UNIVALI

Escola do Mar,
Ciência e Tecnologia

Cálculo II

Curso de Ciência da Computação
Campus Kobrasol

Prof. Denise Prado Kronbauer
denise.kronbauer@univali.br
denipk@gmail.com

Recados Paroquiais

DESCRIÇÃO DO EVENTO

Um encontro entre grandes nomes do Data Analytics, onde você vai apreciar muito conhecimento e vivência dos nossos convidados.

Pra você que trabalha com dados, sendo gestor ou analista, tem uma consultoria, é estudante, tem uma startup ou quer começar a se envolver com esse novo mundo, venha participar do **I Data Meetup São José.**

No dia **23 de Maio**, reuniremos convidados e interessados nesse encontro para nos conhecermos melhor e ampliarmos nosso networking com gente de peso.

Essa edição faz parte do **Bizi Lab Day**, ação idealizada pela BIZI e pela G2M que tem como objetivo além de fomentar o ecossistema da região, levar educação da **Cultura de Inovação** às empresas e profissionais, **nessa edição o tema é a Cultura Data-Driven**.

Esse Meetup também faz parte das ações da embaixada MiddleValley, grupo orgânico que fomenta, através de eventos e parcerias, o ecossistema de inovação de São José/SC.

I DATA MEETUP SÃO JOSÉ

Univali - Campus Kobrasol - São José - São José, SC

23 de maio de 2019, 19h-21h30

https://bit.ly/DataMeetupSJ

UNIVALI

Escola do Mar,
Ciência e Tecnologia

Cálculo II

Curso de Ciência da Computação
Campus Kobrasol

Prof. Denise Prado Kronbauer
denise.kronbauer@univali.br
denipk@gmail.com

Em muitas situações práticas, o valor de certa quantidade, depende dos valores de duas outras ou de mais quantidades. Então, é usual representar estas relações como funções de várias variáveis.

Uma função de várias variáveis reais é uma regra que descreve como uma quantidade é determinada por outras quantidades, de maneira única. Através das funções de várias variáveis poderemos modelar uma grande quantidade de fenômenos dos mais diversos ramos da Ciência.

Exemplos:

1. Numa fábrica, uma quantidade chamada de produção (P), depende do número de homens-hora (L) e do número de máquinas (K), usadas para produzir algum produto. A representação funcional dessa relação dada por:

$$\boxed{P = f(L, K)}$$

2. O número de indivíduos Q de certa colônia de fungos depende essencialmente da quantidade N de nutrientes (em gr), da quantidade H de água (cm³), da temperatura T(°C) e da presença de certa proteína L (ml). Q possivelmente não tem uma formulação matemática explícita, mas é uma função bem definida:

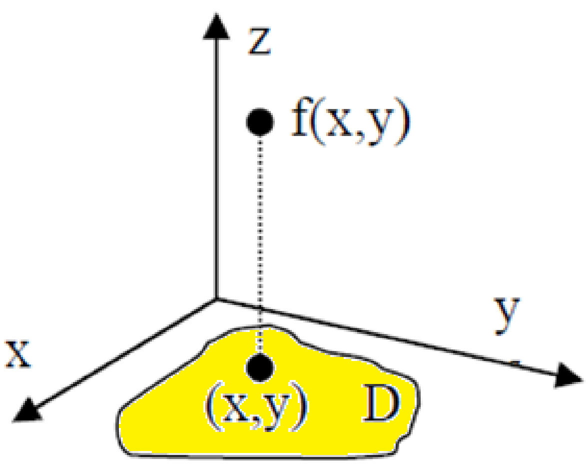
$$\boxed{Q = Q(N, H, T, L)}$$

3. O volume V de um cilindro é dado por $V(r, h) = \pi r^2 h$, ou seja, é uma função que depende do raio r de sua base e de sua altura h. Logo, um cilindro de altura $h = 10\ cm$ e raio $r = 2\ cm$ tem volume: $V(2,10) = 40\pi\ cm^3$ aproximadamente, $125{,}663\ cm^3$.

Seja D um subconjunto (região) do espaço $\mathbb{R}^2$ (plano).

Uma função real f de duas variáveis é uma relação que a cada par ordenado de números reais (x, y) associa um único número real $f(x, y)$.

Assim,



- O conjunto D é o domínio da função em $\mathbb{R}^2$;
- f é a função em análise
- $f(x, y)$ é o valor da função calculado em (x, y), também podemos dizer que $z = f(x, y)$.

Exemplos:

1. Se $f(x,y) = x^2 + 2y$, determine $f(2,3)$;
2. Se $f(x,y) = (3x + y^3)^{1/2}$, determine $f(1,2)$;
3. Sendo $f(x,y) = 3x^2\sqrt{y} - 1$, determine:
   a) $f(1,4)$
   b) $f(0,9)$
   c) $f(a,ab)$

Exemplos:

1. $f(2,3) = 2^2 + 2.3 = 10$
2. $f(1,2) = (3.1 + 2^3)^{1/2} = 3,32$
3. $f(x,y) = 3x^2\sqrt{y} - 1,$

   a) $f(1,4) = 3(1)^2\sqrt{4} - 1 = 3.2 - 1 = 5$

   b) $f(0,9) = 3(0)^2\sqrt{9} - 1 = -1$

   c) $f(a,ab) = 3a^2\sqrt{ab} - 1$

Da mesma forma que no estudo das funções de uma variável, a noção de gráfico desempenha um papel importante no estudo das funções de várias variáveis. Isso ocorre principalmente para as funções de duas variáveis, cujo gráfico, em geral, representa uma superfície no espaço tridimensional.

Para funções de uma variável, o gráfico pode ser visualizado no plano xy, ou $\mathbb{R}^2$, e $y = f(x)$. Para funções de duas variáveis o gráfico é em $\mathbb{R}^3$ (3 dimensões) e $z = f(x, y)$.

No caso das funções de uma variável, uma maneira de obter seu gráfico é elaborar uma tabela determinando os valores da função para uma série de pontos de seu domínio. No entanto, para esboçar o gráfico de uma forma mais precisa, vários outros recursos são utilizados, como a determinação de raízes, assíntotas, intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de máximo e mínimo, etc.

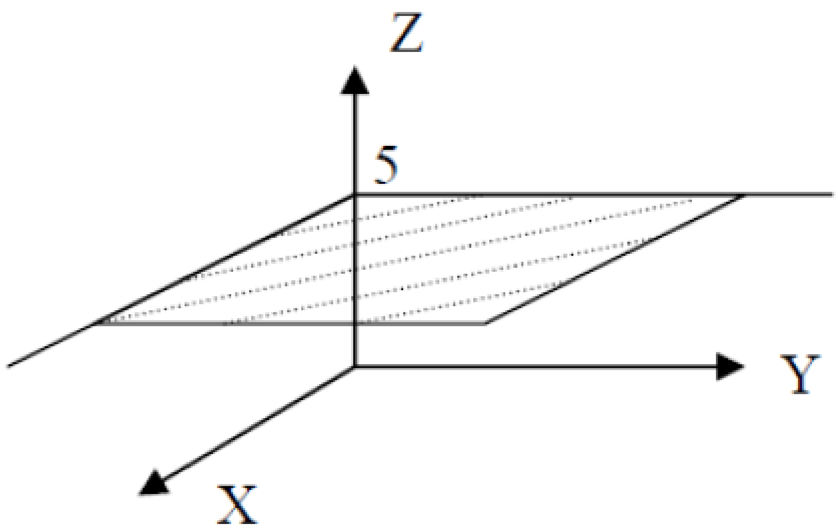
A superfície gerada no espaço $\mathbb{R}^3$ é obtida para cada par x, y, fixando um valor de x e variando y, em seguida fixando um 2º valor de x e variando y, depois fixando um 3º x e variando y, etc., até variar x e y em todo o domínio.

Para uma função de duas variáveis, é praticamente impossível obter o esboço do gráfico apenas criando uma tabela com os valores da função em diversos pontos de seu domínio. Em geral, essa representação pode se tornar bastante complexa sem o auxílio de uma ferramenta computacional.

Exemplos:

1. Função $z = f(x, y) = 5$

A superfície é um plano infinito, paralelo a x e a y, passando por $z = 5$.



2. **Função $z = f(x, y) = 6 - 2x + 3y$**

A função pode ser escrita na forma $2x - 3y + z = 6$

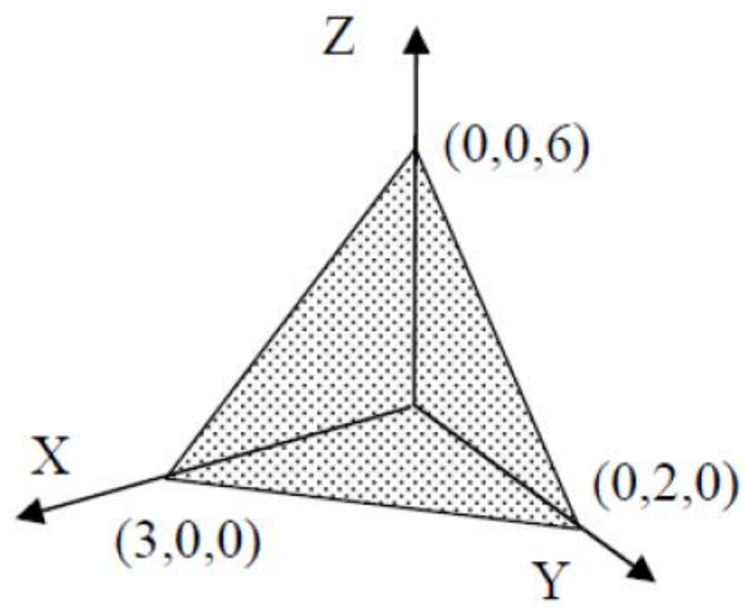
que é a equação de um plano.

Para determinar os pontos onde este plano intercepta os eixos é só fazer:

a) $x = 0; y = 0 \ \rightarrow z = 6$

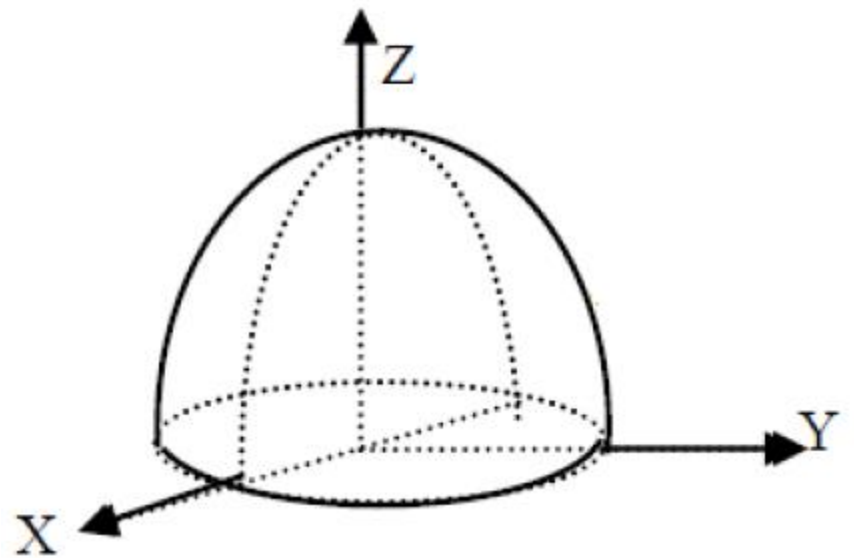
b) $x = 0; z = 0 \ \rightarrow y = 2$

c) $y = 0; z = 0 \ \rightarrow x = 3$

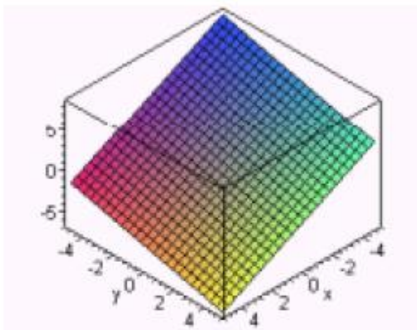
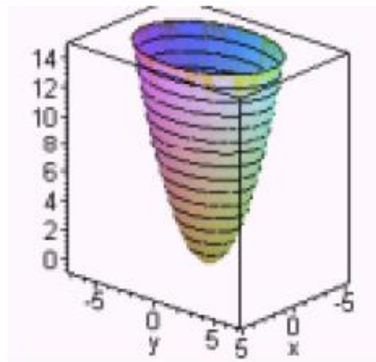
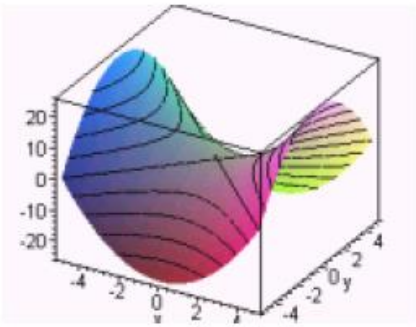


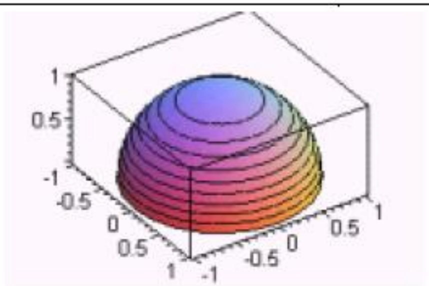
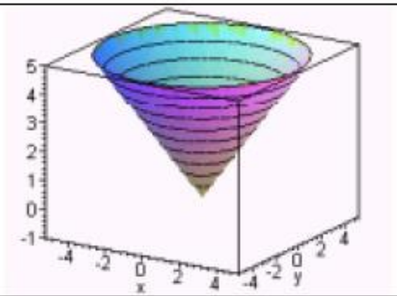
3. **Função $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$**

A superfície gerada é uma semi-esfera de centro na origem e raio $r = 1$.



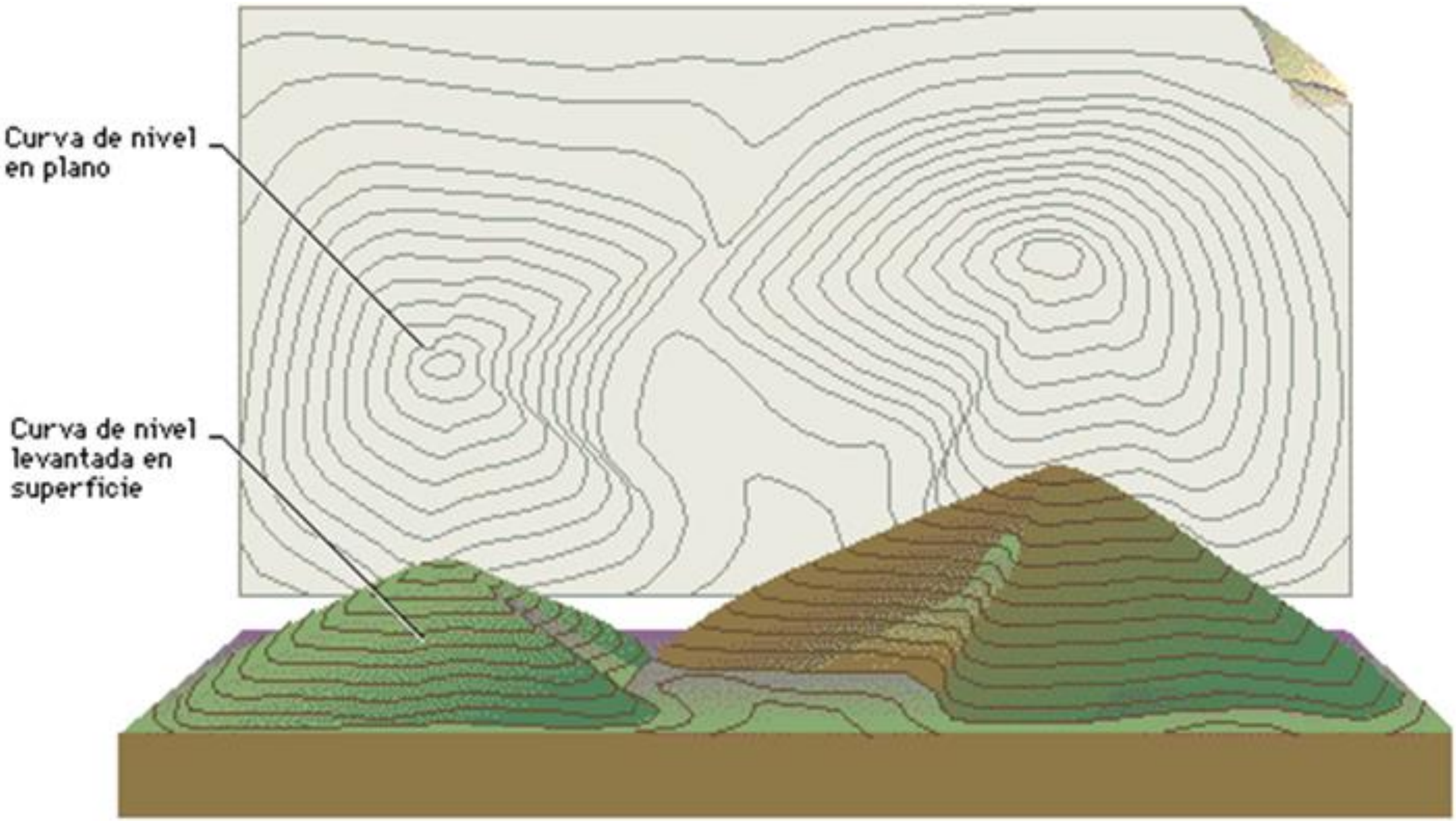
Exemplos:

		
Plano $z = ax + by + c$	Parabolóide Elíptico $z = ax^2 + by^2 + c$	Parabolóide Hiperbólico $z = ax^2 - by^2 + c$

	
Metade de uma superfície esférica de raio r $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$	Metade de uma superfície cônica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Outra forma de visualizar funções de duas variáveis é um método semelhante ao da representação de uma paisagem tridimensional por meio de um mapa topográfico bidimensional.

Este método, muito utilizado pelos cartógrafos na elaboração de mapas de relevo, consiste em determinar os conjuntos de pontos do domínio da função, em que esta permanece constante. Esses conjuntos de pontos são chamados **curvas de nível da função.**


Curva de nivel
en plano
Curva de nivel
levantada en
superficie

As curvas de nível são sempre subconjuntos do domínio da função

$z = f(x, y)$ e, portanto, são traçadas no plano xy.

Cada curva de nível $f(x, y) = k$ é a projeção, sobre o plano xy,

da interseção do gráfico de f com o plano horizontal $z = k$.

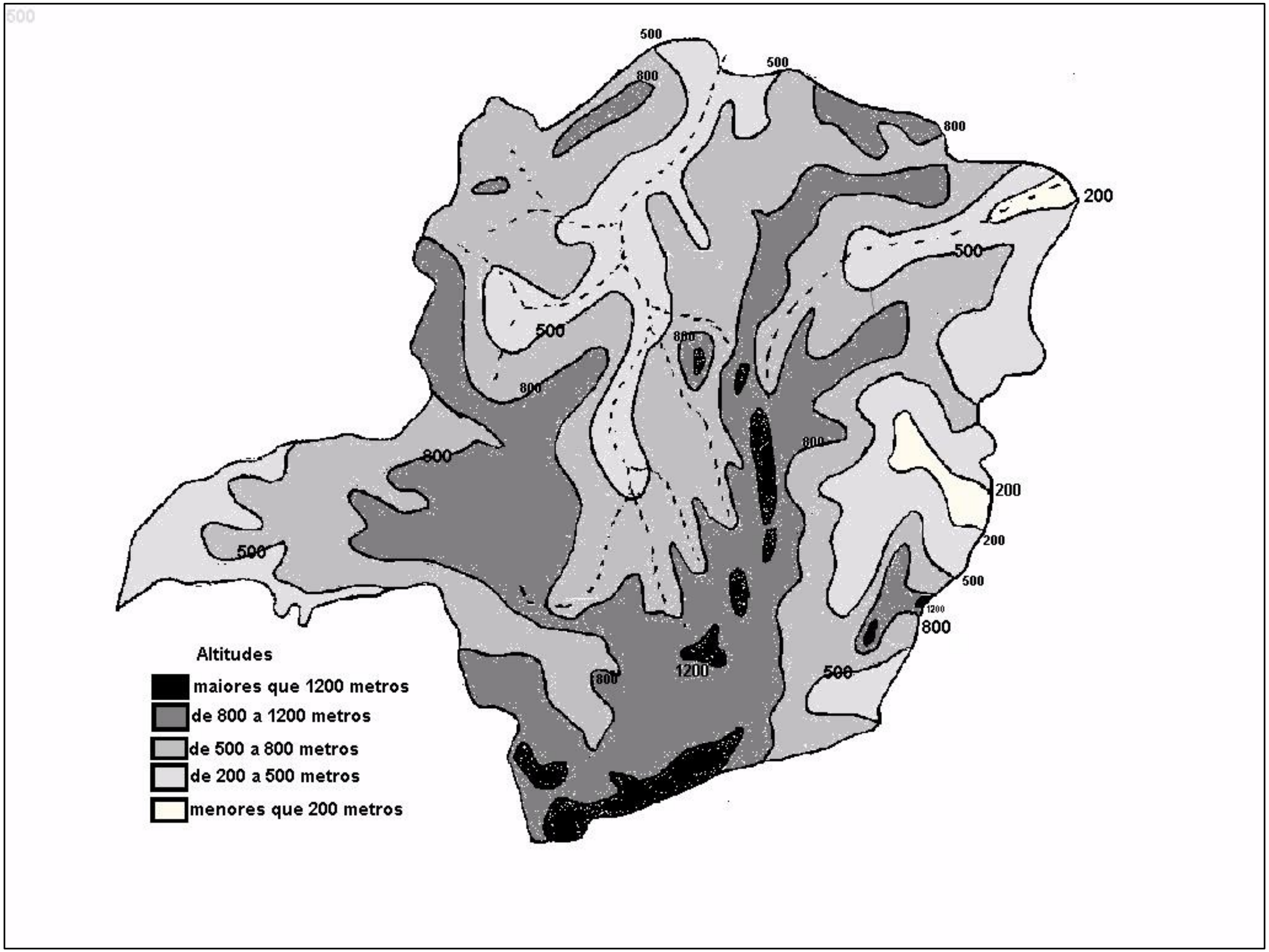
Assim, para obtermos uma visualização do gráfico de f,

podemos traçar diversas curvas de nível e imaginarmos cada uma dessas

curvas deslocada para a altura $z = k$ correspondente.

O plantio em curvas de nível consiste na produção ordenada por meio de linhas com diferentes altitudes do terreno. Essa técnica é essencial para áreas íngremes. O processo ajuda a conservar o solo contra erosões e contribui com o escoamento da água da chuva, fazendo com que ela se infiltre mais facilmente na terra e evite os deslizamentos.

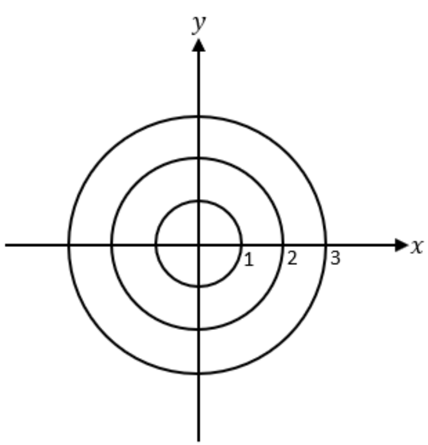
O Valle Sagrado dos Incas eram cultivados mais de 18 variedades de milho, além de batatas, feijão, mandioca e outros vegetais. Todos plantados nos terraços – degraus formados nas encostas das montanhas. Os Incas são conhecidos como um dos primeiros povos a utilizar técnicas de curvas de nível e sistema de irrigação.

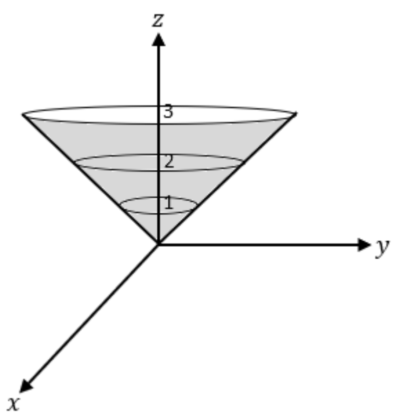


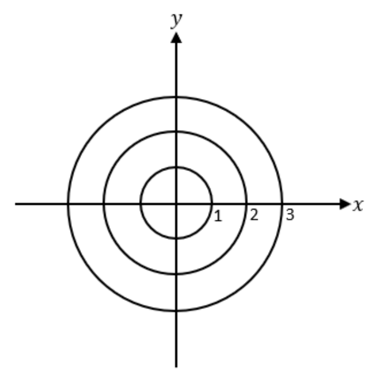
500
500
500
800
800
200
500
500
800
800
800
500
800
200
200
500
1200
800
500
1200
800
Altitudes
maiores que 1200 metros
de 800 a 1200 metros
de 500 a 800 metros
de 200 a 500 metros
menores que 200 metros

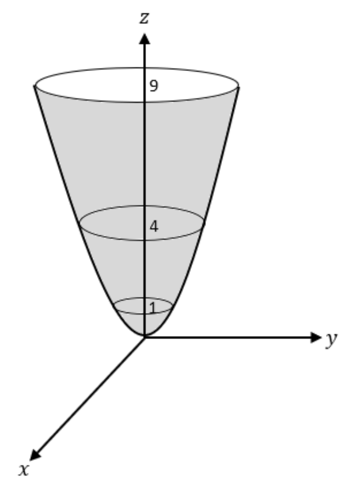
As figuras abaixo são dadas pelas equações $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $z = x^2 + y^2$, as quais representam um cone e um parabolóide, respectivamente.

As curvas de nível de e suas curvas de nível de ambas as funções são circunferências de centro na origem. Assim, utilizando somente as curvas de nível podemos ter dificuldades em esboçar o gráfico corretamente.









Exemplos:

1. Seja a função dada por $z = x^2 + y^2$.

   As curvas de nível para $z = 0, z = 1, z = 2$ e $z = 4$ são:

   - $z = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 0$ $(x = y = 0)$
   - $z = 1 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1$ (Circunferência de centro $C(0,0)$ e raio 1
   - $z = 2 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 2$ (Circunferência de centro $C(0,0)$ e raio $\sqrt{2}$
   - $z = 4 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 4$ (Circunferência de centro $C(0,0)$ e raio 2

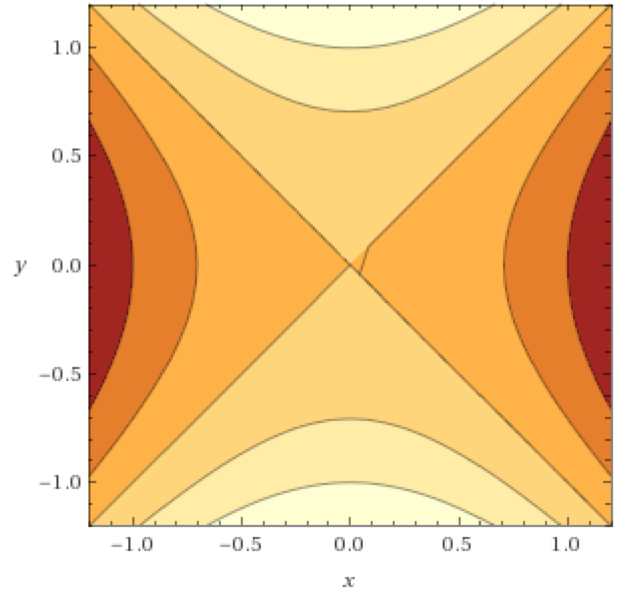
2. Seja a função dada por $f(x, y) = y^2 - x^2$.

As curvas de nível dessa função são dadas por:

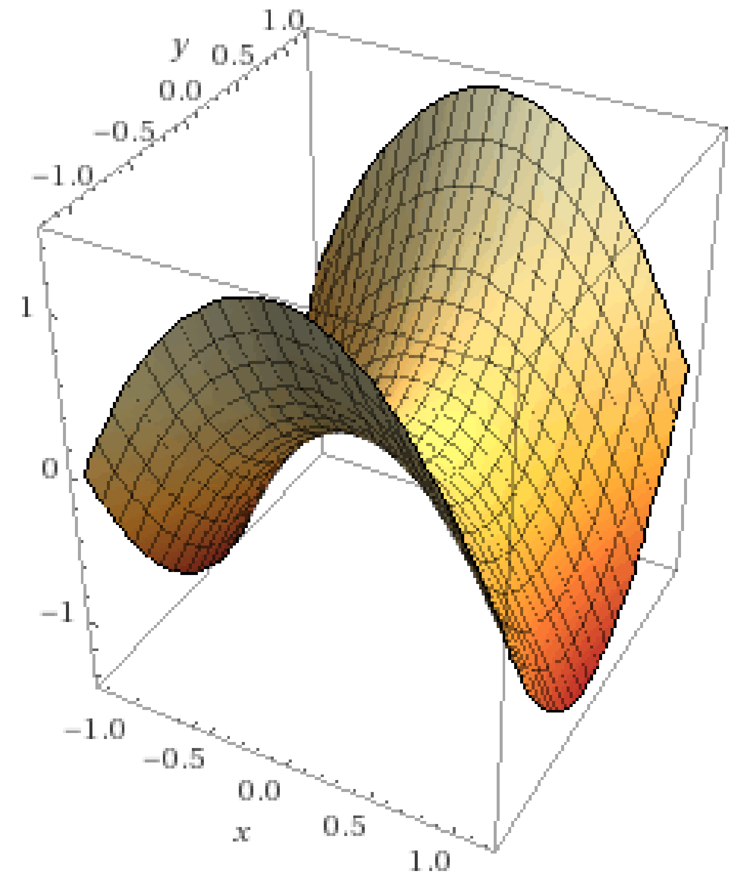
$$C_k: y^2 - x^2 = k$$

- Para $k = 0 \Longrightarrow y = \pm x$, que são as retas bissetrizes do primeiro e segundo quadrantes, respectivamente.
- Para $k \neq 0$ a curva C_k é uma hipérbole.

Podemos visualizar na figura a seguir:



O gráfico de f pode ser visualizado ao lado, o qual representa uma superfície denominada **parabolóide hiperbólico**.



Observando o gráfico vemos que, partindo da origem, em algumas direções, a função é crescente e, em outras, é decrescente. Um ponto em que isso ocorre é chamado **ponto de sela.**

Observações:

- As curvas de nível nunca de interceptam;
- As funções de três ou mais variáveis não podem ser representadas graficamente.

UNIVALI

Escola do Mar,
Ciência e Tecnologia

Cálculo II

Curso de Ciência da Computação
Campus Kobrasol

Prof. Denise Prado Kronbauer
denise.kronbauer@univali.br
denipk@gmail.com

Seja $z = f(x,y)$ uma função real de duas variáveis reais e seja (x_0, y_0) um ponto do domínio de f. Fixando y_0 podemos considerar a função de uma variável $g(x) = f(x, y_0)$.

A derivada dessa função no ponto $x = x_0$, quando existe, denomina-se **derivada parcial** de f, em relação a x, no ponto (x_0, y_0) e indica-se por:

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta x}(x_0, y_0) \quad ou \quad \frac{\vartheta z}{\vartheta x}(x_0, y_0)$$

De maneira análoga, fixando x_0 podemos considerar a função de uma variável $h(y) = f(x_0, y)$. A derivada desta função no ponto $y = y_0$, quando existe, denomina-se **derivada parcial** de f, em relação a y, no ponto (x_0, y_0) e indica-se por:

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta y}(x_0, y_0) \quad ou \quad \frac{\vartheta z}{\vartheta y}(x_0, y_0)$$

Para encontrar $\frac{\vartheta f}{\vartheta x}$ basta considerar y como uma constante na função $f(x, y)$ e aplicar as regras de derivação estudadas na derivação de funções de uma variável.

Para encontrar $\frac{\vartheta f}{\vartheta y}$ deriva-se em relação a y, mantendo x como constante.

Exemplos:

1. Derivar a função $f(x, y) = 3x^3y^2$.

$$f_x = \frac{\vartheta(3x^3y^2)}{\vartheta x} = 9x^2y^2$$

$$f_y = \frac{\vartheta(3x^3y^2)}{\vartheta y} = 6x^3y$$

2. Derivar a função $f(x, y) = x^2 + y^2$.

$$f_x = \frac{\vartheta(x^2 + y^2)}{\vartheta x} = 2x$$

$$f_y = \frac{\vartheta(x^2 + y^2)}{\vartheta y} = 2y$$

3. Derivar a função $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

$$f_x = \frac{\vartheta\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)}{\vartheta x} = \frac{[(x^2+y^2).1 - x.2x]}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{\vartheta\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)}{\vartheta y} = \frac{[(x^2+y^2).0 - .2y]}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

4. Derivar a função $f(x, y) = 3x^2y + 2sen(xy)$

$$f_x = 6xy + 2y\cos(xy)$$

$$f_y = 3x^2 + 2x\cos(xy)$$

5. Derivar a função $f(x, y, z, t) = 3x^2yz^3t^2 + 2sen(x^2yz^3t^2)$

$$f_x = 6xyz^3t^2 + 4xyz^3t^2\cos(x^2yz^3t^2)$$

$$f_y = 3x^2z^3t^2 + 2x^2z^3t^2\cos(x^2yz^3t^2)$$

$$f_z = 9x^2yz^2t^2 + 6x^2yz^2t^2\cos(x^2yz^3t^2)$$

$$f_t = 6x^2yz^3t + 4x^2yz^3t\cos(x^2yz^3t^2)$$

Se f é uma função de duas variáveis x e y, suas derivadas parciais são

$$f_x = \frac{\vartheta \mathrm{f}}{\vartheta x} \quad e \quad f_y = \frac{\vartheta f}{\vartheta_y}$$

Se derivarmos as funções resultantes mais uma vez, obteremos as derivadas parciais de segunda ordem, que são representadas por:

$$\boxed{f_{xx} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} \qquad f_{xy} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x \vartheta y} \qquad f_{yx} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y \vartheta x} \qquad f_{yy} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2}}$$

Exemplos:

1. Calcular as derivadas parciais de segunda ordem de

$$f(x,y) = 4x^2 + 3y^2 - 6xy.$$

$$f_x = \frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 8x - 6y$$

$$f_y = \frac{\vartheta f}{\vartheta y} = 6y - 6x$$

$$f_{xx} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} = 8 \qquad f_{xy} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x \vartheta y} = -6$$

$$f_{yx} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y \vartheta x} = -6 \qquad f_{yy} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2} = 6$$

Exemplos:

2. Calcular as derivadas parciais de segunda ordem de

$$f(x,y) = e^{2x+5y}.$$

$$f_x = \frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 2e^{2x+5y}$$

$$f_{xx} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} = 4e^{2x+5y} \qquad f_{xy} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x \vartheta y} = 10e^{2x+5y}$$

$$f_y = \frac{\vartheta f}{\vartheta y} = 5e^{2x+5y}$$

$$f_{yx} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y \vartheta x} = 10e^{2x+5y} \qquad f_{yy} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2} = 25e\text{^}(2x + 5y)$$

Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável no ponto (x_0, y_0).

A **diferencial total** de f em (x_0, y_0) é definida pela função:

$$dz = \frac{\vartheta f}{\vartheta x}(x_0, y_0)dx + \frac{\vartheta f}{\vartheta y}(x_0, y_0)dy$$

Analogamente para $w = f(x, y, z)$, a diferencial total de f em (x_0, y_0, z_0) é definida pela função:

$$dw = \frac{\vartheta f}{\vartheta x}(x_0, y_0, z_0)dx + \frac{\vartheta f}{\vartheta y}(x_0, y_{0\_}z_0)dy + \frac{\vartheta f}{\vartheta z}(x_0, y_0, z_0)dz$$

Exemplos:

1. Calcular a diferencial de $f(x,y) = x + \sqrt{xy}$ no ponto $(1,1)$

$$dz = \frac{\vartheta f}{\vartheta x}(x_0, y_0)dx + \frac{\vartheta f}{\vartheta y}(x_0, y_0)dy$$

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

$$f_x = 1 + \frac{y}{2\sqrt{xy}} \quad e \quad f_y = \frac{x}{2\sqrt{xy}}$$

$$dz = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1.1}}\right)dx + \left(\frac{1}{2\sqrt{1.1}}\right)dy \quad \rightarrow \quad dz(1,1) = \frac{3}{2}dx + \frac{1}{2}dy$$

2. Diferenciar a função $z = 3x^3y^2 - 2xy^3 + xy - 1$.

$$f_x = \frac{\vartheta(3x^3y^2 - 2xy^3 + xy - 1)}{\vartheta x} = 9x^2y^2 - 2y^3 + y$$

$$f_y = \frac{\vartheta(3x^3y^2 - 2xy^3 + xy - 1)}{\vartheta y} = 6x^3y - 6xy^2 + x$$

Assim, a diferencial total da função é:

$$dz = \frac{\vartheta f}{\vartheta x}dx + \frac{\vartheta f}{\vartheta y}dy$$

$$dz = (9x^2y^2 - 2y^3 + y)dx + (6x^3y - 6xy^2 + x)dy$$

3. Calcule a diferencial da função $f(x, y, z) = 2x + 3xy - 2zy$.

$$f_x = \frac{\vartheta(2x + 3xy - 2zy)}{\vartheta x} = 2 + 3y$$

$$f_y = \frac{\vartheta(2x + 3xy - 2zy)}{\vartheta y} = 3x - 2z$$

$$f_z = \frac{\vartheta(2x + 3xy - 2zy)}{\vartheta z} = -2y$$

Assim, a diferencial da função é:

$$df = (2 + 3y)dx + (3x - 2z)dy - 2ydz$$

Exercícios:

1) Nos exercícios a seguir, encontre as derivadas parciais de 1ª ordem:

$$a)\ f(x,y) = 2x^2y + 3xy^2 - 4x$$

$$b)\ f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2}$$

$$c)\ f(x,y) = sen(2x + y)$$

$$d)\ f(x,y,z,t,w) = xyz.\ln(x^2 + t^2 + w^2)$$

2) Verifique se a função $z = \ln(xy) + x + y$ satisfaz a equação

$$x\frac{\vartheta z}{\vartheta x} - y\frac{\vartheta z}{\vartheta y} = x - y$$

3) Calcular a diferencial das seguintes funções:

a) $z = sen^2(xy)$

b) $z = \ln(x + y^2)$

c) $w = x^2 + y^2 + e^{xyz}$

4) Calcular a diferencial da função $f(x, y, z) = x^2yz + 2x - 2y$ no ponto $\left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$.

5) Seja $f(x, y, z, t) = x^3y^4z^5t^2$, encontrar $\frac{\vartheta^4 f}{\vartheta x \vartheta y \vartheta z \vartheta t}$

Respostas:

1) Derivadas parciais de 1ª ordem:

$$a)\ f_x = 4xy + 3y^2 - 4\ e\ f_y = 2x^2 + 6xy$$

$$b)\ f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-2}}\ e\ f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-2}}$$

$$c)\ f_x = 2\cos(2x + y)\ \ e\ f_y = \cos(2x + y)$$

$$d)\ f_x = yz.\ln(x^2 + t^2 + w^2) + \frac{2x^2yz}{x^2+t^2+w^2};\ f_y = xz\ln(x^2 + t^2 + w^2)$$

$$f_z = xy.\ln(x^2 + t^2 + w^2);\ f_t = \frac{2xyzt}{x^2 + t^2 + w^2}\ e f_w = \frac{2xyzw}{x^2 + t^2 + w^2}$$

2) A equação dada é satisfeita.

3) Diferencial total:

a) $dz = 2\,sen\,(xy)\cos(xy)\,(y\,dx + x\,dy)$

b) $dz = \frac{1}{x+y^2}dx + \frac{2y}{x+y^2}dy$

c) $dw = (2x + yze^{xyz})dx + (2y + xze^{xyz})dy + (xye^{xyz})dz$

4) Diferencial no ponto $\left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$:

$$df\left(1, 2, \frac{1}{2}\right) = 4dx - \frac{3}{2}dy + 2dz$$

5) Diferencial de quarta ordem:

$$\frac{\vartheta^4 f}{\vartheta x \vartheta y \vartheta z \vartheta t} = 120x^2y^3z^4t$$

UNIVALI

Escola do Mar,
Ciência e Tecnologia

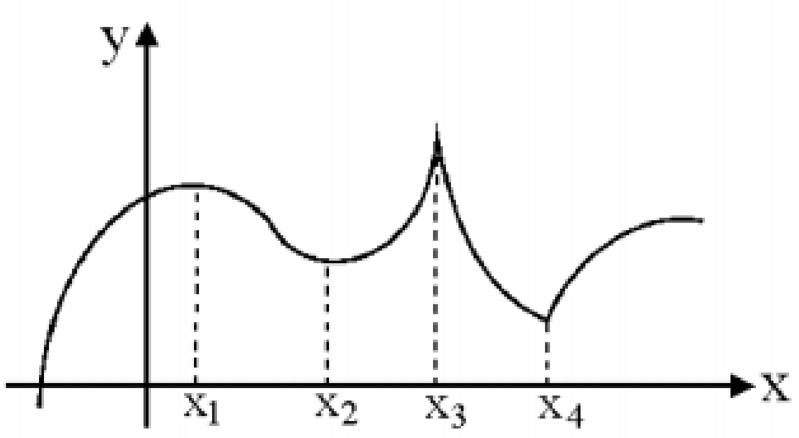
Cálculo II

Curso de Ciência da Computação
Campus Kobrasol

Prof. Denise Prado Kronbauer
denise.kronbauer@univali.br
denipk@gmail.com

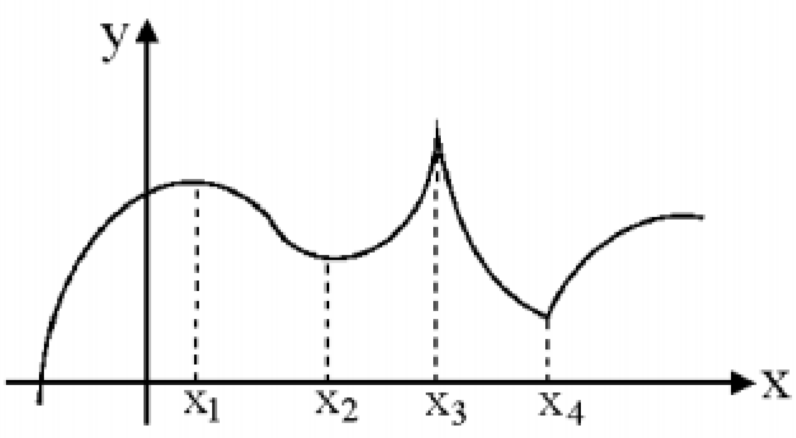
No Cálculo I, estudamos como determinar máximos e mínimos de funções de uma única variável real utilizando os testes da derivada primeira e segunda.

A figura abaixo mostra o gráfico de uma função $y = f(x)$, onde assinalamos os pontos de abscissas x_1, x_2, x_3 e x_4.



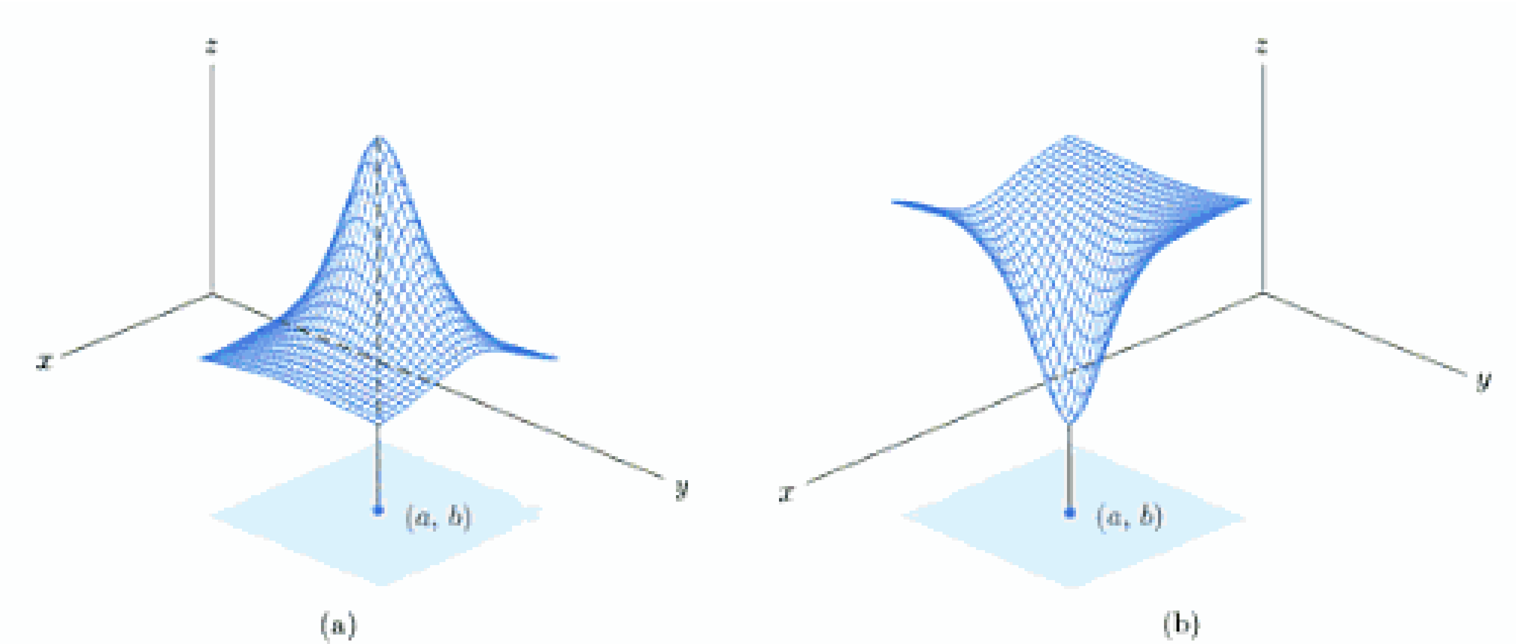
Esses pontos são chamados **pontos extremos** da função, e por meio das derivadas podemos determinar os valores de máximo e mínimo.

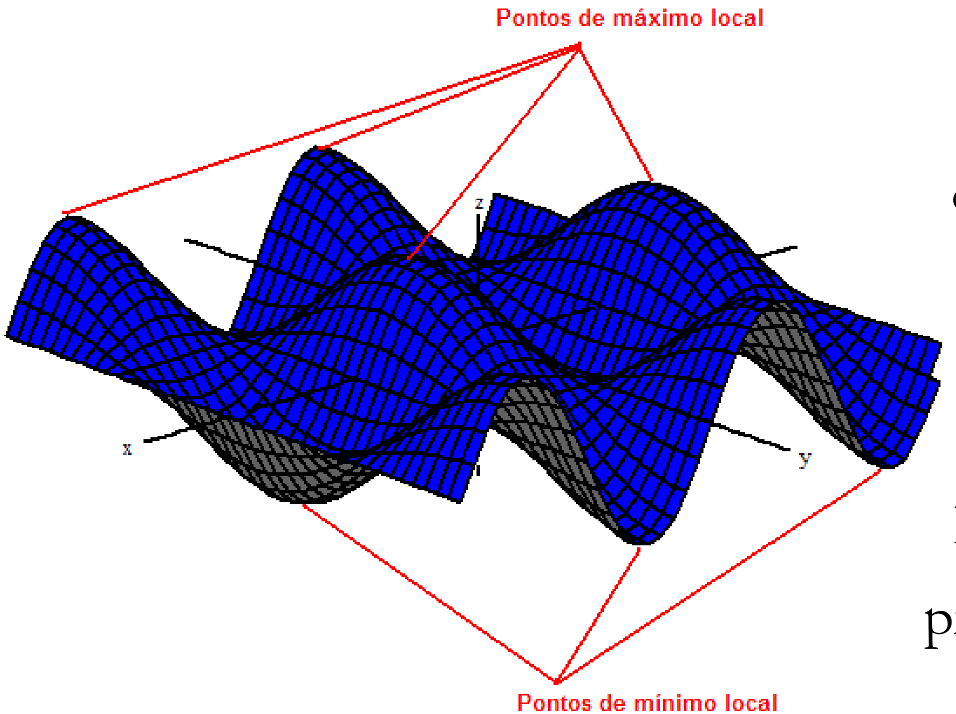
Os pontos x_1 e x_3 são **pontos de máximo relativo (ou local)**, enquanto que $f(x_1)$ e $f(x_3)$ são **valores máximos relativos.** Os pontos x_2 e x_4 são chamados **pontos de mínimo relativos (ou local)**, enquanto que $f(x_2)$ e $f(x_4)$ são os **valores mínimos relativos.**



Além disso, observamos que f é **crescente** para $x < x_1, x \in (x_2, x_3)$ e $x > x_4$, e **decrescente** para $x \in (x_1, x_2)$ e $x \in (x_3, x_4)$.

Vamos agora estender a discussão sobre máximos e mínimos para funções de duas variáveis reais. Para tanto, vamos utilizar as derivadas parciais para localizar os pontos de máximo e mínimo de uma função de duas variáveis.





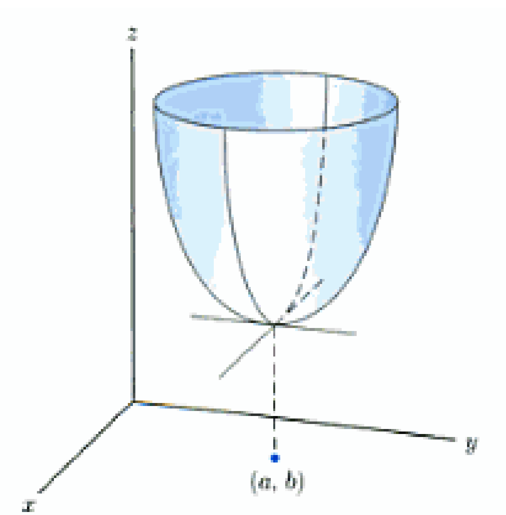
Na figura ao lado, existem ao menos quatro pontos (a, b) nos quais f tem um ***máximo local***, ou seja, onde $f(a, b)$ é maior que os valores próximos de $f(x, y)$. O maior destes picos é chamado de **máximo absoluto**.

Do mesmo modo, f tem ao menos três ***mínimos locais*** onde $f(a, b)$ é menor que os valores próximos. O menor destes pontos é denominado **mínimo absoluto.**

Vamos supor que a função $f(x, y)$ tem um mínimo em $(x, y) = (a, b)$.

Quando y é mantido constante igual a b,

$f(x, y)$ é uma função de x com mínimo em $x = a$.

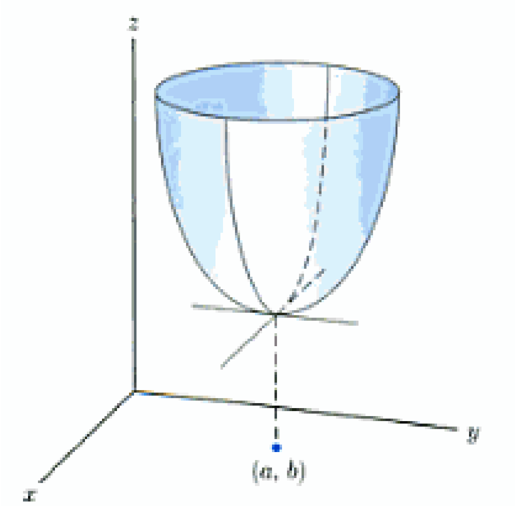


Assim, a reta tangente à curva $z = f(x, y)$ é horizontal em $x = a$, portanto, seu coeficiente angular é zero, ou seja,

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta x}(a, b) = 0$$

Da mesma forma, quando x é mantido constante a a,

$f(x, y)$ é uma função de y com um mínimo em $y = b$.



Assim, sua derivada em relação a y

é zero em $y = b$, isto é,

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta y}(a, b) = 0$$

Considerações similares aplicam-se quando $f(x, y)$

tem um máximo em $(x, y) = (a, b)$.

Exemplo: O gráfico da função abaixo é dado a seguir:

$$f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 3y^2 + 8x - 17y + 30$$

Encontre o ponto (a, b) no qual $f(x, y)$ atinge o seu valor mínimo.

Devemos encontrar os valores de x e y para os quais ambas as derivadas parciais são zero.

As derivadas parciais são:

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 6x - 4y + 8$$

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta y} = -4x + 6y - 17$$

Determinando os valores de $\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 0$ e de $\frac{\vartheta f}{\vartheta y} = 0$ obtemos:

$$6x - 4y + 8 = 0 \text{ ou } y = \frac{6x+8}{4}$$

$$-4x + 6y - 17 = 0 \text{ ou } y = \frac{4x+17}{6}$$

Igualando as duas expressões obtemos:

$$\frac{6x+8}{4} = \frac{4x+17}{6} \quad \rightarrow \quad x = 1 \; e \; y = \frac{7}{2}$$

Se $f(x, y)$ tem um mínimo, ele deve ocorrer quando

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 0 \quad e \quad \frac{\vartheta f}{\vartheta y} = 0$$

Assim, $f(x, y)$ tem um mínimo no ponto

$$(x, y) = \left(1, \frac{7}{2}\right)$$

Ao considerar uma função de duas variáveis, encontramos os pontos (x, y) para os quais $f(x, y)$ pode ter um ponto de máximo ou de mínimo, igualando $\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 0 \ e \ \frac{\vartheta f}{\vartheta y} = 0$ e resolvendo o sistema de equações obtemos x e y.

Entretanto, se nenhuma outra informação adicional a respeito de $f(x, y)$ for fornecida, pode ser difícil determinar se os valores obtidos para as variáveis correspondem a um ponto de máximo ou de mínimo.

No caso de uma função de uma variável, estudamos concavidade e deduzimos o teste da segunda derivada.

Existe um análogo ao teste da derivada segunda para funções de duas variáveis. Enunciamos este teste a seguir:

Teste da Derivada Segunda para Funções de Duas Variáveis:

Suponha que $f(x, y)$ seja uma função e (a, b) seja um ponto no qual

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta x}(a, b) = 0 \quad e \quad \frac{\vartheta f}{\vartheta y}(a, b) = 0$$

E seja,

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} & \dfrac{\vartheta^2 f}{\vartheta y . \vartheta x} \\ \dfrac{\vartheta^2 f}{\vartheta x \vartheta y} & \dfrac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2} \end{vmatrix} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} . \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2} - \left(\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x . \vartheta y} \right)^2$$

$$D(x,y) = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} . \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2} - \left(\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x . \vartheta y} \right)^2$$

1. Se $D(a,b) > 0$ e $\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2}(a,b) > 0$, então $f(x,y)$ tem um mínimo relativo em (a,b).
2. Se $D(a,b) > 0$ e $\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2}(a,b) < 0$, então $f(x,y)$ tem um máximo relativo em (a,b).
3. Se $D(a,b) < 0$, então $f(x,y)$ não tem um máximo ou mínimo relativo em (a,b).
4. Se $D(a,b) = 0$, então nenhuma conclusão pode ser obtida por este teste.

Exemplo: Considere a função

$$f(x,y) = x^3 - y^2 - 12x + 6y + 5$$

Encontre todos os pontos onde máximos ou mínimos ocorrem.

Utilize o teste da derivada segunda para determinar a natureza de cada ponto.

Devemos encontrar os valores de x e y para os quais

ambas as derivadas parciais são zero.

As derivadas parciais são

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 3x^2 - 12$$

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta y} = -2y + 6$$

Determinando os valores de $\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 0 \ e \ \frac{\vartheta f}{\vartheta y} = 0$ obtemos:

$$3x^2 - 12 = 0 \ \rightarrow \ x = \pm 2$$

$$e$$

$$-2y + 6 = 0 \ \rightarrow y = 3$$

Assim, $\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 0 \ e \ \frac{\vartheta f}{\vartheta y} = 0$ quando $(x, y) = (2{,}3)$ e quando $(x, y) = (-2{,}3)$

Para aplicar o teste da segunda derivada, calculamos:

$$\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} = 6x \quad / \quad \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2} = -2 \quad / \quad \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x . \vartheta y} = 0$$

Então:

$$D(x,y) = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} . \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2} - \left(\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x . \vartheta y} .\right)^2 = 6x . (-2) - (0)^2 = -12x$$

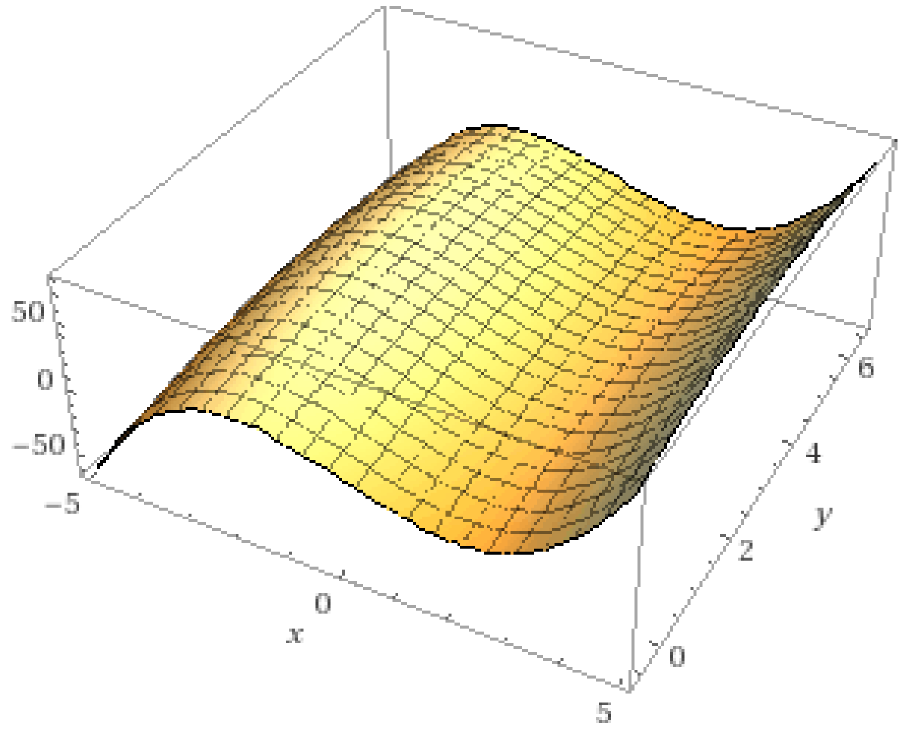
Para o ponto $(2,3)$ teremos $D(2,3) = -12.2 = -24$, assim $f(x, y)$ não tem um máximo ou mínimo relativo em $(2,3)$.

No entanto, para o ponto $(-2,3) = 12.(-2) = 24$, logo, $f(x, y)$ tem um ponto de máximo ou um ponto de mínimo. Para determinar qual deles, calculamos:

$$\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2}(-2,3) = 6.(-2) = -12 < 0$$

Pelo caso 2 do teste da derivada segunda, a função $f(x, y)$ tem um ponto de máximo em $(-2,3)$.

- $(2,3)$ ponto de sela;
- $(-2,3)$ ponto de máximo.



Exemplo: Considere a função

$$f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 - y - xy$$

Encontre todos os pontos onde máximos ou mínimos ocorrem.

Utilize o teste da derivada segunda para determinar a natureza de cada ponto.

As derivadas parciais de primeira ordem são:

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = f_x(x, y) = 2x - 4 - y$$

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta y} = f_y(x, y) = 2y - 1 - x$$

Fazendo $\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 0 \; e \; \frac{\vartheta f}{\vartheta y} = 0$ obtemos:

$$2x - 4 - y = 0 \;\rightarrow y = 2x - 4$$

$$2y - 1 - x = 0 \;\rightarrow y = \frac{1 + x}{2}$$

$$2x - 4 = \frac{1 + x}{2}$$

$$x = 3 \; e \; y = 2$$

Determinemos agora as derivadas de segunda ordem de $f(x, y)$:

$$\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} = f_{xx}(x, y) = 2$$

$$\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2} = f_{yy}(x, y) = 2$$

$$\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x . \vartheta y} = f_{xy}(x, y) = -1$$

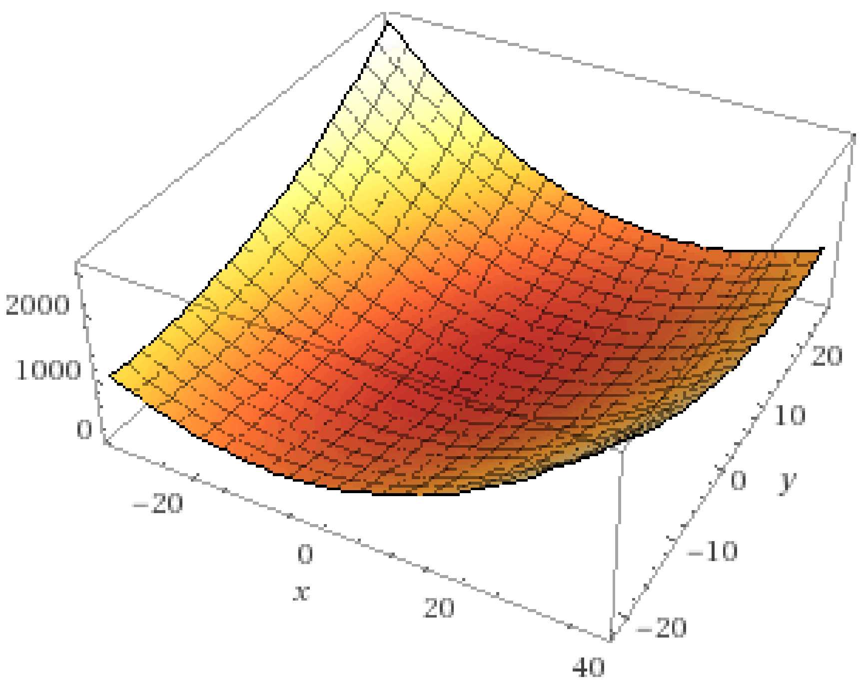
Logo,

$$D(x,y) = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2}.\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2} - \left(\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x.\vartheta y}.\right)^2 = 2.2 - (-1)^2 = 4 - 1 = 3$$

Como $D(a,b) > 0$, $f(x,y)$ tem um mínimo ou um máximo relativo em (a,b)=(3,2).

Para determinar qual deles, precisamos calcular $\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2}(a,b) = f_{xx}(3,2)$

$$\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2}(a,b) = 2 > 0$$



Pelo caso 1 do teste da derivada segunda, a função $f(x,y)$ tem um ponto de mínimo $(3,2)$.

Exercícios:

1) Encontre e classifique os pontos críticos das funções a seguir e classifique-os como pontos de máximo, mínimo ou de sela:

a) $f(x,y) = 4xy - x^4 - 2y^2$

b) $f(x,y) = 3x^4 + 2y^2$

c) $f(x,y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$

d) $f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 6x - 6y$

e) $f(x,y) = x.e^{-x^2-y^2}$

f) $f(x,y) = (2x^2 + y^2).e^{1-x^2-y^2}$

g) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$

Respostas:

1) Pontos críticos e classificação:

a) $P(0,0)$: ponto de sela; $Q(1,1)$ e $R(-1,-1)$ são pontos de máximo;

b) $P(0,0)$: nada podemos concluir com o teste, mas analisando os valores da função, observamos que $f(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$. Portanto, $P(0,0)$ é um ponto de mínimo da função.

c) $P(0,1)$ e $Q(0,-1)$ são pontos de sela; $R(1,0)$ é um ponto mínimo e $S(-1,0)$ é um ponto de máximo.

d) $P(1,-1)$ e $Q(-1,1)$ são pontos de sela; $R(1,1)$ é um ponto mínimo e $S(-1,-1)$ é um ponto de máximo.

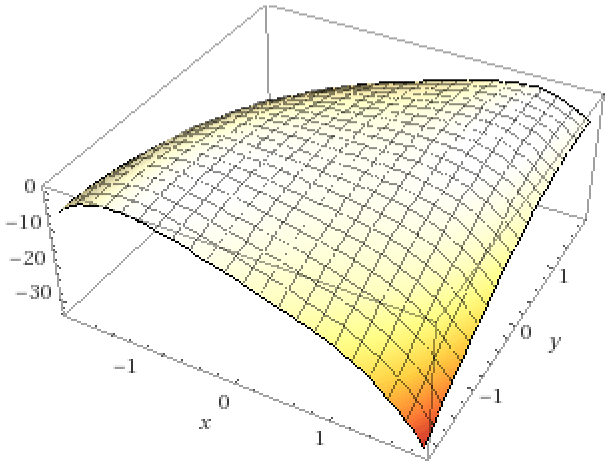
Respostas:

e) $P(0,1)$ e $Q(0,-1)$ são pontos de sela; $R(1,0)$ é um ponto mínimo e $S(-1,0)$ é um ponto de máximo.

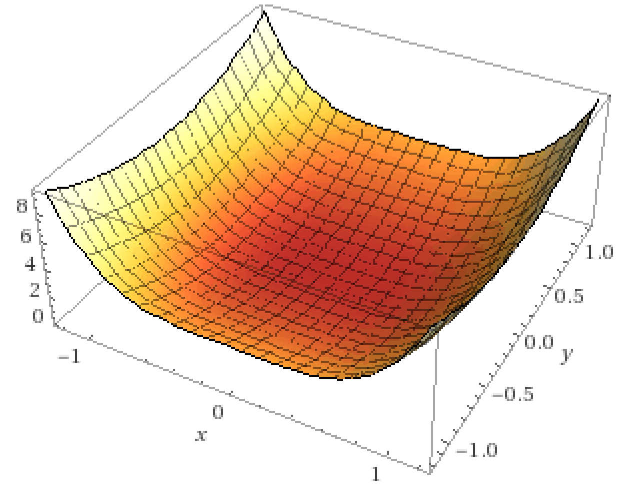
f) $P(0,1)$ e $Q(0,-1)$ são pontos de sela; $R(1,0)$ e $S(-1,0)$ são ponto de máximo.

g) $A(0,1)$; $B(1,0)$; $C(0,-1)$ e $D(-1,0)$ são pontos de sela; $E(1,1)$; $F(1,-1)$; $G(-1,1)$ e $H(-1,-1)$ são pontos mínimos e $I(0,0)$ é um ponto de máximo.

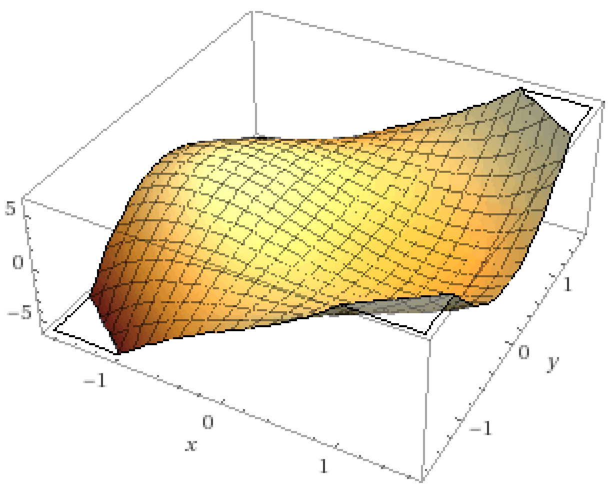
3D plot	$(4xy - x^4) - 2y^2$



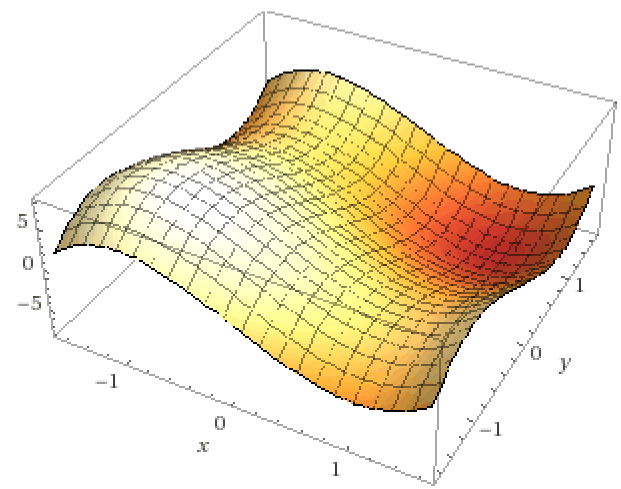
3D plot	$3x^4 + 2y^2$



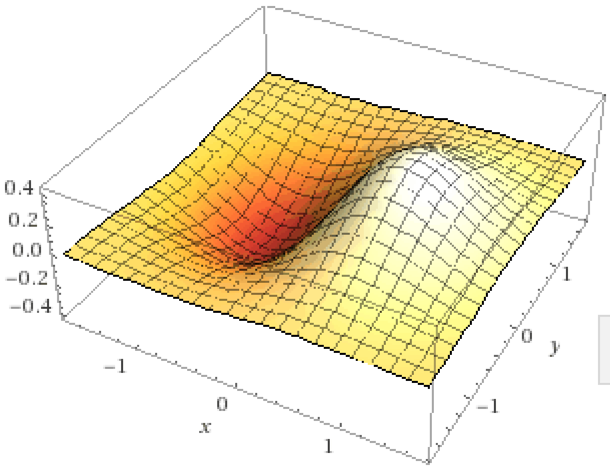
3D plot	$(3xy^2 + x^3) - 3x$



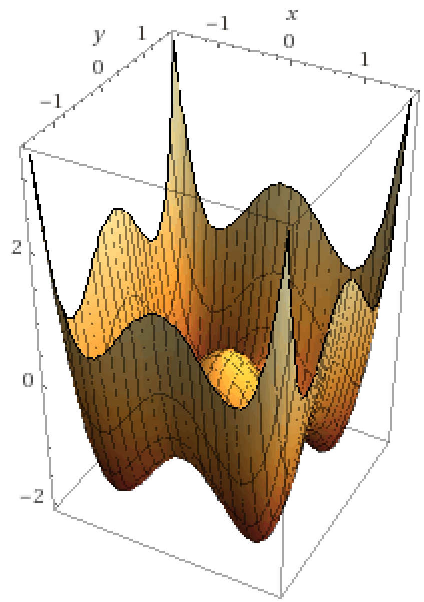
3D plot	$(2x^3 + 2y^3 - 6x) - 6y$



3D plot	$x\, e^{-x^2-y^2}$



3D plot	$(x^4 + y^4 - 2\,x^2) - 2\,y^2$



3D plot	$(2\,x^2 + y^2)\, e^{1-x^2-y^2}$