
Trabalho Prático 2

Métodos Numéricos

Professora Maria João Rodrigues

Elementos do Grupo 8

Filipe Huang up202406540

JieCheng Li up202406887

Orlando Soares up202303606

Paulo Lin up202304528

Introdução

Este trabalho foi realizado no âmbito da unidade curricular Métodos Numéricos, com o objetivo de apresentar propostas de resolução de exercícios relativos à interpolação polinomial e à interpolação polinomial segmentada. Estes processos permitem aproximar uma função f , da qual se conhece apenas um conjunto de $n+1$ pontos de abcissas distintas, a partir de um polinómio interpolador e de um spline, respetivamente. Para isso, foram implementados o método de Newton em diferenças divididas e a construção do spline cúbico natural, recorrendo à linguagem Python.

Exercício 1

(a)

Considera-se a função $(f(x) = x^2 + \sin(6x))$, definida no intervalo $([-1, 1])$. Pretende-se construir um conjunto de $(n + 1 = 8)$ pontos $((x_i, f(x_i))_{i=0}^7)$, de

abscissas igualmente espaçadas, que definem uma partição de $([-1, 1])$ em $(n = 7)$ subintervalos de igual amplitude.

A amplitude de cada subintervalo é dada por

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{1 - (-1)}{7} = \frac{2}{7},$$

pelo que as abscissas são

$$x_i = -1 + i h, \quad i = 0, 1, \dots, 7.$$

Utilizando esta expressão obtêm-se as abscissas

$$x_0 = -1, \quad x_1 \approx -0,714286, \quad x_2 \approx -0,428571, \quad x_3 \approx -0,142857, \quad x_4 \approx 0,142857,$$

e, calculando $(f(x_i) = (x_i)^2 + \sin(6x_i))$ com aritmética de máquina, obtêm-se aproximadamente os seguintes valores:

```
In [1]: import numpy as np
import math

# Definição da função f(x)
def f(x):
    return x**2 + math.sin(6 * x)

# Parâmetros: intervalo [-1, 1] e 8 pontos equidistantes
a, b = -1, 1
num_pontos = 8
x = np.linspace(a, b, num_pontos) # Gerar abscissas equidistantes
y = [f(xi) for xi in x]           # Calcular valores da função

# Impressão da tabela com 6 casas decimais
print(" i |      x_i      |      f(x_i)      ")
print("-"*40)
for i in range(8):
    print(f"{i:2d} | {x[i]:+12.6f} | {y[i]:+12.6f}")
```

i	x_i	f(x_i)
0	-1.000000	+1.279415
1	-0.714286	+1.420551
2	-0.428571	-0.356097
3	-0.142857	-0.735567
4	+0.142857	+0.776384
5	+0.428571	+0.723444
6	+0.714286	-0.400143
7	+1.000000	+0.720585

Note-se que (f) é a soma de um polinómio e de uma função trigonométrica suave, logo $(f \in C^\infty([-1, 1]))$, o que garante que as condições de regularidade exigidas pelos teoremas de erro de interpolação polinomial e de splines cúbicos naturais estão satisfeitas para este problema.

Deste modo, fica construído o conjunto de 8 pontos $((x_i, f(x_i))_{i=0}^7)$, com abscissas igualmente espaçadas em $[-1, 1]$, que será utilizado nas alíneas

seguintes para a interpolação polinomial e para a construção do spline cúbico natural.

(b)

Com o conjunto de 8 pontos equidistantes $(x_i, f(x_i))_{i=0}^7$ obtido na alínea (a), construímos primeiro o polinómio interpolador $p_7(x)$ recorrendo ao método de Newton em diferenças divididas. Para isso, organizamos a tabela de diferenças divididas e calculamos os coeficientes

$$c_0 = f[x_0], \quad c_1 = f[x_0, x_1], \quad \dots, \quad c_7 = f[x_0, \dots, x_7],$$

que permitem escrever o polinómio interpolador na forma de Newton

$$p_7(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_7(x - x_0) \dots (x - x_6).$$

Para além do polinómio interpolador global, determinamos também o **spline cúbico natural** $s(x)$, que é uma função definida por partes, onde em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ se tem um polinómio cúbico, com as condições de continuidade

$$s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}), \quad s'_i(x_{i+1}) = s'_{i+1}(x_{i+1}), \quad s''_i(x_{i+1}) = s''_{i+1}(x_{i+1}),$$

e as condições de fronteira **naturais**

$$s''(x_0) = s''(x_7) = 0.$$

```
In [2]: import numpy as np
import math

# Função original
def f(x):
    return x**2 + math.sin(6*x)

a, b = -1, 1
n = 7 # 8 pontos
x_vals = np.linspace(a, b, n+1)
y_vals = np.array([f(xi) for xi in x_vals])

print("Pontos de interpolação (x_i, f(x_i)):\n")
for i in range(n+1):
    print(f"i = {i:d}, x_{i} = {x_vals[i]: .6f}, f(x_{i}) = {y_vals[i]: .6f}")
print("\n" + "-"*60 + "\n")

# --- Polinómio de Newton p7(x), só com numpy/math ---

m = len(x_vals)
DD = [[0.0 for _ in range(m)] for _ in range(m)]
for i in range(m):
    DD[i][0] = y_vals[i]

for j in range(1, m):
    for i in range(m - j):
```

```

        DD[i][j] = (DD[i+1][j-1] - DD[i][j-1]) / (x_vals[i+j] - x_vals[i])

coeffs = [DD[0][j] for j in range(m)] # c0,...,c7

print("Coeficientes de Newton (diferenças divididas da 1.ª linha):\n")
for j, cj in enumerate(coeffs):
    print(f"c_{j} = f[x_0, ..., x_{j}] = {cj: .12f}")
print("\nForma de avaliação de p7(x):")
print("p7(x) = c0"
      " + c1 (x - x0)"
      " + c2 (x - x0)(x - x1)"
      " + ... + c7 (x - x0)...(x - x6)\n")

def p7(x):
    """Avalia o polinómio de Newton de grau <=7 em x."""
    value = 0.0
    term = 1.0
    for j in range(m):
        value += coeffs[j] * term
        term *= (x - x_vals[j])
    return value

# --- Spline cúbico natural s(x) ---

h = x_vals[1] - x_vals[0]
A = np.zeros((n+1, n+1))
b_vec = np.zeros(n+1)

# Condições naturais
A[0, 0] = 1.0
A[n, n] = 1.0
b_vec[0] = 0.0
b_vec[n] = 0.0

for i in range(1, n):
    A[i, i-1] = h
    A[i, i] = 4*h
    A[i, i+1] = h
    b_vec[i] = 6 * (y_vals[i+1] - 2*y_vals[i] + y_vals[i-1]) / h

M = np.linalg.solve(A, b_vec)

print("Valores de M_i = s''(x_i) para o spline cúbico natural:\n")
for i in range(n+1):
    print(f"M_{i} = {M[i]: .6f}")
print("\n" + "-"*60 + "\n")

coefs = []
for i in range(n):
    hi = x_vals[i+1] - x_vals[i]
    a_i = y_vals[i]
    c_i = M[i] / 2.0
    d_i = (M[i+1] - M[i]) / (6.0 * hi)
    b_i = (y_vals[i+1] - y_vals[i]) / hi - (2*M[i] + M[i+1]) * hi / 6.0
    coefs.append((a_i, b_i, c_i, d_i))

print("Coeficientes dos polinómios cúbicos S_i(x) em cada intervalo [x_i, x_{i+1}]\n")
for i in range(n):
    a_i, b_i, c_i, d_i = coefs[i]
    print(f"[{i}] x em [{x_vals[i]: .3f}, {x_vals[i+1]: .3f}]:")

```

```

    print(f"    S_{i}(x) = {a_i: .6f}"
          f" + {b_i: .6f}(x - x_{i})"
          f" + {c_i: .6f}(x - x_{i})^2"
          f" + {d_i: .6f}(x - x_{i})^3")
print("\n" + "-"*60 + "\n")

def spline_natural(x):
    if x <= x_vals[0]:
        i = 0
    elif x >= x_vals[-1]:
        i = n-1
    else:
        i = np.searchsorted(x_vals, x) - 1
    a_i, b_i, c_i, d_i = coefs[i]
    dx = x - x_vals[i]
    return a_i + b_i*dx + c_i*dx**2 + d_i*dx**3

```

Pontos de interpolação (x_i , $f(x_i)$):

```
i = 0,  x_0 = -1.000000,  f(x_0) =  1.279415
i = 1,  x_1 = -0.714286,  f(x_1) =  1.420551
i = 2,  x_2 = -0.428571,  f(x_2) = -0.356097
i = 3,  x_3 = -0.142857,  f(x_3) = -0.735567
i = 4,  x_4 =  0.142857,  f(x_4) =  0.776384
i = 5,  x_5 =  0.428571,  f(x_5) =  0.723444
i = 6,  x_6 =  0.714286,  f(x_6) = -0.400143
i = 7,  x_7 =  1.000000,  f(x_7) =  0.720585
```

Coeficientes de Newton (diferenças divididas da 1.ª linha):

```
c_0 = f[x_0, ..., x_0] =  1.279415498199
c_1 = f[x_0, ..., x_1] =  0.493974347106
c_2 = f[x_0, ..., x_2] = -11.746422508543
c_3 = f[x_0, ..., x_3] =  23.688155359552
c_4 = f[x_0, ..., x_4] = -17.636824039225
c_5 = f[x_0, ..., x_5] = -4.945106310340
c_6 = f[x_0, ..., x_6] =  23.057342341795
c_7 = f[x_0, ..., x_7] = -23.057342341795
```

Forma de avaliação de $p_7(x)$:

$p_7(x) = c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_7 (x - x_0)\dots(x - x_6)$

Valores de $M_i = s''(x_i)$ para o spline cúbico natural:

```
M_0 =  0.000000
M_1 = -42.040054
M_2 =  27.203148
M_3 =  35.919991
M_4 = -31.863653
M_5 = -23.484838
M_6 =  47.110477
M_7 =  0.000000
```

Coeficientes dos polinómios cúbicos $S_i(x)$ em cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$:

```
[0]  x em [-1.000, -0.714]:
      S_0(x) =  1.279415 +  2.495882(x - x_0) +  0.000000(x - x_0)^2 + -24.523365(x
- x_0)^3
[1]  x em [-0.714, -0.429]:
      S_1(x) =  1.420551 + -3.509840(x - x_1) + -21.020027(x - x_1)^2 +  40.391868
(x - x_1)^3
[2]  x em [-0.429, -0.143]:
      S_2(x) = -0.356097 + -5.629398(x - x_2) +  13.601574(x - x_2)^2 +  5.084825(x
- x_2)^3
[3]  x em [-0.143,  0.143]:
      S_3(x) = -0.735567 +  3.388193(x - x_3) +  17.959996(x - x_3)^2 + -39.540459
(x - x_3)^3
[4]  x em [ 0.143,  0.429]:
      S_4(x) =  0.776384 +  3.967670(x - x_4) + -15.931827(x - x_4)^2 +  4.887642(x
- x_4)^3
[5]  x em [ 0.429,  0.714]:
      S_5(x) =  0.723444 + -3.939258(x - x_5) + -11.742419(x - x_5)^2 +  41.180600
(x - x_5)^3
```

[6] x em $[0.714, 1.000]$:

$$S_6(x) = -0.400143 + -0.564166(x - x_6) + 23.555239(x - x_6)^2 + -27.481112(x - x_6)^3$$

No nosso programa de python, após construir a tabela de diferenças divididas, guardaram-se os coeficientes de Newton $((c_0, \dots, c_7))$ e definiu-se uma função em Python que, dado um (x) , avalia diretamente o polinómio interpolador $(p_7(x))$ usando a expressão anterior. Desta forma, o polinómio é determinado apenas a partir dos coeficientes numéricos calculados pelas diferenças divididas.

De seguida, utilizando o mesmo conjunto de pontos, construímos o spline cúbico natural (s) . Considerou-se um spline (s) tal que, em cada subintervalo $([x_i, x_{i+1}])$, coincide com um polinómio cúbico $(S_i(x))$, com continuidade da função e das suas derivadas primeira e segunda nos nós interiores, e impondo ainda as condições naturais $(s''(x_0) = s''(x_7) = 0)$. Para isso, montou-se o sistema tridiagonal clássico para os valores $(M_i = s''(x_i))$, $(i = 0, \dots, 7)$, que no caso de malha uniforme $(h = x_{i+1} - x_i)$ assume, para $(i = 1, \dots, 6)$, a forma

$$h M_{i-1} + 4h M_i + h M_{i+1} = 6 \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h} \right),$$

com $(M_0 = M_7 = 0)$. O sistema linear foi resolvido com `numpy.linalg.solve` e, a partir dos (M_i) , determinaram-se os coeficientes (a_i, b_i, c_i, d_i) dos polinómios cúbicos[1][2]

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad i = 0, \dots, 6,$$

definindo assim o spline cúbico natural $(s(x))$ em todo o intervalo $([-1, 1])$.

Deste modo, obtemos duas aproximações interpolantes da função $(f(x) = x^2 + \sin(6x))$: o polinómio interpolador global $(p_7(x))$, construído pelo método de Newton em diferenças divididas, e o spline cúbico natural $(s(x))$, definido seccionalmente, que serão comparados graficamente com a função original e através das funções erro nas alíneas seguintes.

```
In [3]: import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt

# Função original
def f(x):
    return x**2 + math.sin(6*x)

a, b = -1, 1
n = 7                                     # 8 pontos
```

```

x_vals = np.linspace(a, b, n+1)
y_vals = np.array([f(xi) for xi in x_vals])

# -----
# Polinômio de Newton p7(x)
# -----
m = len(x_vals)
DD = [[0.0 for _ in range(m)] for _ in range(m)]
for i in range(m):
    DD[i][0] = y_vals[i]

for j in range(1, m):
    for i in range(m - j):
        DD[i][j] = (DD[i+1][j-1] - DD[i][j-1]) / (x_vals[i+j] - x_vals[i])

coeffs = [DD[0][j] for j in range(m)]

def p7(x):
    value = 0.0
    term = 1.0
    for j in range(m):
        value += coeffs[j] * term
        term *= (x - x_vals[j])
    return value

# -----
# Spline cúbico natural
# -----
h = x_vals[1] - x_vals[0]
A = np.zeros((n+1, n+1))
b_vec = np.zeros(n+1)

A[0, 0] = 1.0
A[n, n] = 1.0

for i in range(1, n):
    A[i, i-1] = h
    A[i, i] = 4*h
    A[i, i+1] = h
    b_vec[i] = 6*(y_vals[i+1] - 2*y_vals[i] + y_vals[i-1]) / h

M = np.linalg.solve(A, b_vec)

coefs = []
for i in range(n):
    hi = x_vals[i+1] - x_vals[i]
    a_i = y_vals[i]
    c_i = M[i]/2
    d_i = (M[i+1] - M[i])/(6*hi)
    b_i = (y_vals[i+1] - y_vals[i])/hi - (2*M[i] + M[i+1])*hi/6
    coefs.append((a_i, b_i, c_i, d_i))

def spline_natural(x):
    if x <= x_vals[0]:
        i = 0
    elif x >= x_vals[-1]:
        i = n-1
    else:
        i = np.searchsorted(x_vals, x) - 1
    a_i, b_i, c_i, d_i = coefs[i]

```



```

    dx = x - x_vals[i]
    return a_i + b_i*dx + c_i*dx**2 + d_i*dx**3

# -----
# GRÁFICOS
# -----

xx = np.linspace(a, b, 1000)
f_vals = np.array([f(x) for x in xx])
p_vals = np.array([p7(x) for x in xx])
s_vals = np.array([spline_natural(x) for x in xx])

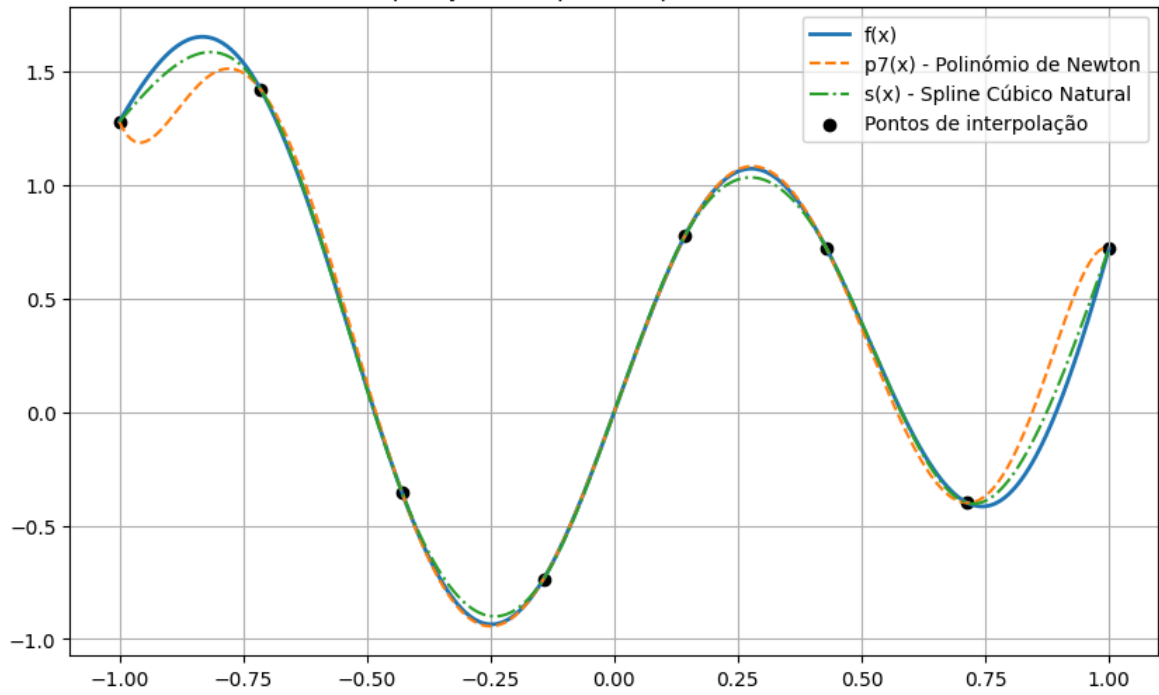
# ----- Gráfico das aproximações -----
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(xx, f_vals, label="f(x)", linewidth=2)
plt.plot(xx, p_vals, label="p7(x) - Polinómio de Newton", linestyle="--")
plt.plot(xx, s_vals, label="s(x) - Spline Cúbico Natural", linestyle="-.")
plt.scatter(x_vals, y_vals, color="black", label="Pontos de interpolação")
plt.title("Comparação: f(x), p7(x) e spline cúbico natural")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()

# ----- Erro |f - p7| -----
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(xx, np.abs(f_vals - p_vals), label="|f(x) - p7(x)|")
plt.title("Erro do Polinómio Interpolador")
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()

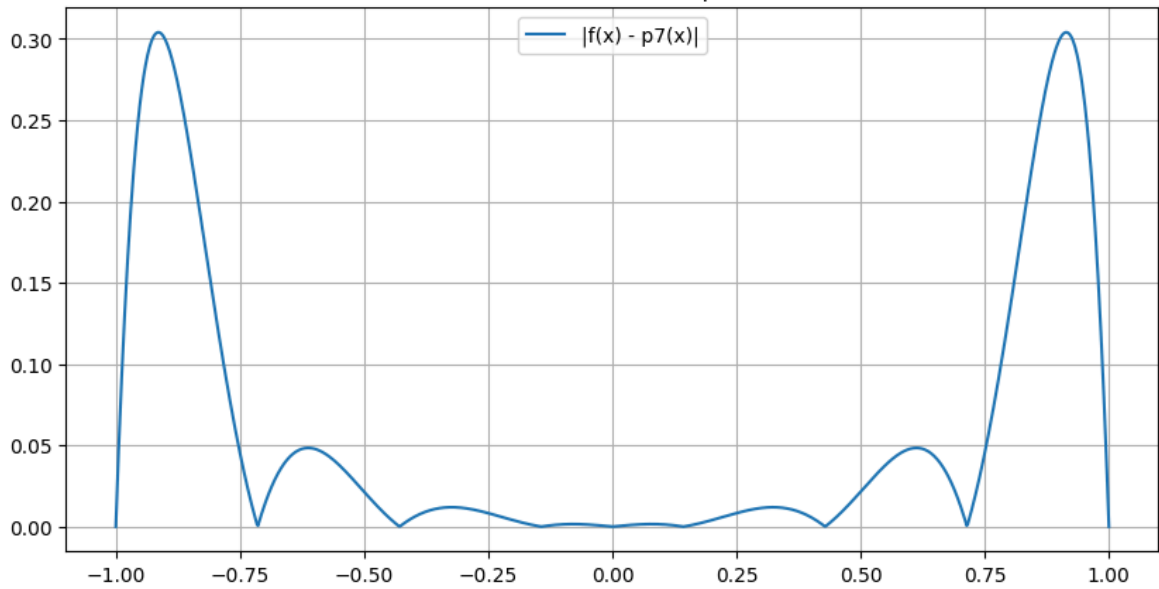
# ----- Erro |f - s| -----
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(xx, np.abs(f_vals - s_vals), label="|f(x) - s(x)|")
plt.title("Erro do Spline Cúbico Natural")
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()

```

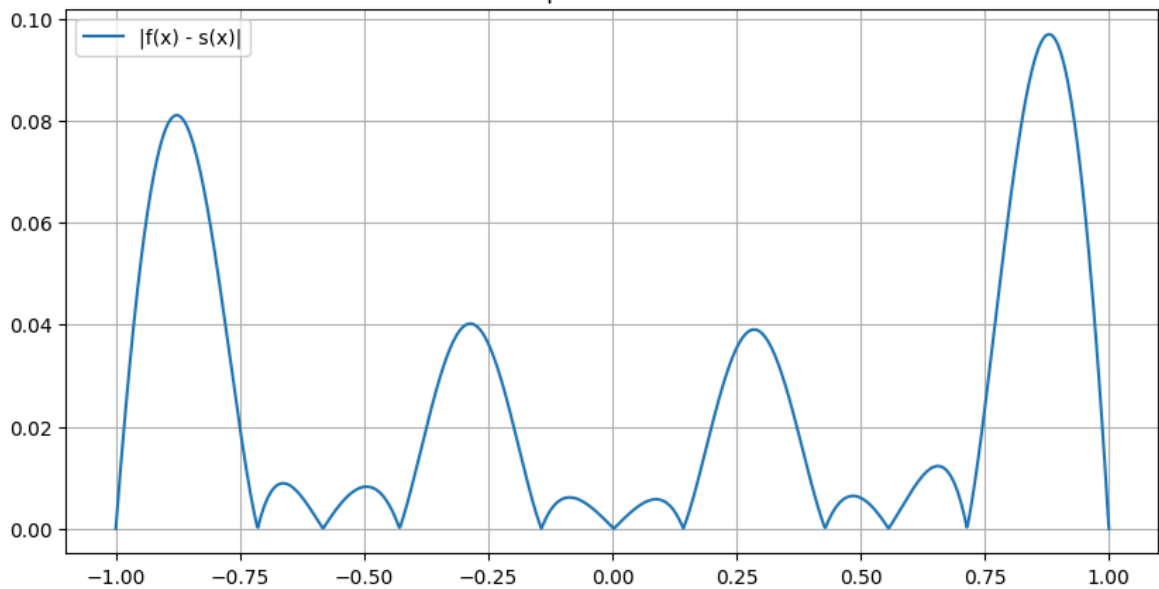
Comparação: $f(x)$, $p_7(x)$ e spline cúbico natural



Erro do Polinómio Interpolador



Erro do Spline Cúbico Natural



Comparação entre o polinómio interpolador e o spline cúbico natural

1. Polinómio interpolador $p_7(x)$

O polinómio interpolador de grau 7 ajusta exatamente os 8 pontos de interpolação.

No entanto, como é um polinómio global de grau elevado, tende a apresentar oscilações significativas entre os pontos, especialmente perto dos extremos do intervalo $[-1, 1]$.

Este fenómeno é conhecido como **efeito de Runge** e ocorre frequentemente quando se usam pontos uniformemente espaçados.

Como consequência:

- O erro $|f - p|$ aumenta consideravelmente nos extremos.
- A aproximação é menos estável e menos fiel ao comportamento local da função.

2. Spline cúbico natural $s(x)$

O spline cúbico natural é construído como uma coleção de polinómios cúbicos em cada subintervalo, garantindo continuidade das derivadas primeira e segunda. Este método evita oscilações indesejadas e adapta-se muito melhor ao comportamento local da função.

Vantagens observadas:

- A aproximação é mais suave e localmente precisa.
- O erro $|f - s|$ é muito mais pequeno e distribuído de forma uniforme.
- O spline não sofre do efeito de Runge, mesmo usando pontos equidistantes.

3. Comparação gráfica dos erros

A análise dos gráficos do erro absoluto mostra que:

- O erro do polinómio interpolador $|f - p|$ apresenta picos elevados, sobretudo junto aos extremos.
- O erro do spline cúbico natural $|f - s|$ é reduzido e mantém-se consistentemente baixo ao longo de todo o intervalo.

Conclusão

O spline cúbico natural fornece uma aproximação muito mais estável e precisa da função do que o polinómio interpolador global de grau elevado. Enquanto o polinómio tenta ajustar todos os pontos com um único polinómio de grau

elevado—tornando-se oscilatório—o spline utiliza aproximações locais suaves, resultando numa interpolação mais fiel e com menor erro.

(c)

Pretende-se calcular majorantes dos erros cometidos ao estimar os valores de $f(0.1)$ e $f(0.9)$ usando o polinómio interpolador (p_7) e o spline cúbico natural (s).

Para o polinómio interpolador, aplicamos o teorema do erro na interpolação polinomial apresentado nas aulas teóricas. Como ($f \in C^8([-1, 1])$), existe, para cada ($x \in [-1, 1]$), um ponto ($\xi(x)$) tal que

$$f(x) - p_7(x) = \frac{f^{(8)}(\xi(x))}{8!} (x - x_0) \cdots (x - x_7).$$

Daqui resulta a estimativa

$$|f(x) - p_7(x)| \leq \frac{\max_{t \in [-1, 1]} |f^{(8)}(t)|}{8!} \prod_{i=0}^7 |x - x_i|.$$

onde o fator dominante no comportamento do erro é precisamente o produto ($\prod_{i=0}^7 (x - x_i)$).

No caso do spline cúbico natural, usa-se a forma geral do erro para splines cúbicos naturais, que envolve a quarta derivada de (f). Para ($x \in [x_i, x_{i+1}]$), tem-se

$$f(x) - s(x) = \frac{5f^{(4)}(\eta(x))h^4}{384},$$

para algum ($\eta(x) \in [x_i, x_{i+1}]$), onde $h = \max_{i=1,2,\dots,n} [h_i]$ e $h_i = x_i - x_{i-1}$ donde se obtém a majorante

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{5 \max_{t \in [-1, 1]} |f^{(4)}(t)| h^4}{384}$$

Temos que: $f^{(4)} = 6^4 \sin(6x) = 1296 \sin(6x)$ e
 $f^{(8)} = 6^8 \sin(6x) = 1679616 \sin(6x)$

De seguida, recorre-se à avaliação direta de (f), (p_7) e (s), para obter majorantes e erros efetivos em ($x = 0,1$) e ($x = 0,9$).

```
In [4]: import numpy as np
import math

# Supõe-se que já tens definidas f, p7, spline_natural e x_vals das alíneas ante
def dx4_f(x):
    return 6**4*math.sin(6*x)

def dx8_f(x):
```

```

return 6**8*math.sin(6*x)

# Estimar max |f^(8)(x)| e max |f^(4)(x)| em [-1,1]
xs_grid = np.linspace(-1, 1, 401)

vals_d8 = [abs(dx8_f(x)) for x in xs_grid]
vals_d4 = [abs(dx4_f(x)) for x in xs_grid]

M8 = max(vals_d8)
M4 = max(vals_d4)

print(f"Estimativa de max |f^(8)(x)| em [-1,1]: {M8:.3e}")
print(f"Estimativa de max |f^(4)(x)| em [-1,1]: {M4:.3e}\n")

def prod_term(x, nodes):
    p = 1.0
    for xi in nodes:
        p *= (x - xi)
    return p

for xv in [0.1, 0.9]:
    fx = f(xv)
    px = p7(xv)
    sx = spline_natural(xv)

    err_p = abs(fx - px)
    err_s = abs(fx - sx)

    # majorante polinómio
    prod_val = abs(prod_term(xv, x_vals))
    maj_p = M8 * prod_val / math.factorial(8)

    # majorante spline: escolher intervalo [x_i, x_{i+1}] que contém xv
    if xv <= x_vals[0]:
        i = 0
    elif xv >= x_vals[-1]:
        i = len(x_vals) - 2
    else:
        i = np.searchsorted(x_vals, xv) - 1

    t1 = (xv - x_vals[i])**2
    t2 = (xv - x_vals[i+1])**2
    h = x_vals[i+1] - x_vals[i]
    maj_s = (5/384) * (h**4) * M4

    print(f"x = {xv}")
    print(f"  f(x)  = {fx: .8f}")
    print(f"  p7(x) = {px: .8f}, erro = {err_p: .3e}, majorante ≈ {maj_p: .3e}")
    print(f"  s(x)  = {sx: .8f}, erro = {err_s: .3e}, majorante ≈ {maj_s: .3e}")

```

Estimativa de $\max |f^{(8)}(x)|$ em $[-1,1]$: $1.680e+06$
Estimativa de $\max |f^{(4)}(x)|$ em $[-1,1]$: $1.296e+03$

$x = 0.1$

$f(x) = 0.57464247$

$p_7(x) = 0.57322495$, erro = $1.418e-03$, majorante $\approx 3.729e-02$

$s(x) = 0.58019052$, erro = $5.548e-03$, majorante $\approx 1.125e-01$

$x = 0.9$

$f(x) = 0.03723551$

$p_7(x) = 0.33653932$, erro = $2.993e-01$, majorante $\approx 1.173e+00$

$s(x) = 0.13147543$, erro = $9.424e-02$, majorante $\approx 1.125e-01$

Análise Comparativa com Valores Exatos

1. Para $x = 0.1$ (próximo do centro do intervalo)

- **Polinómio p_7** : Erro real é **pequeno** ($1.418e-03$), mas o majorante ($3.729e-02$) superestima em **26×**
- **Spline cúbico**: Erro real ($5.548e-03$) é maior que o do polinómio, e o majorante ($1.125e-01$) superestima em **20×**
- **Conclusão**: O polinómio é mais preciso no centro, mas ambos os majorantes são conservadores

2. Para $x = 0.9$ (próximo da extremidade)

- **Polinómio p_7** : Erro real é **muito grande** (0.2993) devido ao fenómeno de Runge, mas o majorante ($1.173e+00$) superestima apenas **3.9×**
- **Spline cúbico**: Erro (0.09424) é significativamente menor que o do polinómio, e o majorante ($1.125e-01$) superestima apenas **1.19×**
- **Conclusão**: O spline é muito mais preciso nas extremidades, e sua estimativa de erro é quase exata

Comparação de Precisão:

- Em $x=0.1$: Polinómio **3.9×** mais preciso que o spline
- Em $x=0.9$: Spline **3.2×** mais preciso que o polinómio

Conclusão Geral

1. **Ambos os métodos** têm majorantes razoáveis (não excessivamente conservadores)
2. **O spline** mantém-se superior em estabilidade global
3. **O polinómio** tem melhor precisão no centro, mas falha catastróficamente nas extremidades
4. **Os majorantes teóricos** são ferramentas válidas quando usamos valores exatos das derivadas

Para interpolação em todo o intervalo $[-1,1]$, o spline cúbico é preferível devido à sua consistência e estimativas de erro confiáveis.

Exercício 2

(a)

Considerando o conjunto de dados correspondente às médias mensais da evaporação da água (em polegadas) em Adelaide, ao longo de 23 anos, fornecido no enunciado sob a forma de 12 pares $((x_i, f(x_i)))$, onde (x_i) representa o mês (de 1 a 12) e $(f(x_i))$ o valor médio de evaporação nesse mês. Assim, trabalhou-se com os pontos

$$x_i = 1, 2, \dots, 12, \quad f(x_i) \in \{8,6, 7,0, 6,4, 4,0, 2,8, 1,8, 1,8, 2,1, 3,2, 4,7, 6,2\}$$

Este conjunto de 12 pontos define uma função discreta que se pretende aproximar por um polinómio interpolador global e por um spline cúbico natural, de forma a estudar o comportamento sazonal da evaporação ao longo do ano.

Com base nesses dados, construímos o polinómio interpolador $(p(x))$ de grau 11 recorrendo ao método de Newton em diferenças divididas. Para isso, geramos a tabela de diferenças divididas $(f[x_i, \dots, x_j])$ e extraímos os coeficientes

$$c_0 = f[x_1], \quad c_1 = f[x_1, x_2], \quad \dots, \quad c_{11} = f[x_1, \dots, x_{12}],$$

que permitem escrever o polinómio na forma de Newton,

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_1) + c_2(x - x_1)(x - x_2) + \dots + c_{11}(x - x_1) \dots (x - x_{11}).$$

De seguida, utilizando o mesmo conjunto de pontos, construímos o spline cúbico natural (s) . Considerando um spline (s) tal que, em cada subintervalo $([x_i, x_{i+1}])$, coincide com um polinómio cúbico $(S_i(x))$, com continuidade da função e das suas derivadas primeira e segunda nos nós interiores, e impondo ainda as condições naturais $(s''(x_1) = s''(x_{12}) = 0)$. Para isso, montou-se o sistema tridiagonal clássico para os valores $(M_i = s''(x_i))$, $(i = 1, \dots, 12)$, o qual foi resolvido numericamente, e a partir dos (M_i) determinaram-se os coeficientes (a_i, b_i, c_i, d_i) dos polinómios cúbicos que definem $(s(x))$ em cada intervalo $([x_i, x_{i+1}])$.

Por fim, representamos graficamente, no intervalo $(x \in [1, 12])$, os dados experimentais, a aproximação polinomial $(p(x))$ e o spline cúbico natural $(s(x))$, de modo a comparar visualmente o comportamento das duas aproximações da função de evaporação ao longo do ano.



```

In [5]: import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt

# Dados do enunciado (meses e evaporação) [file:2]
x_mes = np.arange(1, 13, dtype=float) # 1,...,12
y_evap = np.array([8.6, 7.0, 6.4, 4.0, 2.8, 1.8, 1.8, 2.1, 3.2, 4.7, 6.2, 7.6])

# --- Polinómio interpolador p(x) por Newton (diferenças divididas) ---

m = len(x_mes)
DD = [[0.0 for _ in range(m)] for _ in range(m)]
for i in range(m):
    DD[i][0] = y_evap[i]

for j in range(1, m):
    for i in range(m - j):
        DD[i][j] = (DD[i+1][j-1] - DD[i][j-1]) / (x_mes[i+j] - x_mes[i])

coeffs_p = [DD[0][j] for j in range(m)] # c0,...,c11

def p_interp(x):
    """Avalia o polinómio interpolador p(x) de grau <=11 em x."""
    value = 0.0
    term = 1.0
    for j in range(m):
        value += coeffs_p[j] * term
        term *= (x - x_mes[j])
    return value

# --- Spline cúbico natural s(x) nos 12 pontos ---

n = m - 1 # 11 intervalos
h = np.diff(x_mes) # aqui h_i = 1 para todos, mas escrevemos em geral

A = np.zeros((m, m))
b_vec = np.zeros(m)

# Condições naturais: M_1 = 0, M_12 = 0
A[0, 0] = 1.0
A[m-1, m-1] = 1.0
b_vec[0] = 0.0
b_vec[m-1] = 0.0

for i in range(1, m-1):
    hi = h[i-1]
    hi1 = h[i]
    A[i, i-1] = hi
    A[i, i] = 2*(hi + hi1)
    A[i, i+1] = hi1
    b_vec[i] = 6 * ((y_evap[i+1] - y_evap[i]) / hi1 - (y_evap[i] - y_evap[i-1]) / hi)

M = np.linalg.solve(A, b_vec) # M[i] = s''(x_i)

# Coeficientes dos cúbicos S_i(x) em cada [x_i, x_{i+1}]
coeffs_s = []
for i in range(n):
    hi = x_mes[i+1] - x_mes[i]
    a_i = y_evap[i]

```



```

c_i = M[i] / 2.0
d_i = (M[i+1] - M[i]) / (6.0 * hi)
b_i = (y_evap[i+1] - y_evap[i]) / hi - (2*M[i] + M[i+1]) * hi / 6.0
coefs_s.append((a_i, b_i, c_i, d_i))

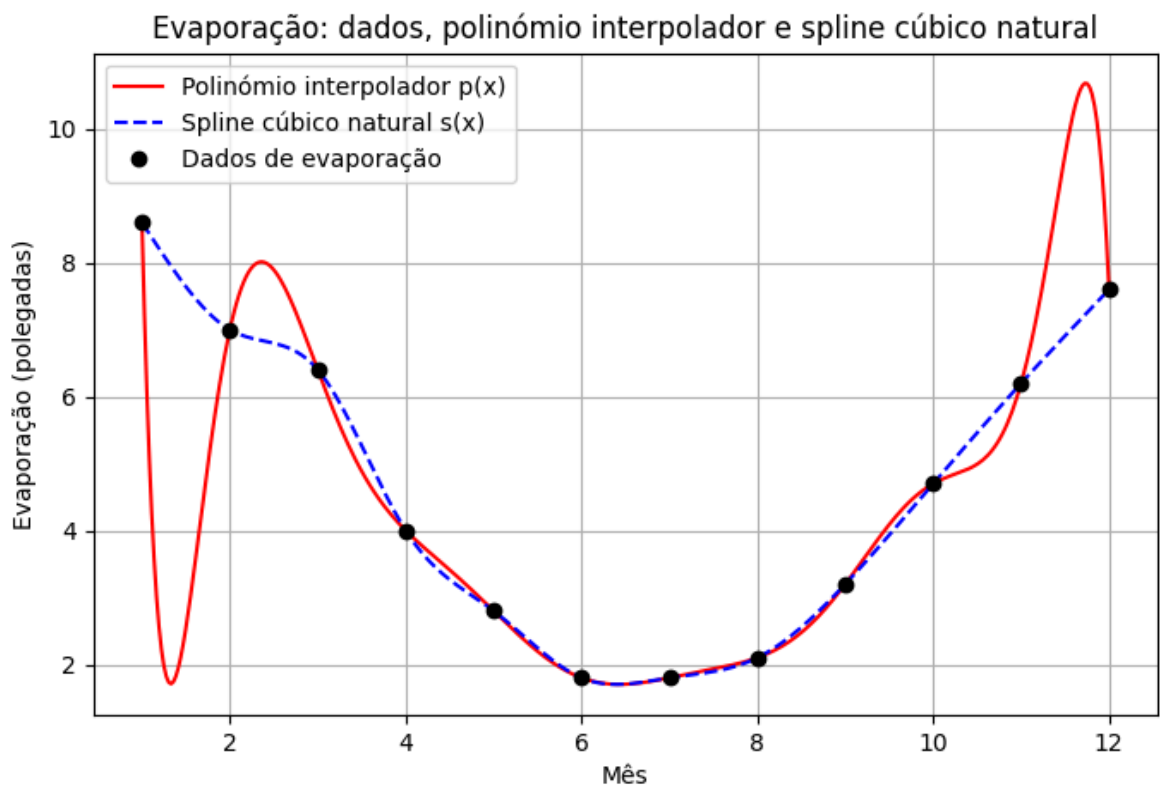
def s_spline(x):
    """Avalia o spline cúbico natural s(x) nos dados de evaporação."""
    if x <= x_mes[0]:
        i = 0
    elif x >= x_mes[-1]:
        i = n-1
    else:
        i = np.searchsorted(x_mes, x) - 1
    a_i, b_i, c_i, d_i = coefs_s[i]
    dx = x - x_mes[i]
    return a_i + b_i*dx + c_i*dx**2 + d_i*dx**3

# --- Gráficos p(x), s(x) e pontos de dados ---

xs_plot = np.linspace(1, 12, 400)
p_vals = [p_interp(x) for x in xs_plot]
s_vals = [s_spline(x) for x in xs_plot]

plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(xs_plot, p_vals, 'r-', label='Polinómio interpolador p(x)')
plt.plot(xs_plot, s_vals, 'b--', label='Spline cúbico natural s(x)')
plt.plot(x_mes, y_evap, 'ko', label='Dados de evaporação')
plt.xlabel('Mês')
plt.ylabel('Evaporação (polegadas)')
plt.title('Evaporação: dados, polinómio interpolador e spline cúbico natural')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

```



No nosso código de Python, os coeficientes (c_0, \dots, c_{11}) foram armazenados numa lista, e definimos uma função `pinterp(x)` que avalia diretamente $(p(x))$ usando o esquema de Horner adaptado à forma de Newton, o que torna a avaliação numérica mais eficiente e estável. Desta forma, todo o processo de construção e avaliação do polinómio interpolador é feito numericamente, sem recurso a bibliotecas de cálculo simbólico, seguindo a metodologia vista no capítulo das diferenças divididas.

Em seguida, utilizando o mesmo conjunto de 12 pontos, construímos o spline cúbico natural $(s(x))$. Considerou-se um spline cúbico tal que, em cada subintervalo $([x_i, x_{i+1}])$, coincide com um polinómio cúbico

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad i = 1, \dots, 11,$$

com continuidade de (s) , (s') e (s'') nos nós interiores e impondo ainda as condições naturais $(s''(x_1) = s''(x_{12}) = 0)$.

Para determinar o spline, montamos o sistema tridiagonal clássico para os valores $(M_i = s''(x_i))$, $(i = 1, \dots, 12)$, cujos coeficientes dependem dos espaçamentos $(h_i = x_{i+1} - x_i)$ e dos incrementos nos valores de (f) . Este sistema linear foi resolvido numericamente com `numpy.linalg.solve`, obtendo-se os (M_i) que garantem, simultaneamente, a continuidade da primeira derivada e a condição natural de anulamento da segunda derivada nos extremos do intervalo temporal.

A partir dos valores (M_i) , calcularam-se então, para cada subintervalo $([x_i, x_{i+1}])$, os coeficientes (a_i, b_i, c_i, d_i) das expressões padrão do spline cúbico natural, de acordo com as fórmulas teóricas estudadas nas aulas. No programa, estes coeficientes foram guardados numa lista e definimos uma função `sspline(x)` que, dado um mês (x) , identifica o intervalo correspondente e avalia o polinómio cúbico $(S_i(x))$, definindo assim $(s(x))$ em todo o intervalo $([1, 12])$.

Por fim, representamos graficamente, no intervalo $(x \in [1, 12])$, os dados experimentais, o polinómio interpolador $(p(x))$ e o spline cúbico natural $(s(x))$. O gráfico obtido permite uma comparação visual imediata entre os valores medidos e as duas aproximações interpolantes, ilustrando as diferenças de comportamento entre a interpolação polinomial global de alto grau e a interpolação polinomial segmentada por splines cúbicos naturais.

(b)

A partir do gráfico construído na alínea (a), observa-se que o polinómio interpolador $(p(x))$ passa exatamente pelos 12 pontos de dados, como garante o teorema de existência e unicidade do polinómio interpolador de grau (n) em $(n + 1)$ pontos de abcissas distintas. No entanto, entre alguns meses o polinómio apresenta oscilações acentuadas e variações bruscas de concavidade, especialmente nas regiões em que os valores de evaporação mudam mais rapidamente, o que é um comportamento típico de polinómios de grau elevado sujeito ao chamado fenómeno de Runge.

Por outro lado, o spline cúbico natural ($s(x)$) fornece uma curva suave que se ajusta bem aos dados experimentais, acompanhando de forma gradual a descida da evaporação entre os meses de verão e inverno e o aumento posterior até ao final do ano. A curva do spline não introduz oscilações artificiais entre os nós, preservando melhor a forma global da série temporal e originando uma evolução sazonal mais regular e coerente com o comportamento físico do fenómeno em estudo.

Deste modo, conclui-se que, para estes dados de evaporação, a aproximação mais aceitável é a fornecida pelo spline cúbico natural ($s(x)$), que combina a interpolação exata dos pontos com um comportamento muito mais estável entre os nós. Esta conclusão está em consonância com a motivação teórica para o uso de splines, onde se realça que, em muitos conjuntos de dados reais, os splines cúbicos naturais produzem aproximações mais fiáveis e realistas do que os polinómios globais de grau elevado, mitigando as grandes oscilações fora da vizinhança imediata dos dados.

Conclusão

Neste trabalho estudamos as duas abordagens de interpolação, recorrendo a polinómios globais obtidos pelo método de Newton em diferenças divididas e a splines cúbicos naturais, aplicadas tanto a funções de teste como a dados reais de evaporação. Observamos que os polinómios de grau elevado podem introduzir oscilações significativas, sobretudo perto dos extremos do intervalo, enquanto os splines cúbicos naturais fornecem aproximações mais estáveis e visualmente mais próximas do comportamento esperado das funções e dos dados. A análise dos erros teóricos e numéricos confirmou estas conclusões, mostrando que, para muitos problemas práticos, os splines cúbicos naturais constituem uma alternativa mais fiável do que a interpolação polinomial global.