UNIVALI

Escola do Mar,
Ciência e Tecnologia

# Cálculo II

Curso de Ciência da Computação
Campus Kobrasol

**Prof. Denise Prado Kronbauer**
denise.kronbauer@univali.br
denipk@gmail.com

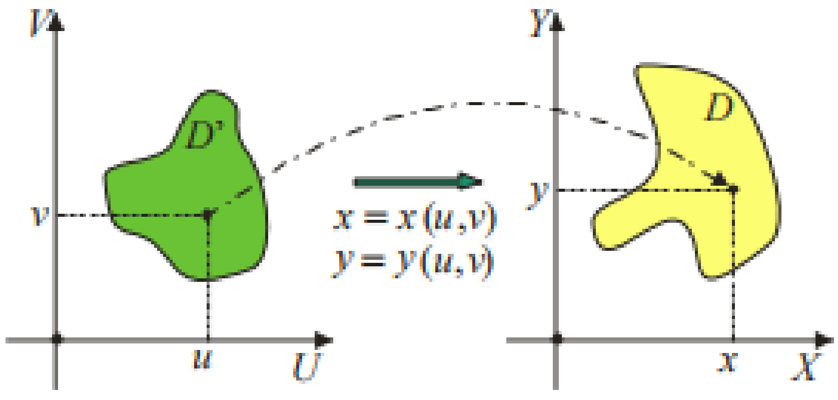
As vezes, a integral dupla $\iint_D f(x,y)dxdy$, dada a natureza de $f(x,y)$, fica mais fácil integrar se fizermos uma mudança nas variáveis de integração, como quando $D$ é um disco, um semidisco ou um setor circular.

Nestes casos, podemos utilizar um outro sistema de coordenadas ou um sistema de coordenadas polares, para que, de modo geral, a integral dupla fique mais fácil de se determinar que em coordenadas cartesianas.

Através de uma mudança de variáveis

$$x = x(u, v) \ e \ y = y(u, v)$$

uma integral dupla em uma região $D$ do plano $xy$ pode ser transformada numa integral dupla sobre uma região $D'$ do plano $uv$.




A correspondência entre as regiões $D'$ e $D$ é bijetora, e podemos retornar de $D$ para $D'$ através da transformação inversa

$$u = u(x, y) \ e \ v = v(x, y)$$

Considerando que as funções anteriores são contínuas, com derivadas parciais em $D$ e $D'$, a integral múltipla, utilizando mudança de variáveis é dada por:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\vartheta(x,y)}{\vartheta(u,v)}\right| dudv$$

Onde $\left|\frac{\vartheta(x,y)}{\vartheta(u,v)}\right|$ é o determinante jacobiano de $x$ e $y$ em relação a $u$ e $v$, dado por

$$\left|\frac{\vartheta(x,y)}{\vartheta(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\vartheta x}{\vartheta u} & \frac{\vartheta x}{\vartheta v} \\ \frac{\vartheta y}{\vartheta u} & \frac{\vartheta y}{\vartheta v} \end{vmatrix}$$

## Exemplo

Calcular a integral a seguir utilizando mudança de variáveis,

sendo que $R$ é uma região plana limitada pelas retas

$$x + y = -1, x + y = 1, x - y = 0 \; e \; x - y = 1.$$

$$I = \iint_R xy \, dxdy$$

## Resolução:

Observando as equações limitantes, podemos fazer as seguintes mudanças de variáveis: $u = x + y$ e $v = x - y$.

Os limites de integração no novo sistema de coordenadas é dado por:

$$\begin{cases} u = -1 \\ u = 1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} v = 0 \\ v = 1 \end{cases}$$

Para determinar $x$ e $y$, façamos as seguintes transformações algébricas:

$$u = x + y \quad \rightarrow \quad x = u - y \quad (1)$$

$$v = x - y \quad \rightarrow \quad y = x - v \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), teremos:

$$x = u - (x - v) \quad \rightarrow \quad 2x = u + v \quad \rightarrow \quad x = \frac{u + v}{2} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2), teremos:

$$y = x - v \quad \rightarrow \quad y = \frac{u + v}{2} - v \quad \rightarrow \quad y = \frac{u - v}{2}$$

Para calcular a integral dupla utilizando mudança de variáveis, precisamos calcular o Jacobiano:

$$\left|\frac{\vartheta(x,y)}{\vartheta(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\vartheta x}{\vartheta u} & \frac{\vartheta x}{\vartheta v} \\ \frac{\vartheta y}{\vartheta u} & \frac{\vartheta y}{\vartheta v} \end{vmatrix}$$

Sabendo que $x = \frac{u+v}{2}$ e $y = \frac{u-v}{2}$, teremos:

$$\left|\frac{\vartheta(x,y)}{\vartheta(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = \left|-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

A integral múltipla, utilizando mudança de variáveis é dada por:

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \iint_{R\prime} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\vartheta(x,y)}{\vartheta(u,v)}\right| dudv$$

$$\iint_R xy\,dxdy = \int_0^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{u+v}{2}\right)\left(\frac{u-v}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) dudv$$

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{u+v}{2}\right)\left(\frac{u-v}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) dudv$$

$$= \int_0^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{u^2-v^2}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) dudv$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 \int_{-1}^1 (u^2-v^2)\, dudv$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 \left(\frac{u^3}{3} - uv^2\right)\Big|_{-1}^{1} dv \;\rightarrow\; \frac{1}{8}\int_0^1 \left(\frac{1}{3} - v^2\right) - \left(-\frac{1}{3} + v^2\right) dv$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 \left(\frac{1}{3} - v^2\right) - \left(-\frac{1}{3} + v^2\right) dv$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 \left(\frac{2}{3} - 2v^2\right) dv$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}v - \frac{2}{3}v^3\right)\Big|_0^1 = 0$$

## Exemplo

Calcular a integral a seguir utilizando mudança de variáveis,

sendo que $R$ é uma região plana limitada pelas retas

$2x + 3y = 0, 2x + 3y = 1, -2x + y = 0$ e $-2x + y = 1$.

$$I = \iint_R xy\, dxdy$$

## Resolução:

Observando as equações limitantes, podemos fazer as seguintes mudanças de variáveis: $u = 2x + 3y \;\; e \;\; v = -2x + y$.

Os limites de integração no novo sistema de coordenadas é dado por:

$$\begin{cases} u = 0 \\ u = 1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} v = 0 \\ v = 1 \end{cases}$$

Para determinar $x \; e \; y$, façamos as seguintes transformações algébricas:

$$u = 2x + 3y \quad \rightarrow \quad x = \frac{u - 3y}{2} \quad (1)$$

$$v = -2x + y \quad \rightarrow \quad y = v + 2x \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), teremos:

$$x = \frac{u - 3(v + 2x)}{2} \quad \rightarrow \quad x = \frac{u - 3v - 6x}{2} \rightarrow \quad x = \frac{u - 3v}{8} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2), teremos:

$$y = v + 2\left(\frac{u - 3v}{8}\right) \quad \rightarrow \quad y = \frac{8v + 2u - 6v}{8} \quad \rightarrow \quad y = \frac{u + v}{4}$$

Para calcular a integral dupla utilizando mudança de variáveis, precisamos calcular o Jacobiano:

$$\left|\frac{\vartheta(x,y)}{\vartheta(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\vartheta x}{\vartheta u} & \dfrac{\vartheta x}{\vartheta v} \\ \dfrac{\vartheta y}{\vartheta u} & \dfrac{\vartheta y}{\vartheta v} \end{vmatrix}$$

Sabendo que $x = \frac{u-3v}{8}$ e $y = \frac{u+v}{4}$, teremos:

$$\left|\frac{\vartheta(x,y)}{\vartheta(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} 1/8 & -3/8 \\ 1/4 & 1/4 \end{vmatrix} = \left|\frac{1}{32} + \frac{3}{32}\right| = \left|\frac{4}{32}\right| = \frac{1}{8}$$

A integral múltipla, utilizando mudança de variáveis é dada por:

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \iint_{R\prime} f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\vartheta(x,y)}{\vartheta(u,v)}\right| dudv$$

$$\iint_R xy\,dxdy = \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{u-3v}{8}\right)\left(\frac{u+v}{4}\right)\left(\frac{1}{8}\right) dudv$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{u-3v}{8}\right)\left(\frac{u+v}{4}\right)\left(\frac{1}{8}\right) dudv$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{u^2-3uv+uv-3v^2}{32}\right)\left(\frac{1}{8}\right) dudv$$

$$= \frac{1}{256}\int_0^1 \int_0^1 (u^2-2uv-3v^2)\, dudv$$

$$= \frac{1}{256}\int_0^1 \left(\frac{u^3}{3}-u^2v-3uv^2\right)\Big|_0^1 dv$$

$$= \frac{1}{256}\int_0^1 \left(\frac{u^3}{3} - u^2 v - 3uv^2\right)\Big|_0^1 dv$$

$$= \frac{1}{256}\int_0^1 \left(\frac{1}{3} - v - 3v^2\right) dv$$

$$= \frac{1}{256}\left(\frac{1}{3}v - \frac{v^2}{2} - v^3\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{256}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{256}\left(\frac{-7}{6}\right) = -\frac{7}{1536}$$

## Exemplo

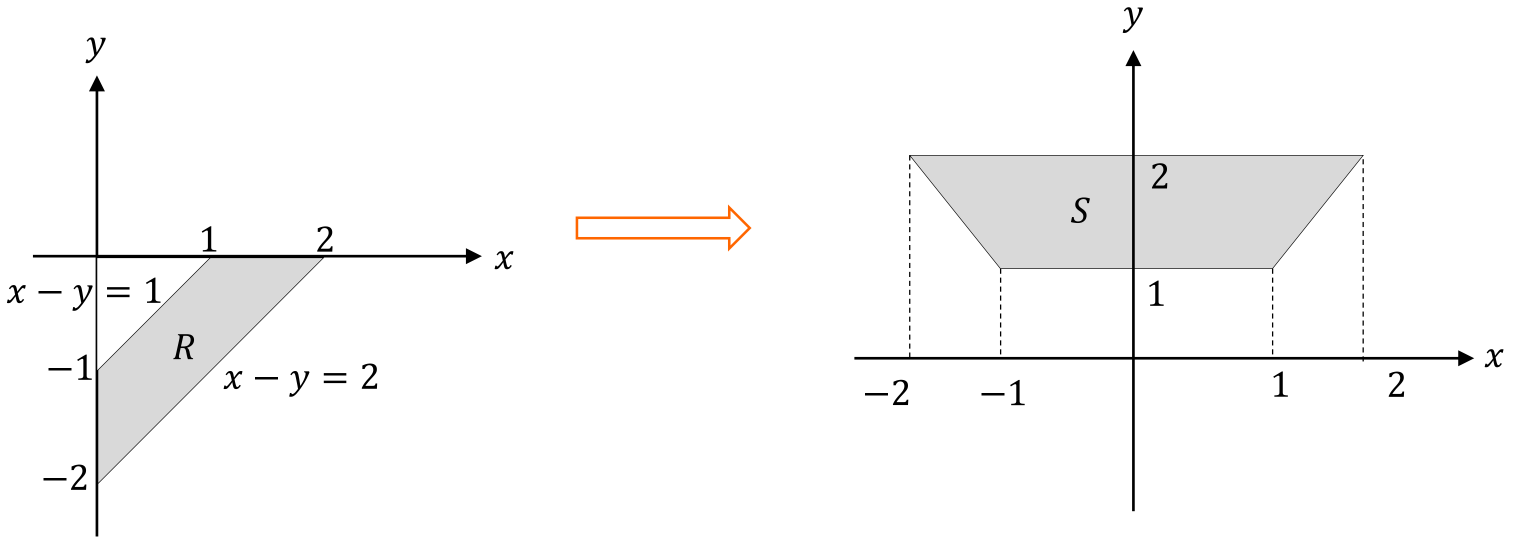
Calcular a integral a seguir sendo que $R$ é a região trapezoidal com vértices em $(1,0), (2,0), (0,-2)\ e\ (0,-1)$. Utilizar as seguintes mudanças de variáveis: $u = x + y\ e\ v = x - y$

$$I = \iint_R e^{\frac{x+y}{x-y}}\, dA$$

**Resolução:** O esboço da região $R$ pode ser visto como segue:

Pela mudança de variáveis temos $x = \frac{u+v}{2}$ e $y = \frac{u-v}{2}$

E os novos intervalos para $u$ e $v$, serão $1 \leq v \leq 2$ e $-v \leq u \leq v$



Sabendo que $x = \frac{u+v}{2}$ e $y = \frac{u-v}{2}$, calculamos o Jacobiano:

$$\left|\frac{\vartheta(x,y)}{\vartheta(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\vartheta x}{\vartheta u} & \frac{\vartheta x}{\vartheta v} \\ \frac{\vartheta y}{\vartheta u} & \frac{\vartheta y}{\vartheta v} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left|-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2}$$

Logo, podemos escrever a integral da seguinte forma:

$$\iint_R e^{\frac{x+y}{x-y}}\, dA = \iint_S e^{\frac{u}{v}}\, dA$$

$$= \int_1^2 \int_{-v}^{v} \left(\frac{1}{2}\right) e^{\frac{u}{v}}\, dudv \rightarrow \frac{1}{2}\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\, du = v.\, e^{\frac{u}{v}} \Big|_{-v}^{v}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 v(e - e^{-1})\, dv = \frac{e - e^{-1}}{2} . \frac{v^2}{2}\Big|_1^2$$

$$\boxed{I = \frac{3}{4}(e - e^{-1})}$$

## Coordenadas Polares

A mudança de variáveis que leva pontos $(r, \theta)$ do plano $r\theta$ a pontos $(x, y)$ do plano $xy$ é dada por

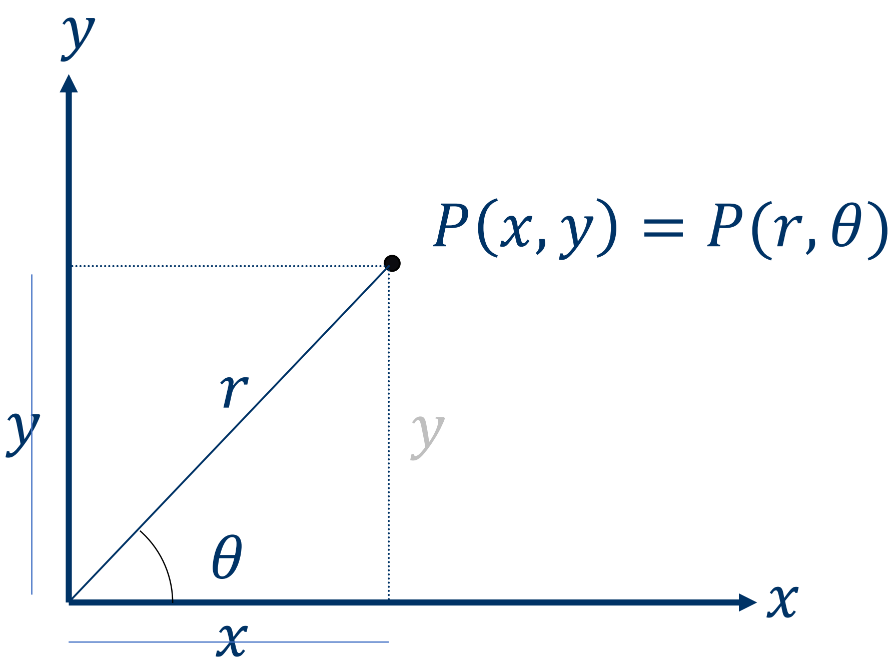
$$x = x(r, \theta) = r\cos\theta \qquad e \qquad y = y(r, \theta) = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

E seu jacobiano é dado por

$$\left|\frac{\vartheta(x, y)}{\vartheta(r, \theta)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

Vejamos as relações geometricamente:

Relações entre as coordenadas polares e as medidas no plano $x\ y$:




**Coordenadas retangulares para polares:**

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$\theta = arctg(y/x)$$

**Coordenadas polares para retangulares:**

$$x = r.\cos\theta$$
$$y = r.\operatorname{sen}\theta$$

Portanto a integral dupla é dada por:

$$\iint_{D} f(x, y)\, dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\theta\,, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, r\, drd\theta$$

Vamos sempre considerar que:

- $r \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ou
- $r \geq 0$ e $-\pi \leq \theta \leq \pi$

## Exemplos

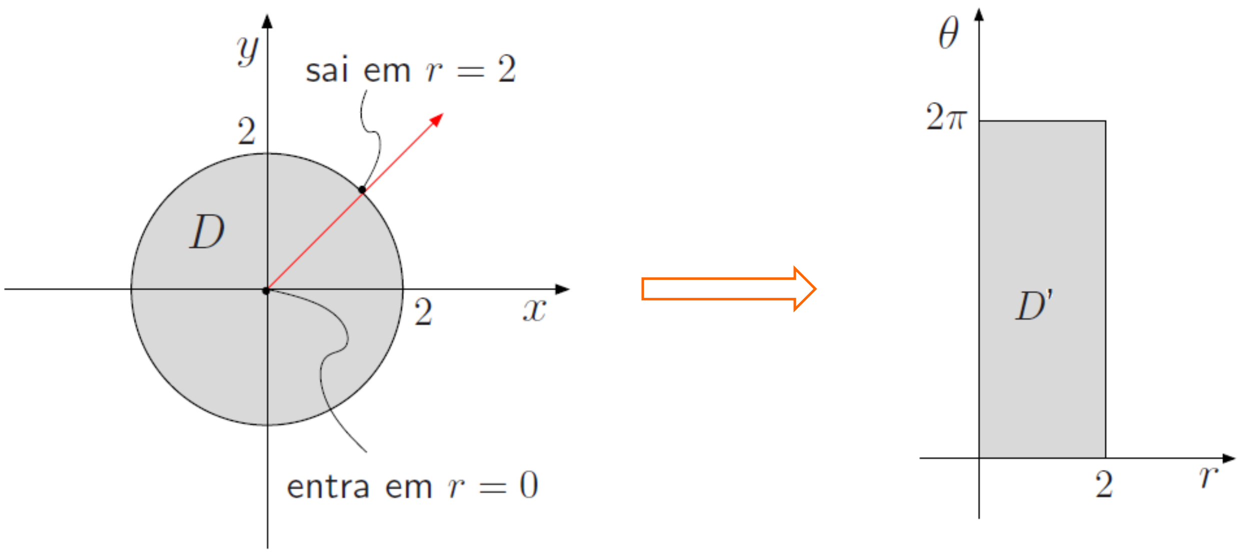
Calcular a integral a seguir sendo $D$ o círculo de centro na origem e raio 2:

$$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$$

O esboço da região $D$ pode ser visto como segue:

Em coordenadas polares temos $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2} = r$ e $dxdy = rdrd\theta$

A partir do eixo $x$, vemos que $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 2$



Logo, podemos escrever a integral da seguinte forma:

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{D\prime} r.rdrd\theta = \iint_{D\prime} r^2 drd\theta$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2 d\theta dr = \int_0^2 r^2\theta \Big|_0^{2\pi} dr = \int_0^2 2\pi r^2\,dr$$

$$= 2\pi \int_0^2 r^2\,dr = \frac{2\pi r^3}{3}\Big|_0^2$$

$$\boxed{I = \frac{16\pi}{3}}$$

## Exemplos

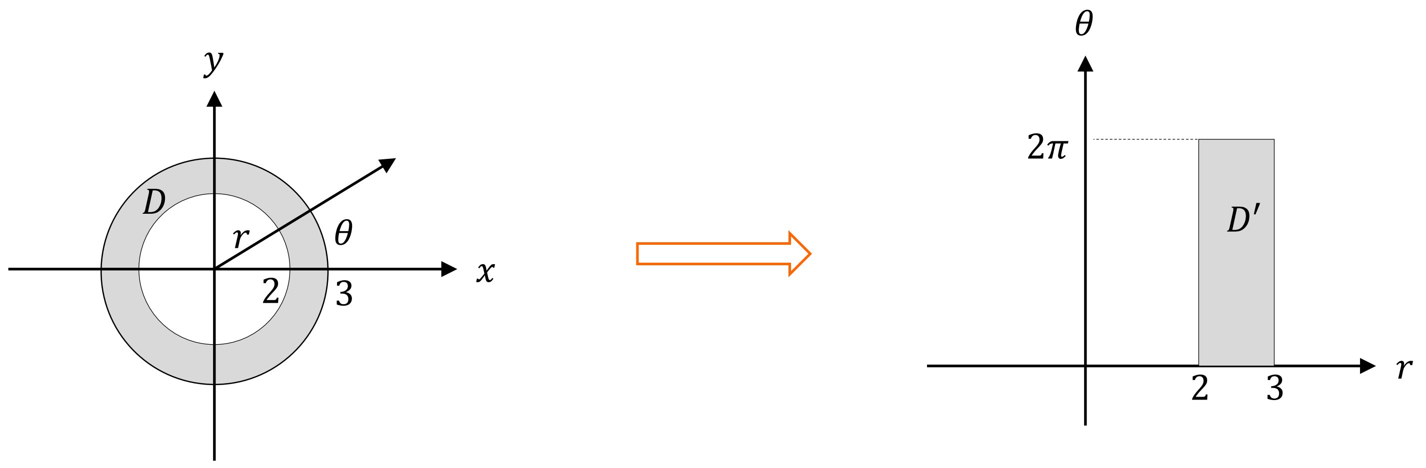
Calcular a integral a seguir sendo $D$ a região do plano $xy$ delimitada entre $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$

$$I = \iint_D e^{x^2+y^2}\, dxdy$$

O esboço da região $D$ pode ser visto como segue:

Em coordenadas polares temos $x^2 + y^2 = r^2$ e $dxdy = rdrd\theta$

A partir do eixo $x$, vemos que $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $2 \leq r \leq 3$



Logo, podemos escrever a integral da seguinte forma:

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{D\prime} e^{r^2}.rdrd\theta$$

$$= \int_2^3 \int_0^{2\pi} e^{r^2}.rd\theta dr = \int_2^3 e^{r^2}.r.\theta\,\Big|_0^{2\pi} dr = \int_2^3 2\pi e^{r^2}.r\,dr$$

Fazendo integral por substituição, obtemos:

$$u = r^2 \qquad \qquad$$
$$du = 2rdr \qquad \to rdr = \frac{du}{2}$$

$$= 2\pi.\frac{1}{2}\int_2^3 e^u\,du = \pi\left(e^{r^2}\right)\Big|_2^3 = \boxed{\pi(e^9 - e^4)}$$