ANOS

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPUS KOBRASOL

UNIVALI

Save the Date

Saturday, April 14th, 2018

UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ

Curso de CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Cálculo I

Denise Prado Kronbauer

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com

UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ

Curso de CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Unidade 2 - Derivadas

Denise Prado Kronbauer

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com

Derivada Implícita

Definição:

Até aqui estivemos ocupados com funções diferenciáveis que eram dadas por equações da forma $y = f(x)$. Agora veremos um método para diferenciar funções para as quais é inconveniente ou impossível expressar dessa forma.

Exemplo:

$$yx + y + 1 - x = 0$$

Derivada Implícita

A equação não está na forma $y = f(x)$. Assim, dizemos que a função está definida implicitamente como uma função de x, podendo ser reescrita como:

$$y = \frac{x-1}{x+1}$$

Em geral, dada uma função na forma implícita, a sua derivada será calculada diferenciando ambos os lados da igualdade em termos de x

Derivada Implícita

Exemplo: **Use a diferenciação implícita para achar $\boldsymbol{dy/dx}$ se $\boldsymbol{xy = 1}$.**

$$\frac{d}{dx}[xy] = \frac{d}{dx}[1]$$

$$x\frac{d}{dx}[y] + y\frac{d}{dx}[x] = 0$$

$$x\frac{d}{dx}[y] + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

Derivada Implícita

Exemplo: Use a diferenciação implícita para achar dy/dx se

$$5y^2 + sen\, y = x^2.$$

Exemplo: **Use a diferenciação implícita para achar $\boldsymbol{dy/dx}$ se $\boldsymbol{5y^2 + sen\, y = x^2}$.**

$$\frac{d}{dx}[5y^2 + sen\ y] = \frac{d}{dx}[x^2]$$

$$5\frac{d}{dx}[y^2] + \frac{d}{dx}[sen\ y] = 2x \ \rightarrow \ 5\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + (\cos y)\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$10y\frac{dy}{dx} + (\cos y)\frac{dy}{dx} = 2x \ \rightarrow \ \frac{dy}{dx}(10y + \cos y) = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{10y + \cos y}$$

Exemplo: Use a diferenciação implícita para achar d^2y/dx^2 se $4x^2 - 2y^2 = 9$.

Derivada Implícita

Exemplo: **Use a diferenciação implícita para achar $\boldsymbol{dy/dx}$ se $\boldsymbol{5y^2 + sen\, y = x^2}$.**

$$\frac{d}{dx}[5y^2 + sen\ y] = \frac{d}{dx}[x^2]$$

$$5\frac{d}{dx}[y^2] + \frac{d}{dx}[sen\ y] = 2x \;\rightarrow\; 5\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + (\cos y)\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$10y\frac{dy}{dx} + (\cos y)\frac{dy}{dx} = 2x \;\rightarrow\; \frac{dy}{dx}(10y + \cos y) = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{10y + \cos y}$$

Derivada Implícita

Diferenciando ambos os lados implicitamente, obtém-se:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{2x}{y}\right] \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y.2 - (2x)\left(\frac{dy}{dx}\right)}{y^2}$$

Substituindo $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$, temos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y.2 - (2x)(2x/y)}{y^2} \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y - 4x^2/y}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y^2 - 4x^2}{y^3}$$

Derivada Implícita

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y^2 - 4x^2}{y^3}$$

Se utilizarmos a equação original, ao substituir, obtemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{9}{y^3}$$

Derivada Implícita

Exercícios: Para cada uma das equações, encontre dy/dx por derivação implícita:

a) $x^2 - 5xy + 3y^2 = 7$

b) $x^2 + y^2 = 25$

c) $x^3 + y^3 = 6xy$

d) $4x^2 - 9y^2 = 17$

e) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$

f) $x^2y^2 - 2x = 3$

g) $4y^2 - xy = 2$

h) $x^2 + 3xy + y^3 = 10$

i) $y^2 - x^2 + 8x - 9y - 1 = 0$

j) $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$

Derivada Implícita

Respostas:

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-5y}{5x-6y}$

b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x^2}{y^2-2x}$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{9y}$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

f) $\frac{dy}{dx} = \frac{1-xy^2}{x^2y}$

g) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{8y-x}$

h) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+3y}{3x+3y^2}$

i) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-8}{2y-9}$

j) $\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2-4x^3y-5x^4}{x^4-6xy+3y^2}$