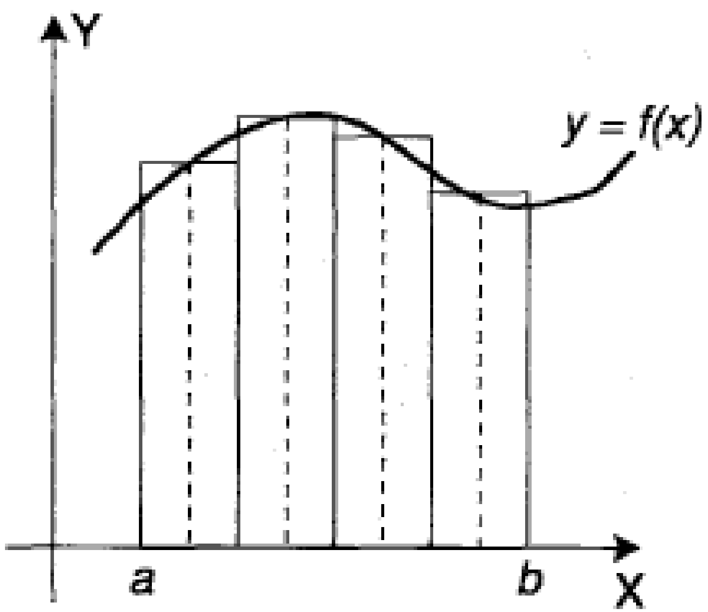
Escola do Mar,
Ciência e Tecnologia

# Cálculo II

Curso de Ciência da Computação
Campus Kobrasol

**Prof. Denise Prado Kronbauer**
denise.kronbauer@univali.br
denipk@gmail.com

Uma forma intuitiva de se calcular a área de regiões irregulares é pela aproximação por regiões conhecidas. Georg Friedrich Riemann, um grande matemático do século XIX, subdividiu estas regiões em retângulos para obter um valor aproximado de suas áreas.




Ele observou que, quanto maior o número de retângulos utilizados nesta aproximação, mais próximo chegava do valor real da área.

## Soma de Riemann:

A soma de Riemann consiste em se fazer uma aproximação da área delimitada entre o gráfico de $f(x)$ e o eixo $x$, para $x$ variando num intervalo $[a, b]$. Para tanto, podemos dividir o intervalo $[a, b]$ em $n$ subintervalos e construir diversos retângulos de base $\Delta x$ e altura $f(x)$.

Evidentemente, ao usarmos cada vez mais retângulos, vamos nos aproximar ainda mais, mas uma aproximação sempre será apenas uma aproximação. E se pudéssemos ter uma soma de Riemann com *infinitas* subdivisões iguais?

Não podemos definir $n = \infty$, pois infinito não é um número real, mas podemos usar a notação de “tender ao infinito”.

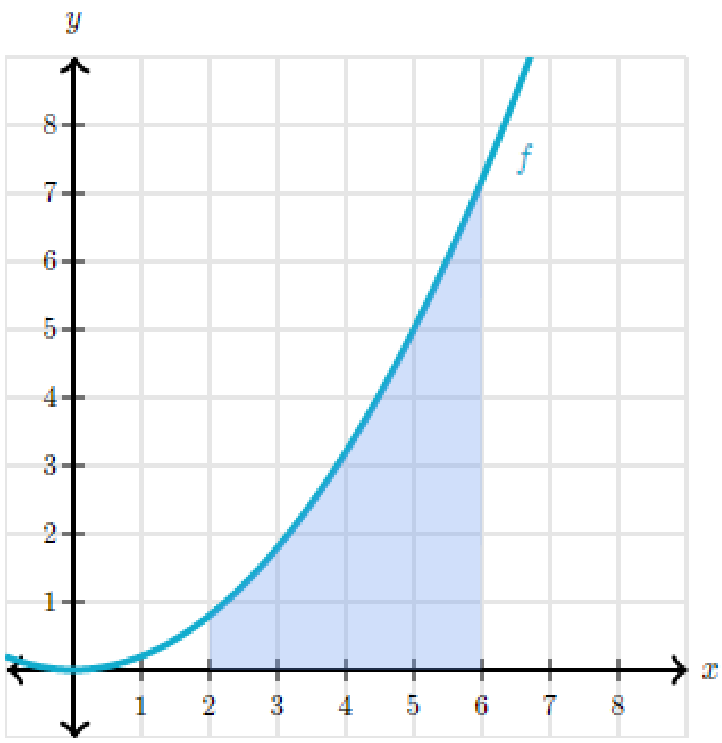
Assim, a integral definida de uma função contínua $f(x)$ sobre o intervalo $[a, b]$, é o limite de uma soma de Riemann conforme o número de subdivisões se aproxima do infinito, ou seja,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) * \Delta x}$$

em que $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

**Exemplo:** Determinar a área sob o gráfico de

$$f(x) = \frac{1}{5}x^2 \text{ entre } x = 2 \text{ e } x = 6.$$

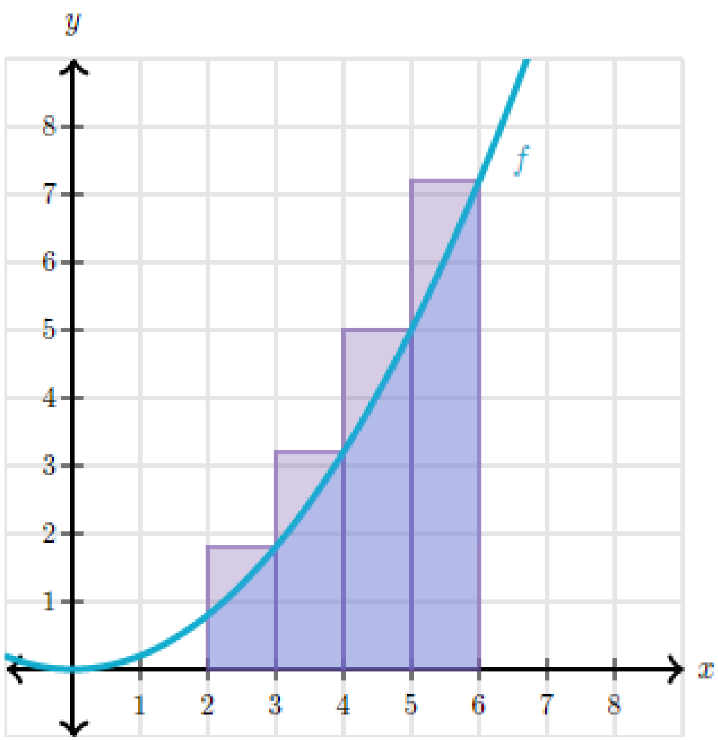



Usando a notação da integral definida, podemos representar a área exata:

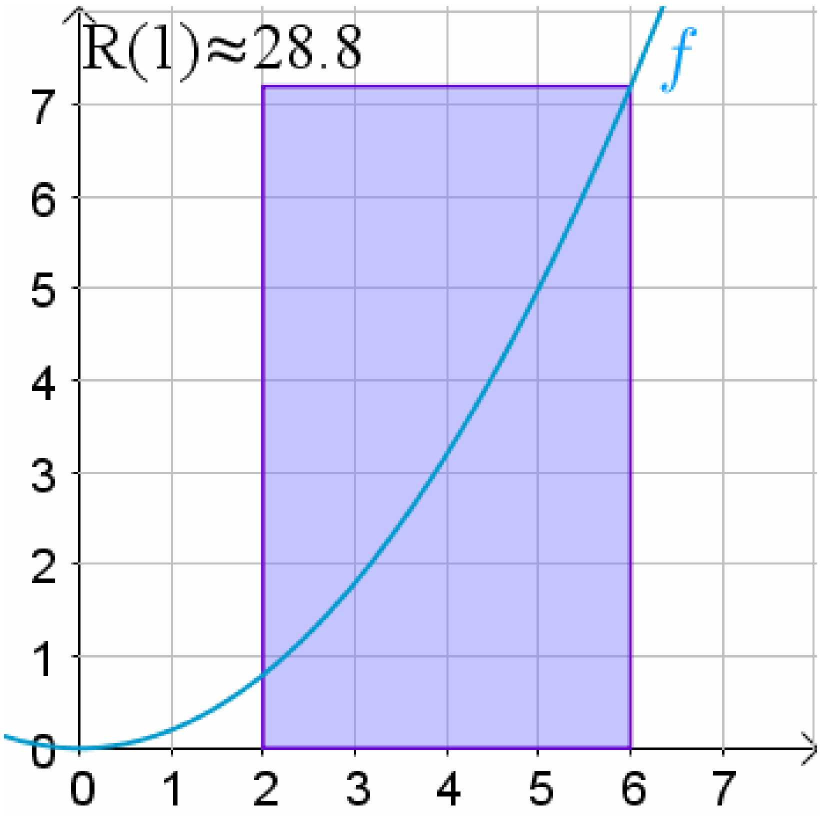
$$\int_2^6 \frac{1}{5}x^2$$

Podemos aproximar essa área usando as somas de Riemann.

Por exemplo, se dividirmos a área em 4 retângulos de largura igual, conforme a imagem a seguir, notamos que a área real está superestimada.




Podemos melhorar nossa aproximação dividindo a área em mais retângulos com menor largura, É possível ver como a aproximação se aproxima mais da área real à medida que o número de retângulos vai de 1 para 100:



Analiticamente, a área sob a curva pode ser determinada utilizando-se do **Teorema Fundamenta do Cálculo**:

Se $f$ é uma função não negativa e contínua no intervalo $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

em que $F$ é qualquer função com $F'(x) = f(x)$ para todo $x$ em $[a, b]$.

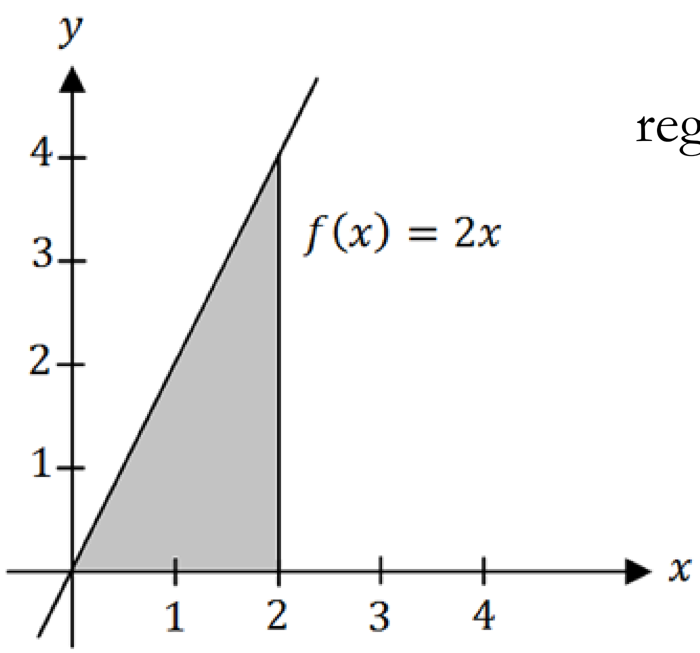
Resolvemos a integral da forma como aprendemos e em seguida substituímos no resultado o valor do limite superior subtraindo o valor do limite inferior também substituído na função:

$$\int_{2}^{6} \frac{1}{5} x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{5} \times \frac{x^3}{3} = \left. \frac{x^3}{15} \right|_{2}^{6}$$

$$\left. \frac{x^3}{15} \right|_{2}^{6} = \frac{(6)^3}{15} - \frac{(2)^3}{15} = \frac{216}{15} - \frac{8}{15} = \frac{208}{15} \approx 13{,}867$$

**Exemplo:** Determinar a área sob o gráfico de

$$f(x) = 2x \text{ entre } x = 0 \text{ e } x = 2$$




Esta integral representa a área da região delimitada pelo gráfico de $f(x) = 2x$, pelo eixo $x$ e pela reta $x = 2$.

$$Área = \int_0^2 2x\,dx = \left(\frac{2x^2}{2}\right)_0^2$$

$$= (x^2)_0^2 = (2^2) - (0^2) = 4$$

# Propriedades:

1) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx, \quad k \text{ uma constante}$

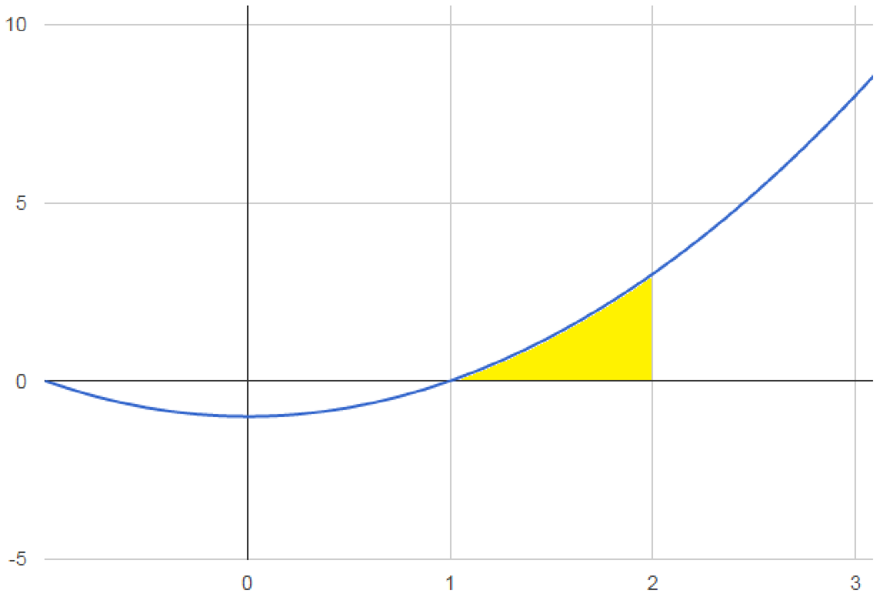
2) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad a < c < b$

4) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

5) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

**Exemplo:** Determinar a área da região delimitada pelo eixo $x$ e pelo gráfico de $f(x) = x^2 - 1$, e $1 \leq x \leq 2$




$$Área = \int_1^2 (x^2 - 1)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Big|_1^2$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1\right)$$

$$= \frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}$$

Então, a área da região é de $\frac{4}{3}$ unidades quadradas.

## Exemplo:

Calcular a integral definida: $\int_0^1 (4t+1)^2\,dt$

$$\int_0^1 (4t+1)^2\,dt = \int_0^1 (16t^2+8t+1)\,dt$$

$$= \left(\frac{16t^3}{3}+\frac{8t^2}{2}+t\right)\Bigg|_0^1 = \left[\frac{16(1^3)}{3}+\frac{8(1^2)}{2}+1\right]-\left[\frac{16(0^3)}{3}+\frac{8(0^2)}{2}+0\right]$$

$$= \frac{16}{3}+4+1 = \frac{16+12+3}{3} = \boxed{\frac{31}{3}}$$

**Exercícios:** Calcular as seguintes integrais definidas:

1) $\int_0^1 3x\,dx$

2) $\int_{-1}^0 (x-2)\,dx$

3) $\int_0^1 (2t+3)^3\,dt$

4) $\int_0^3 e^{2x}\,dx$

5) $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

6) $\int_1^4 -3\sqrt{x}\,dx$

7) $\int_{-1}^1 (\sqrt[3]{t}-2)\,dt$

8) $\int_1^4 \frac{u-2}{\sqrt{u}}\,du$

9) $\int_{-1}^0 \left(s^{\frac{1}{3}}-s^{\frac{2}{3}}\right)ds$

10) $\int_0^1 \frac{x-\sqrt{x}}{3}\,dx$

11) $\int_0^4 \frac{x^{1/2}}{7x}\,dx$

12) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$

13) $\int_1^3 \frac{e^{3/x}}{x^2}\,dx$

14) $\int_{-1}^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$

15) $\int_0^2 \frac{x}{1+4x^2}\,dx$

## Respostas:

*1)* $3/2$

*2)* $-5/2$

*3)* $68$

*4)* $\frac{e^6}{2} - \frac{1}{2}$

*5)* $\ln 2$

*6)* $-14$

*7)* $-4$

*8)* $2/3$

*9)* $-27/20$

*10)* $-1/18$

*11)* $4/7$

*12)* $2$

*13)* $\frac{e^3}{3} - \frac{e}{3}$

*14)* $0$

*15)* $\frac{\ln 17}{8}$

UNIVALI

Escola do Mar,
Ciência e Tecnologia

# Cálculo II

Curso de Ciência da Computação
Campus Kobrasol

**Prof. Denise Prado Kronbauer**
denise.kronbauer@univali.br
denipk@gmail.com

De acordo com a definição, a área da região limitada

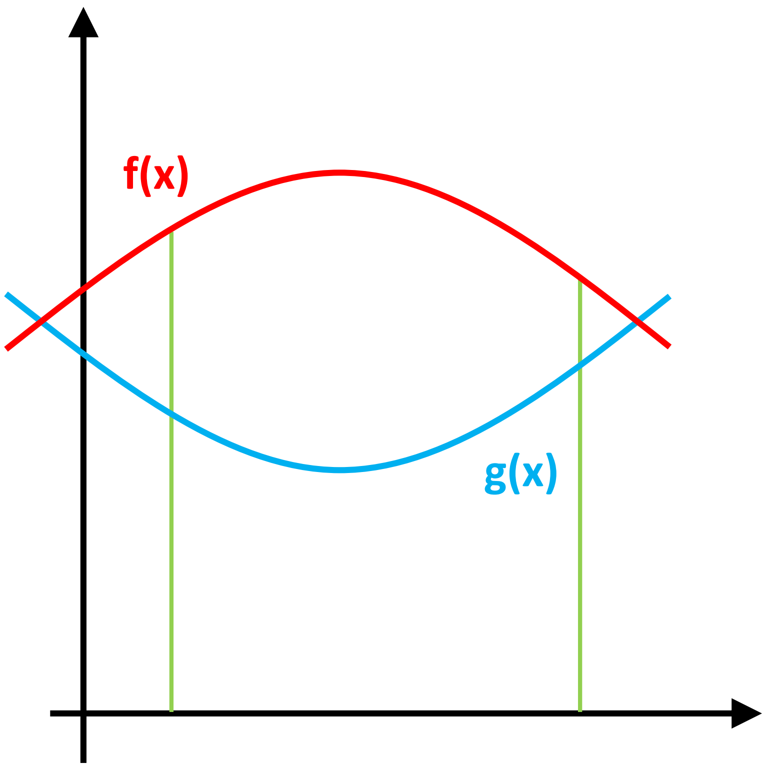
pelo gráfico de uma função $f$, pelo eixo $x$ e

pelas retas $x = a$ e $x = b$ é dada por:

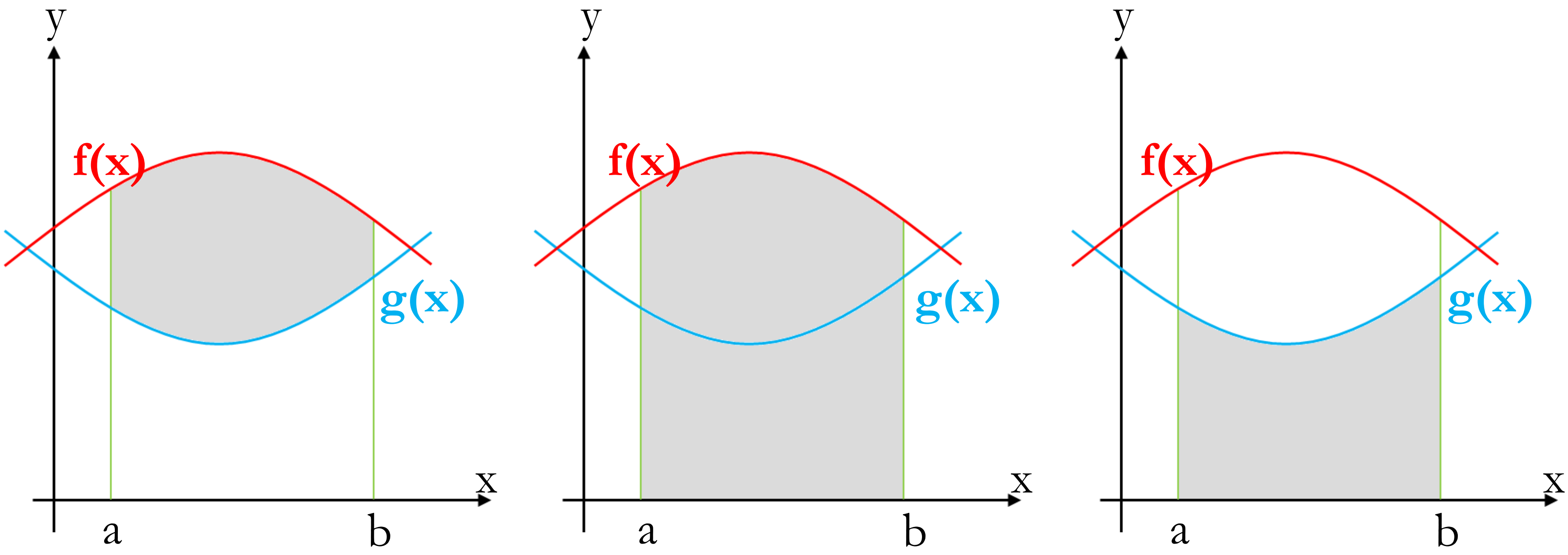
$$\boxed{\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Esta integral é chamada de **integral definida**.

Vamos considerar a região limitada pelos gráficos de $f, g, x = a$ e $x = b$, conforme a figura.




Se os gráficos estiverem acima do eixo $x$, então é possível interpretar a área da região entre os gráficos como a área da região abaixo do gráfico de $f$ menos a área da região abaixo do gráfico de $g$:




Área entre $f$ e $g$ = Área da região abaixo de $f$ – Área da região abaixo de $g$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$$

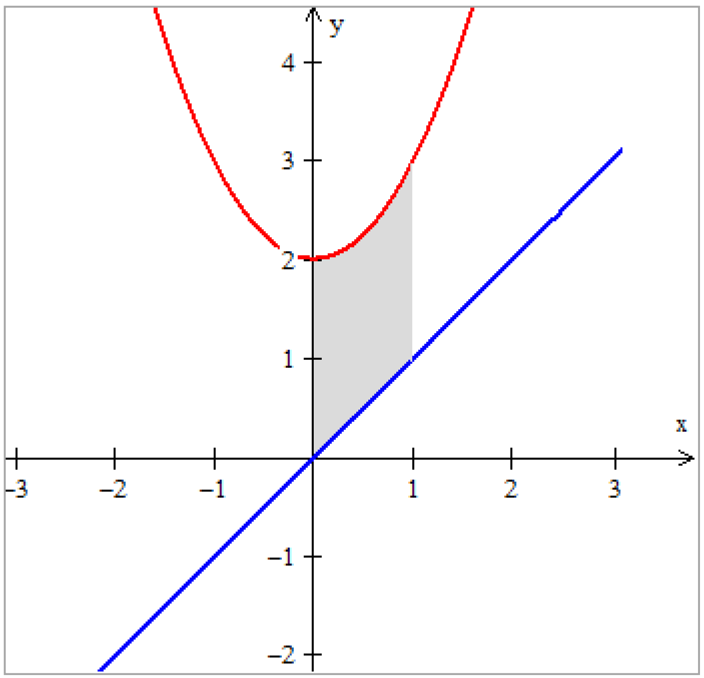
## Definição:

Se $f$ e $g$ são contínuos em $[a, b]$ e $g(x) \leq f(x)$ para todo $x$ no intervalo, então a área da região limitada pelos gráficos de $f$, $g$, $x = a$ e $x = b$ é dada por:

$$\boxed{A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx}$$

**Exemplo:** Determine a área da região limitada pelos gráficos de

$$y = x^2 + 2 \text{ e } y = x \text{ para } 0 \le x \le 1.$$




$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

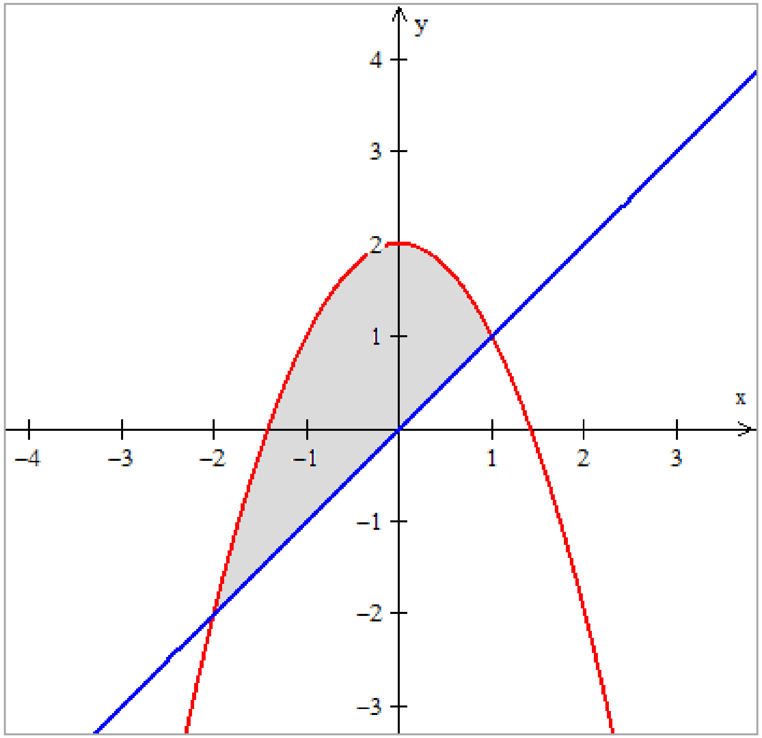
$$A = \int_0^1 [(x^2 + 2) - (x)]\, dx$$

$$A = \int_0^1 (x^2 + 2 - x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1$$

$$\boxed{A = \frac{11}{6}\, unidades\ quadradas}$$

**Exemplo:** Determine a área da região limitada pelos gráficos de

$$y = 2 - x^2 \text{ e } y = x.$$



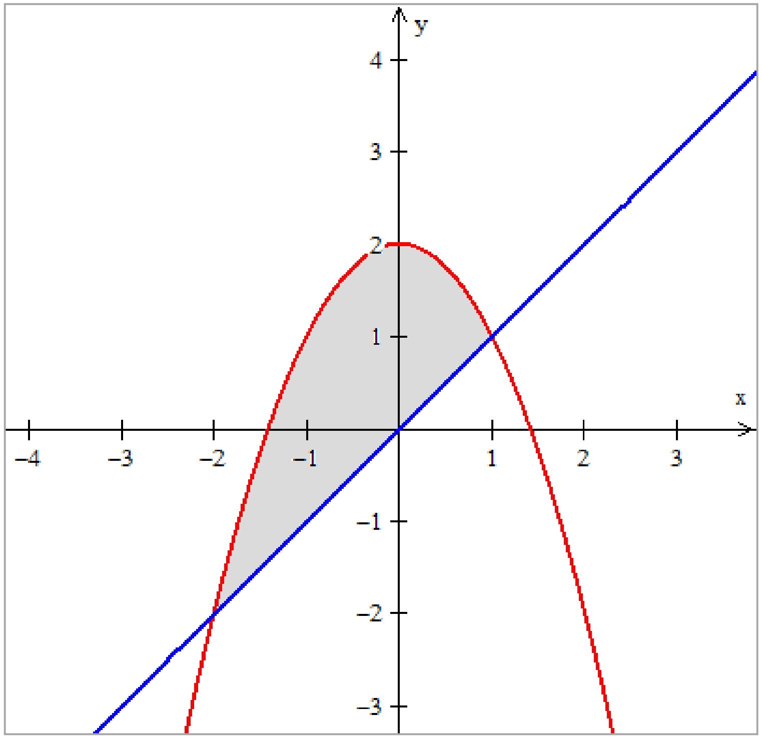

Como o intervalo não é dado, precisamos inicialmente encontrar os pontos de interseção entre os gráficos:

$$2 - x^2 = x \quad \rightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0$$

$$\boxed{x = -2 \quad e \quad x = 1}$$

**Exemplo:** Determine a área da região limitada pelos gráficos de

$$y = 2 - x^2 \text{ e } y = x.$$




$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

$$A = \int_{-2}^{1} [(2 - x^2) - (x)]\,dx$$

$$A = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1}$$

$$\boxed{A = \frac{9}{2}\, unidades\ quadradas}$$

**Exercícios:** Determine a área da região limitada pelos gráficos:

*a)* $f(x) = x^2 - 6x$ e $g(x) = 0$

*b)* $y = x^2 - 3x - 4$ e pelo eixo $x$

*c)* $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e $g(x) = -x^2 + 2x + 3$

*d)* $f(x) = 3(x^3 - x)$ e $g(x) = 0$

*e)* $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ e $g(x) = -x^2 + 2x$

## Respostas:

a) 36 unidades quadradas

b) 125/6 unidades quadradas

c) 9 unidades quadradas

d) 3/2 unidades quadradas

e) 24 unidades quadradas

UNIVALI
Escola do Mar,
Ciência e Tecnologia

# Cálculo II

Curso de Ciência da Computação
Campus Kobrasol

**Prof. Denise Prado Kronbauer**
denise.kronbauer@univali.br
denipk@gmail.com

Na definição de integral definida, consideramos a função $f$ contínua num intervalo fechado e limitado.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

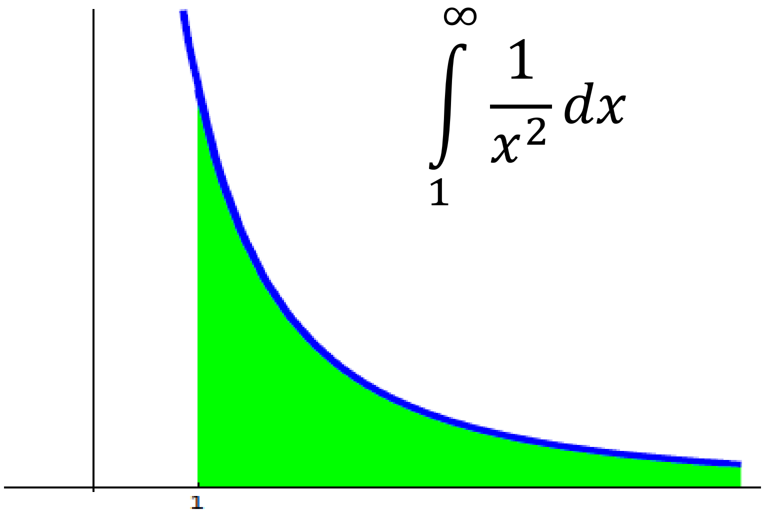
Agora, estenderemos esta definição para os seguintes casos:

**Caso 1:** Um ou ambos os limites de integração são infinitos;

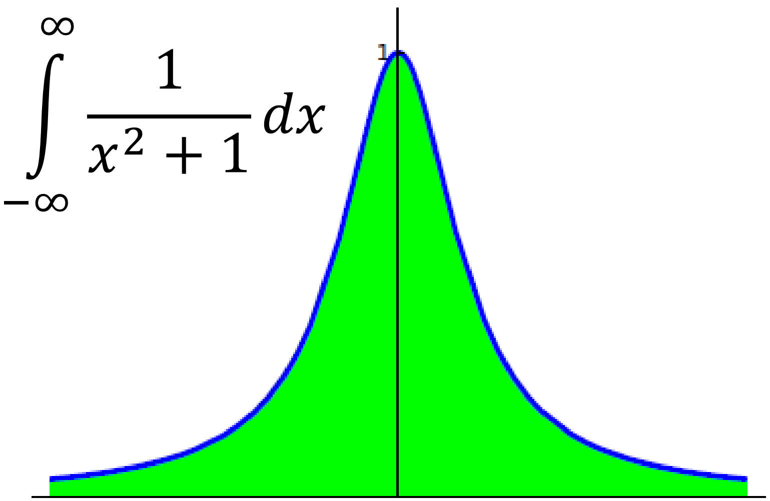
**Caso 2:** $f$ possui uma descontinuidade infinita no intervalo $[a, b]$.

As integrais que possuem uma dessas características

são chamadas **integrais impróprias.** Por exemplo, as integrais:




$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \qquad e \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$




são impróprias porque um ou ambos os limites de integração são infinitos.

## Caso 1: Cálculo de uma integral imprópria

### Integrais sobre intervalos infinitos

- Se $f$ for contínua no intervalo $[a, \infty)$, então

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

- Se $f$ for contínua no intervalo $(-\infty, b]$, então

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

- Se $f$ for contínua no intervalo $(-\infty, \infty)$, então

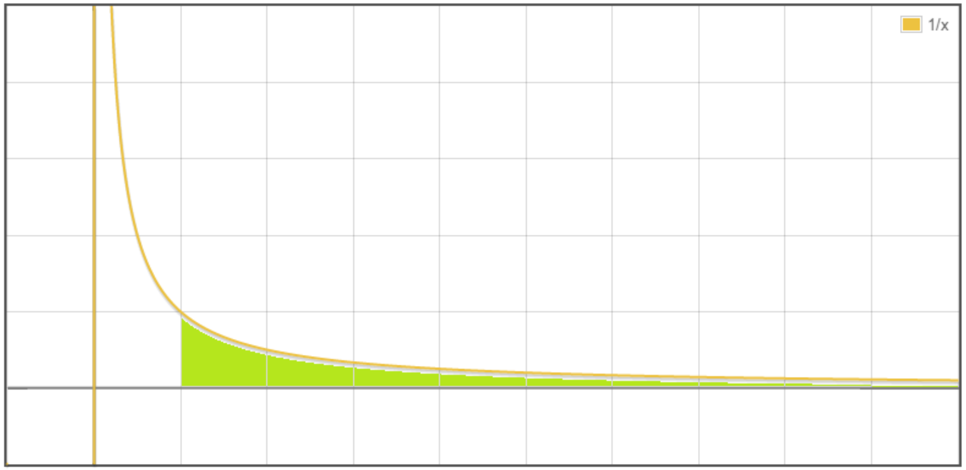
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$$

Nos dois primeiros casos, se o limite existir, então a integral imprópria será **convergente**; do contrário, ela será **divergente**.

No terceiro caso, a integral à esquerda será **divergente** se uma das integrais à direita for **divergente**.

## Exemplo:

Determine a convergência ou divergência de: $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$




$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} [\ln x]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1)$$

$$= \infty$$

Como o limite é infinito, a integral imprópria é divergente.

## Exemplo:

Determine a convergência ou divergência de: $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1-2x)^{3/2}}\,dx$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1-2x)^{3/2}}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{(1-2x)^{3/2}}\,dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\right]_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-2a}}\right]_a^0 = 1 - 0 = 1$$

Assim, a integral imprópria converge para 1.

## Caso 2: Cálculo de uma integral imprópria

### Integrais cujos integrandos têm descontinuidades infinitas

- Se $f$ for contínua no intervalo $[a, b)$ e tender a infinito em $b$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

- Se $f$ for contínua no intervalo $(a, b]$ e tender a infinito em $a$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

- Se $f$ for contínua no intervalo $[a, b]$, exceto para algum $c$ em $(a, b)$ no qual $f$ tende a infinito, então

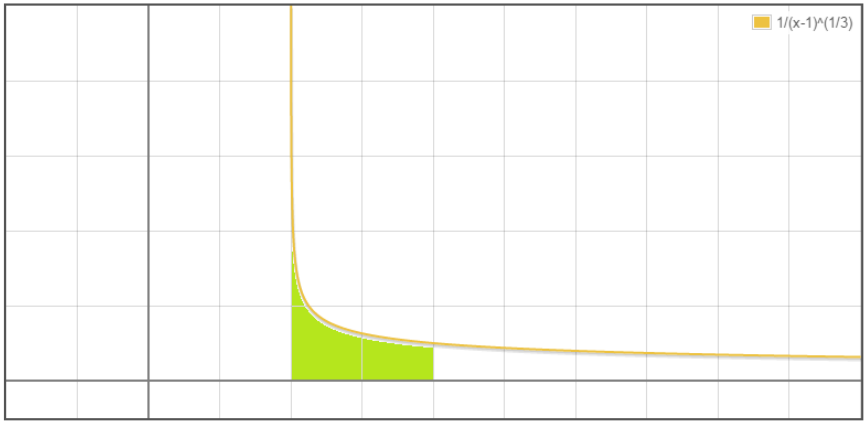
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Nos dois primeiros casos, se o limite existir, então a integral imprópria será **convergente**; do contrário, ela será **divergente**.

No terceiro caso, a integral à esquerda será **divergente** se uma das integrais impróprias à direita for **divergente**.

# Exemplo:

Determine a convergência ou divergência de: $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx$




$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx = \lim_{c\to 1^+} \int_c^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx$$

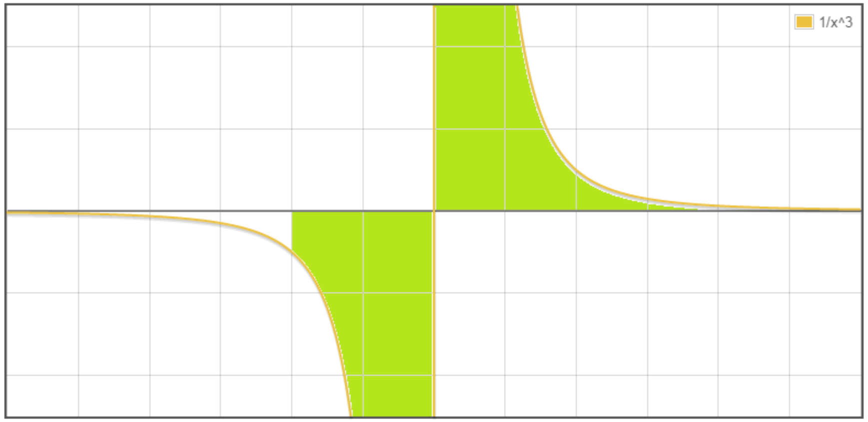
$$= \lim_{c\to 1^+} \left[\frac{3}{2}(x-1)^{2/3}\right]_c^2$$

$$= \lim_{c\to 1^+} \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2}(c-1)^{2/3}\right] = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}$$

Assim, a integral converge para $3/2$.

## Exemplo:

Determine a convergência ou divergência de: $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^3}\, dx$




$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^3}\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3}\, dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{x^3}\, dx$$

Aplicando a definição de integral imprópria, é possível verificar que cada uma dessas integrais é divergente. Portanto, a integral imprópria original também diverge.

**Exercícios:** Determinar se a integral imprópria é divergente ou convergente:

1) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

2) $\int_0^{\infty} e^{x/3} dx$

3) $\int_5^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-16}} dx$

4) $\int_{-\infty}^{0} e^{-x} dx$

5) $\int_1^{\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

6) $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-3x^2} dx$

7) $\int_0^{1} \frac{1}{1-x} dx$

8) $\int_0^{9} \frac{1}{\sqrt{9-x}} dx$

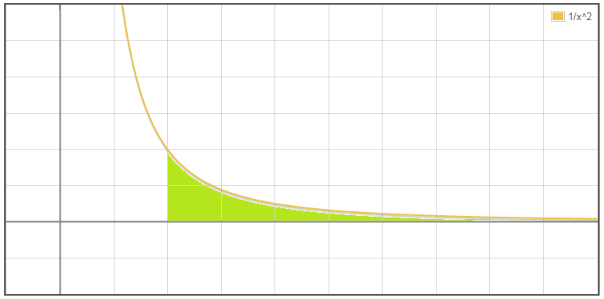
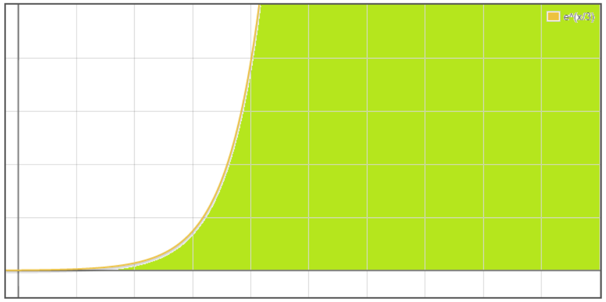
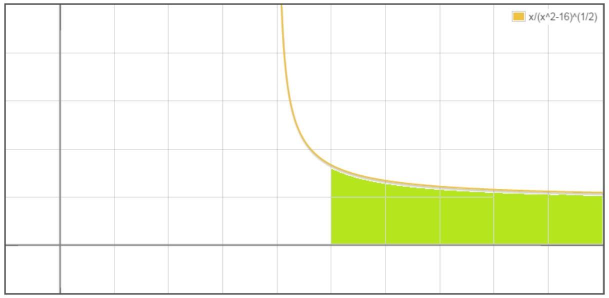
9) $\int_0^{1} \frac{1}{x^2} dx$

10) $\int_1^{3} \frac{1}{(x-1)^{4/3}} dx$

11) $\int_3^{4} \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} dx$

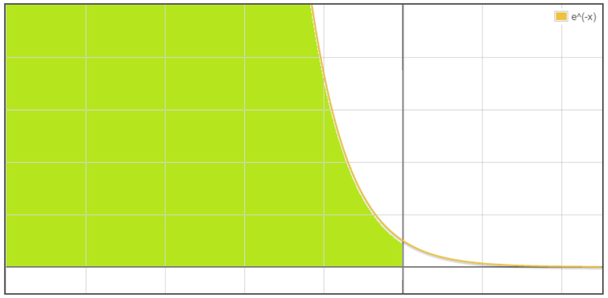
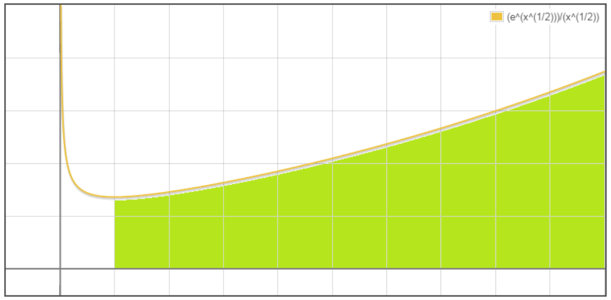
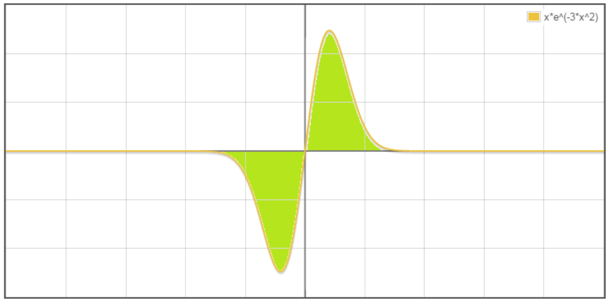
## Respostas:

1. Integral Converge para $x = 1$
2. Integral Diverge
3. Integral Diverge
4. Integral Diverge
5. Integral Diverge
6. Integral Converge para $x = 0$
7. Integral Diverge
8. Integral Converge para $x = 6$
9. Integral Diverge
10. Integral Diverge
11. Integral Converge para $x = \sqrt{7}$

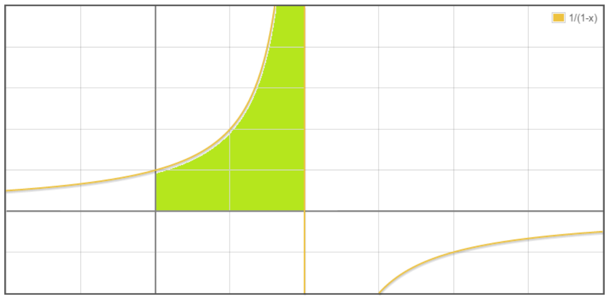
| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
|  |  |  |

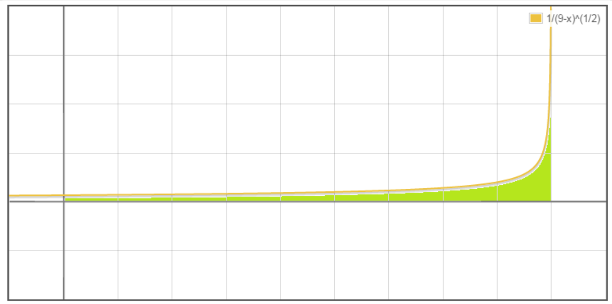


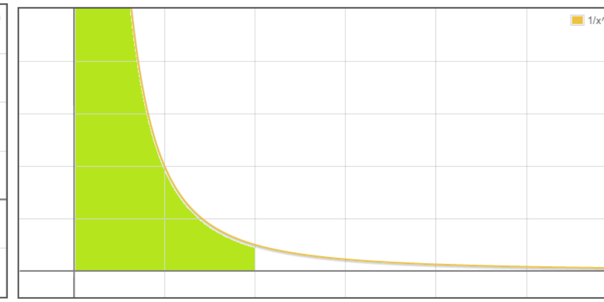


| 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|
|  |  |  |

| 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|




| 10 | 11 |
|---|---|