ANOS

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPUS KOBRASOL

UNIVALI

Save the Date

Saturday, April 14th, 2018

UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ

Curso de CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Cálculo I

Denise Prado Kronbauer

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com

História do Cálculo

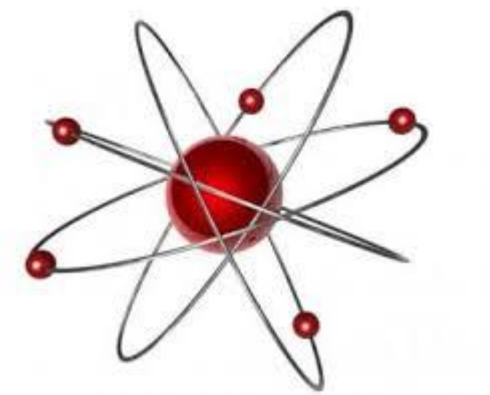
O cálculo foi inventado no século XVII, como instrumento para resolução de problemas que envolviam movimento.

A geometria, a álgebra e a trigonometria aplicam-se a objetos que se movem com velocidade constante. No entanto, os métodos de cálculo são necessários para estudar as órbitas dos planetas, para calcular o voo de um foguete, para predizer a trajetória de uma partícula carregada através de um campo eletromagnético, e de um modo geral para tratar de todos os aspectos do movimento.

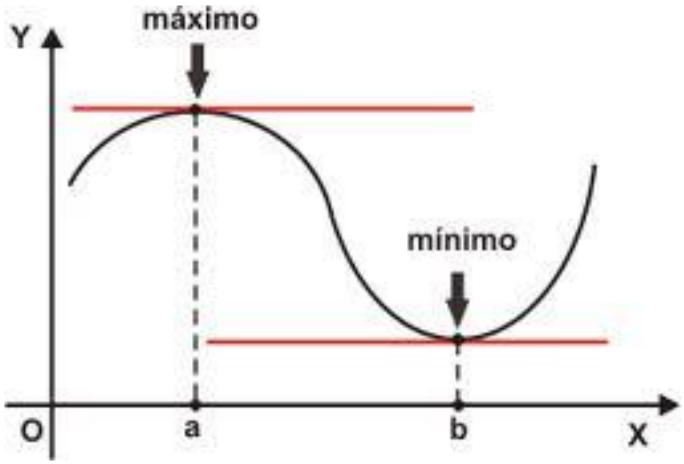
UNIVALI

História do Cálculo

Embora o cálculo tenha sido criado para resolver problemas da física, tem inúmeras aplicações em outros campos. Uma das razões de sua versatilidade é o fato de que a derivada é aplicada ao estudo de taxa de variação em geral, e não só do movimento.



Exemplos: o químico utiliza para prever resultados de diversas reações químicas, o biólogo para pesquisa da taxa de crescimento. O eletricista para descrever a variação da taxa da corrente num circuito elétrico.
Os economistas para resolver problemas de lucros e perdas.



Muitos problemas que envolvem máximos e mínimos podem ser tratados com auxílio da derivada, exemplos: como uma empresa pode maximizar sua receita? Como pode um fabricante minimizar seus custos na produção de um artigo?

História do Cálculo

A **derivada** e a **integral definida** exprimem-se em termos de certos processos de **limite**.

Isaac Newton
(1642 –1727)

Gotfried Wilhelm Leibniz
(1646 – 1716)

A noção de limite é a ideia inicial que separa o cálculo das partes mais elementares da matemática.

Isaac Newton e Leibniz descobriram a ligação entre derivadas e integrais, em razão disto e de suas outras contribuições para o assunto, são considerados os inventores do cálculo. Muitos outros matemáticos deram inúmeras contribuições para o seu desenvolvimento.

UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ

Curso de CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Unidade I

Denise Prado Kronbauer

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com

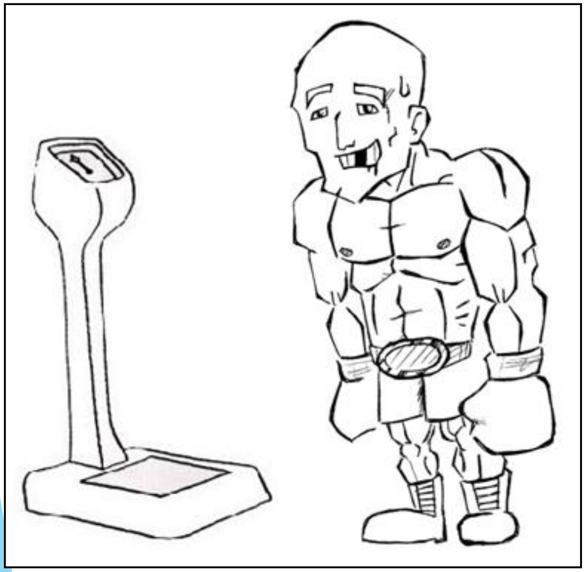
Ementa

UNIDADE 1: Limites e continuidade.

1. Definição, noção intuitiva de limites e propriedades.
2. Cálculo de limites.
3. Continuidade de limites.

Limites

A palavra ***LIMITE*** está presente em diversas situações cotidianas.



Limites

Na matemática, a definição de limite é utilizada no intuito de expor o comportamento de uma função nos momentos de aproximação de determinados valores. O limite de uma função possui grande importância no cálculo diferencial e em outros ramos da análise matemática, definindo derivadas e continuidade de funções.

Noção Intuitiva:

Sucessões Numéricas		Dizemos que:
$1,2,3,4,5,\ldots$	Os termos tornam-se cada vez maiores, sem atingir um limite.	$x \to +\infty$
$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\cdots$	Os números aproximam-se cada vez mais de 1, sem nunca atingir esse valor.	$x \to 1$
$1,0,-1,-2,-3,\ldots$	Os termos tornam-se cada vez menor, sem atingir um limite.	$x \to -\infty$
$1,\frac{3}{2},3,\frac{5}{4},5,\frac{6}{7},7,\ldots$	Os termos oscilam sem tender a um limite.	

Notação de Limites:

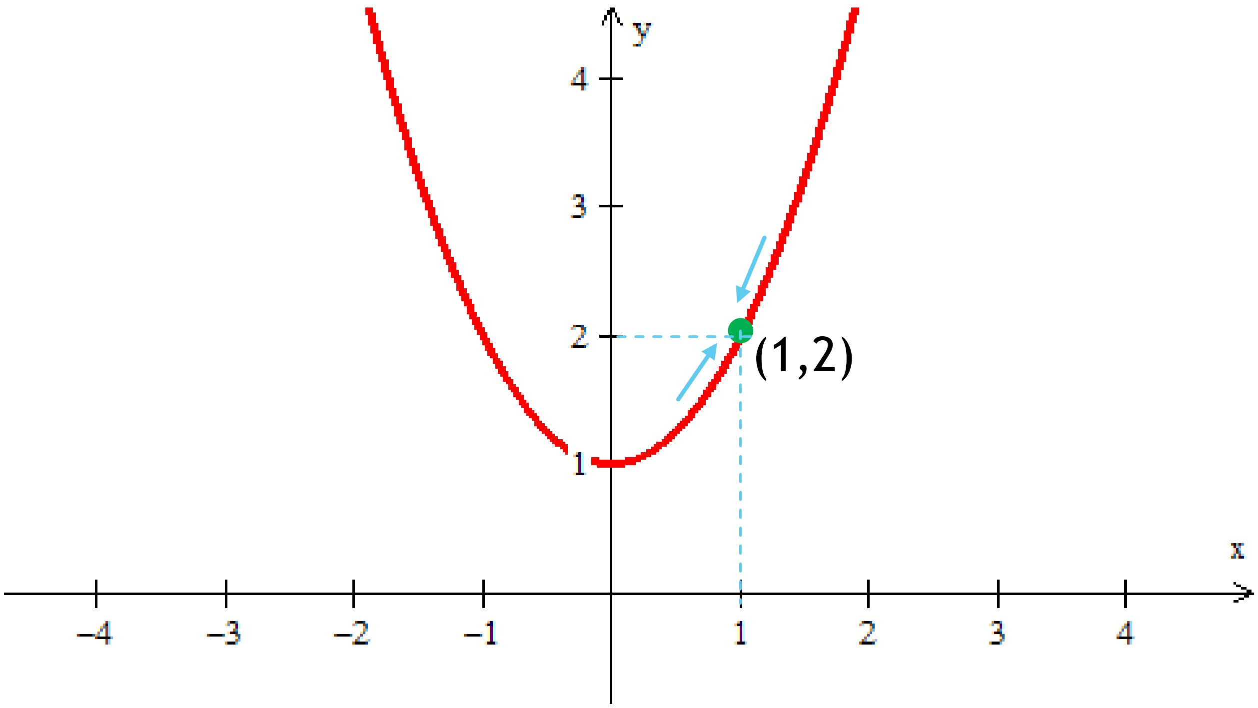
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L}$$

e é lida como:

"O limite de $f(x)$ quando x tende a x_0, é L.

Limites

Exemplo: Determinar o limite da função: $\lim_{x \to 1} (x^2 + 1)$



Exemplo:

x se aproxima de 1 → ← *x se aproxima de 1*

x	0,900	0,990	0,999	1,000	1,001	1,010	1,100
y	1,810	1,980	1,998	2,000	2,002	2,020	2,210

y se aproxima de 2 → ← *y se aproxima de 2*

$$\boxed{\lim_{x \to 1} (x^2 + 1) = 2}$$

Limites Laterais:

- Quando se faz x tender para a por valores menores que a, estamos calculando o limite lateral esquerdo: $x \to a^-$;
- Quando se faz x tender para a por valores maiores que a, estamos calculando o limite lateral direito: $x \to a^+$.

Para o limite existir, os limites laterais devem ser iguais:

$$\boxed{\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)}$$

Limites

Exemplo: Determinar o limite das funções: $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$:

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$

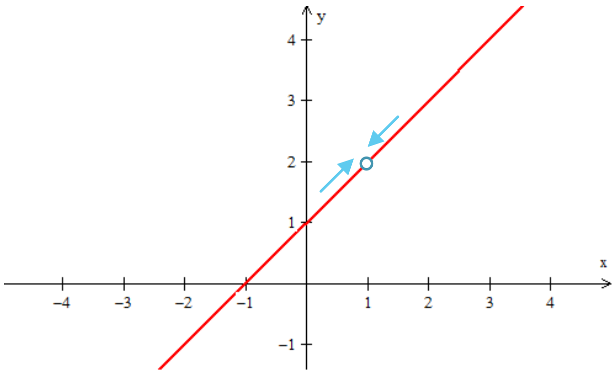
Limites

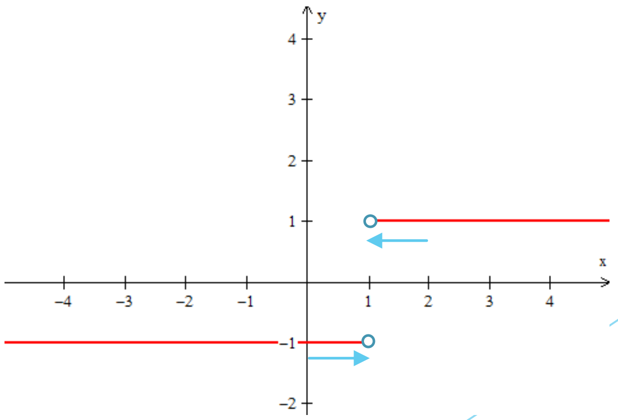
a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{|x - 1|}{x - 1} = não\ existe$$





Propriedades e Operações com Limites:

Suponha que b e c sejam números reais e que n seja um número inteiro positivo:

1. O limite de uma função constante $f(x) = b$ quando x tende a c, é igual a própria constante:

$$\boxed{\lim_{x \to c} b = b}$$

Exemplos:

a) $\lim_{x \to 3} 4 =$ *b)* $\lim_{x \to 2} \pi =$ *c)* $\lim_{x \to \sqrt{2}} e =$

2. O limite da função identidade $f(x) = x$ quando x tende a c, é igual a c:

$$\boxed{\lim_{x \to c} x = c}$$

Exemplos:

a) $\lim_{x \to 3} x =$

b) $\lim_{x \to \pi} x =$

c) $\lim_{x \to \sqrt[3]{5}} x =$

Limites

3. O limite da potência de uma função $[f(x)]^n$ onde n é um número inteiro positivo, é igual a potência do limite da função:

$$\boxed{\lim_{x \to c}[f(x)]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n}$$

Exemplo:

a) $\lim_{x \to 1}(2x + x^3)^4 =$

Limites

4. O limite da soma ou subtração de funções é igual a soma ou subtração dos limites dessas funções:

$$\lim_{x \to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim_{x \to c} g(x)$$

Exemplos:

a) $\lim_{x \to 2}(x + 3) =$

b) $\lim_{x \to 2}(x^2 - 3x + 5) =$

5. O limite do produto das funções é igual ao produto dos limites dessas funções:

$$\boxed{\lim_{x \to c}[f(x).\,g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \,.\, \lim_{x \to c} g(x)}$$

Exemplo:

a) $\lim_{x \to 2}(x^2) =$

6. O limite do quociente de duas funções é igual ao quociente dos limites dessas funções (exceto quando o limite do divisor for zero):

$$\boxed{\lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}}$$

Exemplo:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x-5}{x^3-7}\right)=$

7. O limite da raiz enésima de uma função é igual à raiz enésima do limite da função:

$$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$$

Exemplo:

a) $\lim_{x \to -2} \sqrt[2]{x^4 - 4x + 1} =$

Exemplo: Determinar o limite da função: $\lim_{x \to 2}(x^2 + 2x - 3)$:

UNIVALI

Limites

Exemplo: Determinar o limite da função: $\lim_{x \to 2}(x^2 + 2x - 3)$:

$$\lim_{x \to 2}(x^2 + 2x - 3) = \lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} 2x - \lim_{x \to 2} 3$$

$$= 2^2 + 2.2 - 3$$

$$= 4 + 4 - 3$$

$$= 5$$

$$\boxed{\lim_{x \to 2}(x^2 + 2x - 3) = 5}$$

Limites

Algumas expressões indeterminadas podem aparecer quando estamos estudando limites:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad 0^{\infty}, \quad \infty^{0}, \quad 1^{\infty}$$

Para contornar tais resultados, devemos utilizar artifícios algébricos como a simplificação da expressão, radiciação, fatoração do numerador e denominador, entre outros.

Limites

Exemplo: Determinar o limite da função: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$:

Limites

Exemplo: Determinar o limite da função: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}$:

Neste caso, quando substituímos 1 no lugar do x, temos como resultado $\frac{0}{0}$.

Devemos cancelar algum fator comum:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)}=\frac{x+2}{x}=\frac{1+2}{1}=3$$

Limites

Exemplo: Determinar o limite da função: $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$:

Limites

Exemplo: Determinar o limite da função: $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$:

Quando a função apresentar raiz e ao substituir o limite informado no lugar do x, o resultado for $\frac{0}{0}$, utilizamos a racionalização:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}\times\frac{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2+h-2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 + h - 2}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2+0} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Limites

Exemplo: Determinar o limite da função: $\lim_{x \to -2} \frac{x^3-3x+2}{x^2-4}$:

Exemplo: Determinar o limite da função: $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3-3x+2}{x^2-4}$:

Para resolver a indeterminação $\frac{0}{0}$ devemos fatorar numerador e denominador a fim de obter algum termo em comum para cancelar:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{(x^2 - 2x + 1)(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$$

$$= \frac{(-2)^2 - 2(-2) + 1}{(-2) - 2} = -\frac{9}{4}$$

UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ

Curso de CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Exercícios
Limites e Continuidade

Denise Prado Kronbauer

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com

Limites

Respostas:

1) 2
2) -1
3) $1/4$
4) 0
5) $7/6$
6) $1/8$
7) -7
8) $2/3$
9) $\sqrt{3/5}$
10) $2\sqrt{14}/7$
11) $1/7$
12) $1/6$
13) 6
14) 4
15) $-7/3$
16) $3/2$
17) 3
18) 1
19) $2+3\sqrt{2}$
20) $-3/4$
21) $\nexists$
22) $1/10$
23) 27
24) $2\sqrt{12}$
25) $-6/25$
26) $\frac{11}{4}$
27) $108/7$
28) $-1/48$
29) $-1/6$
30) $-1/5$