ANOS

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPUS KOBRASOL

UNIVALI

Save the Date

Saturday, April 14th, 2018

UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ

Curso de CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Cálculo I

Denise Prado Kronbauer

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com

Limites Laterais

- Quando se faz x tender para a por valores menores que a, estamos calculando o limite lateral esquerdo: $x \to a^-$;
- Quando se faz x tender para a por valores maiores que a, estamos calculando o limite lateral direito: $x \to a^+$.

Para o limite existir, os limites laterais devem ser iguais:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)}$$

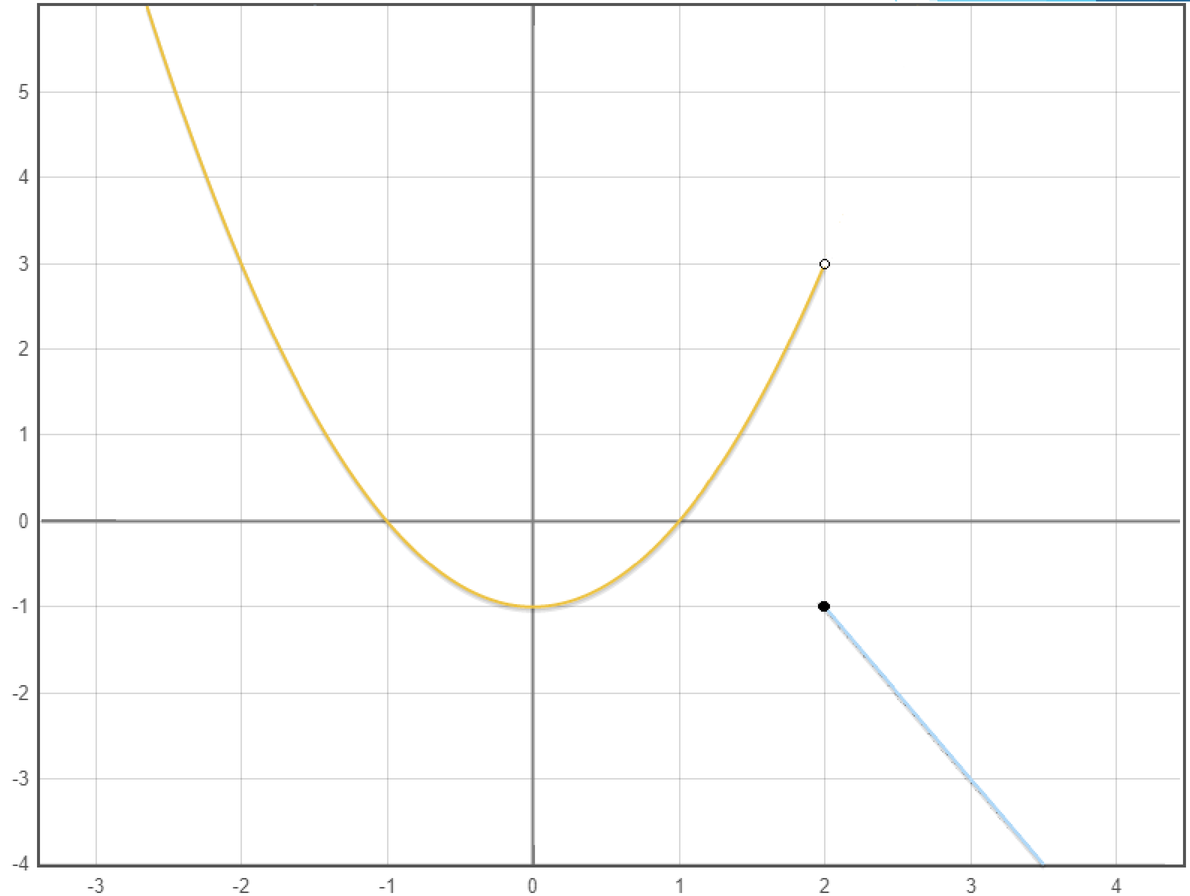
Limites Laterais

Exemplo: Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & se\ x < 2 \\ 3 - 2x, & se\ x \geq 2 \end{cases}$. Determinar o valor de

$$\begin{cases} \lim_{x \to 2^-} f(x) \\ \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) \end{cases}$$

Reposta: Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & se\ x < 2 \\ 3 - 2x, & se\ x \geq 2 \end{cases}$. Determinar o valor de

$$\begin{cases} \lim_{x \to 2^-} f(x) = 3 \\ \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = -1 \end{cases}$$



Limites Laterais

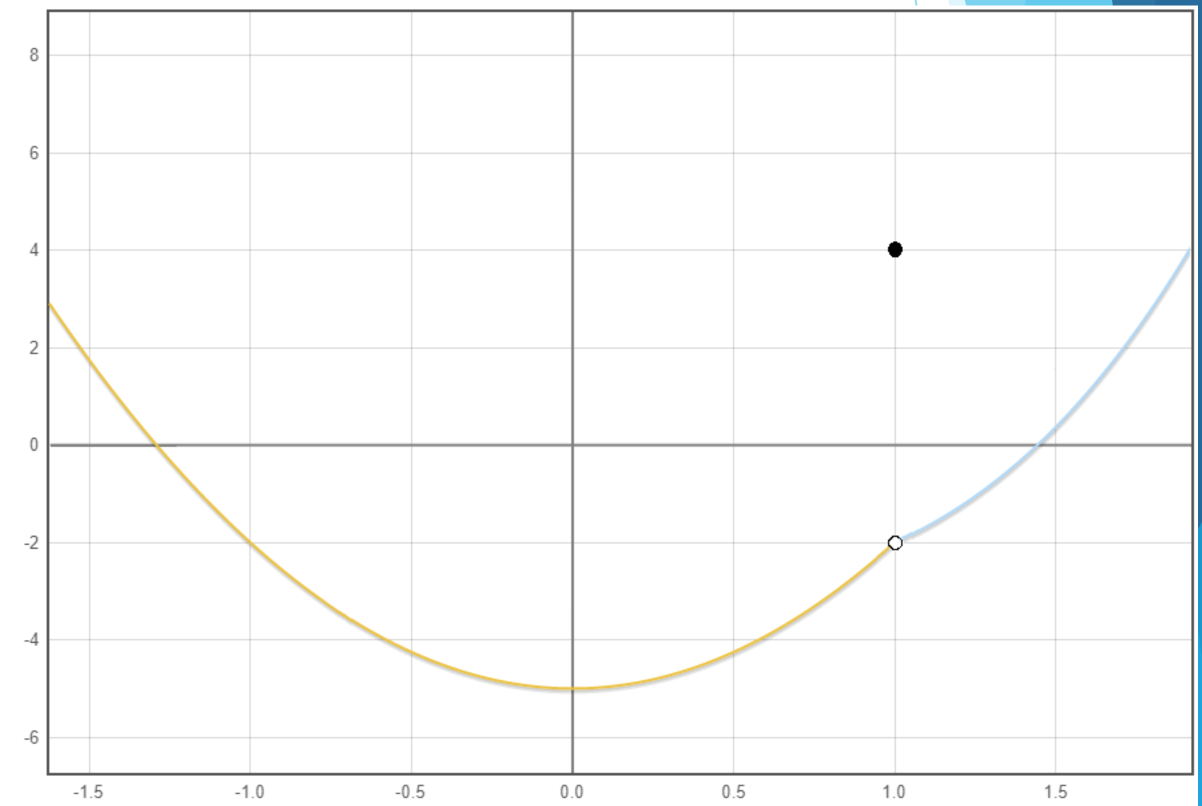
Exemplo: Seja $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5, & se\ x < 1 \\ 4, & se\ x = 1 \\ x^3 - 3, & se\ x > 1 \end{cases}$.

Determine $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

Limites Laterais

Resposta: Seja $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5, & se\ x < 1 \\ 4, & se\ x = 1 \\ x^3 - 3, & se\ x > 1 \end{cases}$.

- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -2$
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -2$



Continuidade de funções

Informalmente, dizemos que uma função é contínua quando seu gráfico não apresenta interrupções, ou seja, seu gráfico pode ser traçado sem que o lápis se afaste do papel. Assim, para que uma função seja contínua em um ponto $x = a$ é necessário que a função esteja definida em a e que os valores de $f(x)$, para x próximos de a, estejam próximos de $f(a)$.

Continuidade de funções

Definição:

Um função f é contínua no ponto a se:

(a) $\exists f(a)$

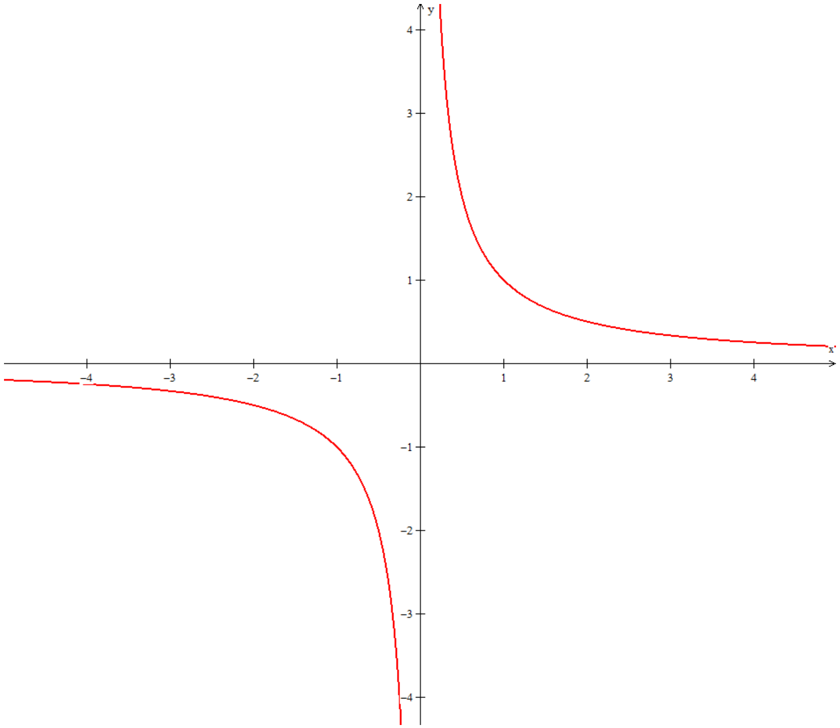
(b) $\exists \lim_{x \to a} f(x)$

(c) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Continuidade de funções

Exemplos: Verificar a continuidade das funções dadas, nos pontos indicados:

$$f(x) = \frac{1}{x}; \quad x = 0$$



(a) $\exists f(a)$

(b) $\exists \lim_{x \to a} f(x)$

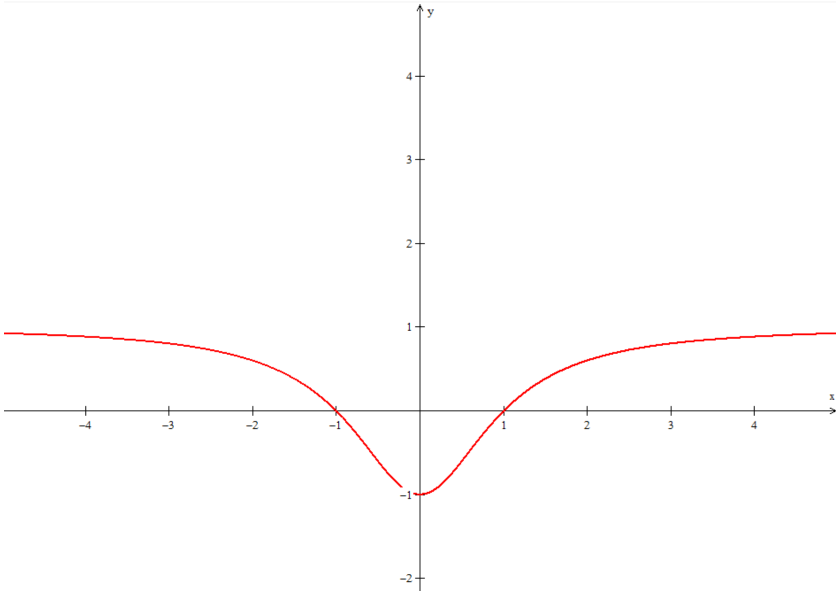
(c) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\nexists f(0)$. Assim a primeira condição de continuidade já não é satisfeita, o que implica que f não é contínua em $x = 0$.

Continuidade de funções

Exemplos: Verificar a continuidade das funções dadas, nos pontos indicados:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}; \quad x = -1$$



(a) $\exists f(-1) = 0$

(b) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 0$

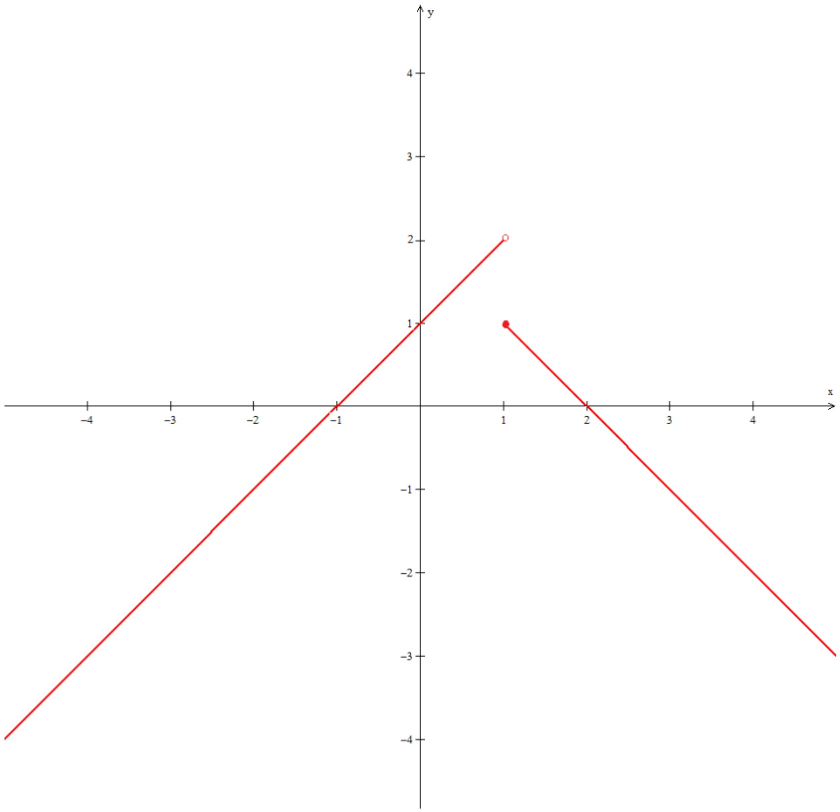
(c) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x^2+1} = f(-1)$

Logo, f é contínua em $x = -1$.

Continuidade de funções

Exemplos: Verificar a continuidade das funções dadas, nos pontos indicados:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, x<1 \\ 2-x, x \geq 1 \end{cases}; \quad x = 1$$



(a) $\exists f(1) = 1$

(b) $\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} x+1 = 2 \\ \lim_{x\to 1^+} 2-x = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

Logo, f não é contínua em $x = 1$.

Exemplos: Verificar a continuidade da função abaixo, nos pontos indicados:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x < -1 \\ \sqrt{2x^2 + 7} & \text{se } -1 \leq x < 3 \\ 4 & \text{se } x = 3 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 3 \end{cases} \qquad x = -1 \; e \; x = 3$$

Continuidade de funções

Resposta: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x < -1 \\ \sqrt{2x^2 + 7} & \text{se } -1 \leq x < 3 \\ 4 & \text{se } x = 3 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 3 \end{cases}$ $x = -1 \; e \; x = 3$

Para $x = -1$

(a) $\exists f(-1) = 3$

(b) $\lim_{x \to -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to -1^-} x^2 + 2 = 3 \\ \lim_{x \to -1^+} \sqrt{2x^2 + 7} = 3 \end{cases}$

(c) $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$

Logo, f é contínua em $x = -1$.

Para $x = 3$

(a) $\exists f(3) = 4$

(b) $\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 3^-} \sqrt{2x^2 + 7} = 5 \\ \lim_{x \to 3^+} 2x - 1 = 5 \end{cases}$

(c) $\lim_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$

Logo, f é descontínua em $x = 3$.

ANOS

CIÊNCIA DA
COMPUTAÇÃO

CAMPUS KOBRASOL

UNIVALI

Save the Date

Saturday, April 14th, 2018

Limites no Infinito

Até então analisamos o comportamento de uma função $f(x)$ quando x se aproxima de algum ponto.

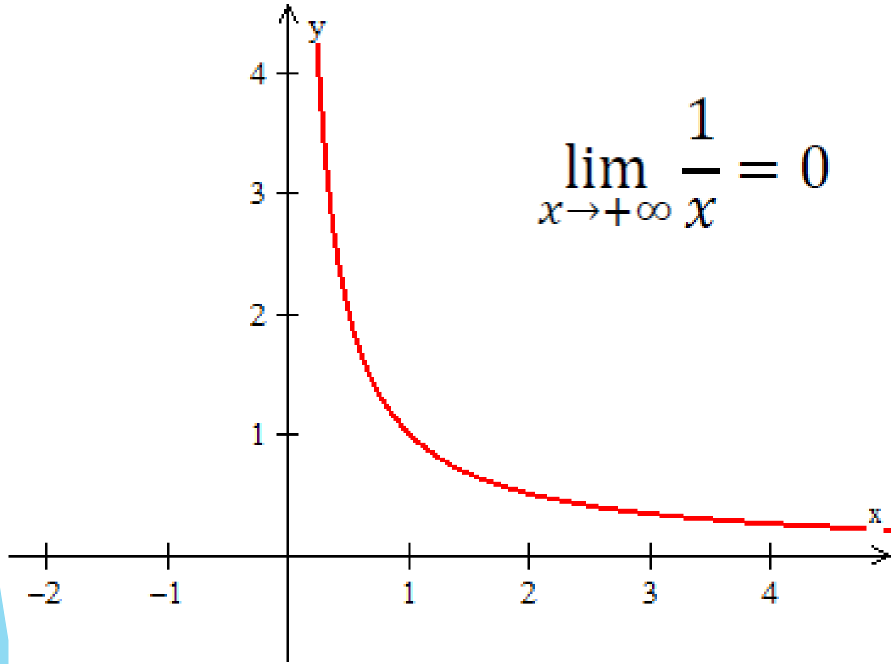
Analisaremos agora o comportamento de $f(x)$ quando x assume valores positivos arbitrariamente grandes ou negativos arbitrariamente grandes, ou seja:

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) \quad ou \quad \lim_{x \to +\infty} f(x)}$$

Limites no Infinito

Exemplo: Consideremos a seguinte função: $f(x) = \frac{1}{x}$.

Verificar o comportamento da função para $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

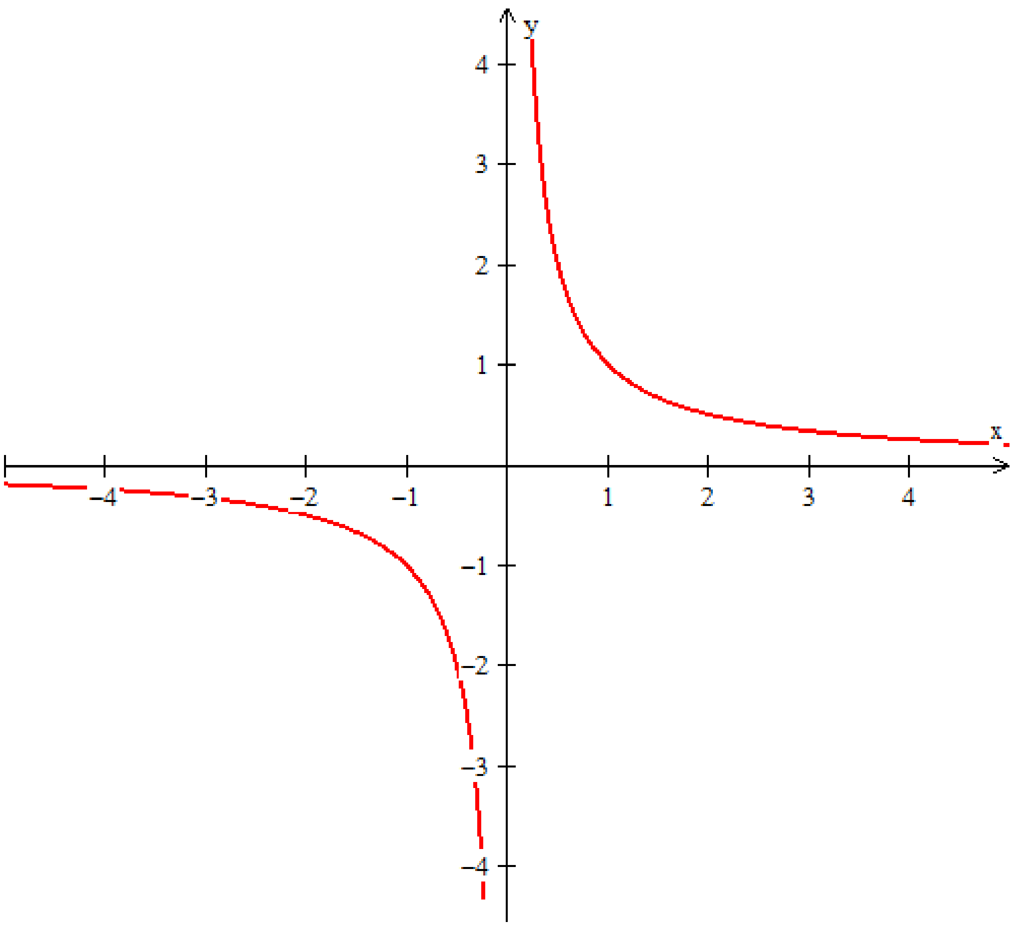


$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Quando x tende ao infinito, ou seja, quando x cresce indefinidamente, os valores da função tendem a se aproximar cada vez mais de 0.

Limites no Infinito

Observemos a função inteira:



$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\nexists$$

Limites no Infinito

Exemplo: Determinar o limite da função: $\lim_{x \to \infty} \frac{3x-1}{4x+1}$

Aqui surge uma indeterminação do tipo ∞/∞.

Neste caso, quando o limite tende a $\pm\infty$, devemos dividir o numerador e o denominador pelo maior grau do denominador:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x - 1}{4x + 1} = \frac{\frac{3x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{4x}{x} + \frac{1}{x}} = \frac{3 - \frac{1}{x}}{4 + \frac{1}{x}} = \frac{3}{4}$$

Limites no Infinito

Exemplo: Determinar o limite da função: $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+8x-5}{4-x^3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+8x-5}{4-x^3} = \frac{\frac{3x^2}{x^3}+\frac{8x}{x^3}-\frac{5}{x^3}}{\frac{4}{x^3}-\frac{x^3}{x^3}} = \frac{\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{\frac{4}{x^3}-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

Limites no Infinito

Exemplo: Determinar o limite da função: $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+11}{3x^2+x-7}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+11}{3x^2+x-7} = \frac{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{11}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{7}{x^2}} = \frac{4+\frac{11}{x^2}}{3+\frac{x}{x^2}-\frac{7}{x^2}} = \frac{4}{3}$$

Limites no Infinito

Exemplo: Determinar o limite da função: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2-3}+5x}{1-2x}$

Da mesma forma que anteriormente, devemos dividir o numerador e o denominador pelo maior grau do denominador:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2-3}+5x}{1-2x} = \frac{\frac{\sqrt{4x^2-3}}{x}+\frac{5x}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{2x}{x}} = \frac{\frac{\sqrt{4x^2-3}}{\sqrt{x^2}}+\frac{5x}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{2x}{x}}$$

Limites no Infinito

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{4x^2-3}}{\sqrt{x^2}}+\dfrac{5x}{x}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{4x^2-3}{x^2}}+5}{\dfrac{1}{x}-2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{4x^2}{x^2}-\dfrac{3}{x^2}}+5}{\dfrac{1}{x}-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4-\dfrac{3}{x^2}}+5}{\dfrac{1}{x}-2}=\frac{2+5}{-2}=-\frac{7}{2}$$

Limites no Infinito

Exemplo: Determinar o limite da função: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2-3}+5x}{1-2x}$

Mesmo procedimento que no exemplo anterior,

só que dessa vez x é negativo e, assim, $x = -\sqrt{x^2}$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2-3}+5x}{1-2x} = \frac{\frac{\sqrt{4x^2-3}}{x}+\frac{5x}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{2x}{x}} = \frac{\frac{\sqrt{4x^2-3}}{-\sqrt{x^2}}+\frac{5x}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{2x}{x}}$$

Limites no Infinito

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{4x^2-3}}{-\sqrt{x^2}}+\dfrac{5x}{x}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2x}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{\dfrac{4x^2-3}{x^2}}+5}{\dfrac{1}{x}-2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{\dfrac{4x^2}{x^2}-\dfrac{3}{x^2}}+5}{\dfrac{1}{x}-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4-\dfrac{3}{x^2}}+5}{\dfrac{1}{x}-2}=\frac{-2+5}{-2}=-\frac{3}{2}$$

Exemplo: Determinar o limite da função: $\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{2x + x^2}\right)$

Aqui surge uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$.

Neste caso, vamos multiplicar o numerador e denominador da expressão pelo seu conjugado:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{2x + x^2}\right) \times \frac{\left(x - \sqrt{2x + x^2}\right)}{\left(x - \sqrt{2x + x^2}\right)}$$

Limites no Infinito

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(2x+x^2)}{x-\sqrt{2x+x^2}}=\frac{-2x}{x-\sqrt{2x+x^2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x-\sqrt{2x+x^2}}=\frac{-\frac{2x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{\sqrt{2x+x^2}}{x}}=\frac{-2}{1-\frac{\sqrt{2x+x^2}}{\left(-\sqrt{x^2}\right)}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{1+\sqrt{\frac{2x+x^2}{x^2}}}=\frac{-2}{1+\sqrt{\frac{2x}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}}=-\frac{2}{1+1}=-1$$

Limites no Infinito

Exercícios: Calcular o limite das funções quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$:

1. $f(x) = \dfrac{x^5 - 3x^2 + 3}{2x^5 + 7x^3}$

2. $f(x) = \dfrac{x^5 + 9x^4 + 3x^3 + 10}{x^6 - 4}$

3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{3x - 4}$

4. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{\sqrt{x^4 - 16}}$

5. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{8x^3 + 2x + 4}}{1 - 2x}$

6. $f(x) = \dfrac{5x + 9}{3x + 2 - \sqrt{4x^2 - 7}}$

Respostas:

1. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

2. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

3. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{3}$

4. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

5. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$

6. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$