Цель работы: построение гистограммы и эмпирической функции распределения.

Содержание работы

1. Для выборки объёма n из генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ:
   - вычисление максимального значения $M_{\max}$ и минимального значения $M_{\min}$,
   - размаха R выборки,
   - вычисление оценок $\hat{\mu}$ и S^2 математического ожидания MX и дисперсии DX,
   - группировку значений выборки в $m = [\log_2 n] + 2$ интервала,
   - построение на одной координатной плоскости гистограммы и графика функции плотности распределения вероятностей нормальной случайной величины с математическим ожиданием $\hat{\mu}$ и дисперсией S^2,
   - построение на другой координатной плоскости графика эмпирической функции распределения и функции распределения нормальной случайной величины с математическим ожиданием $\hat{\mu}$ и дисперсией S^2.
2. Провести вычисления и построить графики для выборки из индивидуального варианта.

1 Вариант 21, выборка

$\vec{x} = ($
-14.34, -16.97, -14.09, -14.74, -16.69, -13.85, -15.55, -14.62, -13.30, -15.52,
-14.75, -16.51, -17.15, -16.87, -15.06, -13.60, -14.48, -14.71, -14.17, -13.88,
-14.55, -15.37, -14.81, -16.05, -17.06, -15.86, -15.12, -15.98, -14.16, -15.81,
-15.06, -16.19, -16.22, -16.19, -14.87, -15.62, -15.86, -15.25, -16.34, -14.44,
-14.72, -15.17, -15.24, -14.44, -15.93, -14.87, -16.53, -15.76, -15.12, -12.91,
-16.06, -16.06, -14.89, -15.57, -13.59, -16.84, -13.88, -14.33, -15.45, -16.58,
-16.05, -14.34, -13.55, -16.78, -14.15, -14.28, -14.40, -13.98, -16.23, -15.35,
-14.77, -15.61, -15.59, -15.64, -14.76, -17.18, -15.13, -15.01, -14.21, -13.91,
-16.55, -15.44, -14.03, -16.44, -15.57, -15.07, -16.28, -16.30, -15.74, -14.03,
-14.85, -15.73, -15.81, -14.42, -14.14, -15.14, -15.49, -16.42, -14.22, -14.20,
-17.17, -15.82, -14.96, -14.75, -14.98, -13.64, -14.00, -17.29, -14.51, -16.18,
-15.70, -15.07, -14.28, -14.55, -13.85, -15.36, -15.74, -14.61, -16.32, -15.34
$)$

2 Формулы для вычисления величин $M_{max}, M_{min}, R, \hat{\mu}, S^2$

Пусть $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ - выборка из генеральной совокупности X.

1. **Максимальное значение выборки** $M_{max} = max(x_1, .., x_n)$
2. **Минимальное значение выборки** $M_{min} = min(x_1, .., x_n)$
3. **Размах выборки** $R = M_{max} - M_{min}$
4. **Выборочное среднее (математическое ожидание)** $\hat{\mu}(\vec{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
5. **Состоятельная оценка дисперсии** $S^2(\vec{x}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$
   где $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

3 Определение эмпирической плотности и гистограммы

Эмпирической плотностью (отвечающей выборке $\vec{x}$) называют функцию

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{n_i}{n\Delta}, x \in J_i, i = \overline{1; p} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

где J_i – полуинтервал статистического ряда, n_i – количество элементов выборки, входящих в полуинтервал, n – количество элементов выборки.

Пусть $\vec{x}$ – выборка из генеральной совокупности X. Если объем n этой выборки велик, то значения x_i группируют не только в статистический ряд, но и в интервальный статистический ряд. Для этого отрезок $J = [x_{(1)}, x_{(n)}]$ (где $x_{(1)} = min(x_1, .., x_n)$, $x_{(n)} = max(x_1, .., x_n)$) делят на m равновеликих частей:

$$J_i = [a_i, a_{i+1}), i = \overline{1; m-1}$$

$$J_m = [a_m, a_{m+1}]$$

$$a_i = x_{(1)} + (i-1) \cdot \Delta, i = \overline{1; m+1}$$

$$\Delta = \frac{|J|}{m} = \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{m}$$

Интервальным статистическим рядом называют таблицу

J_1	...	J_i	...	J_m
n_1	...	n_i	...	n_m

Здесь n_i – количество элементов выборки $\vec{x}$, которые $\in J_i$

Требуемый интервал $m = [\log_2 n] + 2$

Гистограмма – это график эмпирической плотности.

4 Определение эмпирической функции распределения

Пусть $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ – выборка из генеральной совокупности X. Обозначим $n(x, \vec{x})$ – число элементов вектора $\vec{x}$, которые имеют значения меньше x.

Эмпирической функцией распределения называют функцию $F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенную условием $F_n(x) = \frac{n(x, \vec{x})}{n}$.

5 Листинг

Листинг 1: Реализация

```
function main()
    X=[-14.34,-16.97,-14.09,-14.74,-16.69,...
        -13.85,-15.55,-14.62,-13.30,-15.52,...
        -14.75,-16.51,-17.15,-16.87,-15.06,...
        -13.60,-14.48,-14.71,-14.17,-13.88,...
        -14.55,-15.37,-14.81,-16.05,-17.06,...
        -15.86,-15.12,-15.98,-14.16,-15.81,...
        -15.06,-16.19,-16.22,-16.19,-14.87,...
        -15.62,-15.86,-15.25,-16.34,-14.44,...
        -14.72,-15.17,-15.24,-14.44,-15.93,...
        -14.87,-16.53,-15.76,-15.12,-12.91,...
        -16.06,-16.06,-14.89,-15.57,-13.59,...
        -16.84,-13.88,-14.33,-15.45,-16.58,...
```

```
        -16.05,-14.34,-13.55,-16.78,-14.15,...
        -14.28,-14.40,-13.98,-16.23,-15.35,...
        -14.77,-15.61,-15.59,-15.64,-14.76,...
        -17.18,-15.13,-15.01,-14.21,-13.91,...
        -16.55,-15.44,-14.03,-16.44,-15.57,...
        -15.07,-16.28,-16.30,-15.74,-14.03,...
        -14.85,-15.73,-15.81,-14.42,-14.14,...
        -15.14,-15.49,-16.42,-14.22,-14.20,...
        -17.17,-15.82,-14.96,-14.75,-14.98,...
        -13.64,-14.00,-17.29,-14.51,-16.18,...
        -15.70,-15.07,-14.28,-14.55,-13.85,...
        -15.36,-15.74,-14.61,-16.32,-15.34];

    % 1)
    % а) Максимальное и минимальное значения
    Mmax = max(X);
    Mmin = min(X);
    fprintf("\nа) Mmax (максимальное значение) = %f; Mmin (минимальное значенение) = %f", Mmax, Mmin);

    % б) Размах
    R = Mmax - Mmin;
    fprintf("\nб) R (размах) = %f", R);

    % в) Оценки
    mu = sum(X) / length(X);
    s2 = sum((X - mean(X)).^2) / (length(X) - 1);
    fprintf("\nв)mu (оценка математического ожидания) = %f; s^2 (оценка дисперсии) = %f", mu, s2);

    % г) Группировка значений выборки
    % Нахождение количества интервалов
    m = floor(log2(length(X))) + 2;
    fprintf("\nг)Группировка значений выборки в m = [log2 n] + 2 интервала: m = %f\n", m);

    % Разбиение выборки на интервалы от min до max, с помощью BinLimits
    % объединяем только те значения, которые находятся в интервале от мин до макс
    [counts, edges] = histcounts(X, m, 'BinLimits', [min(X), max(X)]);

    for i = 1: length(counts)
        fprintf("[%f : %f] - %d\n", edges(i), edges(i + 1), counts(i));
    end

    % д) Построение гистограмы
    hist = histogram();
    hist.BinEdges = edges;
    hist.BinCounts = counts / length(X) / ((max(X) - min(X)) / m);

```

```
    hold on; % Продолжаем работать с той же системой

    % График функции плотности рапределения вероятностей нормальной случайно величины
    delta = R/m;
    sigma = sqrt(s2);
    Xn = min(X):delta/20:max(X);
    Y = normpdf(Xn, mu, sigma);
    plot(Xn, Y, 'blue');

    % e) График распределения сормальной случайной величины
    figure;
    [yy, xx] = ecdf(X);
    stairs(xx, yy);

    hold on;

    % График эмпирической функции распределения нормальной случайной величины
    delta = R/m;
    Xn = min(X):delta/20:max(X);
    Y = 1/2 * (1 + erf((Xn - mu) / sqrt(2*s2)));
    plot(Xn, Y, 'black');

end
```

6 Результаты расчетов для выборки варианта 21

1. Максимальное значение $M_{max} = -12.91$,
2. Минимальное значение выборки $M_{min} = -17.29$,
3. Размах выборки $R = 4.38$,
4. Оценки: $\hat{\mu} = -15.220917, S^2 = 0.968029$,
5. Группировка значений выборки в $m = [log_2 n] + 2 = 8$ интервала предоставлена на рисунке 1.

```
а) Mmax (максимальное значение) = -12.910000; Mmin (минимальное значенение) = -17.290000
б) R (размах) = 4.380000
в)mu (оценка математического ожидания) = -15.220917; s^2 (оценка дисперсии) = 0.968029
г)Группировка значений выборки в m = [log2 n] + 2 интервала: m = 8.000000
[-17.290000 : -16.742500] - 9
[-16.742500 : -16.195000] - 13
[-16.195000 : -15.647500] - 19
[-15.647500 : -15.100000] - 22
[-15.100000 : -14.552500] - 21
[-14.552500 : -14.005000] - 23
[-14.005000 : -13.457500] - 11
[-13.457500 : -12.910000] - 2
```

Рис. 1: Поток вывода программы.

6. Гистограмма и график функции плотности распределения вероятностей нормальной случайной величины с математическим ожиданием $\hat{\mu}$ и дисперсией S^2 2.

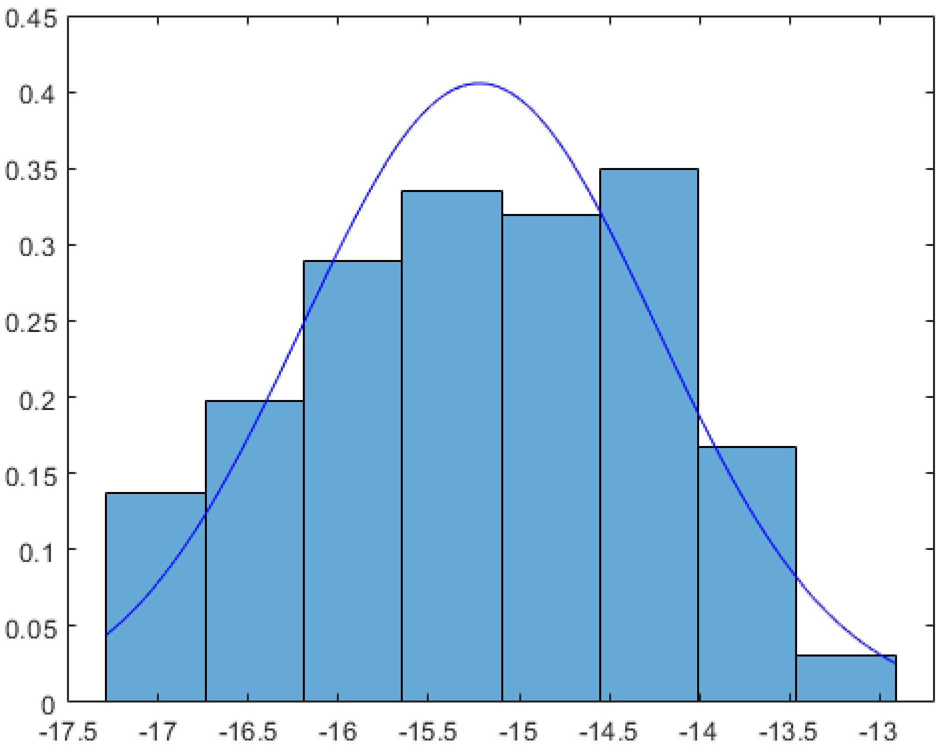

Рис. 2: Гистограмма и график функции плотности распределения вероятностей нормальной случайной величины с математическим ожиданием $\hat{\mu}$ и дисперсией S^2.

7. График эмпирической функции распределения и функции распределения нормальной случайной величины с математическим ожиданием $\hat{\mu}$ и дисперсией S^2 3.

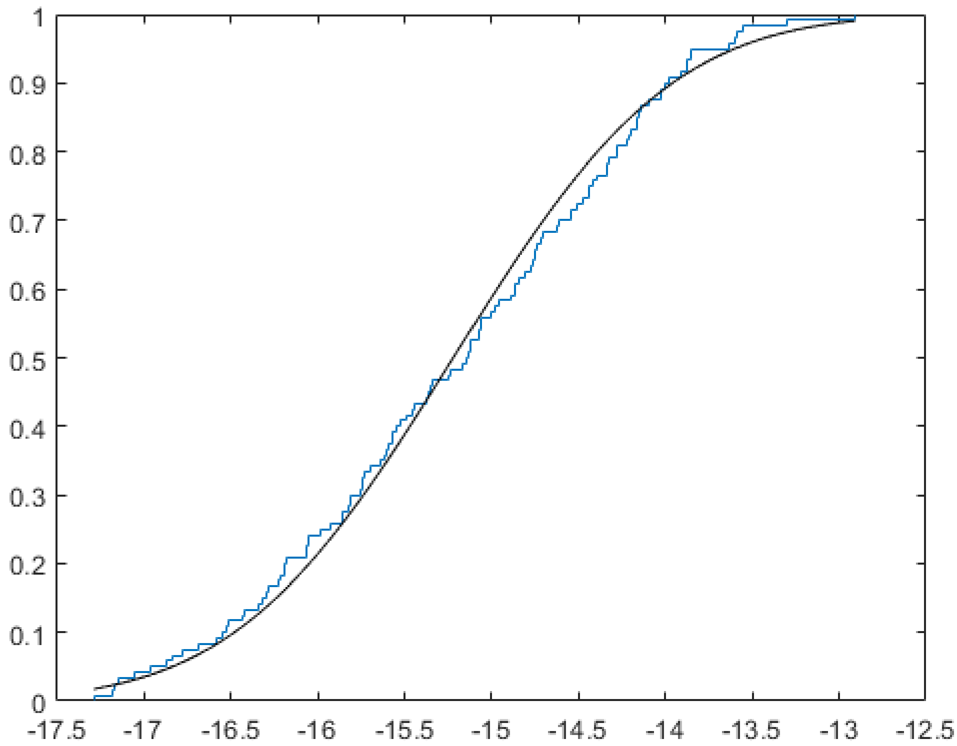

Рис. 3: График эмпирической функции распределения и функции распределения нормальной случайной величины с математическим ожиданием $\hat{\mu}$ и дисперсией S^2.