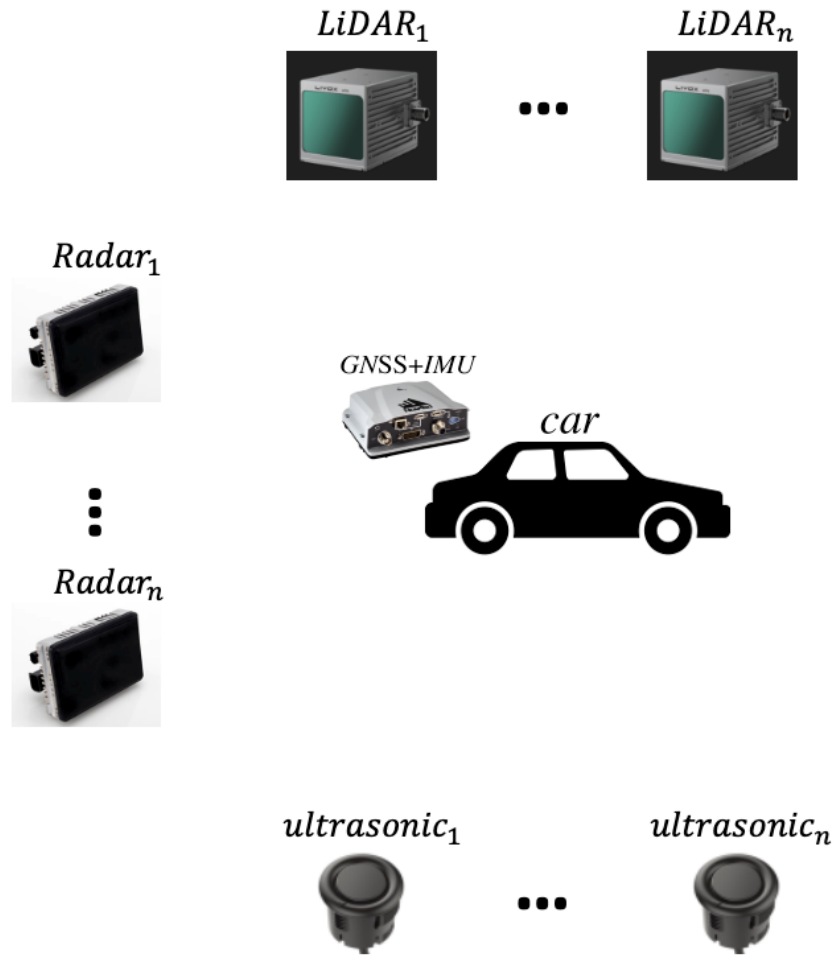
多传感器融合感知

第2章 如何标定多传感器系统?

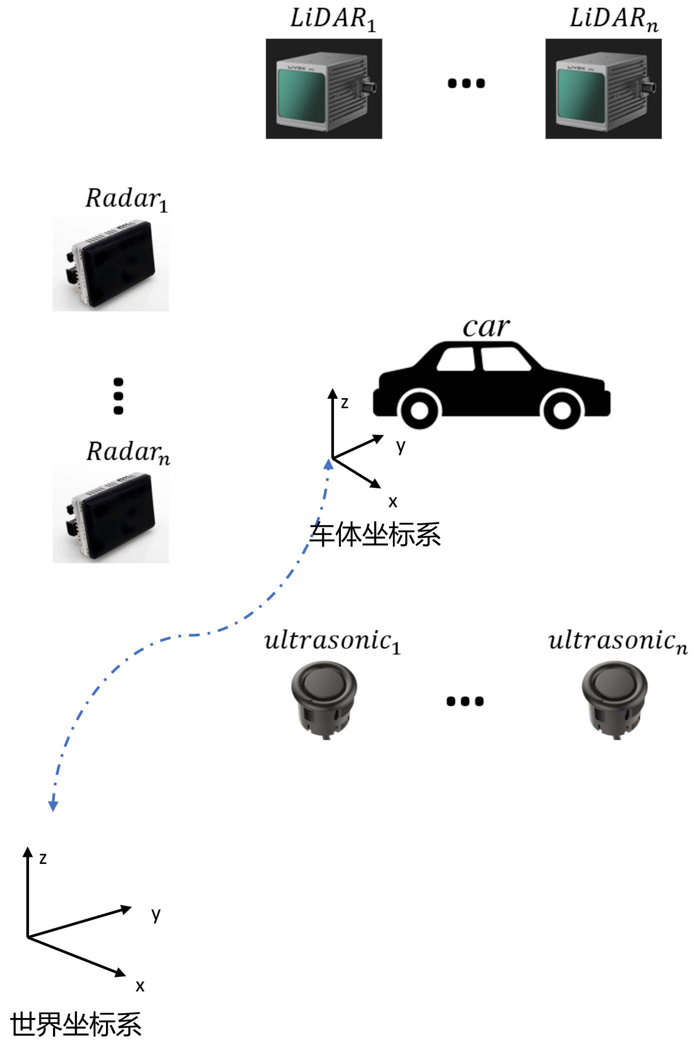
本章内容

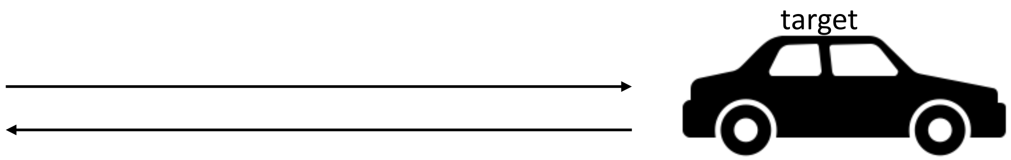
1. 关于标定：传感器内参及外参的介绍
2. 非线性优化简介
3. Camera内参标定
4. 多传感器系统外参标定
5. 外参的在线动态修正

如何从多个传感器整合为一套传感器?



如何从多个传感器整合为一套传感器？——标定

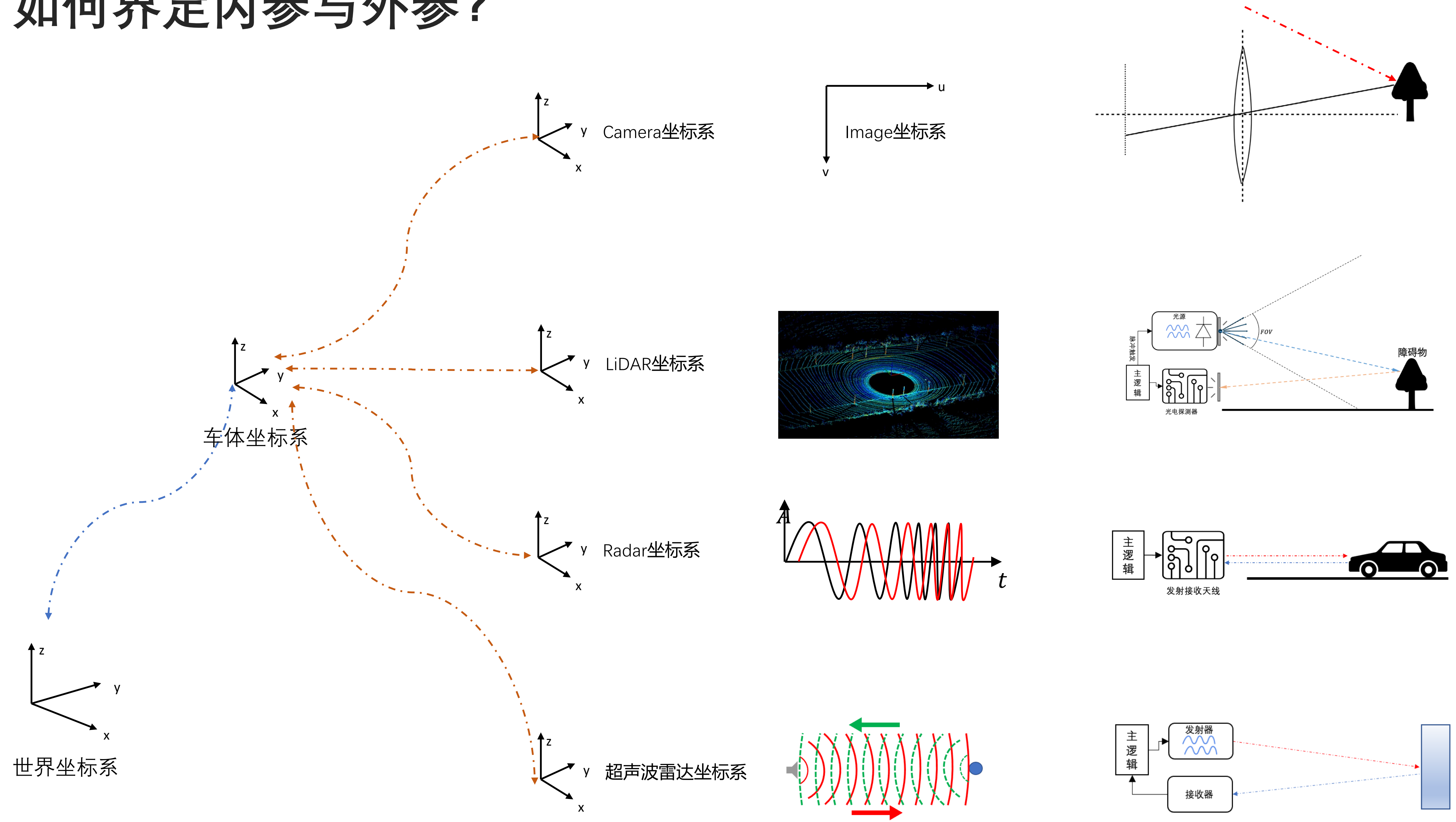




如何确定sensor A看到的车和sensor B看到的车是同一辆车？

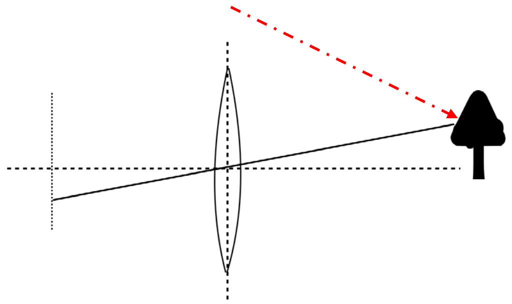
将所有传感器的成像结果统一到同一坐标系下

如何界定内参与外参?



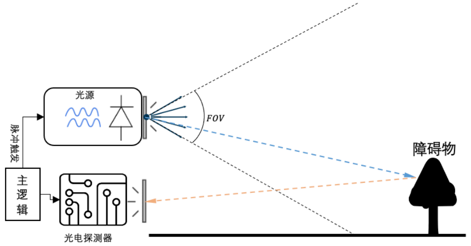
Camera坐标系
Image坐标系
u
v
LiDAR坐标系
Radar坐标系
超声波雷达坐标系
车体坐标系
世界坐标系
z
y
x
A
t
光源
FOV
障碍物
主逻辑
光电探测器
发射接收天线
发射器
接收器

研发中，为什么只听说过相机内参?



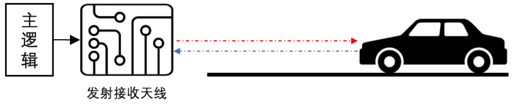
- 棱镜安装偏移
- 焦距
- 相机坐标系与图像坐标系之间转换关系
- …

- 可通过算法补偿
- 因工艺问题，需要重标



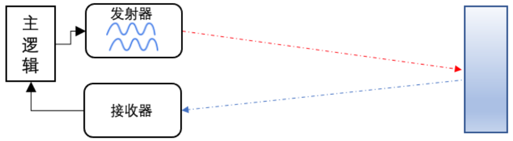
- 激光头的安装位置和角度
- 强度值一致性要求
- …

- 需要专业设备
- 出厂已标好



- 发射天线安装位置
- 接收天线距离
- …

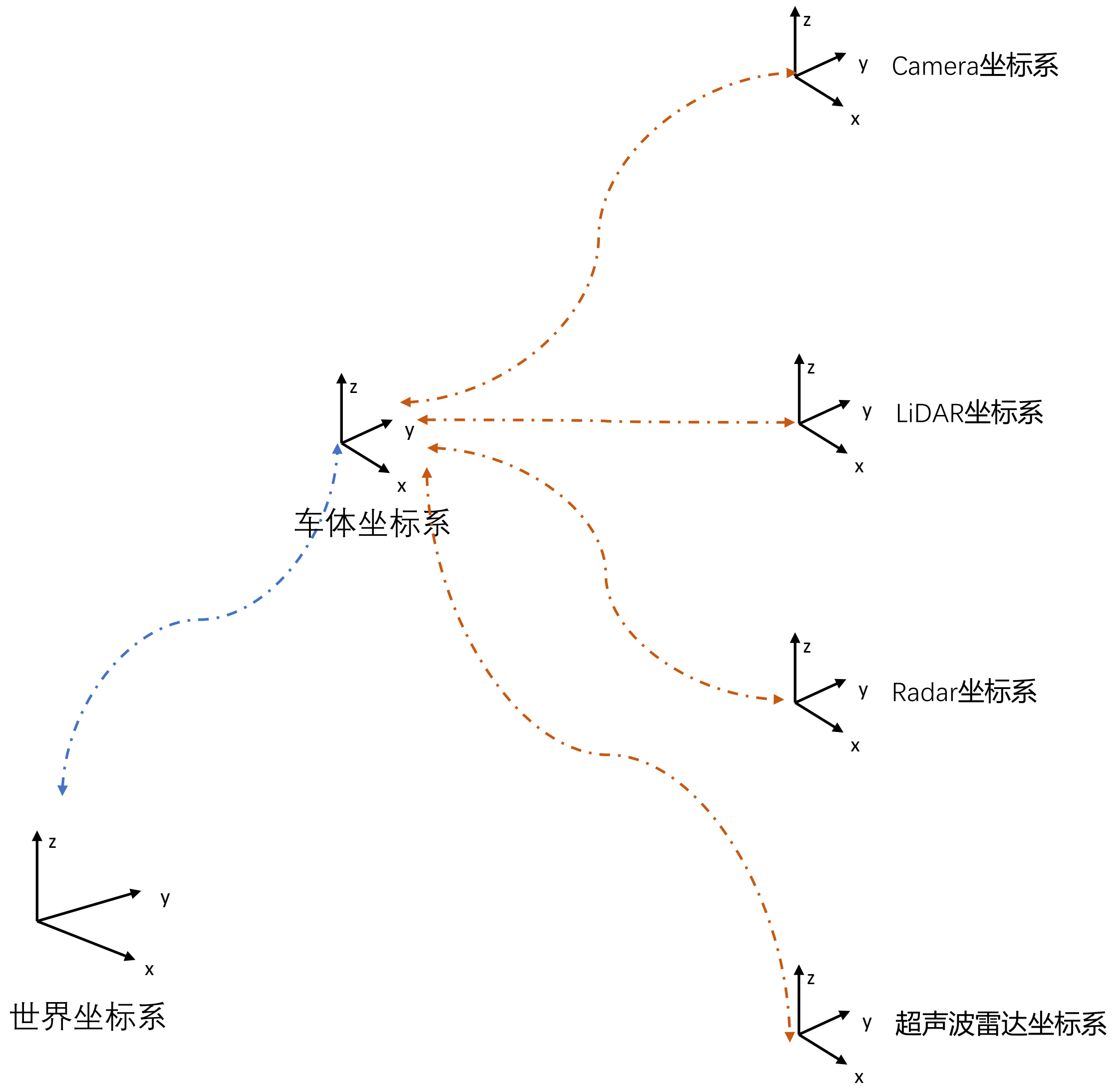
- 需要专业设备
- 出厂已标好



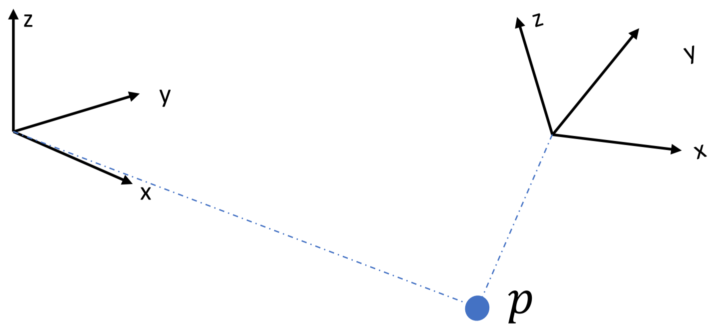
- 压电陶瓷输入的电流电压值
- 安装高度及感知区域扇面尺寸
- …

- 需要专业设备
- 出厂已标好

关于外参

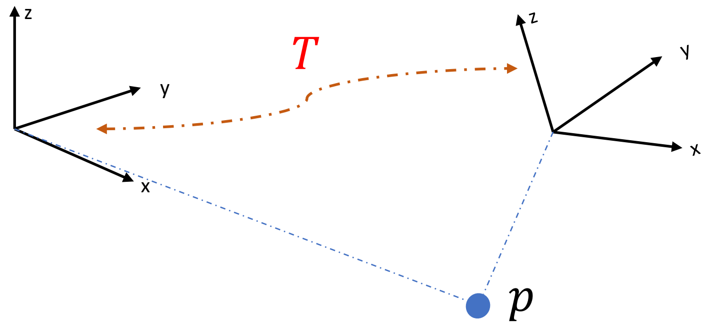


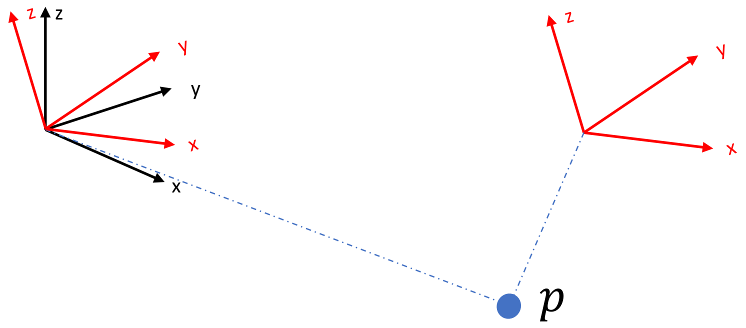
z
y
x
Camera坐标系
z
y
x
LiDAR坐标系
z
y
x
车体坐标系
z
y
x
Radar坐标系
z
y
x
世界坐标系
z
y
x
超声波雷达坐标系



z
y
x
z
y
x
p

外参的表达形式





$$[\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = [\boldsymbol{e}_1' \quad \boldsymbol{e}_2' \quad \boldsymbol{e}_3']\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1^T\\\boldsymbol{e}_2^T\\\boldsymbol{e}_3^T\end{bmatrix}[\boldsymbol{e}_1' \quad \boldsymbol{e}_2' \quad \boldsymbol{e}_3']\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}$$

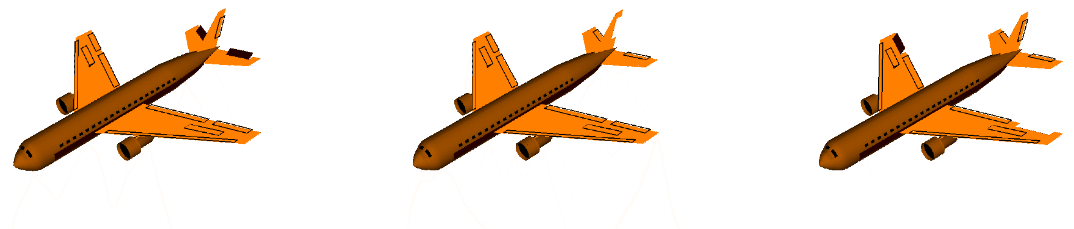
$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \boldsymbol{R}\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}$$

其中，$\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{3x3}, \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{I}, \det(\boldsymbol{R}) = 1$

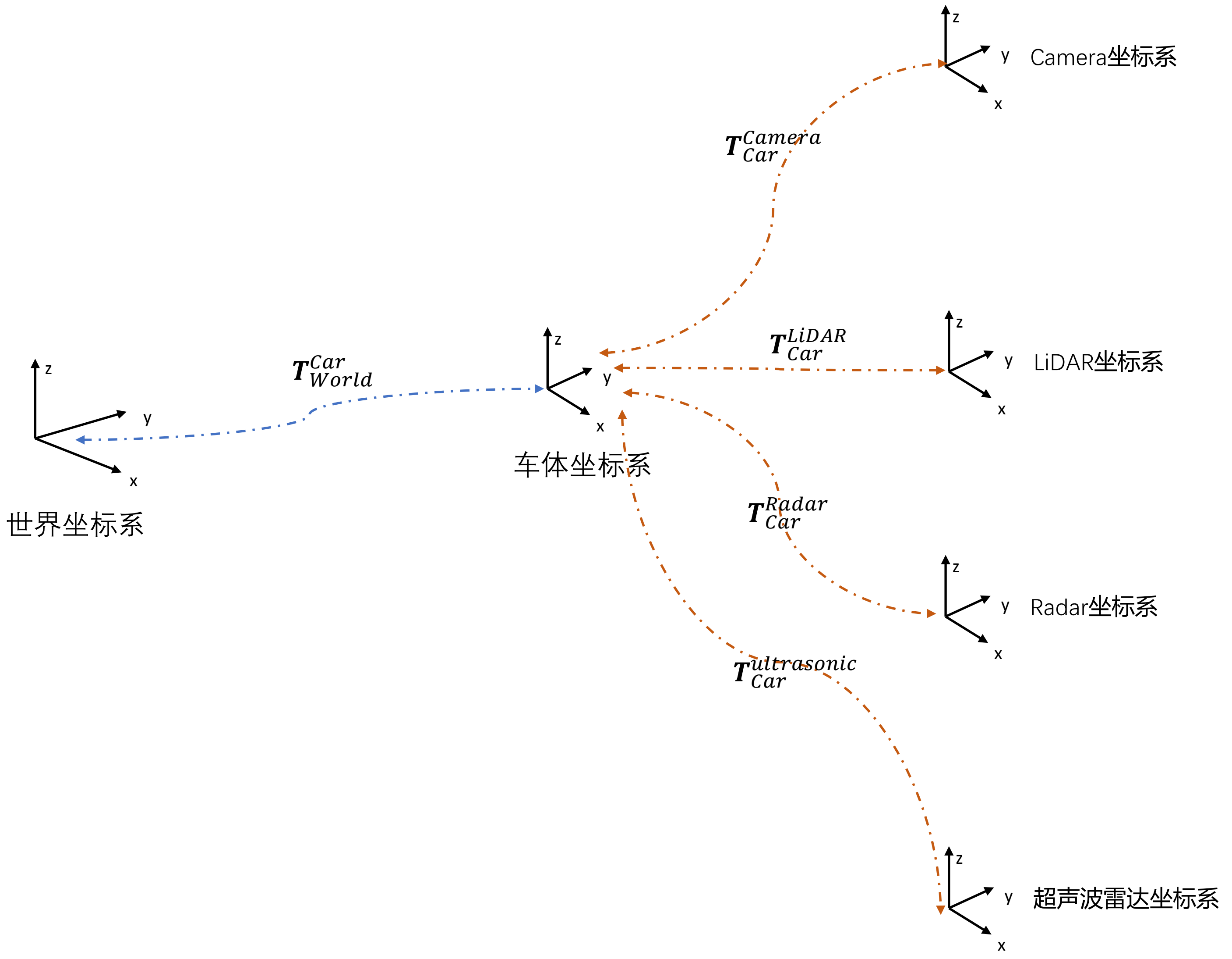
$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \boldsymbol{R}\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix} + \boldsymbol{t}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{t}\\\boldsymbol{0}^T & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\\1\end{bmatrix} = \boldsymbol{T}\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\\1\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{R}$通常用欧拉角$pitch$（俯仰角），yaw（偏航角），$roll$（横滚角）表示。



如何打通所有传感器坐标系到车体坐标系的外参?



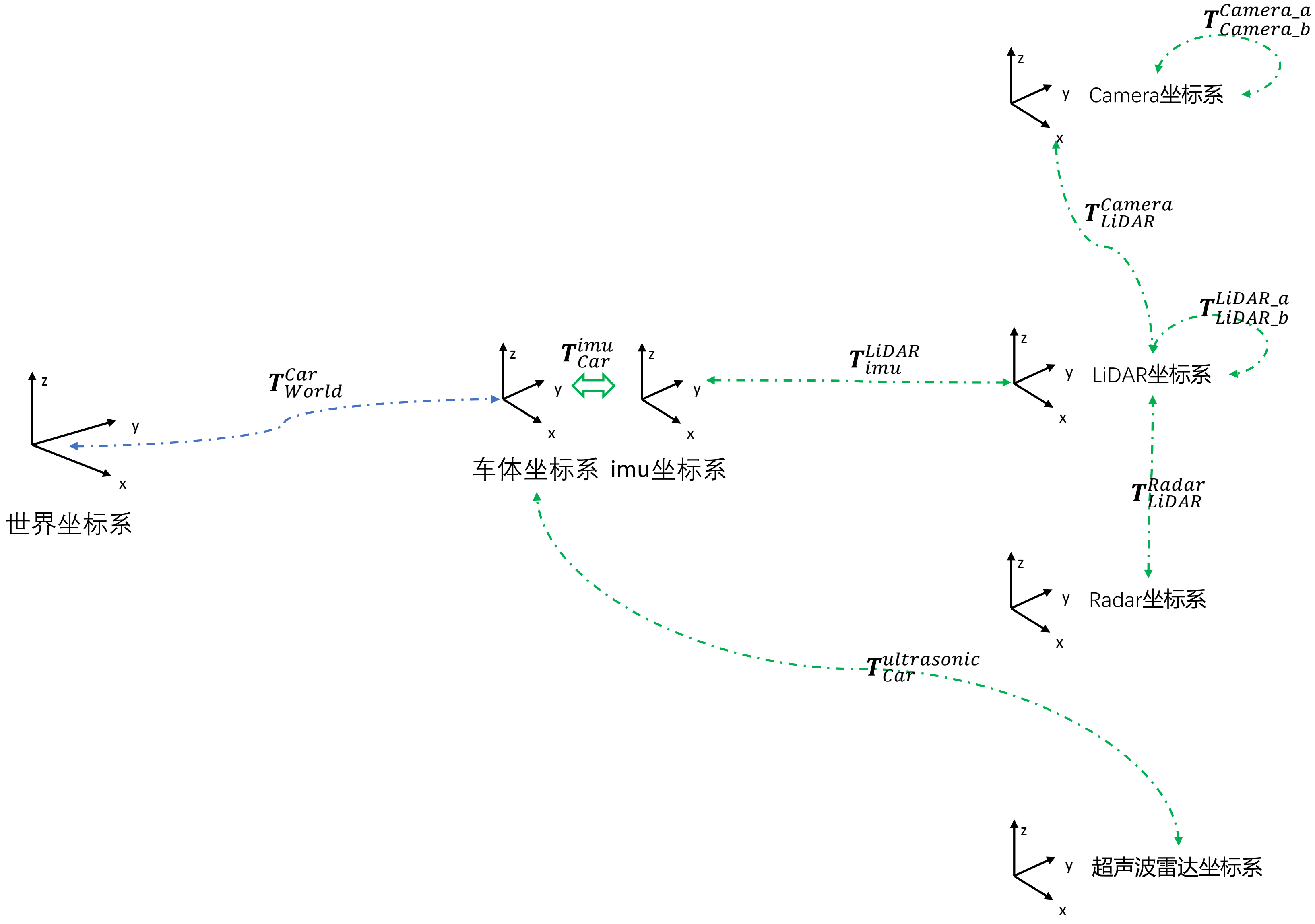
解法1：

- 直接标各传感器与车体坐标系

解法2：

- 标部分传感器与车体坐标系
- 另外一部分通过传感器之间实现标定

如何界定内参与外参?



$T_{Car}^{LiDAR} = T_{Car}^{imu} T_{imu}^{LiDAR}$

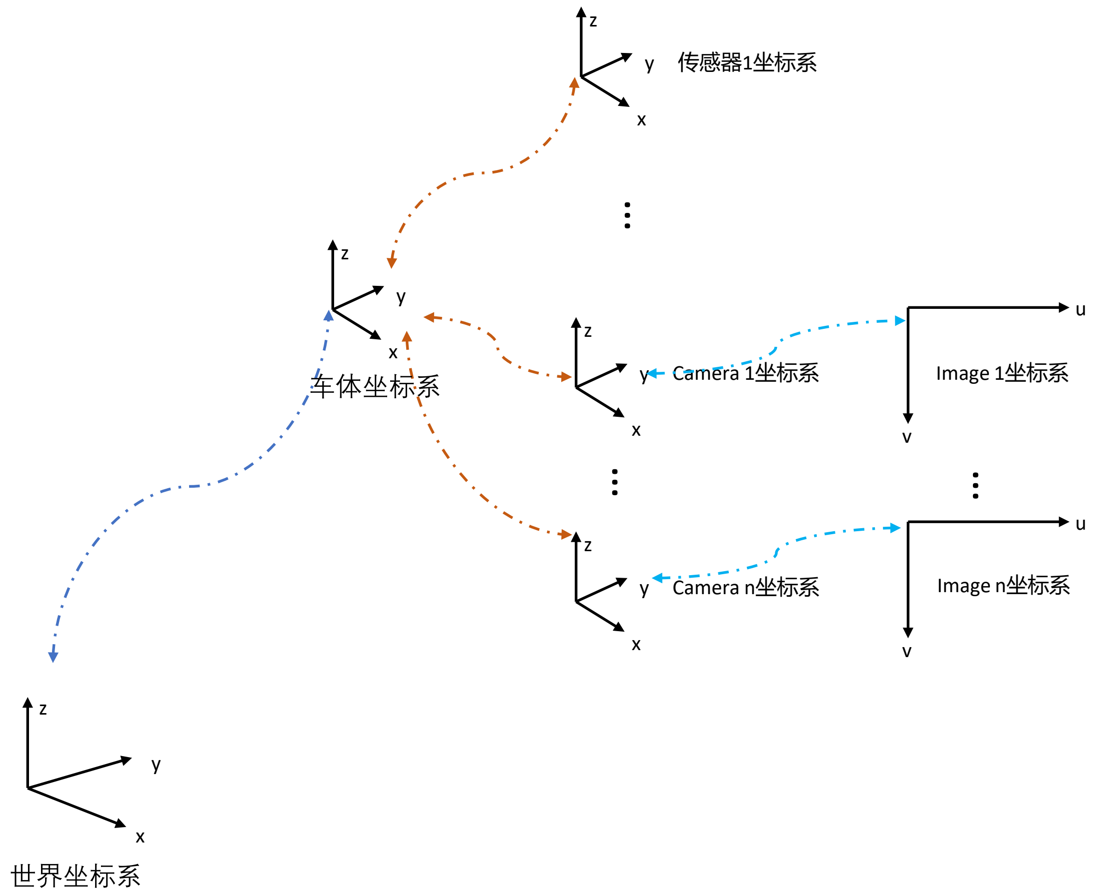
$T_{Car}^{Camera} = T_{Car}^{LiDAR} T_{LiDAR}^{Camera}$

$T_{Car}^{Radar} = T_{Car}^{LiDAR} T_{LiDAR}^{Radar}$

$T_{Car}^{ultrasonic}$偏移通常通过测量确定，旋转手动补偿

T_{World}^{Car}由定位获取

如何将所有传感器的成像结果统一到同一坐标系下？



内参标定

- Camera：标定相机坐标系到uv坐标系的投影关系。

外参标定

- 各传感器到车体坐标系的转换关系，包含：
  - IMU(GNSS) – Car
  - LiDAR – Camera
  - Camera – Camera
  - LiDAR – LiDAR
  - LiDAR – IMU(GNSS)
  - LiDAR – Radar
  - 超声波雷达– Car

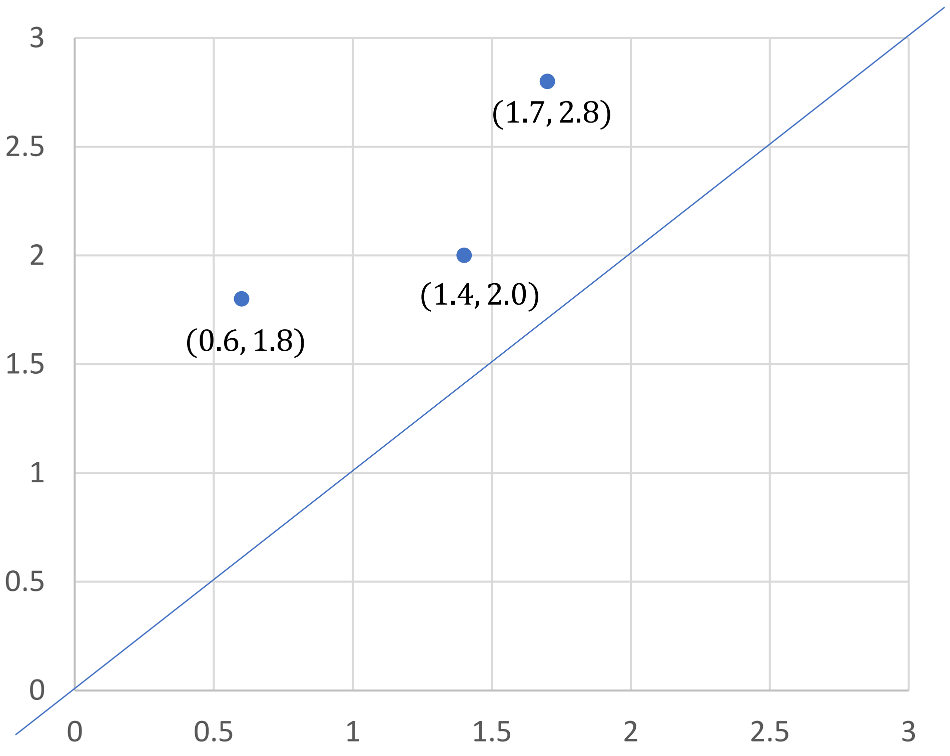
定位

- 确定车体坐标系与世界坐标系的转换关系。

本章内容

1. 关于标定：传感器内参及外参的介绍
2. 非线性优化简介
3. Camera内参标定
4. 多传感器系统外参标定
5. 外参的在线动态修正

非线性最小二乘问题求解



$$f(x) = \theta_0 x + \theta_1$$

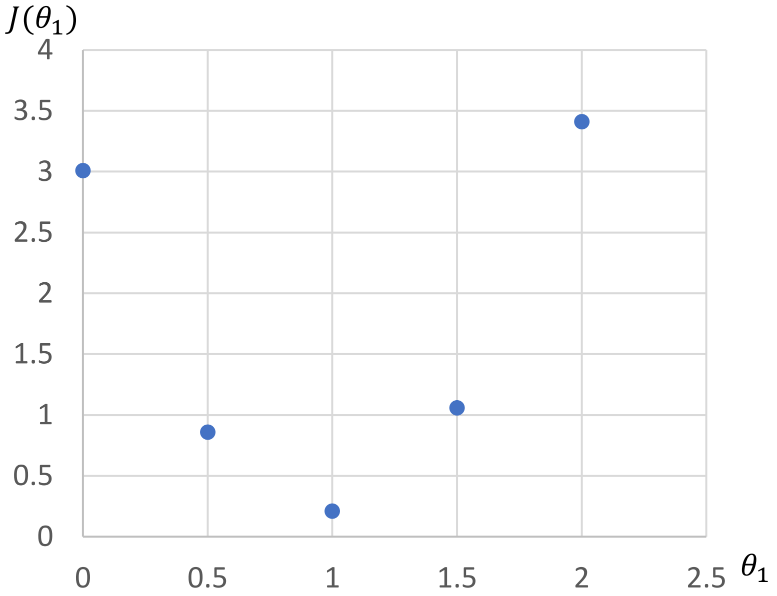
$$J(\theta_0, \theta_1) = \sum_i \|y_i - f(x_i)\|^2$$

假设$\theta_0 = 1$，我们看看如何求解θ_1？

$$J(\theta_1) = (1.8 - 0.6 - \theta_1)^2 + (2.0 - 1.4 - \theta_1)^2 + (2.8 - 1.7 - \theta_1)^2$$

$$= (1.2 - \theta_1)^2 + (0.6 - \theta_1)^2 + (1.1 - \theta_1)^2$$

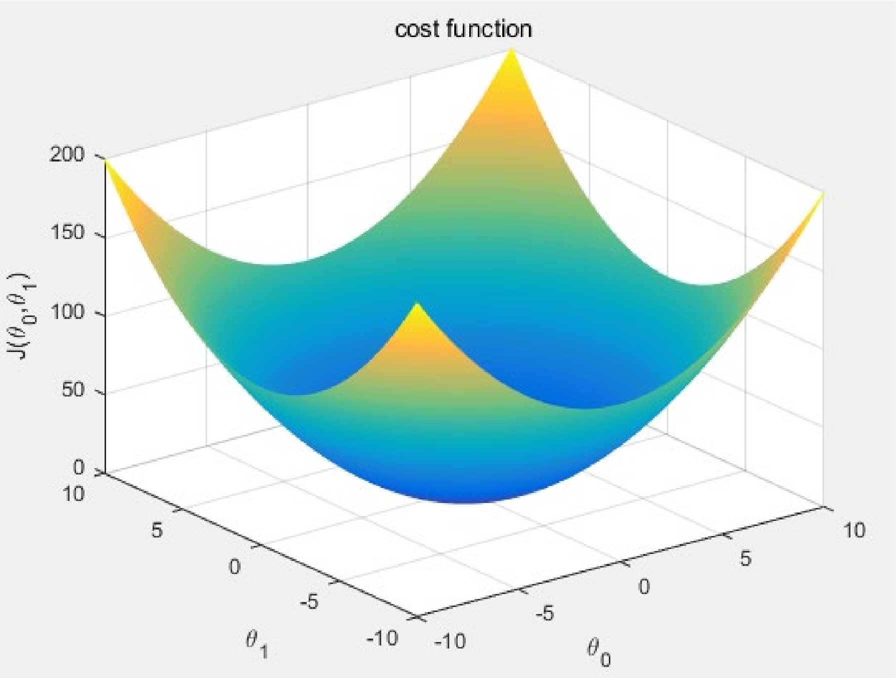
$$= 3\theta_1^2 - 5.8\theta_1 + 3.01$$



$$\frac{dJ}{d\theta_1} = 6\theta_1 - 5.8$$

非线性最小二乘问题求解

当 θ_0不确定，我们需要同时关注θ_0和θ_1：



- 找一个初始值(θ_0, θ_1)
- 沿着负梯度的方向逐步迭代

$$\theta_0' = \theta_0 + \Delta\theta_0$$

$$\theta_1' = \theta_1 + \Delta\theta_1$$

$$\Delta\theta_0 = -\lambda\frac{\partial J}{\partial\theta_0} \quad \Delta\theta_1 = -\lambda\frac{\partial J}{\partial\theta_1}$$

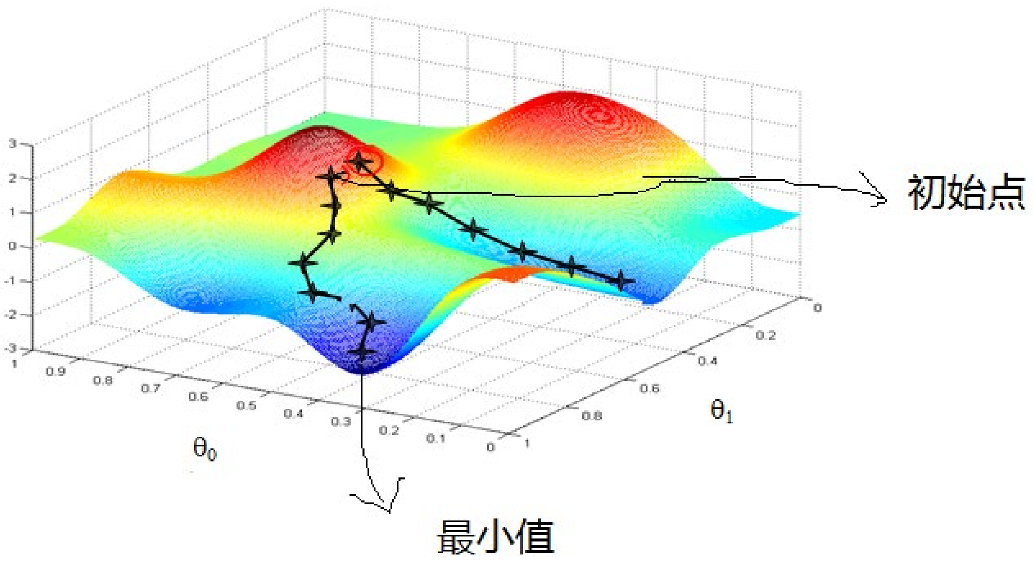
- 当 $(\Delta\theta_0, \Delta\theta_1)$足够小时，即完成求解

梯度下降（Gradient Descent）

非线性优化

$$\min_{\boldsymbol{x}} \frac{1}{2}\|f(\boldsymbol{x})\|_2^2$$

其中，$\boldsymbol{x} \in R^n$，f是任意非线性函数，$f(\boldsymbol{x}) \in R^m$



思路：

(1) 给定某个初始值$\boldsymbol{x}_0$；

(2) 对于第k次迭代，寻找一个增量$\Delta\boldsymbol{x}_k$，使得$\|f(\boldsymbol{x}_k+\Delta\boldsymbol{x}_k)\|_2^2$达到极小值；

(3) 若$\Delta\boldsymbol{x}_k$足够小，则停止；

(4) 否则，令$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{x}_k+\Delta\boldsymbol{x}_k$，返回第(2)步。

如何确定 $\Delta\boldsymbol{x}_k$呢？

非线性优化——如何确定Δx

方法1： 将 $\|f(\boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{x})\|_2^2$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处二阶泰勒展开：

$$\|f(\boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{x})\|_2^2 \approx \|f(\boldsymbol{x})\|_2^2 + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\Delta \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{x}$$

其中，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$是 $\|f(\boldsymbol{x})\|_2^2$在 $\boldsymbol{x}$ 的一阶导数（Jacobian矩阵），

$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$是二阶导数（Hessian矩阵）。

仅保留一阶项

$\Delta \boldsymbol{x}^* = -\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})^T$

最速下降法

通常这个梯度会乘一个步长λ，即$\Delta \boldsymbol{x}^* = -\lambda \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})^T$。

保留二阶项

$$\Delta \boldsymbol{x}^* = \operatorname{argmin}(\|f(\boldsymbol{x})\|_2^2 + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\Delta \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{x})$$

右侧对 $\Delta \boldsymbol{x}$ 求导可得：

牛顿法

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})^T$$

方法2： 对$f(\boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}$ 处一阶泰勒展开：

$$f(\boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{x}) \approx f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{x}$$

其中，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处的导数。则目标函数：

$$\|f(\boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{x})\|_2^2 = \|f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{x}\|_2^2$$

则，$\Delta \boldsymbol{x}^* = \operatorname{argmin}(\|f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{x}\|_2^2)$

进一步，

$$\begin{aligned}
&\|f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{x}\|_2^2 \\
&= (f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{x})^T (f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{x}) \\
&= (\|f(\boldsymbol{x})\|_2^2 + 2f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

对 $\Delta \boldsymbol{x}$ 求导，并令导数为零：

$$2\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})^T f(\boldsymbol{x}) + 2\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})^T f(\boldsymbol{x})$$

求解线性方程组$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}$。

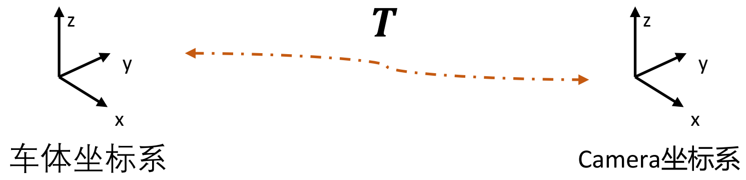
高斯牛顿法

其它诸如LM（Levenberg–Marquardt）算法，请参考《Numerical Optimization数值优化》或《视觉SLAM十四讲》

标定问题中的非线性优化

$$\min_{\boldsymbol{x}} \frac{1}{2} \|f(\boldsymbol{x})\|_2^2$$

其中，$\boldsymbol{x} \in R^n$， f是任意非线性函数， $f(\boldsymbol{x}) \in R^m$



$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

其中，$\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{3x3}, \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{I}, \det(\boldsymbol{R}) = 1$

带约束的非线性优化问题，如何求解?

- 用李代数表达位姿，利用李代数求导方法，可转化为无约束优化问题
- 沿用非线性优化求解

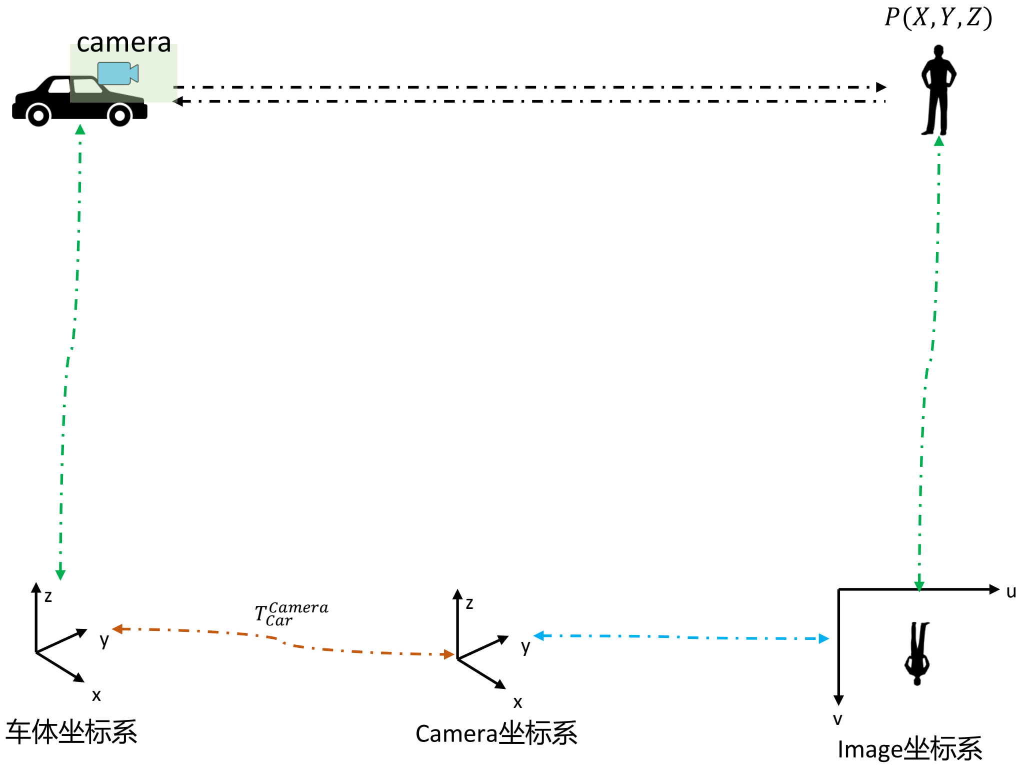
李群李代数相关内容可以参考:

- 《机器人学中的状态估计》《视觉SLAM十四讲》李群相关章节
- V.S. varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their reprensentations, vol 102. Springer Science &Business Media, 2013

本章内容

1. 关于标定：传感器内参及外参的介绍
2. 非线性优化简介
3. Camera内参标定
4. 多传感器系统外参标定
5. 外参的在线动态修正

Camera成像过程的建模



1. 车体坐标系下的目标$P(X,Y,Z)$，在Camera坐标系下的坐标为P'：

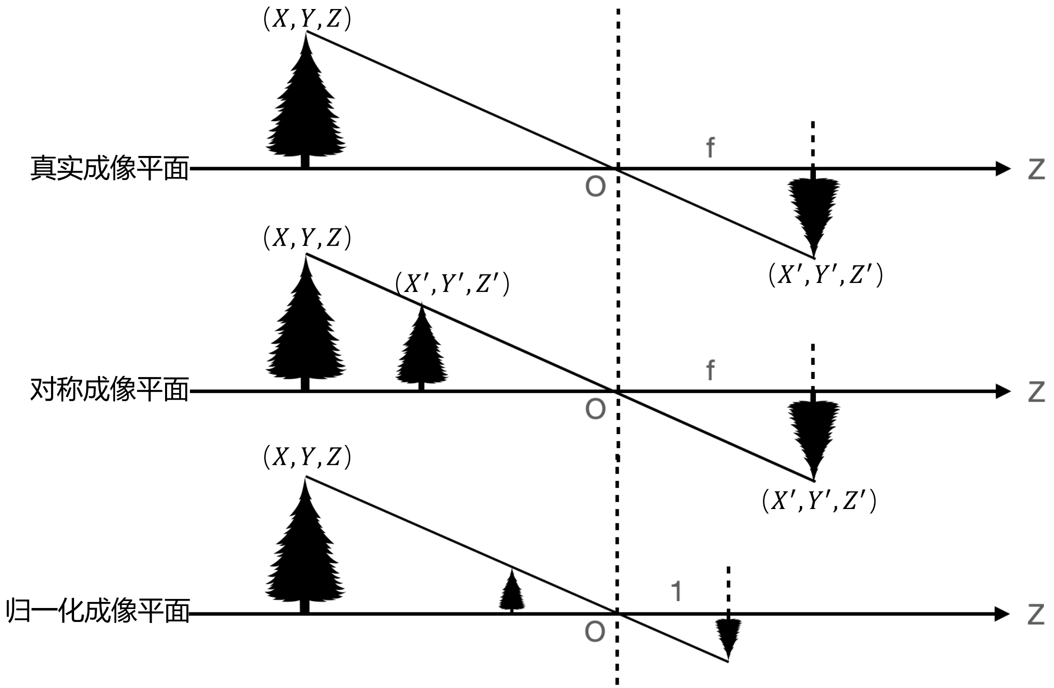
$$P' = {T_{Car}^{Camera}}^{T} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中:

$$T_{Car}^{Camera} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

2. 相机坐标系下的P' 投影至图像坐标系的相机成像过程

Camera成像过程的建模



成像两阶段:

1. 相机坐标系 → 图像坐标系
2. 图像坐标系 → 像素坐标系

1. 相机坐标系 → 图像坐标系

$$\frac{Z}{f} = \frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} \Longrightarrow \begin{aligned} X' &= f \cdot \frac{X}{Z} \\ Y' &= f \cdot \frac{Y}{Z} \end{aligned}$$

2. 图像坐标系 → 像素坐标系

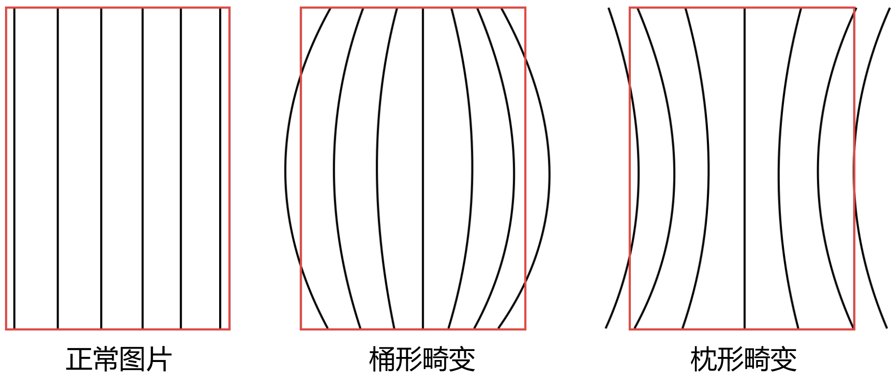
$$\begin{aligned} u &= \alpha \cdot X' + c_x \\ v &= \beta \cdot Y' + c_y \end{aligned} \xRightarrow[f_y = \beta \cdot f]{f_x = \alpha \cdot f} \begin{aligned} u &= f_x \frac{X}{Z} + c_x \\ v &= f_y \frac{Y}{Z} + c_y \end{aligned}$$

记内参矩阵为$\boldsymbol{K}$，则:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \frac{1}{Z} K \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Camera成像过程中存在畸变，如何建模？

1. 径向畸变：透镜自身形状难以做到完全规则，因此会对光线传播产生影响，从而引起径向畸变



$$x_{distorted} = x(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)$$

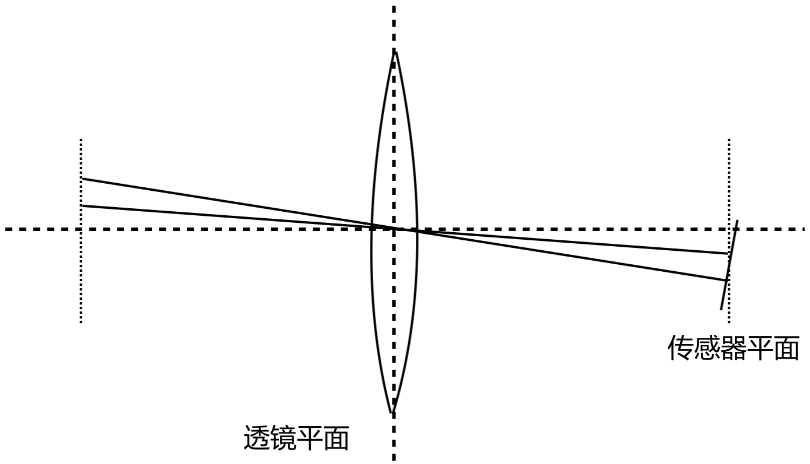
$$y_{distorted} = y(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)$$

其中，

(x, y)：归一化平面点的坐标，方便建模

r：该点的坐标与坐标系原点的距离

2. 切向畸变：机械组件的安装过程中，透镜和成像平面不可能完全平行。



$$x_{distorted} = x + 2p_1 xy + p_2(r^2 + 2x^2)$$

$$y_{distorted} = y + 2p_2 xy + p_1(r^2 + 2y^2)$$

其中，

(x, y)：归一化平面点的坐标

r：该点的坐标与坐标系原点的距离

Camera成像过程的建模

（1）自车坐标系 → 相机坐标系

三维空间点(X,Y,Z)，$\boldsymbol{R}$为旋转矩阵，$\boldsymbol{t}$为平移量，

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

（2）相机坐标系→ 图像坐标系（不考虑畸变）

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

（3）图像坐标系（含去畸变）：

将(x_c, y_c, z_c)投影到归一化平面上$(x,y) = ({}^{x_c}/_{z_c}, {}^{y_c}/_{z_c})$，再进行（径向与切向）畸变修正，得到去畸变后的归一化坐标。

$$\begin{cases} x_{distorted} = x(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) + 2p_1 xy + p_2(r^2 + 2x^2) \\ y_{distorted} = y(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) + 2p_2 xy + p_1(r^2 + 2y^2) \end{cases}$$

（4）图像坐标系 → 像素坐标系

将纠正后的点投影到像素平面，其中(α,β)为坐标系缩放系数，(c_x, c_y)为坐标系平移量。

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & c_x \\ 0 & \beta & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{distorted} \\ y_{distorted} \\ 1 \end{bmatrix}$$

通常意义上，相机需要标定的参数如下：

$$[\underbrace{f,\ \alpha,\ \beta,\ c_x,\ c_y}_{\text{内参}},\ \underbrace{k_1,\ k_2,\ k_3,\ p_1,\ p_2}_{\text{畸变参数}}]$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{H} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中，矩阵$\boldsymbol{H}$内包含$f, \alpha, \beta, c_x, c_y, k_1, k_2, k_3, p_1, p_2$这些内参与畸变参数。对于每个相机来说，参数都不一致，因此需要标定。

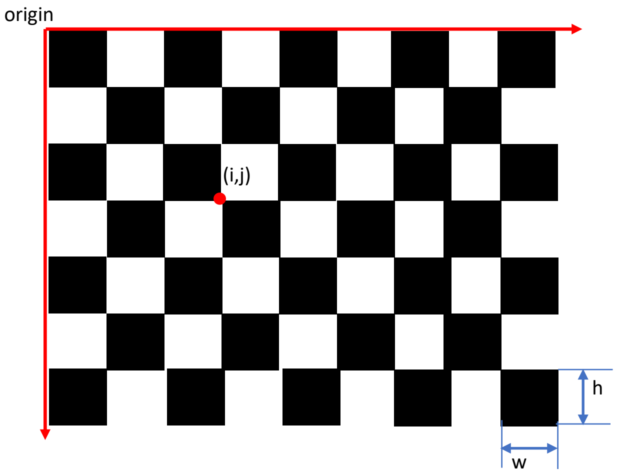
将Camera内参标定问题转化为非线性优化问题

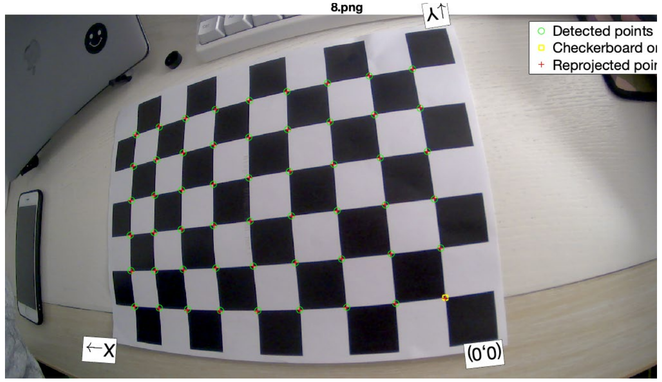
$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{H} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$J = \sum_i \sum_j e_{ij} \qquad e_{ij} = \begin{bmatrix} u_{ij}^{predict} \\ v_{ij}^{predict} \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{ij} \\ v_{ij} \\ 1 \end{bmatrix}$$

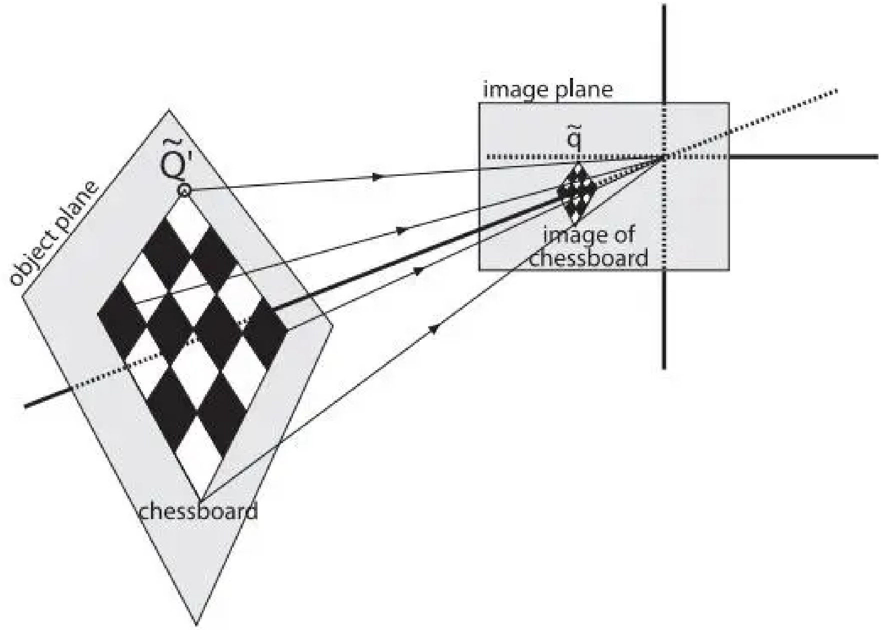
多组3D空间点和像素点：需要一一对应。

- 棋盘格——传统计算机视觉对于角点检测精度高





- 棋盘格尺寸是定制的，角点之间的3D位置可计算



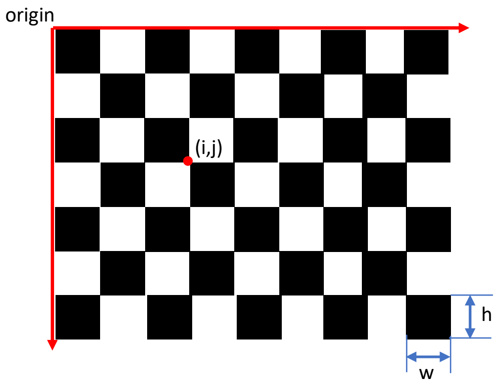
$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{H} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{T}_{camera}^{chessboard} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}_{chessboard}$$

一张棋盘格成像可以建立多组对应关系

将Camera内参标定问题转化为非线性优化问题

已知 $\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}\begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$，求$f, \alpha, \beta, c_x, c_y, k_1, k_2, k_3, p_1, p_2$。

1. 棋盘格



2. 对第k张图片，以棋盘格的原点为基准可定位每一个角点，并满足投影关系如下，找到足够多的对应点：

$$\begin{bmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ Z_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{origin} \\ Y_{origin} \\ Z_{origin} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i*h \\ j*w \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$\left\{\begin{array}{c} \begin{bmatrix} u_{00}^{predict} \\ v_{00}^{predict} \\ 1 \end{bmatrix} = H\begin{bmatrix} R_k & t_k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{00} \\ Y_{00} \\ Z_{00} \\ 1 \end{bmatrix} \\ \cdots \\ \begin{bmatrix} u_{ij}^{predict} \\ v_{ij}^{predict} \\ 1 \end{bmatrix} = H\begin{bmatrix} R_k & t_k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ Z_{ij} \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}\right. \qquad (2)$$

3. 由(1)和(2)构建优化问题，

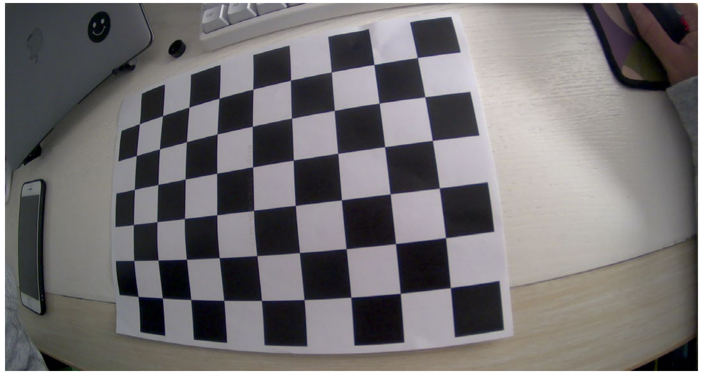
$$J = \sum_i \sum_j e_{ij} \qquad e_{ij} = \begin{bmatrix} u_{ij}^{predict} \\ v_{ij}^{predict} \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{ij} \\ v_{ij} \\ 1 \end{bmatrix}$$

用高斯牛顿法或LM（Levenberg-Marquardt ）算法计算出如下参数：

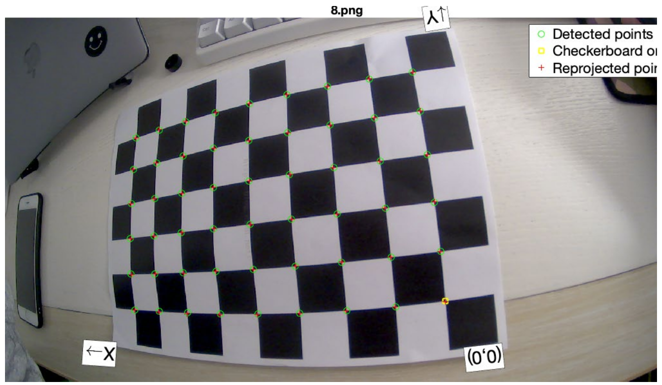
$$\left\{\begin{array}{c} f, \alpha, \beta, c_x, c_y \\ k_1, k_2, k_3, p_1, p_2 \\ R, t \end{array}\right.$$

张正友标定法

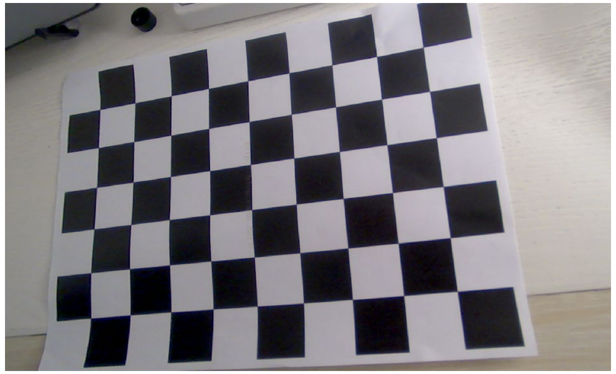
Camera内参标定案例



原始图



特征点图

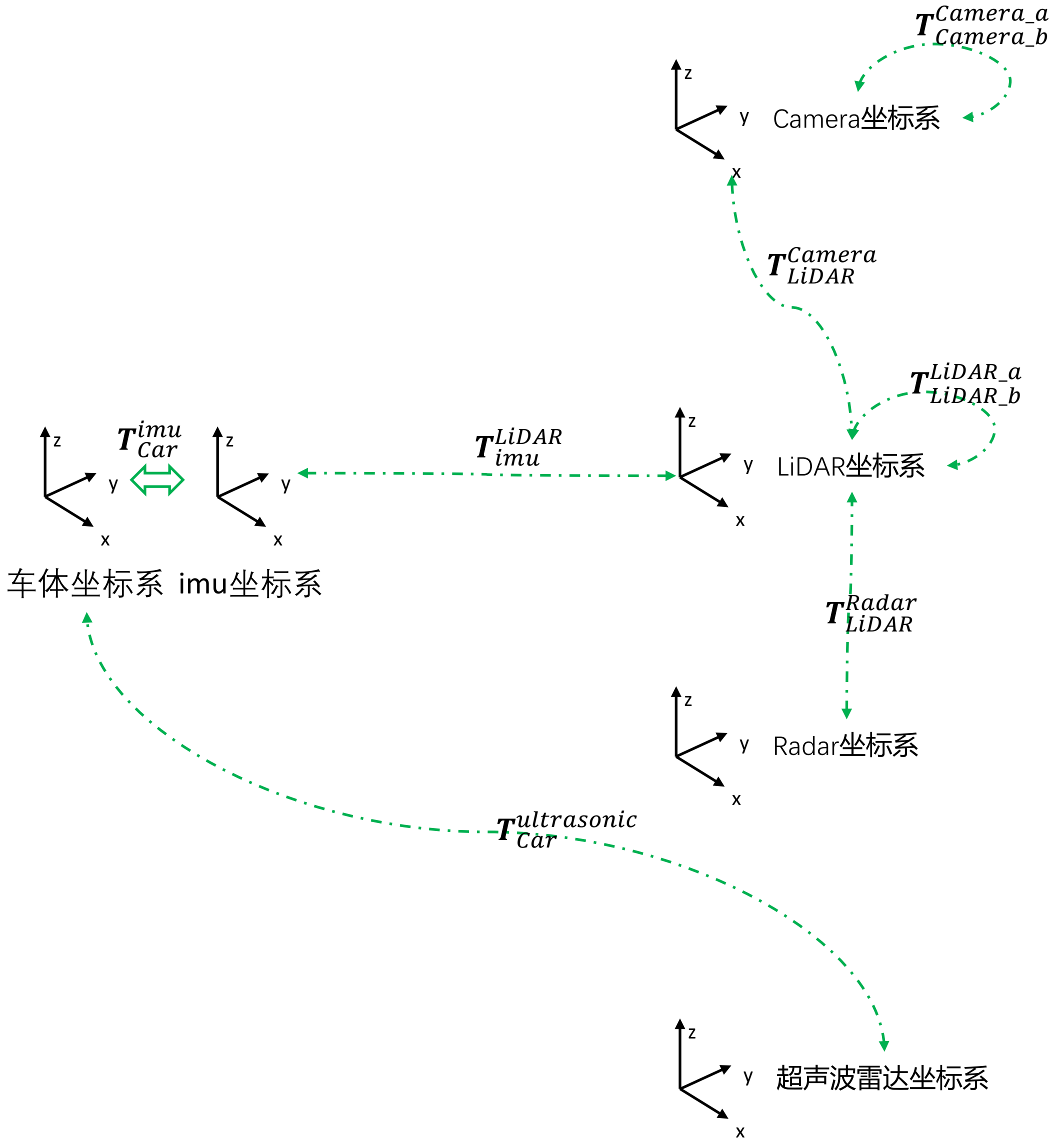


更新内参&去畸变图

本章内容

1. 关于标定：传感器内参及外参的介绍
2. 非线性优化简介
3. Camera内参标定
4. 多传感器系统外参标定
5. 外参的在线动态修正

外参标定问题全集



$$T_{Car}^{LiDAR} = T_{Car}^{imu} T_{imu}^{LiDAR}$$

$$T_{Car}^{Camera} = T_{Car}^{LiDAR} T_{LiDAR}^{Camera}$$

$$T_{Car}^{Radar} = T_{Car}^{LiDAR} T_{LiDAR}^{Radar}$$

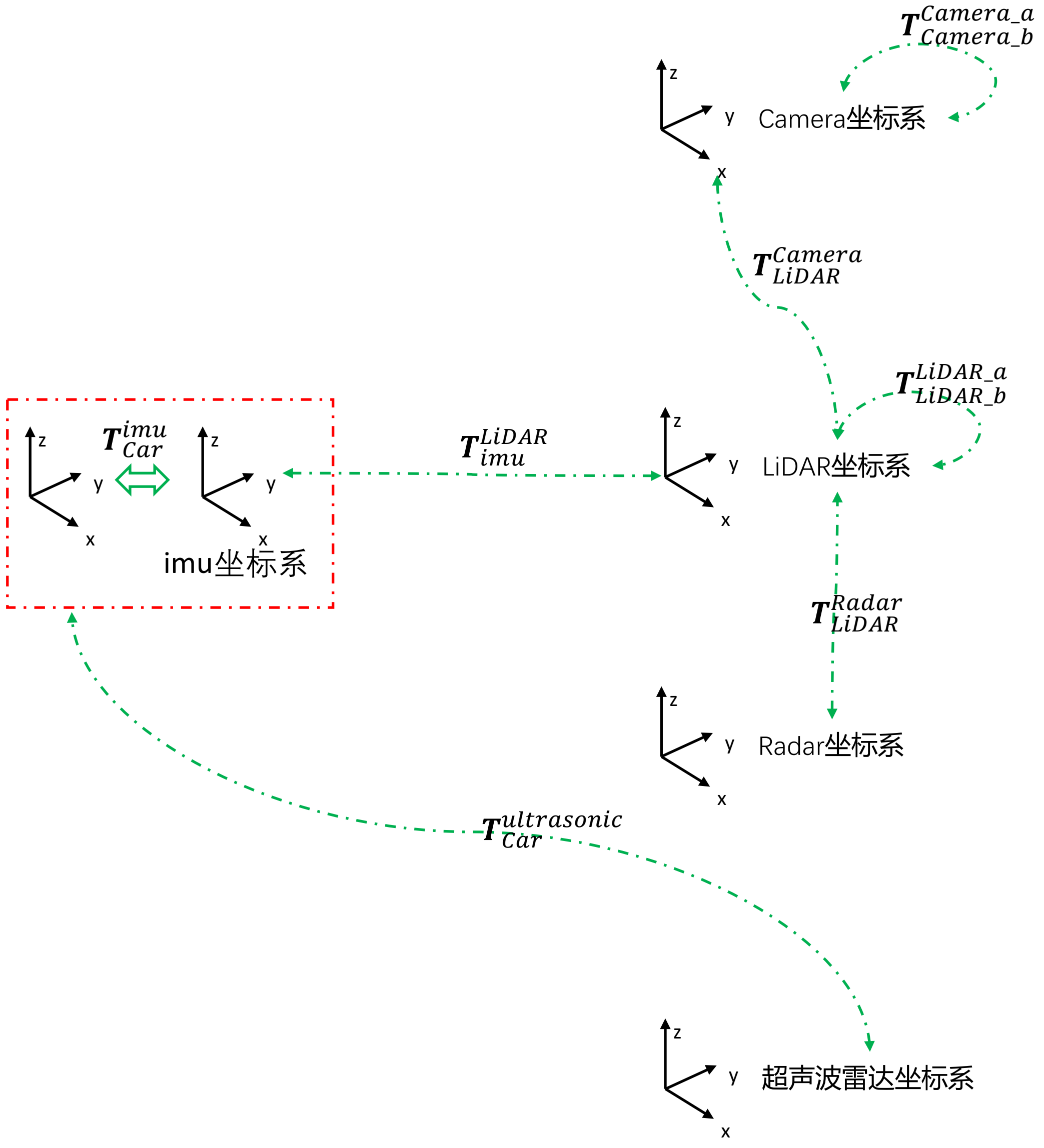
$$T_{Car}^{ultrasonic}$$

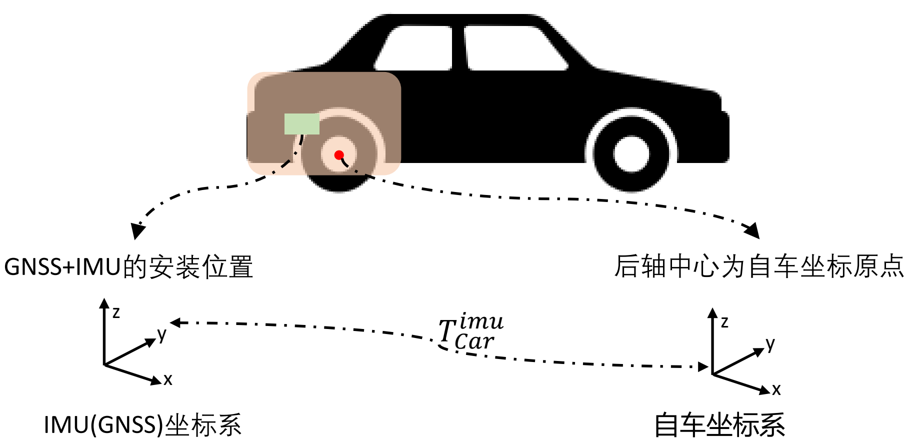
T_{World}^{Car}由定位获取

- 需要解决的外参问题包括:

1. IMU(GNSS) – Car
2. LiDAR – Camera
3. Camera – Camera
4. LiDAR – LiDAR
5. LiDAR – IMU(GNSS)
6. LiDAR – Radar
7. 超声波雷达– Car

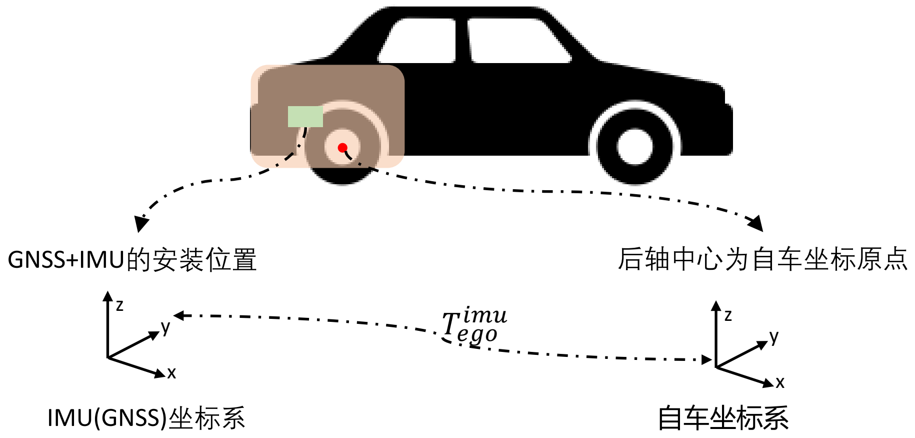
外参1：IMU(GNSS)和车体坐标系





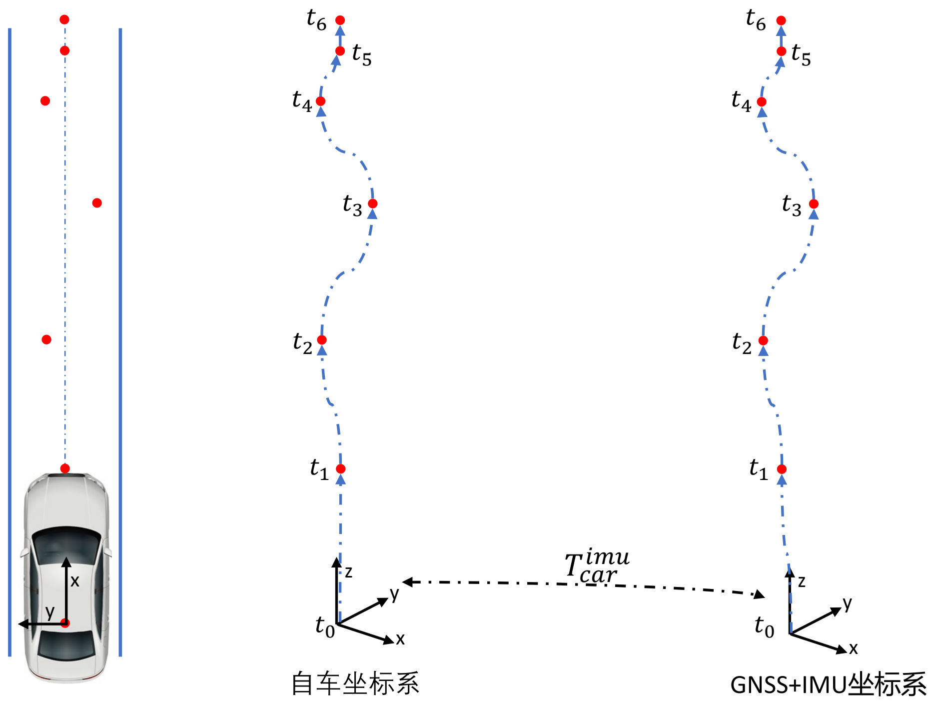
IMU { *timestamp*, *roll_rate*, *pitch_rate*, *yaw_rate*, *lateral_acc*, *longitudinal_acc*, *vertical_acc*, … } + GNSS { *gps_time*, *longitude*, *latitude*, *altitude*, … } = GNSS+IMU { *gps_time*, *longitude*, *latitude*, *altitude*, *roll*, *pitch*, *yaw*, *velocity_north*, *velocity_east*, *velocity_upward*, *acc_x*, *acc_y*, *acc_z*, … }

外参1： IMU(GNSS)和车体坐标系



假设:

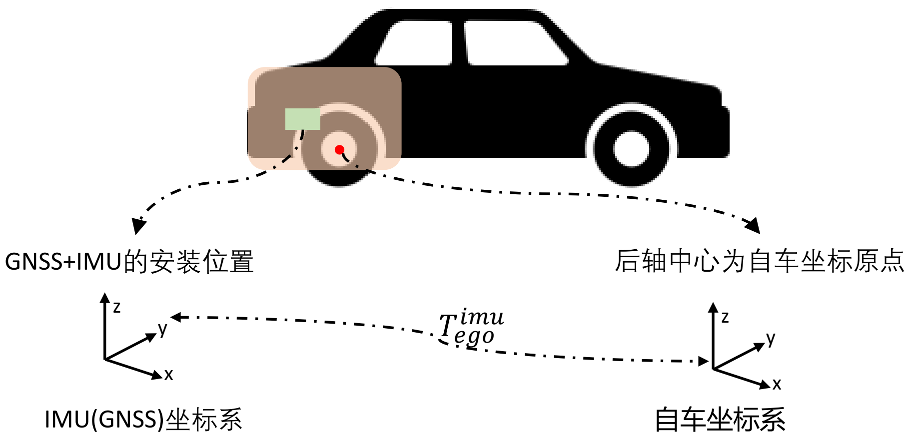
- ~~获取自车运动的位姿序列~~
- 通过GNSS+IMU设备观测自车运动



$$\begin{cases} T_{car}^{01} = T_{car}^{imu} T_{imu}^{01} \\ \cdots \\ \cdots \\ T_{car}^{0i} = T_{car}^{imu} T_{imu}^{0i} \end{cases}$$

$$J = \sum_i \left(I - {T_{car}^{0i}}^T T_{car}^{imu} T_{imu}^{0i}\right)$$

外参1： IMU(GNSS)和车体坐标系



约束：

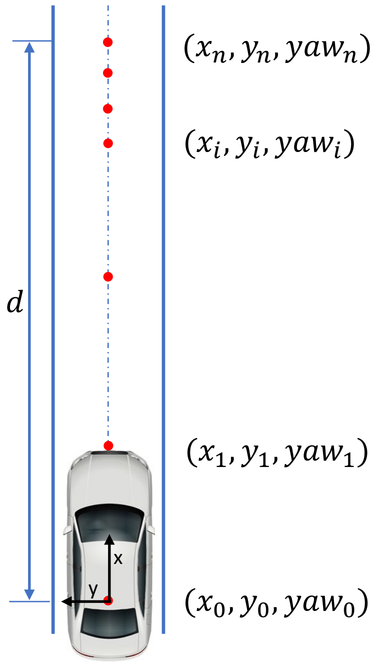
- GNSS+IMU设备观测的位姿序列可以达到cm级别
- 6自由度的自车运动很难精确获得

解决方案：

- 优先关注3个自由度：(x, y, yaw)
- z通过测量得到

设计测试路段：

- 严格直道（可通过激光笔测试），距离为d
- 车辆尽量严格按直线行驶



Car的运动：
$$\begin{cases} \Delta x = d \\ \Delta y = 0 \\ \Delta yaw = 0 \end{cases}$$

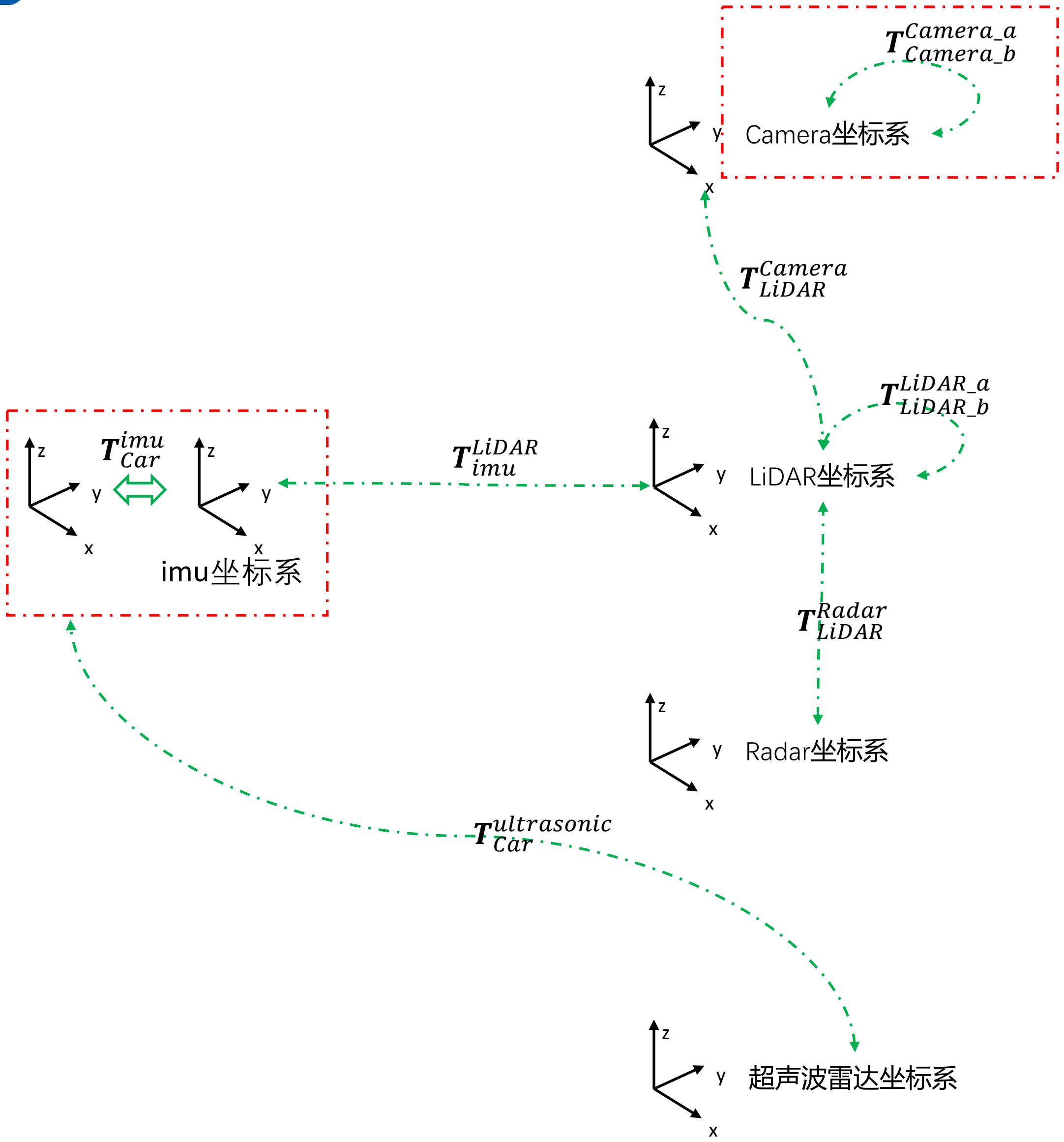
IMU(GNSS)
的运动：
$$\begin{cases} \overline{\Delta x} = \sum_{i=1}^{n} x_i - x_{i-1} \\ \overline{\Delta y} = \sum_{i=1}^{n} y_i - y_{i-1} \\ \overline{\Delta yaw} = \sum_{i=1}^{n} yaw_i - yaw_{i-1} \end{cases}$$

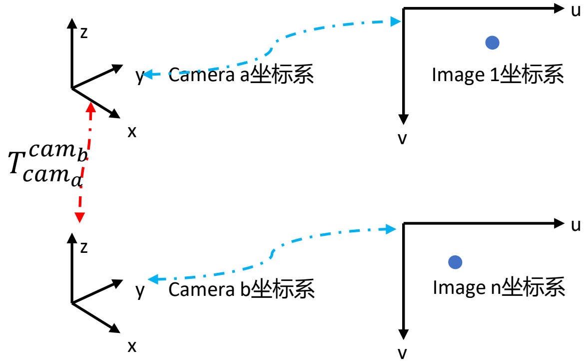
标定结果：

$$(x, y, yaw) = (d - \overline{\Delta x}, -\overline{\Delta y}, -\overline{\Delta yaw})$$

$$T_{car}^{imu} = [x, y, z, 0, 0, yaw]$$

外参2：Camera与Camera之间的标定





$$p_{cam_a} = \begin{bmatrix} x_{cam_a} \\ y_{cam_a} \\ z_{cam_a} \\ 1 \end{bmatrix}$$

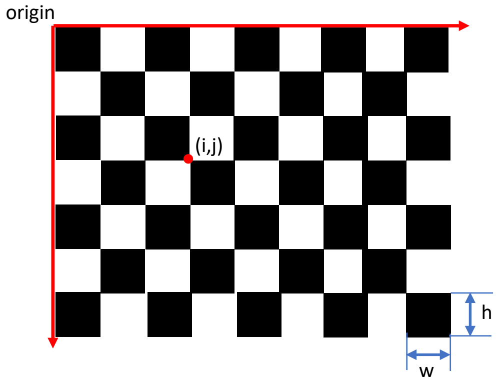
p

$$p_{cam_b} = \begin{bmatrix} x_{cam_b} \\ y_{cam_b} \\ z_{cam_b} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 如果能通过图像还原该点的3D位置，下式成立：

$$p_{cam_a} = T_{cam_a}^{cam_b} p_{cam_b}$$

- 是否可以通过图片还原该点的3D位置呢？

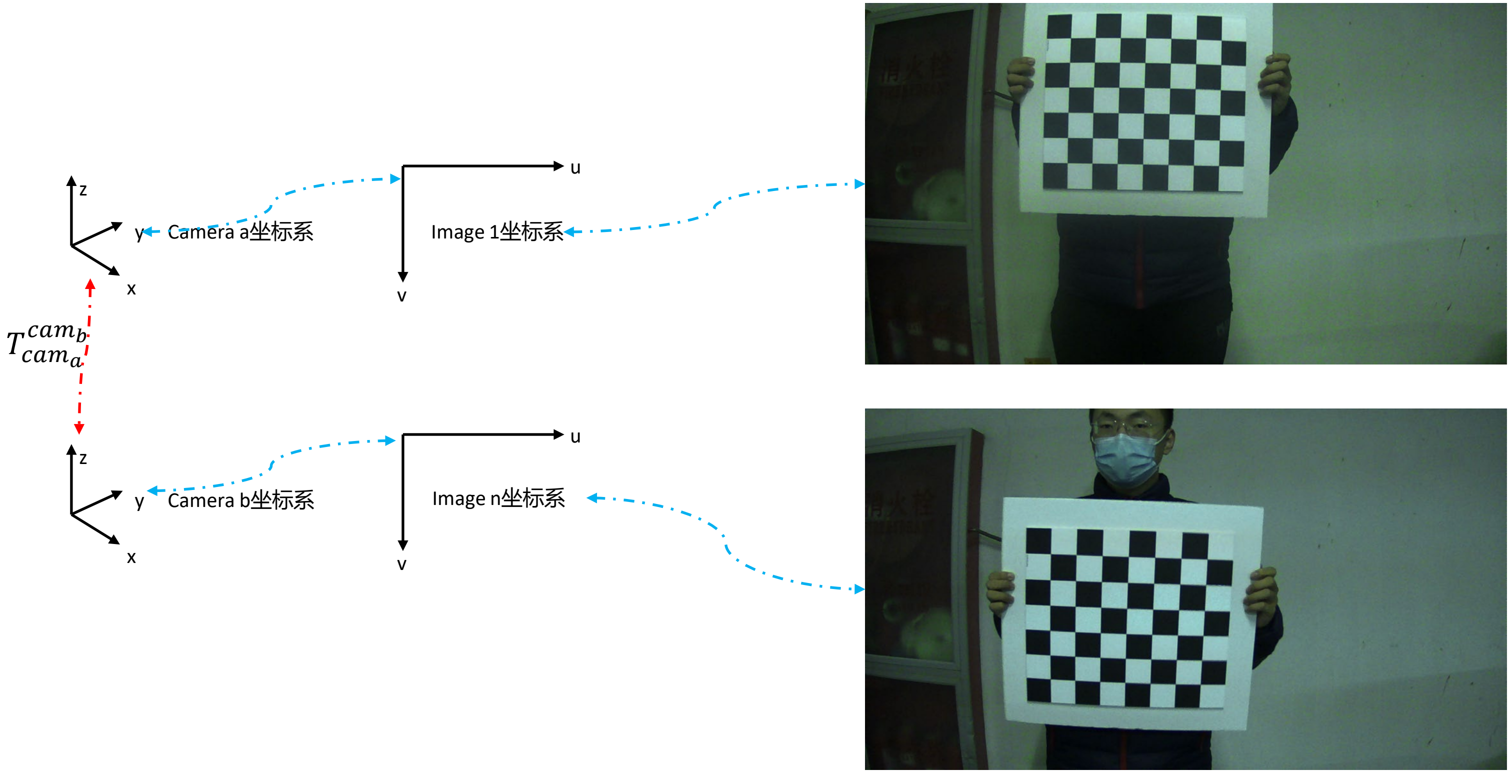


- 在内参已知的情况下，可求出

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{H} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{T}_{camera}^{chessboard} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}_{chessboard}$$

$\boldsymbol{T}_{car}^{camera}$ 相机坐标系下的位置

外参2：Camera与Camera之间的标定



- 对于棋盘格上每一个角点，下式成立　　　　PnP问题[1]

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{T}_{camera}^{chessboard} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}_{chessboard}$$

其中 $\boldsymbol{H}$为已知内参矩阵，$[\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{z}]$为棋盘格坐标系下的坐标

- 构建以下优化问题，可求得$\boldsymbol{T}_{camera}^{chessboard}$

$$J = \sum_i \sum_j e_{ij} \qquad e_{ij} = \begin{bmatrix} u_{ij}^{predict} \\ v_{ij}^{predict} \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{ij} \\ v_{ij} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 多相机坐标系下，同一个3D点，满足以下转换关系

$$p_{cam_a} = T_{cam_a}^{cam_b} p_{cam_b}$$

- 根据上式，通过多帧成像结果可以构建目标函数

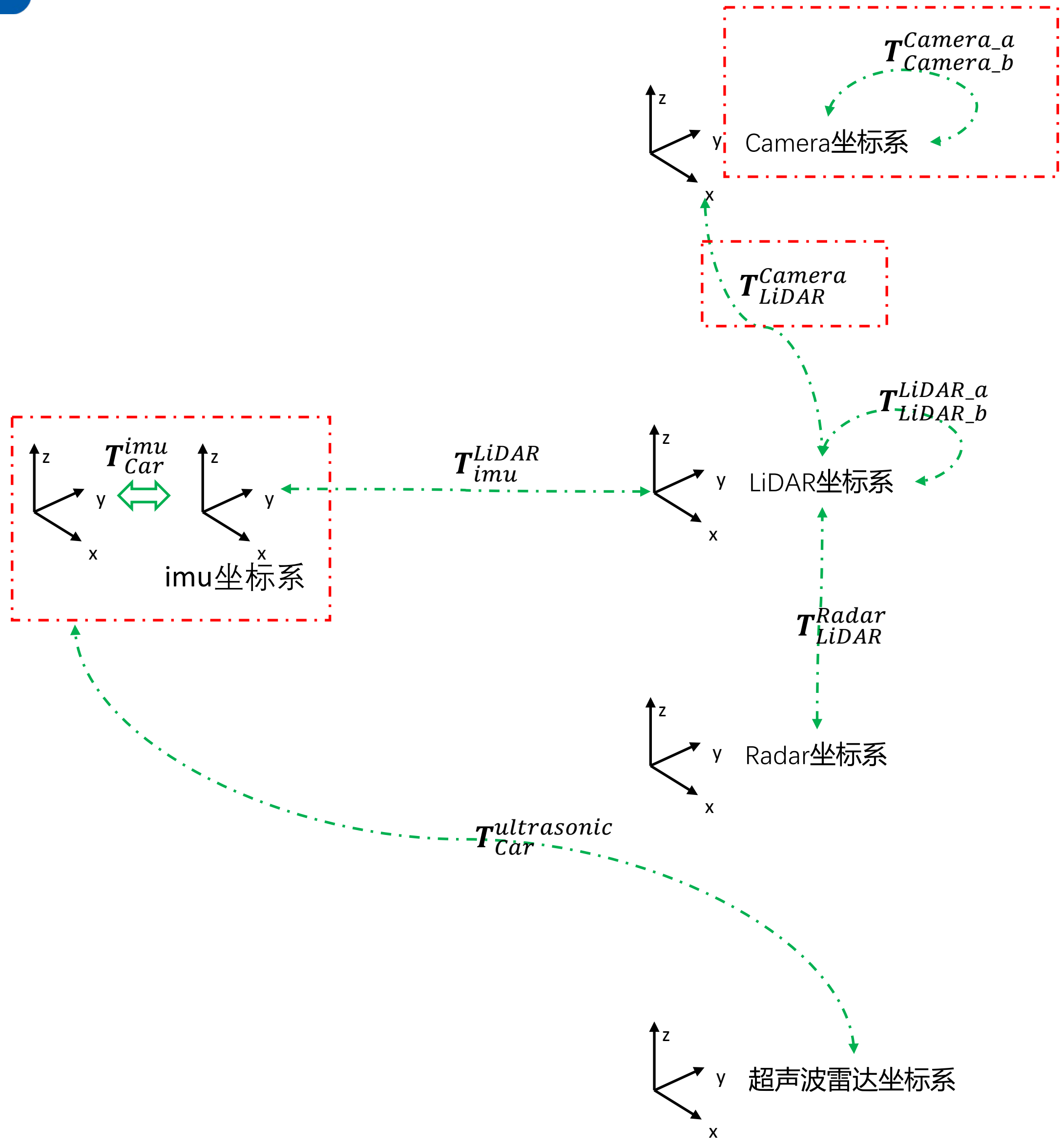
$$J = \sum_j \sum_i \left\| p_{cam_a}^i - T_{cam_a}^{cam_b} p_{cam_b}^i \right\|_2^2$$

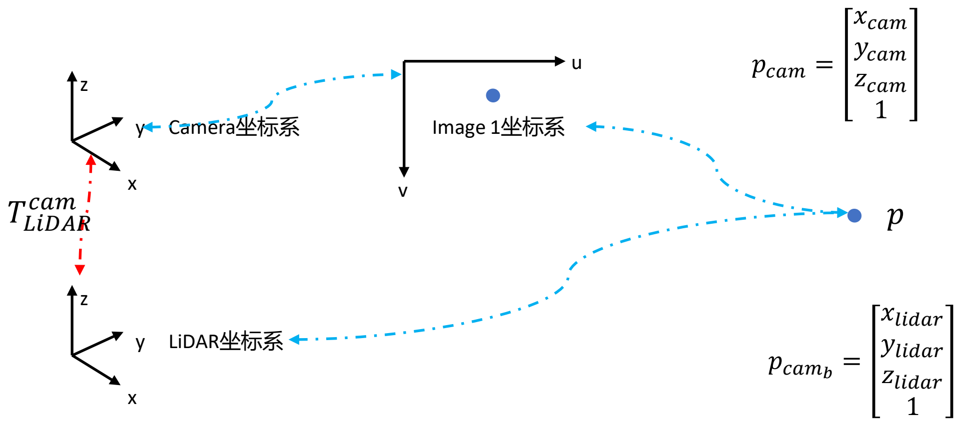
通过高斯牛顿法或者LM算法，可求得$T_{cam_a}^{cam_b}$

要求：Camera与Camera之间有视野重叠

[1]视觉SLAM 十四讲 第七讲

外参3：LiDAR和Camera

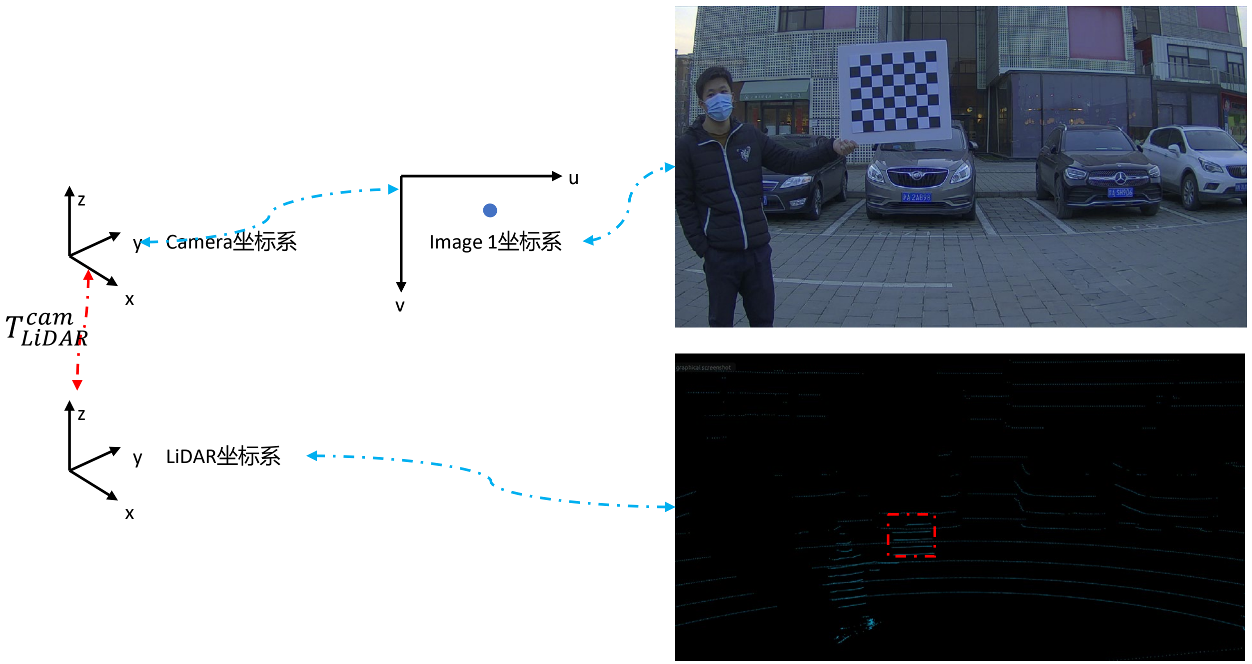




- 通过PnP可还原p_{cam}的3D位置，则：

$$p_{\text{LiDAR}} = T_{LiDAR}^{cam} p_{cam}$$

外参3：LiDAR和Camera



要求：LiDAR与Camera之间有视野重叠

- 通过PnP问题求解方法，求出标定板中角点的3D位置

$$\{p_{cam}^{0}, p_{cam}^{1}, \dots, p_{cam}^{i}\}$$

- 按照标定板的尺寸，在点云中定位标定板的成像结果，按角点尺寸和强度特征，求取角点位置：

$$\{p_{lidar}^{0}, p_{lidar}^{1}, \dots, p_{lidar}^{i}\}$$

- 同一个3D点，满足以下转换关系

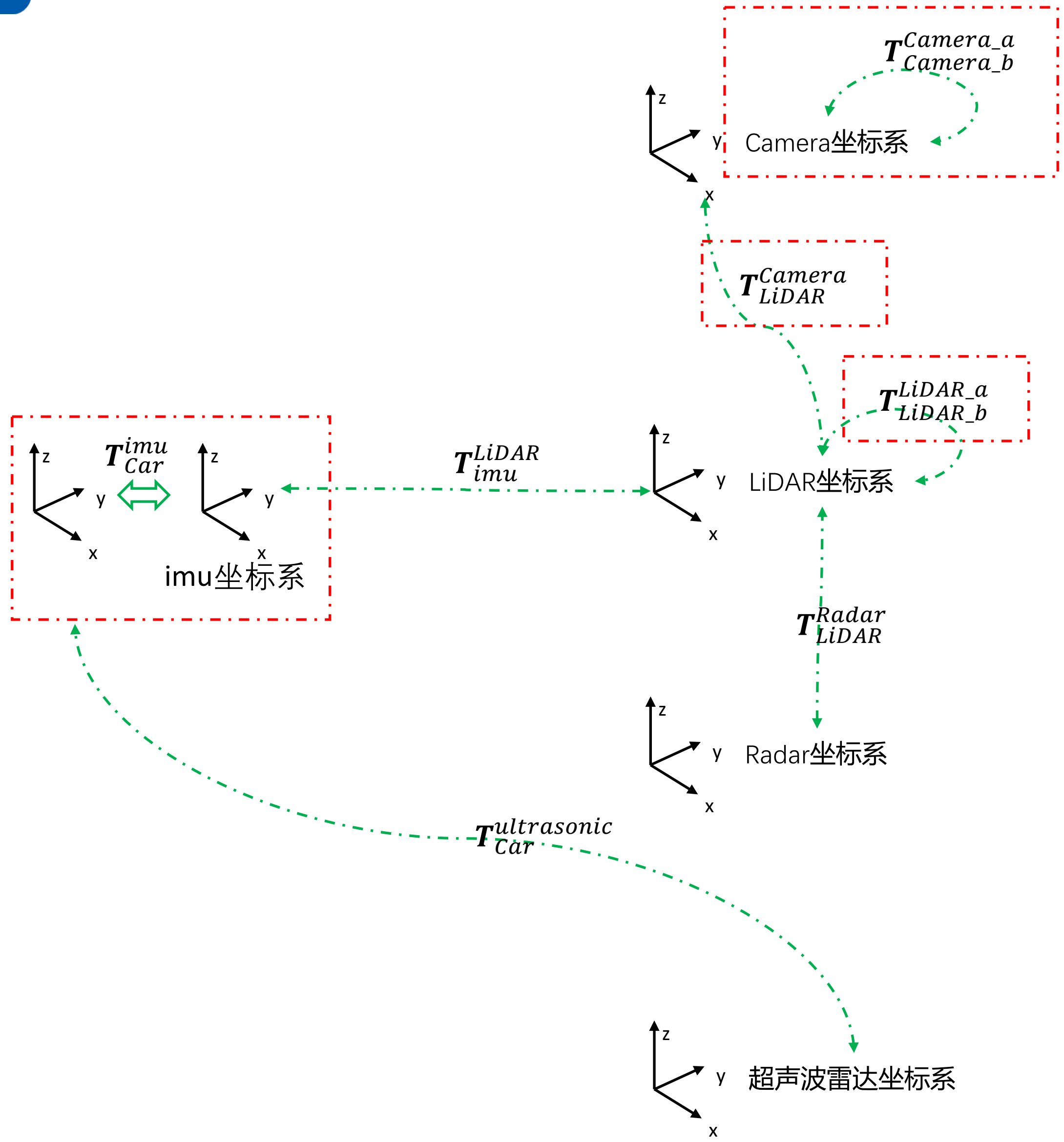
$$p_{\mathrm{LiDAR}} = T_{LiDAR}^{cam} p_{cam}$$

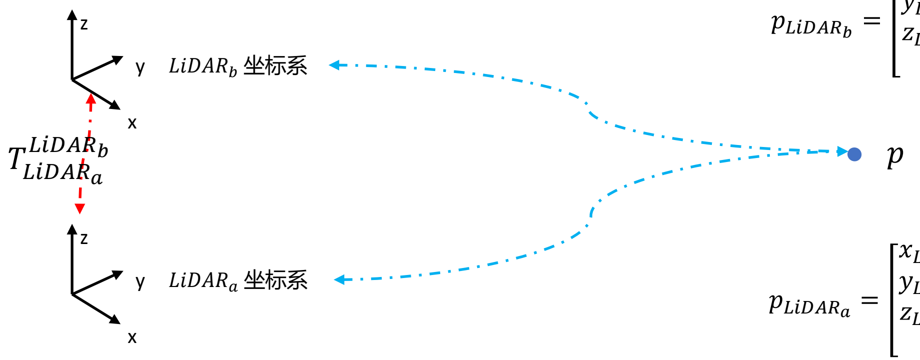
- 根据上式，通过多帧对应成像，可以构建目标函数

$$J = \sum_{j} \sum_{i} \left\| p_{LiDAR}^{i} - T_{LiDAR}^{cam} p_{cam}^{i} \right\|_2^2$$

通过高斯牛顿法或者LM算法，可求得T_{LiDAR}^{cam}

外参4：LiDAR和LiDAR





$$p_{LiDAR_b} = \begin{bmatrix} x_{LiDAR_b} \\ y_{LiDAR_b} \\ z_{LiDAR_b} \\ 1 \end{bmatrix}$$

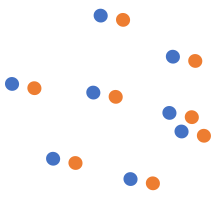
$$p_{LiDAR_a} = \begin{bmatrix} x_{LiDAR_a} \\ y_{LiDAR_a} \\ z_{LiDAR_a} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 如果能找到两帧点云中的若干点对，则可建立如下关系：

$$p_{LiDAR_a} = T_{LiDAR_a}^{LiDAR_b} p_{LiDAR_b}$$

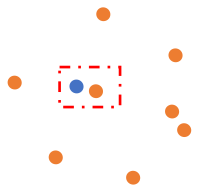
外参4：LiDAR和LiDAR

两帧点云分别为$Q=\{\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\cdots,\boldsymbol{q}_m\}$, $P=\{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n\}$:

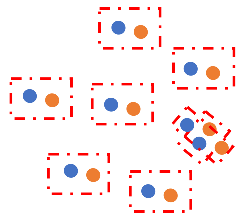


- 帧间更新频率高，两帧之间的差异较小

对 Q中的每一个点，在P中寻找最近点：



找到 Q和 P中所有点对找到：



由于点对之间存在如下转换关系：

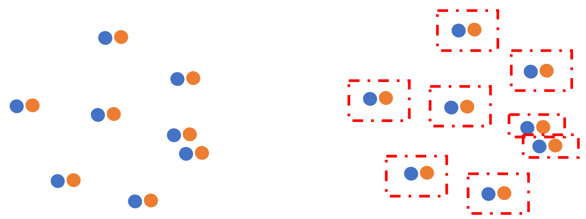
$$q_i = T_{LiDAR_a}^{LiDAR_b} p_j$$

建立优化目标函数：

$$J=\sum_i \left\| q_i - T_{LiDAR_a}^{LiDAR_b} p_j \right\|_2^2$$

通过高斯牛顿或者LM算法，可求得$T_{LiDAR_a}^{LiDAR_b}$，但还可能存在错误。

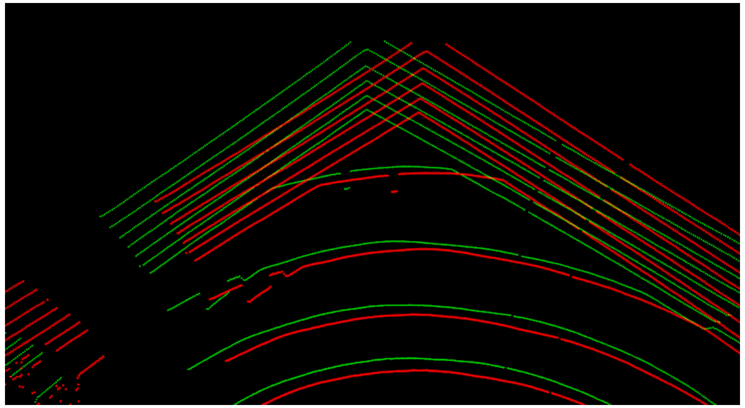
用$T_{LiDAR_a}^{LiDAR_b}$ 修正P，重新构建点对关系



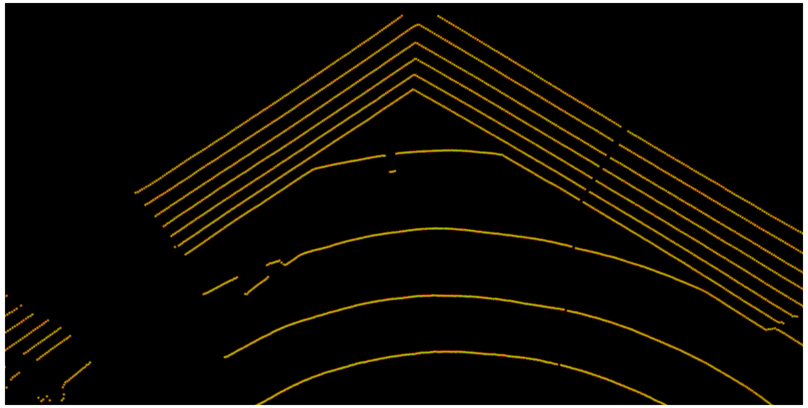
重新构建优化问题，得到最终$T_{LiDAR_a}^{LiDAR_b}$

ICP(Iterative Closest Point)算法

外参4：LiDAR和LiDAR



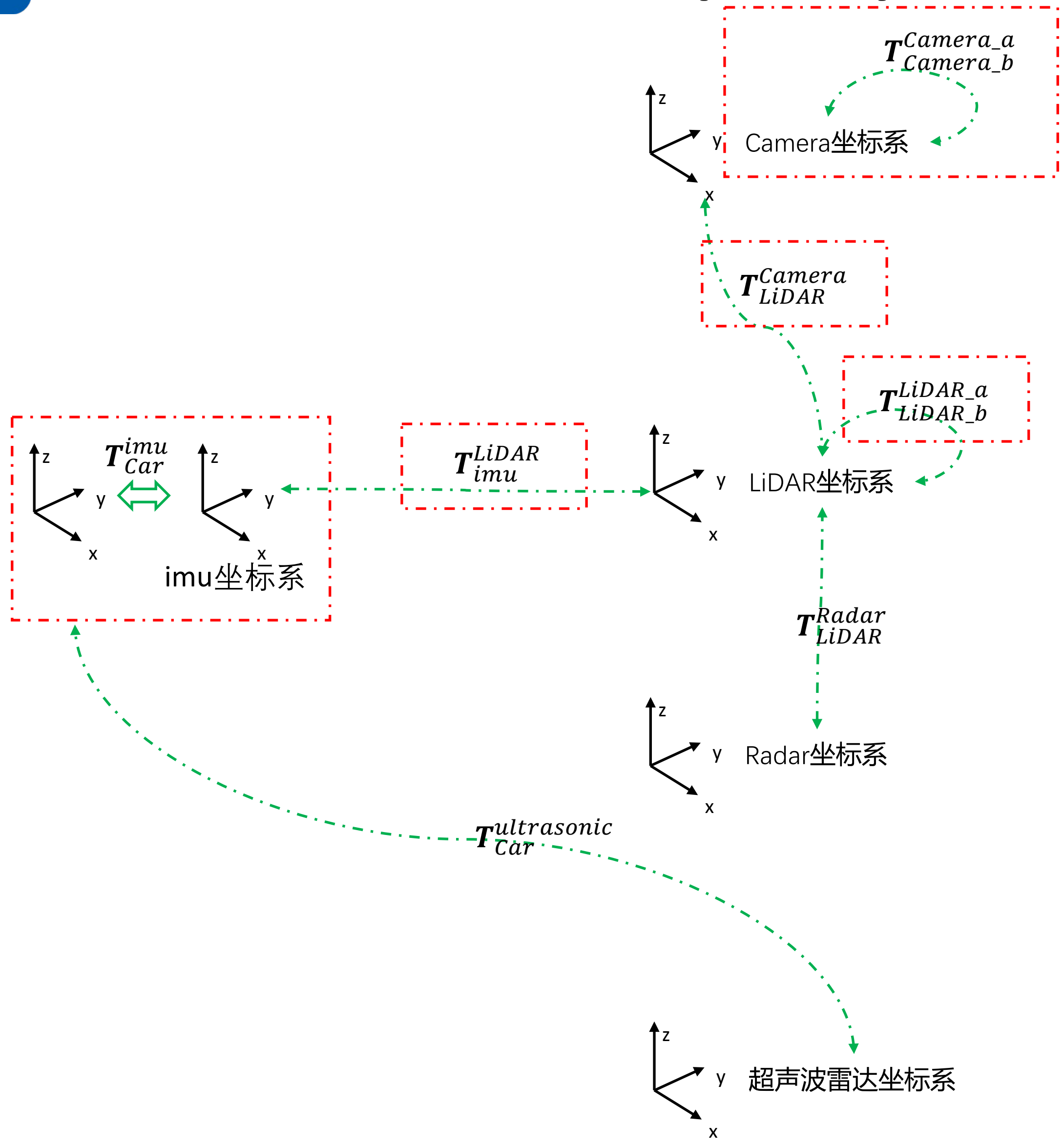
- $LiDAR_a$
- $LiDAR_b$



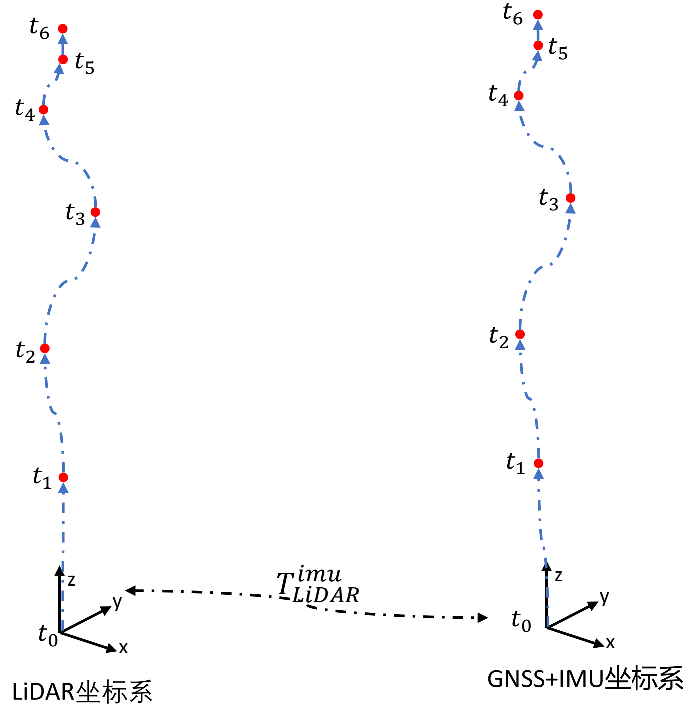
$$T=\begin{bmatrix} 0.995004 & -0.0998334 & 0 & 0.2 \\ 0.0998334 & 0.995004 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(roll, pitch, yaw) = (0, 0, 0.1)$$

外参5：LiDAR和IMU(GNSS)



- 两帧点云可以通过ICP，获得$T_{LiDAR_a}^{LiDAR_b}$
- 同一个LiDAR，会高频的连续生成点云
- IMU+GNSS可以连续观测到位姿变化



基于GNSS+IMU的运动标定

IMU+GNSS生成的位姿序列：$T_{imu}^{I_0}, T_{imu}^{I_1}, T_{imu}^{I_2}, \cdots, T_{imu}^{I_n}$

LiDAR生成的位姿序列：$\boldsymbol{T}_{LiDAR}^{L_0}, \boldsymbol{T}_{L_0}^{L_1}, \boldsymbol{T}_{L_1}^{L_2}, \cdots, \boldsymbol{T}_{L_{n-1}}^{L_n}$

计算外参矩阵$\boldsymbol{T}_{imu}^{LiDAR}$。

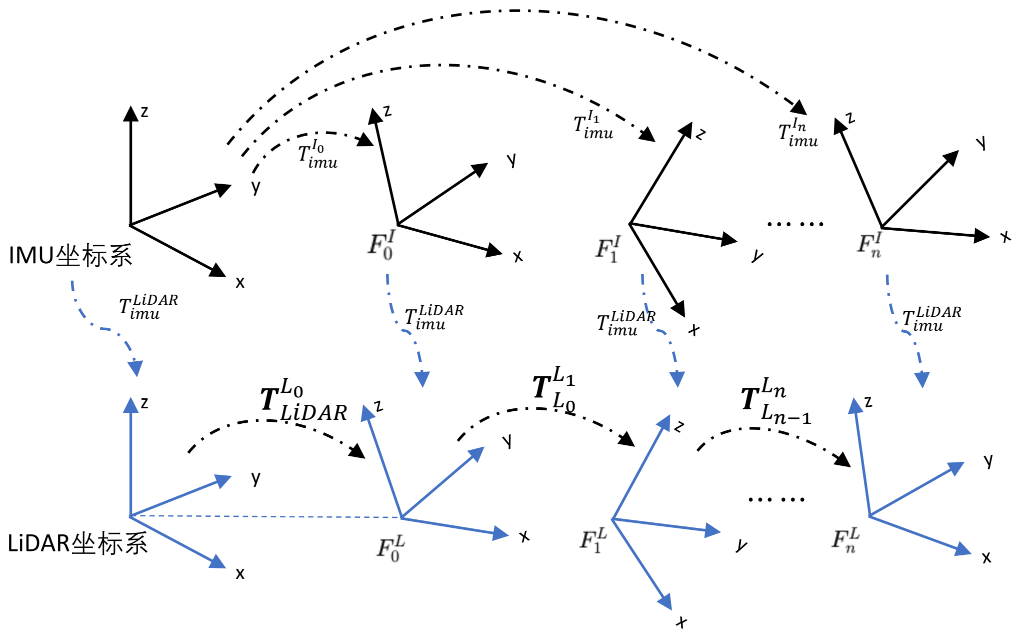
对于每一个时刻，都存在如下的对应关系：

$$
\begin{aligned}
T_{imu}^{I_i} &= \boldsymbol{T}_{imu}^{LiDAR}\boldsymbol{T}_{LiDAR}^{L_0}\boldsymbol{T}_{L_0}^{L_1}\dots\boldsymbol{T}_{L_{i-1}}^{L_i} \\
&= \boldsymbol{T}_{imu}^{LiDAR}\boldsymbol{T}_{LiDAR}^{L_i}
\end{aligned}
$$

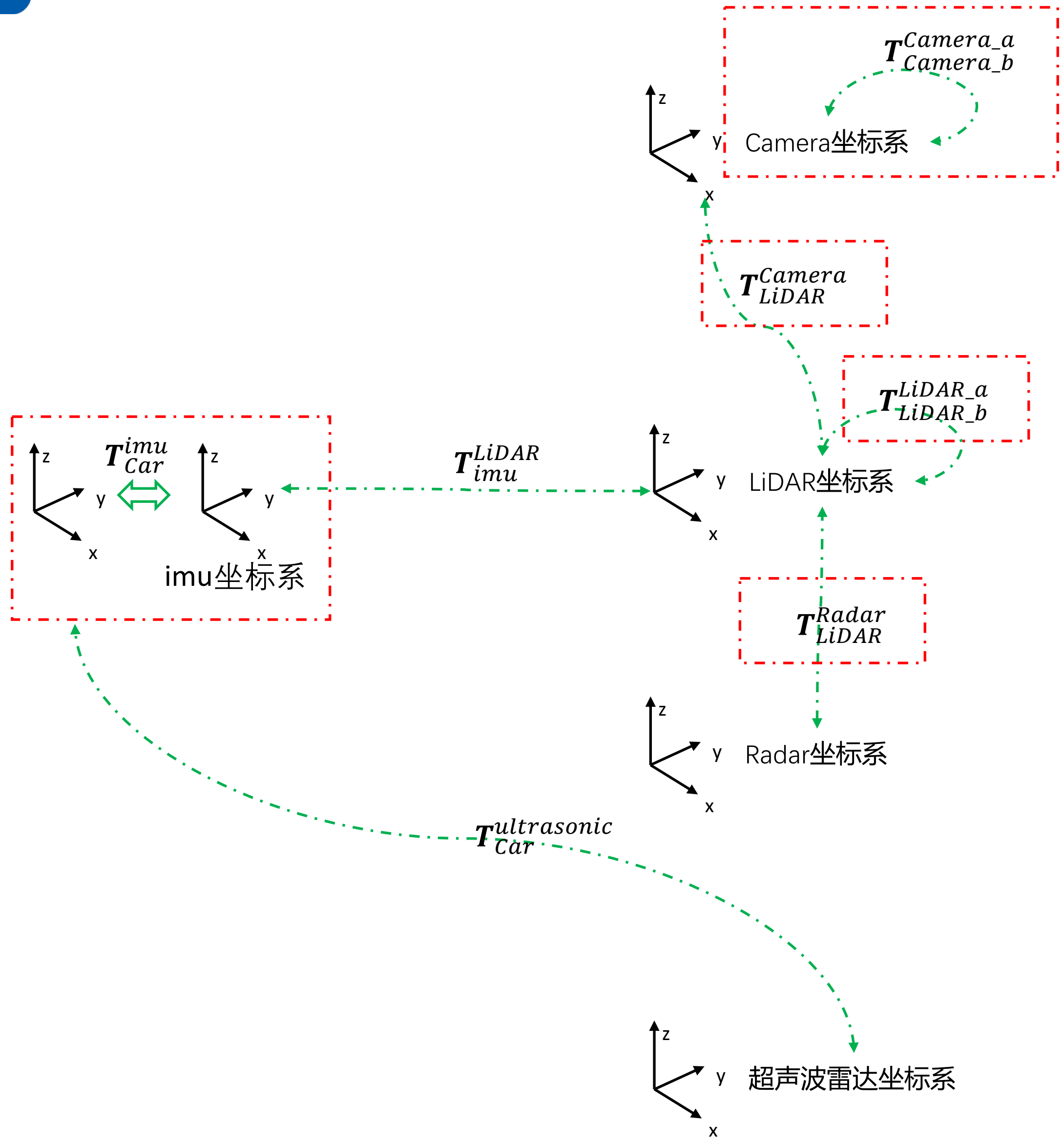
上式，通过将R表达成李代数形式，构建非线性优化问题：

$$
J = \sum_i (I - {T_{imu}^{I_i}}^T \boldsymbol{T}_{imu}^{LiDAR}\boldsymbol{T}_{LiDAR}^{L_i})
$$

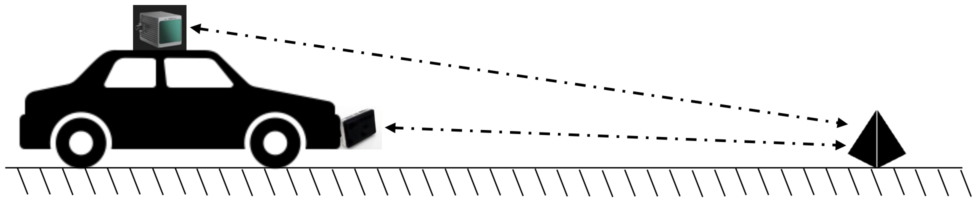
利用高斯牛顿或LM算法，可以求解 $\boldsymbol{T}_{imu}^{LiDAR}$



外参6：LiDAR和Radar



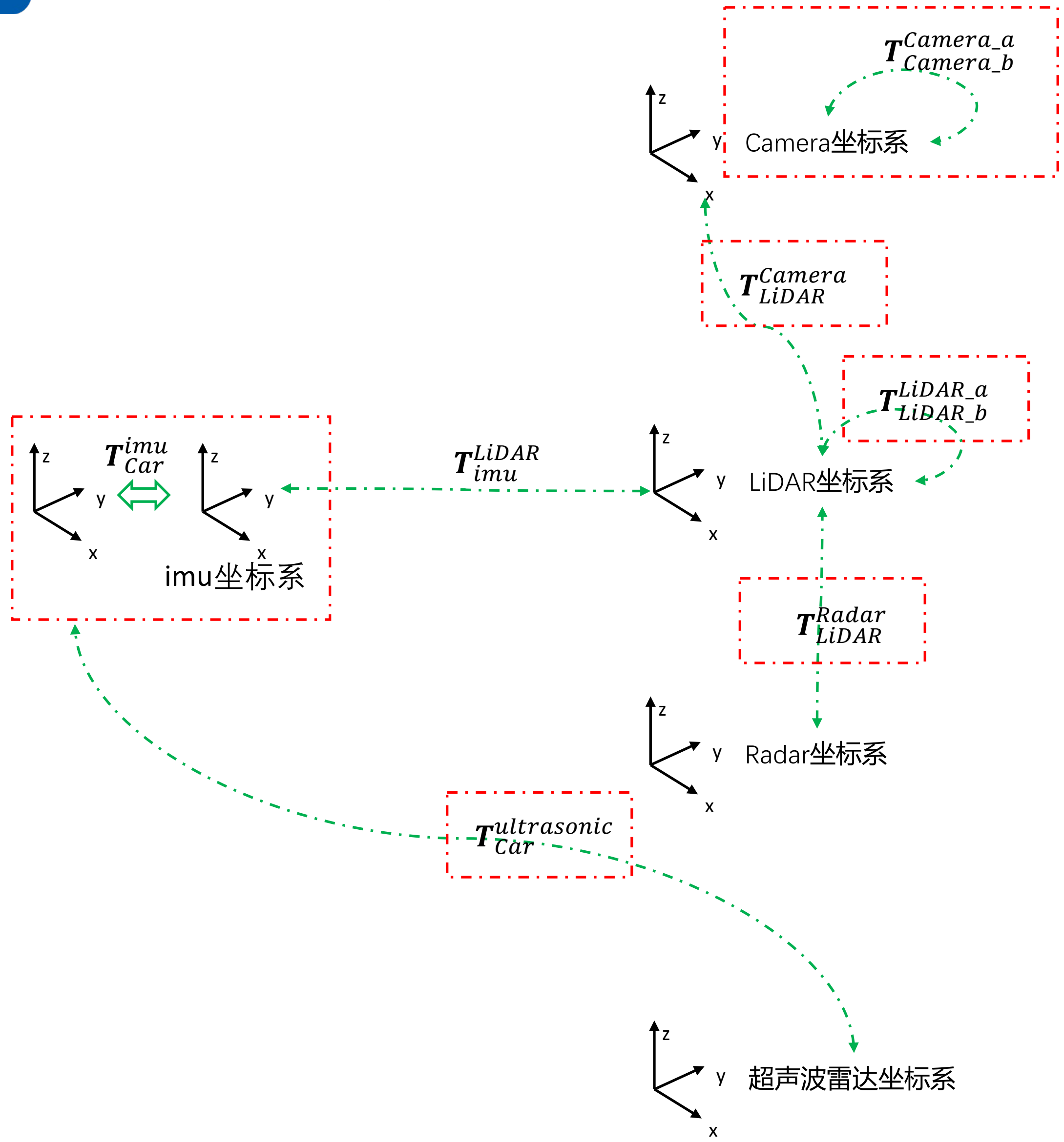
- Radar检测的目标无高度信息，仅含极坐标信息，因此标定主要关注(x, y, yaw)；
- 标定策略：将金属三角锥（检测目标）放置于自车正前方。



$P_{\mathrm{LiDAR}} = (x, y, z)$　　　$P_{radar} = (r, \theta)$

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta yaw) = (x - r\cos\theta\,, y - r\sin\theta\,, \tanh^{-1}\frac{y}{x} - \theta)$$

外参7：超声波雷达

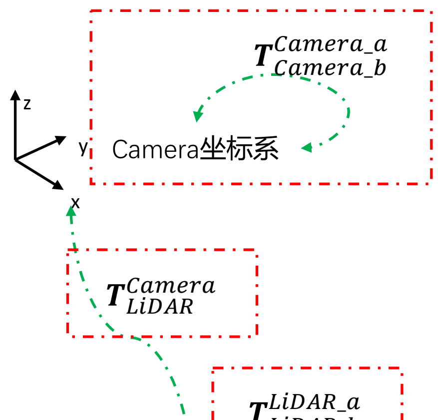


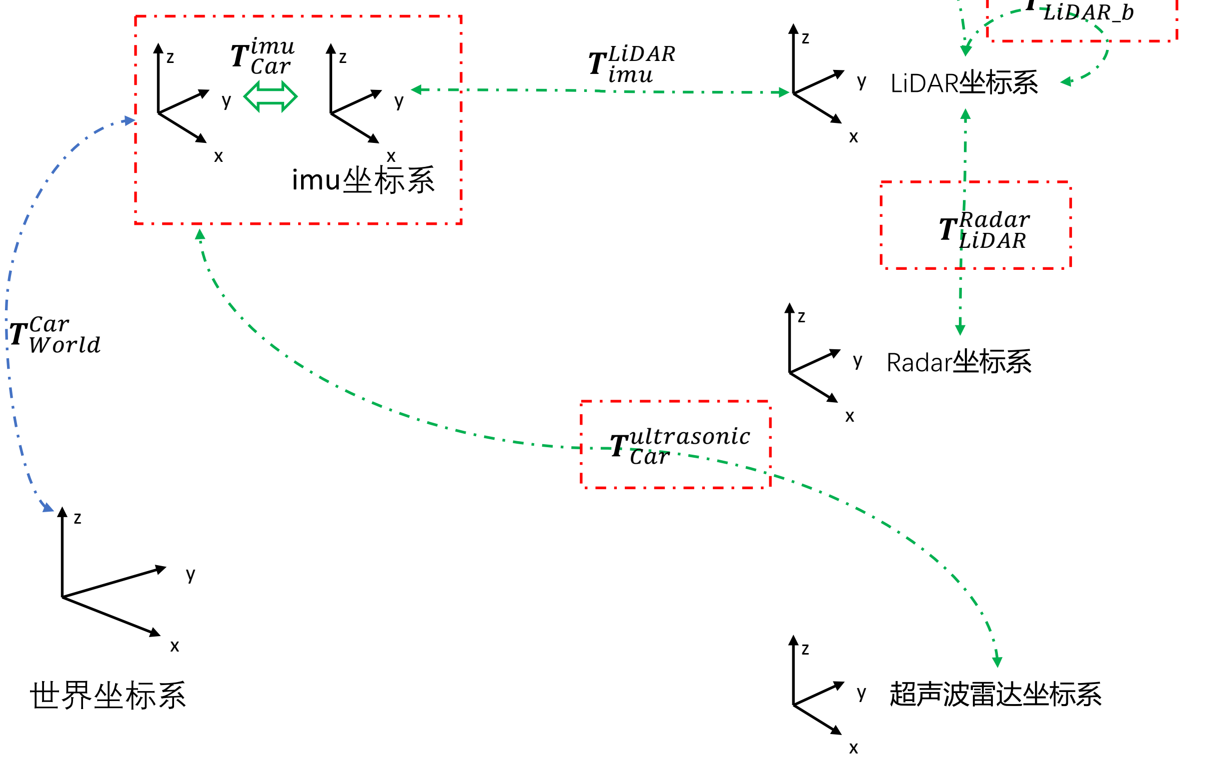
- 超声波感知距离以及角度分辨率都不高，因此安装时测量安装位置即可，无需标定。

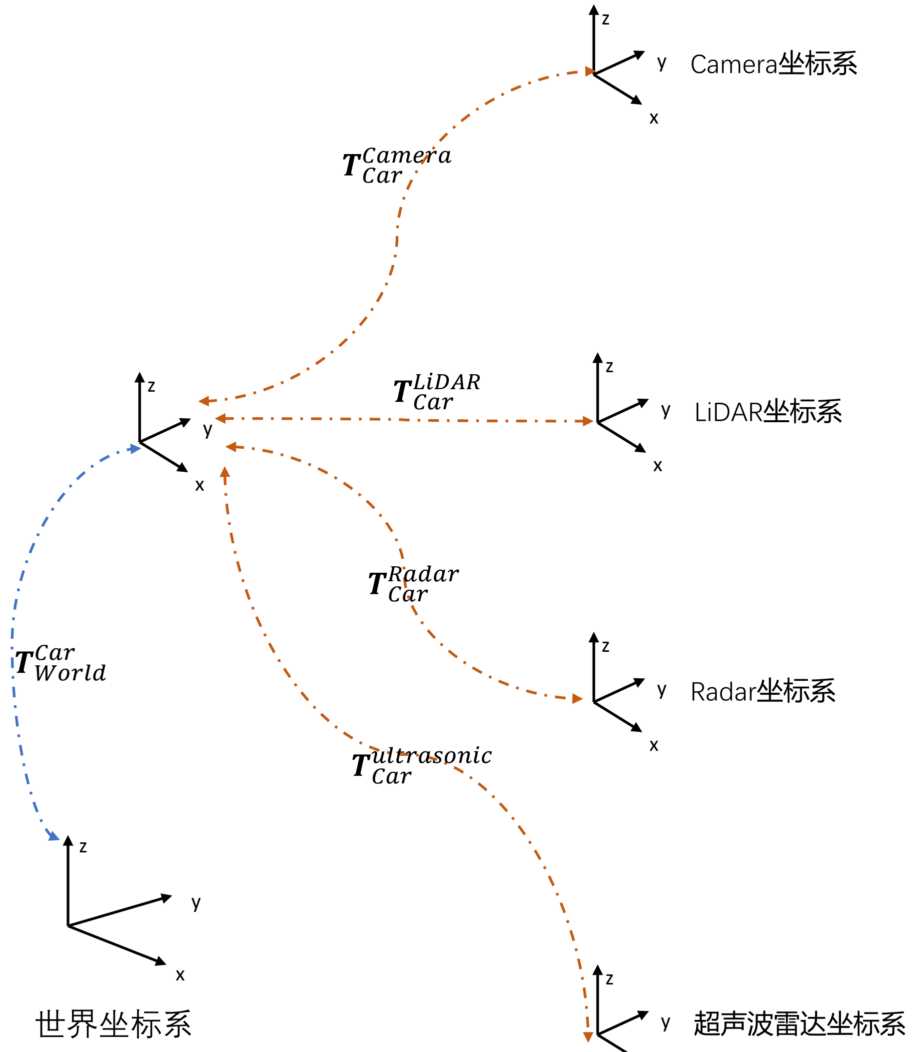
$$T_{Car}^{ultrasonic}$$

外参标定的答案

- IMU(GNSS) – Car
- LiDAR – Camera
- Camera – Camera
- LiDAR – LiDAR
- LiDAR – IMU(GNSS)
- LiDAR – Radar
- 超声波雷达– Car







本章内容

1. 关于标定：传感器内参及外参的介绍
2. 非线性优化简介
3. Camera内参标定
4. 多传感器系统外参标定
5. 外参的在线动态修正

外参的在线动态修正

什么是在线标定?

在车辆运行期间，动态修正传感器之间的相对位姿参数。与离线标定不同，在线标定不能摆场景（如标定板），因此难度更大。

为什么离线标好了，还需要在线标定?

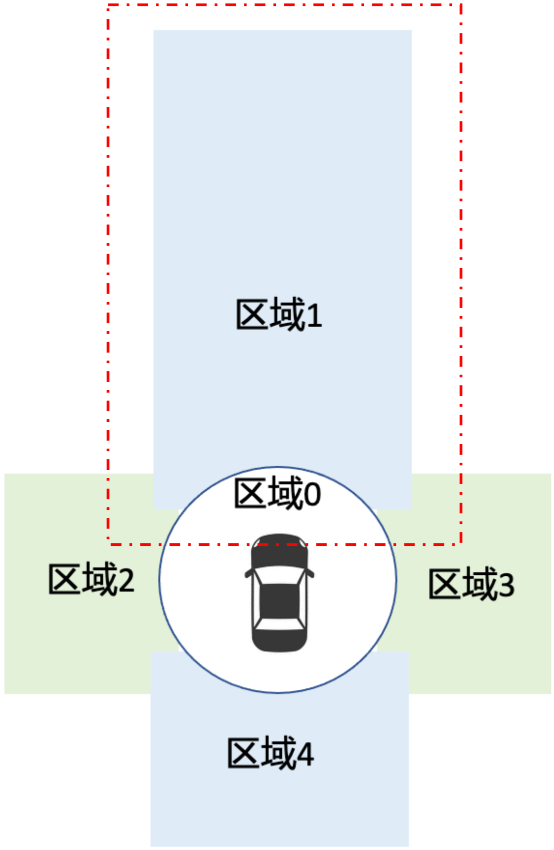
在车辆运行期间，传感器的安装位置因为振动或者外力碰撞会发生变化。

如何实现在线标定?

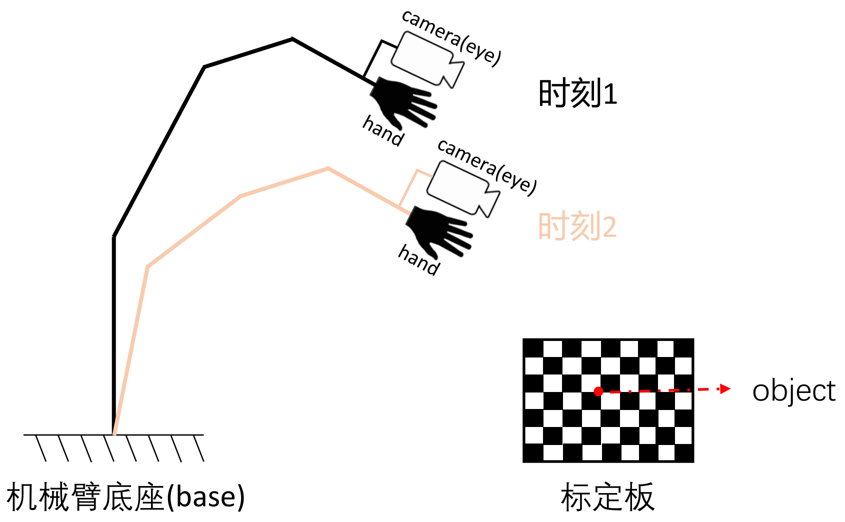
核心考虑前视区域，从传感器数据的丰富程度上，在线标定包括LiDAR和Camera。

实现的功能：

- 在线修正标定参数；
- 在线预警：当参数异常时发出报警。



传感器外参动态修正：思路1——手眼标定



机械臂底座和标定板的位置不变，已知$\boldsymbol{T}_{base}^{hand}$，通过机械臂的运动，求出hand到eye的位置关系 T_{hand}^{cam}：

$$\boldsymbol{T}_{base}^{hand_1}\boldsymbol{T}_{hand}^{cam}\boldsymbol{T}_{cam_1}^{object} = \boldsymbol{T}_{base}^{hand_2}\boldsymbol{T}_{hand}^{cam}\boldsymbol{T}_{cam_2}^{object}$$

$$\underbrace{{\boldsymbol{T}_{base}^{hand_2}}^{-1}\boldsymbol{T}_{base}^{hand_1}}_{A}\underbrace{\boldsymbol{T}_{hand}^{cam}}_{X} = \underbrace{\boldsymbol{T}_{hand}^{cam}}_{X}\underbrace{\boldsymbol{T}_{cam_2}^{object}{\boldsymbol{T}_{cam_1}^{object}}^{-1}}_{B}$$

$$A \;*\; X = X \;*\; B$$

其中，$T_{base}^{hand_1}$和$T_{base}^{hand_2}$已知，$T_{cam_2}^{object}$和 $T_{cam_1}^{object}$未知，需要从相机成像结果中求出，具体参考内参标定部分中的 $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{t})$ 估计。

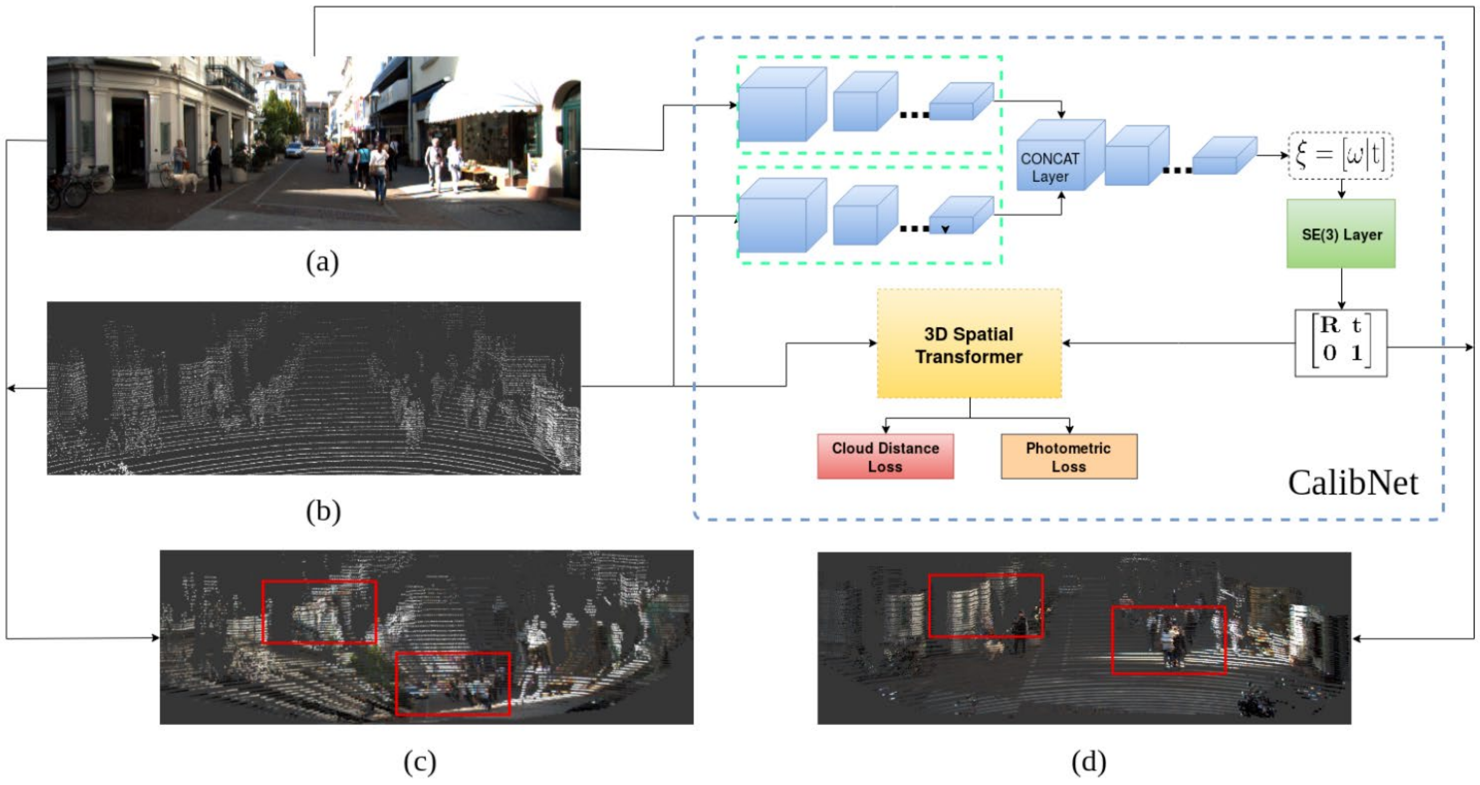
通过多个位置映射关系，构建优化问题，求解得到 T_{hand}^{cam}[1][2]。

两个传感器，通过观测同一组运动，可求出传感器之间的位姿关系。

如：LiDAR通过ICP等算法、Camera通过特征点或语义特征，结合IMU(GNSS)的里程计，构建动态手眼标定问题，动态修正外参。

[1] Y. Shiu, S. Ahmad Calibration of Wrist-Mounted Robotic Sensors by Solving Homogeneous Transform Equations of the Form AX = XB, 1989.
[2] R. Tsai, R. Lenz A New Technique for Fully Autonomous and Efficient 3D Robotics Hand/Eye Calibration, 1989.

传感器外参动态修正：思路2—— DeepLearning方法



a. RGB图片
b. LiDAR PointCloud
c. 未标定前投影
d. 标定后投影

- 优点：可以获取全面的特征信息，用于估计外参
- 缺点：由于R的约束问题，外参估计不是特别稳定，特别是姿态角

感谢聆听！

Thanks for Listening