

Cálculo II

Curso de Ciência da Computação
Campus Kobrasol



Prof. Denise Prado Kronbauer

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com



- Horas Extracurriculares – Pesquisa, Ensino e Extensão;
- Computer on the Beach.





04 a 06 de Abril de 2019

A Universidade do Vale do Itajaí – UNIVALI e a EMCT- Escola do Mar, Ciência e Tecnologia, através dos seus cursos de Ciência da Computação Campus Kobrasol e Engenharia de Computação do Campus Itajaí realizam anualmente o COMPUTER ON THE BEACH.

Trata-se de um evento técnico-científico que visa reunir profissionais, pesquisadores e acadêmicos da área de computação, a fim de discutir as tendências de pesquisa e mercado da computação em suas mais diversas áreas.

O evento procura unir o útil ao agradável em prol de um intercâmbio de experiências, discutindo de maneira informal, porém técnica, misturando atividades técnico-científicas com atividades de lazer, ao ar livre, das quais se pode desfrutar das belezas de Florianópolis durante o verão.

Em 2019, esperamos por você para aproveitar conosco a 10ª edição do Computer on the Beach.



Tópicos

Os autores estão convidados a submeter trabalhos originais de suas pesquisas científicas ou tecnológicas na forma de artigo científico ou resumo estendido nos seguintes tópicos abaixo sugeridos (mas não limitados a estes):

- Automação de sistemas
- Banco de dados
- Ciência de dados
- Computação Gráfica
- Computação móvel
- Cultura Digital
- Engenharia de software
- Inclusão Digital
- Informática na Educação
- Inteligência Artificial
- Interação Humano-Computador
- Jogos Digitais
- Jogos Educativos
- Mulheres na Computação
- Processamento Digital de Imagens
- Redes de computadores
- Segurança em Sistemas Computacionais
- Sistemas de informação
- Sistemas distribuídos
- Sistemas embarcados
- Sistemas Multimídia
- Visão Computacional



Programação 2019

🏠 / HOME / PROGRAMAÇÃO 2019

	Quinta (04/04)			
9h às 10h30	ST01	ST02	ST03	MC01
10h30 – 11h	Coffee-break – SP1			
11h – 13h	P1 e P2			MC01
13h – 14h30	Almoço			
14h30 – 16h	ST04	ST05	ST06	ST07
16h – 16h30	Coffee-break – SP2			
16h30 – 17h30	Painel			
17h30 – 19h30	Abertura e Palestra de Abertura			
19h30	Boas Vindas			

	Sexta (05/04)			
9h às 10h30	ST08	ST09	ST10	ST11
10h30 – 11h	Coffee-break – SP3			
11h – 13h	P3 e P4			
13h – 14h30	Almoço			
14h30 – 16h	Workshop	ST12	ST13	ST14
16h – 16h30	Coffee-break – SP4			
16h30 18h30	Workshop	ST15	ST16	ST17
18h30 19h30				

	Sábado (06/04)			
9h às 10h30	CTT	ST18	ST19	ST20
10h30 – 11h	Coffee-break – SP5			
11h – 13h	CTT	P5 e P6		
13h – 14h30	Almoço			
14h30 – 16h	CTT	WMD	MC02	ST21
16h – 16h30	Coffee-break – SP6			
16h30 18h30	CTT	WMD	MC02	ST22
18h30 19h30	Encerramento e Premiação			

Legenda:

- P: Palestra
- MC: Minicurso
- ST: Sessão técnica (apresentação oral dos artigos completos)
- SP: Sessão de pôsteres (resumos estendidos)
- CTT: Concurso de Trabalhos Técnicos
- Workshop: Threat Defense
- WMD: Workshop Meninas Digitais



Atividades

Palestras 2019

Palestra de Abertura: Você é mesmo feliz?

P1: Tratando milhões de eventos de missão crítica por mês em tempo real

P3: A proteção dos dados pessoais e as novas tecnologias: caos ou oportunidades?

P4: Segurança da Informação em Cooperativas de Crédito Sistema Sicoob

P5: Título: Para que serve uma blockchain e por que eu devo me preocupar com isto?

P6: Papel da Inteligência Artificial e Máquinas de Aprendizado na CyberSegurança na atualidade

Saiba Mais

Threat Defense Workshop

O Threat Defense Workshop trata-se de uma simulação de ciberataque, para "pensar como hacker" e aprender como proteger-se! É extremamente difícil fazer uma simulação de um ciberataque no dia a dia, por isso estamos convidando-o(a) para executar esse ciberataque em um ambiente controlado, com as mesmas ferramentas e técnicas usadas pelos hackers e, logo depois, planejar e implementar a segurança necessária para bloquear esse tipo de ataque.

Saiba Mais

CTT

Uma TDIC para o ensino de álgebra linear

TAEC Tecnologia Anti-Esquecimento de Crianças

Uma Solução Smart Health para Aferição e Monitoramento da Pressão Arterial

Meninas Digitais no Cerrado: Ações que empoderam e ajudam na permanência de meninas em cursos de TI

Desenvolvimento de uma Alternativa Digital por meio do Sistema de Comunicação por Troca de Figuras – PECS

Aqua Safe: Rede Social para Monitoramento dos Recursos Hídricos

Estatísticas de Vôlei: Dados para pequenos times

Desenvolvimento de uma proposta para controle de estoque para o departamento de Merenda Escolar da Secretaria Municipal de Educação de Sombrio(SC)

Saiba Mais

Minicursos

MC2: Introdução às tecnologias blockchain e suas aplicações

Saiba Mais

Cálculo II

Curso de Ciência da Computação
Campus Kobrasol



Prof. Denise Prado Kronbauer

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com



Definição:

Uma função polinomial é uma função na forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Se $a_n \neq 0$, seu grau é igual a n .



Definição:

Uma função racional é uma função na forma:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Com $p(x)$ e $q(x)$ funções polinomiais e $q(x) \neq 0$.



As funções racionais podem ser classificadas em

próprias ou **impróprias**:

Uma função **racional própria** tem o grau do numerador menor do que o grau do denominador:

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 3x - 2}$$

Uma função é **racional imprópria** se o grau do numerador é igual ou maior do que o grau do denominador.

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$$
$$f(x) = \frac{2x^3 + 2x^2}{x^2 - 3}$$



Para resolver a integral de uma função racional podemos escrever a função na forma de funções racionais simples chamadas **frações parciais** e então calculamos as integrais destas frações parciais.

As frações parciais podem ser próprias ou impróprias.



Antes de verificar os vários casos possíveis observemos
que se o grau do numerador $p(x)$ da fração $p(x)/q(x)$ não é
menor que o grau do denominador $q(x)$, podemos sempre dividir $p(x)$
por $q(x)$ e obter um quociente $f(x)$ e um resto $r(x)$.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = f(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$



Exemplos:

1. $\int \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 + 5} dx$

Diagram illustrating the polynomial division process for partial fractions:

The dividend $x^3 + 2x^2 + x$ is labeled $p(x)$. The divisor $x^2 + 5$ is labeled $q(x)$.

The division steps are shown in a dashed box:

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 + x \\ -(x^3 + 5x) \\ \hline 2x^2 - 4x \\ -(2x^2 + 10) \\ \hline -4x - 10 \end{array}$$

The quotient $x + 2$ is labeled $f(x)$. The remainder $-4x - 10$ is labeled $r(x)$.



$$1. \int \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 + 5} dx$$

$$= \int \frac{(x + 2)(x^2 + 5) - (4x + 10)}{x^2 + 5} dx$$

$$= \int \frac{(x + 2)(x^2 + 5)}{x^2 + 5} dx - \int \frac{4x + 10}{x^2 + 5} dx$$

$$= \int (x + 2) dx + \int \frac{4x + 10}{x^2 + 5} dx$$



$f(x)$

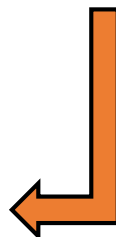


$\frac{r(x)}{q(x)}$



$$1. \int \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 + 5} dx = \int (x + 2) dx + \int \frac{4x + 10}{x^2 + 5} dx$$

Polinômio de
fácil resolução



Fração Própria

o grau do denominador
é maior do que o grau do numerador





Para resolver a integral de uma **fração racional própria**, podemos expressar a função como uma soma das **frações parciais** da forma:

$$\frac{A}{(ax + b)^n} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

A seguir serão discutidos casos para facilitar a resolução.



Caso 1: O denominador é um produto de fatores lineares distintos.

Caso 2: O denominador é um produto de fatores lineares e alguns dos fatores são repetidos.

Caso 3: O denominador contém fatores quadráticos irredutíveis distintos.

Caso 4: O denominador contém fatores quadráticos irredutíveis repetidos.



Caso 1: O denominador é um produto de fatores lineares distintos.

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$$

Como o grau do numerador é menor que o denominador, não precisamos dividir.

Fatoramos o denominador como:

$$\begin{aligned} 2x^3 + 3x^2 - 2x &= x(2x^2 + 3x - 2) \\ &= x(2x - 1)(x + 2) \end{aligned}$$



Caso 1: O denominador é um produto de fatores lineares distintos.

Como o denominador tem três fatores lineares distintos, a decomposição em frações parciais do integrando tem a forma:

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Para determinarmos os valores de A, B e C, multiplicamos os lados dessa equação pelo produto dos denominadores:



Caso 1: O denominador é um produto de fatores lineares distintos.

$$x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$

Expandindo o lado direito da equação e escrevendo-a na forma padrão para os polinômios, temos:

$$x^2 + 2x - 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A$$



Caso 1: O denominador é um produto de fatores lineares distintos.

Os coeficientes do lado direito devem ser iguais aos coeficientes do lado esquerdo, resultando num sistema de equações para A, B e C:

$$\begin{cases} 2A + B + 2C = 1 \\ 3A + 2B - C = 2 \\ -2A = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{5} \\ C = -\frac{1}{10} \end{cases}$$



Caso 1: O denominador é um produto de fatores lineares distintos.

Assim,

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \int \left(\frac{1}{2} \frac{1}{x} + \frac{1}{5} \frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{10} \frac{1}{x + 2} \right) dx$$
$$= \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{10} \ln|2x - 1| - \frac{1}{10} \ln|x + 2| + C$$

Integral por substituição, $u = 2x - 1$
 $du = 2dx \Rightarrow dx = du/2$



Caso 2: O denominador é um produto de fatores lineares e alguns dos fatores são repetidos.

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$$

Como o grau do numerador é maior que o do denominador, a primeira etapa é dividir:

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^2 + 4x + 1 \\ -(x^4 - x^3 - x^2 + x) \\ \hline x^3 - x^2 + 3x + 1 \\ -(x^3 - x^2 - x + 1) \\ \hline 4x \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x^3 - x^2 - x + 1 \\ \hline x + 1 \end{array} \right.$$



Caso 2: O denominador é um produto de fatores lineares e alguns dos fatores são repetidos.

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{(x + 1)(x^3 - x^2 - x + 1) + 4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

A segunda etapa é fatorar o denominador:

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)(x - 1)(x + 1) = (x - 1)^2(x + 1)$$



Caso 2: O denominador é um produto de fatores lineares e alguns dos fatores são repetidos.

A decomposição em frações parciais é:

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+1)}$$

Procedendo de forma análoga ao caso 1, obtemos os valores de A, B e C e resolvemos a integral.



Caso 2: O denominador é um produto de fatores lineares e alguns dos fatores são repetidos.

$$4x = A(x - 1)(x + 1) + B(x + 1) + C(x - 1)^2$$

$$4x = (A + C)x^2 + (B - 2C)x + (-A + B + C)$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B - 2C = 4 \\ -A + B + C = 0 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \\ C = -1 \end{cases}$$



Caso 2: O denominador é um produto de fatores lineares e alguns dos fatores são repetidos.

Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx &= \int \left[x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right] dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+1| + C \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-1} + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C\end{aligned}$$



Resolva as seguintes integrais:

1. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$

2. $\int \frac{3x - 5}{x^2 - x - 2} dx$

3. $\int \frac{5x^3 - 6x^2 - 68x - 16}{x^3 - 2x^2 - 8x} dx$

4. $\int \frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} dx$

5. $\int \frac{3x^2 + 4x + 2}{x(x + 1)^2} dx$

6. $\int \frac{3x^3 - 18x^2 + 29x - 4}{(x + 1)(x - 2)^3} dx$



Respostas:

$$1. \frac{1}{2a} (\ln|x - a| - \ln|x + a|) + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$$

$$2. \frac{1}{3} \ln|x - 2| + \frac{8}{3} \ln|x + 1| + C = \ln[|x - 2|^{1/3} |x + 1|^{8/3}] + C$$

$$3. 5x + 2 \ln|x| - \frac{8}{3} \ln|x - 4| + \frac{14}{3} \ln|x + 2| + C = 5x + \ln \left(\frac{x^2 |x + 2|^{14/3}}{|x - 4|^{8/3}} \right) + C$$

$$4. 3 \ln|x| + 2 \ln|x - 1| - \ln|x + 3| + C = \ln \left(\frac{x^3 |x - 1|^2}{|x + 3|} \right)$$

$$5. 2 \ln|x| + \ln|x + 1| + \frac{1}{x + 1} + C = \ln|x^2(x + 1)| + \frac{1}{x + 1} + C$$

$$6. 2 \ln|x + 1| + \ln|x - 2| + \frac{3}{x - 2} - \frac{1}{(x - 2)^3} + C = \frac{3}{x - 2} - \frac{1}{(x - 2)^3} + \ln[(x + 1)^2(x - 2)]$$



Caso 3: O denominador contém fatores quadráticos irredutíveis distintos.

Se o denominador tiver o fator $ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac < 0$ então, além das frações parciais a expressão para $r(x)/q(x)$ terá um termo na forma:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$



Caso 3: O denominador contém fatores quadráticos irredutíveis distintos.

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$$

Como o grau do numerador é menor que o denominador, não precisamos dividir.

Fatoramos o denominador como:

$$x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$$

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 4)}$$



Caso 3: O denominador contém fatores quadráticos irredutíveis distintos.

Multiplicando por $x(x^2 + 4)$, temos:

$$2x^2 - x + 4 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)x$$

$$2x^2 - x + 4 = (A + B)x^2 + Cx + 4A$$

Resolvendo o sistema formado, obtemos:

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ C = -1 \\ 4A = 4 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = -1 \end{cases}$$



Caso 3: O denominador contém fatores quadráticos irredutíveis distintos.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x}{x^2+4} dx - \int \frac{1}{x^2+4} dx \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2+4| - \frac{1}{2} \tan^{-1}(x/2) + C\end{aligned}$$

Integral por substituição, $u = x^2 + 4$
 $du = 2x dx \Rightarrow x dx = du/2$

Integral obtida pela tabela,

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan(x/a) + C$$



Caso 4: O denominador contém fatores quadráticos irredutíveis repetidos.

$$\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} dx$$

Como o grau do numerador é menor que o denominador, não precisamos dividir.

Escrevemos a função da seguinte forma:

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$$



Caso 4: O denominador contém fatores quadráticos irredutíveis repetidos.

Multiplicando por $x(x^2 + 1)^2$ temos:

$$1 - x + 2x^2 - x^3 = A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 1) + (Dx + E)x$$

$$1 - x + 2x^2 - x^3 = (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = -1 \\ 2A + B + D = 2 \\ C + E = -1 \\ A = 1 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = -1 \\ D = 1 \\ E = 0 \end{cases}$$



Caso 4: O denominador contém fatores quadráticos irredutíveis repetidos.

$$\begin{aligned}\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x + 1}{x^2 + 1} + \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \right) dx \\&= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x}{x^2 + 1} dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + \int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx \\&= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| - \operatorname{tg}^{-1} x - \frac{1}{2(x^2 + 1)} + C\end{aligned}$$



Resolva as seguintes integrais:

$$7. \int \frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} dx$$

$$9. \int \frac{3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9}{(x + 2)(x^2 + 3)^2} dx$$

$$8. \int \frac{8x^2 + 3x + 20}{(x + 1)(x^2 + 4)} dx$$

$$10. \int \frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2} dx$$



Respostas:

$$7. \frac{3}{2} \ln|x^2 + 4| + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2} - \frac{5}{2} \ln|2x - 1| + C$$

$$8. \frac{3}{2} \ln|x^2 + 4| + 5 \ln|x + 1| + C$$

$$9. \ln|x + 2| + \ln|x^2 + 3| - \frac{2}{x^2 + 3} + C$$

$$10. \frac{5}{2} \ln|x^2 + 1| - 3 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{x^2 + 1} + C$$