ANOS

# CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPUS KOBRASOL

UNIVALI

Save the Date

Saturday, April 14th, 2018

## Limites no Infinito

Até então analisamos o comportamento de uma função $f(x)$ quando $x$ se aproxima de algum ponto.

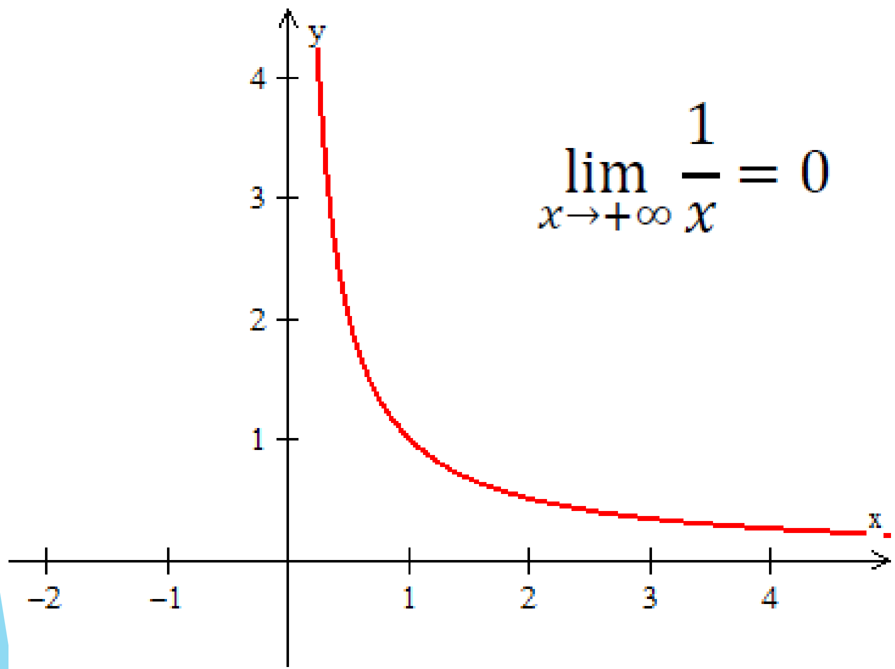
Analisaremos agora o comportamento de $f(x)$ quando $x$ assume valores positivos arbitrariamente grandes ou negativos arbitrariamente grandes, ou seja:

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) \quad ou \quad \lim_{x \to +\infty} f(x)}$$

## Limites no Infinito

**Exemplo:** Consideremos a seguinte função: $f(x) = \frac{1}{x}$.

Verificar o comportamento da função para $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

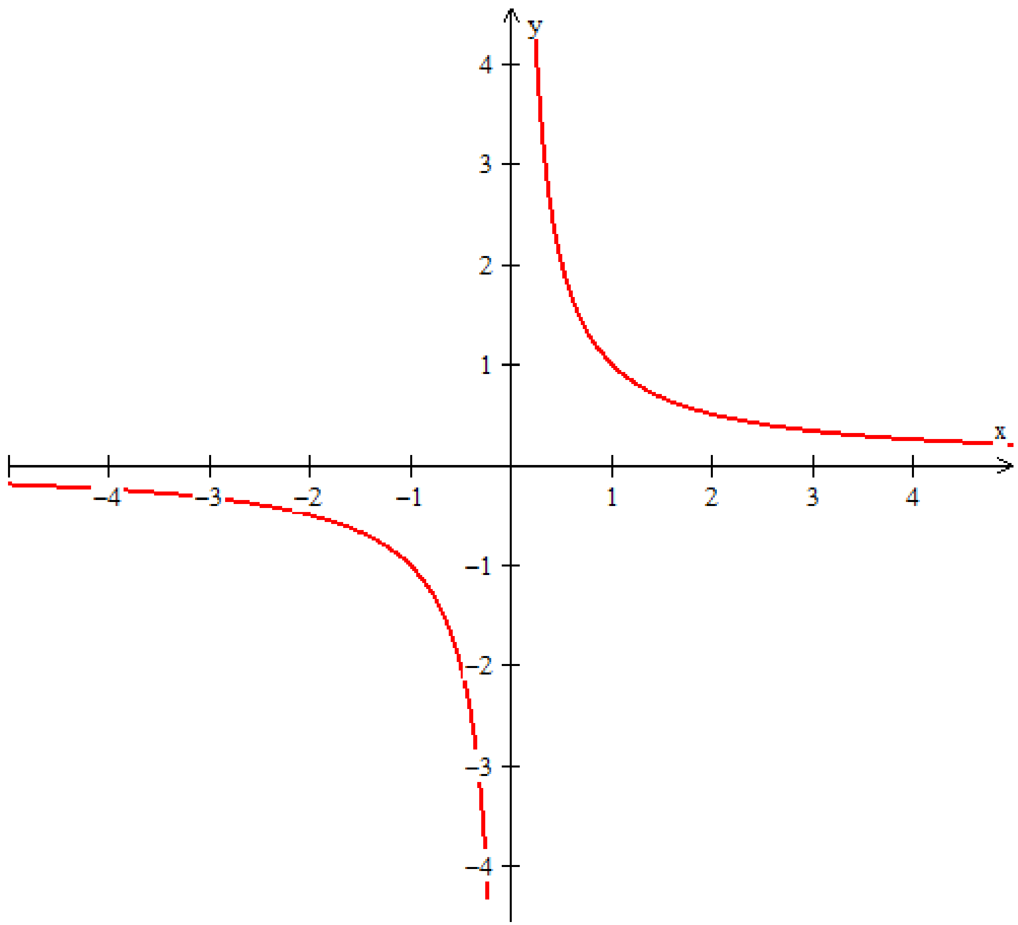



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Quando $x$ tende ao infinito, ou seja, quando $x$ cresce indefinidamente, os valores da função tendem a se aproximar cada vez mais de 0.

# Limites no Infinito

Observemos a função inteira:




$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \nexists$$

# Limites no Infinito

**Exemplo:** Determinar o limite da função: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x-1}{4x+1}$

Aqui surge uma indeterminação do tipo $\infty/\infty$.

Neste caso, quando o limite tende a $\pm\infty$, devemos dividir o numerador e o denominador pelo maior grau do denominador:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x-1}{4x+1} = \frac{\frac{3x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{4x}{x} + \frac{1}{x}} = \frac{3 - \frac{1}{x}}{4 + \frac{1}{x}} = \frac{3}{4}$$

# Limites no Infinito

**Exemplo:** Determinar o limite da função: $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+8x-5}{4-x^3}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+8x-5}{4-x^3} = \frac{\frac{3x^2}{x^3}+\frac{8x}{x^3}-\frac{5}{x^3}}{\frac{4}{x^3}-\frac{x^3}{x^3}} = \frac{\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{\frac{4}{x^3}-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

**Exemplo:** Determinar o limite da função: $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2+11}{3x^2+x-7}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2+11}{3x^2+x-7} = \frac{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{11}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{7}{x^2}} = \frac{4 + \frac{11}{x^2}}{3 + \frac{x}{x^2} - \frac{7}{x^2}} = \frac{4}{3}$$

# Limites no Infinito

**Exemplo:** Determinar o limite da função: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-3}+5x}{1-2x}$

Da mesma forma que anteriormente, devemos dividir o numerador e o denominador pelo maior grau do denominador:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-3}+5x}{1-2x} = \frac{\dfrac{\sqrt{4x^2-3}}{x}+\dfrac{5x}{x}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2x}{x}} = \frac{\dfrac{\sqrt{4x^2-3}}{\sqrt{x^2}}+\dfrac{5x}{x}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2x}{x}}$$

# Limites no Infinito

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{4x^2-3}}{\sqrt{x^2}}+\frac{5x}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{2x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{4x^2-3}{x^2}}+5}{\frac{1}{x}-2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{3}{x^2}}+5}{\frac{1}{x}-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}+5}{\frac{1}{x}-2}=\frac{2+5}{-2}=-\frac{7}{2}$$

## Limites no Infinito

**Exemplo:** Determinar o limite da função: $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-3}+5x}{1-2x}$

Mesmo procedimento que no exemplo anterior,

só que dessa vez $x$ é negativo e, assim, $x = -\sqrt{x^2}$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-3}+5x}{1-2x} = \frac{\frac{\sqrt{4x^2-3}}{x}+\frac{5x}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{2x}{x}} = \frac{\frac{\sqrt{4x^2-3}}{-\sqrt{x^2}}+\frac{5x}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{2x}{x}}$$

# Limites no Infinito

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{4x^2-3}}{-\sqrt{x^2}}+\frac{5x}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{2x}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{\frac{4x^2-3}{x^2}}+5}{\frac{1}{x}-2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{3}{x^2}}+5}{\frac{1}{x}-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}+5}{\frac{1}{x}-2}=\frac{-2+5}{-2}=-\frac{3}{2}$$

**Exemplo:** Determinar o limite da função: $\lim_{x \to -\infty} \left( x + \sqrt{2x + x^2} \right)$

Aqui surge uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$.

Neste caso, vamos multiplicar o numerador e denominador da expressão pelo seu conjugado:

$$\lim_{x \to -\infty} \left( x + \sqrt{2x + x^2} \right) \times \frac{\left( x - \sqrt{2x + x^2} \right)}{\left( x - \sqrt{2x + x^2} \right)}$$

ANOS

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPUS KOBRASOL

UNIVALI

Save the Date

Saturday, April 14th, 2018

# Limites Infinitos

Observe o seguinte limite:

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2}$$

Ao substituir o valor de $x$ pelo limite indicado, vamos ter uma Indeterminação tendo a fração o denominador zero: $\frac{1}{0}$.

Para contornar esta situação, observemos o que ocorre com os limites laterais, ou seja, quando $x$ se aproxima por valores maiores ou valores menores do que o limite desejado.

# Limites Infinitos

Consideremos a função $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

Tomemos valores para $x$ que se aproximam cada vez mais de 2 pela direita e pela esquerda:

| $x$ | 1 | 1,5 | 1,9 | 1,99 | 1,999 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 4 | 100 | 10.000 | 1.000.000 |

| $x$ | 3 | 2,5 | 2,1 | 2,01 | 2,001 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 4 | 100 | 10.000 | 1.000.000 |

# Limites Infinitos

Podemos então dizer que, à medida que $x$ se aproxima de 2, quer pela esquerda ou pela direita, $f(x)$ assume valores positivos cada vez maiores, ultrapassando qualquer valor pré-fixado, ou seja,

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

**Exemplo:** Determinar os limite abaixo:

*a)* $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$

*b)* $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$

*c)* $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}$

*d)* $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}$

## Limites no Infinito

**Resposta:** Determinar os limite abaixo:

*a)* $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

*b)* $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

*c)* $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$

*d)* $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$

# Limites no Infinito

**Exemplo:** Determinar o limite da função:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{3x}{x^2 + 2x - 3}$$

# Limites no Infinito

| $x$ | $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 2x - 3}$ |
| --- | --- |
| 0,9 | $= \dfrac{3 \times 0{,}9}{0{,}9^2 + 2 \times 0{,}9 - 3} = \dfrac{2{,}7}{-0{,}39} = -6{,}92\ldots$ |
| 0,99 | $= \dfrac{3 \times 0{,}99}{0{,}99^2 + 2 \times 0{,}99 - 3} = \dfrac{2{,}97}{-0{,}0399} = -74{,}44\ldots$ |

Percebemos que, quando $x$ se aproxima de 1 por valores menores, a função tende a valores negativos cada vez menores, ou seja:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{3x}{x^2 + 2x - 3} = -\infty$$

# Limites no Infinito

Podemos também proceder da seguinte forma para saber qual é o sinal da função para $x$ muito próximo de 1 e menor do que 1:

- $\lim_{x \to 1^-} 3x = 3 > 0$
- $\lim_{x \to 1^-} x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$
- $\lim_{x \to 1^-} (x-1) < 0$
- $\lim_{x \to 1^-} (x+3) > 0$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{3x}{x^2 + 2x - 3} = \frac{+}{(-)(+)} = -\infty$$

**Exemplo:** Determinar o limite da função:

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{e^{4x}}{x^3 + x^2 - 6x}$$

# Limites no Infinito

| $x$ | $f(x) = \dfrac{e^{4x}}{x^3 + x^2 - 6x}$ |
| --- | --- |
| $-2{,}9$ | $= \dfrac{e^{4\times(-2{,}9)}}{(-2{,}9)^3 + (-2{,}9)^2 - 6 \times (-2{,}9)} \approx 6{,}45 \times 10^{-6} \ldots$ |
| $-2{,}99$ | $= \dfrac{e^{4\times(-2{,}99)}}{(-2{,}99)^3 + (-2{,}99)^2 - 6 \times (-2{,}99)} \approx 4{,}28 \times 10^{-5} \ldots$ |
| $-2{,}999$ | $0{,}0004114 \ldots$ |
| $-2{,}9999$ | $0{,}0040979 \ldots$ |

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{e^{4x}}{x^3 + x^2 - 6x} = +\infty$$

# Limites no Infinito

Ou então: para saber qual é o sinal da função para $x$ muito próximo de $-3$ e maior do que $-3$.

- $\lim_{x \to -3^+} e^{4x} = e^{-12} > 0$
- $\lim_{x \to -3^+} x^3 + x^2 - 6x = x(x+3)(x-2)$
- $\lim_{x \to -3^+} x < 0$
- $\lim_{x \to -3^+} (x+3) > 0$
- $\lim_{x \to -3^+} (x-2) < 0$

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{e^{4x}}{x^3 + x^2 - 6x} = \frac{+}{(-)(+)(-)} = +\infty$$

ANOS

# CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPUS KOBRASOL

UNIVALI

Save the Date

Saturday, April 14th, 2018

# Assíntotas Horizontais e Verticais

Assíntotas são retas que tangenciam o gráfico de uma função, no infinito, e normalmente são paralelas aos eixos $x$ e $y$. Estes próprios eixos podem ser assíntotas.

Assíntotas verticais envolvem limites infinitos, enquanto que assíntotas horizontais envolvem limites no infinito

## Assíntota Vertical:

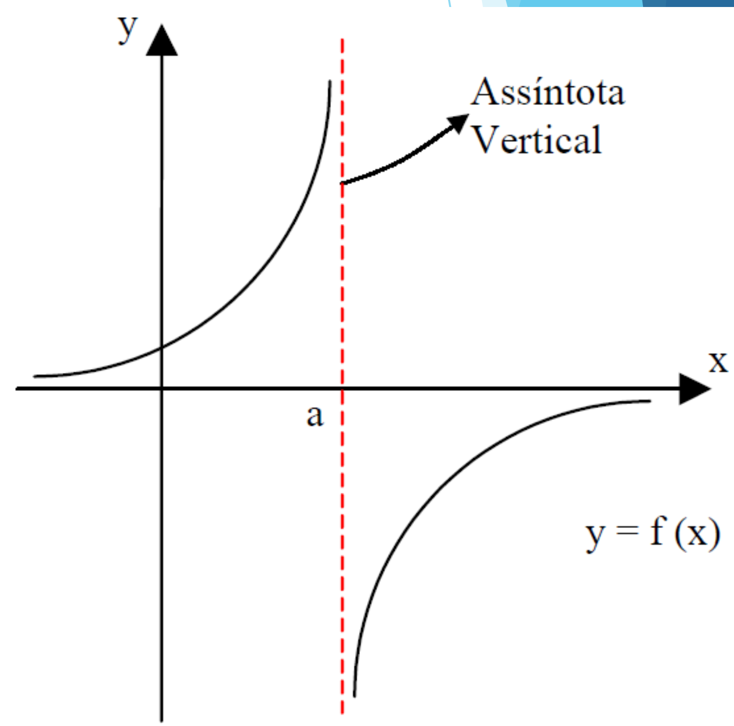
Dizemos que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de $f$ se for verificada uma das seguintes condições:

1) $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

2) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

3) $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

4) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$



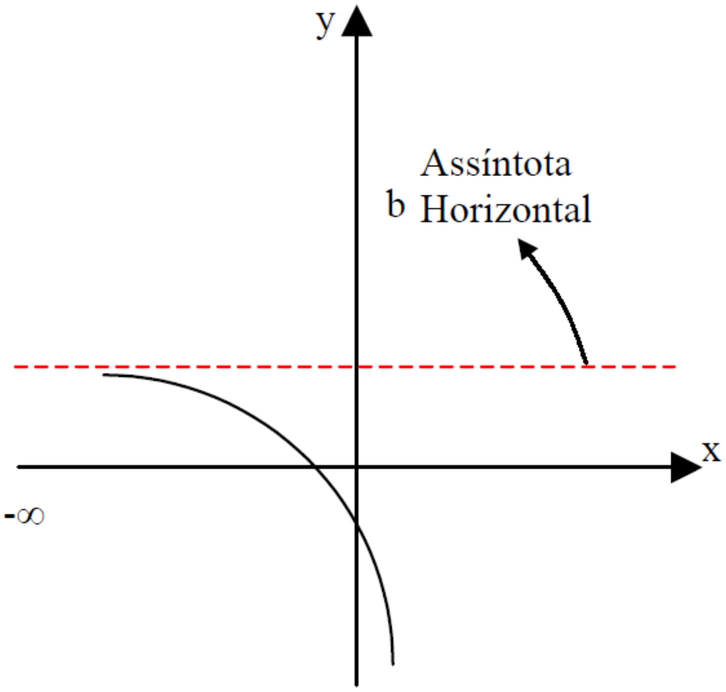
# Assíntotas Horizontais e Verticais

## Assíntota Horizontal:

Dizemos que a reta $y = b$ é uma assíntota horizontal do gráfico de $f$ se for verificada uma das seguintes condições:

*1)* $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$

*2)* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$



# Assíntotas Horizontais e Verticais

Encontre as assíntotas horizontais e verticais ao gráfico das seguintes funções:

1) $f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x-2)}$

2) $g(x) = \frac{x^2-3x}{(x+3)^2}$

3) $h(x) = \frac{x^3+3x^2}{x^2-9}$

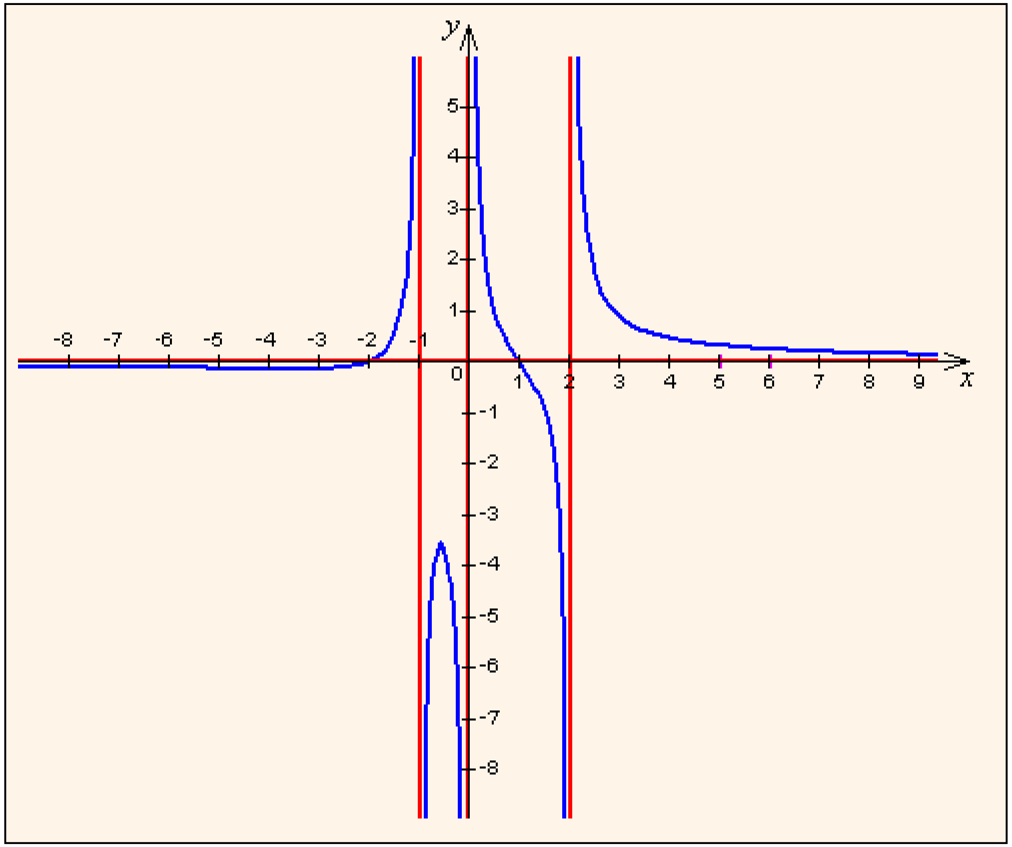
4) $f(x) = \frac{3x+4}{\sqrt{x^2-4}}$

5) $f(x) = \sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

6) $f(x) = \frac{1-3x}{\sqrt{x^2+4}}$

# Assíntotas Horizontais e Verticais

1)




$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x-2)}=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x-2)}=0$$

A reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal.

$$\lim_{x\to0^-}\frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x-2)}=-\infty$$
$$\lim_{x\to0^+}\frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x-2)}=+\infty$$

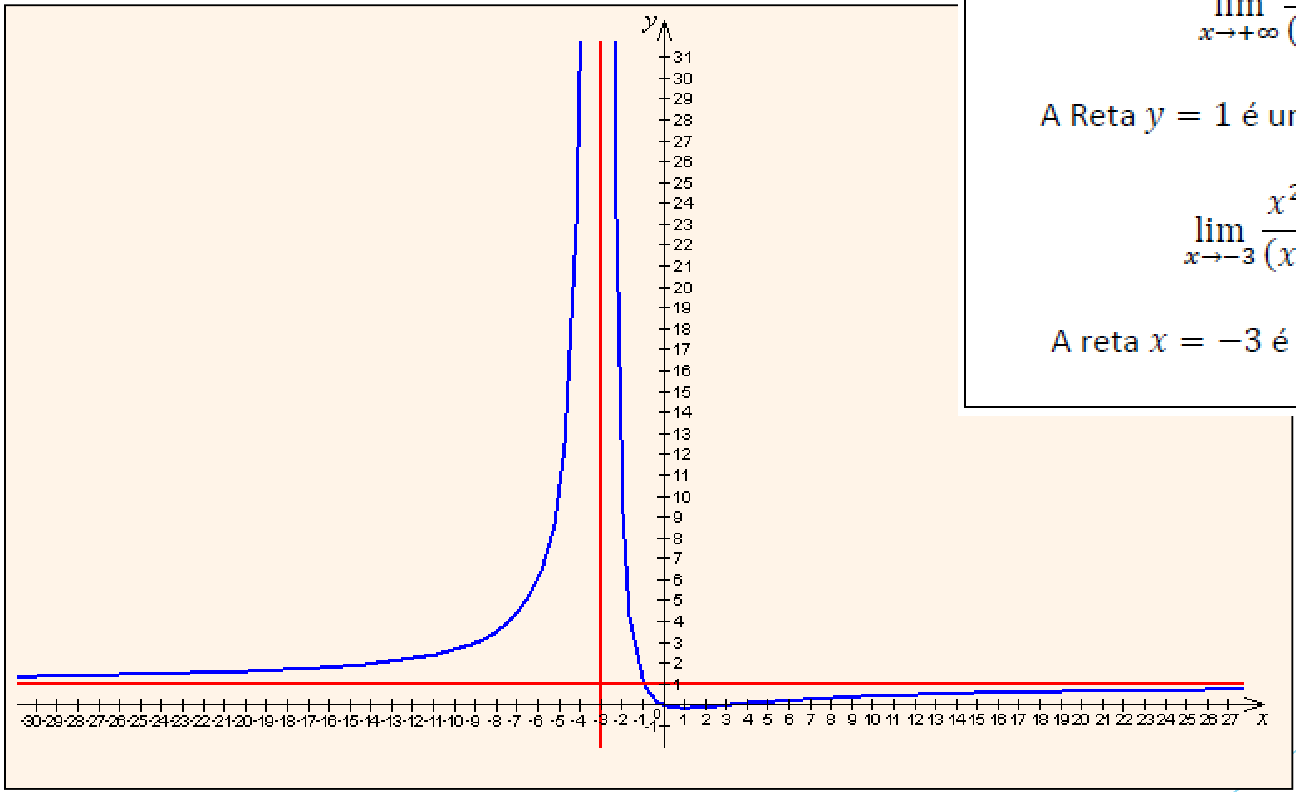
$$\lim_{x\to-1^-}\frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x-2)}=+\infty$$
$$\lim_{x\to-1^+}\frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x-2)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^-}\frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x-2)}=-\infty$$
$$\lim_{x\to2^+}\frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x-2)}=+\infty$$

As retas $x = 0$; $x = -1$ e $x = 2$ são assíntotas verticais.

# Assíntotas Horizontais e Verticais

2)



$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x}{(x+3)^2}=1$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x}{(x+3)^2}=1$$

A Reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal.

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^2-3x}{(x+3)^2}=+\infty$$

A reta $x = -3$ é uma assíntota vertical.

# Assíntotas Horizontais e Verticais

*3)*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+3x^2}{x^2-9}=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x^2}{x^2-9}=+\infty$$

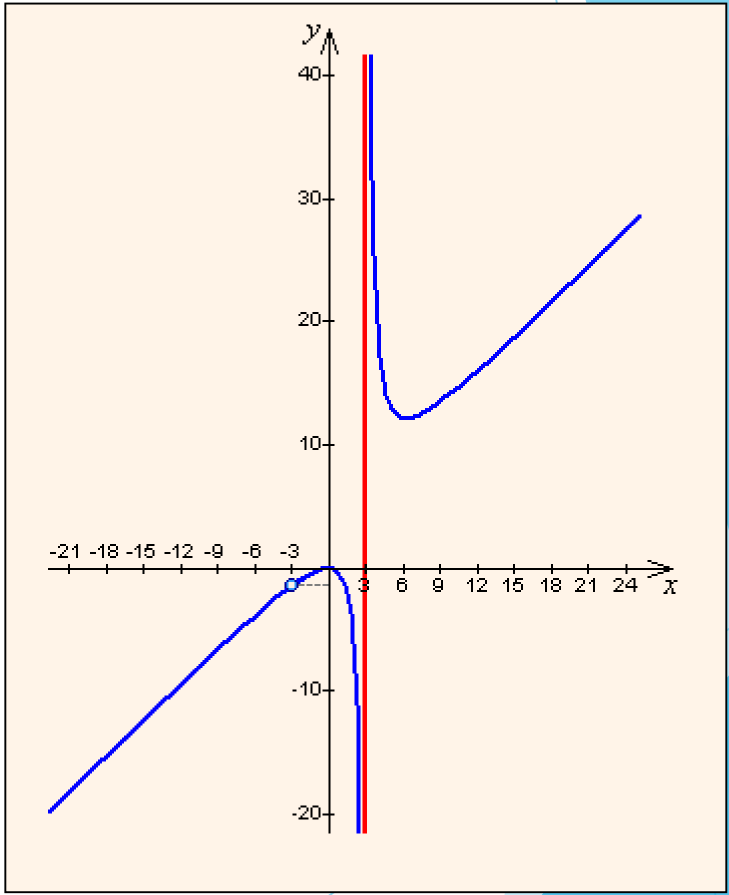
Não existe assíntota horizontal.

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^3+3x^2}{x^2-9}=-\frac{3}{2}$$

A reta $x=-3$ não é uma assíntota vertical.

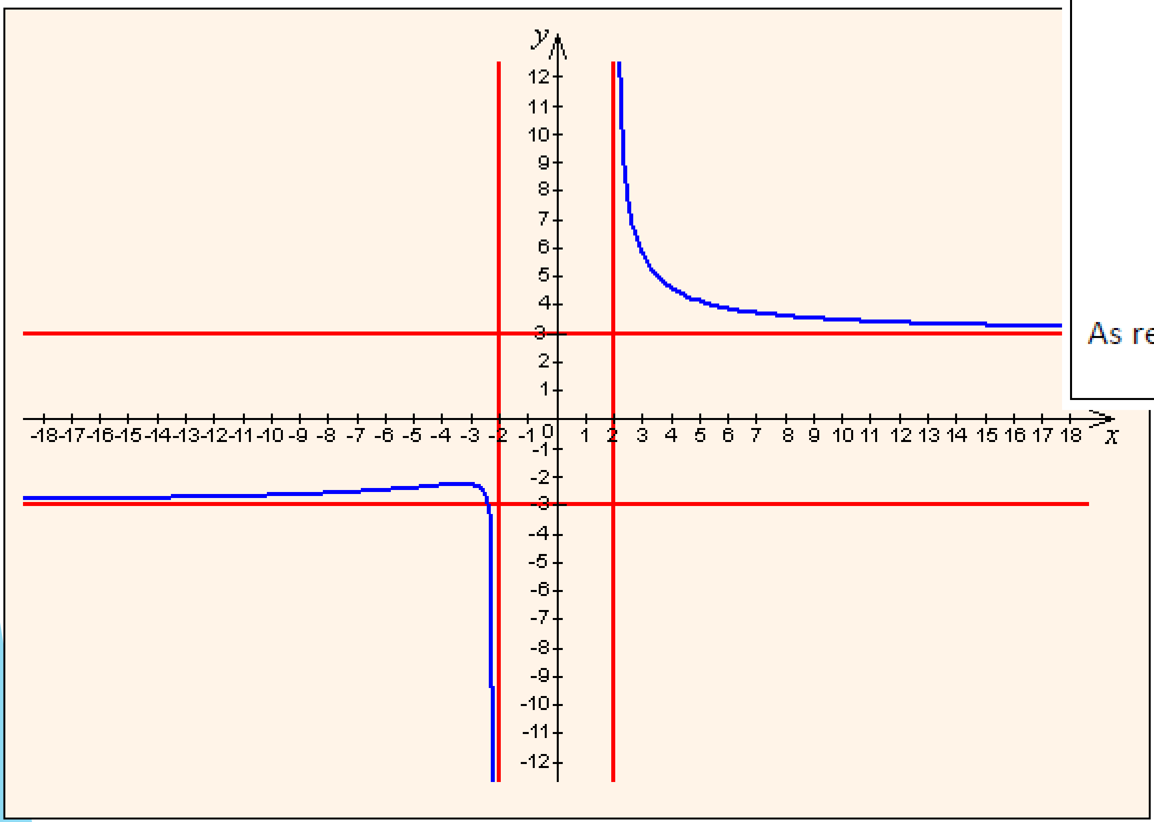
$$\lim_{x\to3^-}\frac{x^3+3x^2}{x^2-9}=-\infty$$
$$\lim_{x\to3^+}\frac{x^3+3x^2}{x^2-9}=+\infty$$

A reta $x=3$ é uma assíntota vertical.



# Assíntotas Horizontais e Verticais

*4)*




$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{x^2-4}} = -3$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{x^2-4}} = 3$$

As retas $y = -3$ e $y = 3$ são assíntotas horizontais.

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{3x+4}{\sqrt{x^2-4}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} \frac{3x+4}{\sqrt{x^2-4}} = +\infty$$

As retas $x = -2$ e $x = 2$ são assíntotas verticais.

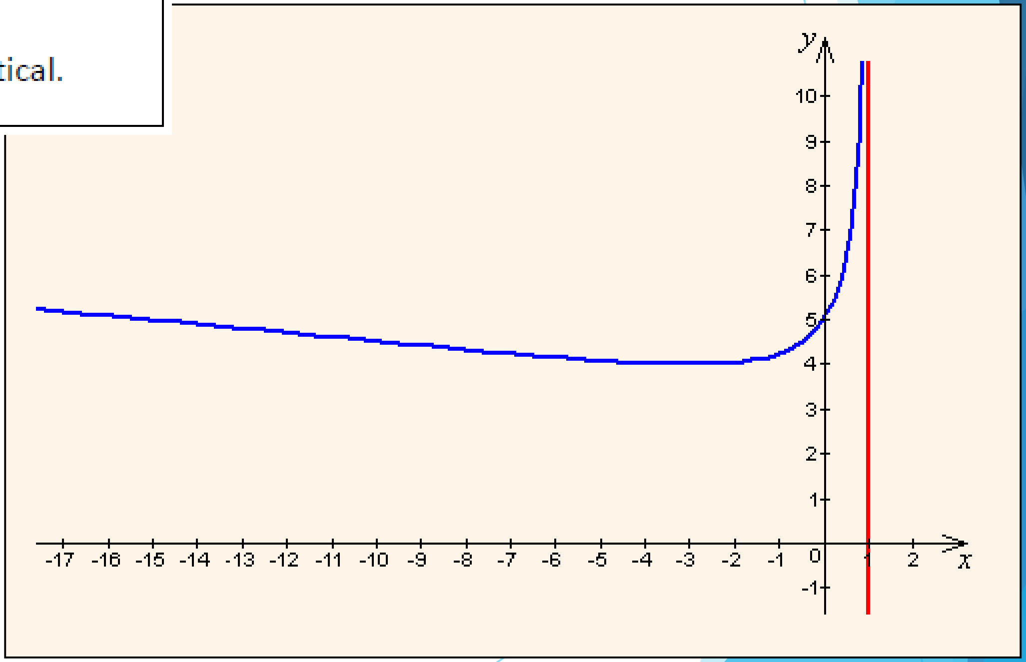
# Assíntotas Horizontais e Verticais

5)

Não existem assíntotas horizontais.

$$\lim_{x \to -1^-} \sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} = +\infty$$

A reta $x = 1$ é uma assíntota vertical.



# Assíntotas Horizontais e Verticais

6)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1-3x}{\sqrt{x^2+4}} = 3$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1-3x}{\sqrt{x^2+4}} = -3$$

As retas $y = 3$ e $y = -3$ são assíntotas horizontais.

Não existem assíntotas verticais.