UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ

Curso de CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Cálculo I

Denise Prado Kronbauer

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com

UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ

Curso de CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Unidade 3 - Derivadas

Denise Prado Kronbauer

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com

Ementa

UNIDADE 2: Aplicações da Derivada.

1. Análise do comportamento das funções (funções crescentes e decrescentes, sentidos de crescimento de funções, pontos de máximos e mínimos, sentidos de concavidade de funções, pontos de inflexão, procedimentos para o esboço de funções usando o conceito de derivadas).
2. Regra de L'Hôpital.
3. Fórmula de Taylor.
4. Problemas de maximização e minimização.

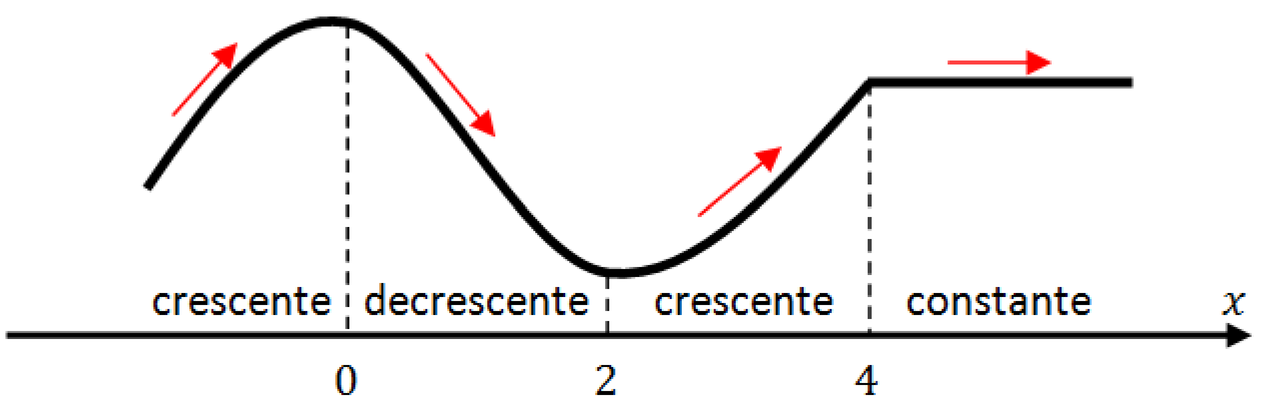
Aplicações da Derivada

A derivada é um importante instrumento para analisar as funções
e seus gráficos. Estaremos interessados em assuntos
tais como identificar onde o gráfico de uma função é crescente ou decrescente, onde
ocorrem seus pontos mais altos e mais baixos, e ainda
de que forma os gráficos se inclinam.

A seguir, inicia-se com os conceitos de função crescente,
decrescente e constante.

Definição: Função crescente e função decrescente

O movimento de um objeto sobre uma curva (da esquerda para a direita) pode ser pensado como a subida ou descida por uma rampa ou um movimento em linha reta e esses aspectos podem ser utilizados para descrever com detalhes o formato da curva.



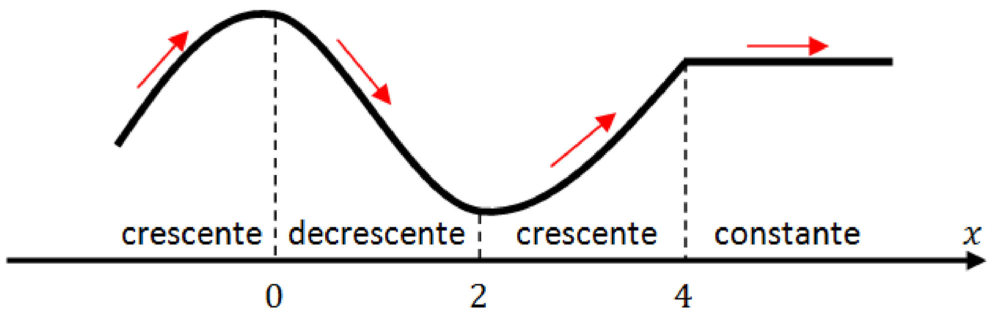
Definição:

Seja $f(x)$ definida em um intervalo e sejam x_1 e x_2 pontos do intervalo. Então:

a) f é uma **função crescente** nesse intervalo se $f(x)_1 < f(x_2)$ para $x_1 < x_2$;

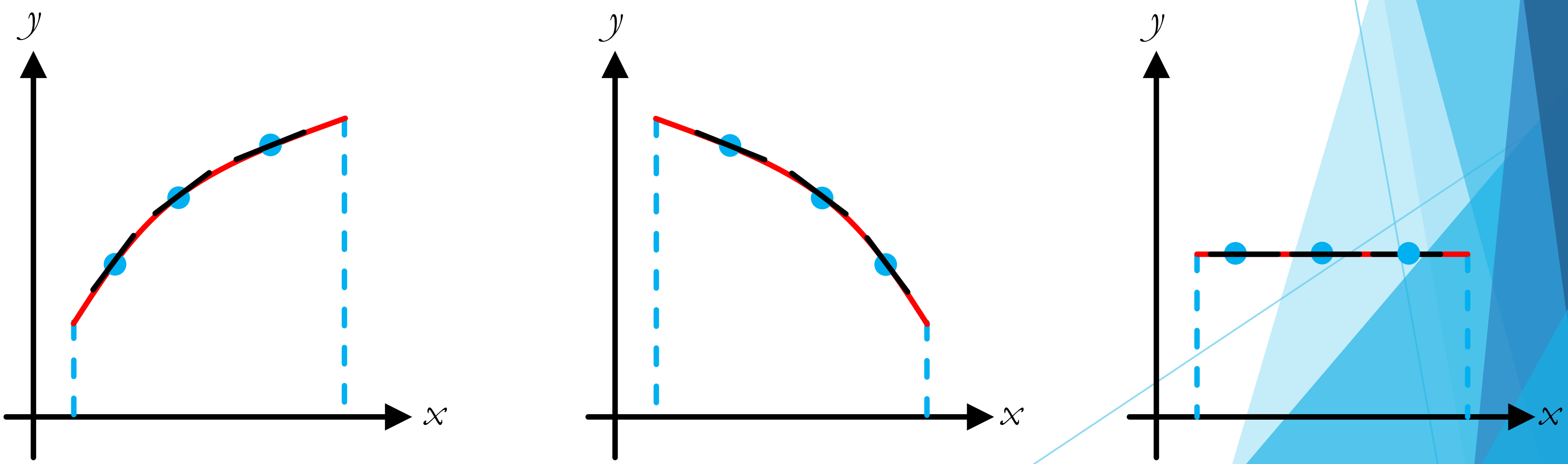
b) f é uma **função decrescente** nesse intervalo se $f(x)_1 > f(x_2)$ para $x_1 < x_2$;

c) f é uma **função constante** nesse intervalo se $f(x)_1 = f(x_2)$ para todos os pontos x_1 e x_2;



Aplicações da Derivada

A figura abaixo sugere que uma função diferenciável *f* é crescente em qualquer intervalo, onde o seu gráfico tem retas tangentes com inclinações positivas; decrescente em qualquer intervalo onde as retas tangentes ao gráfico tiverem inclinações negativas e constante em qualquer intervalo onde o seu gráfico tiver retas tangentes com inclinações zero.



Teste da Derivada Primeira:

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b):

a) Se $f'(x) > 0$ para todo x em (a, b),
então $f(x)$ é **crescente** em $[a, b]$;

b) Se $f'(x) < 0$ para todo x em (a, b),
então $f(x)$ é **decrescente** em $[a, b]$;

c) Se $f'(x) = 0$ para todo x em (a, b),
então $f(x)$ é **constante** em $[a, b]$.

Exemplo: **Identifique os intervalos nos quais as seguintes funções são crescentes ou decrescentes:**

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$

c) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

Respostas:

a) $f(x)$ é decrescente em $(-\infty, 2)$ e crescente em $(2, \infty)$;

b) $f(x)$ é decrescente em $\left(-\frac{5}{3}, 1\right)$ e crescente em $\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (1, +\infty)$;

c) $f(x)$ é decrescente em $(-\infty, -1) \cup (0,2)$ e crescente em $(-1,0) \cup (2, +\infty)$;

Exercícios: Identifique os intervalos nos quais as seguintes funções são crescentes ou decrescentes:

a) $f(x) = x^3 - 12x + 11$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

c) $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$

d) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{4}{x}$

Respostas:

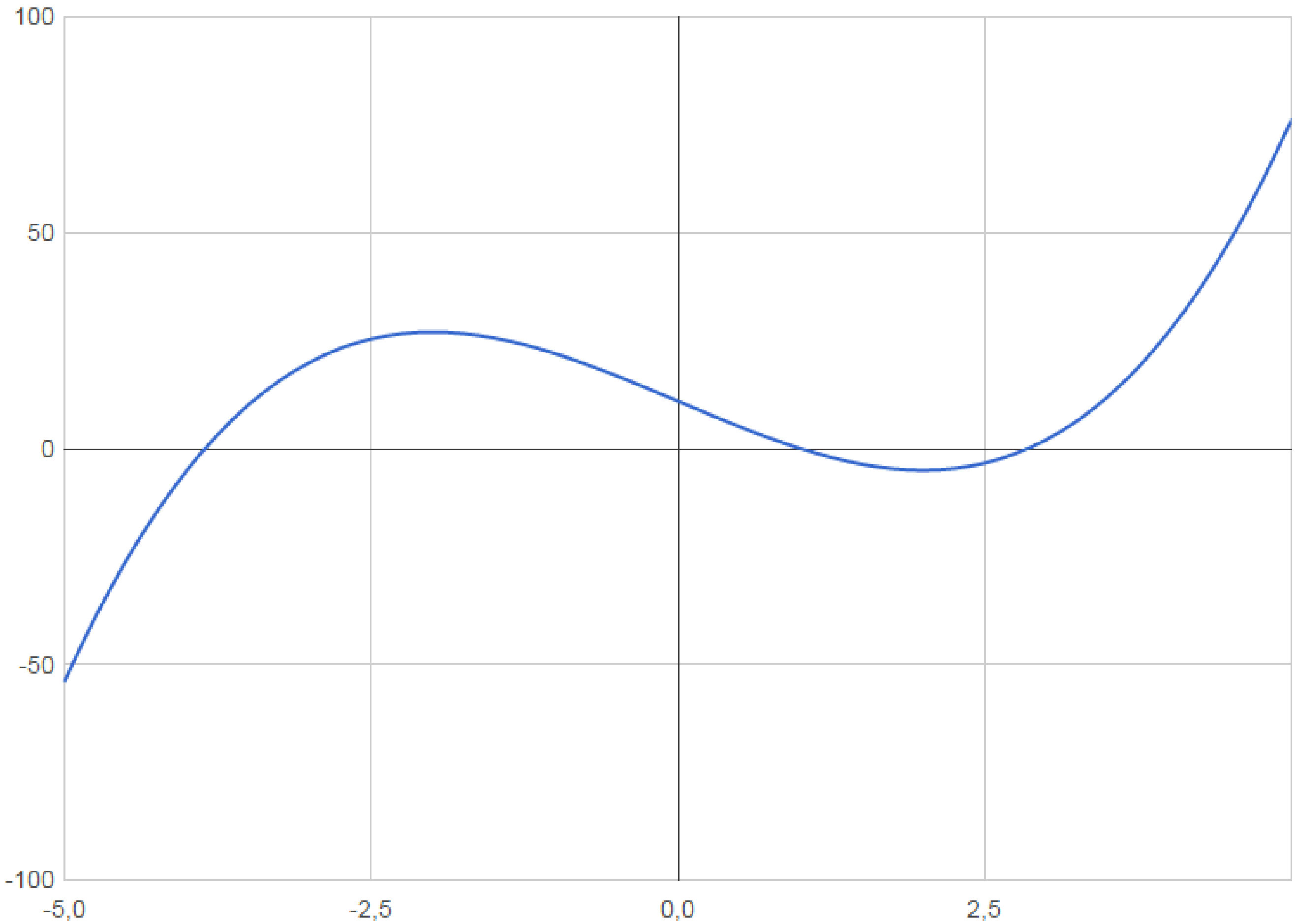
a) $f(x)$ é crescente em $(-\infty,-2)$ e decrescente em $(2,\infty)$;

b) $f(x)$ é crescente em $(-\infty,1)\cup(3,\infty)$ e decrescente em $(1{,}3)$;

c) $f(x)$ é crescente em $(-\infty,0)\cup\left(\sqrt[3]{6},\infty\right)$ e decrescente em $\left(0,\sqrt[3]{6}\right)$;

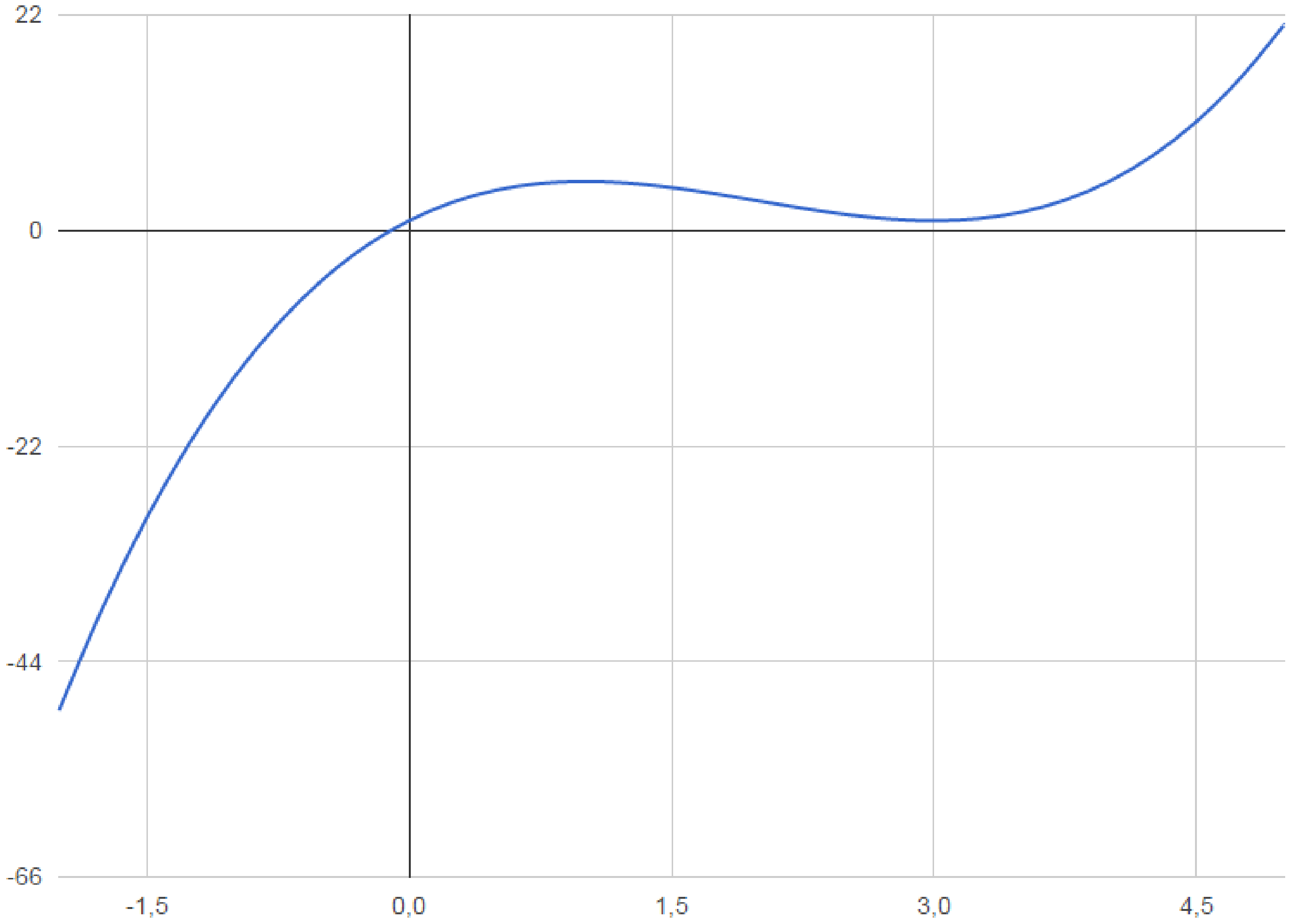
d) $f(x)$ é crescente em $(4,\infty)$ e decrescente em $(0{,}4)$;

a)



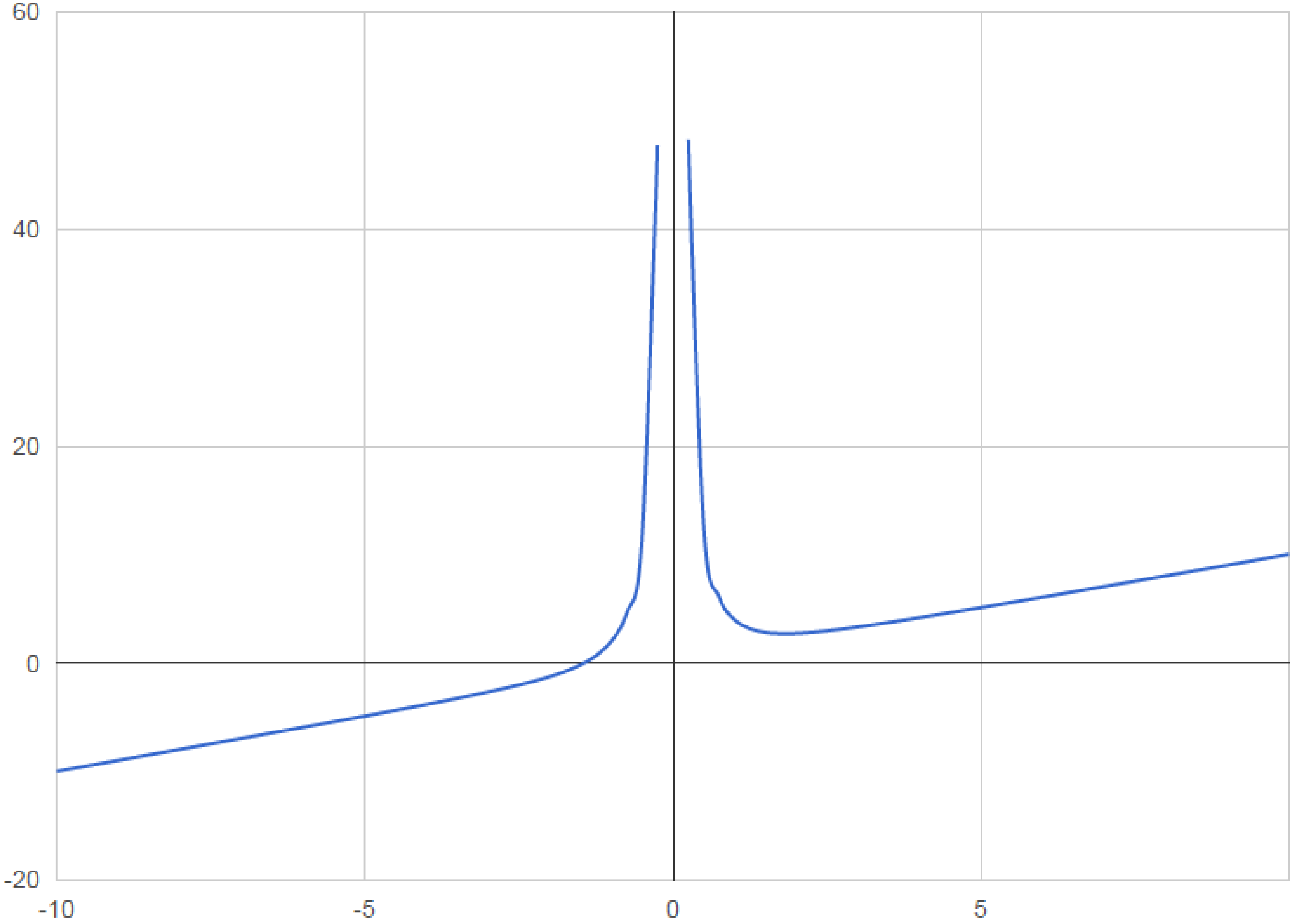
Aplicações da Derivada

b)



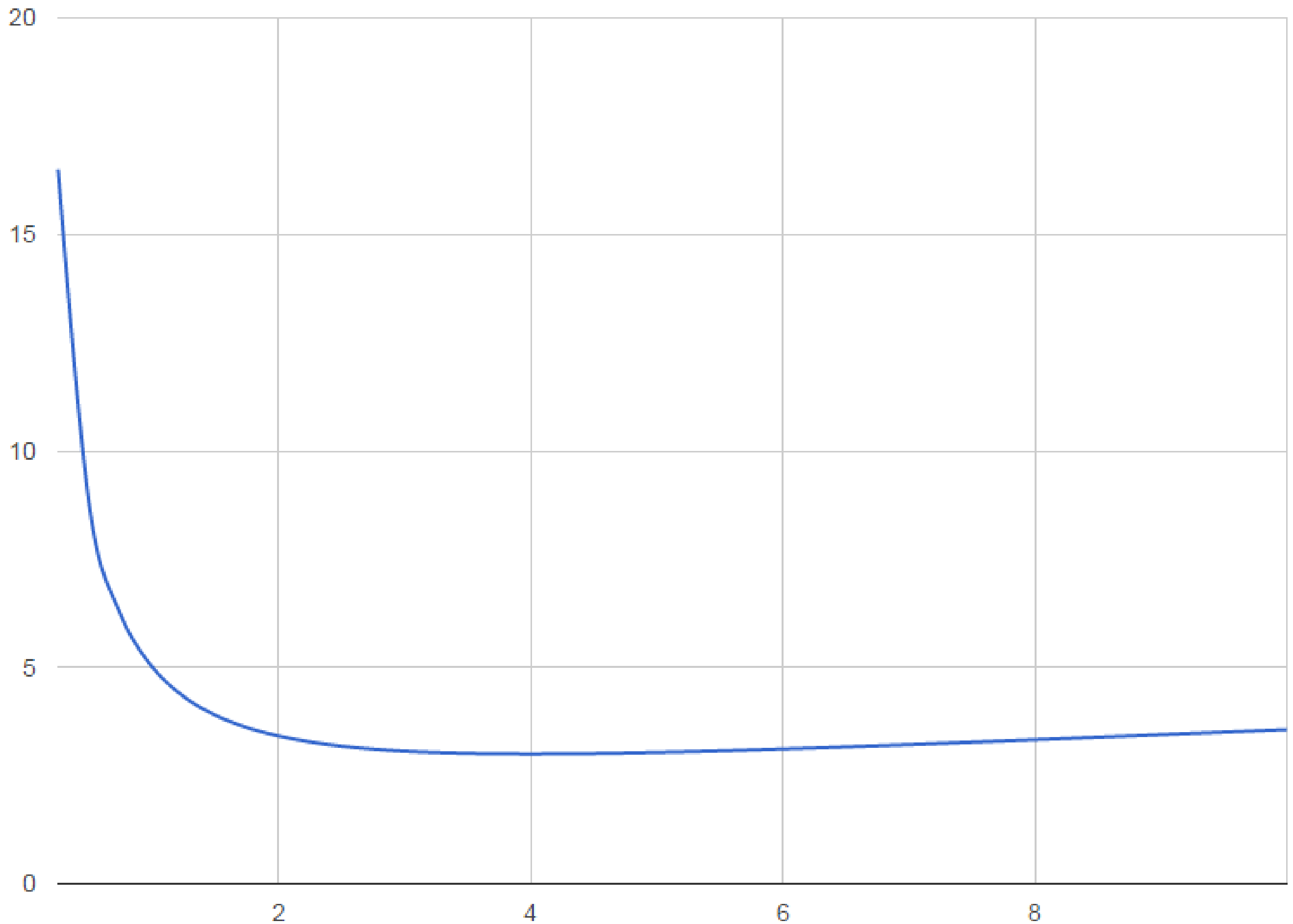
Aplicações da Derivada

c)



Aplicações da Derivada

d)



Definição: **Concavidade do gráfico de uma função**

Verificamos que o sinal algébrico da derivada primeira de uma função determina se o gráfico é crescente ou decrescente.

Agora veremos que o sinal algébrico da segunda derivada determina quando o gráfico é curvado para cima ou curvado para baixo.

Teste da Derivada Segunda:

Seja $f(x)$ uma função duas vezes diferenciável num intervalo (a, b):

a) Se $f''(x) > 0$ para todo x em (a, b),
então o gráfico de $f(x)$ possui **concavidade para cima** em (a, b);

b) Se $f''(x) < 0$ para todo x em (a, b),
então o gráfico de $f(x)$ possui **concavidade para baixo** em (a, b).

Exemplo: **Identifique os intervalos abertos nos quais as seguintes funções têm a concavidade para cima e para baixo:**

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

c) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$

Respostas:

a) $f(x)$ é côncava para cima em $(-\infty, \infty)$;

b) $f(x)$ é côncava para cima em $(1, \infty)$ e côncava para baixo em $(-\infty, 1)$;

c) $f(x)$ é côncava para cima em $\left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$ e côncava para baixo em $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$;

Exercícios: **Identifique os intervalos abertos nos quais as seguintes funções têm a concavidade para cima e para baixo:**

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$

b) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6$

c) $f(x) = 2x^6 - 6x^4$

d) $f(x) = (x^2 - 1)^2$

e) $f(x) = \sqrt[5]{x} - 1$

f) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(3x + 10)$

Respostas:

a) $f(x)$ é côncava para cima em $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$

e côncava para baixo em $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$

b) $f(x)$ é côncava para cima em $(-\infty, 0)$ e $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$

e côncava para baixo em $\left(0, \frac{2}{3}\right)$;

c) $f(x)$ é côncava para cima em $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$ e $\left(\sqrt{\frac{6}{5}}, \infty\right)$

e côncava para baixo em $\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}, \sqrt{\frac{6}{5}}\right)$;

Respostas:

d) $f(x)$ é côncava para cima em $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ e $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty\right)$

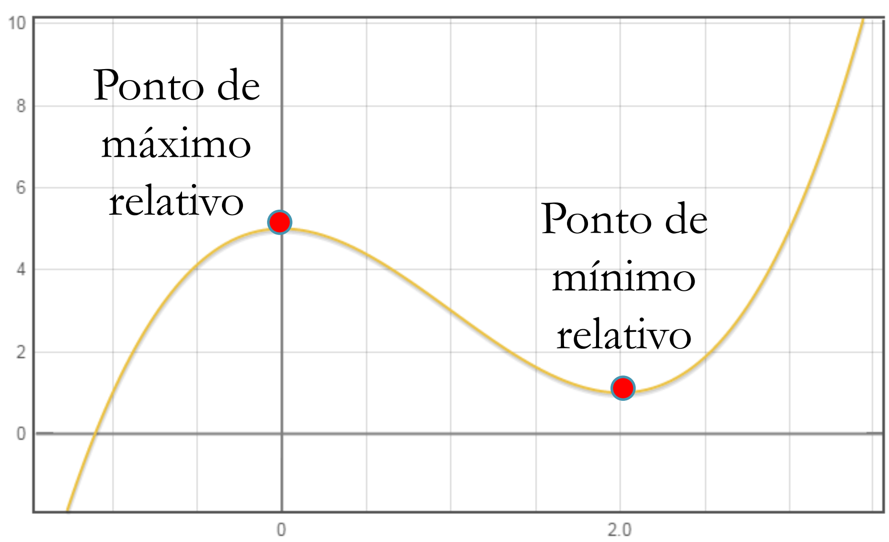
e côncava para baixo em $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$;

e) $f(x)$ é côncava para cima em $(-\infty, 0)$
e côncava para baixo em $(0, \infty)$;

f) $f(x)$ é côncava para cima em $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$
e côncava para baixo em $(-\infty, 0)$ e $\left(0, \frac{2}{3}\right)$;

Definição: Máximos e mínimos de uma função

Para determinar os extremos de uma função, podemos utilizar o critério da derivada 2ª, determinando os valores de máximo ou mínimo relativos.



Definição: Máximos e mínimos de uma função

Sejam $f(x)$ uma função derivável num intervalo (a, b) e c um ponto crítico de $f(x)$ nesse intervalo, isto é, $f'(c) = 0$, com $a < c < b$.

Se $f(x)$ admite a derivada $f''(x)$ em (a, b), temos:

a) Se $f''(c) < 0$, então $f(x)$ tem um **máximo relativo** em c;

b) Se $f''(c) > 0$, então $f(x)$ tem um **mínimo relativo** em c;

c) Se $f''(c) = 0$, nada podemos afirmar, devemos utilizar outas análises;

Exemplo: Determinar os máximos e os mínimos relativos de f:

$$f(x) = 18x + 3x^2 - 4x^3$$

$$f'(x) = 18 + 6x - 12x^2$$

$$f''(x) = 6 - 24x$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 18 + 6x - 12x^2 = 0$$

Pontos Críticos: $x = 3/2$ e $x = -1$

$$f''(3/2) = 6 - 24\left(\frac{3}{2}\right) = -30 < 0$$

f tem um valor máximo relativo em $3/2$

Aplicações da Derivada

Exercícios: Determinar os máximos e os mínimos relativos de f:

a) $f(x) = x(x-1)^2$

f tem um valor mínimo relativo em 1

e um valor máximo relativo em $1/3$

b) $f(x) = 6x - 3x^2 + \frac{1}{2}x^3$

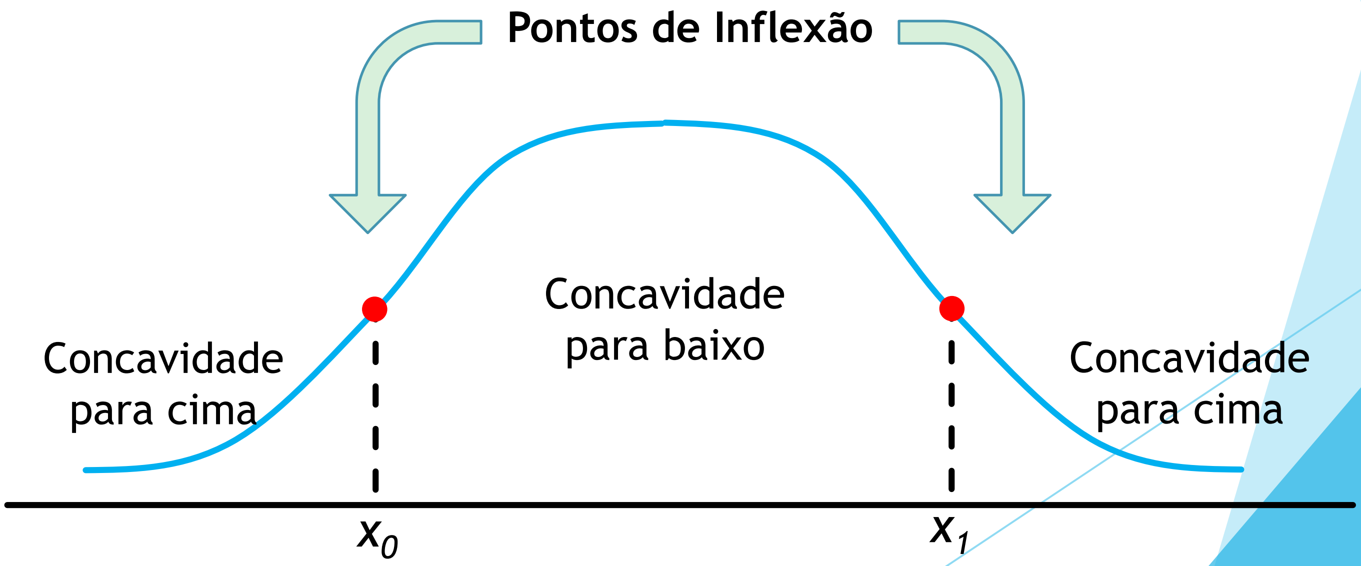
f tem um ponto crítico em $x = 2$, porém nada podemos afirmar.

Usando o critério da derivada primeira, concluímos que esta função

é sempre crescente. Portanto, não existem máximos nem mínimos relativos.

Definição: Ponto de Inflexão

São chamados **pontos de inflexão** os pontos no gráfico de uma função nos quais a concavidade muda de sentido.



Definição: Ponto de Inflexão

Um ponto $P(c, f(c))$ do gráfico de uma função contínua f é chamado **ponto de inflexão** se existe um intervalo (a, b) contendo c, tal que uma das seguintes situações ocorra:

a) f é côncava para cima em (a, c) e côncava para baixo (c, b);

b) f é côncava para baixo em (a, c) e côncava para cima em (c, b).

Exemplo: Determinar os pontos de inflexão e reconhecer os intervalos onde a seguinte função tem concavidade voltada para cima ou para baixo.

$$f(x) = (x-1)^3$$

$$f'(x) = 3(x-1)^2$$

$$f''(x) = 6(x-1)$$

$$f''(x) > 0 \;\rightarrow\; 6(x-1) > 0$$

$$x - 1 > 0 \;\rightarrow\; x > 1$$

Aplicações da Derivada

$$f''(x) > 0 \;\rightarrow\; 6(x-1) > 0$$

$$x - 1 > 0 \;\rightarrow\; x > 1$$

Portanto, no intervalo $(1, +\infty)$, $f''(x) > 0$. Analogamente $(-\infty, 1)$, $f''(x) < 0$. Sabemos então que f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 1)$ e no intervalo $(1, +\infty)$ é côncava para cima.

No ponto $c = 1$ a concavidade muda de sentido.

Logo, neste ponto, o gráfico de f tem um ponto de inflexão.

Exercícios: Determinar os pontos de inflexão e reconhecer os intervalos onde as funções seguintes tem concavidade voltada para cima ou para baixo.

a) $f(x) = x^4 - x^2$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ para\ x \leq 1 \\ 1 - (x-1)^2, & para\ x > 1 \end{cases}$

a) $f(x) = x^4 - x^2$

f tem concavidade para cima nos intervalos $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, +\infty\right)$ e

f é côncava para baixo no intervalo $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

Nos pontos $c_1 = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ e $c_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}$ a concavidade muda de sentido.

Logo, nestes pontos, o gráfico de f tem pontos de inflexão.

Aplicações da Derivada

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ para\ x \leq 1 \\ 1-(x-1)^2, & para\ x > 1 \end{cases}$

f tem concavidade para cima no intervalo $(-\infty, 1)$ e

f é côncava para baixo no intervalo $(1, +\infty)$.

No ponto $c = 1$ a concavidade muda de sentido e assim o gráfico de f apresenta um ponto de inflexão em $c = 1$.

Definição: Assíntotas Horizontais e Verticais

Conforme já estudamos, encontrados diversos gráfico que se aproximam de uma reta a medida que x cresce ou decresce. Estas retas são chamadas **assíntotas.**

Definição: Assíntotas Verticais

A reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de $y = f(x)$, se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

a) $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

d) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

Definição: Assíntotas Horizontais

A reta $y = b$ é uma assíntota horizontal do gráfico de $y = f(x)$, se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$

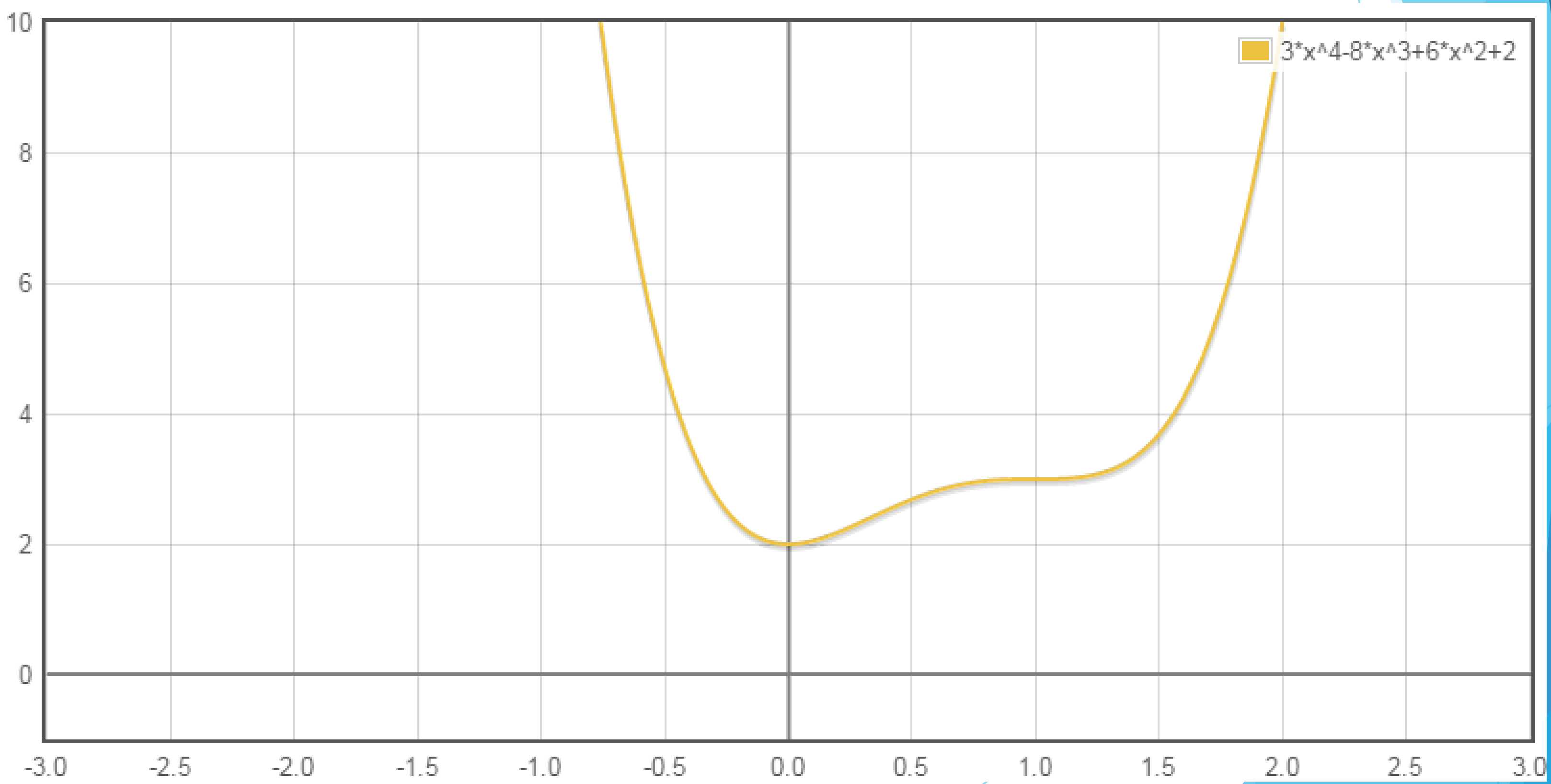
b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

Esboço de Gráficos:

Etapas	Procedimento
1ª	Encontrar $D(f)$;
2ª	Encontrar os pontos críticos: $f'(x) = 0$;
3ª	Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x)$ utilizando o teste da derivada primeira;
4ª	Encontrar os máximos e mínimos relativos, segundo o critério da derivada 2ª;
5ª	Determinar a concavidade e os pontos de inflexão da função, partindo do teste da derivada segunda;
6ª	Encontrar as assíntotas horizontais e verticais se existirem;
7ª	Esboçar o gráfico.

Exemplo: Esboçar o gráfico da função:

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$$



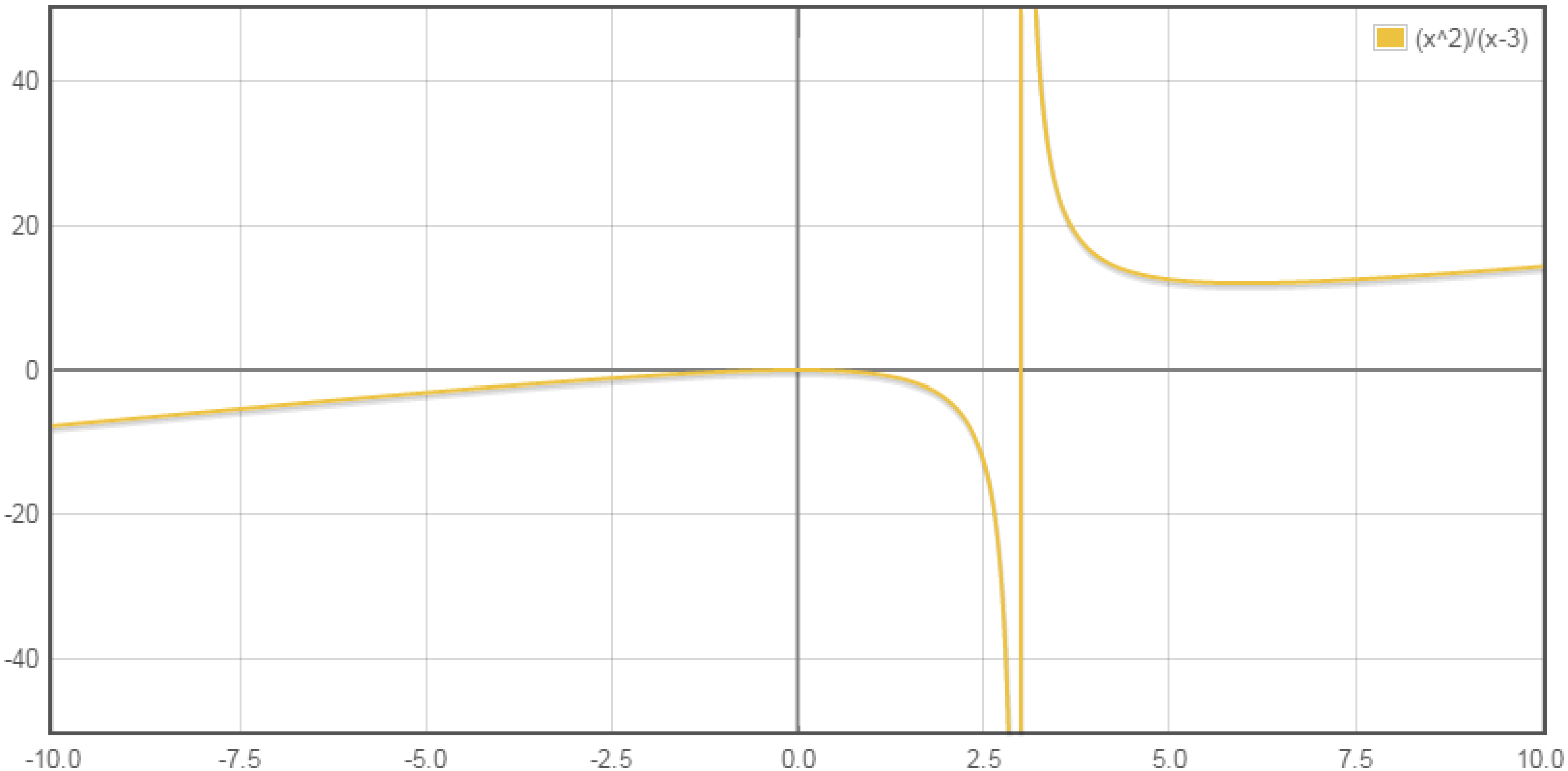
Exercícios: Esboçar o gráfico das funções:

a) $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$

b) $f(x) = (x+1)^{1/3}$

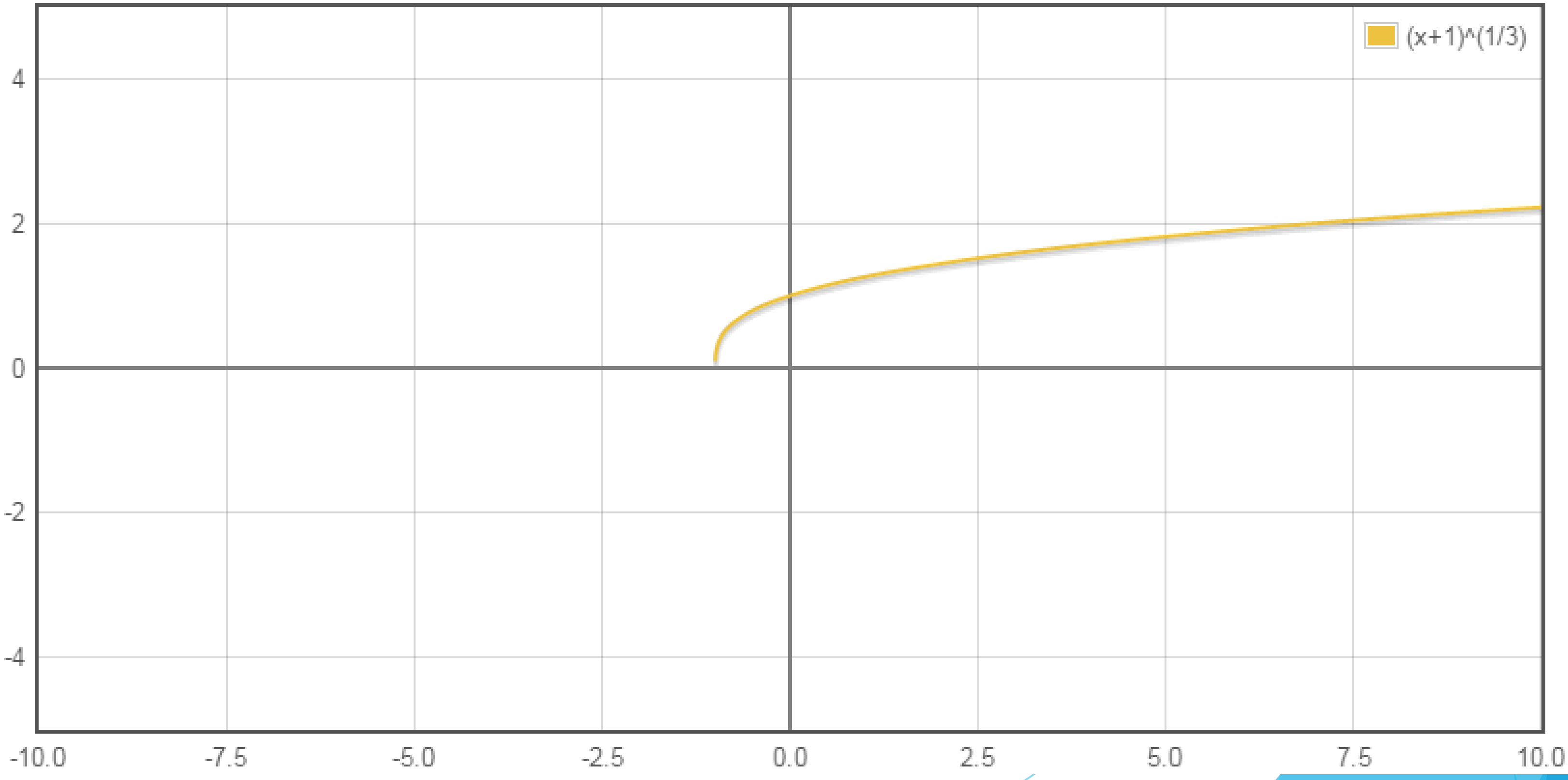
Aplicações da Derivada

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$



Aplicações da Derivada

b) $f(x) = (x + 1)^{1/3}$



Exercícios: Esboçar o gráfico das funções:

a) $f(x) = x^2 + 4x + 2$

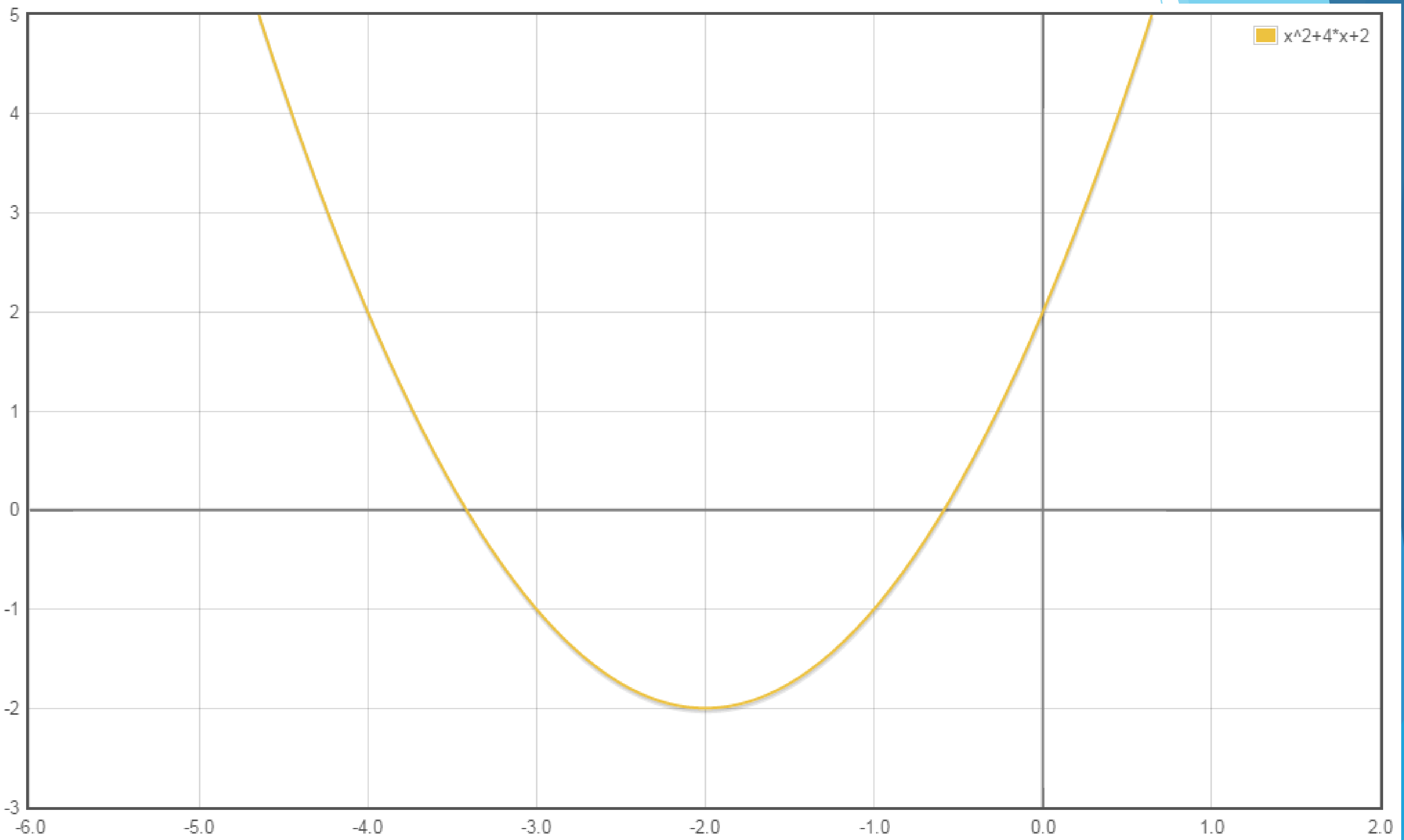
b) $f(x) = (x - 3)(x + 2)$

c) $f(x) = x^4 - 32x + 48$

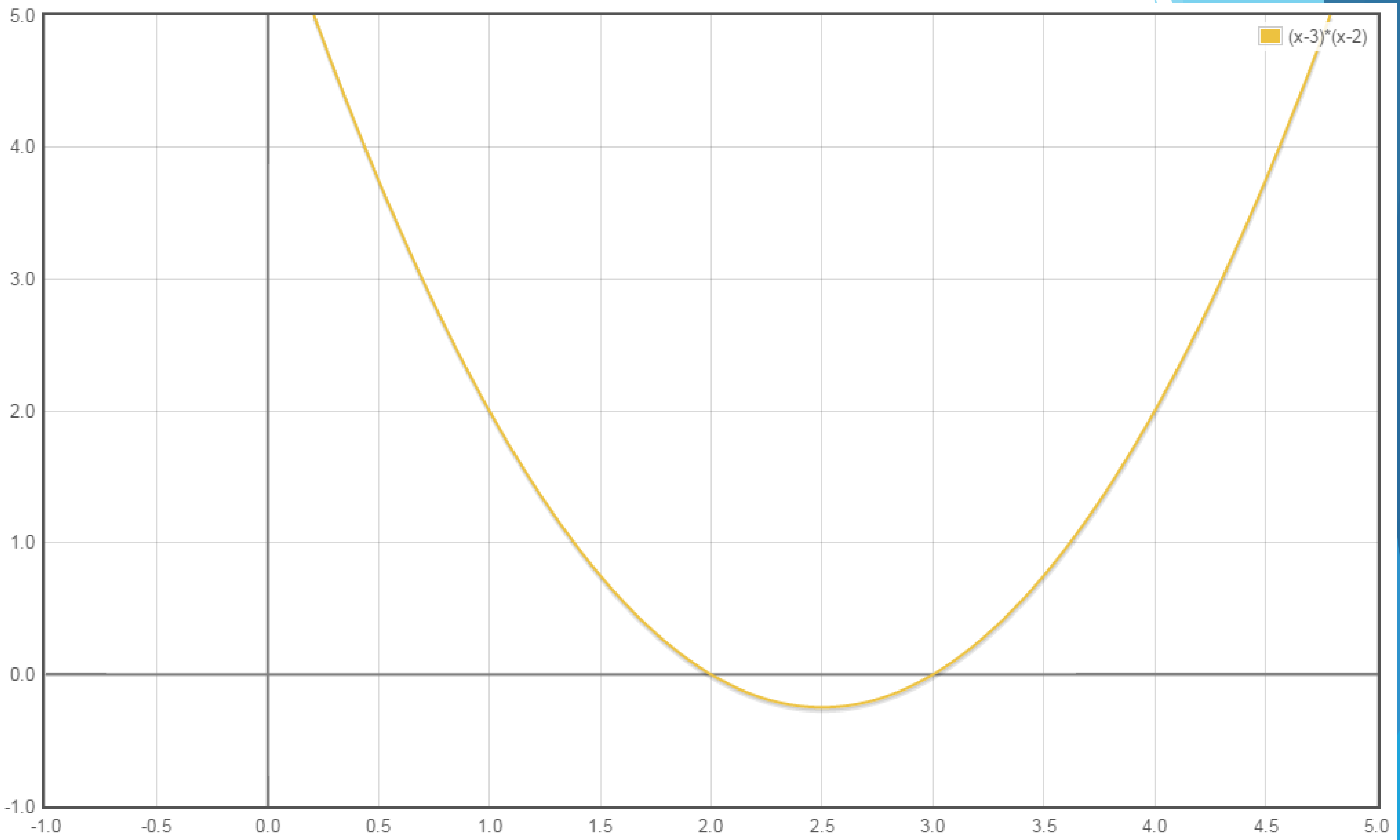
d) $f(x) = \frac{2x}{x+2}$

e) $f(x) = \frac{3x+1}{(x+2)(x-3)}$

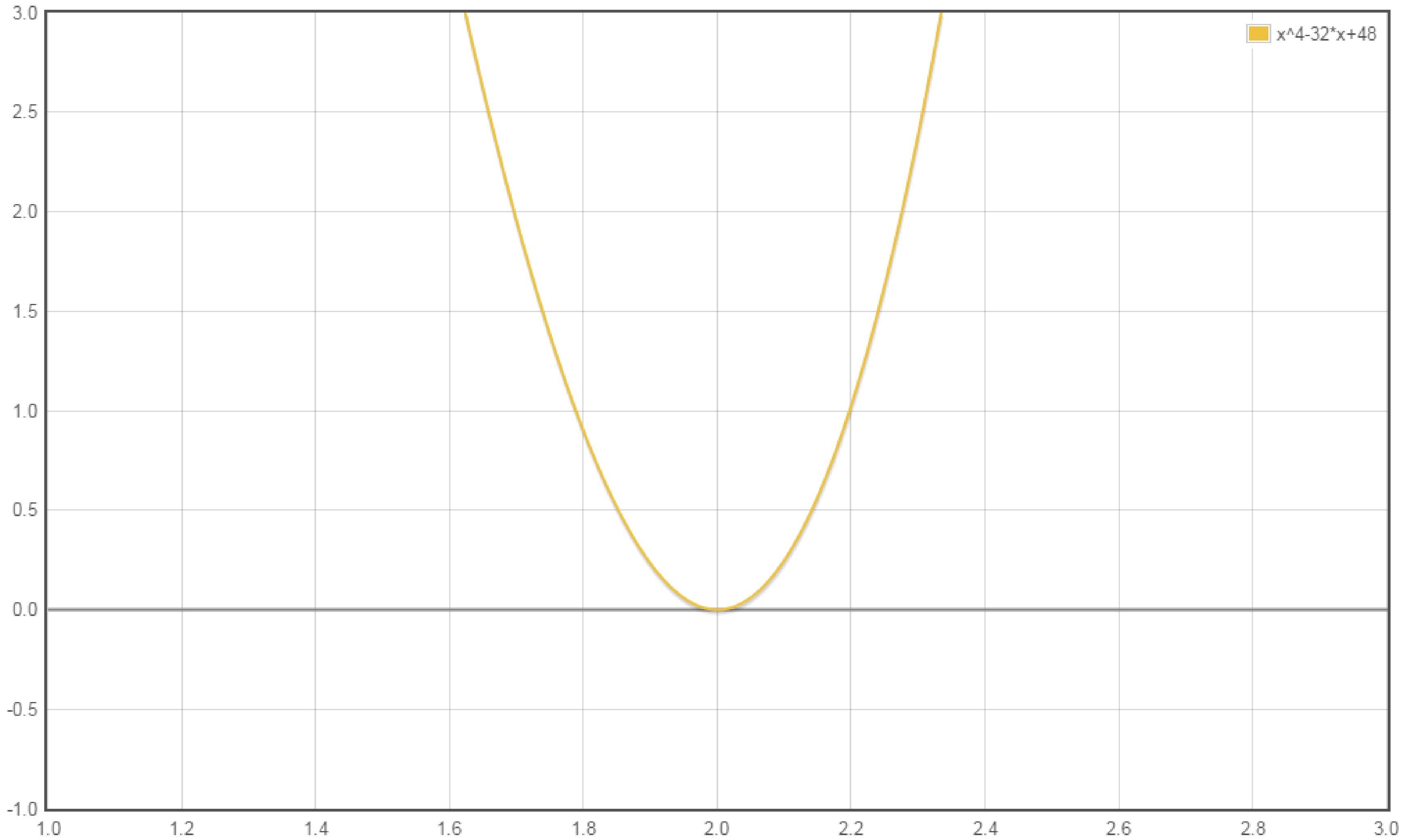
Aplicações da Derivada



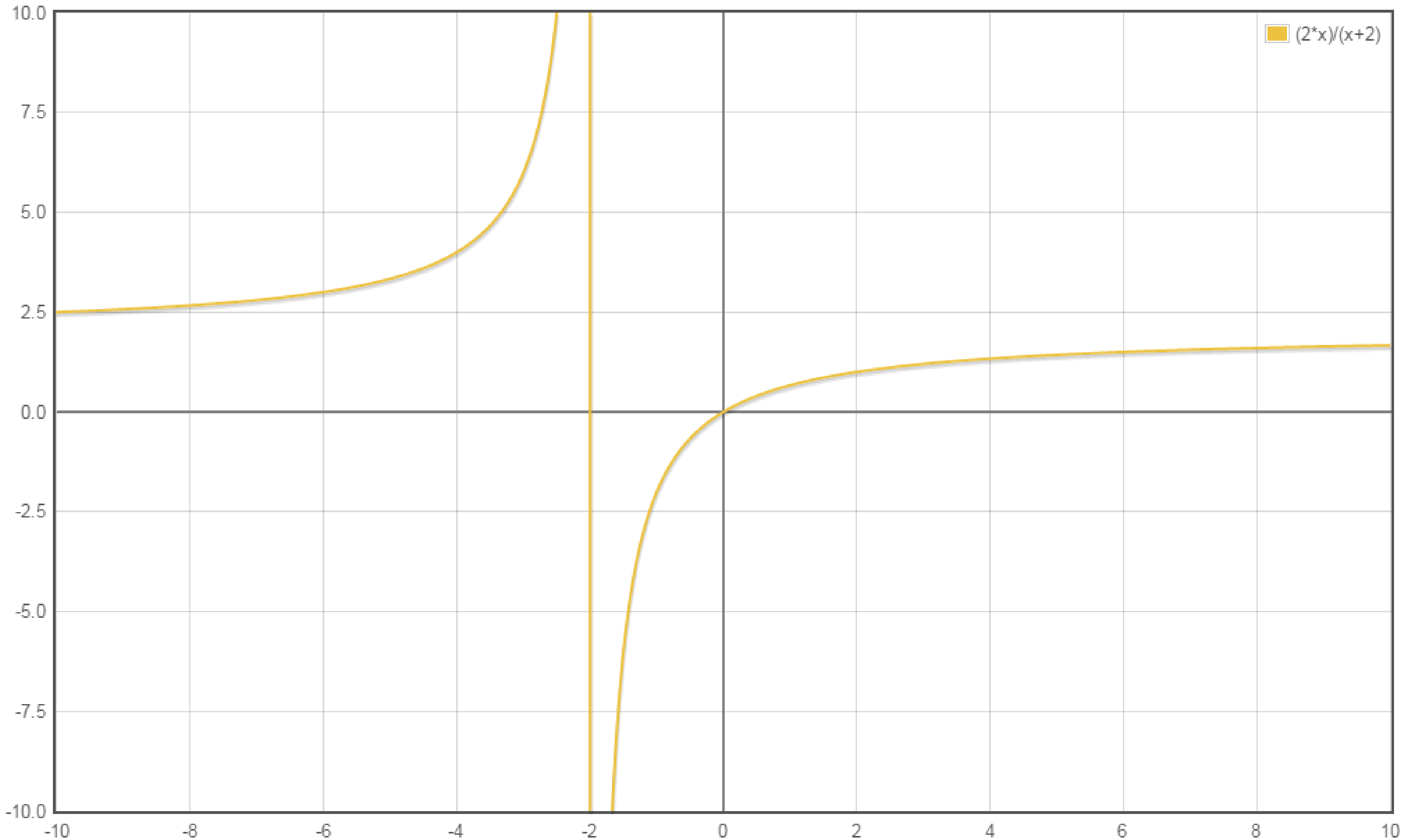
Aplicações da Derivada



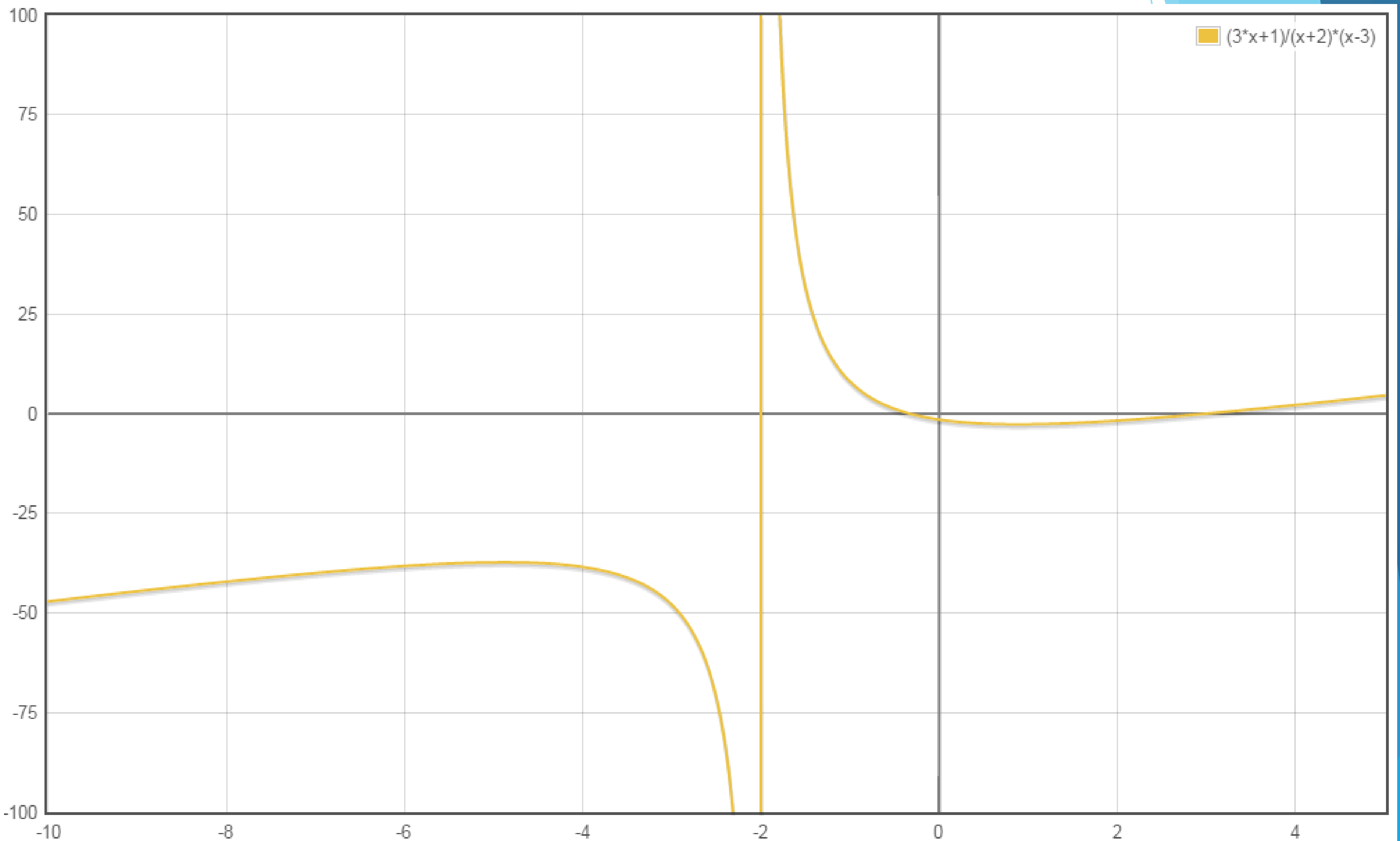
Aplicações da Derivada



Aplicações da Derivada



Aplicações da Derivada



Exercícios: Esboçar o gráfico das funções:

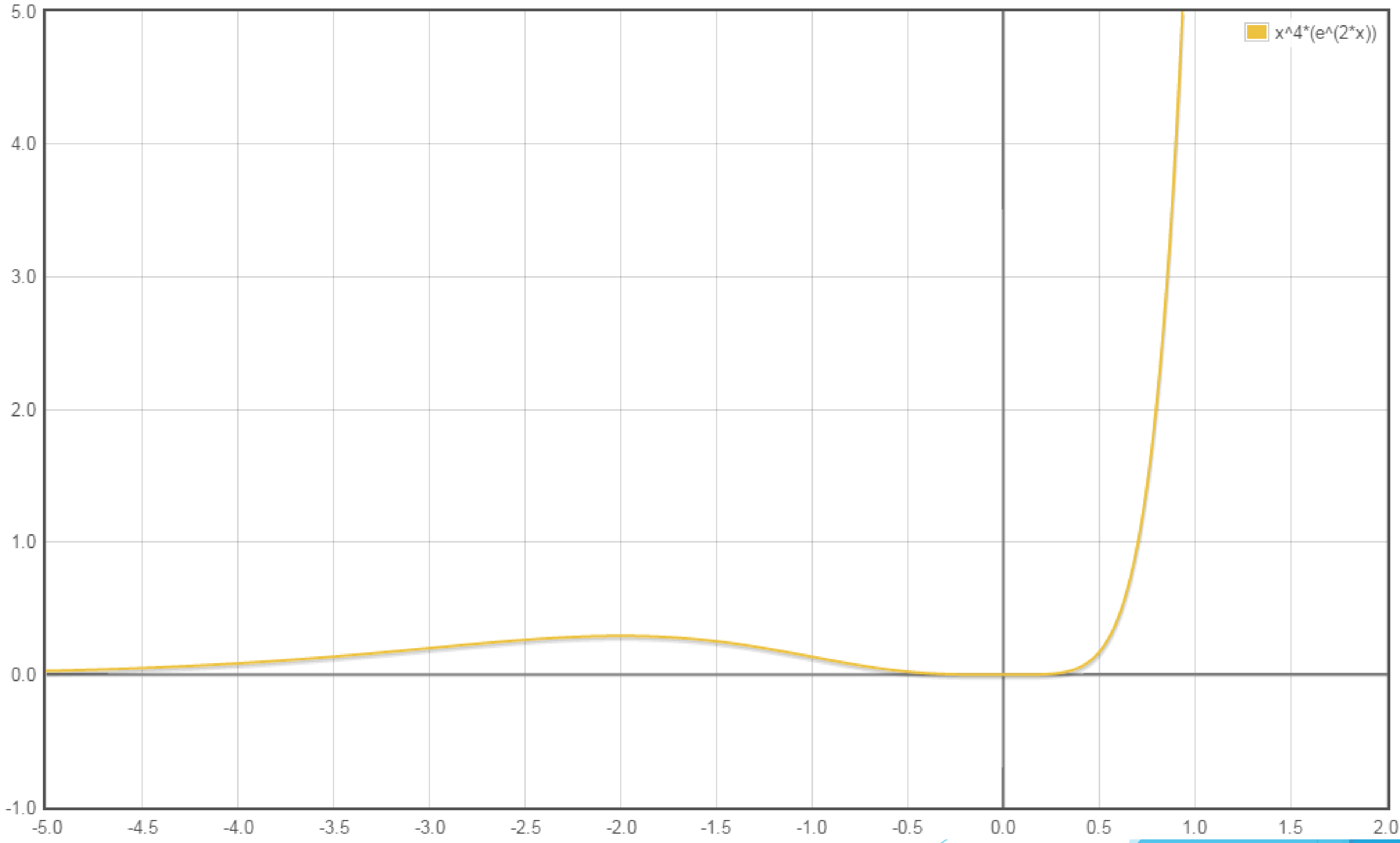
a) $f(x) = x^4 e^{2x}$

b) $f(x) = (x^2 - 1)^3$

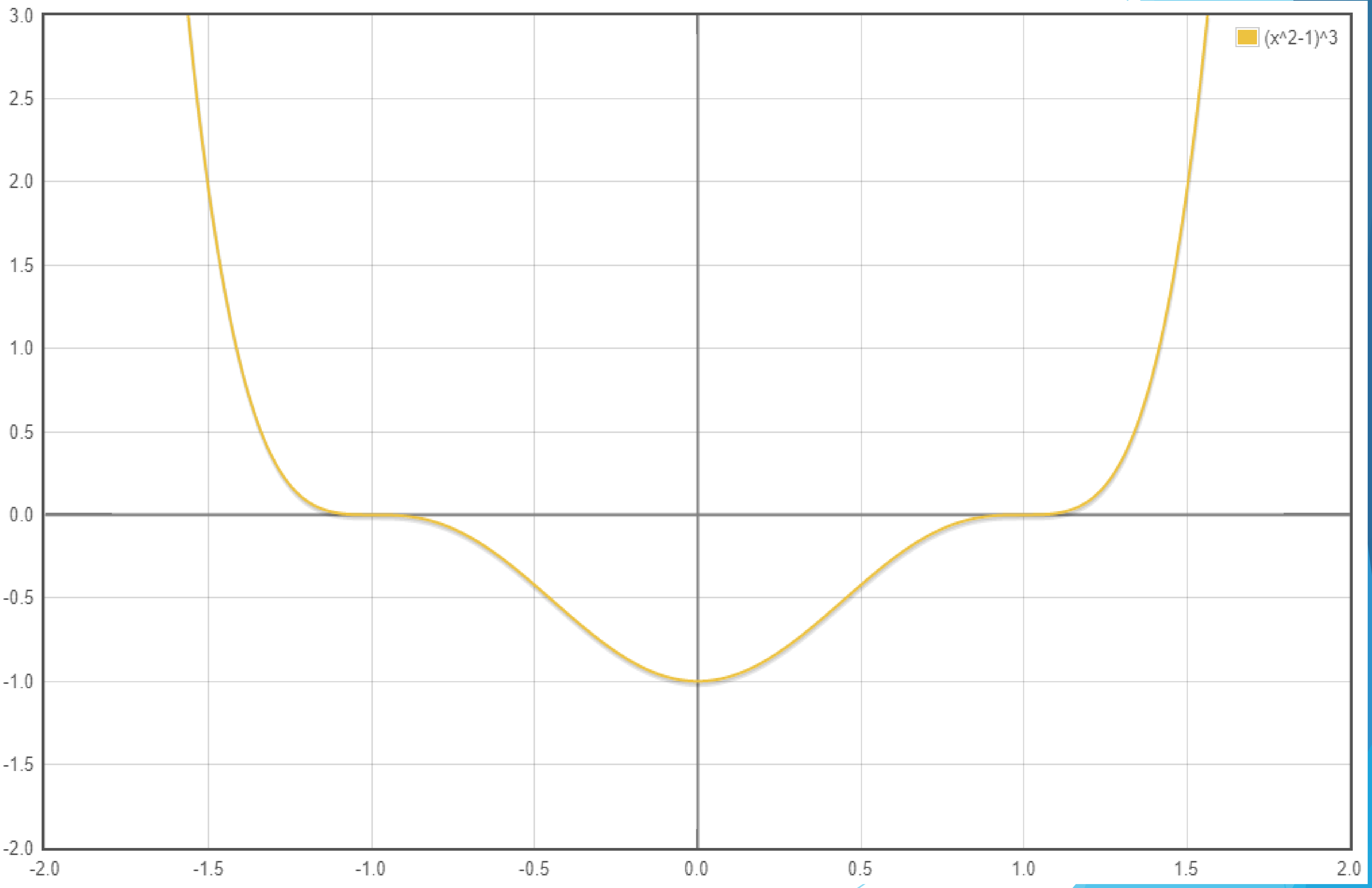
c) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

d) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

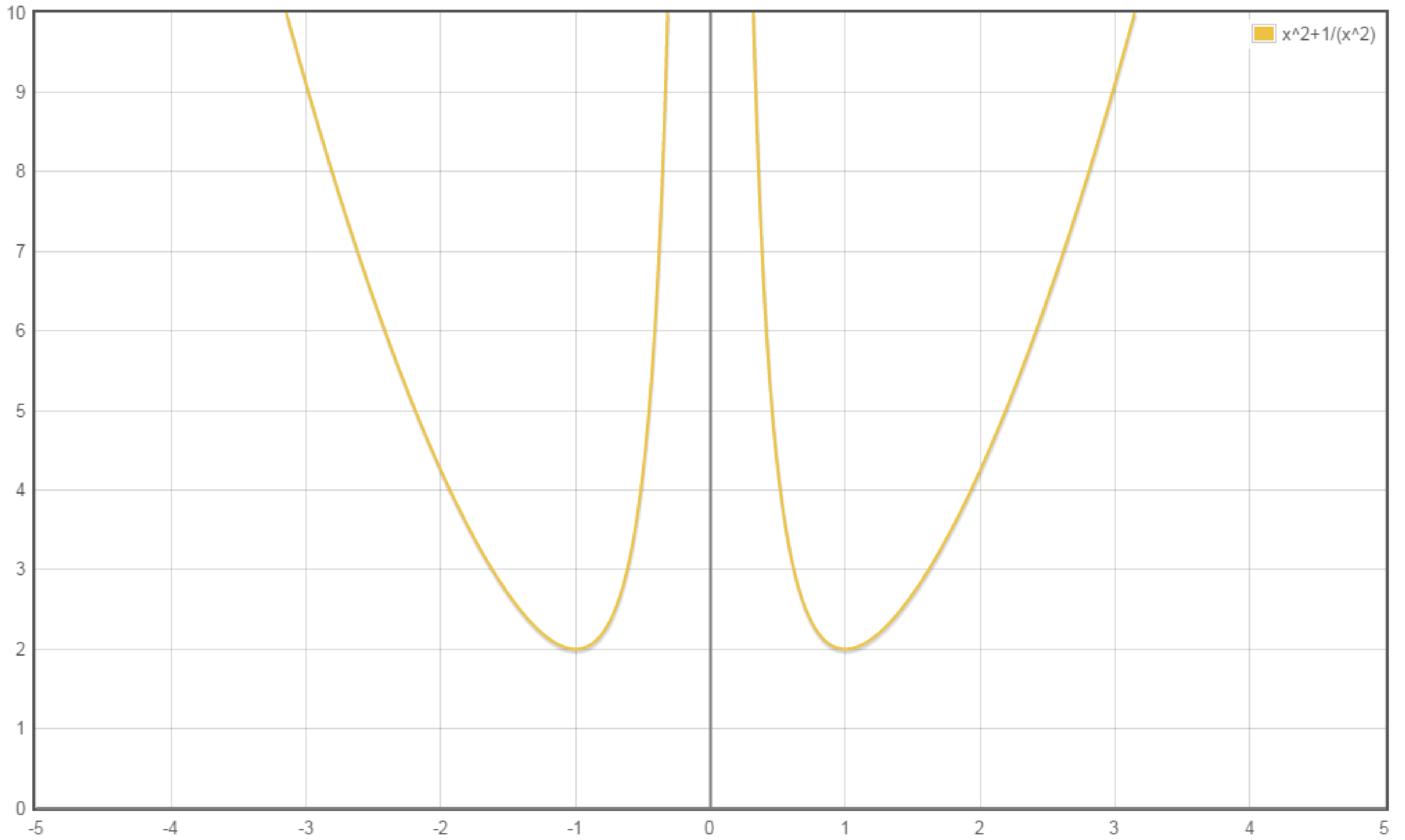
Aplicações da Derivada



Aplicações da Derivada



Aplicações da Derivada



Aplicações da Derivada