительного интервала для матожидания
        muHighArray(i) = findMuHigh(i, mu, s2, gamma);
        % Нижняя граница доверительного интервала для дисперсии
        s2LowArray(i) = findS2Low(i, s2, gamma);
        % Верхняя граница доверительного интервала для дисперсии
        s2HighArray(i) = findS2High(i, s2, gamma);
    end

    % Построение графиков
    plot(1 : n, [(zeros(1, n) + mu)', muArray', muLowArray', muHighArray']);
    xlabel('n');
    ylabel('y');
    legend('$\hat \mu(\vec x_N)$', '$\hat \mu(\vec x_n)$', ...
        '$\underline{\mu}(\vec x_n)$', '$\overline{\mu}(\vec x_n)$', ...
        'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 18);
    figure;
    plot(1 : n, [(zeros(1, n) + s2)', s2Array', s2LowArray', s2HighArray']);
    xlabel('n');
    ylabel('z');
    legend('$\hat S^2(\vec x_N)$', '$\hat S^2(\vec x_n)$', ...
        '$\underline{\sigma}^2(\vec x_n)$', '$\overline{\sigma}^2(\vec x_n)$', ...
        'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 18);
end

% Функция поиска нижней границы доверительного интервала для матожидания
function muLow = findMuLow(n, mu, s2, gamma)
    muLow = mu - sqrt(s2) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
end

% Функция поиска верхней границы доверительного интервала для матожидания
function muHigh = findMuHigh(n, mu, s2, gamma)
    muHigh = mu + sqrt(s2) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
end
```

```
% Функция поиска нижней границы доверительного интервала для дисперсии
function s2Low = findS2Low(n, s2, gamma)
    s2Low = ((n - 1) * s2) / chi2inv((1 + gamma) / 2, n - 1);
end

% Функция поиска верхней границы доверительного интервала для дисперсии
function s2High = findS2High(n, s2, gamma)
    s2High = ((n - 1) * s2) / chi2inv((1 - gamma) / 2, n - 1);
end
```

4 Результаты расчетов и графики для выборки из индивидуального варианта

1. Точечные оценки $\hat{\mu}(\vec{x}_N)$ и $S^2(\vec{x}_N)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно.

2. Вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x}_N)$, $\overline{\mu}(\vec{x}_N)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания DX.

3. Вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}(\vec{x}_N)$, $\overline{\sigma}(\vec{x}_N)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX.

4. На координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n), y = \underline{\mu}(\vec{x}_n), y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N

5. На координатной плоскости Ozn построить прямую $z = \hat{S}^2(\vec{x}_N)$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n), z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n), z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N