UNIVALI
Escola do Mar,
Ciência e Tecnologia

Cálculo II

Curso de Ciência da Computação
Campus Kobrasol

Prof. Denise Prado Kronbauer
denise.kronbauer@univali.br
denipk@gmail.com

Recados Paroquiais

- Identidade Visual – UNIVALI Escolas do Conhecimento;
- Semana Acadêmica – 24 a 27.06;
- Rei da Derivada – 25.06.

UNIVALI

Escolas do
Conhecimento

Recados Paroquiais

https://www.univali.br/institucional/proen/diretoria-de-educacao/escolas-do-conhecimento/Paginas/default.aspx

Rei da Derivada

25 junho

UNIVALI

Escola do Mar,
Ciência e Tecnologia

Cálculo II

Curso de Ciência da Computação
Campus Kobrasol

Prof. Denise Prado Kronbauer
denise.kronbauer@univali.br
denipk@gmail.com

Além da integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ de uma função f de uma variável, podemos também considerar integrais de funções de diversas variáveis, denominadas **integrais múltiplas**. Cada integral é definida de maneira análoga, a principal diferença está no domínio do integrando.

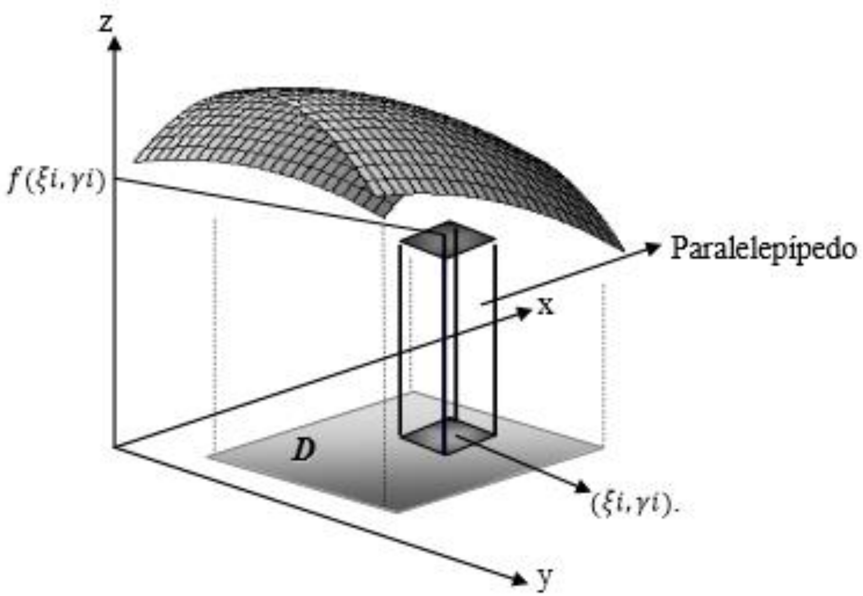
Elas são utilizadas para calcular volumes, áreas de superfície, centros de massa, probabilidades e valores médios.

A integral de uma função $f(x, y)$ de duas variáveis, denominada **integral dupla** é denotada por

$$\boxed{\iint_D f(x, y)\, dA}$$

Ela representa o volume da região sólida entre o gráfico de $f(x, y)$ e o domínio D no plano xy, sendo que o volume é positivo com regiões acima do plano xy e negativo com regiões abaixo.

No conceito de integral simples temos que a integral é o limite da soma de Riemann, onde somamos as áreas dos retângulos no conjunto fechado R



Já no conceito de integral dupla temos que a integral também é o limite da soma de Riemann, mas, no entanto, estamos trabalhando agora com duas variáveis reais, logo a integral dupla é a soma dos volumes dos paralelepípedos numa região fechada do R^2.

Cálculo de Integrais Parciais

No conteúdo anterior aprendemos como derivar funções com mais de uma variáveis, derivando-as em relação a uma variável por vez, enquanto as outras são mantidas fixas.

Portanto, não deve ser surpreendente que seja possível **integrar funções de duas ou mais variáveis** utilizando um procedimento semelhante.

Exemplo: Determine a integral parcial:

$$\int_{1}^{2y} 2xy \ \ dx$$

Resolução:

$$\int_1^{2y} 2xy\, dx$$

x é a variável de integração e ***y*** é fixo

$$= x^2y\Big|_1^{2y} = (2y)^2y - (1)^2y$$

Limites de integração

$$\boxed{= 4y^3 - y}$$

O resultado é uma função de ***y***.

Exemplos: Determine as integrais parciais:

1) $\int_{1}^{x} (2x^2y^{-2} + 2y)dy$

2) $\int_{y}^{5y} \sqrt{x-y}\, dx$

Respostas:

1) $\displaystyle\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y)dy = 3x^2 - 2x - 1$

2) $\displaystyle\int_y^{5y} \sqrt{x-y}\, dx = \frac{16y}{3}\sqrt{y}$

Exercícios: Determine as integrais parciais:

1) $\displaystyle\int_{x}^{x^2} \frac{y}{x}\,dy$

2) $\displaystyle\int_{1}^{2y} \frac{y}{x}\,dx$

3) $\displaystyle\int_{0}^{e^y} y\,dx$

4) $\displaystyle\int_{0}^{x} (2x-y)\,dy$

5) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y\,dy$

6) $\displaystyle\int_{0}^{5} 12x^2y^3\,dx$

7) $\displaystyle\int_{0}^{1} (y+xe^y)\,dy$

Respostas:

1) $\dfrac{x(2x^2-3)}{6}$

2) $y\ln(2y)$

3) $y\,e^y$

4) $\dfrac{3x^2}{2}$

5) $x^2\left(2-\dfrac{x^2}{2}\right)$

6) $500\,y^3$

7) $\dfrac{1}{2}+xe-x$

Nos exemplos anteriores, o resultado obtido através da integração por partes resulta numa função de x ou y e ela mesma pode ser integrada.

Uma ***"integral de uma integral"*** é chamada **integral dupla**. Como uma função de duas variáveis, há dois tipos de integrais duplas:

$$i)\quad \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx$$

$$ii)\quad \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy$$

A diferença entre os dois tipos de integrais duplas é a ordem na qual a integração deve ser realizada, $dy\,dx$ ou $dx\,dy$.

A ordem de integração é muito importante, pois através de uma boa escolha podemos facilitar, em muito, os cálculos para encontrar a solução de uma integral dupla, dependendo da escolha feita, pode haver casos de não encontrarmos uma solução.

Deve-se sempre iniciar a integração de 'dentro' para 'fora'.

Exemplos: Calcule a integral dupla

$$\int_{1}^{2}\int_{0}^{x}(2xy+3)\,dydx$$

Resolução: $\int_1^2 \int_0^x (2xy + 3)\, dydx$

$$= \int_1^2 \left[\int_0^x (2xy + 3)\, dy\right] dx = \int_1^2 \left[\frac{2xy^2}{2} + 3y\right]_0^x dx$$

$$= \int_1^2 (x^3 + 3x) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{(2)^4}{4} + \frac{3(2)^2}{2}\right] - \left[\frac{(1)^4}{4} + \frac{3(1)^2}{2}\right]$$

$$= (4 + 6) - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) = \boxed{\frac{33}{4}}$$

Exemplos: Determine as integrais parciais:

1) $\displaystyle\int_1^3 \int_0^1 (1 + 4xy)\, dx\, dy$

2) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{x^2} (x + 2)\, dy\, dx$

Respostas:

1) $$\int_{1}^{3}\int_{0}^{1}(1+4xy)\,dx\,dy = 10$$

2) $$\int_{0}^{4}\int_{0}^{x^2}(x+2)\,dy\,dx = \frac{320}{3}$$

Exercícios: Calcule as integrais duplas:

1) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{2y} xy\, dx\, dy$

2) $\displaystyle\int_1^2 \int_1^{x^2} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$

3) $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} \left(x^2 + \frac{y}{2}\right) dy\, dx$

4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{x} \operatorname{sen} y\, dy\, dx$

5) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^2 \frac{xe^x}{y}\, dy\, dx$

6) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{x} (5x^2 y - 2) dy\, dx$

7) $\displaystyle\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dy\, dx$

8) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} y\, dy\, dx$

9) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{e^y} \sqrt{x}\, dx\, dy$

10) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 - y) dy\, dx$

Respostas:

1) $\dfrac{1}{2}$

2) $\dfrac{1006}{105}$

3) $\dfrac{8}{3}$

4) π

5) $\ln 2$

6) $\dfrac{25}{2}$

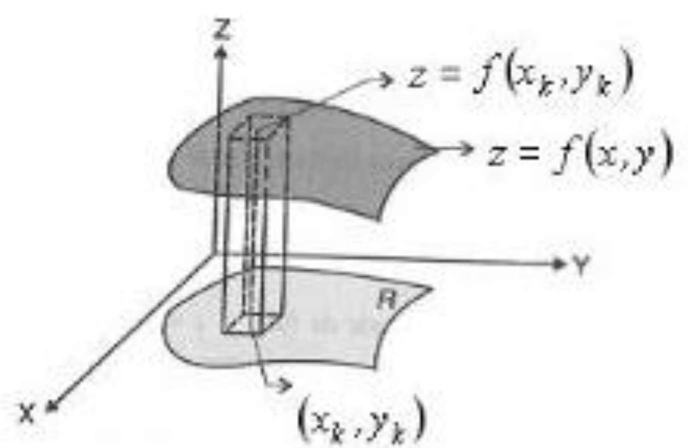
7) $\dfrac{21}{2}\ln 2$

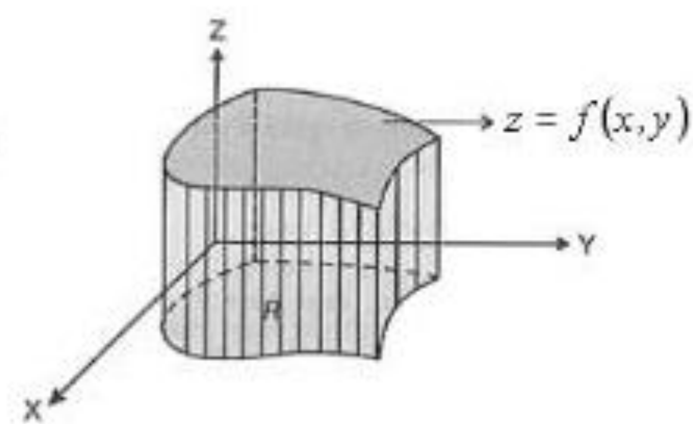
8) 2

9) $\dfrac{4}{9}e^{3/2} - \dfrac{32}{45}$

10) $-\dfrac{5}{6}$

Se a função dada é positiva, podemos interpretar a integral dupla como o volume V do sólido que está acima de uma área R no plano xy e abaixo da superfície $z = f(x, y)$.





A região R é definida da seguinte maneira:

$$R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Então,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$

Exemplo: Calcular a integral dupla

$$\iint\limits_{R} (x - 3y^2)\, dA$$

Onde $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 2\}$

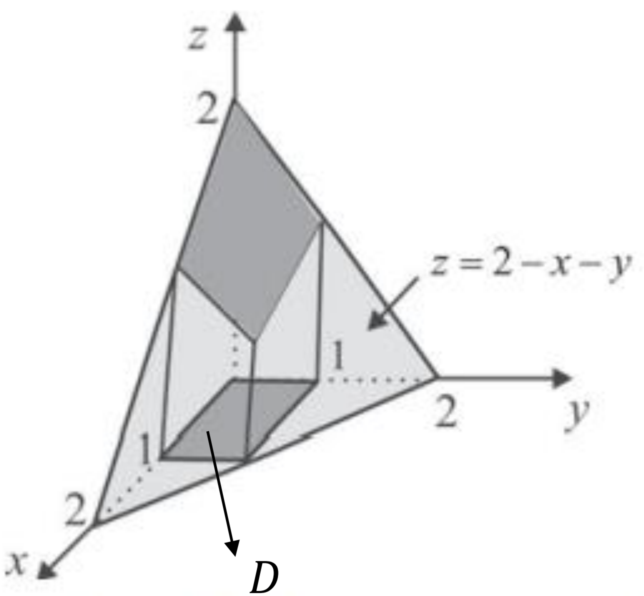
Resolução:

$$\int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2)\, dy\, dx$$

$$\int_0^2 \left[\int_1^2 (x - 3y^2)\, dy \right] dx = \int_0^2 \left(xy - \frac{3y^3}{3} \right)_1^2 dx$$

$$= \int_0^2 (x - 7)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - 7x \right)_0^2 = -12$$

Exercícios: Calcular o volume do sólido Ω acima da região $D = [0,1] \times [0,1]$ do plano xy e abaixo do plano $x + y + z = 2$:

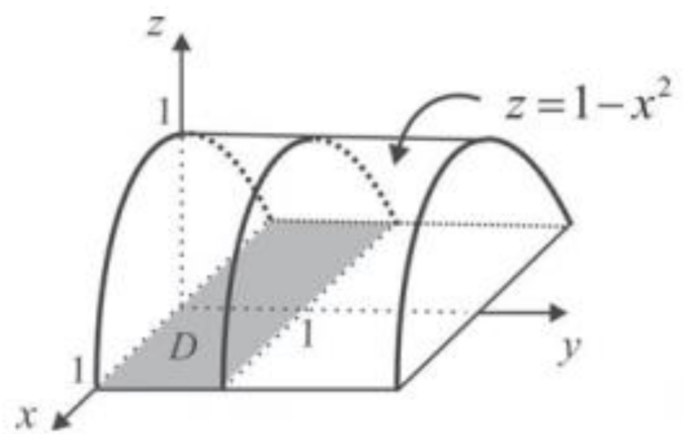


Volume abaixo do plano $x + y + z = 2$.

$$z = 2 - x - y$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (2 - x - y)\, dx\, dy = 1$$

Exercícios: Calcular o volume do sólido Ω acima do retângulo $D = [-1,1] \times [0,1]$ e abaixo do cilindro $z = 1 - x^2$:



Volume abaixo do cilindro $z = 1 - x^2$.

$$z = 1 - x^2$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}(1 - x^2)\,dy\,dx = 4/3$$

Exercícios: Calcular as integrais duplas na região R dada:

a) $$\iint_R 4xy^3\, dA;\, R = \{(x, y): -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$$

b) $$\iint_R x\sqrt{1 - x^2}\, dA;\, R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1{,}2 \leq y \leq 3\}$$

c) $$\iint_R xy\, dA;\, R \text{ compreendida entre } y = \frac{1}{2}x;\, y = \sqrt{x}, x = 2 \ e \ x = 4$$

Respostas:

a) 0

b) $\dfrac{1}{3}$

c) $\dfrac{11}{6}$

Escola do Mar,
Ciência e Tecnologia

Cálculo II

Curso de Ciência da Computação
Campus Kobrasol

Prof. Denise Prado Kronbauer
denise.kronbauer@univali.br
denipk@gmail.com

As **integrais triplas** de funções $f(x, y, z)$ de três variáveis são uma generalização bastante imediata das integrais duplas.

$$\boxed{\iiint_D f(x, y, z)\, dV}$$

Elas representam quantidades como massa total, valor médio, probabilidades e centros de massa.

Calcula-se a integral começando pela integral mais interna e procedendo para fora. Assim, a primeira integração é com relação a x (com y e z fixos), a segunda é em relação a y (com z fixo) e a terceira é em relação a z.

Existem seis maneiras diferentes de montar a integral, e eles dependem da ordem dos diferenciais, sendo que a ordem da integração é irrelevante.

Exemplo: Calcular a integral tripla $\int_{3}^{4}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}(xy^2 + yz^3)\,dz\,dx\,dy$

$$\int_{3}^{4}\int_{-1}^{1}\left[\int_{0}^{2}(xy^2 + yz^3)dz\right]dx\,dy \quad \rightarrow \quad \int_{3}^{4}\int_{-1}^{1}\left[xy^2z + \frac{yz^4}{4}\right]_0^2 dx\,dy$$

$$\int_{3}^{4}\left[\int_{-1}^{1}(2xy^2 + 4y)\,dx\right]dy \quad \rightarrow \quad \int_{3}^{4}[x^2y^2 + 4xy]_{-1}^{1}\,dy$$

$$\int_{3}^{4}[(y^2 + 4y) - (y^2 - 4y)]\,dy$$

$$\int_{3}^{4} 8y\,dy = 4y^2|_3^4 = 4.(4^2) - 4.(3)^2 = 28$$

Exemplos: Calcular as integrais triplas:

a) $$\int_0^3 \int_{-1}^0 \int_1^2 (x + 2y + 4z)\, dx\, dy\, dz = \frac{39}{2}$$

b) $$\int_0^1 \int_{-1}^2 \int_1^3 (6x^2 z + 5xy^2)\, dz\, dx\, dy = 77$$

c) $$\int_0^1 \int_{x+1}^{2x} \int_z^{x+z} x\, dy\, dz\, dx = -\frac{1}{12}$$

Exemplos: Calcular as integrais triplas:

d) $$\int_{1}^{2}\int_{0}^{z^2}\int_{x+z}^{x-z} z\,dy\,dx\,dz = -\frac{62}{5}$$

e) $$\int_{-1}^{2}\int_{1}^{x^2}\int_{0}^{x+y} 2x^2y\,dz\,dy\,dx = \frac{513}{8}$$

Exemplos: Calcular as integrais triplas:

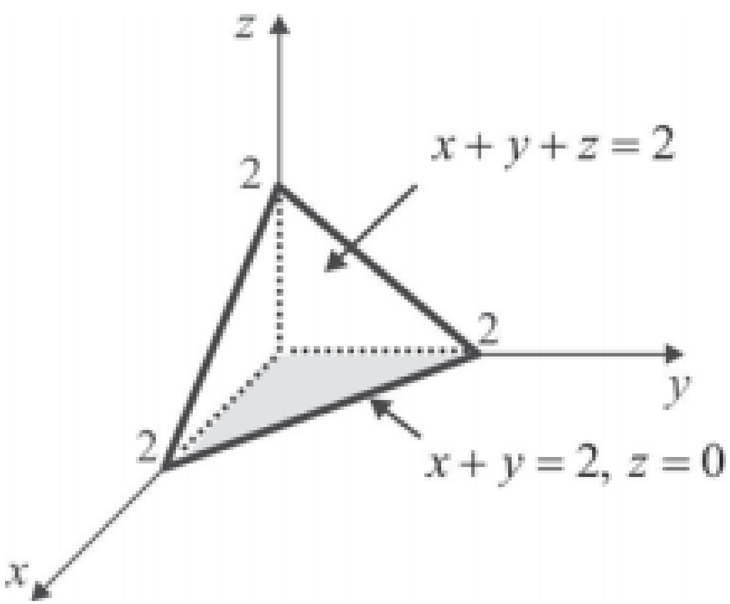
f) $\int\int\int xyz^2\,dx\,dy\,dz$; onde R é formada pelos pontos tais que $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2; 1 \leq z \leq 3\ = 26/3$

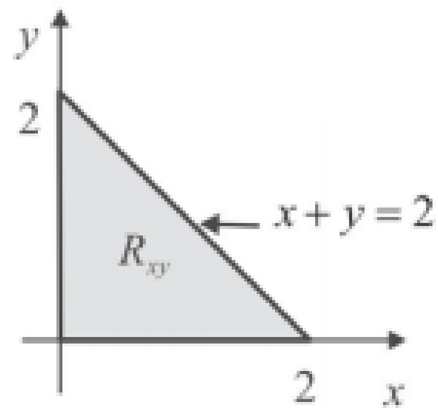
g) $\int\int\int (x^2 + 2yz)\,dx\,dy\,dz$; onde R é formada pelos pontos tais que $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2; 0 \leq z \leq x + y\ = 46/15$

h) $\int\int\int (x^2 + y^2 + z^2 + xyz)\,dx\,dy\,dz$;

onde $R = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]\ = 9/8$

Exercícios: Calcular a integral tripla $I = \iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)dV$ sobre a região delimitada pelos planos $x + y + z = 2, x = 0, y = 0$ e $z = 0$:





Exercícios: Determine o volume do tetraedro limitado pelos planos $x + 2y + z = 2, x = 2y, x = 0$ e $z = 0$: