卡尔曼滤波

简介：

其大体思想就是将状态变量与观测变量进行数据融合得到接近真实数据的数据，然后将这个数据作为下一过程的状态变量，再与下一过程的观测变量进行融合，如此往复，最后的数据就会非常接近真实数据。

整个过程分为预测与更新，主要由5个公式构成

预测：

1.先验估计

$$X_{kxian} = AX_{k-1} + Bu_{k-1}$$

2.先验误差的协方差矩阵

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$$

校正（更新）：

3.计算卡尔曼增益

$$K_k = \frac{P_k^- H^T}{HP_k^- H^T + R}$$

4.后验估计

$$X_{khou} = X_{kxian} + K_k(Z_k - HX_{kxian})$$

5.更新后验误差的协方差矩阵

$$P_k = (I - K_k H)P_k^-$$

状态空间方程

$X_k = AX_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1}$

$Z_k = HX_k + v_k$

其中

w_{k-1} 是过程噪声，模型可能会不准确引起的噪声。

v_k 是测量噪声，测量仪器自带的误差。

这两种噪声都符合高斯分布

$P(w)$ ~（0，Q）

$P(v)$ ~ （0，R）

其中Q,R为协方差矩阵，0是期望。假设状态方程是2维的。

Q R 是怎么求的呢

$$Q = E(w\ w^T)$$

$$E\left[\begin{pmatrix} w1 \\ w2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w1 & w2 \end{pmatrix}\right] = E\begin{pmatrix} w1^2 & w1w2 \\ w2w1 & w2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\left(w1^2\right) & E\left(w1w2\right) \\ E\left(w2w1\right) & E\left(w2^2\right) \end{pmatrix}$$

概率论公式：

X的方差： $VAR\left(x\right) = E\left(x^2\right) - E^2\left(x\right)$

$$cov\left(w1, w2\right) = E\left[\left(w1 - u1\right)\left(w2 - u2\right)\right]$$

$$\therefore Q = \begin{bmatrix} \sigma_{w1}^2 & cov\left(w1, w2\right) \\ cov\left(w2, w1\right) & \sigma_{w2}^2 \end{bmatrix}$$

可以表现出过程噪声的w1,w2的方差，还可以表现出w1和w2之间的关系

同理可以求R。

$$R = E(v\ v^T)$$

分析一下带噪声的状态空间方程

w_{k-1} v_k 这两个噪声是没有办法建模的，对于第一个公式我们只掌握了前面的部分：

$$X_{kxian} = AX_{k-1} + Bu_{k-1}$$

二者相比少了过程噪音这一项，后面的过程噪音我们是不知道的，所以可以认为他是一个估计值，直接通过这个上面公式去掉过程噪音得到的公式，我们叫做先验估计。其中Xk-1 是上一次算出来的估计值。

由 $Z_k = HX_k$ 推导出 $X_{kmea} = H^- Z_k$ （测出来的结果）

我们有了两个结果 一个是算出来的结果，一个是测出来的结果。这两个结果都是不太准确的，那么如何通过两个不太准确的结果，估计出相对准确的结果？

这里引用链接（融合概念）、

$$X_{khou} = X_{kxian} + G(H^- Z_k - X_{kxian})$$

当G = 0 时，相信算出来的结果；当G=1时，相信测出来的结果。

令 $G = K_k H$

$$X_{khou} = X_{kxian} + K_k(Z_k - HX_{kxian})$$

当Kk = 0 时 估计值 = 算出来的值 ，Kk = H-时，估计值 = 测出来的值

目标寻找Kk 使得 $X_{khou} -> X_k$ （另估计值趋近于实际值）

Kk的选择与噪声有关，如果计算的误差比较大，相信测量的结果；如果测量的误差比较大，相信计算出来的结果。Kk的取值跟误差息息相关。

如何去量化误差?

引入

$e_k = X_k - X_{khou}$

误差也符合高斯分布

$P(e_k)$ ~（0，P） 其中 $P = E(e, e^T) = \begin{bmatrix} \sigma_{e1}^2 & cov\,(e1, e2) \\ cov\,(e2, e1) & \sigma_{e2}^2 \end{bmatrix}$

如果方差越小呢，说明误差的高斯分布越接近期望值，即越接近于0；

∴目标为选择合适的Kk使得 $tr(P)$，迹最小。即 $\sigma_{e1}^2 + \sigma_{e2}^2$ 最小。

推导

卡尔曼增益Kk

$$P_k = E(e_k\ e_k^T) = E[(x_k - x_{khou})(x_k - x_{khou})^T]$$

其中：

$$\begin{aligned} X_k - X_{khou} &= X_k - (X_{kxian} + K_k(Z_k - HX_{kxian})) \\ &= X_k - X_{kxian} - K_k Z_k + K_k H X_{kxian} \end{aligned}$$

$Z_k = HX_k + v_k$ 带入

$$\begin{aligned} X_k - X_{khou} &= X_k - X_{kxian} - K_k\ (HX_k + v_k) + K_k H X_{kxian} \\ &= X_k - X_{kxian} - K_k H X_k - K_k v_k + K_k H X_{kxian} \\ &= (X_k - X_{kxian}) - K_k H\ (X_k - X_{kxian}) - K_k v_k \\ &= (I - K_k H)\ (X_k - X_{kxian}) - K_k v_k \end{aligned}$$

令 $e_k^- = (X_k - X_{kxian})$ ek的先验

$$\begin{aligned} P_k &= E(e_k\ e_k^T) \\ &= E[(x_k - x_{khou})(x_k - x_{khou})^T] \\ &= E[[(I - K_k H)\ e_k^- - K_k v_k][I - K_k H)\ e_k^- - K_k v_k]^T] \end{aligned}$$

其中 $[(I - K_k H)\ e_k^- - K_k v_k]^T = [e_k^{-T}(I - K_k H)^T - v_k^T K_k^T]$

$$\begin{aligned} P_k = E(e_k\ e_k^T) &= E[(x_k - x_{khou})(x_k - x_{khou})^T] \\ &= E[[(I - K_k H)\ e_k^- - K_k v_k]\,[e_k^{-T}(I - K_k H)^T - v_k^T K_k^T]] \end{aligned}$$

展开。。$E(e_k^- v_k^T) = 0$ 两者相互独立，所以为0.

$P_k = E(e_k\ e_k^T)\ =\ (I-K_kH)E(e_k^- e_k^{-T})(I-K_kH)^T + K_kE(v_kv_k^T)K_k^T$

其中 $E(e_k^- e_k^{-T})\ =\ P_k^-\qquad E(v_kv_k^T)\ =\ R$

带入后展开

$P_k =\ \ P_k^-\ -K_kHP_k^-\ -\ \ P_k^-\ H^TK_k^T +\ K_kHP_k^-H^TK_k^T +\ K_kRK_k^T$

其中两项互为转置，他们的迹相等。

$tr(P_k) =\ \ tr(P_k^-)\ \ -\ 2tr(K_kHP_k^-)\ + tr(K_kHP_k^-H^TK_k^T) +\ tr(K_kRK_k^T)$

令 $\dfrac{dtr\,(p_k)}{dK_k} = 0$

矩阵公式

$\dfrac{dtr\,(AB)}{dA} = B^T\qquad \dfrac{dtr\,\left(ABA^T\right)}{dA} = 2AB$

$\dfrac{dtr\,(p_k)}{dK_k} = 0 - 2(HP_k^-)^T\ +\ 2K_kHP_k^-H^T + 2K_kR$

令其=0 (协方差矩阵的转置为其本身)

$-P_k^-H^T\ +\ K_k(HP_k^-H^T + R)\ =\ 0$

$K_k = \dfrac{P_k^-H^T}{HP_k^-H^T + R}$

先验误差的协方差矩阵推导

$P_k^-\ \ =\ [e_k^-\ e_k^{-T}]$

$e_k^- = X_k - X_{kxian}\ =\ AX_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1}\ -\ AX_{k-1(hat)} - Bu_{k-1}\ =\ A(X_{k-1} - X_{k-1(hat)}) + w_{k-1}\ =\ Ae_{k-1} + w_{k-1}$

带入。。（未完）

扩展的卡尔曼滤波

卡尔曼滤波是最优化的线性滤波器，在非线性系统中使用应用需要将分线性系统进行线性化

因为正态分布的噪声 w v，在通过非线性的系统后就不再是正态分布的了，所以想使用卡尔曼滤波就要将其线性化

$Taylor$ 级数展开式

$f(x) = f(x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x - x_0)$

将 $f(x_k)$在x_{k-1hat} 处线性化，因为这里最接近真值

$x_k\ = f(x_{k-1hat}, u_{k-1}, w_{k-1}) + A(x_k\ - x_{k-1hat}) + W_kw_{k-1}$

$Z_k = h(x_{khat}, v_k) + H(x_k - x_{khat}) + V_kv_k$