CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPUS KOBRASOL

UNIVALI

Save the Date

Saturday, April 14th, 2018

UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ

Curso de CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Cálculo I

Denise Prado Kronbauer

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com

Ementa

UNIDADE 2: Derivadas.

1. A reta tangente e o conceito de derivada de uma função.
2. Continuidade de funções deriváveis, derivadas laterais e regras práticas de derivação.
1. Derivada de funções compostas e derivadas sucessivas.
2. Derivada da função inversa e derivada implícita.

Derivadas

A ***DERIVADA*** é uma ferramenta matemática para estudar a taxa segundo a qual uma quantidade varia em relação a outra.

Como exemplo, citam-se muitos fenômenos físicos que envolvem grandezas que variam: velocidade de um foguete, a inflação de uma moeda, o número de bactérias em uma cultura, a intensidade do temor de um terremoto, a voltagem de um sinal elétrico, etc.

O estudo de **taxas de variação** está bastante relacionado com o conceito geométrico de uma **reta tangente a uma curva**, portanto, inicialmente discutiremos a definição geral de reta tangente e os métodos para encontrar sua inclinação e equação.

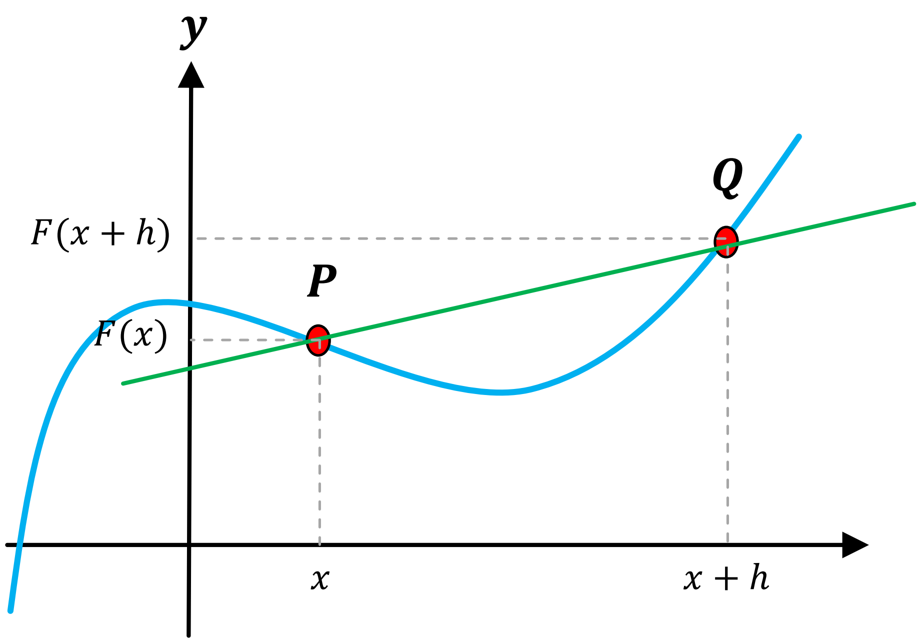
Retas tangentes

A palavra **tangente** deriva do latim e significa "tocando". Então, uma tangente a uma curva é uma reta que a "toca" em um determinado ponto.

Sabemos que se o coeficiente angular m da reta tangente $t = mx + b$ for conhecido, juntamente com o ponto $P(x, y)$ dados, poderemos achar uma equação para esta reta.

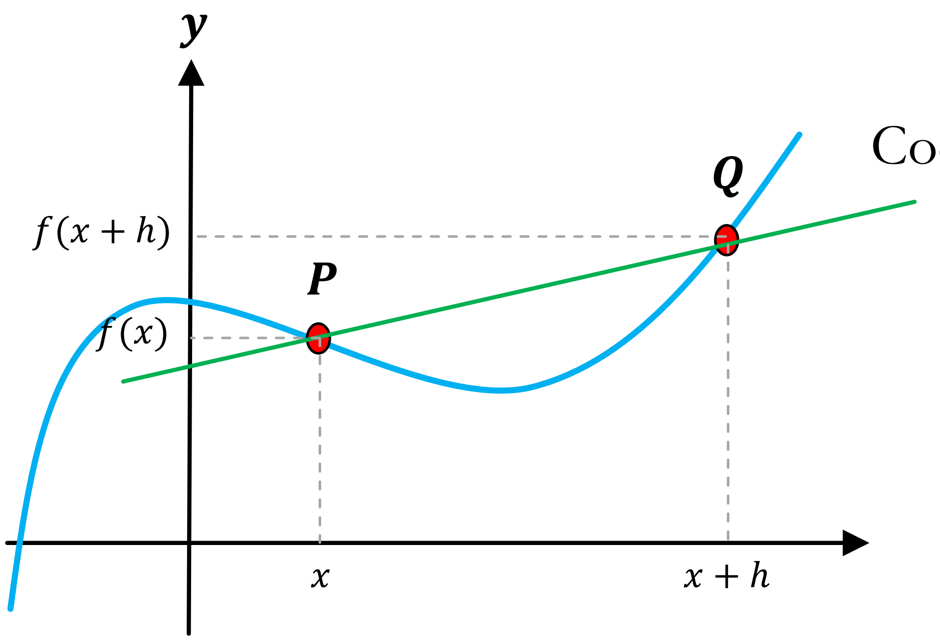
Retas tangentes

Como conhecemos apenas um ponto sobre a reta tangente, não podemos calcular diretamente seu coeficiente angular.



Vamos então considerar uma reta secante passando por P e por um segundo ponto Q do gráfico de f, próximo do ponto P.

Retas tangentes

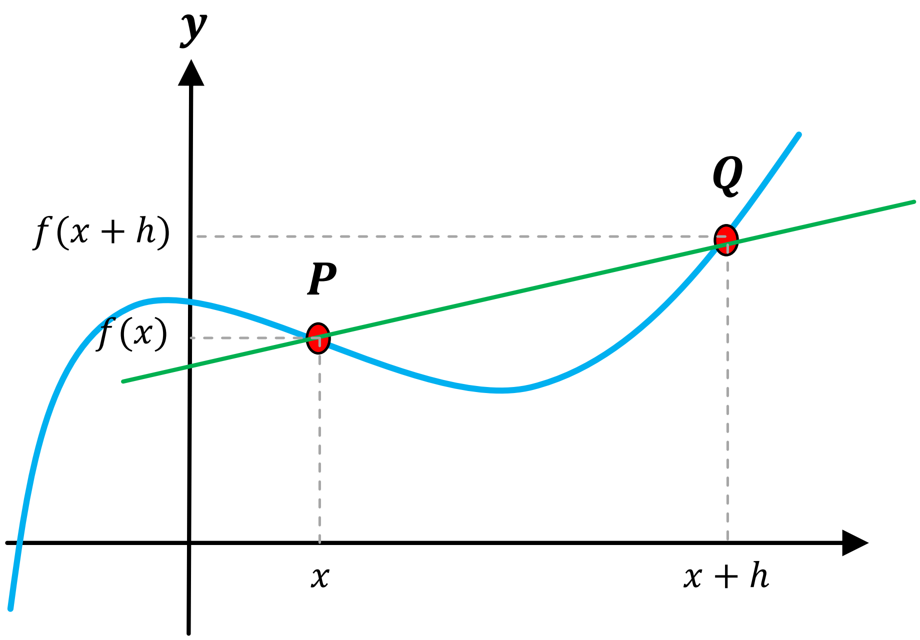


Coeficiente angular passando pelos pontos P e Q:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

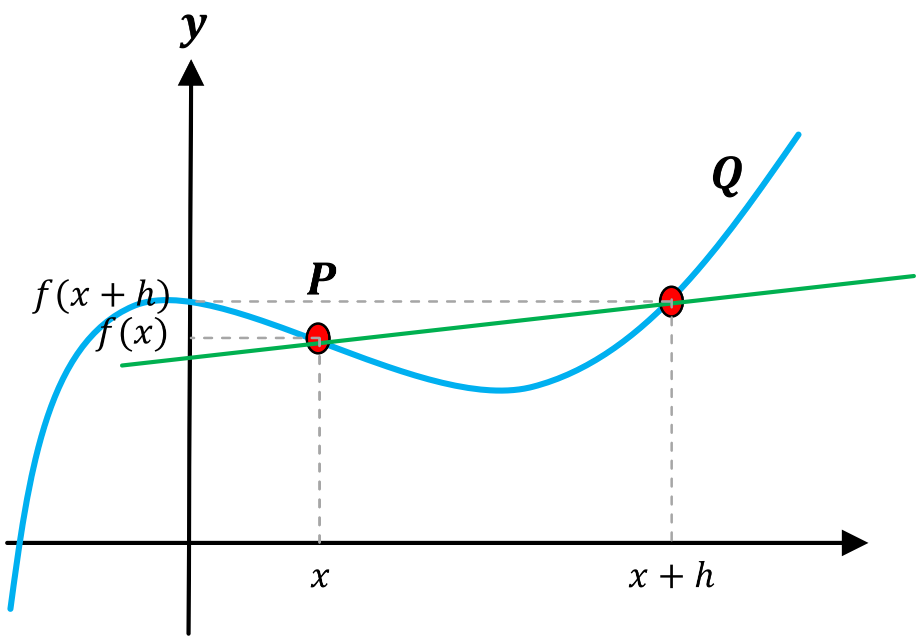
Retas tangentes



Vamos agora fixar o ponto P e mover Q ao longo da curva, aproximando de P, isto é, $h \to 0$ (h tender a zero).

Note que a reta se aproxima a uma posição limite.

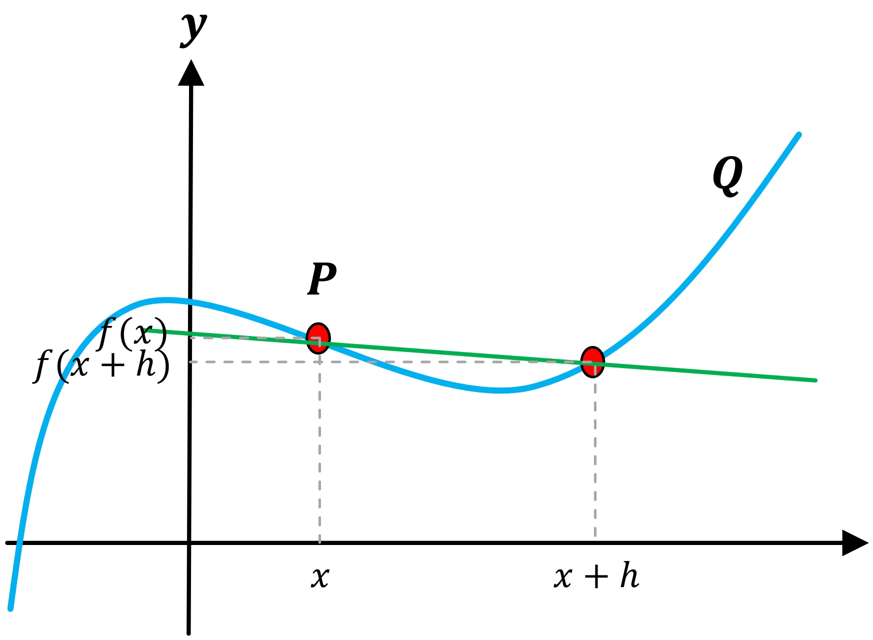
Retas tangentes



Vamos agora fixar o ponto P e mover Q ao longo da curva, aproximando de P, isto é, $h \to 0$ (h tender a zero).

Note que a reta se aproxima a uma posição limite.

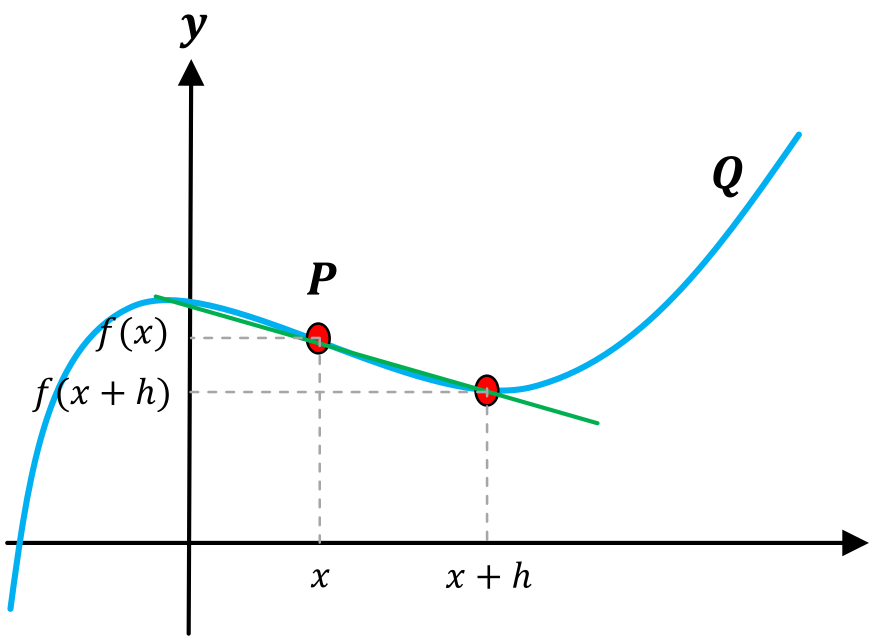
Retas tangentes



Vamos agora fixar o ponto P e mover Q ao longo da curva, aproximando de P, isto é, $h \to 0$ (h tender a zero).

Note que a reta se aproxima a uma posição limite.

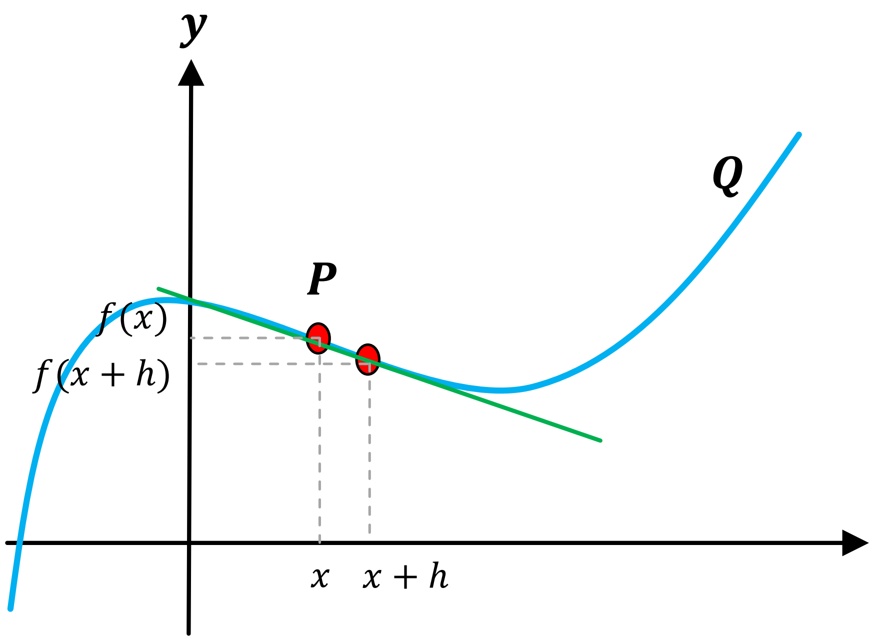
Retas tangentes



Vamos agora fixar o ponto P e mover Q ao longo da curva, aproximando de P, isto é, $h \to 0$ (h tender a zero).

Note que a reta se aproxima a uma posição limite.

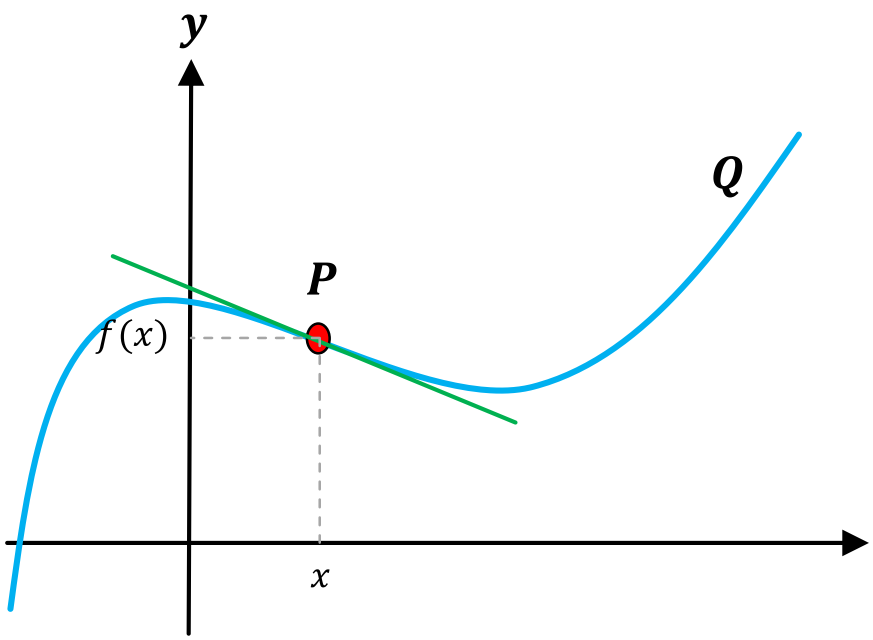
Retas tangentes



Vamos agora fixar o ponto P e mover Q ao longo da curva, aproximando de P, isto é, $h \to 0$ (h tender a zero).

Note que a reta se aproxima a uma posição limite.

Retas tangentes



Esta posição limite da reta é a reta tangente. Assim, caso a reta tangente à curva no ponto P exista, m também se aproxima do coeficiente angular desta reta:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Retas tangentes

Assim, o coeficiente angular da reta tangente será

$$\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

desde que o limite exista e seja finito.

E a equação da reta tangente é dada por: $\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$

Exemplos:

1. Calcular o coeficiente angular da reta tangente das funções dadas no ponto indicado.

a) $f(x) = x^2; \quad P = (1,1)$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2$$

Retas tangentes

b) $f(x) = \sqrt{x-3}$; $P = (7,2)$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(7+h)-3} - 2}{h} = \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} \times \frac{\sqrt{4+h} + 2}{\sqrt{4+h} + 2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{1}{4}$$

Exercícios:

Nos problemas abaixo calcule o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de cada função no ponto indicado e escreva a equação da reta tangente no ponto.

a) $f(x) = 2x - x^2 \quad em \quad (1,1)$

b) $f(x) = (x-2)^2 \quad em \quad (-2,16)$

c) $f(x) = \sqrt{9-4x} \quad em \quad (-4,5)$

d) $f(x) = \frac{3}{x+2} \quad em \quad (1,1)$

e) $f(x) = 3 + 2x - x^2 \quad em \quad (0,3)$

Retas tangentes

Exercícios:

Respostas.

$a)\quad m = 0; y = 1$

$b)\quad m = -8; y = -8x$

$c)\quad m = -\frac{2}{5}; y = -\frac{2}{5}x + \frac{17}{5}$

$d)\quad m = -\frac{1}{3}; y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

$e)\quad m = 2; y = 2x + 3$

UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ

Curso de CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Cálculo I

Denise Prado Kronbauer

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com

Derivadas

Conforme mencionado, o coeficiente angular m da reta tangente ao gráfico de f no ponto (x, y) é dado por:

$$\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Este limite define uma nova função f' ("f linha") que é derivada da função original f. E então, podemos formalizar a seguinte definição:

Definição:

Dada uma função f, a função f' definida por

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

é chamada de **derivada de f em x**.

Quando o limite não existe ou é infinito, dizemos que

f não tem derivada em x.

Derivadas

Notações:

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$f'(x) = \frac{dy}{dx}$	$f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)]$	$f'(x) = D_x[f(x)]$
$f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right\vert_{x=x_0}$	$f'(x_0) = \left.\frac{d}{dx} f(x)\right\vert_{x=x_0}$	$f'(x) = \left.D_x f(x)\right\vert_{x=x_0}$

Exemplos:

Calcular $\boldsymbol{f'(x)}$ para a função dada usando a definição de derivadas.

a) $f(x) = x^3$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3xh^2 + 3x^2h + h^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3xh + 3x^2 + h^2)}{h} = 3x^2 \Rightarrow \boxed{f'(x) = 3x^2}$$

Derivadas

b) $f(x) = \frac{1}{3x-2}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{3(x+h)-2} - \frac{1}{3x-2}}{h} = \frac{\frac{3x-2-3x-3h+2}{(3x+3h-2)(3x-2)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-3h}{h(3x+3h-2)(3x-2)} = -\frac{3}{(3x+3h-2)(3x-2)}$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{3}{(3x-2)^2}}$$

Exercícios:

Nos problemas abaixo calcule $f'(x)$ utilizando a definição de derivada.

$a)\quad f(x) = x^2 + 4x$

$b)\quad f(x) = 2x^3 - 1$

$c)\quad f(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{3}{2}x$

$d)\quad f(x) = -\frac{7}{x-3}$

$e)\quad f(x) = \frac{2}{x}$

Exercícios:

Respostas.

a) $f'(x) = 2x + 4$

b) $f'(x) = 6x^2$

c) $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}$

d) $f'(x) = \frac{7}{(x-3)^2}$

e) $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$

UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ

Curso de CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Cálculo I

Denise Prado Kronbauer

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com

Exercícios:

1. Encontre a equação da reta tangente à curva no ponto especificado.

a) $f(x) = x^2 + 1; \quad x = 2.$

b) $f(x) = 4 - x^2; \quad x = 2.$

c) $f(x) = \sqrt{2x + 1}; \quad x = 4.$

d) $f(x) = \frac{1}{x-1}; \quad x = 2.$

e) $f(x) = 2\sqrt{x}; \quad x = 4.$

Exercícios:

2. Nos exercícios abaixo utilize a definição por limite para determinar a derivada da função:

a) $f(x) = -5x$

b) $f(x) = 4x + 1$

c) $g(s) = \frac{1}{3}s + 2$

d) $h(t) = 6 - \frac{1}{2}t$

e) $f(x) = x^3 - 6x^2$

Exercícios:

3. Dada a função $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 5x + 6}$, determine:

a) A derivada utilizando a definição.

b) A equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$, no ponto $x = 5$.

c) Represente graficamente, em um mesmo plano cartesiano, $f(x)$ e a reta tangente determinada no item anterior.

Exercícios:

4. Utilize a definição por limite para determinar a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = 2x^2 + x - 5$

b) $y = \frac{5}{x+4}$

Exercícios:

1. Respostas.

$a) \quad m = 4; \quad y = 4x - 3$

$b) \quad m = -4; \quad y = -4x + 8$

$c) \quad m = \frac{1}{3}; \quad y = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}$

$d) \quad m = 1; \quad y = x + 1$

$e) \quad m = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{x}{2} + 2$

Exercícios:

2. Respostas:

a) $f'(x) = -5$

b) $f'(x) = 4$

c) $g'(s) = \frac{1}{3}$

d) $h'(t) = -\frac{1}{2}$

e) $f'(x) = 3x^2 - 12x$

Exercícios:

3. Respostas:

a) $f'(x) = 2x - 5$

b) $y = 5x - 19$

4. Respostas:

a) $f'(x) = 4x + 1$

b) $y' = -\frac{5}{(x+4)^2}$