UNIVALI

Escola do Mar,
Ciência e Tecnologia

Cálculo II

Curso de Ciência da Computação
Campus Kobrasol

Prof. Denise Prado Kronbauer
denise.kronbauer@univali.br
denipk@gmail.com

Na definição de integral definida, consideramos a função f contínua num intervalo fechado e limitado.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

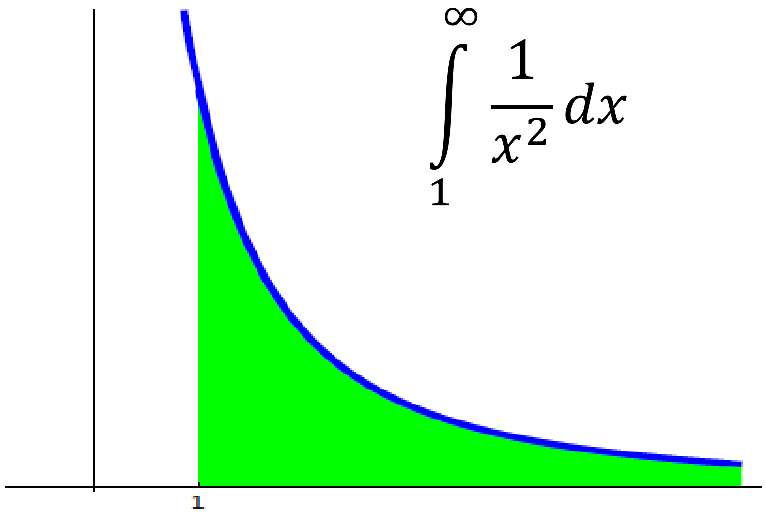
Agora, estenderemos esta definição para os seguintes casos:

Caso 1: Um ou ambos os limites de integração são infinitos;

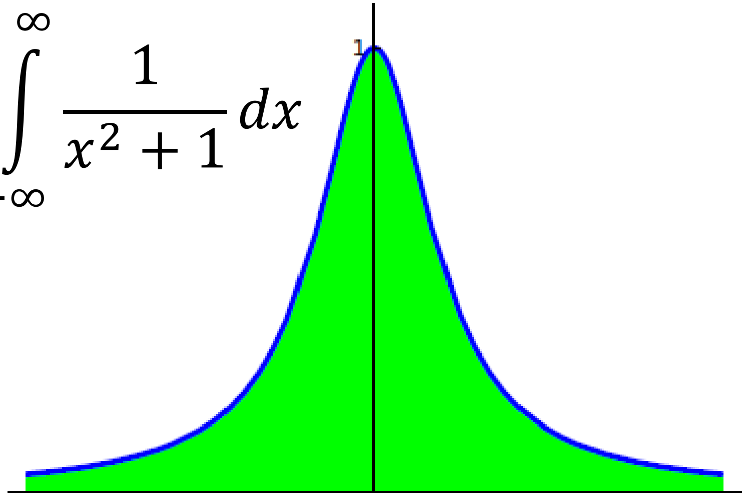
Caso 2: f possui uma descontinuidade infinita no intervalo $[a, b]$.

As integrais que possuem uma dessas características

são chamadas **integrais impróprias.** Por exemplo, as integrais:



$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \qquad e \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

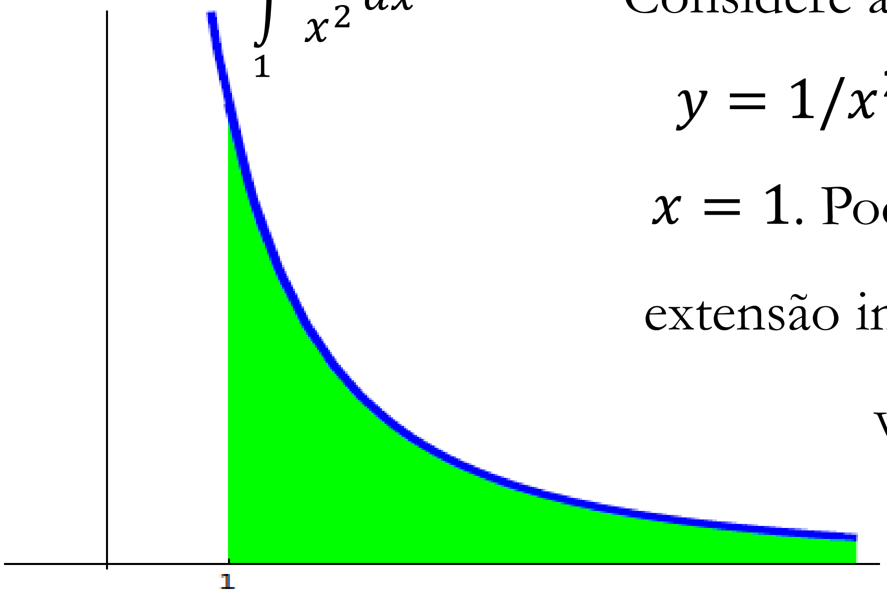


são impróprias porque um ou ambos os limites de integração são infinitos.

Caso 1: Cálculo de uma integral imprópria

Integrais sobre intervalos infinitos

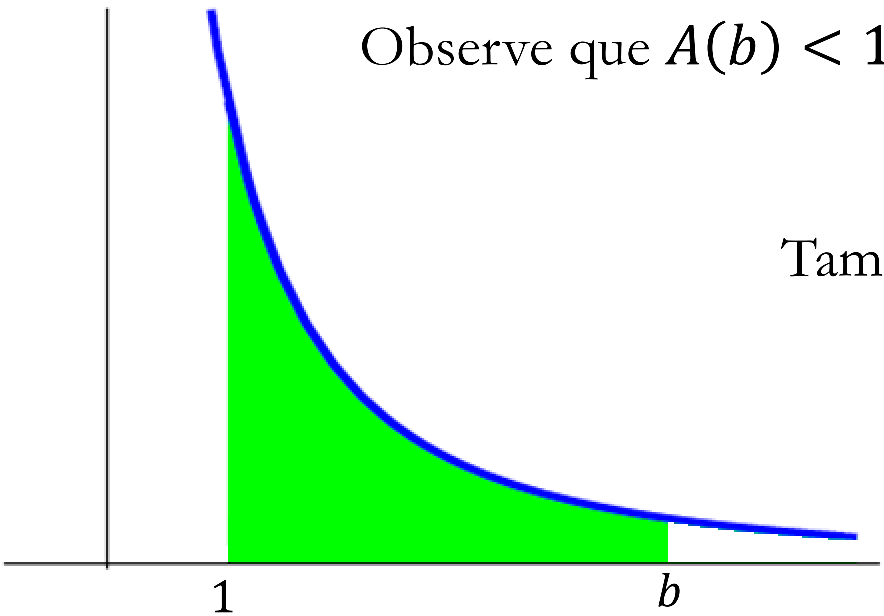
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$



Considere a região infinita S que está sob a curva $y = 1/x^2$, acima do eixo x e à direta da reta $x = 1$. Podemos pensar que, como S tem uma extensão infinita, sua área deve ser infinita, mas vamos olhar mais de perto.

A área da parte S que está à esquerda da reta $x = b$ é.

$$A(b) = \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\bigg]_1^b = -\frac{1}{b} + 1$$

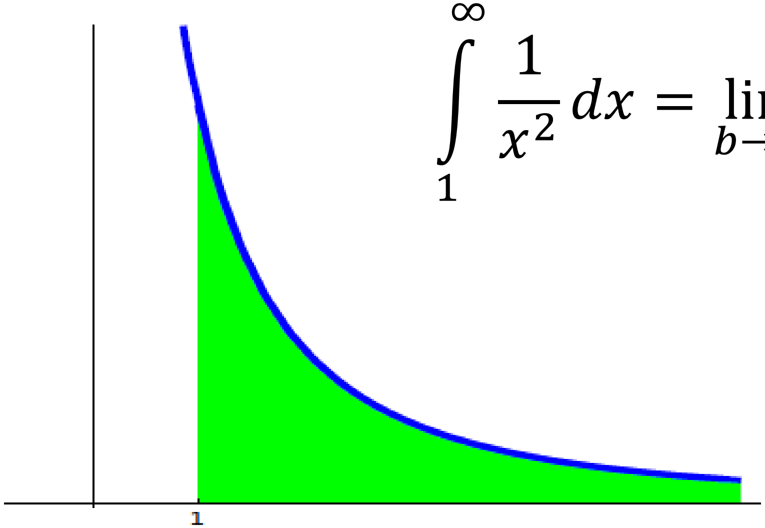


Observe que $A(b) < 1$ não importando quão grande seja b.

Também observamos que:

$$\lim_{b\to\infty} A(b) = \lim_{b\to\infty}\left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1$$

A área da região sombreada se aproxima de 1 quando $b \to \infty$. Assim dizemos que a área da região infinita de S é igual a 1 e escrevemos:



$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

Caso 1: Cálculo de uma integral imprópria

Integrais sobre intervalos infinitos

- Se f for contínua no intervalo $[a, \infty)$, então

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

- Se f for contínua no intervalo $(-\infty, b]$, então

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

- Se f for contínua no intervalo $(-\infty, \infty)$, então

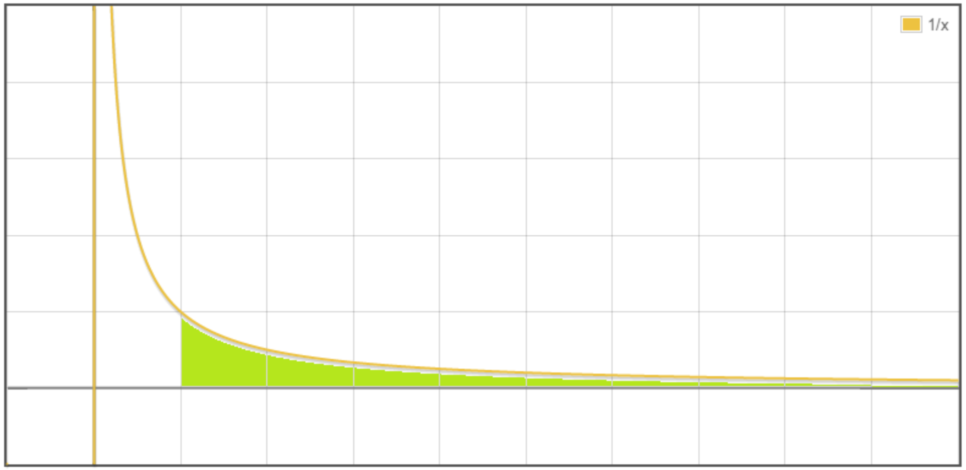
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$$

Nos dois primeiros casos, se o limite existir, então a integral imprópria será **convergente**; do contrário, ela será **divergente**.

No terceiro caso, a integral à esquerda será **divergente** se uma das integrais à direita for **divergente**.

Exemplo:

Determine a convergência ou divergência de: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$



$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} [\ln x]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1)$$

$$= \infty$$

Como o limite é infinito, a integral imprópria é divergente.

Exemplo:

Determine a convergência ou divergência de: $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1-2x)^{3/2}}\,dx$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1-2x)^{3/2}}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{(1-2x)^{3/2}}\,dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\right]_a^0$$

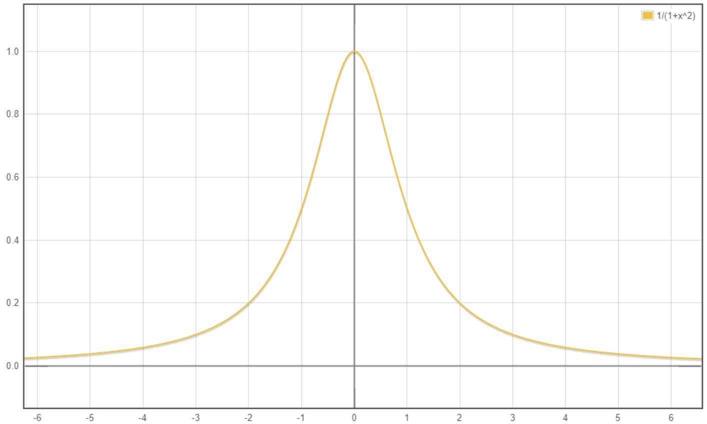
$$= \lim_{a\to-\infty} \left[1-\frac{1}{\sqrt{1-2a}}\right]_a^0 = 1-0 = 1$$

Assim, a integral imprópria converge para 1.

Exemplo: Calcule $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

Escolhemos $a = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$



Vamos calcular as integrais separadamente:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

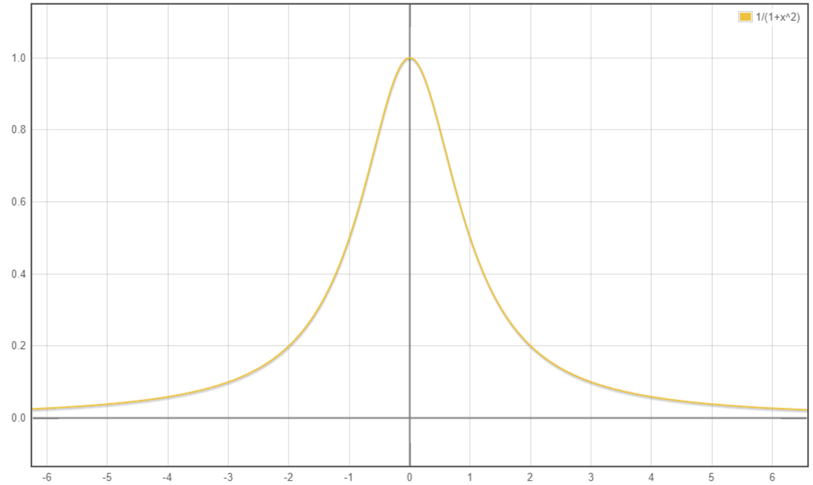
$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\arctan(x)\,\Big|_a^0\right] = \lim_{a\to-\infty} [\arctan(0) - \arctan(a)] = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\arctan(x)\,\Big|_0^b\right] = \lim_{b\to\infty} [\arctan(b) - \arctan(0)] = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Como ambas as integrais são convergentes, a integral dada é convergente:

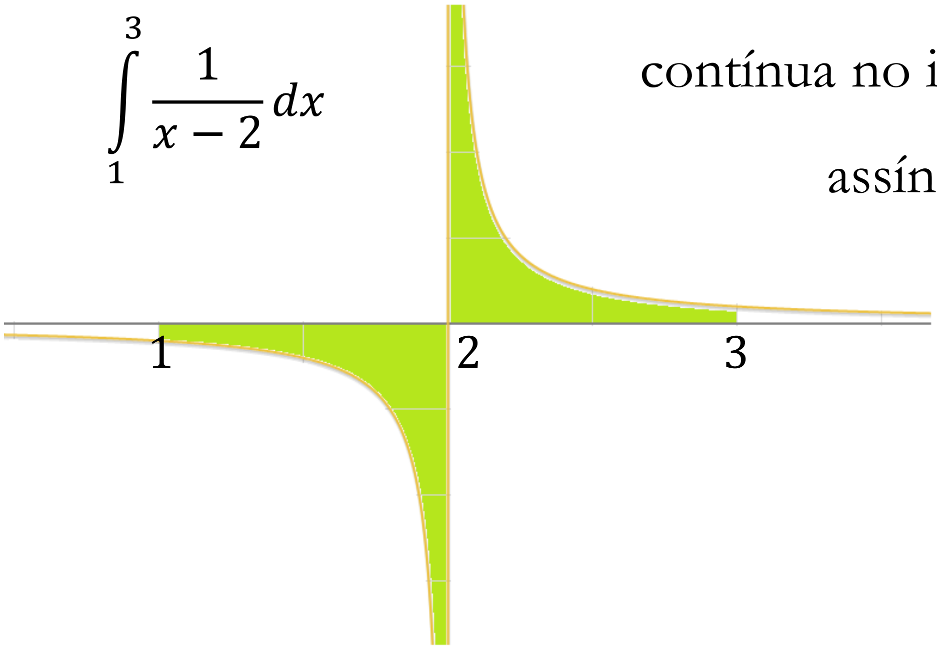
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$



Caso 2: **Cálculo de uma integral imprópria**

Integrais cujos integrandos têm descontinuidades infinitas

$$\int_1^3 \frac{1}{x-2}\,dx$$



Suponha agora que f seja uma função positiva contínua no intervalo finito $[a, b)$, mas com assíntota vertical em $x = b$.

A área entre a e b é dada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

Caso 2: Cálculo de uma integral imprópria

Integrais cujos integrandos têm descontinuidades infinitas

- Se f for contínua no intervalo $[a, b)$ e tender a infinito em b, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

- Se f for contínua no intervalo $(a, b]$ e tender a infinito em a, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

- Se f for contínua no intervalo $[a, b]$, exceto para algum c em (a, b) no qual f tende a infinito, então

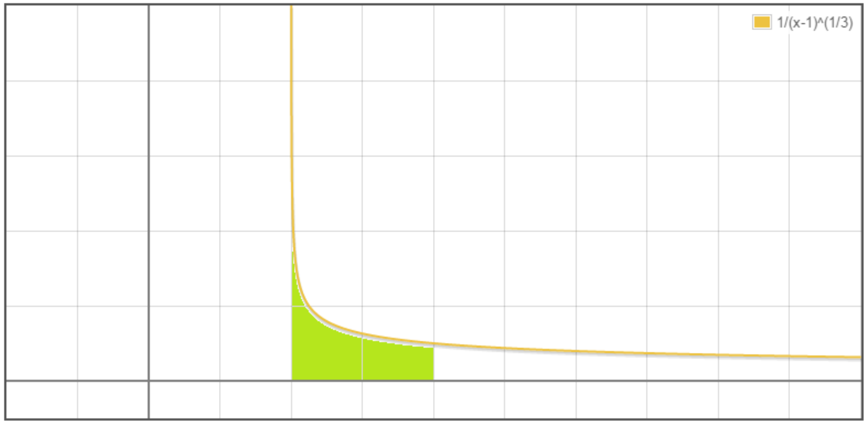
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Nos dois primeiros casos, se o limite existir, então a integral imprópria será **convergente**; do contrário, ela será **divergente**.

No terceiro caso, a integral à esquerda será **divergente** se uma das integrais impróprias à direita for **divergente**.

Exemplo:

Determine a convergência ou divergência de: $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$



$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = \lim_{c\to 1^+} \int_c^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$$

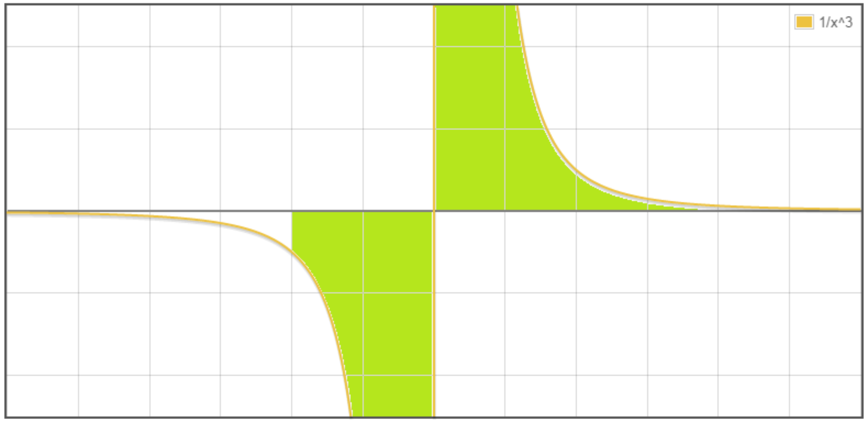
$$= \lim_{c\to 1^+} \left[\frac{3}{2}(x-1)^{2/3}\right]_c^2$$

$$= \lim_{c\to 1^+} \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2}(c-1)^{2/3}\right] = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}$$

Assim, a integral converge para $3/2$.

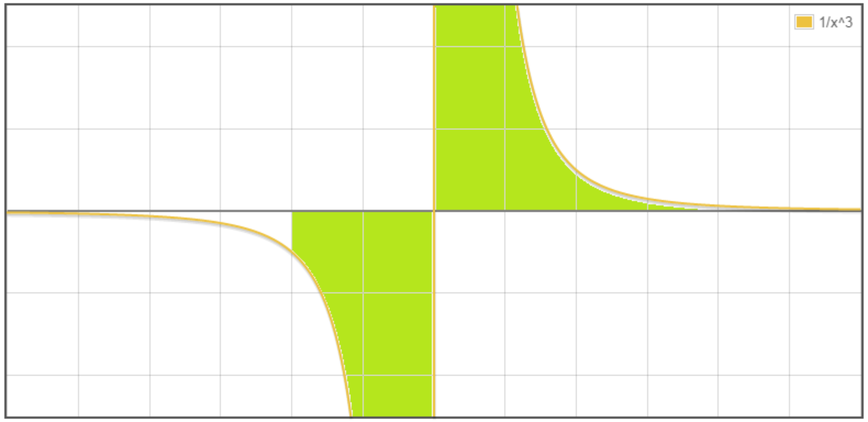
Exemplo:

Determine a convergência ou divergência de: $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^3}\,dx$



Exemplo:

Determine a convergência ou divergência de: $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^3}\,dx$



$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^3}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3}\,dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{x^3}\,dx$$

Vamos calcular as integrais separadamente:

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_{a}^{c} f(x)\,dx \quad e \quad \int_{0}^{2} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{c\to 0^-} \int_{-1}^{c} \frac{1}{x^3}\,dx$$

$$= \lim_{c\to 0^-} \left[-\frac{2}{x^2}\right]_{-1}^{c} = \lim_{c\to 0^-} \left[-\frac{2}{c^2} - (-2)\right] = -\infty + 2 = -\infty$$

$$\int_{0}^{2} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \int_{c}^{2} \frac{1}{x^3}\,dx$$

$$\lim_{c\to 0^+} \left[-\frac{2}{x^2}\right]_{c}^{2} = \lim_{c\to 0^+} \left[-\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{c^2}\right)\right] = -\frac{1}{2} + \infty = \infty$$

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^3}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3}\,dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{x^3}\,dx$$

Aplicando a definição de integral imprópria, é possível verificar que cada uma dessas integrais é divergente. Portanto, a integral imprópria original também diverge.

Exercícios: Determinar se a integral imprópria é divergente ou convergente:

1) $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

2) $\int_{0}^{\infty} e^{x/3} dx$

3) $\int_{5}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-16}} dx$

4) $\int_{-\infty}^{0} e^{-x} dx$

5) $\int_{1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

6) $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-3x^2} dx$

7) $\int_{0}^{1} \frac{1}{1-x} dx$

8) $\int_{0}^{9} \frac{1}{\sqrt{9-x}} dx$

9) $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2} dx$

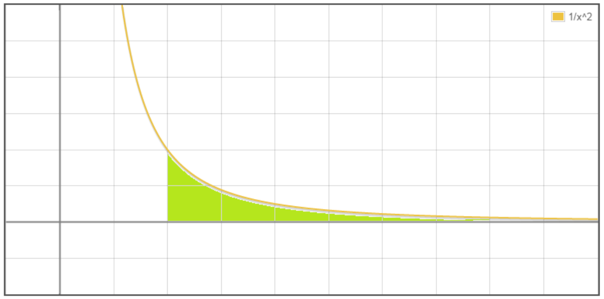
10) $\int_{1}^{3} \frac{1}{(x-1)^{4/3}} dx$

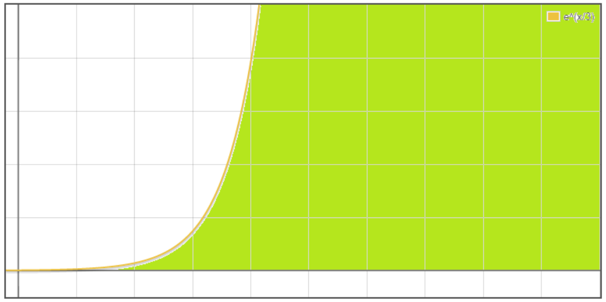
11) $\int_{3}^{4} \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} dx$

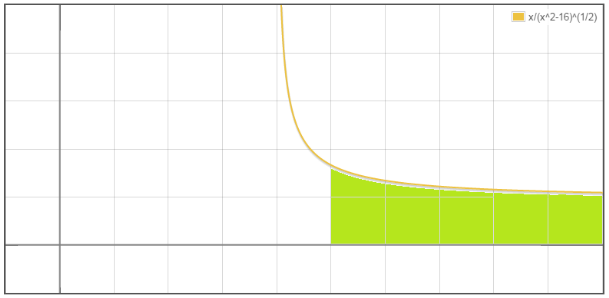
Respostas:

1. Integral Converge para $x = 1$
2. Integral Diverge
3. Integral Diverge
4. Integral Diverge
5. Integral Diverge
6. Integral Converge para $x = 0$
7. Integral Diverge
8. Integral Converge para $x = 6$
9. Integral Diverge
10. Integral Diverge
11. Integral Converge para $x = \sqrt{7}$

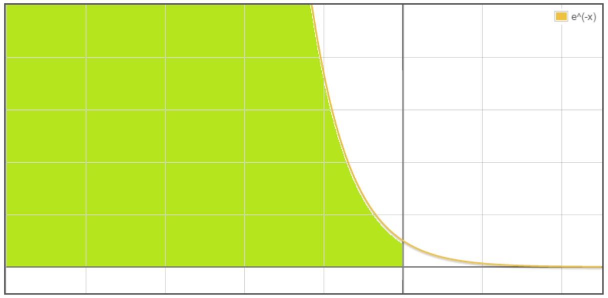
1	2	3

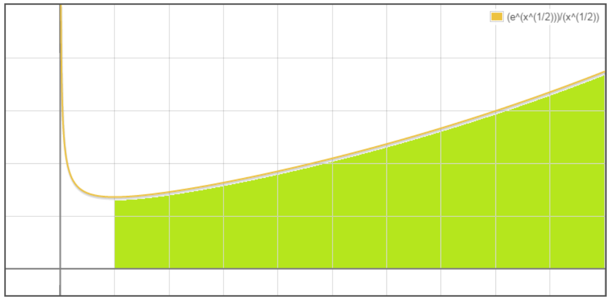


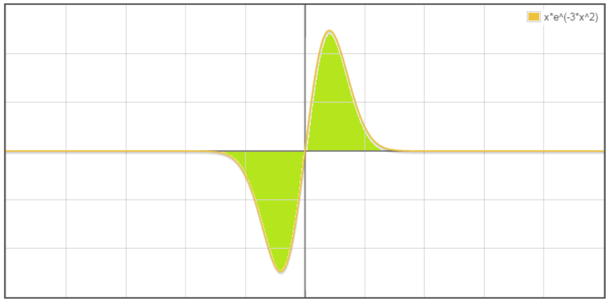




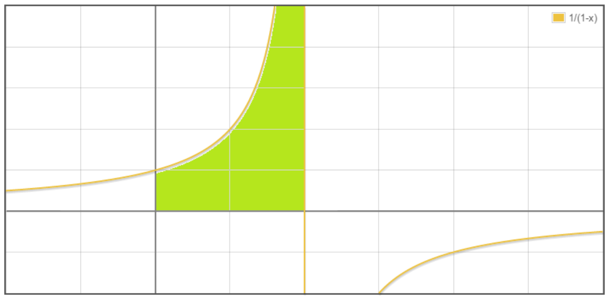
4	5	6

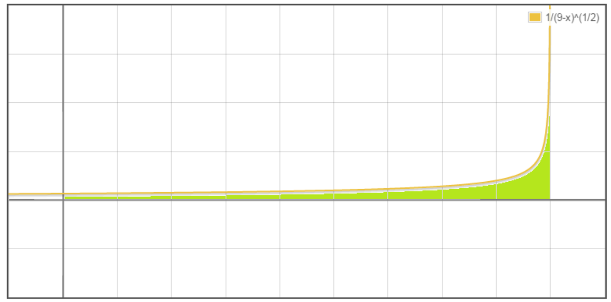


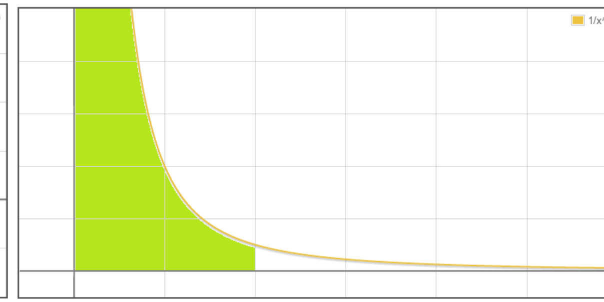




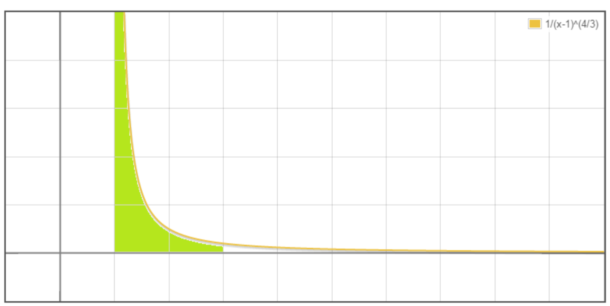
7	8	9

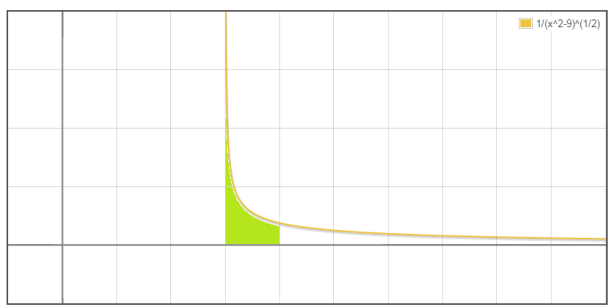






10	11





Exercícios: Calcule a integral definida das seguintes funções:

a) $\int_0^2 (x-1)^{25} dx$

b) $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5 dx$

c) $\int_0^\pi \sec^2(\frac{t}{4})\, dt$

d) $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$

e) $\int_0^1 2xe^{-3x} dx$

f) $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x \; dx$

g) $\int_2^4 3x\sqrt{2x^2-4}\, dx$

Respostas:

a) 0

b) $\frac{182}{9} \approx 20{,}22$

c) 4

d) $e - \sqrt{e}$

e) $\frac{-8e^{-3}+2}{9}$

f) $\frac{\pi^2}{4} - 2$

g) $70{,}08$

Exercícios: Esboce o gráfico da região delimitada pelas funções a seguir e determine a área desta região através do cálculo de integrais:

a) $f(x) = -x \ e \ x = 2 - y^2$

b) $f(x) = 4x - x^2 - 4 \quad e \quad g(x) = x^2$

c) $y = x^3 - x^2 - 2x \quad e \quad g(x) = -x^3 + 4x$

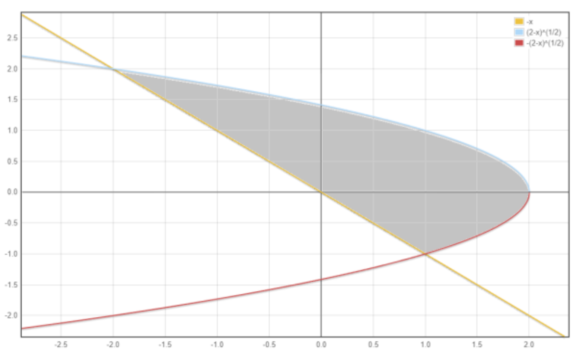
Respostas:

a) $\int_{-1}^{2}(-y^2 + y + 2)\,dy = \frac{9}{2} = 4{,}5$

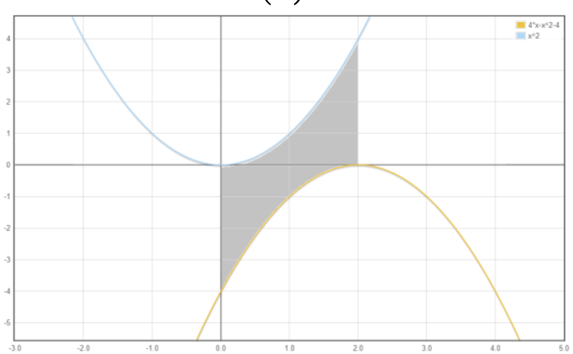
b) $\int_{0}^{2}(2x^2 - 4x + 4)\,dx = \frac{16}{3} \approx 5{,}33$

c) $\int_{-3/2}^{0}(2x^3 - x^2 - 6x)\,dx + \int_{0}^{2}(-2x^3 + x^2 + 6x)\,dx = \frac{937}{96} \approx 9{,}76$

(a)



(b)



(c)