UNIVALI

Escola do Mar,
Ciência e Tecnologia

Cálculo II

Curso de Ciência da Computação
Campus Kobrasol

Prof. Denise Prado Kronbauer
denise.kronbauer@univali.br
denipk@gmail.com

UNIDADE 1: Integrais simples.

1. Integral indefinida: conceito e propriedades; integrais imediatas;
2. Integrais por substituição e integração por partes;
3. Integrais de funções racionais: definição, decomposição em frações parciais;
4. Integral definida: definição, propriedades, teorema fundamental do cálculo e áreas;
5. Integrais impróprias.

UNIDADE 2: Aplicações da integral definida.

1. Cálculo do comprimento de arco de uma curva plana;
2. Cálculo de áreas de regiões planas e áreas delimitadas por curvas;
3. Cálculo do volume de sólidos de revolução.

UNIDADE 3: Integração múltipla.

1. Integrais múltiplas: definição e cálculo de integrais duplas e triplas;
2. Aplicações de integrais duplas e triplas: cálculo de áreas, volumes, centro de massa;
3. Integral dupla em coordenadas polares;
4. Integral tripla em coordenadas cilíndricas e esféricas.

Frequência: De acordo com as normas da UNIVALI, cada aluno precisa de, no mínimo, 75% de frequência para ser aprovado.

Média Final: A média final (MF) deverá ser igual ou superior a 6,0. O aluno que não atingir a média final 6,0 estará reprovado, pois não existem exames finais.

$$\boxed{\boldsymbol{MF = \frac{M_1 + M_2 + M_3}{3}}}$$

O aluno que se ausentar nas atividades avaliativas ou solicitar processo de justificativa de falta, ficará sujeito ao deferimento pela coordenação do curso. Caso aprovado o processo, todas as avaliações atrasadas serão realizadas individualmente no dia **29.06 (sábado), das 8h às 11:30h**.

Calendário das Aulas e Avaliações

Encontro	Data	Encontro	Data
1	28 de Fevereiro	10	02 de Maio
2	07 de Março	**11**	**09 de Maio (2 – M2)**
3	**14 de Março (1 – M1)**	12	16 de Maio
4	21 de Março	13	23 de Maio
5	28 de Março	**14**	**30 de Maio (1 – M3)**
6	**04 de Abril (2 – M1)**	15	06 de Junho
7	11 de Abril	16	13 de Junho
8	18 de Abril	**17**	**27 de Junho (2 – M3)**
9	**25 de Abril (1 – M2)**	**18**	**04 de Julho (Substitutiva)**

Avaliações atrasadas: 29.06 (sábado), das 8h às 11:30h.

- ANTON, Howard. **Cálculo: um novo horizonte** - 6. ed / 2000 um novo horizonte. Porto Alegre, RS: Bookman, 2000 (10 exemplares).

- FLEMMING, Diva Marilia; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: funções, limite, derivação, integração** - 5. ed. rev. e ampl. / 1992 funções, limite, derivação, integração. São Paulo, SP: Makron Books; Florianópolis, SC: UFSC, c1992, 2006 (21 exemplares).

Referências bibliográficas

- GONÇALVES, Mirian Buss; FLEMMING, Diva Marilia. **Calculo B: funções de várias variáveis integrais duplas e triplas** / 2005 funções de várias variáveis integrais duplas e triplas. São Paulo, SP: Makron Books, 2005 (9 exemplares).

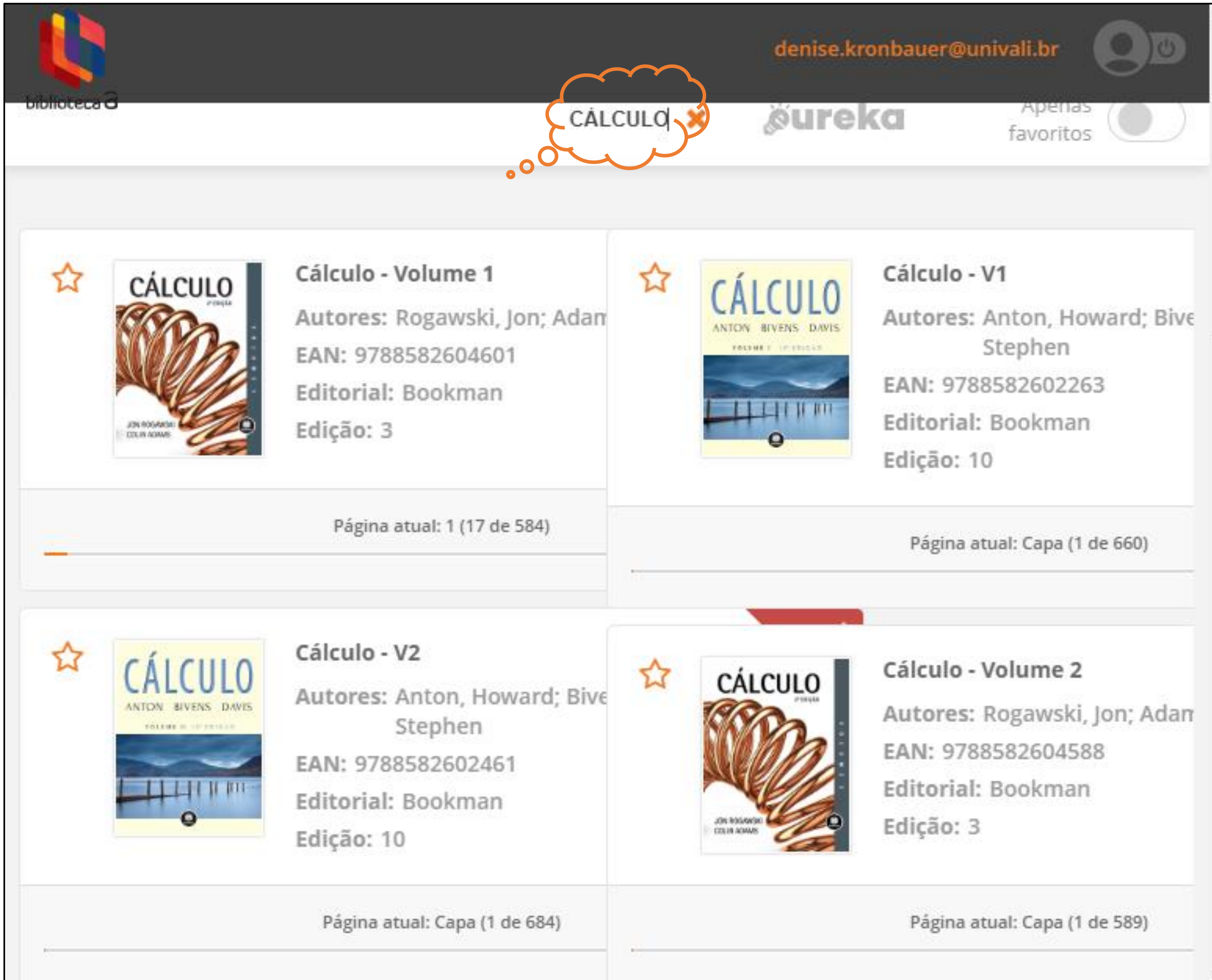
- MUNEM, Mustafá A.; FOULIS, David J. **Cálculo.** C1982 Rio de Janeiro, RJ: Livros Técnicos e Científicos. C1982. (9 exemplares).

- SWOKOWSKI, Earl William. **Calculo com geometria analítica** - 2. ed / c1995 São Paulo, SP: Makron Books, c1995. (1 exemplar).

Novidade: Biblioteca Digital

Univali → Minha Univali → Intranet → Biblioteca Digital

Novidade: Biblioteca Digital



Recados Paroquiais

- Horas Extracurriculares – Pesquisa, Ensino e Extensão;
- Computer on the Beach.

10 ANOS COMPUTER ON THE BEACH

04 a 06 de Abril de 2019

A Universidade do Vale do Itajaí – UNIVALI e a EMCT- Escola do Mar, Ciência e Tecnologia, através dos seus cursos de Ciência da Computação Campus Kobrasol e Engenharia de Computação do Campus Itajaí realizam anualmente o COMPUTER ON THE BEACH.

Trata-se de um evento técnico-científico que visa reunir profissionais, pesquisadores e acadêmicos da área de computação, a fim de discutir as tendências de pesquisa e mercado da computação em suas mais diversas áreas.

O evento procura unir o útil ao agradável em prol de um intercâmbio de experiências, discutindo de maneira informal, porém técnica, misturando atividades técnico-científicas com atividades de lazer, ao ar livre, das quais se pode desfrutar das belezas de Florianópolis durante o verão.
Em 2019, esperamos por você para aproveitar conosco a 10ª edição do Computer on the Beach.

Link: https://www.computeronthebeach.com.br/

UNIVALI

Escola do Mar,
Ciência e Tecnologia

Cálculo II

Curso de Ciência da Computação
Campus Kobrasol

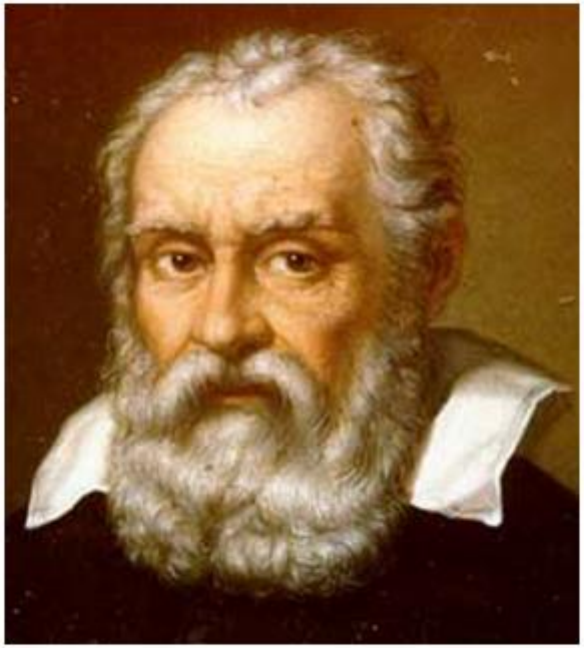
Prof. Denise Prado Kronbauer
denise.kronbauer@univali.br
denipk@gmail.com

A derivada e a integral são duas noções básicas do Cálculo Diferencial e Integral. Do ponto de vista geométrico, a **derivada** está ligada ao problema de traçar a ***tangente a uma curva*** enquanto que a **integral** está relacionada com o problema de determinar a ***área*** de certas figuras, mas também possui muitas outras interpretações possíveis.

O cálculo integral se originou com problemas de quadratura e cubatura. Resolver um problema de *quadratura* significa encontrar o valor exato da área de uma região bidimensional cuja fronteira consiste de uma ou mais curvas, ou de uma superfície tridimensional, cuja fronteira também consiste de pelo menos uma curva. Para um problema de *cubatura*, queremos determinar o volume exato de um sólido tridimensional limitado, pelo menos em parte, por superfícies curvas.

Muitas civilizações primitivas conheciam as fórmulas para a área de polígonos como quadrados, retângulos, triângulos e trapézios. Contudo, os matemáticos primitivos se deparavam com muitas dificuldades para encontrar fórmulas para a área de regiões com contornos curvilíneos, dos quais o círculo é o exemplo mais simples.

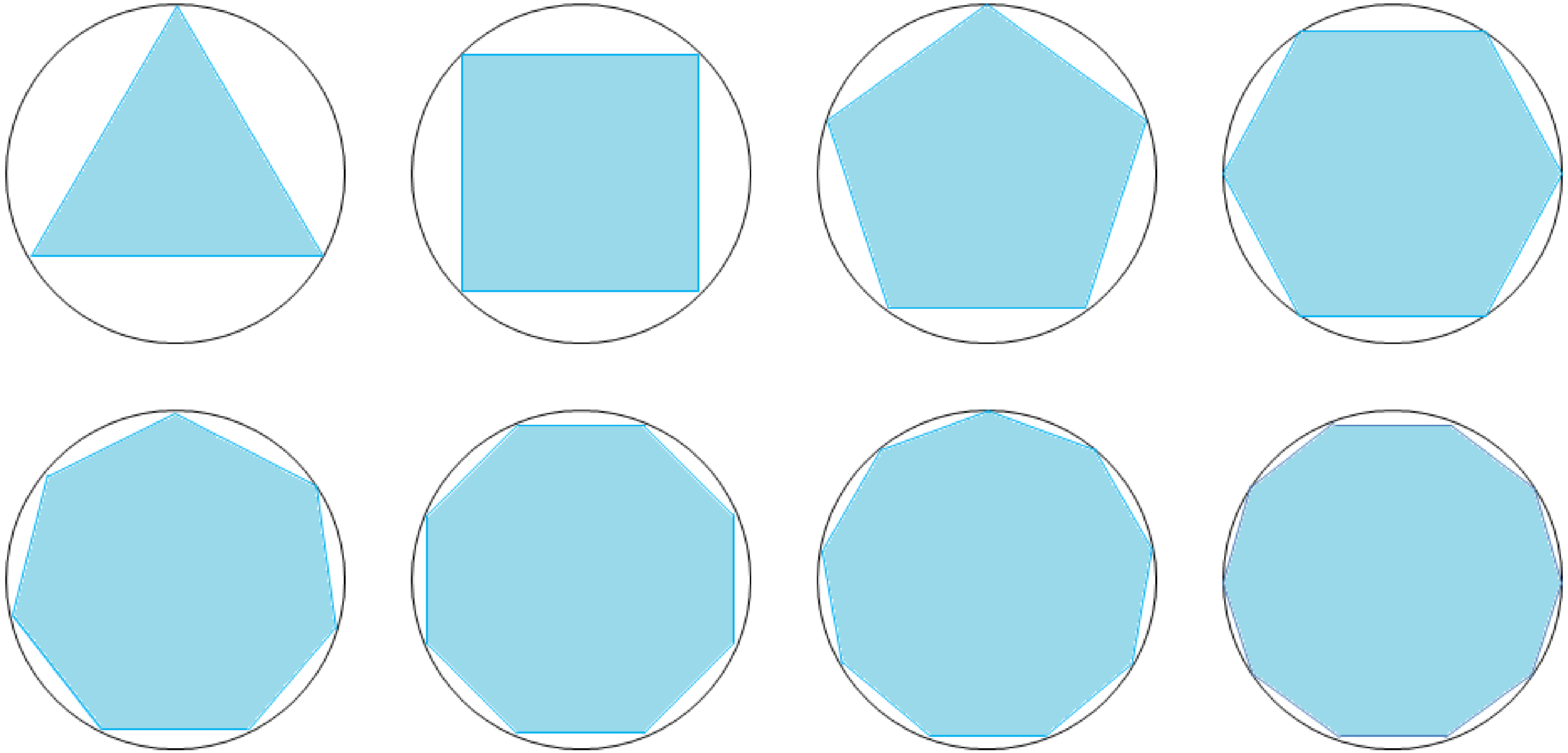
O primeiro progresso real no trato com o problema geral da área foi obtido pelo matemático grego **Arquimedes**, que obteve áreas de regiões delimitadas por arcos de círculos, parábolas, espirais e outros tipos de curvas, usando um procedimento mais tarde denominado *Método de Exaustão*.



Arquimedes (287 a.C – 212 a.C)

Este método, quando aplicado ao círculo, consiste na inscrição de uma sucessão de polígonos regulares no círculo, permitindo que o número de lados dos polígonos cresça indefinidamente. À medida que cresce o número de lados, os polígonos tendem a completar a região do círculo e suas áreas se aproximam cada vez mais da área exata do círculo.

Método de Exaustão



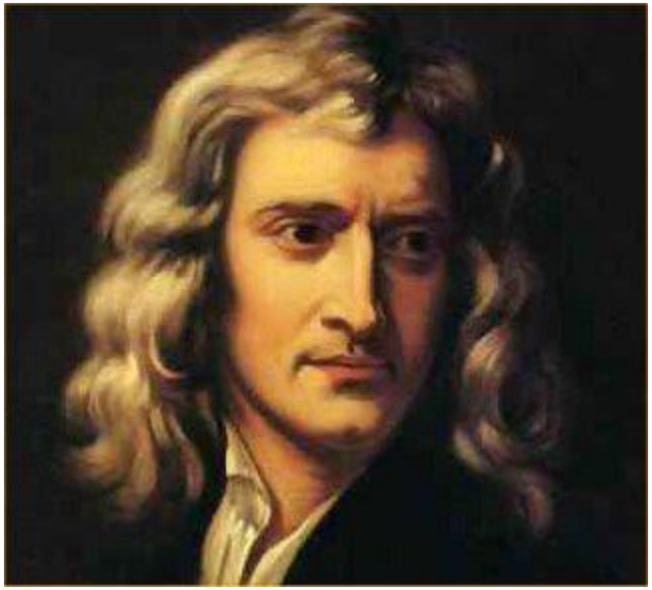
Após Arquimedes, só no século XVII, por volta de 1670,

é que surgiu o processo definitivo, com a invenção do **Cálculo Integral**,

simultaneamente por **Newton**, na Inglaterra,

e por **Leibniz**, na Alemanha.

Isaac Newton pensava na área da região entre uma curva e o eixo horizontal como uma variável; o extremo esquerdo era fixo, mas o extremo direito podia variar. Este truque levou ao Teorema Fundamental do Cálculo. Usando o teorema, Newton desenvolveu as técnicas básicas para avaliar integrais usadas hoje em dia, incluindo os métodos de substituição e integração por partes.

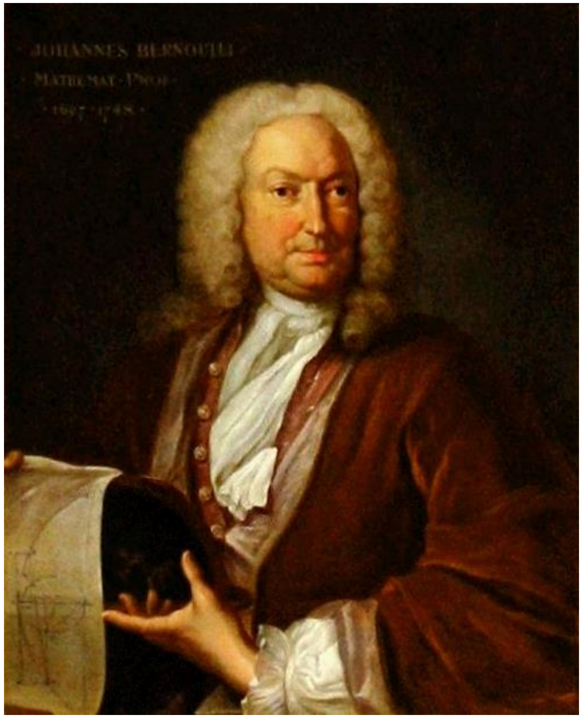


Newton (1642 – 1727)

Leibniz (1646 – 1716)

Gottfried Leibniz representou a área de uma figura pela soma de todos os retângulos limitados pelas ordenadas e diferenças das abscissas. Leibniz tomou o "S“ alongado para a integral (do latim *summa)* e tal **notação** tem permanecido desde então.

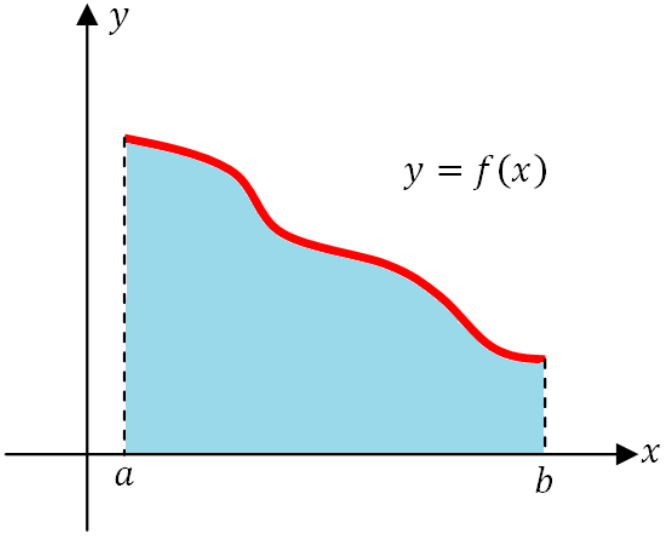
Em maio de 1690, **Johann Bernoulli** publicou um artigo muito importante para a história do desenvolvimento do Cálculo, uma vez que é nele que o termo **integral** aparece pela primeira vez, com o verdadeiro sentido de integração.

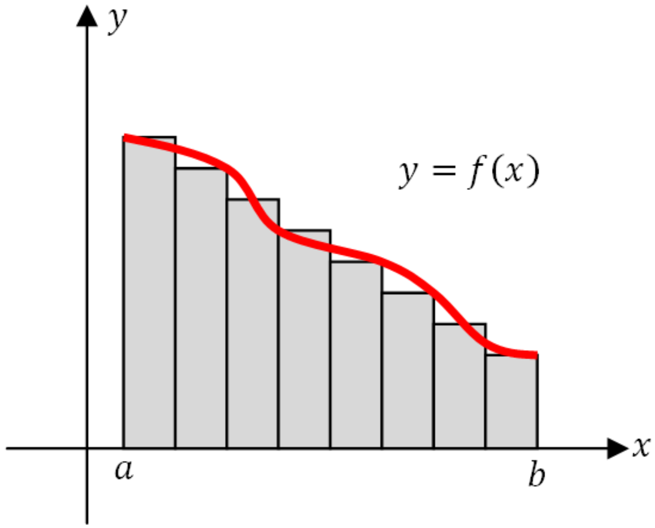


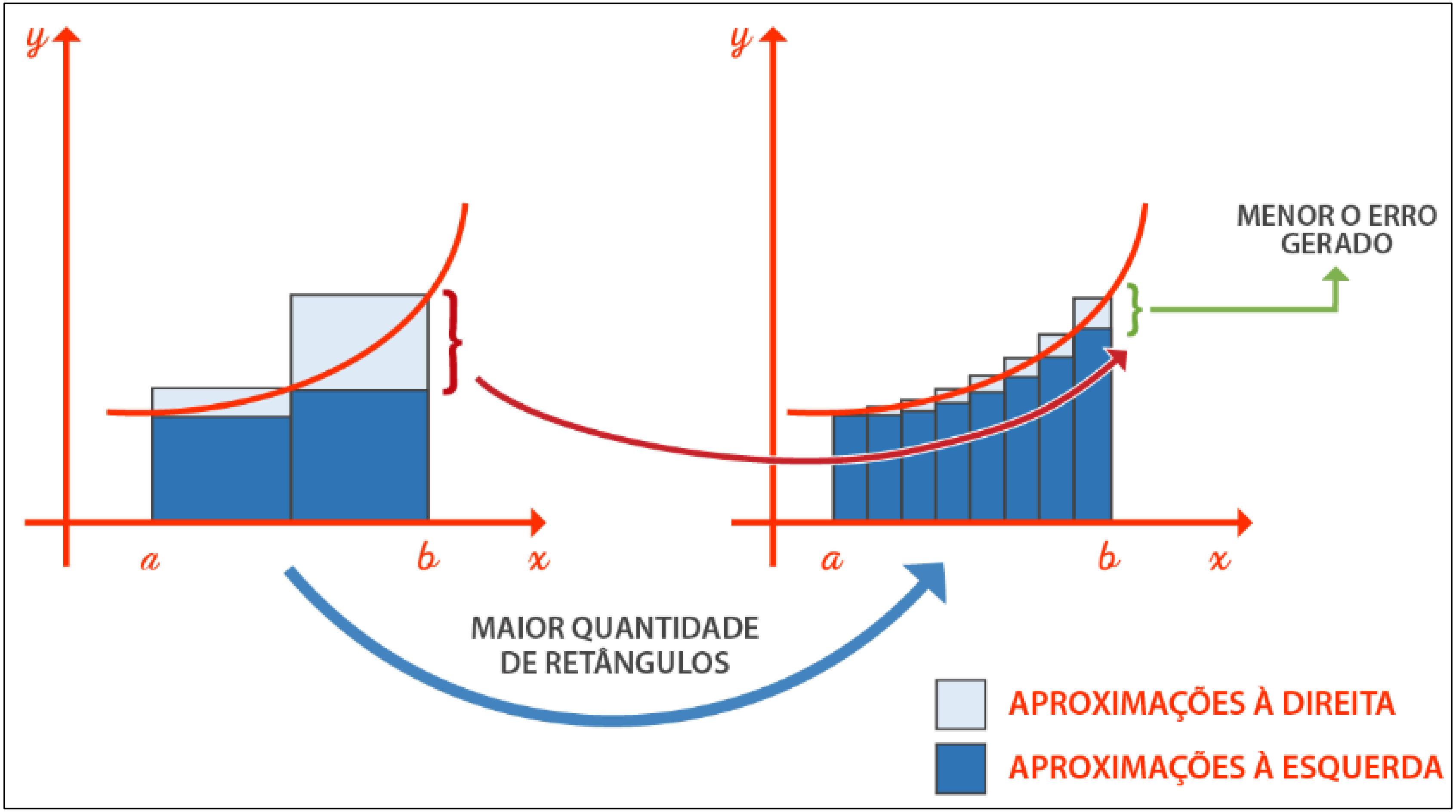
Bernoulli (1667 – 1748)

A ideia do método é, resumidamente, a seguinte:

Dada uma função contínua e não negativa $f(x) \geq 0$ em um intervalo $[a, b]$, a área da região entre o gráfico de f e o intervalo $[a, b]$ no eixo x é calculada a partir da soma S dos retângulos inscritos na curva.






y
a
b
x
y
a
b
x
MENOR O ERRO
GERADO
MAIOR QUANTIDADE
DE RETÂNGULOS
APROXIMAÇÕES À DIREITA
APROXIMAÇÕES À ESQUERDA

Somatório de Riemann

O somatório de Riemann é uma síntese matemática para o cálculo de estimativa de áreas com base em funções matemáticas $f(x)$.

A seguir estão apresentados os seus elementos:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x}$$

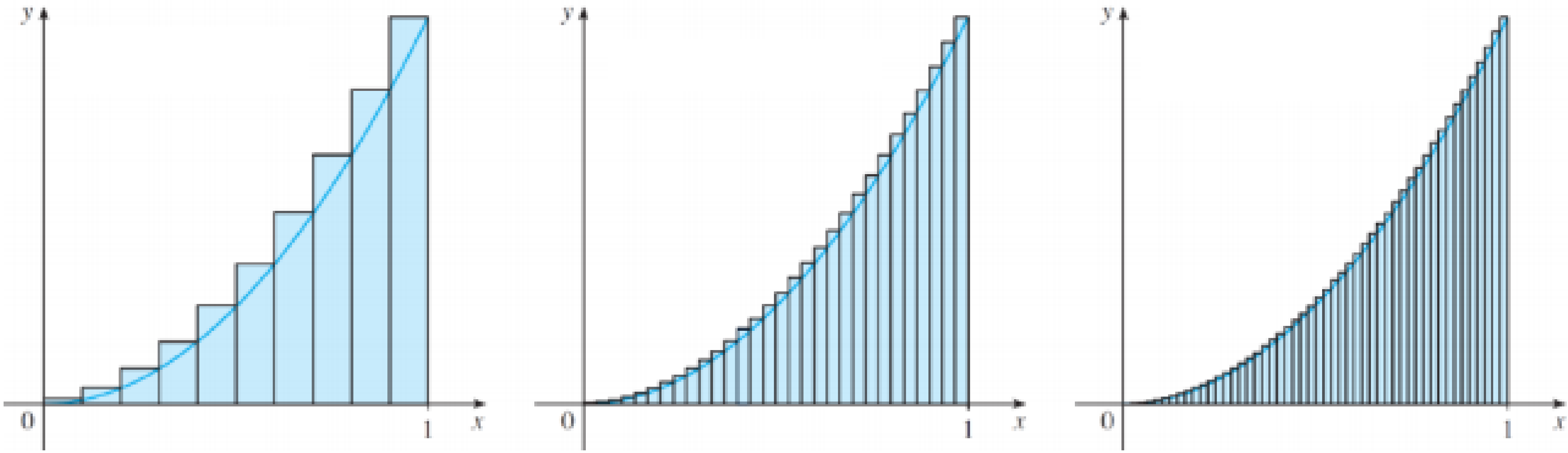
n = número de retângulos para a estimativa

$f(x_i) =$ Altura do retângulo, de acordo com a função $f(x)$

$\Delta x =$ Diferença entre os extremos do domínio $\frac{b-a}{2}$

Se elevarmos o número de retângulos cada vez mais, maior seria a precisão na estimativa a área abaixo da função $f(x)$. Digamos que, elevando a um número de retângulos muito grande (infinito), se aplicarmos o limite de n tendendo ao infinito, o somatório será computado com um Δx muito pequeno (chamado de dx).

A notação de somatório com dx é transformada, então, para o símbolo da integral, com limites de integração de acordo com o intervalo do domínio da função.



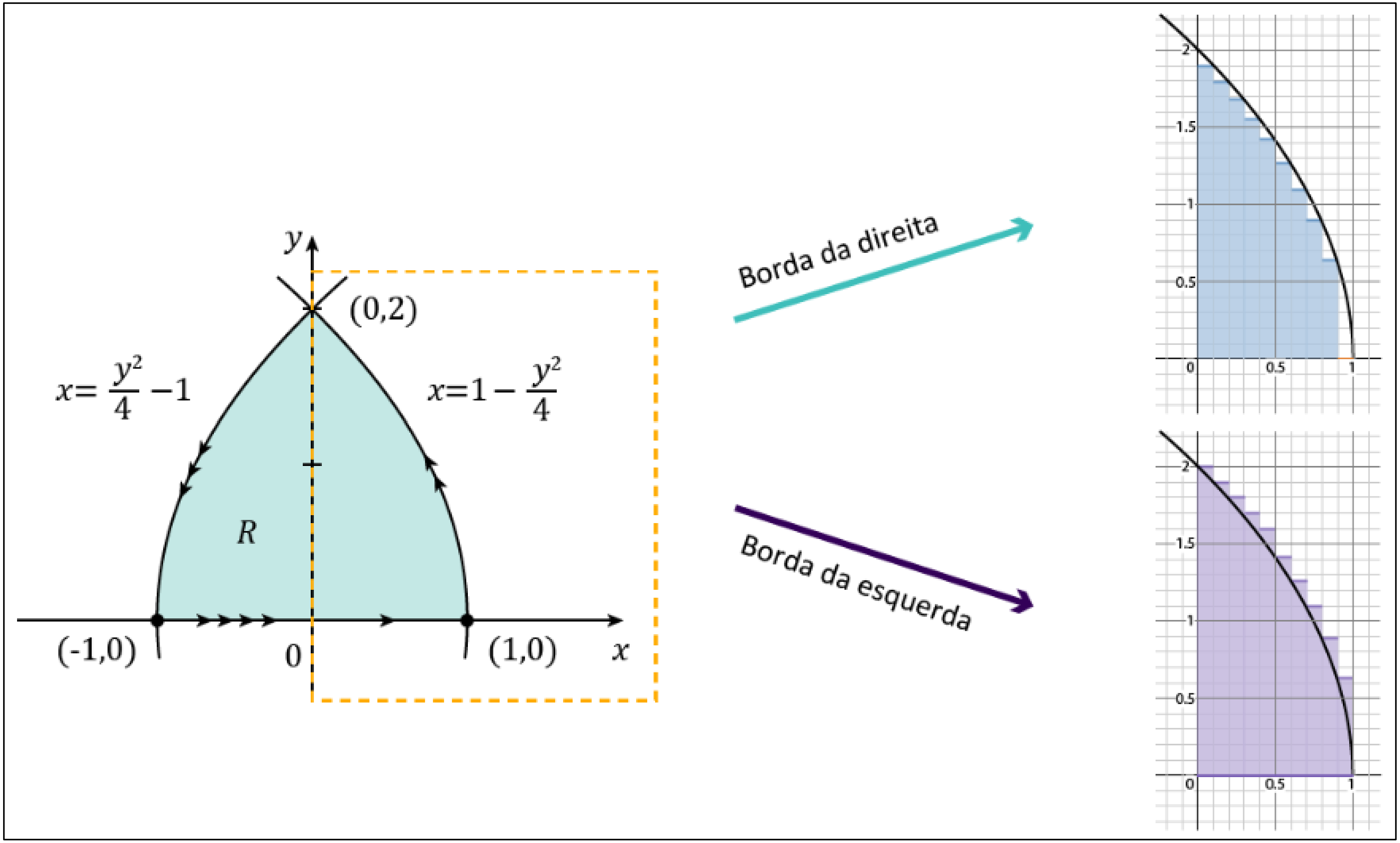
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x \quad \rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx$$

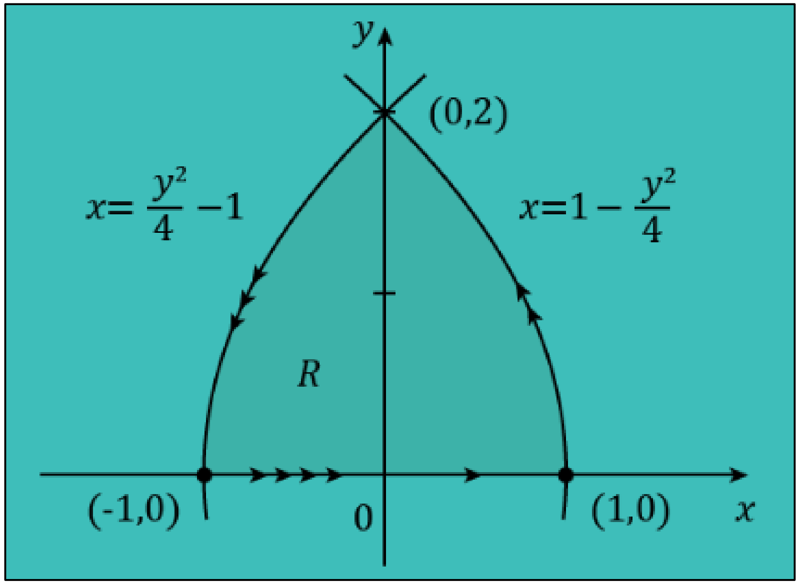
n = número de retângulos tendendo ao infinito

Aplicação

Diversas situações práticas demandam o uso de cálculo de área, por exemplo, manutenção e reparos em faixadas com pintura. Para realizar esse serviço, será necessário ter uma noção do quanto de tinta será usado para a cobertura da faixada. Quando a área obedece a uma geometria complexa, essa estimativa fica ainda mais complicada de ser obtida.

Um exemplo, na prática, é a Catedral de Florença, na qual se deseja pintar o lado externo da cúpula principal. Para estimar a quantidade de tinta necessária a partir da projeção 2D da cúpula, é necessário encontrar uma expressão matemática que siga a mesma forma da cúpula.


y
(0,2)
$x=\frac{y^2}{4}-1$
$x=1-\frac{y^2}{4}$
R
(-1,0)
0
(1,0)
x
Borda da direita
Borda da esquerda
2
1.5
1
0.5
0
0.5
1



Como a figura é simétrica, a área total será o dobro das estimativas feitas.

$$A_{final} = 2.\, A_{total}$$

Aplicando o fator de escala (1:25), a área será de:

$$61{,}25 \leq A_{final} \leq 71{,}25m^2$$

Definição:

A **integração indefinida** ou **antiderivação** é a operação inversa da derivação. Da mesma forma que a subtração é a operação inversa da adição ou a divisão é a operação inversa da multiplicação.

Exemplos:

1. Se $f(x) = \frac{x^4}{4}$, então sua derivada é: $f'(x) = x^3$

   Neste caso, uma das antiderivadas de x^3 é $\frac{x^4}{4}$

2. Se $f(x) = x^3$, então sua derivada é: $f'(x) = 3x^2$

   Neste caso, uma das antiderivadas ou integrais indefinidas de $3x^2$ é x^3

3. Se $f(x) = x^3 + 7$, então sua derivada é: $f'(x) = 3x^2$

   Neste caso, uma das antiderivadas de $3x^2$ é $x^3 + 7$

Note que nos exemplos, aparece "uma das antiderivadas ou integrais indefinidas". Podemos entender melhor, quando observamos os exemplos 2 e 3, já que tanto x^3 quanto $x^3 + 7$ são integrais indefinidas para a mesma função $3x^2$.

Assim, vemos que a diferença entre quaisquer destas funções (chamadas funções primitivas) é sempre uma constante, veja:

1. no exemplo 2, a constante era o 0 $\quad (x^3 = x^3 + 0)$
2. no exemplo 3, a constante era o 7 $\quad (x^3 + 7)$

Representando essa constante por C, temos que

a integral indefinida de $3x^2$ é $x^3 + C$, onde C é uma constante real.

Indicamos a **integral indefinida** ou **antiderivada** de $f'(x)$ por

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

Integral Indefinida

A notação de integral indefinida é dada por:

Símbolo da integral

Diferencial

$$\int f(x)\,dx = \underbrace{F(x) + c}_{\text{Antiderivada}}$$

Integrando

Fórmula de Derivação	Fórmula de Integração
$f(x) = x \to f'(x) = 1$	$\int dx = x + c$
$f(x) = 5x^3 \to f'(x) = 15x^2$	$\int 15x^2 dx = 5x^3 + c$
$f(x) = \operatorname{sen} x \to f'(x) = \cos x$	$\int cos\ x\ \ dx = sen\ x + c$
$f(x) = e^x \to f'(x) = e^x$	$\int e^x\, dx = e^x + c$

1. $\int dx = x + c$

2. $\int k\,dx = k\int dx = kx + c, \quad k$ é *uma constante*

3. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

4. $\int e^x\,dx = e^x + c$

5. $\int sen\,x\,dx = -\cos x + c$

6. $\int cos\,x\;\,dx = sen\,x + c$

7. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$

8. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

Exercícios: Calcular a integral das seguintes funções utilizando as regras:

a) $\int 2\, dx$

b) $\int 3x\, dx$

c) $\int \frac{1}{x^3}\, dx$

d) $\int (x+2)\, dx$

e) $\int (3x^4 - 5x^2 + x)\, dx$

f) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx$

g) $\int 3\cos x\, \, dx$

h) $\int \frac{3e^x}{2}\, dx$

i) $\int -\frac{\operatorname{sen} x}{2}\, dx$

j) $\int (e^x - cosx)\, dx$

Respostas:

a) $2x + c$

b) $\frac{3x^2}{2} + c$

c) $-\frac{1}{2x^2} + c$

d) $\frac{x^2}{2} + 2x + c$

e) $\frac{3x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$

f) $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x} + c$

g) $3 \operatorname{sen} x + c$

h) $\frac{3e^x}{2} + c$

i) $\frac{\cos x}{2} + c$

j) $e^x - \operatorname{sen} x + c$

Integral por Substituição ou Mudança de Variáveis

Para revolver uma integral na forma:

$$\int f(g(x)).\, g'(x)dx$$

utilizaremos a técnica de integração por substituição, que consiste em aplicar a mudança de variáveis $u = g(x)$. Desta forma, $du = g'(x)$ o que, substituindo na integral acima, fornece: $\int f(u)du$

- ***Passo 1:*** Faça uma escolha para u, digamos $u = g(x)$

- ***Passo 2:*** Calcule $\frac{du}{dx} = g'(x)$

- ***Passo 3:*** Faça a substituição $u = g(x), \quad du = g'(x)dx$

  Neste ponto, toda integral deve estar em termos de u; nenhum x deve continuar.

- ***Passo 4:*** Calcule a integral resultante.

- ***Passo 5:*** Substituir u por $g(x)$; assim, a resposta final estará em termos de x.

Exemplo: Determine $\int \sqrt{1-3x}dx$

$$u = 1 - 3x \quad \rightarrow \quad du = -3dx \quad \rightarrow \quad dx = -\frac{du}{3}$$

$$\int \sqrt{1-3x}dx \quad \rightarrow \quad \int u^{1/2}\left(-\frac{1}{3}du\right) \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{3}\int u^{1/2}du$$

$$-\frac{1}{3}\left[\frac{u^{\left(\frac{1}{2}+1\right)}}{\frac{1}{2}+1}\right] \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{3}.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad -\frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad \boxed{-\frac{2}{9}(1-3x)^{\frac{3}{2}} + c}$$

Integral por Partes:

É um método que permite expressar a integral de um produto de funções em outra integral.

$$\int f(x)\,.\,g'(x)dx = f(x).\,g(x) - \int g(x).\,f'(x)\,dx$$

$$u = f(x) \quad \rightarrow \quad du = f'(x)$$

$$v = g(x) \quad \rightarrow \quad dv = g'(x)$$

$$\boxed{\int u.\,dv = u.\,v - \int v.\,du}$$

Exemplo: Determine $\int \underbrace{x}_{u}.\underbrace{e^{-x}\,dx}_{dv}$

derivada

$u = x$

$du = dx$

$v = -e^{-x}$

$dv = e^{-x}dx$

integral

$$\boxed{\int u.dv = u.v - \int v.du}$$

$$\int x.e^{-x}dx = x.(-e^{-x}) - \int -e^{-x}.dx$$

$$\boxed{= -xe^{-x} - e^{-x} + c}$$

Quando a integral só pode ser resolvida por partes, fica a dúvida de como escolher os termos u e dv, uma escolha errada pode dificultar o processo de integração.

Uma regra que funciona para a maioria dos casos é a chamada **regra de LIATE ou LIPTE**. Partindo dessa regra, devemos escolher os termos u e dv de acordo com a ordem que as funções são representadas dentro do anagrama **"L-I-A-T-E"**

L = funções **Logarítmicas**

I = funções **Inversas**

A ou P = funções **Algébricas ou Polinomiais**

T = funções **Trigonométricas**

E = funções **Exponenciais**

Exemplo: Determine $\int \underbrace{x^2}_{u} . \underbrace{e^x \, dx}_{dv}$

derivada

$u = x^2$

$du = 2xdx$

$v = e^x$

$dv = e^x dx$

integral

$$\boxed{\int u.dv = u.v - \int v.du}$$

$$\int x^2 . e^x dx = x^2 . e^x - \int e^x . 2xdx$$

$$\int x^2.e^x dx = x^2.e^x - \int e^x.2x dx \quad \rightarrow \quad = x^2.e^x - 2\underbrace{\int x.e^x dx}_{partes}$$

derivada

$$u = x \qquad v = e^x$$

$$du = dx \qquad dv = e^x dx$$

integral

$$= x^2.e^x - 2\left(x.e^x - \int e^x dx\right)$$

$$= x^2.e^x - 2x.e^x + 2e^x + c$$

$$\int x^2.e^x dx = \boxed{e^x(x^2 - 2x + 2) + c}$$

Exercícios: Calcular a integral das seguintes funções utilizando as regras:

a) $\int e^x \cos x \ dx$

b) $\int x . \ln x \, dx$

c) $\int (x^2 + 1). \operatorname{sen} x \, dx$

Respostas:

a) $\int e^x \cos x \ dx = \frac{e^x sen\ x + e^x cos\ x}{2} + c$

b) $\int x . \ln x \, dx = \frac{1}{4} x^2 (2\ ln\ x - 1) + c$

c) $\int (x^2 + 1) . \operatorname{sen} x \, dx = -(x^2 - 1) . cos\ x + 2x . \operatorname{sen} x + c$