TRABALHO PRÁTICO 3 DE ANÁLISE NUMÉRICA

Elementos do Grupo 17:

Adriana Ramos Das Neves Martins Dos Santos

Andreia Lúcia Martins Batista

Luís Miguel Monteiro

Pedro Miguel Pinto da Costa

2019/2020

Introdução

Este trabalho foi realizado no âmbito da unidade curricular Análise Numérica, com o objetivo de apresentar propostas de resolução de exercícios relativos à interpolação polinomial e à interpolação polinomial segmentada. Estes processos permitem aproximar uma função f, da qual se conhece apenas um conjunto de $n+1$ pontos de abcissas distintas, a partir de um polinómio interpolador e de um spline, respetivamente. Para isso, foram implementados o método de Newton em diferenças divididas e a construção do spline cúbico natural, recorrendo à linguagem Python. Para a construção de gráficos e auxílio nos cálculos, foi utilizado o programa wxMaxima.

Exercício 1
a)

De modo a calcular um valor aproximado de $p(9)$ por interpolação polinomial sobre os dados conhecidos, usando toda a informação fornecida, construiu-se o polinómio interpolador de grau 6, $p_6(t)$, de $p(t)$ nos pontos de abcissas $[0,5,10,15,20,25,30]$.

Começou-se por escrever o programa 1 representado na figura 1 que aplica o método de Newton em diferenças divididas. Para tal, definiu-se a função $dif\_div(W)$, em que $W = [[t_i],[p(t_i)]]_{i=0}^{n}$, que adiciona a W as sucessivas diferenças divididas de $p(t)$ nos pontos de abcissas $[t_i]_{i=0}^{n}$.
Por último, definiu-se a função $newton\ (W)$, onde $W = [[t_i],[p(t_i)]]_{i=0}^{n}$, que retorna o polinómio interpolador de $p(t)$ no conjunto de pontos $(t_i, p(t_i))_{i=0}^{n}$.

```
from sympy import Symbol, Rational
t=Symbol('t')

def dif_div(W): #W=[[ti],[p(ti)]], i=0,1,...n
  n=len(W[0])-1
  for i in range(n):
    A=[]
    for j in range(n-i):
      A.append((W[i+1][j+1]-W[i+1][j])/(W[0][i+j+1]-W[0][j]))
    W.append(A)
  return W

def newton(W): #W=[[ti],[p(ti)]], i=0,1,...n
  W=dif_div(W)
  pol=W[1][0]    #p(t0)
  for i in range(1,len(W[0])):
    B=1
    for j in range(i):
      B*=(t-(W[0][j]))  #(t-t0)(t-t1)…
    B*=W[i+1][0]    #f[t0,…]
    pol+=B
  return pol
```

Figura 1 – Programa que constrói o polinómio interpolador do conjunto de pontos W.

<u>Nota</u>: Como os cálculos dos programas são feitos com precisão máquina, os coeficientes e o termo independente dos polinómios interpoladores e dos splines são apresentados, ao longo do trabalho, com 15 algarismos significativos.

De seguida, executou-se o programa 1 da figura 1 para $W = ([[0, 5, 10, 15, 20, 25, 30], [100, 89.5560, 78.4905, 67.2706, 56.3897, 46.2842, 37.2687]])$, obtendo-se o polinómio:

```
In [2]: newton([[0,5,10,15,20,25,30],
   ...:         [100,89.5560,78.4905,67.2706,56.3897,46.2842,37.2687]])
Out[2]:
1.64444444443706e-9*t*(t - 25)*(t - 20)*(t - 15)*(t - 10)*(t - 5) - 2.22133333333231e-7*t*(t -
20)*(t - 15)*(t - 10)*(t - 5) + 1.75333333333253e-6*t*(t - 15)*(t - 10)*(t - 5) +
0.0006228*t*(t - 10)*(t - 5) - 0.0124299999999999*t*(t - 5) - 2.0888*t + 100
```

Figura 2 – Construção do polinómio interpolador $p_6(t)$.

Por último, definiu-se $p_6(t)$ e calculou-se o valor de $p_6(9)$:

```
p6(t):=1.64444444443706e−9·t·(t − 25)·(t − 20)·(t − 15)·(t − 10)·(t − 5) − 2.22133333333231e−7·t·(t − 20)·(t − 15)·(t − 10)·(t − 5) +
    1.75333333333253e−6·t·(t − 15)·(t − 10)·(t − 5) + 0.0006228·t·(t − 10)·(t − 5) − 0.0124299999999999·t·(t − 5) − 2.0888·t + 100$
p6(9);
80.73186822400001
```

Figura 3 - Cálculo do valor de $p_6(9)$.

Como $p(9) \approx p_6(9) = 80.7319$, conclui-se que o número de animais da espécie ao fim de 9 anos, é aproximadamente, 80.7319×10^6.

<u>b)</u>

Como $p(t) = \frac{300}{2+e^{0.06t}}$ é definida pelo quociente de duas funções contínuas (constante e exponencial), cujo denominador não se anula em $\mathbb{R}$, trata-se de uma função de classe C^∞ em $\mathbb{R}$. Em particular, é de classe C^7 em $[0,30]$.

Seja $p_6(t) \in \mathbb{P}_6$ o polinómio interpolador de $p(t)$ dos pontos de abcissas $[0,5,10,15,20,25,30] = [t_i], i = 0, \dots, 6$, determinado na alínea anterior. Resulta do teorema visto nas aulas teóricas que $\forall t \in [0,30]\ \exists c_t \in]0,30[$:

$$p(t) - p_6(t) \leq \frac{1}{7!} p^{(7)}(c_t)\, \pi_7(t),$$

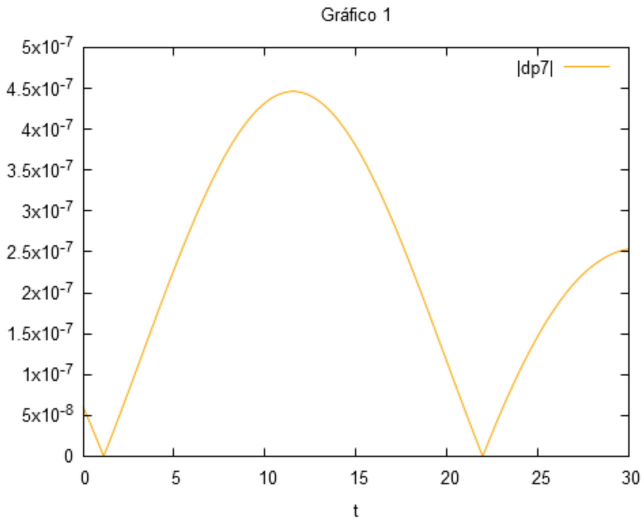
onde $\pi_7(t) = (t - t_0) \dots (t - t_6)$.

Pode-se, então, majorar o erro absoluto cometido ao aproximar $p(9)$ por $p_6(9)$:

$$|E_6(9)| = |p(9) - p_6(9)| \leq \frac{M}{7!} |\, \pi_7(9)|,$$

onde $M = \max_{t \in [0,30]} |\, p^{(7)}(t)\, |$ e $\pi_7(9) = (9 - t_0) \dots (9 - t_6)$.

Para calcular o valor do máximo de $|p^{(7)}(t)|$ no intervalo $[0,30]$, começou-se por determinar $p^{(7)}(t)$ $(= dp\ 7)$ e construir o gráfico do seu módulo no intervalo $[0,30]$:



Observando o gráfico 1 de $|p^{(7)}(x)|$ em $[0,30]$, verifica-se que o máximo é atingido em $[10,15]$. Assim, basta determinar o zero de $p^{(8)}(x)$ em $[10,15]$ para obter o valor da abcissa onde o máximo de $|p^{(7)}(x)|$ é atingido no intervalo $[0,30]$. Para isso foi utilizado, mais uma vez, o Maxima:

```
find_root(diff(p(t),t,8), t, 10, 15);
11.55245300933164
```

Figura 4 – Cálculo do zero da oitava derivada de $p(t)$ em $[10,15]$.

Por último, determinou-se a imagem da abcissa onde o máximo de $|p^{(7)}(x)|$ é atingido em $[0,30]$, que corresponde ao valor de M:

```
dp7(11.55245300933164);
4.461479999999817 10^-7
```

Figura 5- Cálculo do M.

Deste modo, $M = \max_{x\in[0,30]} |\, p^{(7)}(x) \,| \approx 4.4615 \times 10^{-7}$ Portanto, tem-se que:

$|E_6(9)| = |p(9) - p_6(9)| \leq \frac{4.4615\times10^{-7}}{7!} |(9-0)(9-5)(9-10)(9-15)(9-20)(9-25)(9-30)| \approx 7.1 \times 10^{-5}$.

O erro absoluto efetivamente cometido é dado por: $|p(9) - p_6(9)| \approx |80.73182077592084 - 80.73186822400001| \approx 4.7 \times 10^{-5} \leq 7.1 \times 10^{-5}$.

Ao efetuar interpolação polinomial, cometeu-se um erro que é majorado por 7.1×10^{-5}. Deste modo, o valor de $p(9)$ deverá ser apresentado com 6 casas decimais. Porém, na tabela de que se dispõe, os valores da função estão afetados de um erro de 5×10^{-5} (têm 4 casas decimais), por isso, o resultado fica afetado desse erro.
Pode-se, então, escrever $p(9) \approx 80.7319$.

Exercício 2

a)

De forma a construir um conjunto de $n+1=7$ pontos, $(x_i\,, f(x_i))_{i=0}^{n})$, de abcissas x_i , $i=0,\ldots,n$, igualmente espaçadas em $[-4\,,4]$, determinou-se a amplitude que cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]\,_{i=1}^{6}$ tem de ter: $\frac{|4-(-4)|}{6}=\frac{4}{3}$. Portanto, $x_i=\,-4+\frac{4}{3}i=\frac{-12+4i}{3}$, $i=0,\ldots,6$. De seguida, recorreu-se ao Python para calcular os valores de $(f(x_i))_{i=0}^{6}$, representados na tabela à esquerda:

```python
from math import *
from sympy import Rational

def f(x):
  return exp(-1/(1+x**2))

print()
print('%s %5s %9s' % ('i','xi','f(xi)'))
for i in range (0,7):
  x=Rational(-12+4*i,3)
  print('%-3d %-6r %.5f' % (i,x,f(x)))
```

i	xi	f(xi)
0	-4	0.94287
1	-8/3	0.88401
2	-4/3	0.69768
3	0	0.36788
4	4/3	0.69768
5	8/3	0.88401
6	4	0.94287

Figura 6-Cálculo dos valores de $(f(x_i))\,_{i=0}^{6}$.

Exclusivamente para apresentação de resultados, decidiu-se arredondar os valores de f de cada x_i para 5 algarismos significativos.

b)

Seja A o conjunto $(x_i\,, f(x_i))_{i=0}^{6}$, em que $x_i=-4+\frac{4}{3}i,\ \ i=0,\ldots,6$ determinado na alínea anterior.

Para construir o polinómio interpolador, p_6 , do conjunto de pontos A, adaptou-se o programa 1 (utilizado na alínea *(a)* do exercício *1*) alterando-se a variável independente para x. De seguida, executou-se o programa modificado para esse conjunto de pontos:

```
In [2]: newton([[-4,Rational(-8,3),Rational(-4,3),0,Rational(4,3),Rational(8,3),4],
   ...:         [f(-4),f(-8/3),f(-4/3),f(0),f(4/3),f(8/3),f(4)]])
Out[2]:
0.00119896596083227*x*(x - 8/3)*(x - 4/3)*(x + 4/3)*(x + 8/3)*(x + 4) -
0.00479586384332908*x*(x - 4/3)*(x + 4/3)*(x + 8/3)*(x + 4) + 0.0107980537581964*x*(x + 4/3)*(x
+ 8/3)*(x + 4) - 0.0441478664452915*x - 0.0011246284063875*(x + 4/3)*(x + 8/3)*(x + 4) -
0.0358507051677375*(x + 8/3)*(x + 4) + 0.766281678073709
```

Figura 7- Construção do polinómio interpolador p_6.

Com a finalidade de construir o spline cúbico natural que interpola o conjunto de $n+1$ pontos $(x_i\,, f(x_i))_{i=0}^{n}$, escreveu-se o programa 2 representado na figura 8. A função $sistema\ (X,Y)$, em que $(X,Y) = ([x_i\,, f(x_i)])_{i=0}^{n}$, calcula a solução do sistema que determina o spline cúbico natural que interpola os pontos (X,Y). Isto é, esta função calcula os valores de $M_i = S''(x_i), i = 0,1,\dots,n$ que garantem a continuidade da primeira derivada do spline nos nós interiores e o anulamento da segunda derivada nos nós extremos.

Finalmente, a função $spline\_c\_n\ (X,Y)$, onde $(X,Y) = ([x_i\,, f(x_i)])_{i=0}^{n}$, retorna o spline cúbico natural que interpola o conjunto de pontos (X,Y).

```
import numpy
from sympy import Symbol, Rational
x=Symbol('x')

def sistema(X,Y): #(X,Y)=([xi],[f(xi)]),i=0,1,...,n
  n=len(X)
  h=[X[i]-X[i-1] for i in range (1,n)] #valores de hi, i=1,...,n
  A=numpy.zeros(shape=(n,n))
  B=numpy.zeros(n)

  for i in range(n-2): #coeficientes do sistema
    A[i][i]=h[i]/6
    A[i][i+1]=(h[i]+h[i+1])/3
    A[i][i+2]=h[i+1]/6
  A[n-2][0]=1    #M0=0
  A[n-1][n-1]=1  #Mn=0

  for i in range(1,n-1): #termos independentes do sistema
    B[i-1]=((Y[i+1]-Y[i])/h[i]-(Y[i]-Y[i-1])/h[i-1])

  M=numpy.linalg.solve(A,B) #M=[M1 M2 ... Mn]  (solução do sistema)
  return M
def spline_c_n(X,Y): #(X,Y)=([xi],[f(xi)]),i=0,1,...,n
  n=len(X)
  M=sistema(X,Y)
  h=[X[i]-X[i-1] for i in range (1,n)] #valores de hi, i=1,...,n
  S=[]

  for i in range(1,n): #expressão de Si(x), i=1,...n
     S.append(((M[i-1]/(6*h[i-1]))*(X[i]-x)**3)+
             (M[i]/(6*h[i-1])*((x-X[i-1])**3)+
             (Y[i-1]-M[i-1]*(h[i-1])**2/6)*((X[i]-x)/h[i-1])+
             (Y[i]-M[i]*(h[i-1]**2/6))*((x-X[i-1])/h[i-1])))
     print(X[i-1],'<= x <=',X[i])
     print('S',i,'(x) =',S[i-1])
     print()
```

Figura 8 – Programa que constrói o spline cúbico que interpola o conjunto de pontos (X,Y).

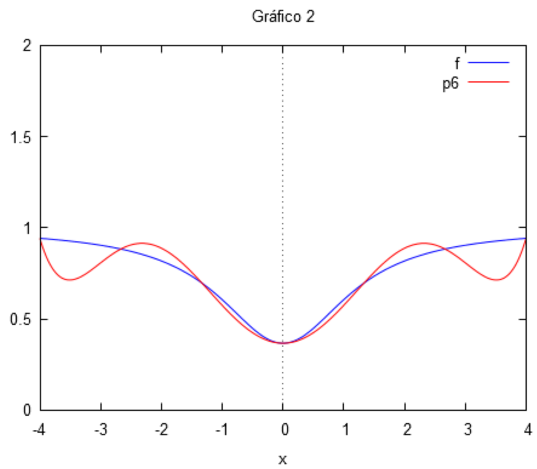
Para determinar o spline cúbico natural do conjunto de pontos A, scn_6, executou-se o programa 2 para os pontos desse conjunto:

```
In [2]: spline_c_n([-4,Rational(-8,3),Rational(-4,3),0,Rational(4,3),Rational(8,3),4],
   ...:            [f(-4),f(-8/3),f(-4/3),f(0),f(4/3),f(8/3),f(4)])
-4 <= x <= -8/3
S 1 (x) = -0.0361990331417449*x - 0.00447121873324489*(x + 4)**3 + 0.798077011287895

-8/3 <= x <= -4/3
S 2 (x) = -0.0838920329630238*x - 0.00447121873324489*(-x - 4/3)**3 - 0.0358911828186267*(x +
8/3)**3 + 0.670895678431151

-4/3 <= x <= 0
S 3 (x) = 0.0358911828186267*x**3 - 0.466731316361709*x + 0.0875121218178203*(x + 4/3)**3 +
0.160443300566239

0 <= x <= 4/3
S 4 (x) = -0.0358911828186267*x**3 + 0.466731316361709*x + 0.0875121218178203*(4/3 - x)**3 +
0.160443300566239

4/3 <= x <= 8/3
S 5 (x) = 0.0838920329630238*x - 0.0358911828186267*(8/3 - x)**3 - 0.00447121873324489*(x -
4/3)**3 + 0.670895678431151

8/3 <= x <= 4
S 6 (x) = 0.0361990331417449*x - 0.00447121873324489*(4 - x)**3 + 0.798077011287895
```

Figura 9 – Construção do spline cúbico natural, scn_6.

c)

Com o intuito de comparar o gráfico da aproximacão p_6 com o de f no intervalo $[-4,4]$, construiu-se o gráfico 2, onde se pode observar o gráficos de ambas as funções:



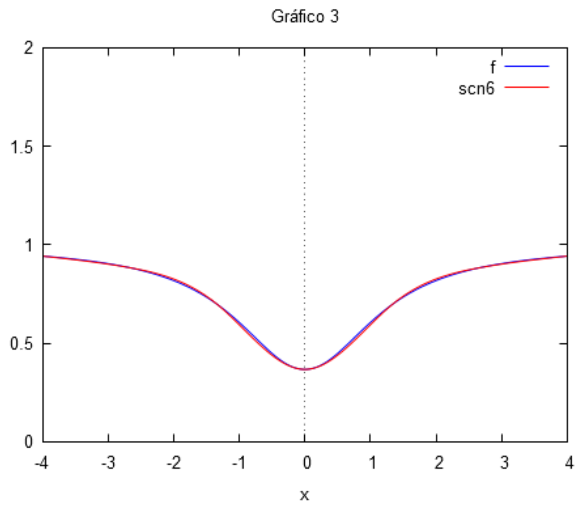
Observando o gráfico 2, constata-se que f e p_6 coincidem em 7 pontos e que p_6 representa melhor f na parte central do intervalo do que nos seus extremos. Repara-se também que o polinómio apresenta maior número de variações, ou seja, mudanças de monotonia, do que a função.

Com a propósito de facilitar a construção do spline cúbico natural relativo às abcissas $x_i = -4 + \frac{4}{3}i, i = 0, \dots, 6$, definiu-se a função $scn_6(x)$, que coincide, com o spline obtido na alínea *b)*:

```
scn6(x):= if x>=-4 and x <= -8/3 then S1(x) else if x>=-8/3 and x <= -4/3 then S2(x) else if x>=-4/3 and x <= 0 then S3(x) else
          if x>=0 and x <= 4/3 then S4(x) else if x>=4/3 and x <= 8/3 then S5(x) else if x>=8/3 and x <= 4 then S6(x)$
```

Figura 10 - Definição da função $scn_6(x)$.

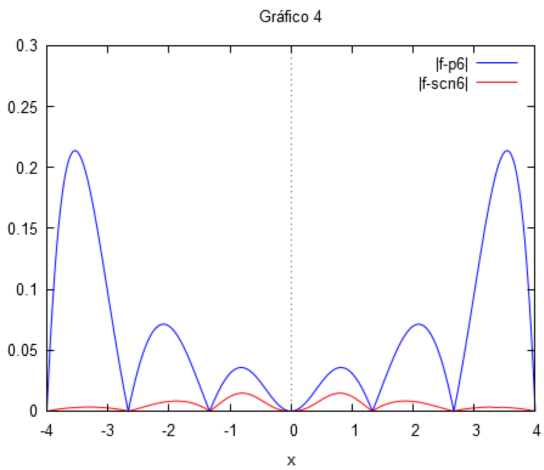
De seguida, construiu-se o gráfico 3 correspondente a scn_6 e a f, em $[-4,4]$:



A partir da observação do gráfico 3, verifica-se que scn_6 constitui uma aproximação muito boa de f em todos os subintervalos considerados, sendo quase impercetível, do ponto de vista visual, a diferença entre ambos.

Comparando os gráficos obtidos de p_6 e scn_6 com f, conclui-se que scn_6 corresponde a uma melhor aproximação de f em $[-4,4]$ do que p_6, ao longo de todo o intervalo, como seria de esperar.

Finalmente, construíram-se os gráficos dos erros $|f - p_6|$ e $|f - scn_6|$, representados no gráfico 4:



O gráfico obtido evidencia a conclusão retirada anteriormente, uma vez que p_6 conduz a erros maiores, em todos os subintervalos considerados, do que os erros produzidos por scn_6 . Além disso, como o erro $|f - p_6|$ é significativamente maior nos extremos do que na parte central de $[-4,4]$, verifica-se que p_6 representa melhor f na parte central desse intervalo. Por outro lado, scn_6 constitui uma aproximação de f ligeiramente melhor nos extremos do que na parte central de $[-4,4]$, ainda que essa diferença não seja muito considerável.

d)

i)

De forma construir um conjunto de $n+1=8$ pontos, $(x_i\,, f(x_i))_{i=0}^{n})$, de abcissas x_i , $i=0,\ldots,n$, igualmente espaçadas em $[-4\,,4]$, determinou-se a amplitude que cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]\,_{i=1}^{7}$ tem de ter: $\frac{|4-(-4)|}{7}=\frac{8}{7}$. Portanto, $x_i = -4+\frac{8}{7}i=\frac{-28+8i}{7}$, $i=0,\ldots,7$. De seguida, recorreu-se ao Python para calcular os valores de $(f(x_i))_{i=0}^{7}$, representados na tabela à esquerda da figura 11.

```
from math import *
from sympy import Rational

def f(x):
  return exp(-1/(1+x**2))

print()
print('%s %5s %9s' % ('i','xi','f(xi)'))
for i in range (0,8):
  x=Rational(-28+8*i,7)
  print('%-3d %-6r %.5f' % (i,x,f(x)))
```

i	xi	f(xi)
0	-4	0.94287
1	-20/7	0.89661
2	-12/7	0.77578
3	-4/7	0.47055
4	4/7	0.47055
5	12/7	0.77578
6	20/7	0.89661
7	4	0.94287

Figura 11-Cálculo dos valores de $(f(x_i))\,_{i=0}^{7}$.

Para efeito de apresentação dos resultados, exclusivamente, decidiu-se arredondar os valores de f de cada x_i para 5 algarismos significativos.

ii)

Seja B o conjunto $(x_i\,, f(x_i))_{i=0}^{7}$, em que $x_i = -4+\frac{8}{7}i,\ i=0,\ldots,7$ determinado na alínea anterior.

Para construir o polinómio interpolador, p_7, do conjunto de pontos B, executou-se o programa modificado utilizado na alínea *(b)* do exercício 2 para este conjunto:

```
In [2]:
newton([[-4,Rational(-20,7),Rational(-12,7),Rational(-4,7),Rational(4,7),Rational(12,7),Rational(20,7),4],
   ...: [f(-4),f(-20/7),f(-12/7),f(-4/7),f(4/7),f(12/7),f(20/7),f(4)]])
Out[2]:
-0.0404779828145491*x + 0.000678844056715819*(x - 12/7)*(x - 4/7)*(x + 4/7)*(x + 12/7)*(x + 20/7)*(x + 4) -
0.00465493067462276*(x - 4/7)*(x + 4/7)*(x + 12/7)*(x + 20/7)*(x + 4) + 0.0146409709122131*(x + 4/7)*(x +
12/7)*(x + 20/7)*(x + 4) - 0.0122621164317207*(x + 12/7)*(x + 20/7)*(x + 4) - 0.0285470219211259*(x +
20/7)*(x + 4) + 0.780961212596679
```

Figura 12 - Construção do polinómio interpolador p_7 .

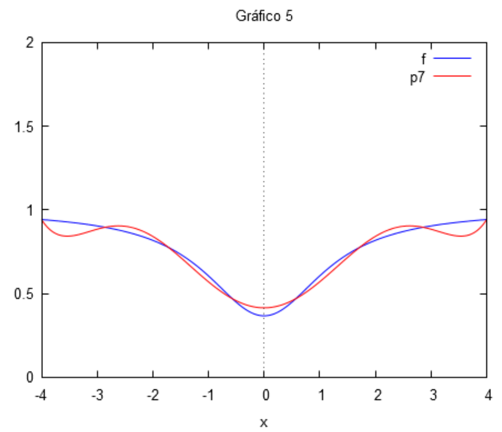
Para determinar o spline cúbico natural, scn_7, do conjunto de pontos B, executou-se o programa 2 para os pontos desse conjunto:

```
In [2]:
spline_c_n([-4,Rational(-20,7),Rational(-12,7),Rational(-4,7),Rational(4,7),Rational(12,7),Rational(20,7),4],
   ...:     [f(-4),f(-20/7),f(-12/7),f(-4/7),f(4/7),f(12/7),f(20/7),f(4)])
-4 <= x <= -20/7
S 1 (x) = -0.0381405697517736*x - 0.00178958187618746*(x + 4)**3 + 0.79031086484778

-20/7 <= x <= -12/7
S 2 (x) = -0.0521650481284264*x - 0.00178958187618746*(-x - 12/7)**3 - 0.0427989608572204*(x + 20/7)**3 +
0.750240926628773

-12/7 <= x <= -4/7
S 3 (x) = -0.387569149540113*x - 0.0427989608572204*(-x - 4/7)**3 + 0.0494554383527748*(x + 12/7)**3 +
0.175262467065881

-4/7 <= x <= 4/7
S 4 (x) = 0.0494554383527748*(4/7 - x)**3 + 0.0494554383527749*(x + 4/7)**3 + 0.396730552517374

4/7 <= x <= 12/7
S 5 (x) = 0.387569149540113*x + 0.0494554383527749*(12/7 - x)**3 - 0.0427989608572204*(x - 4/7)**3 +
0.175262467065881

12/7 <= x <= 20/7
S 6 (x) = 0.0521650481284264*x - 0.0427989608572204*(20/7 - x)**3 - 0.00178958187618746*(x - 12/7)**3 +
0.750240926628773

20/7 <= x <= 4
S 7 (x) = 0.0381405697517736*x - 0.00178958187618746*(4 - x)**3 + 0.79031086484778
```

Figura 13 – Construção do spline cúbico natural, scn_7.

iii)

De forma a comparar o gráfico da aproximacão p_7 com o de f no intervalo $[-4,4]$, construiu-se o gráfico 5:



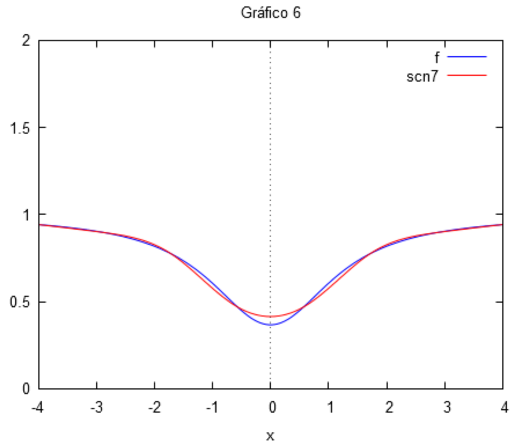
A partir da observação do gráfico 5, verifica-se que f e p_7 coincidem em 8 pontos e que p_7 representa melhor f nos f nos subintervalos $[-\frac{20}{7},-\frac{4}{7}]$ e $[\frac{4}{7},\frac{20}{7}]$ do que na parte central e nos extremos de $[-4,4]$.

Com a finalidade de facilitar a construção do spline cúbico natural relativo às abcissas $x_i = -4+\frac{8}{7}i, i = 0,\ldots,7$, definiu-se a função $scn_7(x)$ que coincide, com o spline obtido na alínea *d) ii)*:

```
scn7(x):= if x>=-4 and x <= -20/7 then S1(x) else if x>=-20/7 and x <= -12/7 then S2(x) else if x>=-12/7 and x <=-4/7 then S3(x) else
          if x>=-4/7 and x <= 4/7 then S4(x) else if x>=4/7 and x <= 12/7 then S5(x) else if x>=12/7 and x <= 20/7 then S6(x) else
          if x>=20/7 and x <=4 then S7(x)$
```

Figura 14 - Definição de $scn_7(x)$.

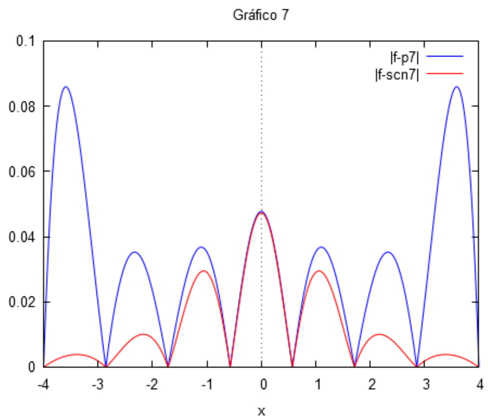
De seguida, construiu-se o gráfico 6 correspondente a scn_7 e a f em $[-4{,}4]$:



Observando o gráfico 6, verifica-se que scn_7 constitui uma melhor aproximação da função f nos extremos do intervalo do que na parte central do mesmo.

Comparando os gráficos obtidos de p_7 e scn_7 com f, conclui-se que scn_7 representa melhor f em $[-4{,}4]$ do que p_7.

Finalmente, construíram-se os gráficos dos erros $|f - p_7|$ e $|f - scn_7|$, representados no gráfico 7:



O gráfico obtido mostra que p_7 conduz a erros maiores na representação de f do que scn_7 em todos os subintervalos considerados de $[-4{,}4]$, exceto em $[-\frac{4}{7}, \frac{4}{7}]$, onde o erro é, aproximadamente, o mesmo. Além disso, p_7 representa melhor f nos subintervalos $[-\frac{20}{7}, -\frac{4}{7}]$ e $[\frac{4}{7}, \frac{20}{7}]$ do que na parte central e nos extremos de $[-4{,}4]$. Por outro lado, como o erro $|f - scn_7|$ diminui à medida que se afasta do ponto médio do intervalo, scn_7 constitui uma aproximação melhor de f nos extremos do que na parte central de $[-4{,}4]$.

e)

Em primeiro lugar, foi feita uma análise às aproximações dos polinómios p_6 e p_7 e dos splines scn_6 e scn_7, tendo em conta as representações gráficas dos mesmos.

Nos gráficos 2 e 5, onde estão representados os polinómios interpoladores de grau 6 e 7, respetivamente, juntamente com a função f, é possível aferir que p_7 conduz a menores erros, de um modo geral. No entanto, não há nenhum resultado que afirme que seja de prever que a interpolação por um polinómio de grau mais elevado conduza a um resultado mais preciso, até porque, geralmente, um polinómio de grau elevado apresenta várias mudanças de monotonia e concavidade.

Ao analisar os gráficos 3 e 6, constata-se que o spline cúbico natural scn_6 constitui uma melhor aproximação da função f naquele conjunto de pontos de abcissas igualmente espaçadas do que scn_7. Isto porque na parte central de $[-4,4]$, scn_7 leva a erros bastante elevados, quando comparados aos erros produzidos por scn_6 nessa região. Daqui resulta que o aumento do número de nós utilizados na construção de um spline cúbico natural não implica que este constitua uma melhor aproximação da função em causa.

Verifica-se, também, que os dois splines obtidos aproximam f melhor do que qualquer polinómio interpolador obtido. Isto é expectável, uma vez que um spline é uma função seccionalmente polinomial, e, portanto, o aumento do número de pontos de interpolação não implica o aumento do grau do polinómio interpolador. Desta forma, evita-se que se cometam erros muitos grandes provocados pelo grau elevado do polinómio interpolador.

Tanto p_6 como p_7 representam melhor f na parte central de $[-4,4]$ do que nos extremos. Consequentemente, no caso do polinómio interpolador, obter-se-iam melhores resultados, aumentado a amplitude dos subintervalos próximos do ponto médio do intervalo considerado. Em contrapartida, os splines scn_6 e scn_7 constituem uma melhor aproximação de f nos extremos do intervalo considerado do que próximo do seu ponto médio.

Em segundo lugar, foi feita uma análise aos erros $|f - p_6|$ e $|f - p_7|$, a partir do teorema que permite o cálculo dos mesmos.

Tendo em conta que o fator $\pi_7(x) = (x+4)(x+\frac{8}{3})\dots(x-\frac{8}{3})(x-4)$ é o fator mais importante no comportamento do erro de p_6, elaborou-se a tabela 1 para os valores de $\pi_7(x)$ para alguns pontos de abcissa do intervalo considerado.

x	$\pi_7(x)$
-3	2.9×10^2
-2.5	-9.4×10^1
-1	7.1×10^1
0.25	-4.8×10^1
0.5	-8.2×10^1
3.5	-7.1×10^2

Tabela 1-Valores de $\pi_7(x)$, $x \in \{-3, -2.5, -1, 0.5, 0.25, 3.5\}$.

Com base na observação da tabela 1, constata-se que $\pi_7(x)$, em valor absoluto, é muito maior próximo dos extremos do intervalo $[-4,4]$ do que nos restantes valores de x. A função $\pi_7(x)$ é uma função ímpar, ou seja, $\pi_7(-x) = -\pi_7(x)$, o que justifica o facto de se terem escolhido pontos de abcissa com diferentes valores absolutos e com diferente espaçamento, na tabela.
Tendo em conta o gráfico 4 e a tabela 1, verifica-se que, em geral, quanto maior o valor de $\pi_7(x)$ em termos absolutos, maior o erro. Também se repara que em valores de x próximos das abcissas de interpolação, a função $\pi_7(x)$ toma valores menores, em valor absoluto, o que, consequentemente, leva a que o erro cometido seja menor do que nos valores restantes. Por isso, ao interpolar, devem ser escolhidas as abcissas de interpolação mais próximas do ponto onde se quer aproximar a função.

O fator $\pi_8(x) = (x+4)(x+\frac{20}{7})\ldots(x-\frac{20}{7})(x-4)$ é o fator mais importante no comportamento do erro de p_7. Ao contrário do caso anterior, $\pi_8(x)$ é uma função par, mas, em termos de valor absoluto, as conclusões retiradas são análogas.

Bibliografia:

- Apontamentos das aulas teóricas