

信号传输系统

信息：语言、文字、图画、编码等。

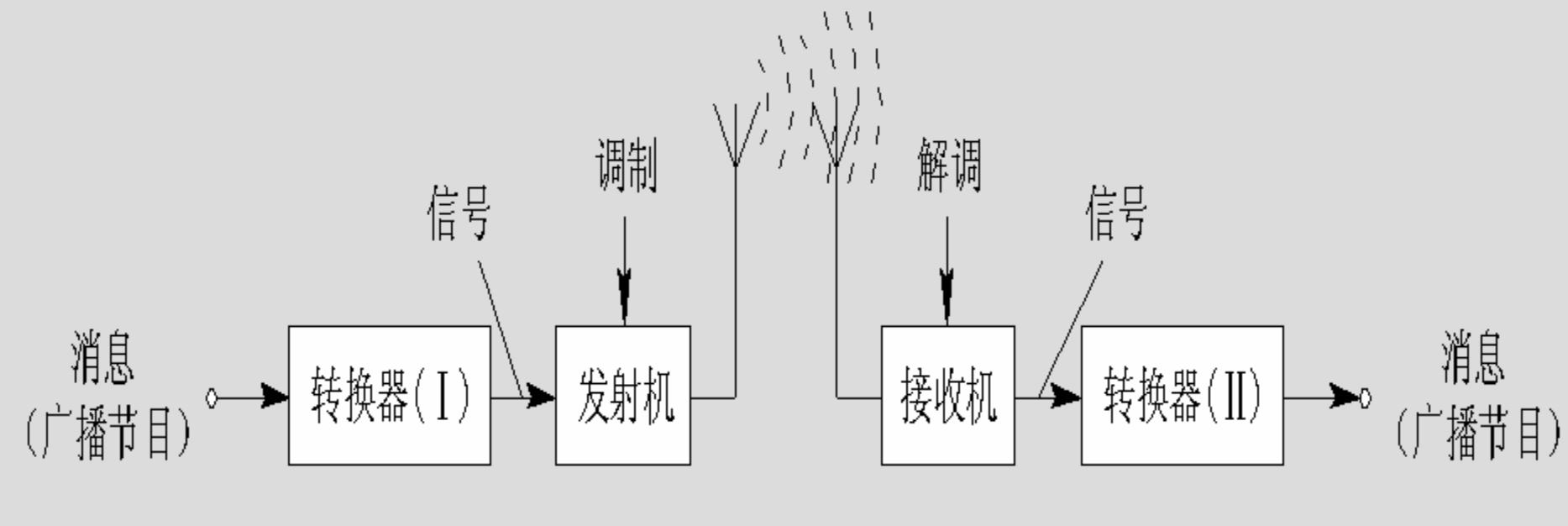
消息：信息按一定规则组成的一组特定的符号。

消息一般不便于直接传输，需借助转换设备，把各种不同的消息转换成便于传输的电的信号。

信号：是消息进行变换后的某种物理量。

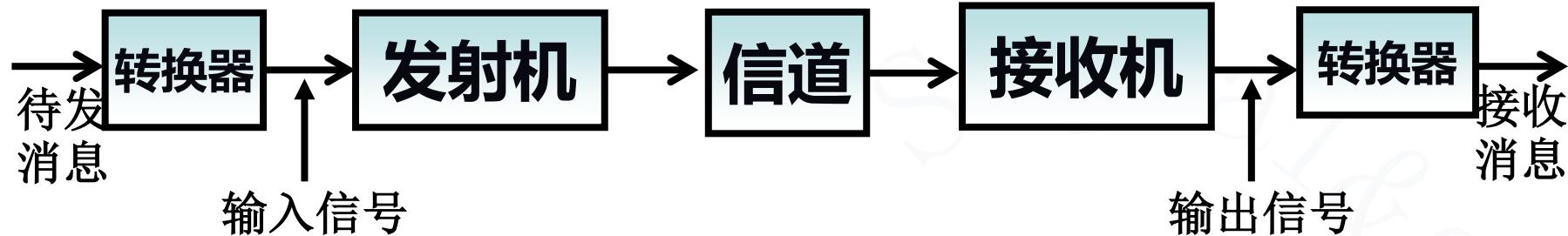
如用变化的电流或电压来代表语言的声音变化，就构成了语音信号，用变化的电流或电压来代表图像的色光变化就构成了图像信号。

带有信息的信号是信息传输技术工作的对象。而信号的传输和处理离不开系统，一切信息的传输过程都可以看成是**通信**，完成该任务的系统就是**通信系统**。如电报，电话，电视，雷达，导航等系统。



无线电广播系统的组成

一般通信系统的组成：



转换器：把消息转换成电信号或反之，如话筒和喇叭。

信道：信号传输的通道，如导线，同轴电缆，光纤等。

与信号传输技术同时发展起来的还有信号处理技术，包含信号的滤波，变换，增强，压缩等技术，广泛应用于多媒体通信，高清晰电视，数码相机，心电，脑电分析等。

信号传输与信号处理技术除应用于通信领域外，还应用到其他许多技术领域，它们共同的理论基础之一是信号分析与系统分析。主要研究信号的特性，系统的分析方法，实现系统各部分的电路及其对信号的作用等问题。

本课程是信息学科的一门重要的技术基础课。

本章内容：

- 信号的概念
- 信号的简单处理
- 系统的概念
- 线性非时变系统的分析

一、信号的概念

(一) 信号的描述

- **物理上**: 信号是带有信息(如语言、音乐、图象、数据等)的随时间(和空间)变化的物理量或物理现象, 如: 声、光、电、力等。 **电信号**: 随时间变化的电压、电流、电荷、磁通。
- **数学上**: 信号是一个或多个变量的函数。
- **形态上**: 信号表现为一种波形。

(二) 信号的分类

1. 确定与随机信号——随时间 t 变化规律划分为两类

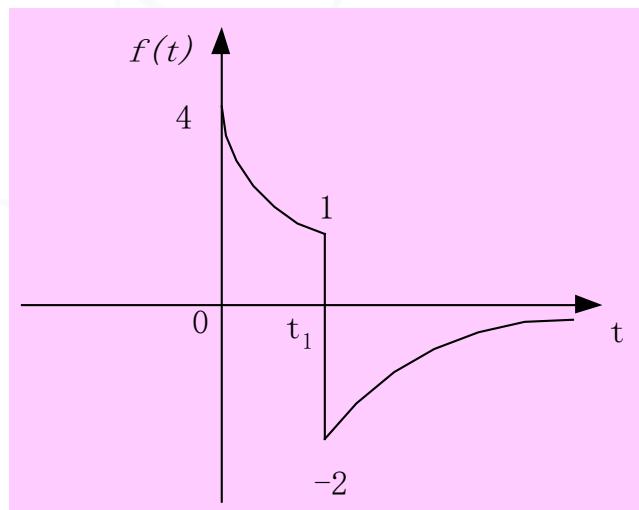
(1) **确定信号**: 能够用确定的时间函数表示 $f(t)$

(2) **随机信号**: 不能用确定时间函数表示——干扰信号、噪声信号

2. 连续信号与离散信号——确定信号按时间连续性分两类

(1) 连续信号

对一切时间 t (除有限个不连续点外)都有确定的函数值, 这类信号就称为连续时间信号, 简称连续信号。



在0和 t_1 处不连续即跳变

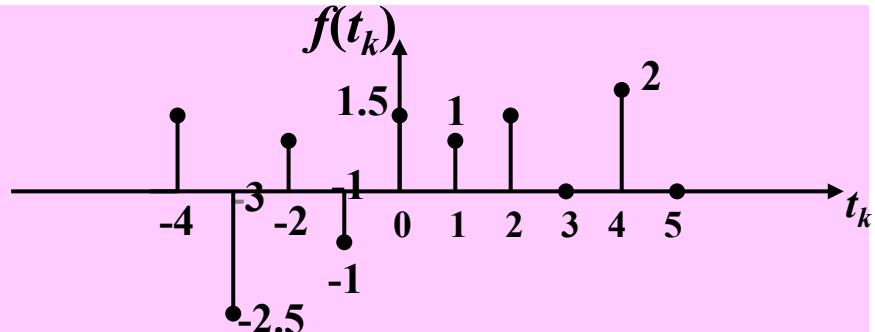
$t=0$ 时跳变值为4

$t=t_1$ 时跳变值为-3

$f(t)=0, t<0$ ——有始函数

(2) 离散信号

仅在不连续的瞬间 t_k 有确定函数值 $f(t_k)$



$$\begin{aligned}
 t_k &= -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 f(t_k) &= 1.5 & -2.5 & 1 & -1 & 1.5 & 1 & 1.5 & 0 & 2 & 0 \\
 t_{k+1} - t_k &= T \quad \text{——均匀} \\
 f(t_k) &= f(kT) \rightarrow f(k)
 \end{aligned}$$

3. 周期与非周期信号——确定信号按函数值重复性分两类

(1) 周期信号

在较长时间内(严格地说, 无始无终)每隔一定时间 T (或整数 N)按相同规律重复变化的信号叫周期信号。

连续: $f(t) = f(t + mT)$

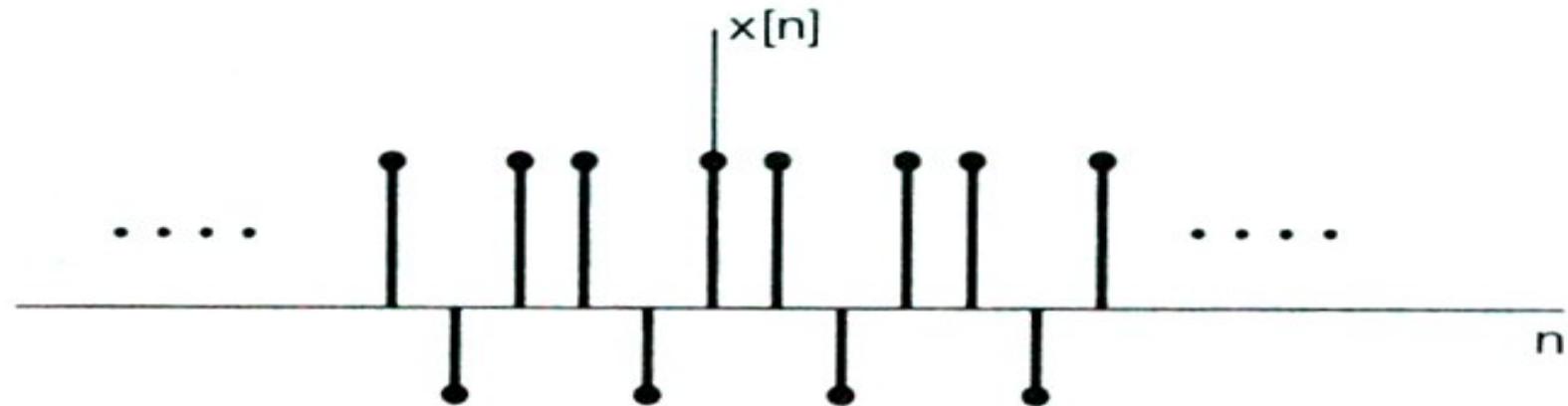
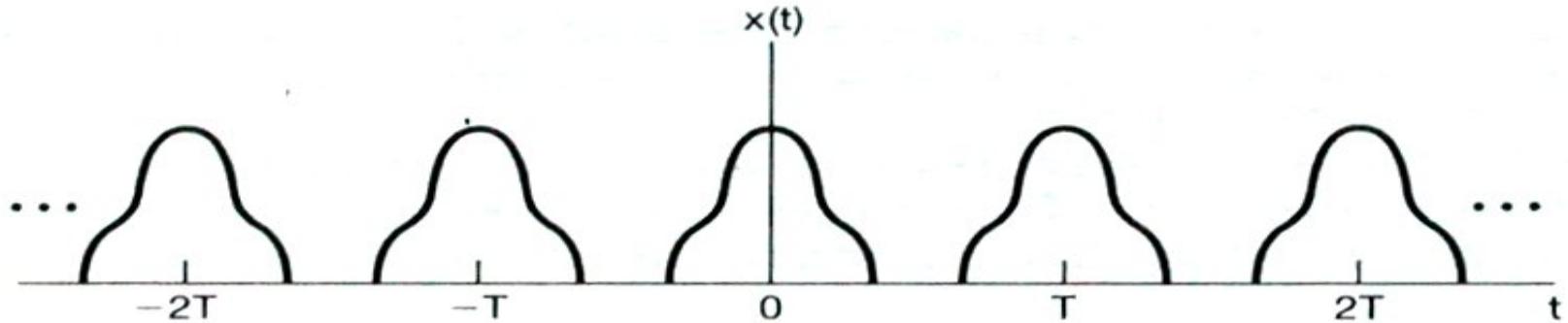
离散: $f(k) = f(k + mN)$ ($m = 0, +1, -1, +2, -2, \dots$)

(2) 非周期信号

不具有周期性的信号

如: $\sin(t) = \sin(t + 2\pi m)$, $\cos(t) = \cos(t + 2\pi m)$, $T = 2\pi$

T 为最小周期, 也称为基本(波)周期



$$N_0 = 3$$

4. 能量信号和功率信号——根据能量特点信号分三类

信号能量: $E \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a |f(t)|^2 dt$ $E \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N |f(k)|^2$

信号功率: $P \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^a |f(t)|^2 dt$ $P \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N |f(k)|^2$

(1) 能量信号

将时间间隔无限趋大时, 总能量为有限值而平均功率为零的信号即能量有界($0 < E < \infty$, $P = 0$)则为能量有限信号, 简称能量信号。

(2) 功率信号

若信号的功率有界(即 $0 < P < \infty$, $E = \infty$)则称为功率有限信号。

有的信号既不是能量信号, 也不是功率信号!

例1 判断下列信号是否为能量信号或功率信号。

$$(1) f(t) = e^{-at} \varepsilon(t), a > 0 \quad (2) f(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta) \quad (3) f(t) = t \varepsilon(t)$$

解: (1)
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a} < \infty$$

故 $f(t)$ 是能量信号。

(2) $f(t)$ 是周期为 $T = 2\pi/\omega_0$ 的周期信号, 其平均功率为

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta) dt \\ &= \frac{A^2 \omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} \frac{1}{2} [1 + 2 \cos(2\omega_0 t + 2\theta)] dt = \frac{A^2}{2} < \infty \end{aligned}$$

所以, $f(t)$ 是功率信号。

注意: 一般情况下, 周期信号都是功率信号。

$$(3) \quad E = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a |f(t)|^2 dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a t^2 dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a^3}{3} \rightarrow \infty$$

$$P = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^a |f(t)|^2 dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2a} \int_0^a t^2 dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \cdot \frac{(\frac{a}{2})^3}{3} \rightarrow \infty$$

故 $f(t)$ 既不是能量信号，也不是功率信号。

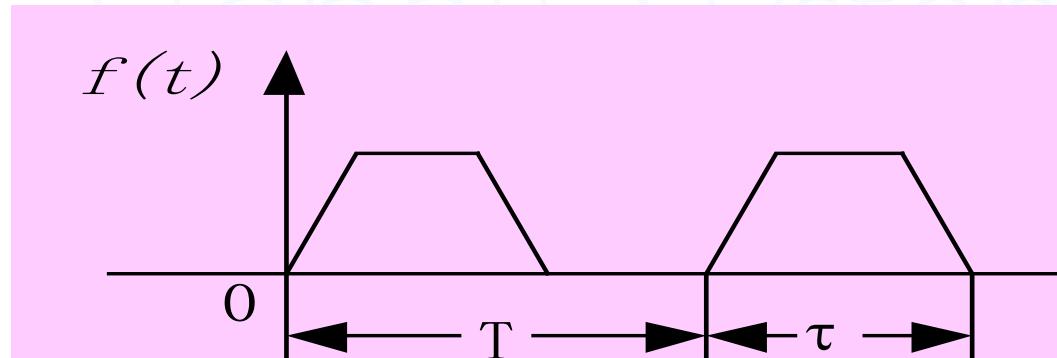
问题：单个脉冲信号和阶跃信号
是能量信号，还是功率信号？

(三) 信号的特性

1. 时间特性——指信号随时间变化的快慢

周期 T : 描述同一形状的波形重复出现的时间的短或长。

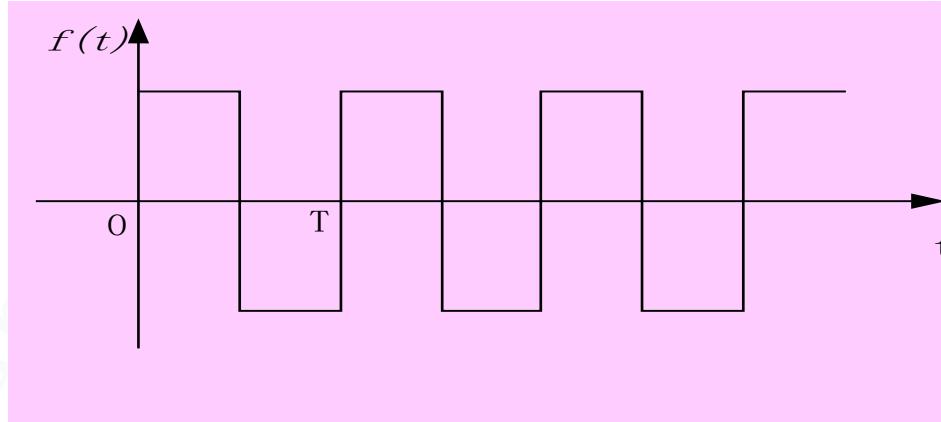
脉冲持续时间 τ 、上升、下降时间: 描述信号波形本身的变化速率



2. 频率特性——指信号的频谱

频谱: 是表示信号频率分量的含量(也叫谐波含量)及其比重的一种方法。

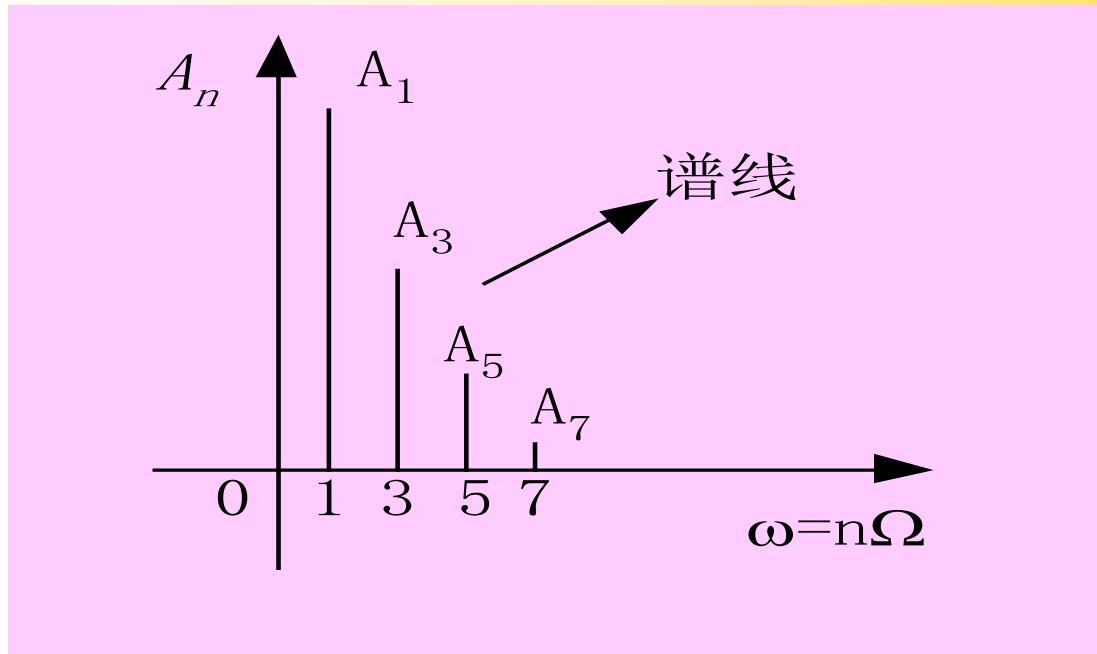
一个复杂的信号可用傅立叶分析法把它分解为许多不同频率的正弦分量，如



(1) 数学表达

$$f(t) = \frac{4}{\pi} [\sin(\Omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\Omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\Omega t) + \dots]$$

(2) 波形分解图表示——频谱图：将信号每一频率分量的振幅 A_n 按角频率由低到高用线段排列起来形成的图称振幅频谱图，简称频谱图。简言之，频谱图是信号各频率振幅随频率变化的图形。



(3) 频带

每一信号的频谱都有一个有效的频率范围，这个范围称为**信号的频带**。

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \quad \text{——基波频率}$$

脉冲持续时间 τ 、上升、下降时间决定信号的频带

二、信号的简单处理

(一) 信号的相加与相乘

如卡拉OK中演唱者的歌声与背景音乐的混合及影视动画中添加背景都是信号的叠加；通信系统中信号的调制解调、混频及频率变换等都用到信号相乘。

相加: $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$

相乘: $f(t) = f_1(t) \bullet f_2(t)$

(二) 信号的时移

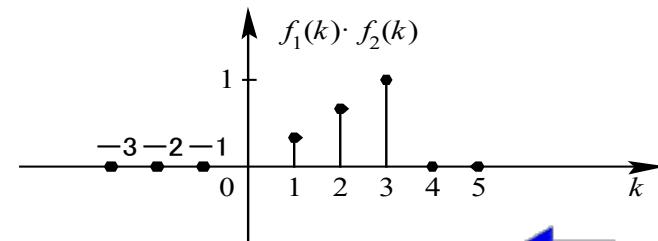
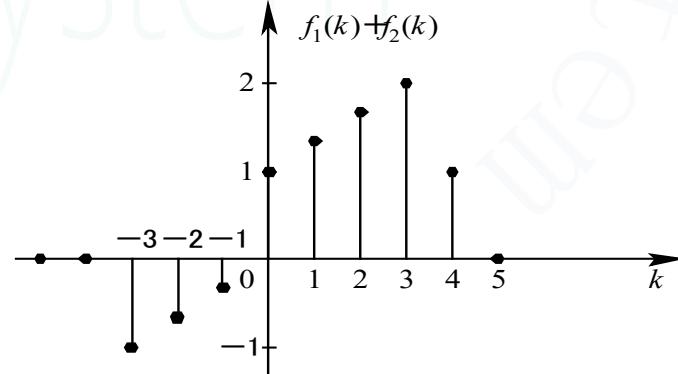
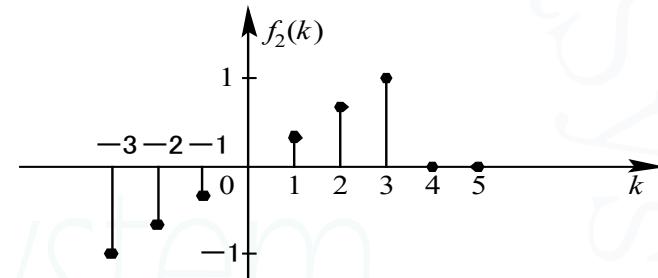
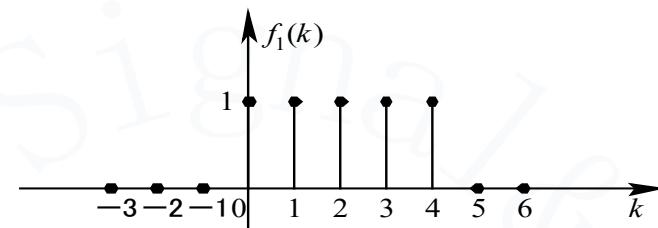
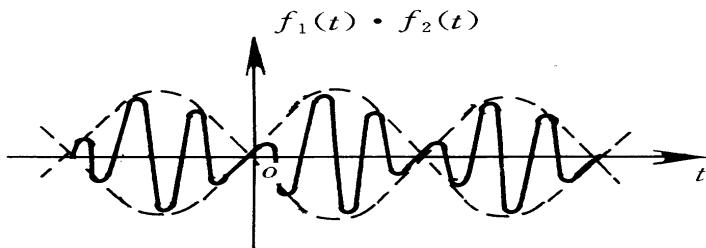
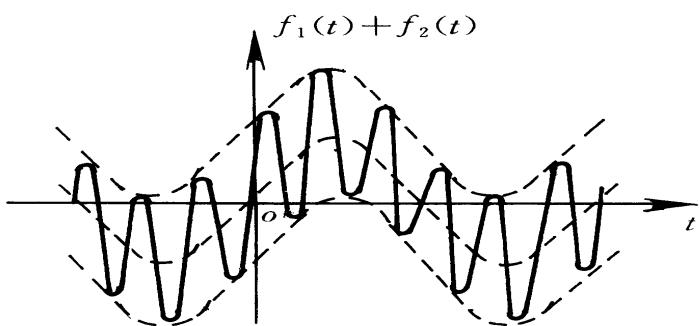
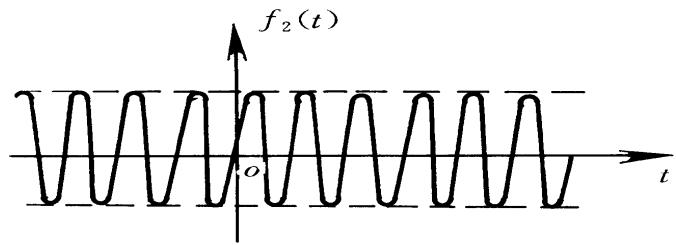
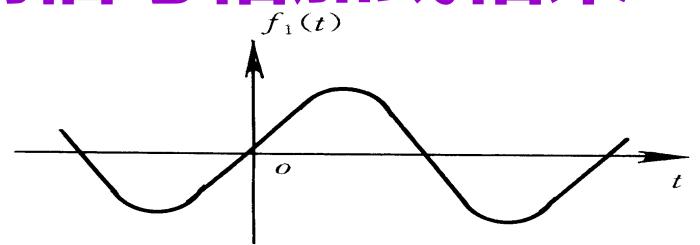
当信号经不同路径传输时，所用时间不同，从而产生时移。如电视图像出现的重影是由于信号传输的时移造成。

$f(t) \rightarrow f(t - t_0)$

$t_0 > 0$ 表示 $f(t - t_0)$ 滞后于 $f(t)$ ，其波形由 $f(t)$ 右移得到。

$t_0 < 0$ 表示 $f(t - t_0)$ 超前于 $f(t)$ ，其波形由 $f(t)$ 左移得到。

两信号相加或相乘



(三) 信号的尺度变换与反褶

如录像带慢放时，信号被展宽；快放时，信号被压缩；倒放时，则信号被反褶。

$$f(t) \rightarrow f(at)$$

若 $a > 1$ ，则表示 $f(at)$ 是由 $f(t)$ 沿时间轴压缩而得到的。

若 $0 < a < 1$ ，则表示 $f(at)$ 是由 $f(t)$ 沿时间轴展宽而得到的。

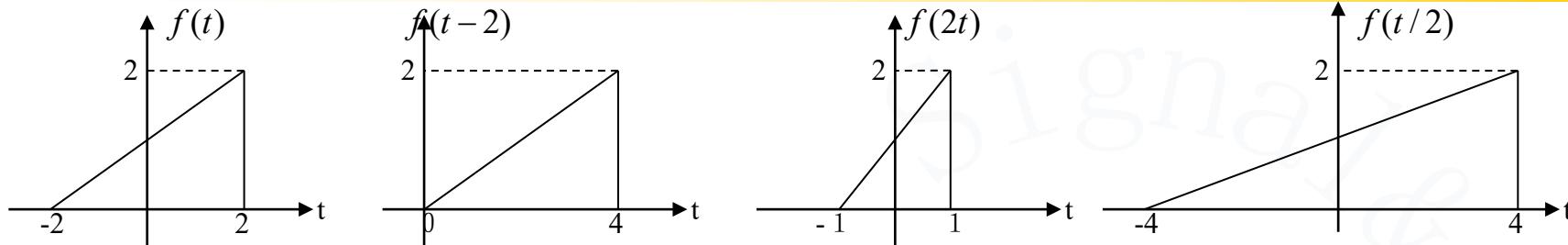
若 $a = -1$ ，则 $f(at) = f(-t)$ 其波形可由 $f(t)$ 沿纵轴反褶而得到。

若 $a < 0$ 且 $a \neq -1$ ，则表示 $f(at)$ 是由 $f(t)$ 同时进行尺度变换和反褶得到的。

例2 给定信号 $f(t)$ ，试画出下列信号的波形。

$$(1) f(t-2) \quad (2) f(2t) \quad (3) f\left(\frac{1}{2}t\right) \quad (4) f(-t+1) \quad (5) [f(t) + f(-t)]\sin(2\pi t)$$

解：(1) 将 $f(t)$ 沿时间轴右移2即可得 $f(t-2)$

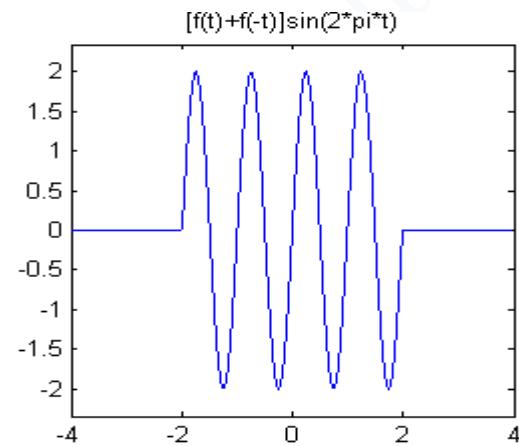
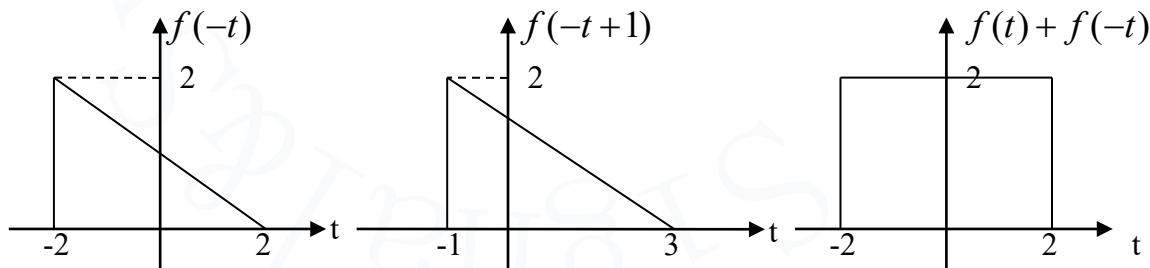


(2) 将 $f(t)$ 沿时间轴压缩2倍即得 $f(2t)$

(3) 将 $f(t)$ 沿时间轴扩展2倍即得 $f(t/2)$

(4) 先将 $f(t)$ 沿纵轴反褶得到 $f(-t)$ 后，再沿时间轴右移1即可得 $f(-t+1)$

(5) 先将 $f(t)$ 与 $f(-t)$ 相加得到一矩形函数，再与正弦信号相乘



三、系统的概念

(一) 系统的定义

系统是指由若干相互关联、相互作用的事物按一定规律组合而成的具有特定功能的整体。

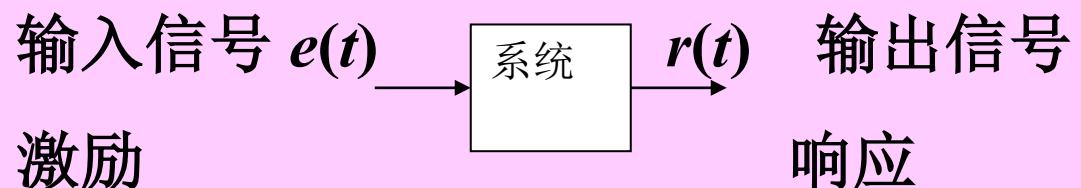
如：通信系统、自动控制系统、机械系统、化工系统、经济系统、生态系统等。

电子系统——通常是电子线路

电路——着重各支路、回路电流及各节点电压

系统——着重输入、输出间的关系或运算功能上

(二) 系统的功能



系统对输入信号进行“加工”、“处理”并发送输出信号

(三) 系统的性质

1. 线性——同时具备齐次性和叠加性(可加性)

齐次性: 若 $e(t) \rightarrow r(t)$

则 $ke(t) \rightarrow kr(t)$

叠加性: 若 $e_1(t) \rightarrow r_1(t), e_2(t) \rightarrow r_2(t)$

则 $e_1(t) + e_2(t) \rightarrow r_1(t) + r_2(t)$

线性: 若 $e_1(t) \rightarrow r_1(t), e_2(t) \rightarrow r_2(t)$

则 $k_1e_1(t) + k_2e_2(t) \rightarrow k_1r_1(t) + k_2r_2(t)$

由常系数线性微分方程描述的系统(线性系统), 零输入响应和零状态响应分别满足齐次性和叠加性。

2. 时不变性——非时变性

如果系统的参数都是常数, 它们不随时间变化, 则称该系统为时不变(或非时变、定常)系统, 否则, 称为时变系统。

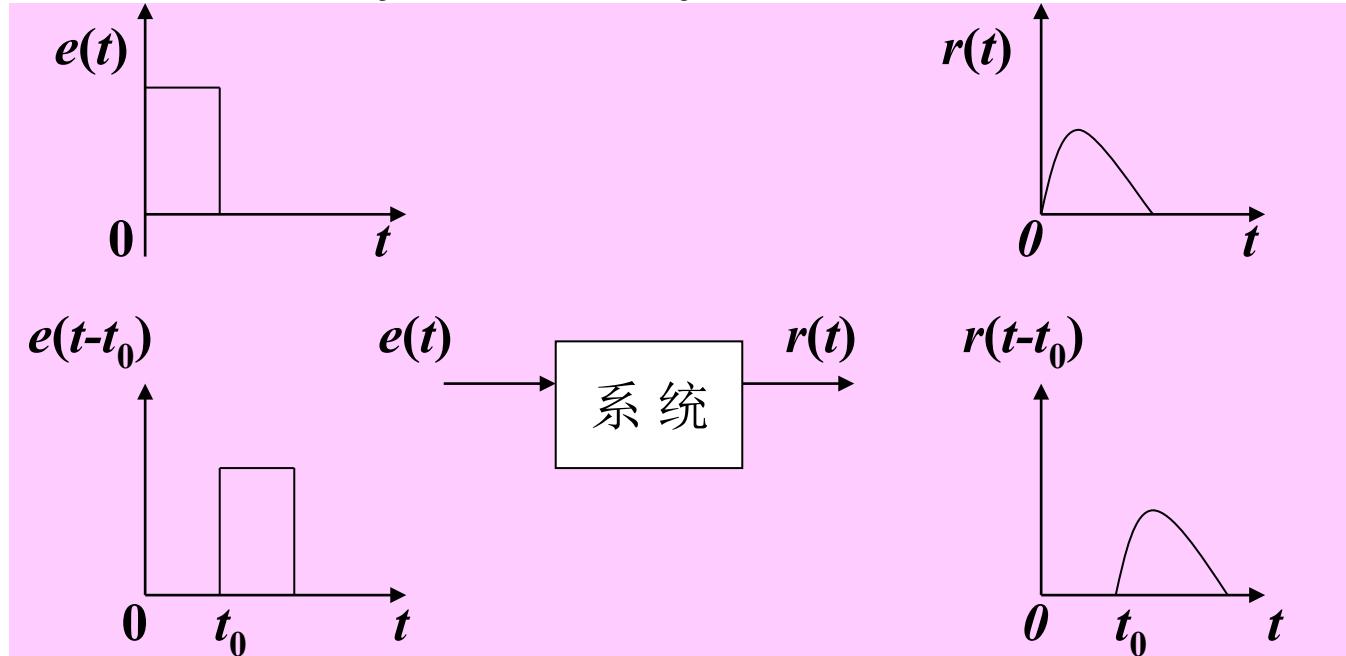
时不变特性表现为响应的形状不随激励施加的时间不同而改变, 即

若

$$e(t) \rightarrow r(t)$$

则

$$e(t-t_0) \rightarrow r(t-t_0)$$



一个系统,如果当输入信号有时移时,输出也产生同样的时移,除此之外,输出响应无任何其它变化。则该系统是时不变的,否则就是时变的。

线性非时变系统简称**LTI**系统 (Linear Time Invariant) :

若 $e_1(t) \rightarrow r_1(t)$, $e_2(t) \rightarrow r_2(t)$

则 $k_1 e_1(t-t_1) + k_2 e_2(t-t_2) \rightarrow k_1 r_1(t-t_1) + k_2 r_2(t-t_2)$

检验一个系统是时不变系统的步骤:

1. 令输入为 $x_1(t)$ 根据系统的描述, 确定此时的输出 $y_1(t)$
2. 将输入信号变为 $x_2(t) = x_1(t - t_0)$ 再根据系统描述确定输出 $y_2(t)$
3. 检验 $y_2(t)$ 是否等于 $y_1(t - t_0)$

例: $y(t) = x(-t)$

当 $x(t) = x_1(t)$ 时, $y_1(t) = x_1(-t)$

$x(t) = x_2(t) = x_1(t - t_0)$ 时 $y_2(t) = x_2(-t) = x_1(-t - t_0)$

而 $y_1(t - t_0) = x_1[-(t - t_0)] = x_1(t_0 - t)$

\therefore 该系统是时变的。

3. 因果性

激励是产生响应的原因，而零状态响应是激励引起的结果，因此称**响应(零状态响应)**不出现于激励之前的系统为因果系统。即

$$\text{若 } e(t) = 0, \quad t < t_0$$

$$\text{则 } r(t) = 0, \quad t < t_0$$

如果一个系统在任何时刻的输出都只与当前这个时刻的输入以及以前的输入有关，而和该时刻以后的输入无关就称这个系统是因果的。否则就是非因果的。

例: $r_1(t) = e_1(t - 1)$

$$r_2(t) = e_2(t + 1)$$

$$r_3(t) = e_3(2t)$$



一般地,非因果系统是不可物理实现的。由此可知因果性对系统实现的重要性。但在非实时处理信号的离散时间系统或信号的自变量并不具有时间概念的情况下,因果性并不一定成为系统能否物理实现的先决限制。

例如在图像处理中,自变量是图像中各点的坐标位置,而并非代表时间。在某些数据处理中如股市分析,经济预测等,实际上是以足够的延时来换取非因果性的实现。

因果信号:

常把 $t=$ 时接入系统的信号称为因果信号。

4. 稳定性

系统的稳定性是指对有界的激励，系统的零状态响应也是有界的，这常称为**有界输入有界输出(BIBO)**稳定，简称稳定。

当 $|e(t)| < \infty$ 时

$|r(t)| < \infty$ (零状态响应)

就称该系统是稳定的，否则称为不稳定的。

问题：系统的几个性质之间有关系吗？

(四) 系统的类型

- 按线性特性分为**线性系统**和**非线性系统**

线性系统: 由线性元件组成, 且具有线性性质的系统

非线性系统: 由非线性元件组成, 不具备线性性质

- 按非时变性分为**非时变系统**和**时变系统**

- 按因果性分为**因果系统**和**非因果系统**

- 按稳定性分为**稳定系统**和**非稳定系统**

- 根据系统传输和处理的信号的性质分为**连续时间系统**和**离散时间系统**

混合系统: 离散时间系统与连续时间系统联合运用,

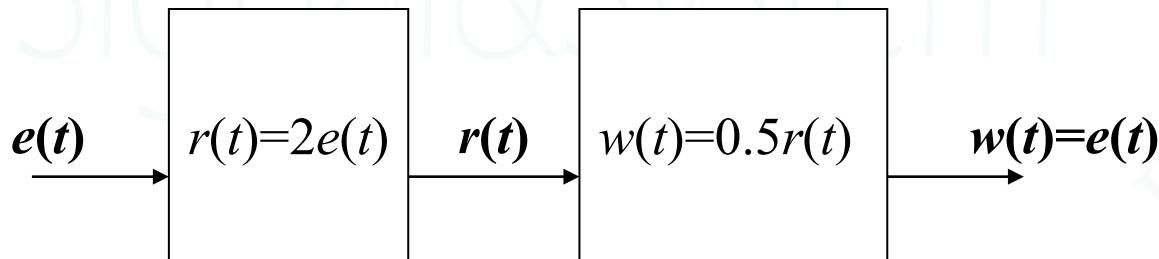
如: 数字通信系统和自动控制系统

- 按系统参数分为**集总参数系统**和**分布参数系统**

- 按系统是否含源分为**无源系统**和**有源系统**

8. 按系统是否含有记忆元件分为**记忆系统**(动态系统)和**无记忆系统**(即时系统)
9. **可逆系统**和**不可逆系统**

一个系统如果在不同的输入下导致不同的输出就称该系统是可逆的，那么就有一个逆系统存在，当逆系统与原系统级联后就会产生一个输出等于第一个系统的输入，如



不可逆系统，如： $r(t)=e^2(t)$

本课程讨论**线性非时变动态系统**(包括连续时间系统和离散时间系统)的基本理论和基本分析方法。

四、线性非时变系统的分析

中心问题：已知激励信号和系统求其响应、分析系统特性

(一) 信号分析

把一个复杂信号分解成简单的基本信号，通过对这些信号的分析而分析复杂的信号。

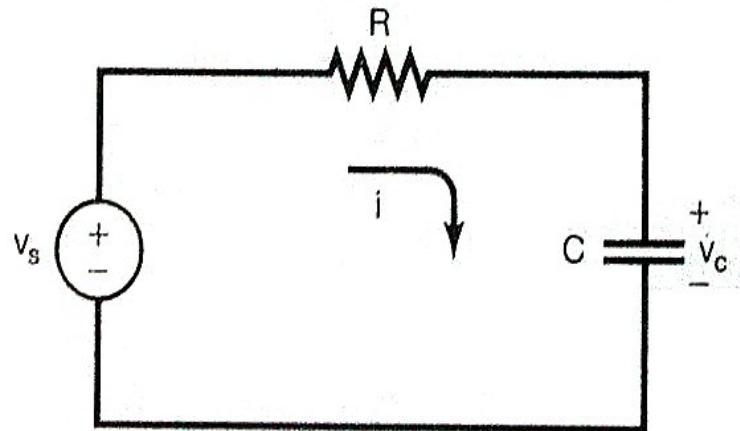
1. 时域法：分解成若干脉冲序列即冲激序列或阶跃序列——卷积积分法

2. 变换域法：频域法和复频域法(分解成不同频率的正弦信号或复数正弦信号)

(二) 系统分析

建立表征系统的数学模型(方程或框图)并求解。

1. 输入——输出法：建立激励与响应的直接关系



$$RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = v_s(t)$$

连续系统: 常系数线性**微分**方程

离散系统: 常系数线性**差分**方程

2. 状态变量法: 不仅给出系统的响应, 还揭示系统内部的数学结构

- (1) **状态方程**——描述系统内部状态变量与激励之关系
- (2) **输出方程**——描述系统的响应与状态变量以及激励之间的关系

五、非电系统的分析

线性系统的分析方法也可应用到其他非电的学科中，只要所研究的系统其工作能够表述为线性微分方程或线性差分方程，就能用该方法去求解去研究了。

如一机械减震系统(教材图1-16)是一个没有外力作用的自由振动系统，其运动过程可用如下方程描述：

$$M \frac{d^2x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = 0$$

课程内容与结构：

第二、七章——时域分析系统(连续和离散时间系统)

第三、四、五、八章——变换域分析(付氏变换、拉氏变换、Z变换)

第六章——系统函数与系统的稳定性

第十一章——状态变量分析

作业:

1.3 1.6 1.8(1)(3) 1.10 1.11

引言

LTI连续时间系统的分析：建立并求解线性微分方程

1. 时域分析法：在时间域内进行分析，即在分析过程中所涉及的函数的变量都是时间 t 。

特点：直观、物理概念清楚。

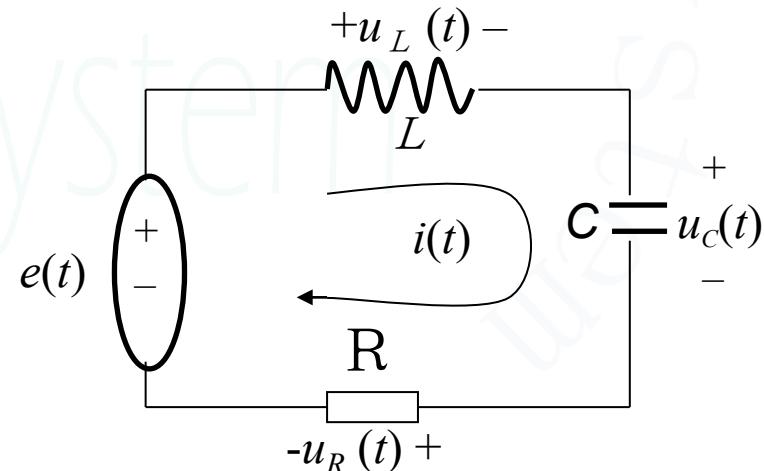
例如图电路，若要求回路电流，则由电路的基本定律，有

$$L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau + Ri(t) = e(t)$$

两边微分，得系统数学模型

$$L \frac{d^2i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{de(t)}{dt}$$

此为一个二阶系统



*不同性质的系统可能具有相同的数学模型。

第二章 连续时间系统的时域分析

古典解法：微分方程的解=齐次方程的通解+特解

齐次方程为

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0$$

由系统自身
特性决定

通解为： $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ —— 自然响应 (自由响应)

非齐次方程特解的形式由激励函数决定——受迫响应

即 (系统) 全响应=自由响应+受迫响应

$$i(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + i_h(t)$$

由激励和系
统共同决定

此法适合于激励函数为直流，正弦或指数等简单形式的情况，复杂函数激励时，可用叠加积分法或变换域方法。

只有起始状态

只有外加激励

全响应=零输入响应+零状态响应

零输入响应是自由响应的一部分；受迫响应是零状态响应的一部分；自由响应中除了零输入响应之外的那部分加上受迫响应就是零状态响应。

零输入响应的求解类似自由响应的求法；零状态响应的求取在时域一般采用叠加积分法。

$$f_i(t) \rightarrow r_i(t)$$

$$e(t) = \sum_i a_i f_i(t) \rightarrow r_{zs}(t) = \sum_i a_i r_i(t)$$

2. **变换域分析法**：为了便于求解微分方程而将时间变量变成其它变量如频率、复频率等----求零状态响应用频域分析法、复频域分析法等。

本章内容：

- 系统方程的算子表示法
- 奇异函数（信号）
- 系统的零输入响应与零状态响应
- 卷积积分及其性质
- LTI 连续时间系统的时域求解

一、系统方程的算子表示法

(一) 微分算子及其运算规则

引进算子 p

令微分算子 $\frac{d}{dt} = p$, $\frac{d^n}{dt^n} = p^n$

积分算子 $\int_{-\infty}^t 0 d\tau = \frac{1}{p} 0$

于是 $\frac{d^n x}{dt^n} = p^n x$, $\int_{-\infty}^t x d\tau = \frac{1}{p} x$

微分方程: $L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{de(t)}{dt}$

可写为: $Lp^2 i(t) + Rpi(t) + \frac{1}{C} i(t) = pe(t)$

或简化为: $(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C})i(t) = pe(t)$

第二章 连续时间系统的时域分析

讨论: ① 电容、电感的等效算子符号

对电感: $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = Lp i_L(t)$

对电容: $u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau = \frac{1}{Cp} i_C(t)$

Lp ——感抗 $\frac{1}{Cp}$ ——容抗

② 引进 p 后, 微分方程 \rightarrow 代数方程, 一般情况下, 代数方程的运算规则也适用于算子方程, 但有例外:

其一, 对算子多项式可进行因式分解, 但不能进行公因子相消, 如:

$$(p^2 + 5p + 6)x = (p + 2)(p + 3)x$$

$$p \bullet \frac{1}{p} x = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t x d\tau = x$$

但对于算子方程 $px = py (\rightarrow x = y + c)$ 两边的算子符号因子 p 不能消去。

其二，算子的乘除顺序不可随意颠倒，即

$$\text{因为 } \frac{1}{p} \bullet px = \int_{-\infty}^t \left(\frac{d}{d\tau} x \right) d\tau = x(t) - x(-\infty) \neq x$$

(二) 转移算子 $H(p)$

n 阶线性微分方程为：

$$\begin{aligned} \frac{d^n r}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} r}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dr}{dt} + a_0 r &= b_m \frac{d^m e}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e \\ p^n r + a_{n-1} p^{n-1} r + \cdots + a_1 p r + a_0 r &= b_m p^m e + b_{m-1} p^{m-1} e + \cdots + b_1 p e + b_0 e \end{aligned}$$

即 $(p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0) r = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0) e$

第二章 连续时间系统的时域分析

令 $D(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1p + a_0$

$$N(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0$$

则有 $D(p)r(t) = N(p)e(t)$

$$r(t) = \frac{N(p)}{D(p)}e(t)$$

定义 $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ —— 转移算子

于是系统方程可写成: $r(t) = H(p)e(t)$

求零输入响应时, $e(t) = 0$ 此时方程为齐次方程:

$$D(p)r(t) = 0$$

利用初始条件求解此方程即得零输入响应

算子形式的微分方程与其拉普拉斯变换式形式相似!

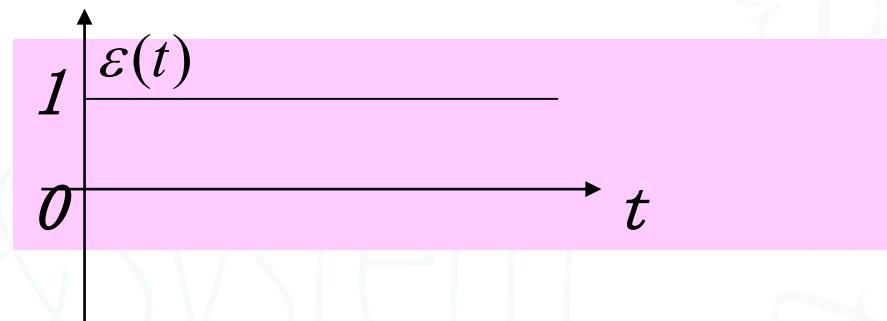
二、奇异函数(信号)

(一) 阶跃函数(信号)

1. 单位阶跃函数(信号)

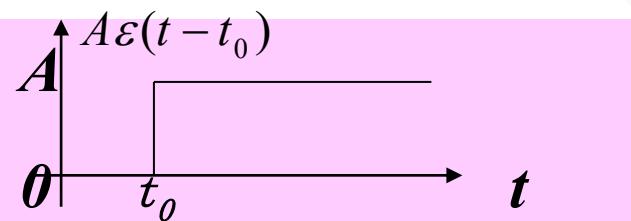
定义

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & (t < 0) \\ 1, & (t > 0) \end{cases}$$



2. 延迟的阶跃函数(信号)

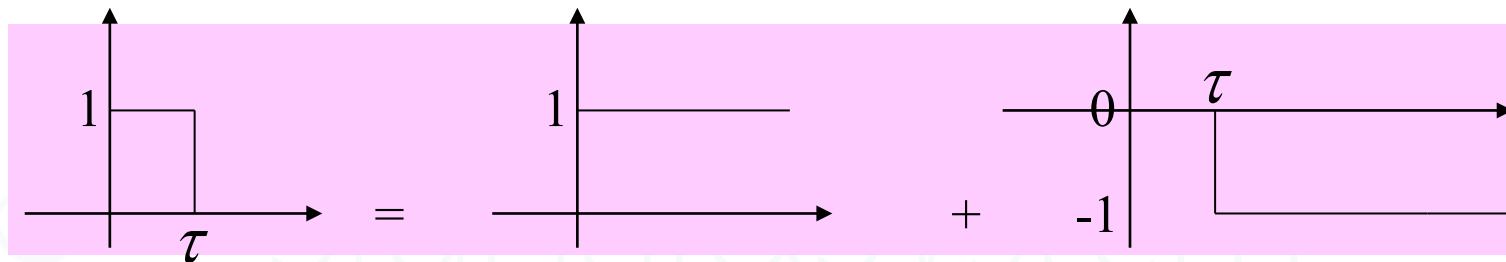
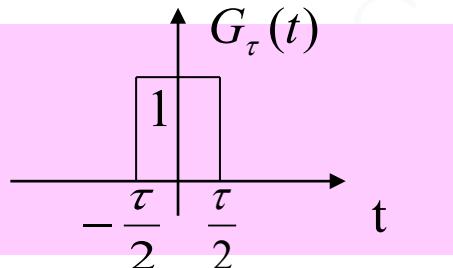
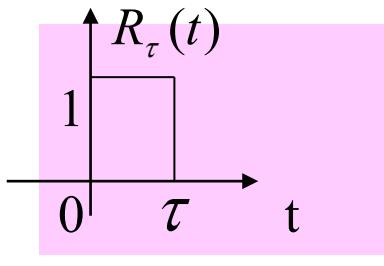
$$A\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 0, & (t < t_0) \\ A, & (t > t_0) \end{cases}$$



$$f(t)\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 0, & (t < t_0) \\ f(t), & (t > t_0) \end{cases}$$

阶跃函数具有切除的作用！

3. 利用阶跃函数(信号)表示矩形脉冲



$$\text{即 } R_\tau(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - \tau)$$

$$\text{于是 } G_\tau(t) = R_\tau(t + \frac{\tau}{2}) = \varepsilon(t + \frac{\tau}{2}) - \varepsilon(t - \frac{\tau}{2})$$

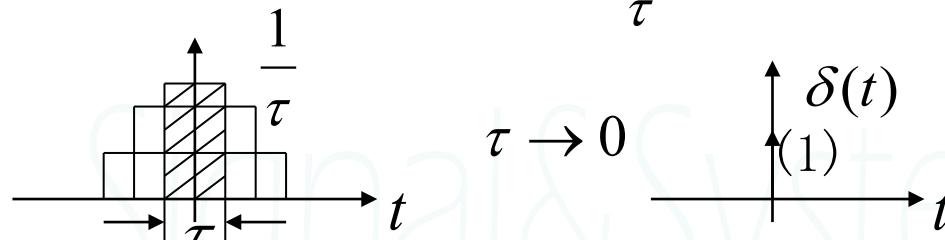
若在一电容的两端施加一单位阶跃电压，则电容电流为：

$$i(t) = C \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \text{无法确定,} & t = 0 \end{cases}$$

(二) 冲激函数(信号)

1. 单位冲激函数(信号)

矩形脉冲宽度为 τ , 高为 $\frac{1}{\tau}$, 面积为 $S = \tau \cdot \frac{1}{\tau} = 1$



此极限情况即为单位冲激函数, 记为 $\delta(t)$ 。

定义:
$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} [\varepsilon(t + \frac{\tau}{2}) - \varepsilon(t - \frac{\tau}{2})]$$

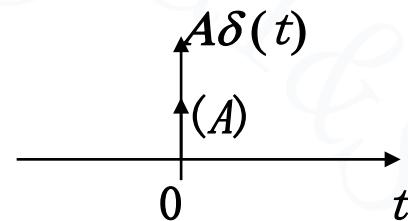
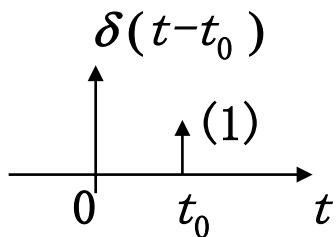
或定义: 在 $t \neq 0$ 时, 函数值均为零, 在 $t = 0$ 处函数值为无限大, 而脉冲面积为1。

即

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \\ \delta(t) = 0, t \neq 0 \end{cases}$$

延迟的单位冲激函数：

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \\ \delta(t - t_0) = 0, t \neq t_0 \end{cases}$$



2. 冲激函数的性质

(1) $\delta(t)$ 的抽样性质

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)$$

例

$$\sin \pi t \delta(t) = \sin \pi t \Big|_{t=0} \delta(t) = 0$$

第二章 连续时间系统的时域分析

$$\sin \pi \delta(t - \frac{1}{4}) = \sin \pi t \Big|_{t=\frac{1}{4}} \delta(t - \frac{1}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta(t - \frac{1}{4})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin \pi t \delta(t) dt = \sin \pi t \Big|_{t=0} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin \pi t \delta(t - \frac{1}{4}) dt = \sin \pi t \Big|_{t=\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \sin t \delta(t - \frac{\pi}{6}) dt = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\int_1^2 e^{-at} \delta(t) dt = 0$$
 注意：在积分区间(1, 2)内，被积函数为0

(2) 单位冲激函数的积分是单位阶跃函数

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \varepsilon(t)$$

(3) 单位阶跃函数的导数是单位冲激函数

$$\frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \delta(t)$$

(4) 单位冲激函数是偶函数

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

证明: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-t)\varphi(t)dt \xrightarrow{\tau=-t} = \int_{\infty}^{-\infty} \delta(\tau)\varphi(-\tau)(-d\tau)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\varphi(-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\varphi(0)d\tau = \varphi(0)$$

$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)$

$$\therefore \delta(-t) = \delta(t)$$

(5) 尺度变换

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \text{ 和 } \delta(at - t_0) = \frac{1}{|a|} \delta(t - \frac{t_0}{a})$$

a, t_0 为常数且 $a \neq 0$

第二章 连续时间系统的时域分析

证明：令 $at = x$,

当 $a > 0$ 时, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\varphi(t)dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi\left(\frac{x}{a}\right)dx = \frac{1}{a}\varphi(0)$

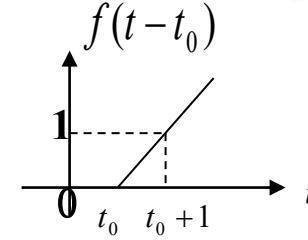
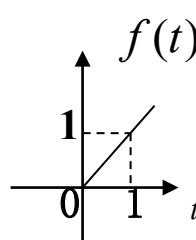
当 $a < 0$ 时, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\varphi(t)dt = \int_{\infty}^{-\infty} \delta(x)\varphi\left(\frac{x}{a}\right)d\left(\frac{x}{a}\right)$
 $= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\delta(x)dx = -\frac{1}{a}\varphi(0) = \frac{1}{|a|}\varphi(0)$

故 $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

同理可证: $\delta(at - t_0) = \frac{1}{|a|}\delta(t - \frac{t_0}{a})$

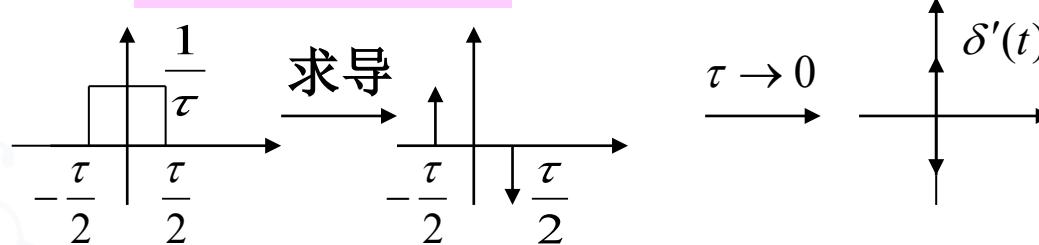
3. 奇异函数的若干次积分和若干次微分也都是奇异函数
如单位阶跃函数的积分是**单位斜变函数**:

$$f(t) = \int_{-\infty}^t \varepsilon(t) dt = \begin{cases} 0(t < 0) \\ t(t \geq 0) \end{cases}$$



4. 单位冲激函数的导数是**单位冲激偶**

$$\delta'(t) = \frac{d}{dt} \delta(t)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t - t_0) f(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f'(t) dt = -f'(t_0)$$

$$f(t) \delta'(t - t_0) = f(t_0) \delta'(t - t_0) - f'(t_0) \delta(t - t_0)$$

第二章 连续时间系统的时域分析

例如:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) \sin \pi t dt = -\pi \cos \pi t \Big|_{t=0} = -\pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t - \frac{1}{4}) \sin \pi t dt = -\pi \cos \pi t \Big|_{t=\frac{1}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$

$$\sin \pi t \delta'(t) = \sin \pi t \Big|_{t=0} \delta'(t) - \pi \cos \pi t \Big|_{t=0} \delta(t) = -\pi \delta(t)$$

$$\begin{aligned} \sin \pi t \delta'(t - \frac{1}{4}) &= \sin \pi t \Big|_{t=\frac{1}{4}} \delta'(t - \frac{1}{4}) - \pi \cos \pi t \Big|_{t=\frac{1}{4}} \delta(t - \frac{1}{4}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \delta'(t - \frac{1}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \delta(t - \frac{1}{4}) \end{aligned}$$

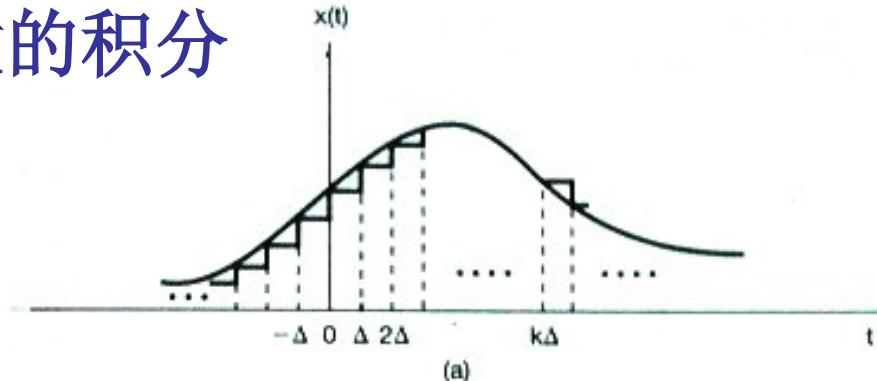
此外, 还可以定义 $\delta(t)$ 的 n 阶导数 $\delta^{(n)}(t)$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) \varphi(t) dt &= (-1)^{(n)} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi^{(n)}(t) dt \\ &= (-1)^{(n)} \varphi^{(n)}(0) \end{aligned}$$

5. 任意函数表示为冲激函数的积分

定义：

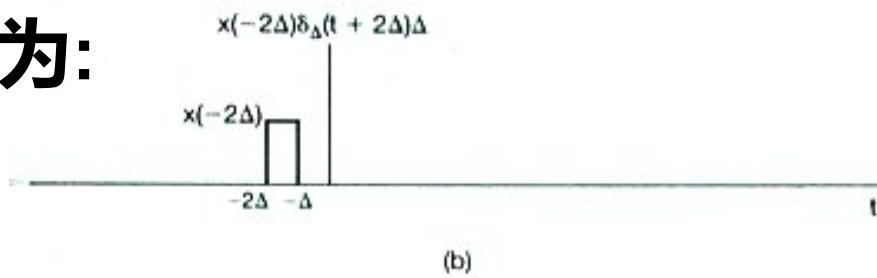
$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



(a)

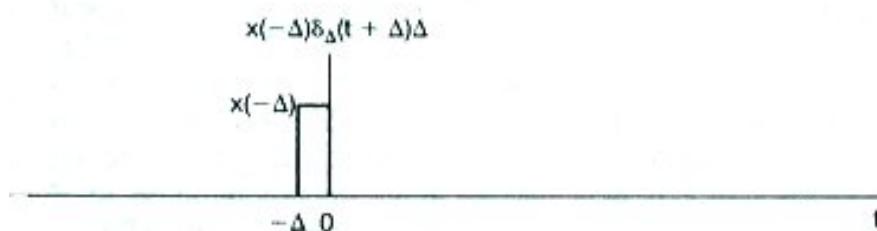
则任意函数 $x(t)$ 可近似表示为：

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \Delta \delta_\Delta(t - k\Delta)$$



(b)

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \Delta \delta_\Delta(t - k\Delta)$$



(c)

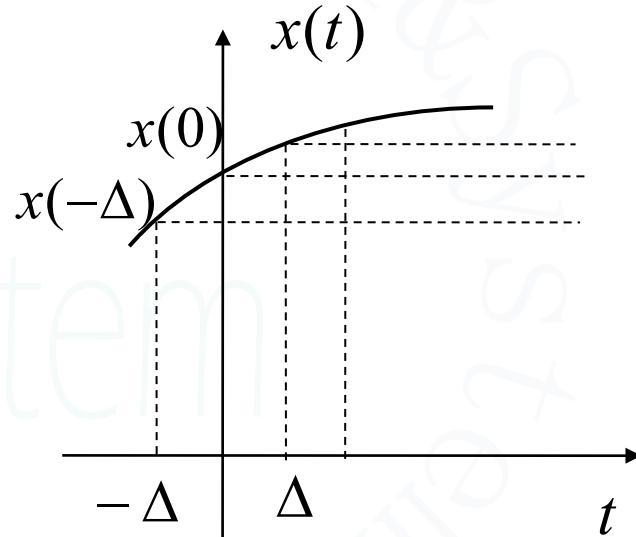
当 $\Delta \rightarrow 0(d\tau)$ 时, $k\Delta \rightarrow \tau$, $\delta_\Delta(t) \rightarrow \delta(t)$, $\sum \rightarrow \int$,

于是：

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

任意波形的信号也可以近似表示为无穷多个阶跃信号之和(分解过程略):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x'(\tau) \varepsilon(t - \tau) d\tau$$



利用后面将要介绍的卷积性质，可以很方便地证明这一结论。

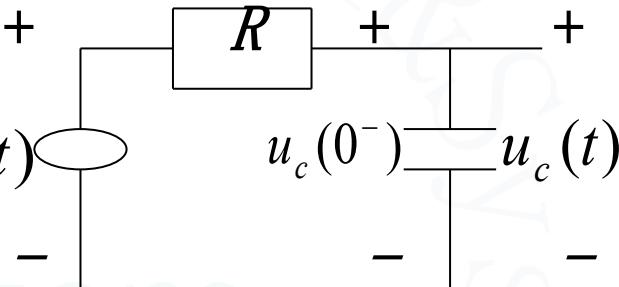
三、系统的零输入响应与零状态响应

(一) 零输入响应与零状态响应的概念

例 如图 RC 电路, 电容两端有初始电

压 $u_c(0^-)$, 激励为 $e(t) = e(t)\varepsilon(t)$, $e(t)$

求 $t > 0$ 时系统的响应 $u_c(t)$ 。



解: (1) 建立系统的数学模型:

$$RC \frac{d}{dt} u_c(t) + u_c(t) = e(t)$$

$$\text{即 } \frac{d}{dt} u_c(t) + \frac{1}{RC} u_c(t) = \frac{1}{RC} e(t)$$

(2) 求系统的响应

$$\text{两边乘以 } e^{\frac{t}{RC}}: e^{\frac{t}{RC}} \frac{d}{dt} u_c(t) + \frac{1}{RC} e^{\frac{t}{RC}} u_c(t) = \frac{1}{RC} e^{\frac{t}{RC}} e(t)$$

第二章 连续时间系统的时域分析

$$\frac{d}{dt} [e^{\frac{t}{RC}} u_c(t)] = \frac{1}{RC} e^{\frac{t}{RC}} e(t)$$

两边求积分: $\int_{0^-}^t \frac{d}{dt} [e^{\frac{\tau}{RC}} u_c(\tau)] d\tau = \int_{0^-}^t \frac{1}{RC} e^{\frac{\tau}{RC}} e(\tau) d\tau$

$$e^{\frac{t}{RC}} u_c(t) - u_c(0^-) = \frac{1}{RC} \int_{0^-}^t e^{\frac{\tau}{RC}} e(\tau) d\tau$$

得 $u_c(t) = e^{-\frac{t}{RC}} u_c(0^-) + \frac{1}{RC} \int_{0^-}^t e^{-\frac{t-\tau}{RC}} e(\tau) d\tau$
 $= u_{czi}(t) + u_{czs}(t)$

$u_{czi}(t) = e^{-\frac{t}{RC}} u_c(0^-)$: 只与电容两端的初始状态有关, 与输入激励无关

零输入响应 (即当激励 $e(t) = 0$ 时, 系统的响应)

$u_{czs}(t) = \frac{1}{RC} \int_{0^-}^t e^{-\frac{t-\tau}{RC}} e(\tau) d\tau$: 与初始状态无关, 只与激励有关

零状态响应 (即当 $u_c(0^-) = 0$ 时, 系统的响应)

(二) 冲激响应和阶跃响应

系统在单位冲激信号 $\delta(t)$ 激励下产生的零状态响应称为系统的**冲激响应** $h(t)$ 。

系统在单位阶跃信号 $\varepsilon(t)$ 激励下产生的零状态响应称为系统的**阶跃响应** $r_\varepsilon(t)$ 。

LTI系统:
$$r_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau, h(t) = \frac{dr_\varepsilon(t)}{dt}$$

四、卷积积分及其性质

(一) 卷积积分的定义

$f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是具有相同变量 t 的两个函数, 它们相卷积后所成的变量为 $g(t)$, $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 和 $g(t)$ 满足下列运算关系
$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$
, 这种运算关系就称为卷积积分, 并表示为:

$$g(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

(二) 卷积积分的物理意义



任意信号可表示为冲激函数的积分: $e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$

当 $e(t) = e(t)\varepsilon(t)$ 时, $e(t) = \int_0^{\infty} e(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$

线性时不变系统: $\delta(t) \rightarrow h(t)$

则 $\delta(t - \tau) \rightarrow h(t - \tau)$

当激励为 $e(t) = \int_0^{\infty} e(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$ 时, 系统的响应为:

$$r(t) = \int_0^{\infty} e(\tau) h(t - \tau) d\tau \stackrel{\text{因果系统}}{=} \int_0^t e(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

结论: 系统的零状态响应等于系统的激励与系统的单位冲激响应的卷积积分!

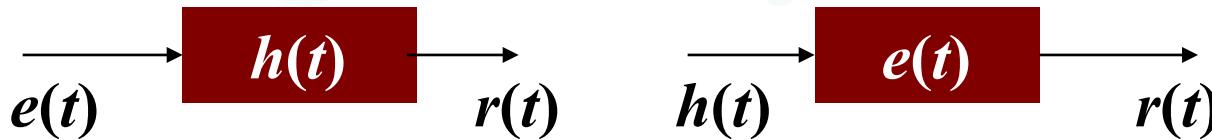
(三) 卷积的性质

1. 卷积的代数运算

(1) 交换率: $e(t) * h(t) = h(t) * e(t)$

$$r(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e(t - \tau)h(\tau)d\tau = h(t) * e(t)$$

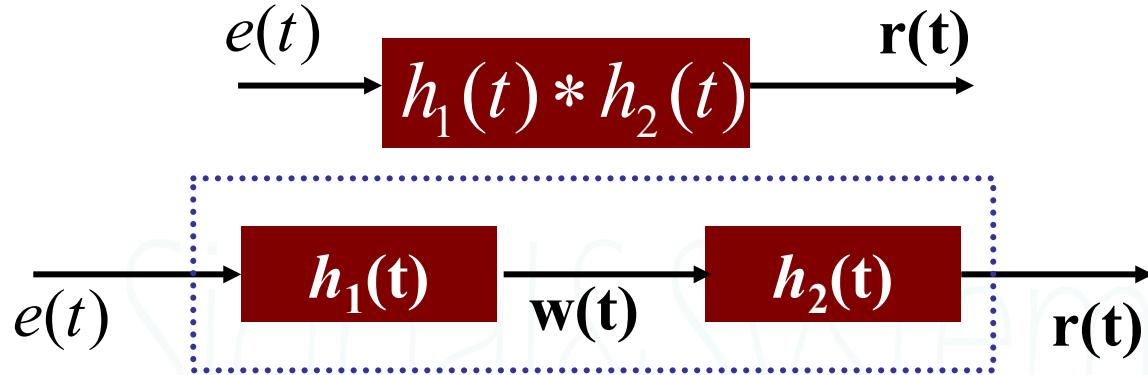


从系统的观点解释:

一个单位冲激响应是 的LTI系统对输入信号所产生的响应, 与一个单位冲激响应是 的LTI系统对输入信号 所产生的响应相同。

(2)结合率：

$$e(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [e(t) * h_1(t)] * h_2(t)$$



从系统的观点解释：

$$r(t) = w(t) * h_2(t) = [e(t) * h_1(t)] * h_2(t)$$

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

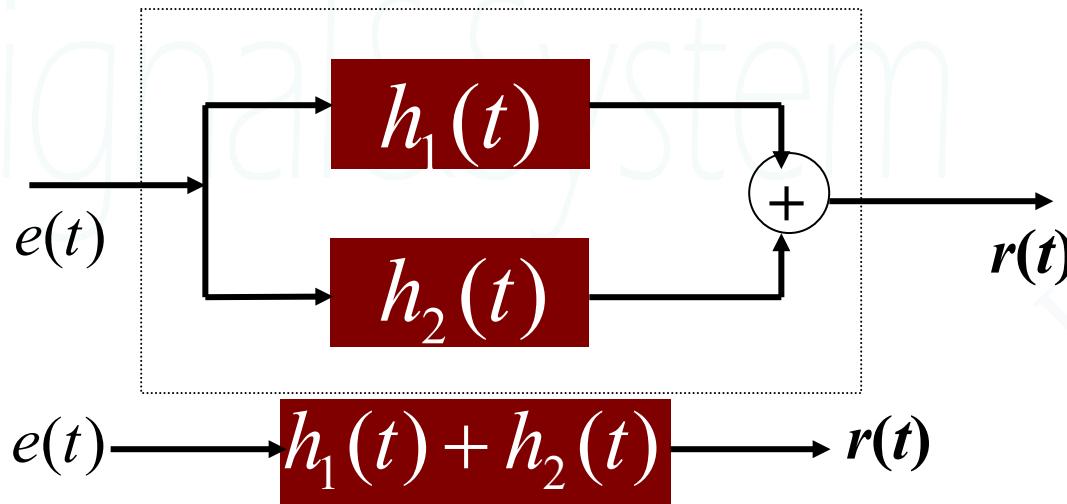
两个LTI系统级联时，系统的单位冲激响应等于LTI子系统单位冲激响应的卷积。

(3)分配率：

$$e(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = e(t) * h_1(t) + e(t) * h_2(t)$$

$$r(t) = e(t) * h_1(t) + e(t) * h_2(t) \dots \dots \dots (1)$$

$$= e(t) * [h_1(t) + h_2(t)] \dots \dots \dots (2)$$



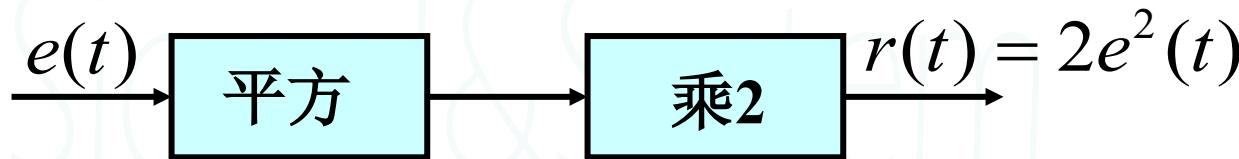
从系统的观点解释：

两个LTI系统并联，其总的单位冲激响应等于各个子系统单位冲激响应之和。

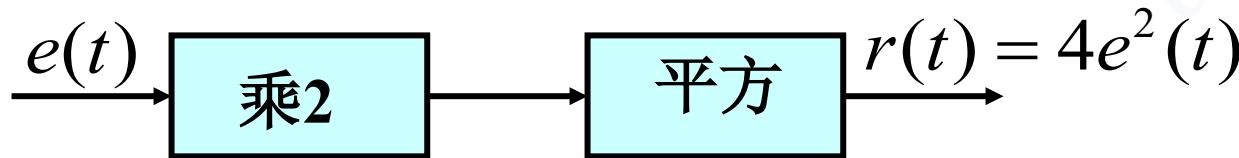
产生以上结论的前提条件：

- ① 系统必须是LTI系统；
- ② 所有涉及到的卷积运算必须收敛。

例如：



若交换级联次序，即：



显然是不等价的。

结论：在级联中次序可以交换只是LTI系统的特性。

2. 卷积的积分与微分

卷积的微分：

若 $r(t) = e(t) * h(t) = h(t) * e(t)$

则 $\frac{d}{dt} r(t) = \frac{d}{dt} e(t) * h(t) = h(t) * \frac{d}{dt} e(t)$

卷积的积分：

若 $r(t) = e(t) * h(t) = h(t) * e(t)$

则 $\int_{-\infty}^t r(x)dx = \left[\int_{-\infty}^t e(x)dx \right] * h(t) = e(t) * \int_{-\infty}^t h(x)dx$

可推得： $e(t) * h(t) = \frac{d}{dt} e(t) * \int_{-\infty}^t h(x)dx = \left[\int_{-\infty}^t e(x)dx \right] * \frac{d}{dt} h(t)$

$$r^{(i)}(t) = [e^{(j)}(t) * h^{(i-j)}(t)]$$

3. 与冲激函数和阶跃函数的卷积

(1) 与 $\delta(t)$ 的卷积

$$e(t) * \delta(t) = e(t)$$

$$e(t) * \delta(t - t_0) = e(t - t_0)$$

$$e(t - t_0) * \delta(t - t_1) = e(t - t_1) * \delta(t - t_0) = e(t - t_0 - t_1)$$

从系统的观点解释：

单位冲激响应等于 $\delta(t)$ 的系统是恒等系统。

(2) 与 $\varepsilon(t)$ 的卷积

$$e(t) * \varepsilon(t) = e(t) * \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t e(\tau) d\tau * \delta(t) = \int_{-\infty}^t e(\tau) d\tau$$

$$e(t) * \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t e(\tau) d\tau; \quad \text{积分器 } h(t) = \varepsilon(t)$$

$$e(t) * \delta'(t) = e'(t); \quad \text{微分器 } h(t) = \delta'(t)$$

4. 函数延时后的卷积

若 $r(t) = e(t) * h(t)$

则 $e(t) * h(t - t_1) = r(t - t_1)$

证: $e(t) * h(t - t_1) = e(t) * [h(t) * \delta(t - t_1)]$

$$= [e(t) * h(t)] * \delta(t - t_1)$$

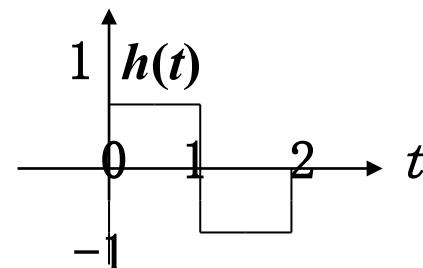
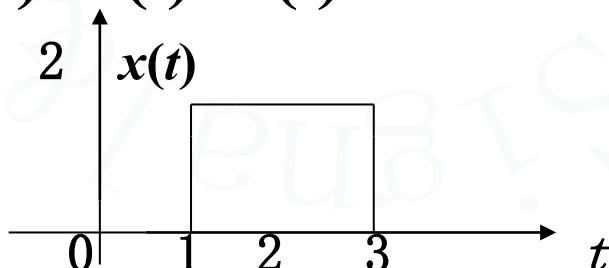
$$= r(t) * \delta(t - t_1)$$

$$= r(t - t_1)$$

(四) 卷积的求取

例1 函数 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的波形如下, 求它们的卷积

$$y(t) = x(t) * h(t)$$



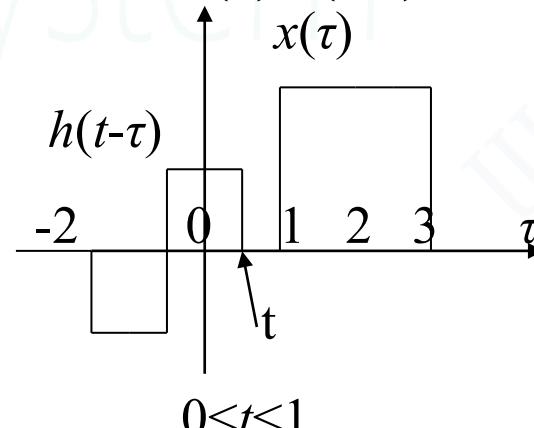
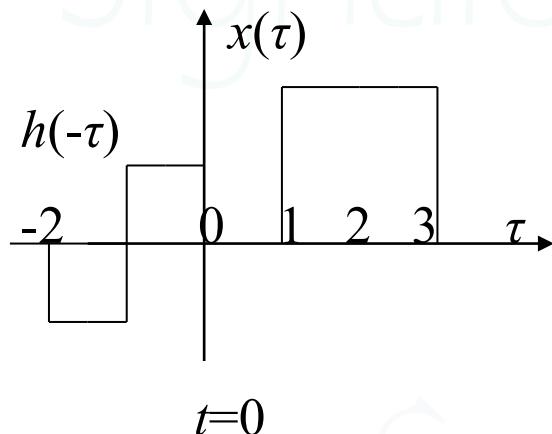
解: [方法一]用图示法

步骤如下:

(1) 将横坐标换成 τ 且反褶 $h(\tau)$, 得 $x(\tau)$ 和 $h(-\tau)$

(2) 将 $h(-\tau)$ 沿正 τ 轴平移时间 t , 得 $h(t-\tau)$, 当参量 t 的值不同时, $h(t-\tau)$ 的位置就不同

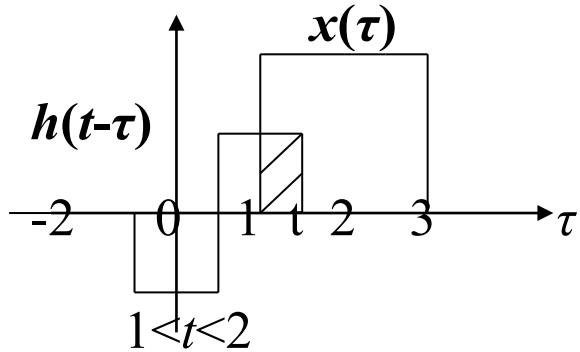
(3) 将 $x(\tau)$ 和 $h(t-\tau)$ 相乘, 然后积分, 亦即求 $x(\tau)h(t-\tau)$ 曲线下的面积.



$$t < 1 \text{ 时} : x(\tau)h(t-\tau) = 0$$

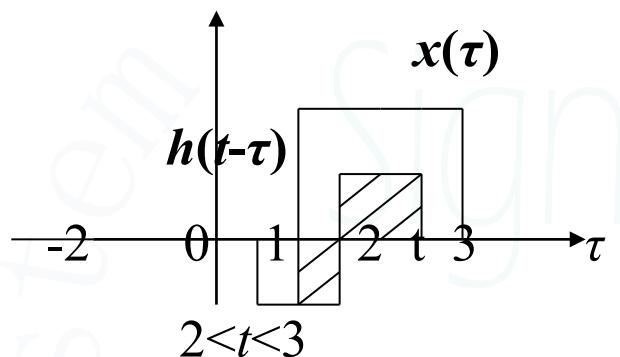
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0$$

第二章 连续时间系统的时域分析



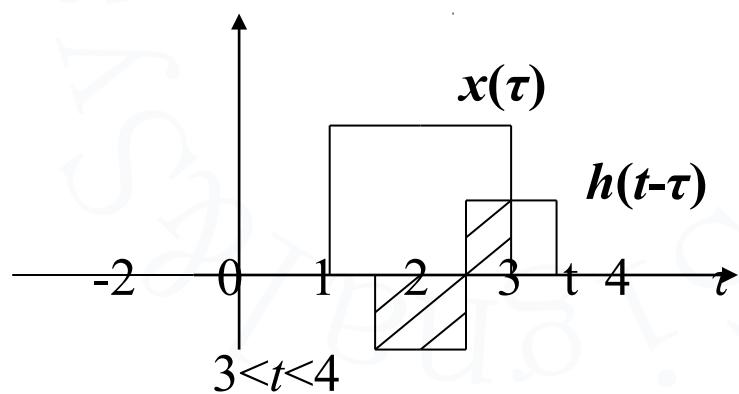
$$1 \leq t < 2 :$$

$$y(t) = \int_1^t (1 \times 2) d\tau = 2t - 2$$



$$2 \leq t < 3 :$$

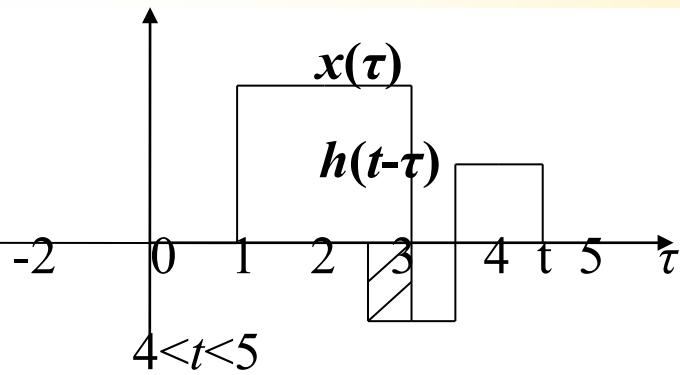
$$y(t) = \int_1^{t-1} (-1 \times 2) d\tau + \int_{t-1}^t (1 \times 2) d\tau$$
$$y(t) = -2t + 6$$



$$3 \leq t < 4 :$$

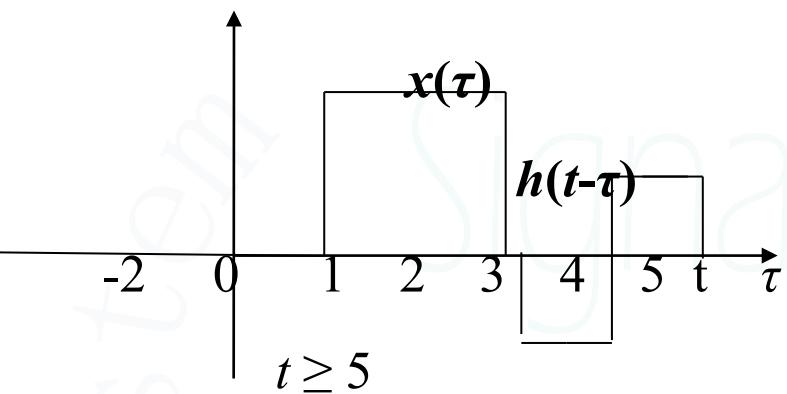
$$y(t) = \int_{t-2}^{t-1} (-1 \times 2) d\tau + \int_{t-1}^3 (1 \times 2) d\tau$$
$$y(t) = -2t + 6$$

第二章 连续时间系统的时域分析



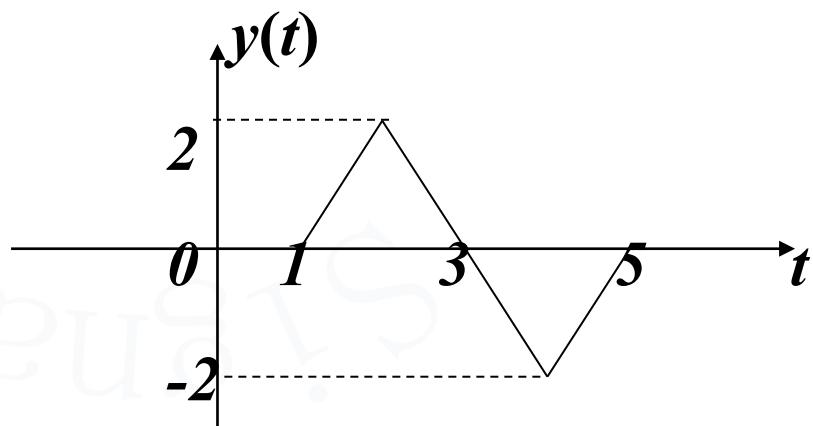
$4 \leq t < 5 :$

$$y(t) = \int_{t-2}^3 (-1 \times 2) d\tau = 2t - 10$$



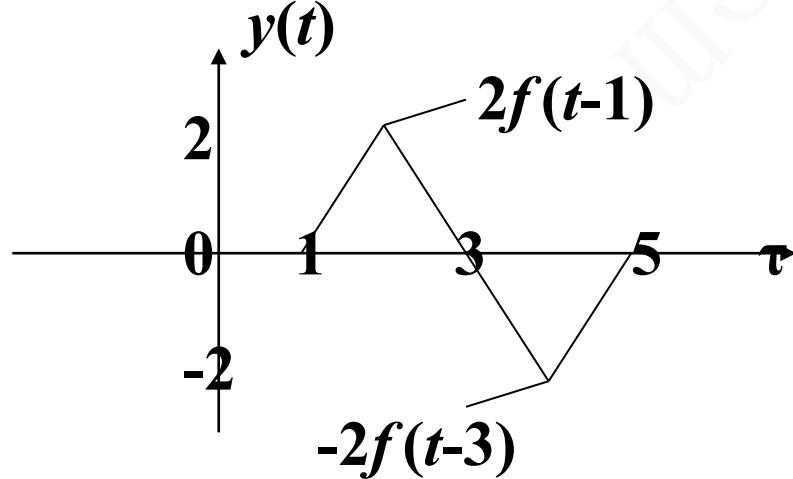
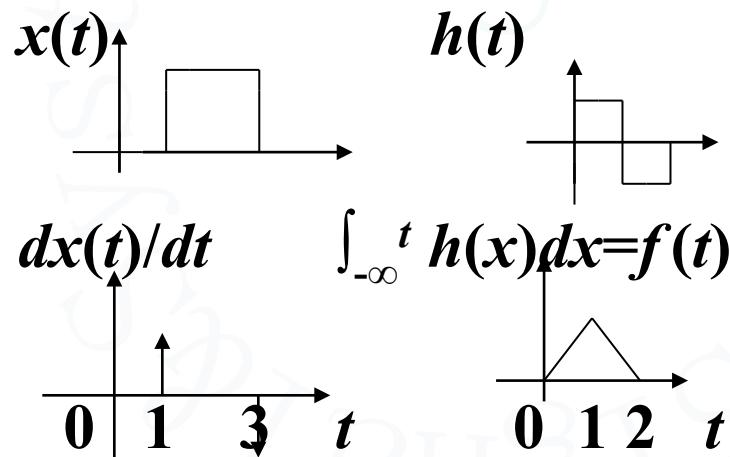
$t \geq 5$ 时 : $x(\tau)h(t-\tau) = 0$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau) d\tau = 0$$



[方法二]利用卷积的性质

$$\begin{aligned}
 y(t) = x(t) * h(t) &= dx(t)/dt * \int_{-\infty}^t h(x)dx \\
 &= [2\delta(t-1) - 2\delta(t-3)] * f(t) \\
 &= 2\delta(t-1) * f(t) - 2\delta(t-3) * f(t) \\
 &= 2f(t-1) - 2f(t-3)
 \end{aligned}$$



恰当地利用卷积的性质可以简化卷积的计算！

第二章 连续时间系统的时域分析

例2 已知 $x(t) = e^{-t} \varepsilon(t)$, $h(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)$,
求 $x(t) * h(t)$ 。

解: $x(t) * h(t) = x^{(-1)}(t) * h'(t) = x^{(-1)}(t) * [\delta(t) - \delta(t-2)]$
 $= x^{(-1)}(t) - x^{(-1)}(t-2)$

$$x^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\tau} \varepsilon(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t e^{-\tau} d\tau \cdot \varepsilon(\tau)$$
$$= -e^{-\tau} \Big|_0^t \varepsilon(t) = (1 - e^{-t}) \varepsilon(t)$$

$$x(t) * h(t) = x^{(-1)}(t) - x^{(-1)}(t-2)$$
$$= (1 - e^{-t}) \varepsilon(t) - [1 - e^{-(t-2)}] \varepsilon(t-2)$$

第二章 连续时间系统的时域分析

例3 已知 $x_1(t) * t\varepsilon(t) = (t + e^{-t} - 1)\varepsilon(t)$, 求 $x_1(t)$ 。

解: $\frac{d}{dt}[x_1(t) * t\varepsilon(t)] = \frac{d}{dt}[(t + e^{-t} - 1)\varepsilon(t)]$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} * t\varepsilon(t) = (1 - e^{-t})\varepsilon(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{dx_1(t)}{dt} * t\varepsilon(t)\right] = \frac{d}{dt}[(1 - e^{-t})\varepsilon(t)]$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} * \varepsilon(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$$

即 $x_1(t) * \delta(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$

$$\therefore x_1(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$$

五、LTI 连续时间系统的时域求解

LTI 系统: 全响应 = 零输入响应 + 零状态响应,

$$r(t) = r_{Zi}(t) + r_{ZS}(t)$$

系统方程: $D(p)r(t) = N(p)e(t)$ $[H(p) = N(p)/D(p)]$

零输入($e(t)=0$ 时)响应分量 $r_{Zi}(t)$ 满足: $D(p)r_{Zi}(t)=0$

若 $D(p) = (p-\lambda_1)(p-\lambda_2)\dots(p-\lambda_n)$ (n个单根)

$$\text{则 } r_{Zi}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}$$

若 $D(p) = (p-\lambda_1)(p-\lambda_2)\dots(p-\lambda_{n-k})(p-\lambda)^k$ (有一个k阶重根)

$$\text{则 } r_{Zi}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_{n-k} e^{\lambda_{n-k} t}$$

$$+ (C_{n-k+1} + C_{n-k+2} t + \dots + C_n t^{k-1}) e^{\lambda t}$$

零状态响应分量 $r_{ZS}(t) = h(t) * e(t)$

第二章 连续时间系统的时域分析

例1 描述某LTI系统的微分方程为: $d^2r(t)/dt^2 + 3dr(t)/dt + 2r(t) = 2de(t)/dt + 6e(t)$, 已知 $r(0^-) = 2$, $r'(0^-) = 0$, $e(t) = \varepsilon(t)$, 求系统的零输入响应和零状态响应及全响应。

解: (1) 系统的零输入响应 $r_{Zi}(t)$

$$e(t)=0: d^2r_{Zi}(t)/dt^2 + 3dr_{Zi}(t)/dt + 2r_{Zi}(t) = 0$$

且满足 $r(0^-) = 2$, $r'(0^-) = 0$

特征方程 $D(p) = p^2 + 3p + 2 = (p+1)(p+2) = 0$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$$

$$r_{Zi}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

求 C_1 、 C_2 : $r_{Zi}(0^+) = r_{Zi}(0^-) = r(0^-) = 2$

$$\rightarrow C_1 + C_2 = 2$$

$$r_{Zi}'(0^+) = r_{Zi}'(0^-) = r'(0^-) = 0$$

$$\rightarrow -C_1 - 2C_2 = 0$$

第二章 连续时间系统的时域分析

$$\rightarrow C_1=4, C_2=-2$$

$$\rightarrow r_{Zi}(t) = (4e^{-t} - 2e^{-2t})\varepsilon(t)$$

(2) 系统的零状态响应 $r_{ZS}(t)$

先求冲激响应 $h(t)$:

系统方程的算子形式 $(p^2+3p+2)r(t) = (2p+6)e(t)$

$$H(p) = (2p+6) / (p^2+3p+2) = 4/(p+1) - 2/(p+2)$$

$h(t)$ 满足: $h(t) = H(p) \delta(t) = (4e^{-t} - 2e^{-2t})\varepsilon(t) = r_{Zi}(t)$

$$\begin{aligned} r_{ZS}(t) &= h(t) * e(t) = [(4e^{-t} - 2e^{-2t})\varepsilon(t)] * \varepsilon(t) \\ &= (-4e^{-t} + e^{-2t} + 3)\varepsilon(t) \end{aligned}$$

(3) 全响应

$$r(t) = r_{Zi}(t) + r_{ZS}(t) = (3 - e^{-2t})\varepsilon(t)$$

第二章 连续时间系统的时域分析

例2 已知 $H(p) = \frac{p+3}{p^2+3p+2}$ 当激励为 $e(t) = e^{-4t}\varepsilon(t)$ 时，

全响应为 $y(t) = \left(\frac{14}{3}e^{-t} - \frac{7}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)$ 。

求 $h(t), y_{zs}(t), y_{zi}(t)$ 自然响应，受迫响应，稳态响应，瞬态响应。

解：①求 $h(t)$

由于 $H(p) = \frac{p+3}{p^2+3p+2} = \frac{2}{p+1} + \frac{-1}{p+2}$

所以 $h(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})\varepsilon(t)$

②求 $y_{zs}(t)$

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= e(t) * h(t) = 2e^{-t}\varepsilon(t) * e^{-4t}\varepsilon(t) - e^{-2t}\varepsilon(t) * e^{-4t}\varepsilon(t) \\ &= \frac{2}{4-1}(e^{-t} - e^{-4t}) - \frac{1}{4-2}(e^{-2t} - e^{-4t}) = \left(\frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}\right)\varepsilon(t) \end{aligned}$$

第二章 连续时间系统的时域分析

③求 $y_{zi}(t)$

$$y_{zi}(t) = y(t) - y_{zs}(t) = (4e^{-t} - 3e^{-2t})\varepsilon(t)$$

④指出全响应中的各部分

$$y(t) = \underbrace{\frac{14}{3}e^{-t}}_{\text{自然响应}} - \underbrace{\frac{7}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}}_{\text{受迫响应}} + 0 \quad t \geq 0$$

自然响应 受迫响应

瞬态响应 稳态响应

当 $t \rightarrow \infty$ 时，响应中趋于零的那部分分量称为瞬态响应； $t \rightarrow \infty$ 时仍保留下来的那部分响应分量称为稳态响应。

对稳定的因果系统而言，自由响应一定是瞬态响应，受迫响应与激励同形式，可能是瞬态响应，也可能是稳态响应；零输入响应一定是瞬态响应，零状态响应一定含瞬态响应，同时可能含稳态响应。

作业：

2.5 2.7 2.10 (2) (4) (6)

2.17 2.18(b)(e) 2.21 (a) (c) (e)

1. LTI连续时间系统的时域分析法

复杂信号 分解 若干个冲激函数 $\delta_i(t) \rightarrow h_i(t)$
叠加 总响应

信号分解：每个分量用同样形式的单元函数 [$\epsilon(t)$ 或 $\delta(t)$] 来表示——信号的时域表示法

2. 单元函数的选择

一组坐标轴 构成 一个矢量空间

一个函数集 —— 信号空间

常用正交坐标系, 正交函数集

3. 正交函数集

定义：如有 n 个函数 $g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)$ 构成一个函数集，
当这些函数在区间 (t_1, t_2) 内满足以下正交特性：

第三章 连续信号的正交分解

$$\int_{t_1}^{t_2} g_l(t) g_m^*(t) dt = \begin{cases} 0, & l \neq m \\ k_m, & l = m \end{cases}$$

则称此函数集为在区间 (t_1, t_2) 内的正交函数集。

于是信号 $f(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内可以用 n 个互相正交的函数表示为：

$$f(t) \approx C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t) + \cdots + C_r g_r(t) + \cdots + C_n g_n(t) = \sum_{r=1}^n C_r g_r(t)$$

最佳近似系数：

$$C_r = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_r(t) g_r^*(t) dt} = \frac{1}{k_r} \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r^*(t) dt$$

$$C_r \text{ 由 } \frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial C_r} = \frac{\partial}{\partial C_r} \left\{ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{j=1}^n C_j g_j(t)]^2 dt \right\} = 0 \text{ 求得}$$

与矢量分解相似，用一正交函数集中的分量去代表任意一个函数，这个函数集必须是一完备的正交函数集。

完备的正交函数集有两种定义：

A. 如果用正交的函数集 $\{g_r(t)\}$ 在区间 (t_1, t_2) 内近似表示 $f(t)$ ，若令 $n \rightarrow \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon^2 = 0$ (此时 $\approx \rightarrow =$)，则称该函数集为完备的正交函数集。

此时 $f(t) = C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t) + \cdots + C_r g_r(t) + \cdots$

B. 如果在正交函数集 $\{g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)\}$ 之外，不存在函数 $x(t)$ ，($0 < \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt < \infty$) 满足等式：

$\int_{t_1}^{t_2} x(t) g_r(t) dt = 0 (r = 1, 2, \dots, n)$ 则这个函数集称为完备的正交函数集。

如三角函数集

$$\{1, \cos\Omega t, \cos(2\Omega t), \dots, \cos(n\Omega t), \dots, \sin\Omega t, \sin(2\Omega t), \dots, \sin(n\Omega t), \dots\}$$

在区间 (t_0, t_0+T) ($T = \frac{2\pi}{\Omega}$) 内为完备的正交函数集。

符合一定条件的任一信号可用三角函数集表示，如

$$f(t) = \frac{4}{\pi} [\sin(\Omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\Omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\Omega t) + \dots]$$

∴ 信号是频率的函数——信号在频域中的表示
(频域分析)

4. 信号也可以表示为复频率 ($s=a \pm jw$) 的函数 (复频域分析)

本章内容：

- 信号表示为傅里叶级数
- 周期信号的频谱
- 傅里叶变换与非周期信号的频谱
- 傅立叶变换的性质
- 常用信号的频谱函数
- 帕塞瓦尔定理与能量频谱

一、信号表示为傅里叶级数

(一) 傅里叶级数的三角形式

周期函数 $f(t)$ 在区间 (t_1, t_1+T) 内可表示为：

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \Omega t + \cdots + a_n \cos(n \Omega t) + \cdots + b_1 \sin \Omega t + \cdots + b_n \sin(n \Omega t) + \cdots$$

$$a_n = \frac{\int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n \Omega t) dt}{\int_{t_1}^{t_1+T} \cos^2(n \Omega t) dt} = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n \Omega t) dt$$

$$b_n = \frac{\int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n \Omega t) dt}{\int_{t_1}^{t_1+T} \sin^2(n \Omega t) dt} = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n \Omega t) dt$$

$$\frac{a_0}{2} = C_0 = \frac{\int_{t_1}^{t_1+T} f(t) dt}{\int_{t_1}^{t_1+T} 1^2 dt} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) dt = \overline{f(t)} \quad (\text{直流分量})$$

$$\therefore a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) dt \quad (\text{也可以令 } a_n \text{ 中 } n=0 \text{ 得到})$$

第三章 连续信号的正交分解

$a_1 \cos \Omega t$ 和 $b_1 \sin \Omega t$ 合成一(角)频率为 $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ 的正弦分量

Ω —— 基波频率 , $n\Omega$ —— n 次谐波频率

令 $a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t) = A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$

则

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

(即在一定区间内, 任一 $f(t)$ 可以用一直流分量和一系列谐波分量之和来表示)

其中

$$\begin{cases} a_n = A_n \cos \varphi_n \\ b_n = -A_n \sin \varphi_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n = -\arctg \frac{b_n}{a_n} \end{cases}$$

可见:

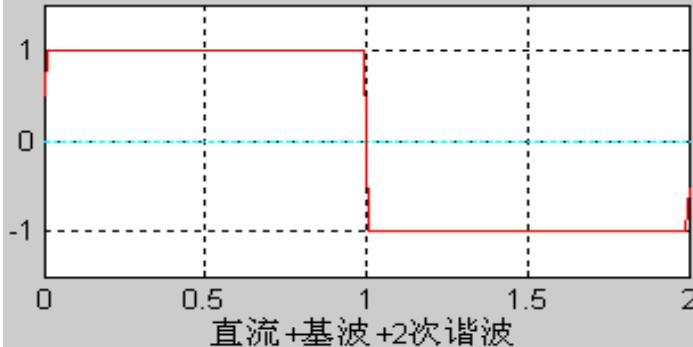
$$\begin{cases} a_{-n} = a_n \\ A_{-n} = A_n \end{cases} \left. \right\} \text{偶函数}$$

$$\begin{cases} b_{-n} = -b_n \\ \varphi_{-n} = -\varphi_n \end{cases} \left. \right\} \text{奇函数}$$

第三章 连续信号的正交分解

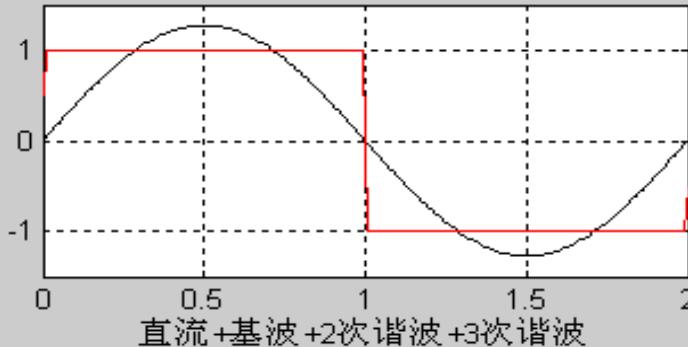
$$f(t) = \frac{4}{\pi} [\sin(\Omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\Omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\Omega t) + \dots \dots]$$

周期矩形波的形成—直流分量

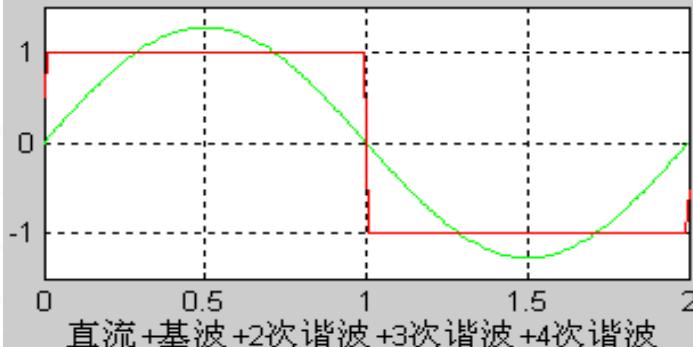


直流+基波+2次谐波

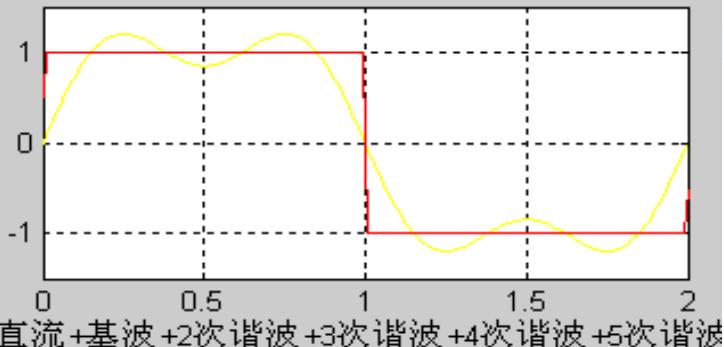
周期矩形波的形成—直流分量+基波



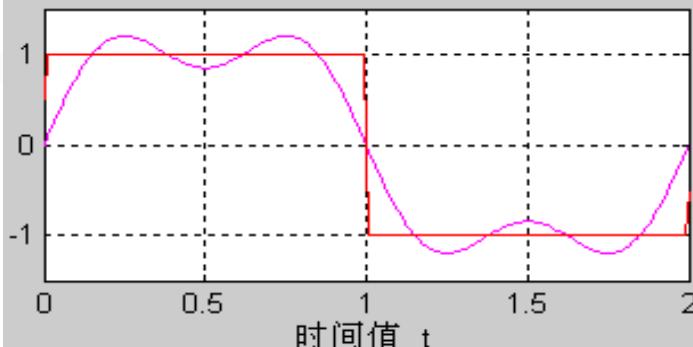
直流+基波+2次谐波+3次谐波



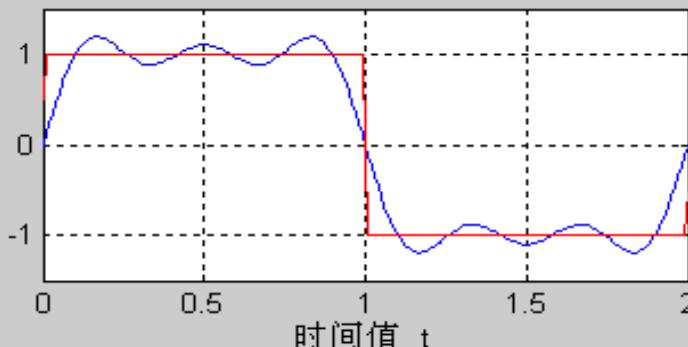
直流+基波+2次谐波+3次谐波+4次谐波



直流+基波+2次谐波+3次谐波+4次谐波+5次谐波



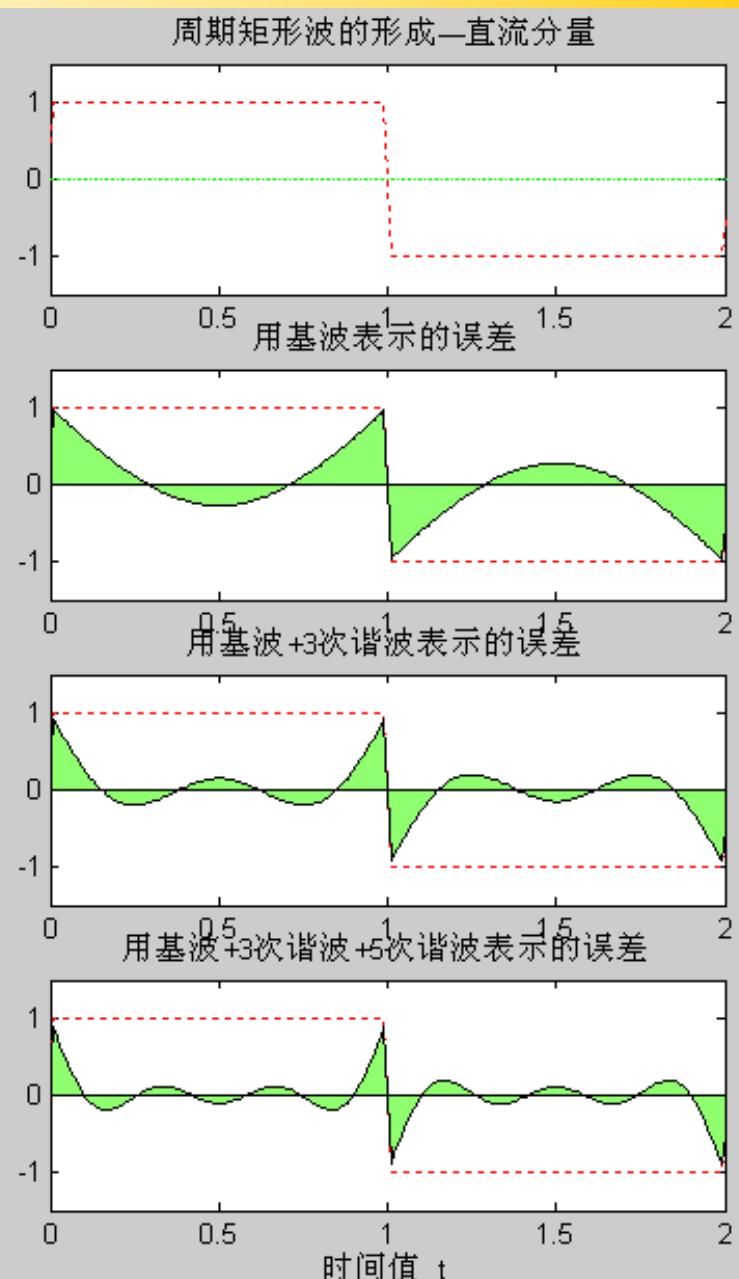
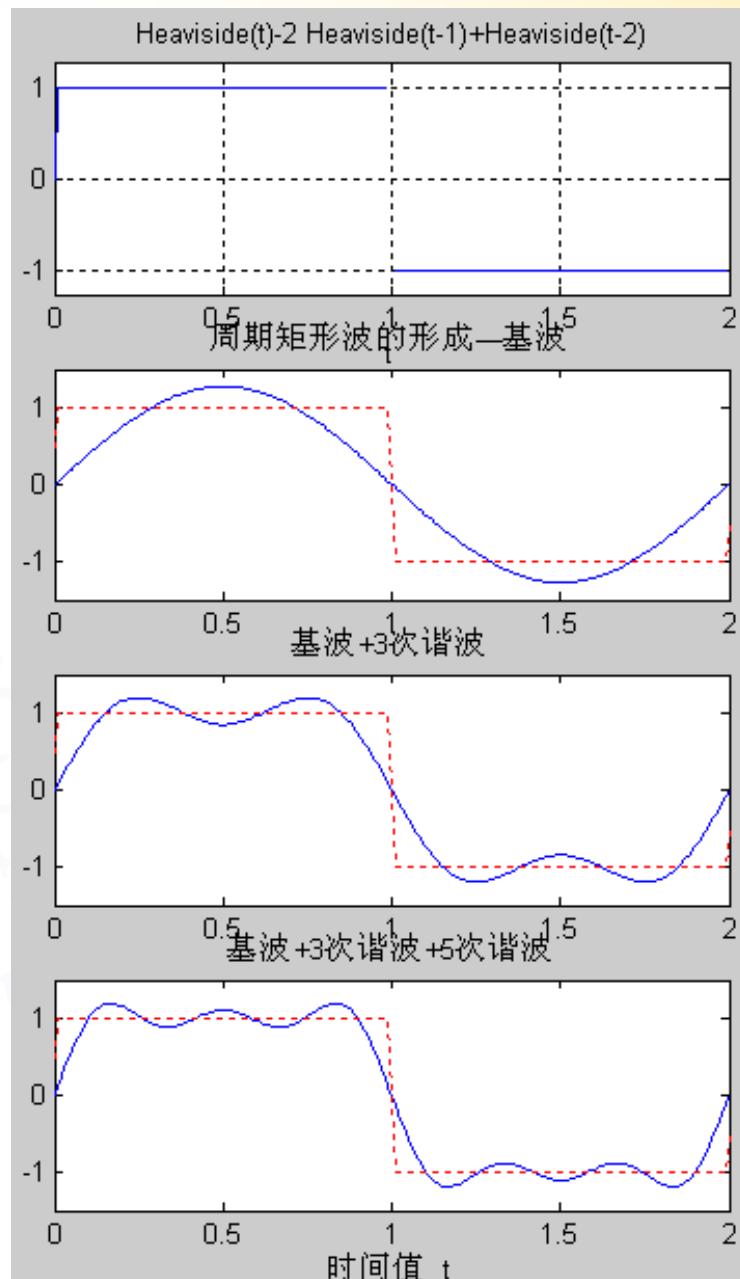
时间值 t



时间值 t

NEXT

第三章 连续信号的正交分解



(二) 傅里叶级数的指数形式

尤拉公式：

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \\ \sin \theta = \frac{1}{2j} (e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \end{cases} \quad \begin{cases} e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \\ e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta \end{cases}$$

即 $\langle + \rangle$ $\langle - \rangle$ 指数项 \Leftrightarrow 余弦波

于是
$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2} (e^{jn\Omega t} + e^{-jn\Omega t}) + \frac{b_n}{2j} (e^{jn\Omega t} - e^{-jn\Omega t}) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_n - jb_n) e^{jn\Omega t} + \frac{1}{2} (a_n + jb_n) e^{-jn\Omega t} \right] \end{aligned}$$

第三章 连续信号的正交分解

$$\frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{2}A_n(\cos\varphi_n + j\sin\varphi_n) = \frac{1}{2}A_n e^{j\varphi_n} \stackrel{\text{令}}{=} \frac{1}{2}\dot{A}_n$$

$$\frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \frac{1}{2}A_n(\cos\varphi_n - j\sin\varphi_n) = \frac{1}{2}A_n e^{-j\varphi_n} = \frac{1}{2}\dot{A}_{-n}$$

$$\dot{A}_0 = a_0$$

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} [\dot{A}_n e^{jn\Omega t} + \dot{A}_{-n} e^{-jn\Omega t}] = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\Omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\Omega t}$$

上式说明: $f(t)$ 可用函数集 $\{e^{jn\Omega t}\}$ 来表示 ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$C_n = \frac{\int_{t_1}^{t_1+T} f(t) (e^{jn\Omega t})^* dt}{\int_{t_1}^{t_1+T} e^{jn\Omega t} (e^{jn\Omega t})^* dt} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

讨论：

1. 意义：

$$f(t) = C_0 + C_1 e^{j\Omega t} + C_2 e^{j2\Omega t} + \dots + C_1 e^{-j\Omega t} + C_2 e^{-j2\Omega t} + \dots$$

($-n\Omega$)并不代表负频率，各正、负指数项组成一个余弦(或正弦)波

2. 求 $f(t)$ 之法：用指数级数比用三角级数更方便，只需要求出 $\dot{A}_n \rightarrow f(t)$

3. 求频谱 \rightarrow 求 \dot{A}_n —— 第 n 次谐波分量的复数振幅(包括振幅和相位)

(三) 信号的对称条件及其与谐波含量的关系

1. 偶函数——关于纵轴对称

若 $f(t) = f(-t)$ 则 $f(t)$ 为 t 的偶函数

此时 $\int_{-\tau}^0 f(t)dt = \int_0^\tau f(t)dt$

或 $\int_{-\tau}^\tau f(t)dt = 2 \int_0^\tau f(t)dt$

$$\therefore a_n = \frac{2}{T} \int_T^\tau f(t) \cos(n\Omega t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t) dt$$

而 $b_n = \frac{2}{T} \int_T^\tau f(t) \sin(n\Omega t) dt = 0$

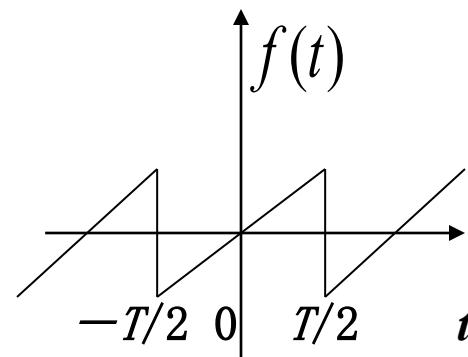
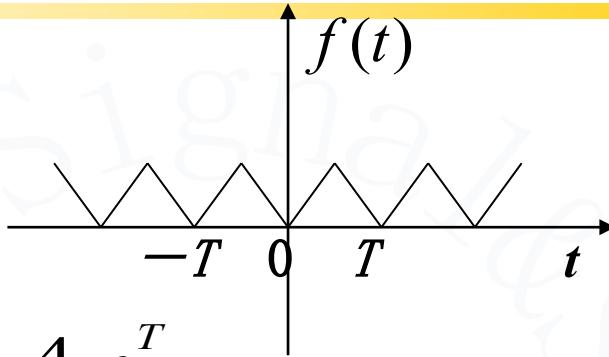
即偶函数只含有余弦分量，直流分量可能有或无

2. 奇函数——关于原点对称

若 $f(t) = -f(-t)$ 则 $f(t)$ 为 t 的奇函数

此时 $\int_{-\tau}^0 f(t)dt = -\int_0^\tau f(t)dt$

或 $\int_{-\tau}^\tau f(t)dt = 0$



第三章 连续信号的正交分解

$$\therefore a_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cos(n\Omega t) dt = 0 = a_0$$

而 $b_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \sin(n\Omega t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\Omega t) dt$

即奇函数只含有正弦分量

注意：函数的奇偶性由坐标轴的对称关系决定，故当移动坐标轴时，奇偶关系会改变

任一函数都可分解成一个奇函数与一个偶函数之和

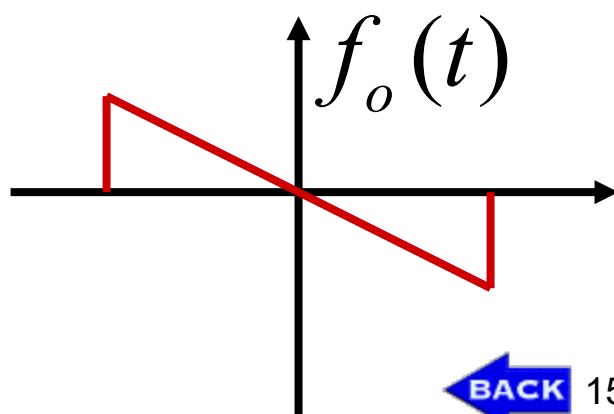
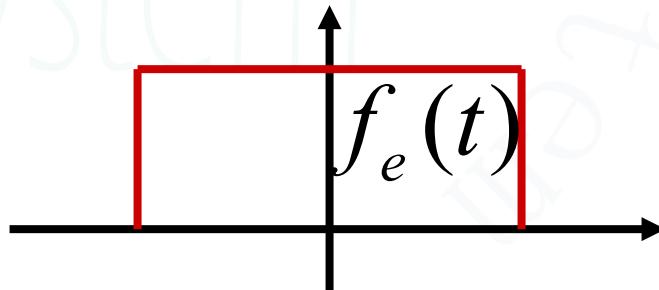
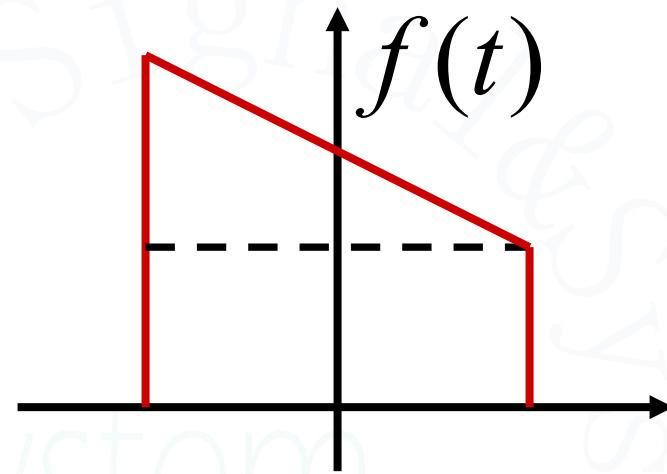
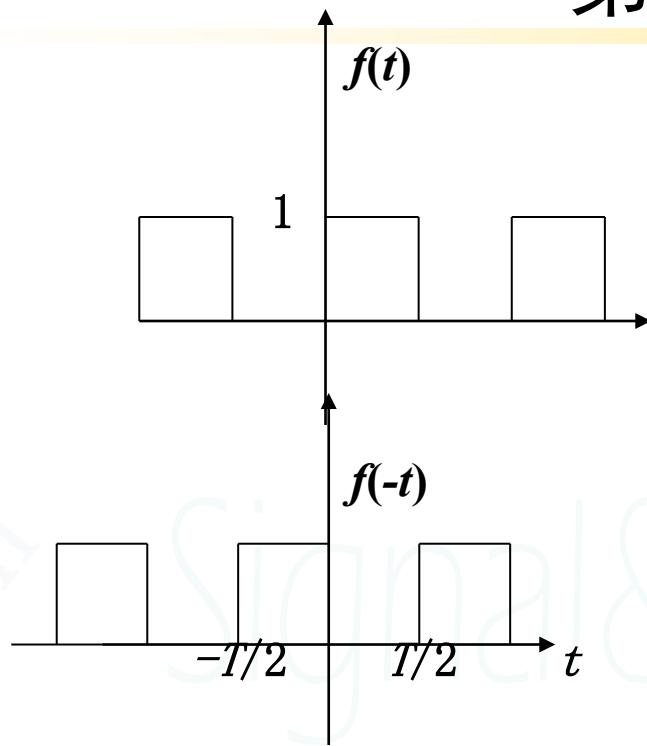
$$f(t) = f_{\text{奇}}(t) + f_{\text{偶}}(t) = f_{od}(t) + f_{ev}(t)$$

求 $f_{od}(t)$ 和 $f_{ev}(t)$

$$f(-t) = f_{od}(-t) + f_{ev}(-t) = -f_{od}(t) + f_{ev}(t)$$

$$\begin{cases} f_{od}(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} \\ f_{ev}(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \end{cases}$$

第三章 连续信号的正交分解

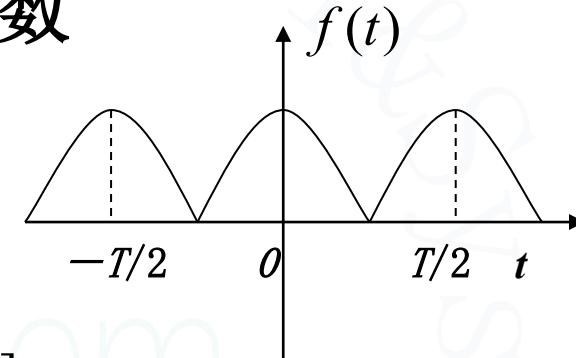


3. 偶谐函数——半周期重叠 (只含偶次谐波)

若 $f(t \pm \frac{T}{2}) = f(t)$ 则称 $f(t)$ 为偶谐函数

如 $f(t)$ 既是偶函数，又是偶谐函数，

则 $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0, b_n = 0$



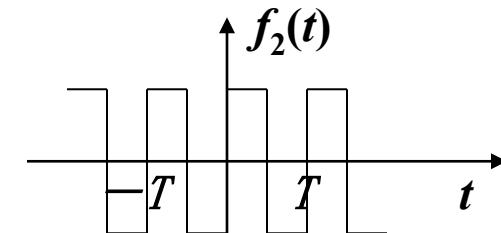
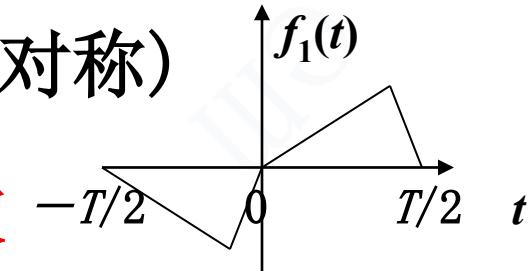
$$f(t) = \frac{2A}{\pi} + \frac{4A}{\pi} \left[\frac{1}{3} \cos(2\Omega t) - \frac{1}{15} \cos(4\Omega t) + \dots \right]$$

4. 奇谐函数——半周期镜像对称(上、下对称)

满足 $f(t \pm \frac{T}{2}) = -f(t)$ —— 只含奇次谐波

如 $f_2(t)$ 既是奇函数，又是奇谐函数

则 $a_0 = a_n = 0, b_0 = b_2 = b_4 = \dots = 0$



(四) 傅里叶级数的时间位移性质

内容: $f(t)$ 之复系数为 $C_n (= \frac{\dot{A}_n}{2})$

延迟 t_0 : $f(t - t_0)$ 则复系数为 $C_n e^{-jn\Omega t_0}$

证明: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\Omega t}$

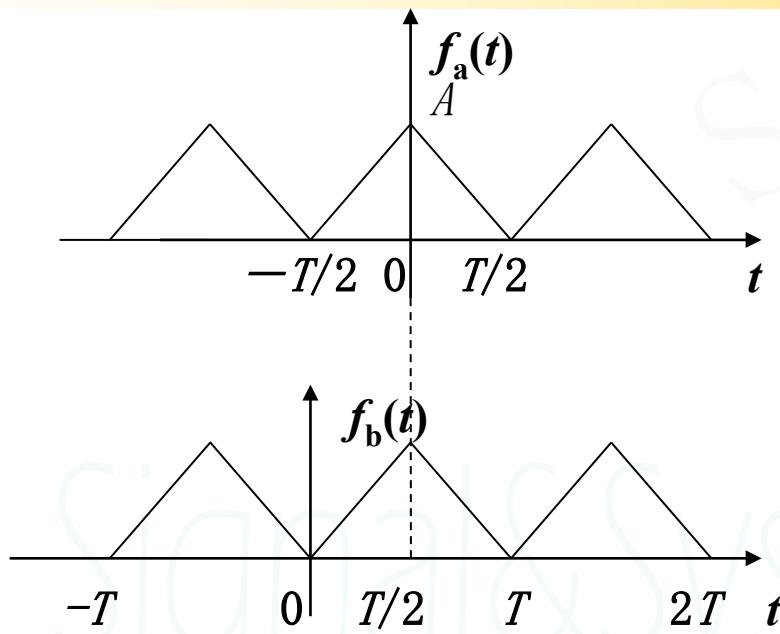
$$f(t - t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\Omega(t-t_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-jn\Omega t_0} \bullet e^{jn\Omega t}$$

说明: 在时间上延迟 t_0 对应于谐波分量的相位滞后了 $n\Omega t_0$!

例 $f_a(t) = \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2} [\cos \Omega t + \frac{1}{9} \cos (3\Omega t) + \dots]$

求 $f_b(t)$ 的表达式

第三章 连续信号的正交分解



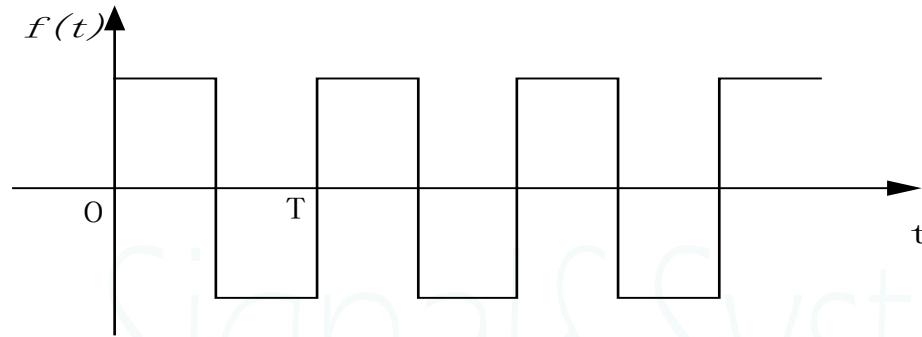
解: $f_b(t) = f_a(t - \frac{T}{2}) \quad (\Omega = \frac{2\pi}{T}, -n\Omega t_0 = -n\Omega \cdot \frac{T}{2} = -n\pi)$

$$= \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2} [\cos(\Omega t - \pi) + \frac{1}{9} \cos(3\Omega t - 3\pi) + \dots]$$

$$= \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2} [\cos(\Omega t) + \frac{1}{9} \cos(3\Omega t) + \dots]$$

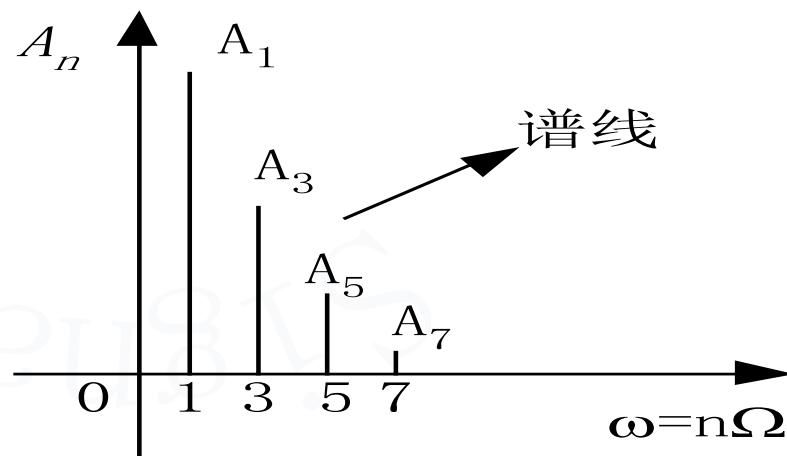
二、周期信号的频谱

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \Omega t + \cdots + a_n \cos(n\Omega t) + \cdots + b_1 \sin \Omega t + \cdots + b_n \sin(n\Omega t) + \cdots$$



$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin(\Omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\Omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\Omega t) + \cdots \right]$$

振幅频谱图—信号各频率分量的振幅随角频率变化的图形



(一) 周期信号的频谱

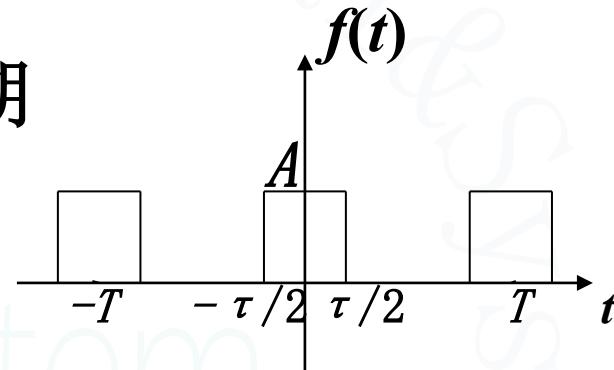
例 求周期性矩形脉冲的展开式和频谱

τ ——脉冲宽度

T ——脉冲周期

A ——脉冲幅度

解: (1) 求 $f(t)$ 的展开式



[方法一] 用三角形式表示

因为 $f(-t)=f(t)$ (偶函数), 所以 $b_n=0$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{\tau}{2}} A \cos(n\Omega t) dt = \frac{4A}{n\Omega T} \sin \frac{n\Omega \tau}{2}$$

$$= \frac{2A\tau}{T} \left[\frac{\sin \frac{n\Omega \tau}{2}}{\frac{n\Omega \tau}{2}} \right] = \frac{2A\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega \tau}{2}\right) = \frac{2A\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)$$

第三章 连续信号的正交分解

$$Sa(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{——抽样函数}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A dt = \frac{2A\tau}{T} = \lim_{n \rightarrow 0} a_n$$

$$\therefore f(t) = \frac{A\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A\tau}{T} Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \cos(n\Omega t)$$

[方法二] 用指数形式表示

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-jn\Omega t} dt$$

$$= \frac{4A}{n\Omega T} \sin \frac{n\Omega\tau}{2} = \frac{2A\tau}{T} Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)$$

$$= \pm \text{实数} \stackrel{\Delta}{=} A_n e^{j\varphi_n} \quad \left\{ \begin{array}{l} A_n = \frac{2A\tau}{T} \left| Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) \right| \\ \varphi_n = \begin{cases} 0, \dot{A}_n = + \\ \pi, \dot{A}_n = - \end{cases} \end{array} \right.$$

第三章 连续信号的正交分解

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \dot{A}_n e^{jn\Omega t} = \frac{A\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \dot{A}_n e^{jn\Omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \dot{A}_{-n} e^{-jn\Omega t}$$

$$\because Sa\left(-\frac{n\Omega\tau}{2}\right) = Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)$$

$$\therefore \dot{A}_{-n} = \dot{A}_n$$

故 $f(t) = \frac{A\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_n \frac{1}{2} (e^{jn\Omega t} + e^{-jn\Omega t})$

$$= \frac{A\tau}{T} + \frac{2A\tau}{T} \sum_{n=1}^{\infty} Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) \cos(n\Omega t)$$

(2) 求频谱

令 $n=1, 2, \dots$ 按频率高低依次排列即得频谱图

$$A_n = \frac{2A\tau}{T} \left| Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) \right|$$

第三章 连续信号的正交分解

零点位置:

$$x = n\Omega\tau/2 = m\pi$$

$$n\Omega = m \cdot 2\pi/\tau$$

即 $\omega = n\Omega = m \cdot 2\pi/\tau$ 时,

$A_n = 0$ —— 零点

又 $2\pi/\tau = (T/\tau) \cdot \Omega$,

$$(\Omega = 2\pi/T)$$

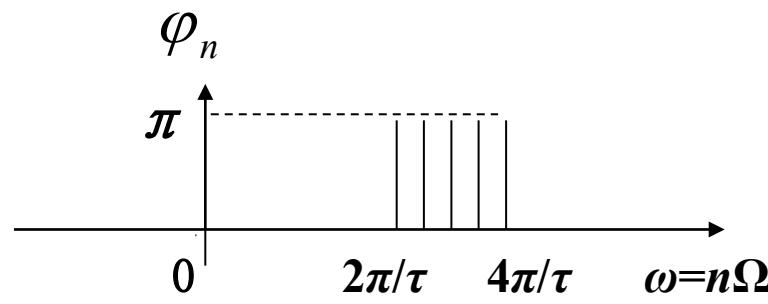
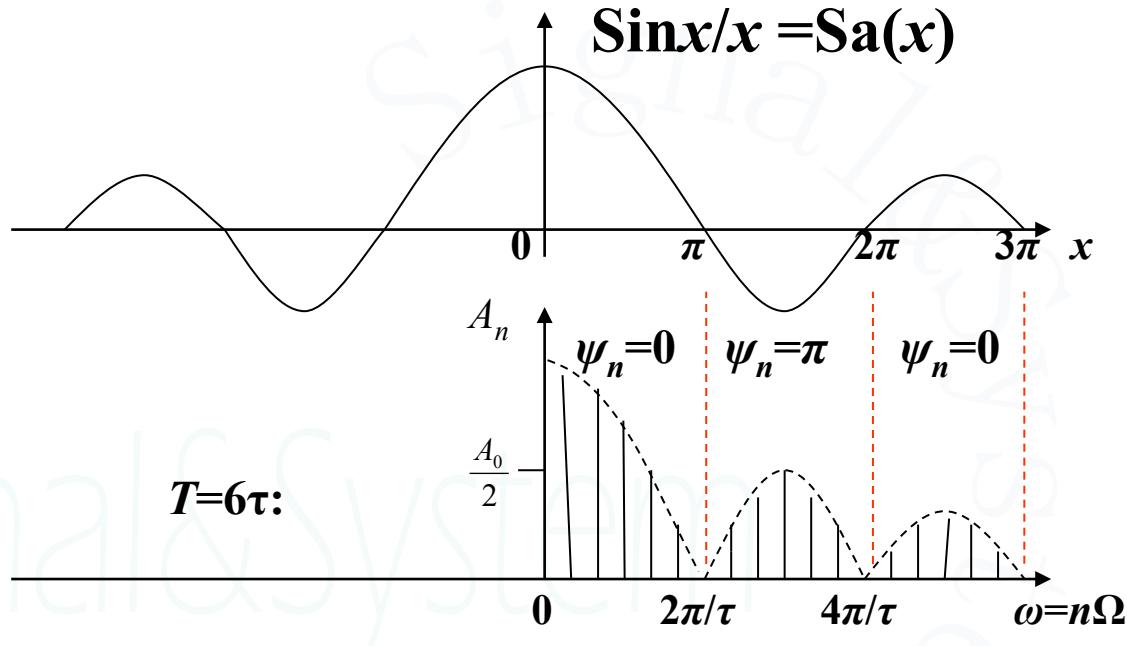
$$A_n \propto \tau/T$$

设 $T = 6\tau$, 则 $A_0 = (2/6)A$, $2\pi/\tau = 6\Omega$,

即每个包络内有5根谱线

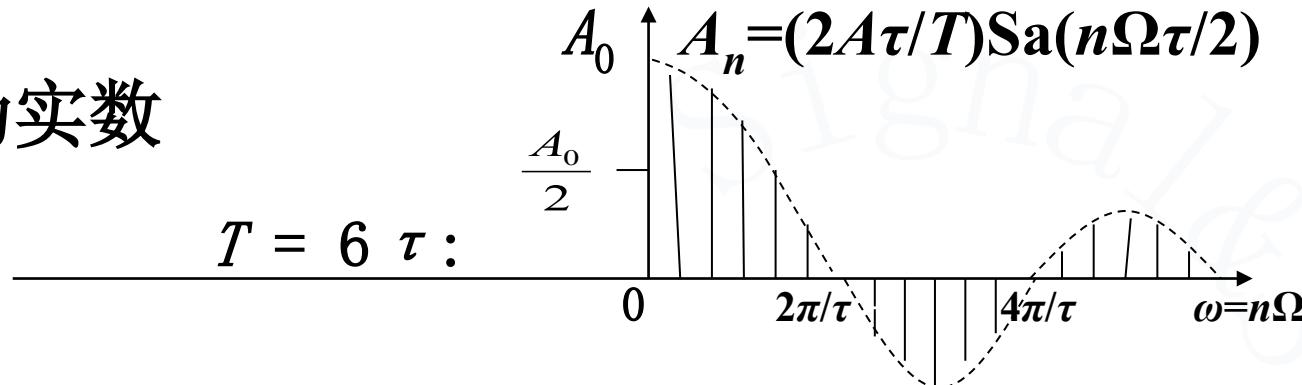
相位谱: $\varphi_n \sim \omega$ 图

$$\varphi_n = \begin{cases} 0, \dot{A}_n = + \\ \pi, \dot{A}_n = - \end{cases}$$



第三章 连续信号的正交分解

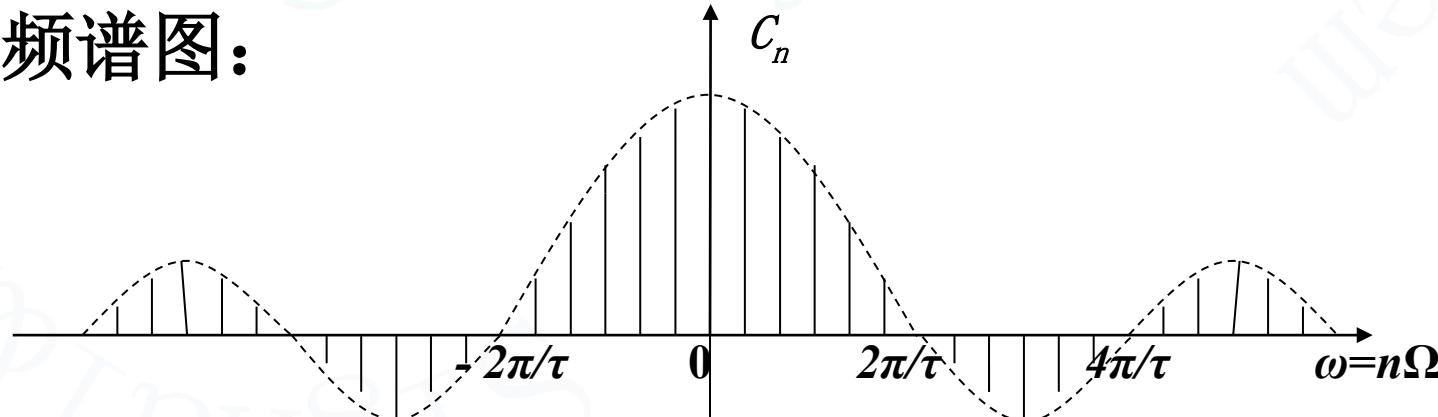
其它方法：
振幅向量为实数



此时， A_n 为负值，并不表示振幅为负，只表示 $\varphi_n = \pi$

又如按 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \dot{A}_n e^{jn\Omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\Omega t}$ (指数级数)

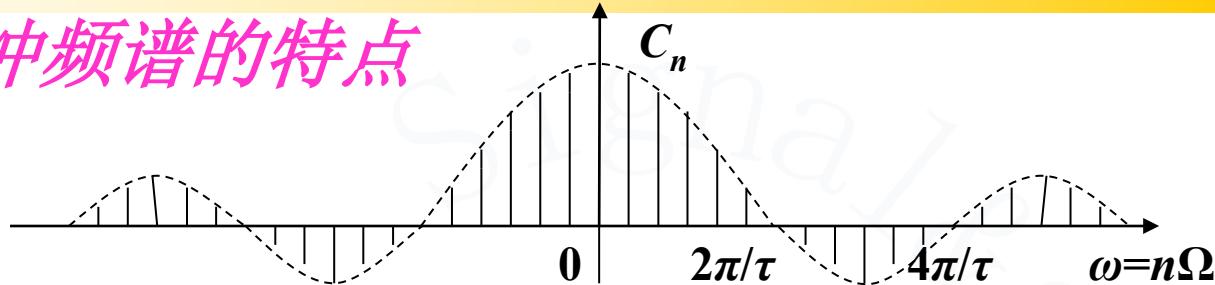
指数频谱图：



(关于纵轴对称，但并不表示有负频率，它只表示一对相应的正、负指数项合起来构成一个正弦分量)

(二) 周期性矩形脉冲频谱的特点

1. 离散性
2. 谐波性
3. 收敛性



讨论: T 、 τ 对信号频谱结构的影响

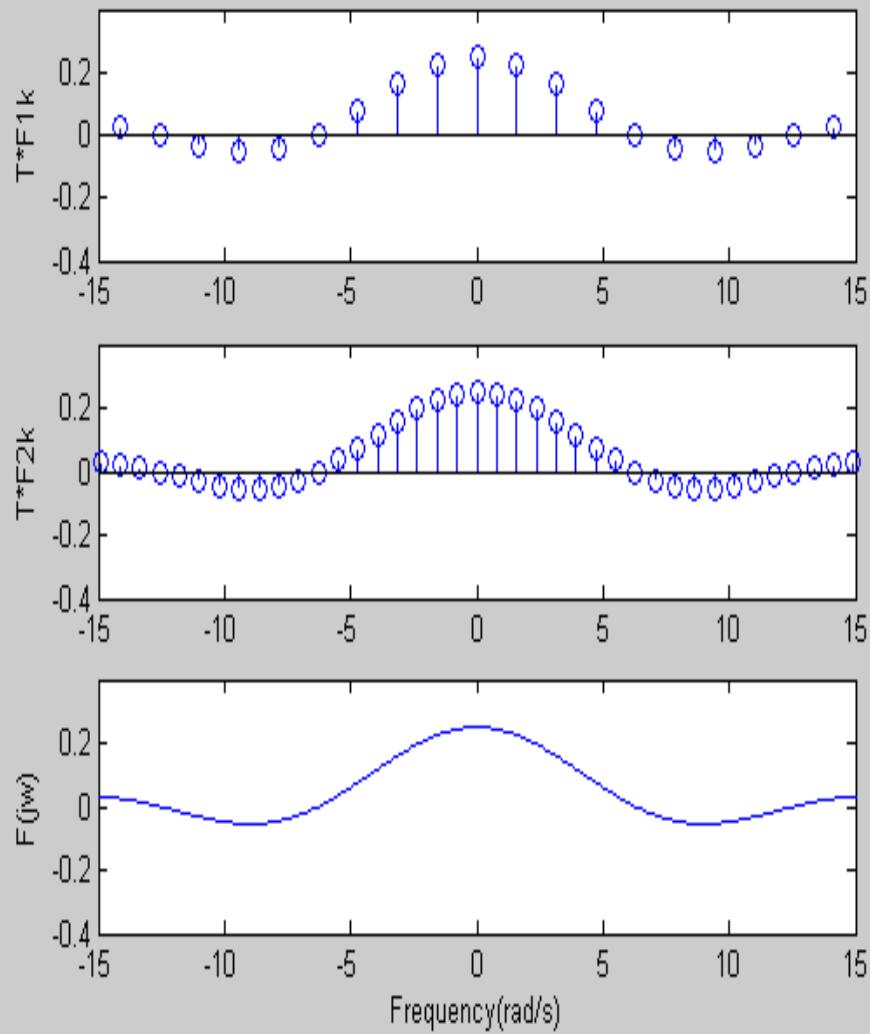
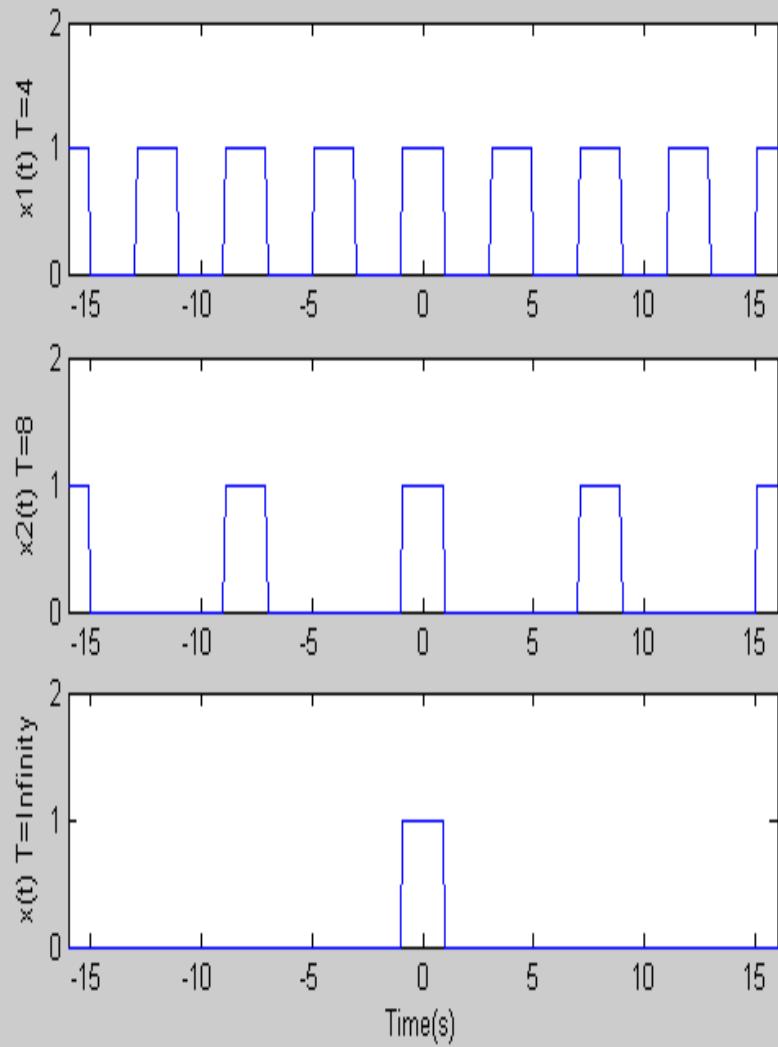
① T 一定时, $\tau \downarrow \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_n \downarrow \text{且各谐波振幅渐趋减小的收敛速度也变慢了} \\ \frac{2\pi}{\tau} \uparrow \text{振幅为零的谐波次数提高了 (但谱线疏密不变)} \end{array} \right.$

② τ 一定时, $(\frac{2\pi}{\tau} \text{一定}) T \uparrow \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_n \downarrow \\ \Omega (= \frac{2\pi}{T}) \downarrow \text{谱线间间隔减小, 即谱线变密} \end{array} \right.$

T 无限趋大时, 谱线间隔无限趋小, 振幅也无限趋小,
周期脉冲 \rightarrow 非周期性单脉冲

非周期信号可看作 $T \rightarrow \infty, \Omega \rightarrow 0$ 的周期信号问题

第三章 连续信号的正交分解



周期矩形脉冲的频谱的所有特点也是一切周期性信号的共同特点

(三) 信号的频带宽度(频宽)

对于一个信号，从零频率开始到需要考虑的最高分量的频率间的这段频率范围是信号所占有的频带宽度，简称频宽。

定义（两种）：

- ①从 $\omega=0$ 到频谱包络线第一个零点间的频段
- ②从 $\omega=0$ 到振幅降为包络线最大值 $1/10$ 间频段

讨论：脉宽 τ 与频宽成反比

$$B_\omega = \frac{2\pi}{\tau} \text{ (rad/s)}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \tau \downarrow \rightarrow \text{振幅收敛速度变慢} \rightarrow \text{信号频宽加大} \\ \tau \rightarrow 0 \text{ 时, } \Delta\omega \rightarrow \infty, \text{ 频谱均匀分布于 } 0 \rightarrow \infty \end{array} \right.$

表明：时间函数中变化较快的信号必定具有较宽的频带。

三、傅里叶变换与非周期信号的频谱

周期信号: $\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \cdots (1)$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \dot{A}_n e^{jn\Omega t} \cdots (2)$$

$T \rightarrow \infty$ 时, Ω (间隔) $= \frac{2\pi}{T} \rightarrow$ 无穷小

同时 $|\dot{A}_n| \rightarrow$ 无穷小

(一) 频谱函数(频谱密度函数)和傅立叶变换

式(1)乘以 $T/2$: $\dot{A}_n \times \frac{T}{2} = \frac{\pi \dot{A}_n}{\Omega} = \frac{\dot{A}_n}{2f}$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \quad (\neq 0, \text{当 } T \rightarrow \infty \text{ 时})$$

第三章 连续信号的正交分解

定义: $F(j\omega) = F(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \dot{A}_n \times \frac{T}{2} = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{\pi \dot{A}_n}{\Omega}$

$F(j\omega)$ 量纲: 单位频带的振幅 —— 频谱密度函数

当 $T \rightarrow \infty$ 时, $\Omega \rightarrow d\omega$ (无穷小), $n\Omega \rightarrow$ 连续变量 ω

则 $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$ (复数) —— 付氏变换

$|F(j\omega)|$ —— 各频率分量的相对值, 而实际振幅 $A(\omega) = \frac{|F(j\omega)| d\omega}{\pi}$ (无穷小量)
 $\varphi(\omega)$ —— 频率分量的相位

$|F(j\omega)|$ —— 偶函数, $\varphi(\omega)$ —— 奇函数

(二) 非周期信号的表达式 —— 傅立叶反变换

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \dot{A}_n e^{jn\Omega t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \right] e^{jn\Omega t}$$

第三章 连续信号的正交分解

当 $T \rightarrow \infty$ 时, $\Omega \rightarrow d\omega, n\Omega \rightarrow \omega, T = \frac{2\pi}{\Omega} \rightarrow \frac{2\pi}{d\omega}$

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{——傅立叶反变换} \end{aligned}$$

简记为: $\left. \begin{aligned} F(j\omega) &= F[f(t)] \\ f(t) &= F^{-1}[F(j\omega)] \end{aligned} \right\}$ 或 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$

(三) 非周期信号的频谱

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)| e^{j\varphi} \bullet e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)| e^{j(\omega t + \varphi)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)| \cos(\omega t + \phi) d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)| \cos(\omega t + \phi) d\omega \end{aligned}$$

第三章 连续信号的正交分解

非周期信号也可分解为许多不同频率的正弦分量

但因 $T \rightarrow \infty, \Omega \rightarrow 0$, 信号包含 $0 \rightarrow \infty$ 一切频率分量,

$$\text{同时 } A(\omega) = \frac{|F(j\omega)|d\omega}{\pi} \rightarrow 0$$

所以频谱不能直接用振幅作出, 而必须用它的密度函数来作出。

$$\text{令 } F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

幅度谱: $|F(j\omega)| \sim \omega$ 曲线

相位谱: $\varphi(\omega) \sim \omega$ 曲线

周期信号的 \dot{A}_n 和非周期信号的 $F(j\omega)$ 可相互转换

$$\dot{A}_n \stackrel{\times \frac{T}{2}, n\Omega \rightarrow \omega}{\Leftrightarrow} F(j\omega)$$

即

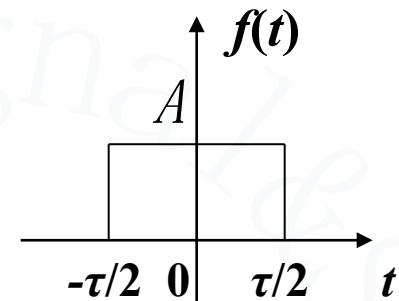
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{A}_n = \frac{2}{T} F(j\omega) \Big|_{\omega=n\Omega} \\ F(j\omega) = \frac{T}{2} \dot{A}_n \Big|_{n\Omega=\omega} \end{array} \right.$$

第三章 连续信号的正交分解

(四) 非周期矩形脉冲的频谱分析

[方法一]直接用定义式求

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{-j\omega} \left(e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} - e^{j\frac{\omega\tau}{2}} \right) \quad A\tau \text{——矩形之面积} \\ &= \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} = A\tau \text{Sa} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) \end{aligned}$$



[方法二]直接用转换关系求

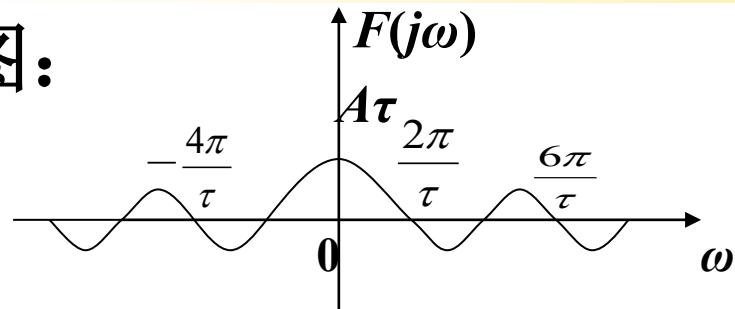
$$\dot{A}_n = \frac{2A\tau}{T} \text{Sa} \left(\frac{n\Omega\tau}{2} \right)$$

$$F(j\omega) = \frac{T}{2} \times \frac{2A\tau}{T} \text{Sa} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) = A\tau \text{Sa} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|F(j\omega)| = A\tau \left| \text{Sa} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) \right|$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & F(j\omega) > 0 \\ \pi, & F(j\omega) < 0 \end{cases}$$

频谱图：



周期脉冲频谱包络线的形状和非周期单脉冲的频谱函数形状完全相同，所以，单脉冲信号的频谱也具有以下特点：

- 单脉冲信号的频谱也具有收敛性，即信号的大部分能量都集中在低频段；
- 当脉冲持续时间减小时，频谱的收敛速度变慢，即脉宽与频宽成反比。

四、傅里叶变换的性质

(一) 线性性质

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega)$$

(二) 时移性质

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ 则 $f(t - t_0) \leftrightarrow F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

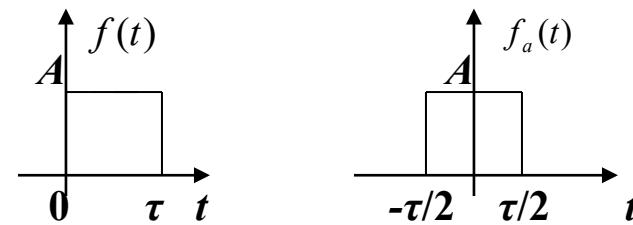
含义: 信号在时域中延时和在频域中移相对应。如正弦波在时间轴上的起点不同则相角随之变化。

例1 求 $f(t)$ 的频谱函数 $F(j\omega)$

解: $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$

$$f_a(t) \leftrightarrow F_a(j\omega) = A \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$F(j\omega) = F_a(j\omega)e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}$$



第三章 连续信号的正交分解

$$F(j\omega) = F_a(j\omega)e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} = A\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} = |F(j\omega)|e^{j\varphi_a(\omega)}$$

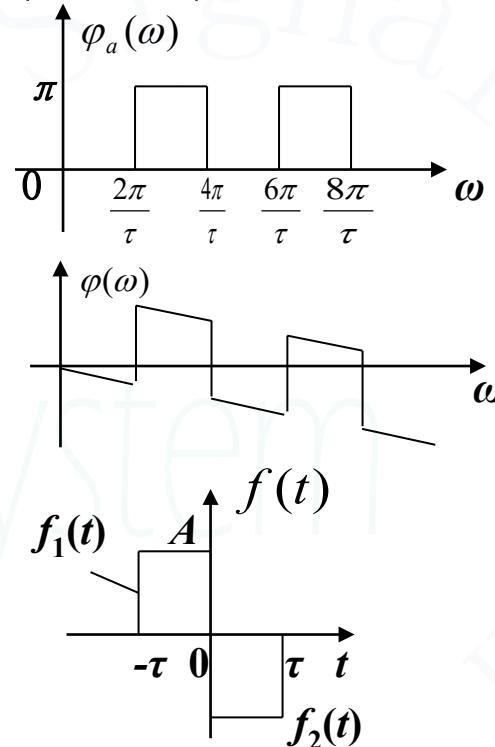
$$|F(j\omega)| = A\tau \left| \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right| = |F_a(j\omega)|$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_a(\omega) - \frac{\omega\tau}{2}$$

例2 $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$

$$F(j\omega) = F_1(j\omega) + F_2(j\omega)$$

$$= A\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \left(e^{j\frac{\omega\tau}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} \right)$$



(三) 移频性质

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ 则 $f(t)e^{j\omega_c t} \leftrightarrow F(j\omega - j\omega_c)$

表明：信号在时域中与因子 $e^{j\omega_c t}$ 相乘，等效于频域中频率的转移

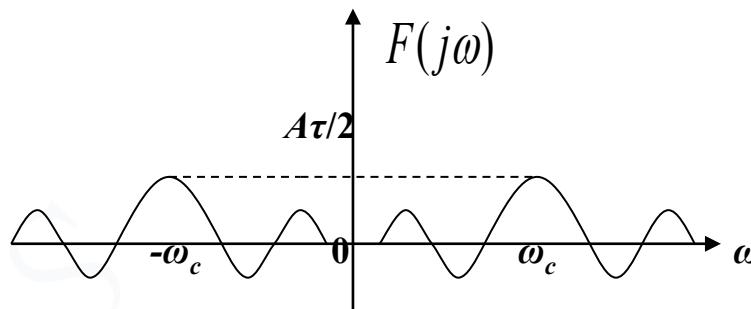
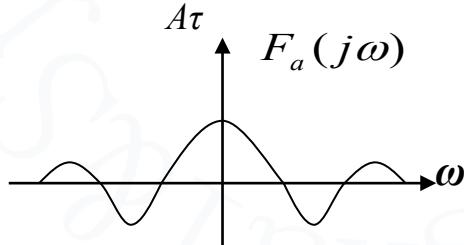
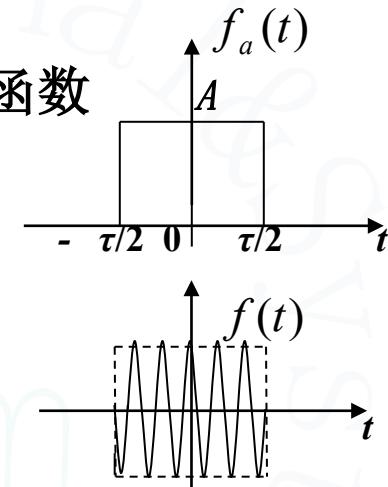
第三章 连续信号的正交分解

而 $f(t) \cos \omega_c t \leftrightarrow \frac{1}{2}[F(j\omega + j\omega_c) + F(j\omega - j\omega_c)]$ —— 调幅过程

例3 求 $f_a(t) \cos \omega_c t = f(t)$ —— 幅度调制信号的频谱函数

解: $f(t) = f_a(t) \cos \omega_c t = \frac{1}{2} f_a(t) (e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t})$

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{1}{2} F_a(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{2} F_a(j\omega + j\omega_c) \\ &= \frac{A\tau}{2} \operatorname{Sa}\left[\frac{(\omega - \omega_c)\tau}{2}\right] + \frac{A\tau}{2} \operatorname{Sa}\left[\frac{(\omega + \omega_c)\tau}{2}\right] \end{aligned}$$



第三章 连续信号的正交分解

例4 求余弦信号 $f(t) = \cos(\omega_0 t)$ 的频谱 $F(j\omega)$

解: $f(t) = 1 \bullet \cos(\omega_0 t) = f_1(t) \cos(\omega_0 t)$

则 $F(j\omega) = \frac{1}{2} F_1(j\omega - j\omega_0) + \frac{1}{2} F_1(j\omega + j\omega_0)$

先求直流信号 $f_1(t) = 1$ 的频谱 $F_1(j\omega)$

当单个矩形脉冲 (幅度 $A=1$) 的持续时间无限趋大时就变成了直流信号, 即 $f_1(t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} f_a(t)$

$$F_1(j\omega) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} F_a(j\omega) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

而 $\delta(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} \text{Sa}(k\omega)$

若令 $k = \frac{\tau}{2}$

则 $F_1(j\omega) = 2\pi \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} \text{Sa}(k\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

即 $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

直流信号的频谱是位于 $\omega = 0$ 处的冲激

于是 $F(j\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$

可见，周期余弦信号的频谱函数完全集中于 $\omega = \pm\omega_0$ 点，是位于 $\omega = \pm\omega_0$ 点的冲激函数，频谱中不包含任何其它成分。

(四) 尺度展缩(变换)性质

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$

则 $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F(j\frac{\omega}{a})$

含义：在时域内，信号 $f(t)$ 沿时间轴压缩至原来的 $\frac{1}{|a|}$ ，
对应于频域中，它的频谱函数展宽 $|a|$ 倍。即信号的脉宽与频宽成反比。

第三章 连续信号的正交分解

证明: (1) $a > 0$

$$F[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt \stackrel{t' = at}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-j\omega \frac{t'}{a}} \frac{1}{a} dt' = \frac{1}{a} F\left(j \frac{\omega}{a}\right)$$

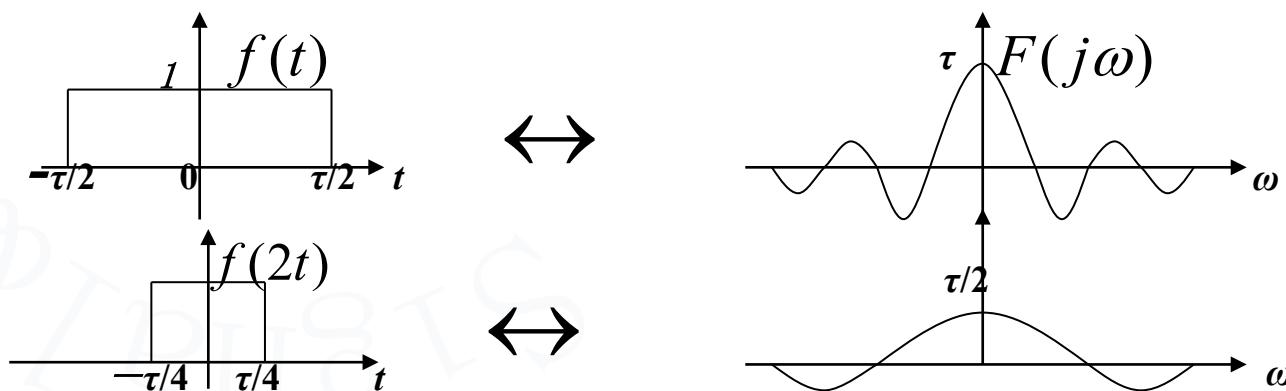
(2) $a < 0$

令 $t' = at = -|a|t$ $\begin{cases} t = -\infty \rightarrow \infty \\ t' = \infty \rightarrow -\infty \end{cases}$

$$F[f(at)] = \int_{\infty}^{-\infty} f(t') e^{-j\omega \frac{t'}{a}} \frac{1}{a} dt' = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-j\omega \frac{t'}{a}} \left(-\frac{1}{a}\right) dt' = -\frac{1}{a} F\left(j \frac{\omega}{a}\right)$$

令 $a = -1$

则 $f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega)$



(五) 奇偶性质

如果 $f(t)$ 是 t 的实函数, 且设

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$$

则有 (1) $R(\omega) = R(-\omega), X(\omega) = -X(-\omega)$
 $|F(j\omega)| = |F(-j\omega)|, \varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$

$$(2) \quad f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega) = F^*(j\omega)$$

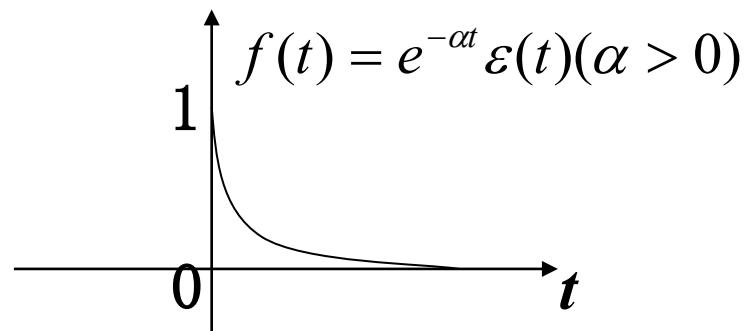
$$(3) \quad \text{如 } f(t) = f(-t), \text{ 则 } X(\omega) = 0, F(j\omega) = R(\omega)$$

$$\text{如 } f(t) = -f(-t), \text{ 则 } R(\omega) = 0, F(j\omega) = jX(\omega)$$

例5 求单边指数信号的频谱

$$\text{解: } F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt$$



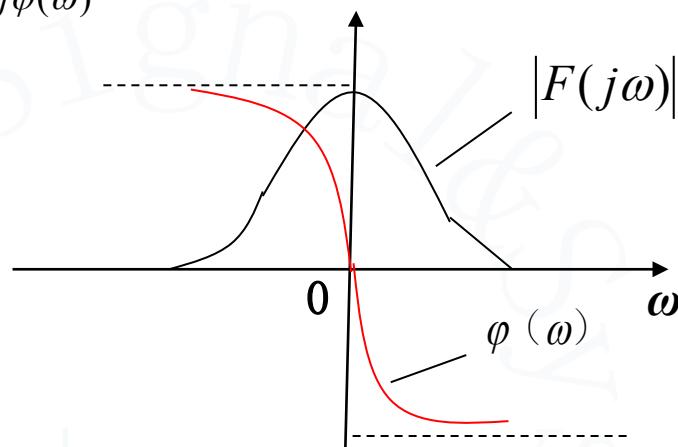
第三章 连续信号的正交分解

$$= \int_0^\infty e^{-(\alpha+j\omega)t} dt = \frac{1}{\alpha+j\omega} = |F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha}$$

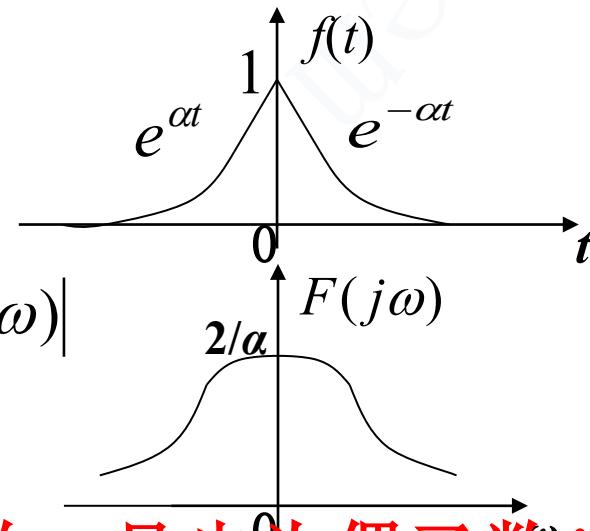
$$\omega = 0 \rightarrow \infty \quad |F(j\omega)| = \frac{1}{\alpha} \rightarrow 0$$



例6 求双边指数信号 $f(t) = e^{-\alpha|t|}$ ($-\infty < t < \infty$) 的频谱

$$\begin{aligned} \text{解: } F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = |F(j\omega)| \end{aligned}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} 0 = 0$$



当 $f(t)$ 是偶函数时，其频谱必然是实数，且也为偶函数！

例7 求单位符号函数Sgn(t)的频谱

解： 观察 $f_1(t)$

$$f_a(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} f_1(t)$$

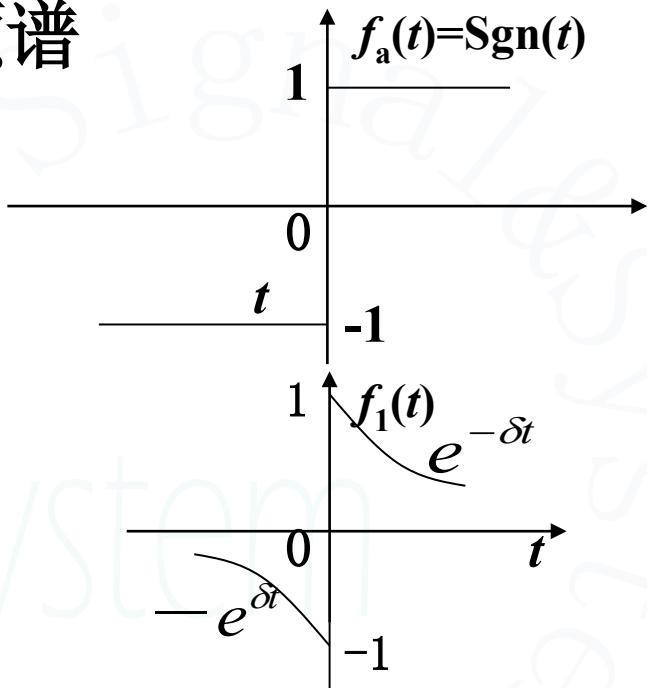
于是 $F_a(j\omega) = \lim_{\delta \rightarrow 0} F_1(j\omega)$

(1) 求 $F_1(j\omega)$

$$F_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^0 (-e^{\delta t}) e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\delta t} e^{-j\omega t} dt$$

$$= -\frac{1}{\delta - j\omega} + \frac{1}{\delta + j\omega} = \frac{-j2\omega}{\delta^2 + \omega^2}$$

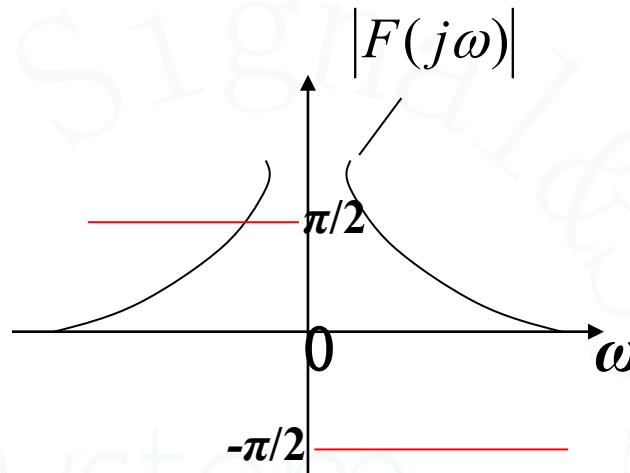


(2) 求 $F_a(j\omega)$

$$F_a(j\omega) = \lim_{\delta \rightarrow 0} F_1(j\omega) = -j \frac{2}{\omega}$$

$$|F_a(j\omega)| = \frac{2}{|\omega|}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \omega > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \omega < 0 \end{cases}$$



当 $f(t)$ 为奇函数时，其频谱一定是虚数，且也为奇函数！

如果将信号 $f(t)$ 看作是由余弦“分量”所组成，其频谱图是单边的（即 $0 \leq \omega < \infty$ ）；

如果将信号看作是由虚指数函数所组成，由于它是对 ω 从 $-\infty$ 到 ∞ 积分，因此，频谱图应为双边谱。

(六) 对称性质(互易性质)

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$

则 $F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

若 $f(t)$ 是偶函数, 则 $F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$

含义: 信号的波形与信号的频谱的图形有着互相置换的关系。

如单位冲激信号 $\delta(t)$ 的频谱为:

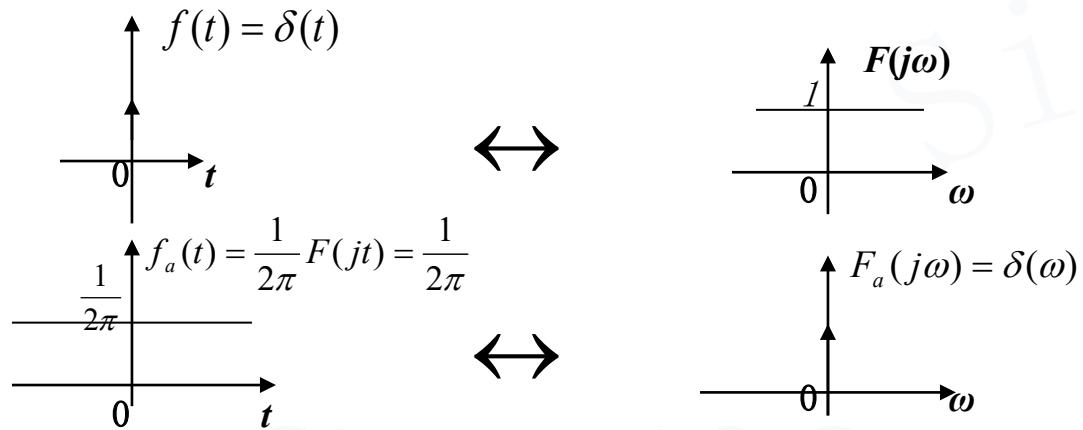
$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

即 $\delta(t) \leftrightarrow 1$

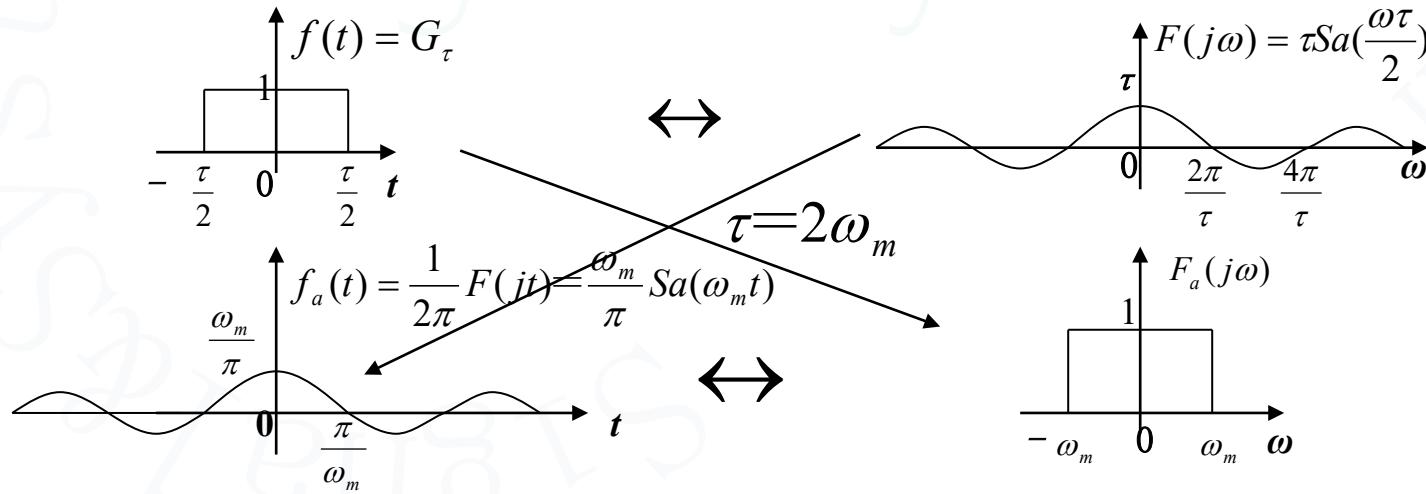
表明: 单位冲激信号具有无限宽的频带。

从而 $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$ 或 $\frac{1}{2\pi} \leftrightarrow \delta(\omega)$

第三章 连续信号的正交分解



又如求取样函数 $f_a(t) \leftrightarrow F_a(j\omega)$



注意：这种对称关系只适用于偶函数。

(七) 时间微分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$

则 $f'(t) = \frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(j\omega)$

$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$

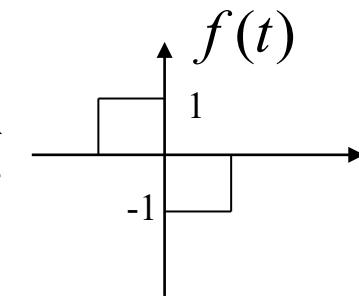
含义：信号对时间取导数，相当于在频域中用因子 $(j\omega)$ 去乘它的频谱函数。

如正弦稳态分析中

$$i_c = C \frac{du_c(t)}{dt} \Leftrightarrow \dot{I}_c = j\omega C \dot{U}_c$$

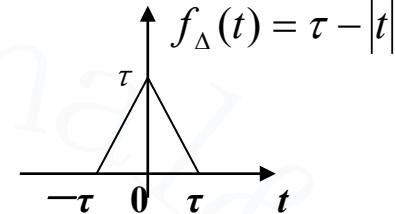
例8 求非周期镜像脉冲 $f(t)$ 的频谱函数

解： $f(t) = f'_\Delta(t) \leftrightarrow F(j\omega) = j\omega F_\Delta(j\omega)$



第三章 连续信号的正交分解

$$\begin{aligned}F_{\Delta}(j\omega) &= \int_{-\tau}^0 (\tau + t)e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\tau} (\tau - t)e^{-j\omega t} dt \\&= \tau^2 [Sa(\frac{\omega\tau}{2})]^2\end{aligned}$$



$$F(j\omega) = j\omega F_{\Delta}(j\omega) = j\omega \tau^2 [Sa(\frac{\omega\tau}{2})]^2 = j \frac{4}{\omega} \sin^2(\frac{\omega\tau}{2})$$

(八) 时间积分性质

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$

则 $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(j\omega) + \pi F(0) \delta(\omega)$

证明: (1) $\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

(2) $\varepsilon(t - \tau) \leftrightarrow [\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}] e^{-j\omega\tau}$

(3) $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \varepsilon(t - \tau) d\tau$

第三章 连续信号的正交分解

$$F\left[\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right] \stackrel{\text{由(3)}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \varepsilon(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau$$

$$\stackrel{\text{由(2)}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) [\pi \delta(\omega) e^{-j\omega\tau}] d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\frac{e^{-j\omega\tau}}{j\omega} \right] d\tau$$

$$= \pi \delta(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau + \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= \pi \delta(\omega) F(0) + \frac{1}{j\omega} F(j\omega)$$

设 $F(0) = 0$

则 $F\left[\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(j\omega)$

含义：信号对时间积分，相当于在频域中用因子($j\omega$)去除它的频谱函数。

注意积分性质的应用条件!

设 $f(t) = \frac{dg(t)}{dt}$

则 $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{dg(\tau)}{d\tau} d\tau = g(t) - g(-\infty)$

当 $g(-\infty) = 0$ 时, $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = g(t) \leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} F(j\omega)$

积分性质的应用条件是原函数在负无穷远处的函数值等于零!

$g(-\infty) \neq 0$ 时, $g(t) \leftrightarrow 2\pi g(-\infty)\delta(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} F(j\omega)$

又 $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg(t)}{dt} dt = g(\infty) - g(-\infty)$

故一般可表示为:

$$g(t) \leftrightarrow \pi[g(\infty) + g(-\infty)]\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} F(j\omega)$$

第三章 连续信号的正交分解

例9 求三角形脉冲 $f_\Delta(t)$ 的频谱函数 $F_\Delta(j\omega)$

解: $\delta(t) \leftrightarrow 1$ (频带无限宽)

$$f_\Delta(-\infty) = 0$$

$$f_\Delta(t) = \int_{-\infty}^t f_1(\tau) d\tau \leftrightarrow F_\Delta(j\omega) = \frac{1}{j\omega} F_1(j\omega) + \pi F_1(0) \delta(\omega)$$

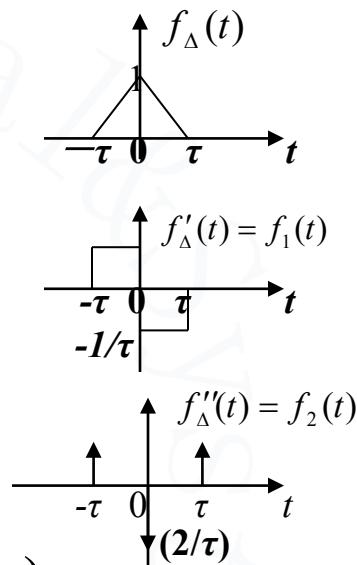
$$f_1(-\infty) = 0$$

$$f_1(t) = \int_{-\infty}^t f_2(\tau) d\tau \leftrightarrow F_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega} F_2(j\omega) + \pi F_2(0) \delta(\omega)$$

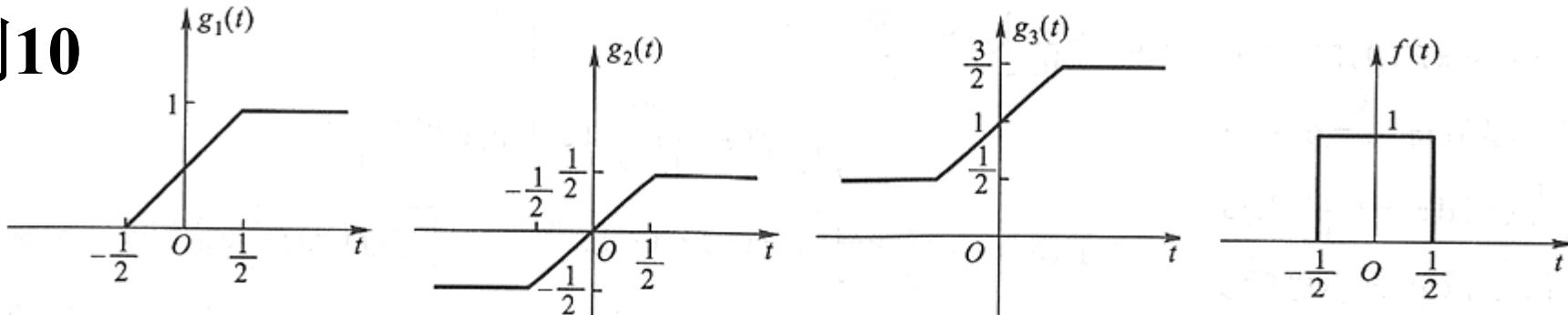
$$F_2(j\omega) = \frac{1}{\tau} (e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau}) - \frac{2}{\tau} = \frac{2}{\tau} [\cos(\omega\tau) - 1] = -\frac{4}{\tau} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$F_2(0) = 0 \therefore F_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \left[-\frac{4}{\tau} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right] = j\omega\tau \left[\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right]^2$$

$$F_1(0) = 0 \therefore F_\Delta(j\omega) = \frac{1}{j\omega} F_2(j\omega) = \tau \left[\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right]^2$$



例10



$$f(t) = \frac{dg_1(t)}{dt} = \frac{dg_2(t)}{dt} = \frac{dg_3(t)}{dt}, \quad f(t) \leftrightarrow \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad F(0) = 1$$

$$g_1(-\infty) = 0,$$

$$G_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega} F(j\omega) + \pi F(0)\delta(\omega) = \frac{\text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$g_2(-\infty) = -\frac{1}{2}, \quad g_2(\infty) = \frac{1}{2},$$

$$G_2(j\omega) = \pi[g_2(-\infty) + g_2(\infty)]\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} F(j\omega) = \frac{\text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{j\omega}$$

$$g_3(-\infty) = \frac{1}{2}, \quad g_3(\infty) = \frac{3}{2}, \quad G_3(j\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

第三章 连续信号的正交分解

运用积分性质从导函数的频谱求原函数的频谱时,原函数若不含直流分量,则其频谱就不含冲激函数,否则,其频谱等于导函数的频谱除以因子($j\omega$)后再加上直流分量的频谱.

$$f(t) = \frac{dg_1(t)}{dt} = \frac{dg_2(t)}{dt} = \frac{dg_3(t)}{dt} \quad f(t) \leftrightarrow Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

因为 $\int_{-\infty}^{\infty} g_2(t)dt = 0$, 所以 $G_2(j\omega) = \frac{Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)}{j\omega}$

而 $g_1(t) = g_2(t) + \frac{1}{2}$, $g_3(t) = g_2(t) + 1$

故 $G_1(j\omega) = G_2(j\omega) + \frac{1}{2} \bullet 2\pi\delta(\omega) = \frac{Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

$$G_3(j\omega) = G_2(j\omega) + 2\pi\delta(\omega) = \frac{Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)}{j\omega} + 2\pi\delta(\omega)$$

(九) 频域的微分与积分性质

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$

则 $-jtf(t) \leftrightarrow \frac{dF(j\omega)}{d\omega}$

$$\pi f(0)\delta(t) + j \frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(j\Omega) d\Omega$$

(+) 卷积定理

1. 时域卷积定理

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)F_2(j\omega)$$

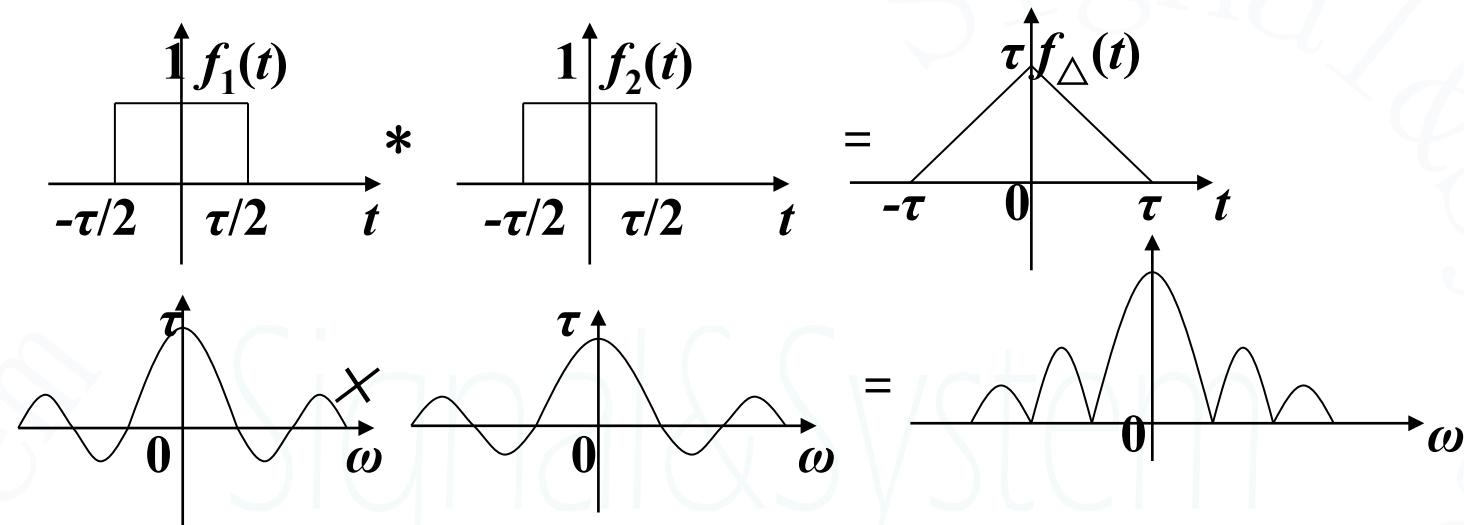
证明: $F[f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau] e^{-j\omega t} dt$

(变换积分次序) $= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) [\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt] d\tau$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) F_2(j\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= F_1(j\omega)F_2(j\omega)$$

例11 求三角形脉冲 $f_\Delta(t)$ 的频谱函数 $F_\Delta(j\omega)$



$$F_1(j\omega) = F_2(j\omega) = \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

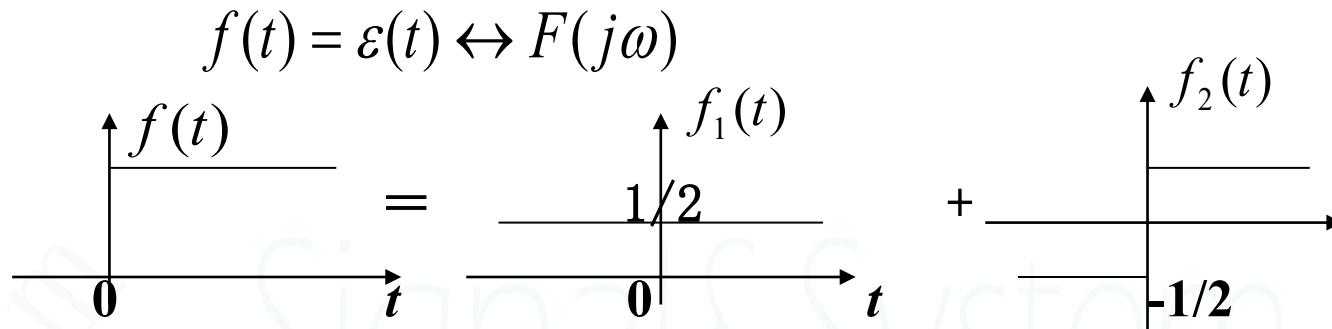
$$F_\Delta(j\omega) = F[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(j\omega)F_2(j\omega) = \tau^2 \left[\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right]^2$$

2. 频域卷积定理

$$f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [F_1(j\omega) * F_2(j\omega)]$$

五、常用信号的频谱函数

(一) 单位阶跃信号的频谱函数



$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$Sgn(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} Sgn(t)$$

$$F(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} = \pi\delta(\omega) - j\frac{1}{\omega}$$

$$\omega = 0 \text{ 时, } F(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

第三章 连续信号的正交分解

$$\omega \neq 0 \text{ 时, } F(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$
$$|F(j\omega)| = \left| \frac{1}{\omega} \right|, \varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, \omega > 0 \\ \frac{\pi}{2}, \omega < 0 \end{cases}$$

注意: 阶跃信号与直流信号所含分量不同, 因此它们是两种信号, 其频谱函数也就不同。

(二) 虚指数信号的频谱

$$f(t) = e^{j\omega_c t} \leftrightarrow F(j\omega)$$

直接求: $F[e^{j\omega_c t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_c t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_c)t} dt = ?$

为此考虑: $f_1(t) e^{j\omega_c t} \leftrightarrow F_1(j\omega - j\omega_c)$

$$f(t) = f_1(t) e^{j\omega_c t} = 1 \bullet e^{j\omega_c t}$$

第三章 连续信号的正交分解

$$f_1(t) = 1 \leftrightarrow F_1(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

$$F(j\omega) = F_1(j\omega - j\omega_c) = 2\pi\delta(\omega - \omega_c) \text{ (移频特性)}$$

(三) 指数变幅正弦信号的频谱

$$f(t) = e^{-\alpha t} \sin(\omega_c t) \varepsilon(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-\alpha t} \frac{1}{2j} (e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}) \varepsilon(t) \\ &= \frac{e^{-\alpha t} \varepsilon(t)}{2j} e^{j\omega_c t} - \frac{e^{-\alpha t} \varepsilon(t)}{2j} e^{-j\omega_c t} \end{aligned}$$

$$\therefore e^{-\alpha t} \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

$$\therefore F(j\omega) = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{\alpha + j(\omega - \omega_c)} - \frac{1}{\alpha + j(\omega + \omega_c)} \right] \text{ (移频特性)}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{\omega_c}{\sqrt{(\alpha^2 + \omega_c^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \quad \varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\alpha\omega}{\alpha^2 + \omega_c^2 - \omega^2}$$

(四) 周期信号的傅里叶变换——频谱密度函数

周期信号: $f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\Omega t}$

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

频谱函数: $F(j\omega) = F[f(t)] = F\left[\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\Omega t}\right]$
 $= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n F[e^{jn\Omega t}]$
 $= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n \bullet 2\pi\delta(\omega - n\Omega) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n \delta(\omega - n\Omega)$

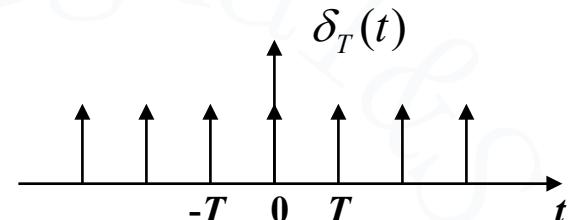
表明: ① 周期信号的频谱函数由无穷多个冲激函数组成, 各个冲激位于各次谐波频率处;
② 各个冲激的强度为各次谐波复振幅 \dot{A}_n 的 π 倍。

第三章 连续信号的正交分解

求周期信号的频谱密度函数 $F(j\omega)$ 之方法：

由 $f(t) \rightarrow \dot{A}_n \rightarrow F(j\omega)$

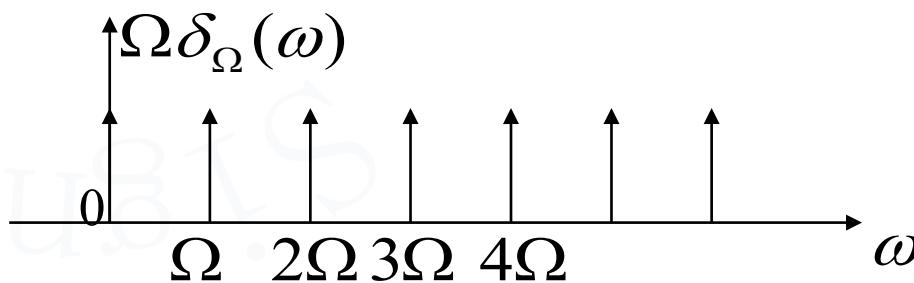
如均匀冲激序列 $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$



其复数振幅 $\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{2}{T}$

其频谱密度为 $\delta_T(\omega) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{T} \delta(\omega - n\Omega)$

$$= \Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega)$$



六、帕塞瓦尔定理与能量频谱

(一) 信号的能量W和平均功率P

1. 信号的能量:

信号 $f(t)$ 在 1Ω 电阻上消耗的能量

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} i^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt$$

2. 信号的平均功率:

信号 $f(t)$ 在 1Ω 电阻上消耗的平均功率

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt = \overline{[f(t)]^2}$$

3. 能量信号 (能量有限信号)

能量为有限值 (W =有限值, $P=0$)

4. 功率信号

平均功率为有限值 (P =有限值, $W=\infty$)

(二) 帕塞瓦尔定理

由电路理论知：非正弦周期信号电流或电压的有效值等于该电流或电压中所含各项谐波分量有效值的平方和的平方根，即

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + \cdots + I_n^2 + \cdots}$$

其功率 $P = I^2 = \overline{[i(t)]^2} (R = 1)$

$$I^2 = \overline{i^2} = I_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{I_{nm}}{\sqrt{2}} \right)^2 = I_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} I_{nm}^2$$

写成一般形式：

$$\overline{f^2(t)} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt = \left(\frac{A_0}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{A_n}{2} \right)^2$$

表明：对周期信号，在时域中求得的信号功率与在频域中求得信号功率相等，且频域中的信号功率表示为各谐波分量功率之和，其中每一分量的功率为该谐波的方均值。

帕塞瓦尔定理：

周期信号的功率等于该信号在完备正交函数集中各分量功率之和。

(三) 非周期信号的能量和能谱(能量密度频谱函数)

1. 非周期信号的能量

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) F(-j\omega) d\omega$$

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \\&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |F(j2\pi f)|^2 df \quad (\omega = 2\pi f)\end{aligned}$$

表明：对非周期信号，在时域中求得的信号能量与在频域中求得的信号能量相等。——雷利定理

2. 非周期信号的能谱

非周期信号 $A_n \rightarrow 0$ 其各频率分量的能量趋于无穷小

能量密度频谱（能谱）定义：

单位角频率中的能量，以 $G(\omega)$ 表示

$$G(\omega) = \frac{dW}{d\omega} \quad 0 < \omega < \infty$$

$$dW = G(\omega) d\omega$$

第三章 连续信号的正交分解

$$W = \int_0^\infty G(\omega) d\omega$$
$$= \int_{-\infty}^\infty G_1(\omega) d\omega \quad G_1(\omega) \text{的定义域为 } -\infty < \omega < \infty$$

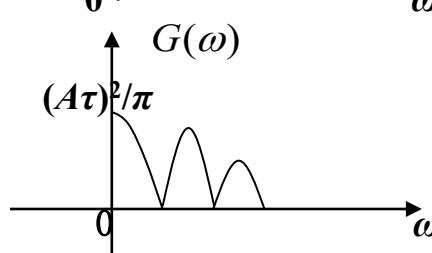
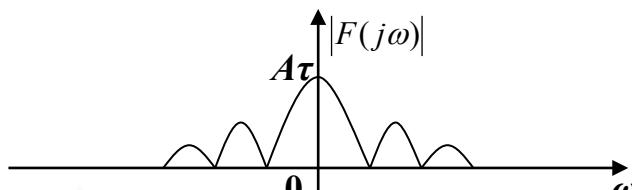
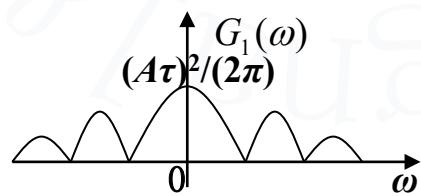
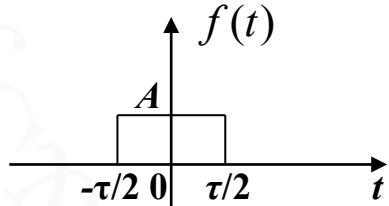
$G(\omega)$ 与 $F(j\omega)$ 的关系：

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |F(j\omega)|^2 d\omega$$
$$= \int_{-\infty}^\infty G_1(\omega) d\omega \quad = \int_0^\infty G(\omega) d\omega$$

$$\therefore G_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} |F(j\omega)|^2$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} |F(j\omega)|^2$$

例



3. 非周期信号的脉冲宽度和频带宽度

脉冲宽度 τ_0 定义：脉冲中集中了90%信号能量的那段时间

$$\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{\frac{\tau_0}{2}} [f(t)]^2 dt = \eta \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \eta W \quad \eta = 90\%$$

$\Delta\omega = B_s$ —— 频带宽度

频带宽度 B_s 定义：集中90%信号能量的频带为占有频带 B_s



$$\frac{1}{\pi} \int_0^{B_s} |F(j\omega)|^2 d\omega = \eta \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \eta W \quad \eta = 90\%$$

本章小结

一、周期信号的频谱及其特点

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \cdots (1) \\ f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \dot{A}_n e^{jn\Omega t} dt \cdots (2) \end{array} \right.$$

离散性、谐波性、收敛性

二、非周期信号的频谱密度函数

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi) d\omega$$

三、傅氏变换的性质

四、帕塞瓦尔定理与能量频谱

$$P = \overline{f^2(t)} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt = \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{A_n}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\omega) d\omega \\ \therefore G_1(\omega) &= \frac{1}{2\pi} |F(j\omega)|^2 \end{aligned}$$

五、频带宽度

第三章 连续信号的正交分解

作业：

3.5、3.6

3.7、3.9、3.10

3.11、3.12、3.14(1)(2)、

3.20(b)(c)、3.21

3.23、3.24

引言

线性系统的分析方法：

$$e(t) \rightarrow \boxed{\text{线性系统}} \rightarrow r(t) = ?$$

$e(t)$: 直流——用直流电路解法

正弦交流——用符号法(向量、复数)

任意波形、线性时不变——叠加

方法：激励信号分解——求单个响应——叠加得总响应

四种分解方法：

1) 将激励信号分解为冲激函数之和
——卷积积分法(时域)

2) 将激励信号分解为阶跃函数之和
——杜阿美尔积分法(时域)

第四章 连续时间系统的频域分析

- 3) 将激励信号分解为等幅正弦信号之和
——付氏变换法(频域)
- 4) 将激励信号分解为变幅的正弦信号之和
——拉氏变换法(复频域)

频域分析: 研究系统在不同频率的信号激励下, 其零状态响应随频率变化的规律(频率响应特性)。

频域分析法(傅里叶变换分析法): 利用傅里叶变换在频域中求解系统的零状态响应的方法。

第四章 连续时间系统的频域分析

频域分析法需进行正反两次变换，且付氏变换的运用要受绝对可积条件的限制，所以求连续系统的响应时更多地采用复频域分析法(拉氏变换法)。但频域分析法仍十分重要，因为

- 复频域分析法是频域分析法的推广；
- 信号的频谱具有明确的物理意义；
- 当系统内部结构无法可知时，在复频域中无法得到反映系统功能的系统函数，但在频域中可通过实验测得。

本章内容：

- 信号通过线性系统的频域分析方法
- 理想低通滤波器的冲激响应与阶跃响应
- 信号通过线性系统不产生失真的条件

一、信号通过线性系统的频域分析方法

(一) 系统的频率响应特性

联系频域中零状态响应 $R(j\omega)$ 与激励 $E(j\omega)$ 的函数 $H(j\omega)$ 称为频域的系统函数，也叫频率响应函数。定义为

$$H(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{E(j\omega)}$$

$$H(j\omega) \stackrel{\text{令}}{=} |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad \text{——频率响应函数}$$

频率响应函数的物理意义：

系统可以看作是一个信号处理器

激励： $E(j\omega)$

响应： $R(j\omega) = H(j\omega) \cdot E(j\omega)$

对信号各频率分量进行加权

第四章 连续时间系统的频域分析

$$E(j\omega) = |E(j\omega)| e^{j\varphi_e(\omega)}$$

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi_h(\omega)}$$

$$R(j\omega) = |R(j\omega)| e^{j\varphi_r(\omega)}$$

$$|R(j\omega)| = |E(j\omega)| |H(j\omega)|$$

$$\varphi_r(\omega) = \varphi_e(\omega) + \varphi_h(\omega)$$

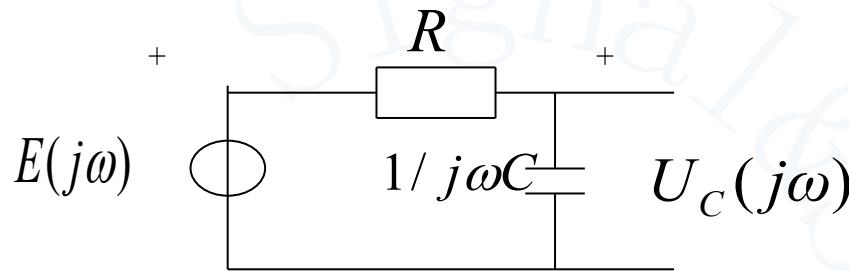
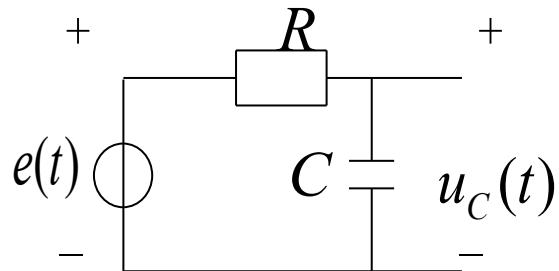
**$R(j\omega)$ 的幅度
被 $|H(j\omega)|$ 加权**

**$R(j\omega)$ 的相位
被 $\varphi_h(\omega)$ 修正**

对于不同的频率 ω , 有不同的加权作用, 这也是信号分解, 求响应再叠加的过程。

第四章 连续时间系统的频域分析

频率响应函数可由零状态电路的频域模型求解



$$H(j\omega) = \frac{U_C(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{j\omega RC + 1} = \frac{a}{j\omega + a}$$

$H(j\omega)$ 为电压传输系数, $a = \frac{1}{RC}$ 为 RC 电路的衰减常数
 $\tau = RC$ 为 RC 电路的时间常数

频率响应函数也可通过对系统的数学模型(微分方程)取傅里叶变换而得到。

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = e(t) \rightarrow RCj\omega U_C(j\omega) + U_C(j\omega) = E(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{U_C(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{1}{j\omega RC + 1} = \frac{a}{j\omega + a}$$

(二) 系统在周期信号激励下响应的频域分析

设激励信号为 $\sin(\omega_0 t)$, 系统的频率响应为 $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$
则系统的稳态响应为

$$|H(j\omega_0)| \sin[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]$$

例 若 $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$, 当输入分别为 $\sin t, \sin 2t, \sin 3t$
时的输出为多少?

解: $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}$, $\varphi(\omega) = -\operatorname{tg}^{-1} \omega$

$$|H(j1)| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi(1) = -\operatorname{tg}^{-1} 1 = -45^\circ$$

$$\sin t \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t - 45^\circ)$$

第四章 连续时间系统的频域分析

$$|H(j2)| = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \varphi(2) = -\operatorname{tg}^{-1} 2 = -63^0$$

$$\sin 2t \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \sin(2t - 63^0)$$

$$|H(j3)| = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \varphi(3) = -\operatorname{tg}^{-1} 1 = -72^0$$

$$\sin 3t \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{10}} \sin(3t - 72^0)$$

系统对一般周期信号的响应的频域法步骤：

- (1) 用傅里叶级数将激励信号分解为多个正弦分量之和；
- (2) 找出系统的频率响应函数 $H(j\omega)$ ；
- (3) 求取每一分量的响应；
- (4) 将各个响应分量在时域相加得总响应。

第四章 连续时间系统的频域分析

例：某LTI系统的幅频特性 $|H(j\omega)|$ 和相频特性 $\varphi(\omega)$ 分别如图所示。如果系统的激励为 $x(t) = 2 + 4\cos 5t + 4\cos 10t$ ，试求响应 $y(t)$ 。

解：根据系统的频率特性知，该系统将直流信号的幅度放大1倍。

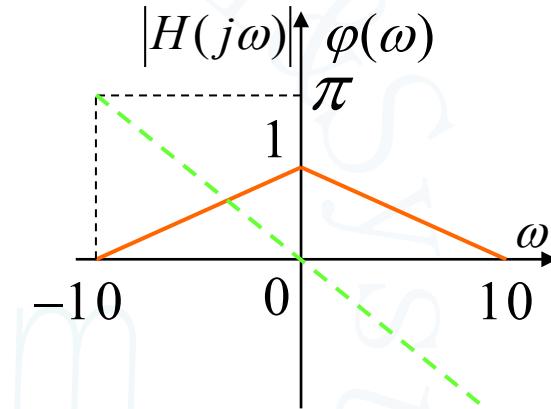
将 $\omega=5$ 的信号的幅度放大 $1/2$ 倍，附加相位移 $-\frac{\pi}{2}$ 。

将 $\omega=10$ 的信号的幅度衰减为0。

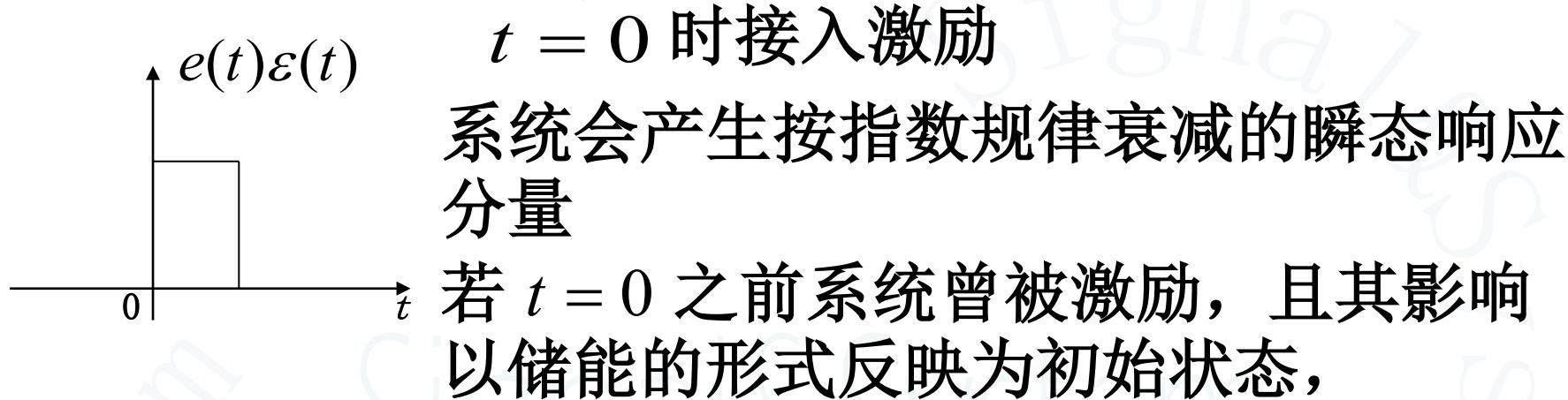
所以，当激励为 $x(t) = 2 + 4\cos 5t + 4\cos 10t$ 时，响应为

$$y(t) = 2 + 2\cos\left(5t - \frac{\pi}{2}\right) = 2 + 2\sin 5t$$

可见，LTI系统在周期信号激励下的响应仍然为周期信号。 $H(j\omega)$ 描述了系统对不同频率分量的幅度和相位的影响。



(三) 系统在非周期信号激励下响应的频域分析



若 $t = 0$ 之前系统曾被激励，且其影响以储能的形式反映为初始状态，

则 系统的响应 = 零输入响应 + 零状态响应

零输入响应：时域法求

$$D(p)r_{zi}(t) = 0$$

若 $D(p) = (p - \lambda_1)(p - \lambda_2) \dots (p - \lambda_n)$ (n 个单根)

$$\text{则 } r_{zi}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}$$

零状态响应：频域法求

第四章 连续时间系统的频域分析

频域法步骤：

- 1) 将激励信号分解为正弦分量，即求 $E(j\omega) = F[e(t)]$
频率为 ω 的分量的复数振幅为 $\frac{E(j\omega)d\omega}{\pi}$
- 2) 找出联系响应与激励的系统函数(网络函数) $H(j\omega)$
- 3) 求各频率分量的响应的频谱函数 $R(j\omega)$

因为响应的复数振幅为(对频率为 ω 的分量而言)：

$$\frac{R(j\omega)d\omega}{\pi} = H(j\omega) \frac{E(j\omega)d\omega}{\pi}$$

所以 $R(j\omega) = H(j\omega)E(j\omega)$

- 4) 求响应: $r(t) = F^{-1}[R(j\omega)]$

讨论: ① 频域分析法:

时域 付氏变换 频域 (代数运算) 付氏反变换 时域

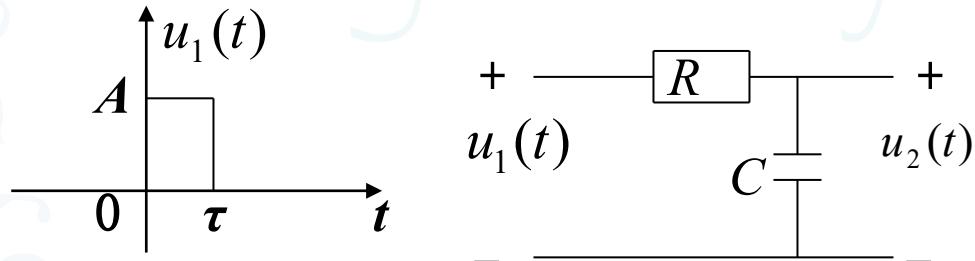
$$e(t) \rightarrow R(j\omega) = H(j\omega)E(j\omega) \rightarrow r(t)$$

② 时域: $r(t) = e(t) * h(t)$

频域: $R(j\omega) = E(j\omega)H(j\omega)$

$\} \Rightarrow h(t) \leftrightarrow H(j\omega)$

例1 矩形脉冲 $u_1(t)$ 作用于 RC 电路, 求电容上的电压 $u_2(t)$



解: (1) 求 $U_1(j\omega)$

$$u_1(t) = A[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - \tau)]$$

$$U_1(j\omega) = F[u_1(t)] = F\{A[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - \tau)]\}$$

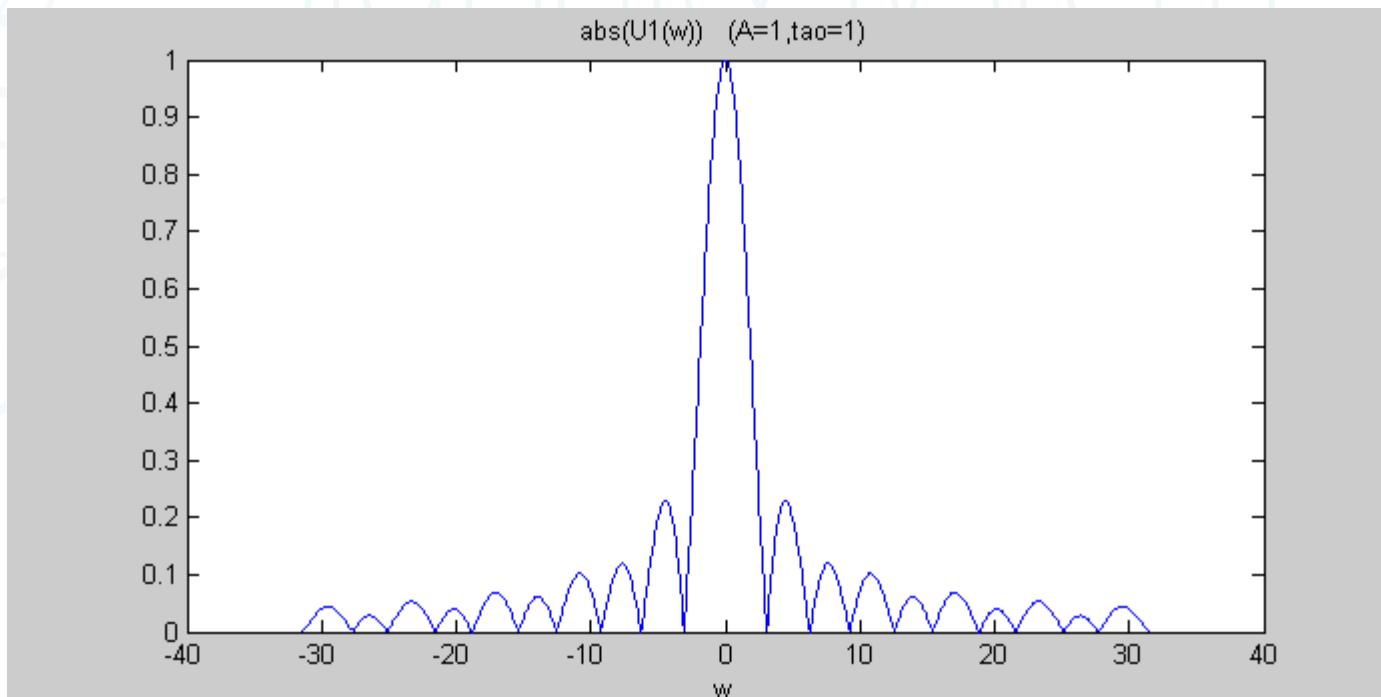
第四章 连续时间系统的频域分析

$$U_1(j\omega) = F[u_1(t)] = F\{A[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - \tau)]\}$$

$$= A[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} - \pi\delta(\omega)e^{-j\omega\tau} - \frac{e^{-j\omega\tau}}{j\omega}]$$

$$= \frac{A}{j\omega}(1 - e^{-j\omega\tau})$$

$$= \frac{2A}{\omega} \text{Sin} \frac{\omega\tau}{2} e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} = A\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}$$



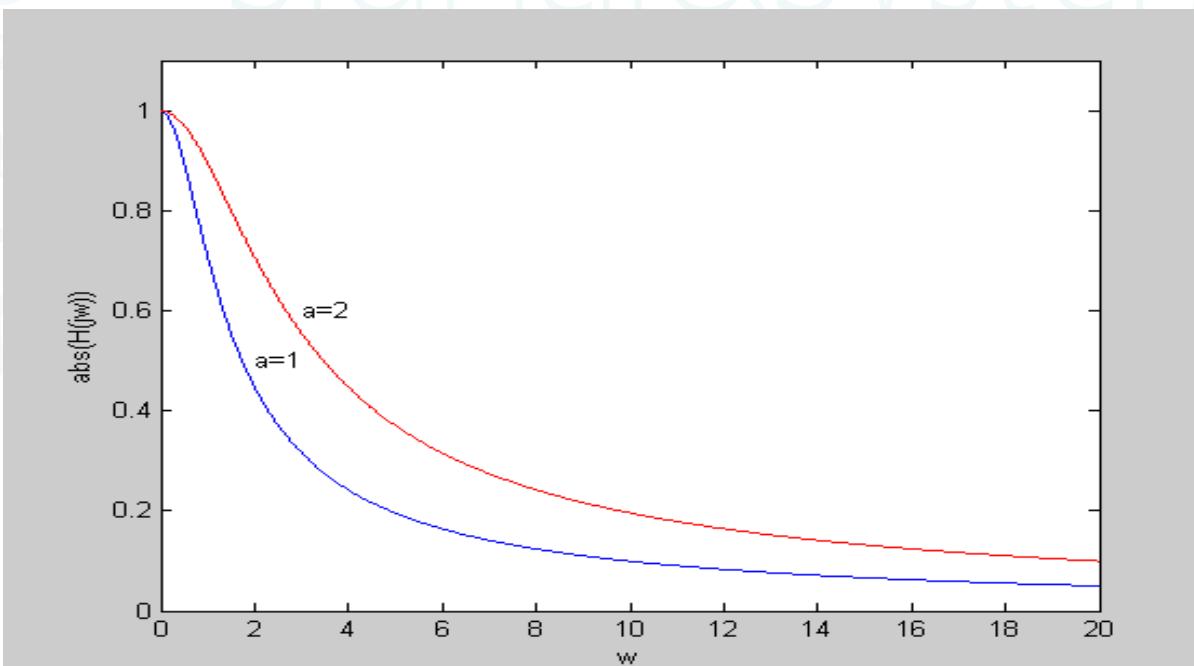
第四章 连续时间系统的频域分析

(2) 求 $H(j\omega)$

$$H(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\frac{1}{RC} + j\omega}$$

令 $\frac{1}{RC} = a = \frac{1}{\tau_0}$

$$H(j\omega) = \frac{a}{a + j\omega} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} e^{-j\arctg \frac{\omega}{a}}$$



第四章 连续时间系统的频域分析

(3) 求 $U_2(j\omega)$

$$U_2(j\omega) = U_1(j\omega)H(j\omega)$$

$$= A\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} e^{-j\arctg\frac{\omega}{a}}$$

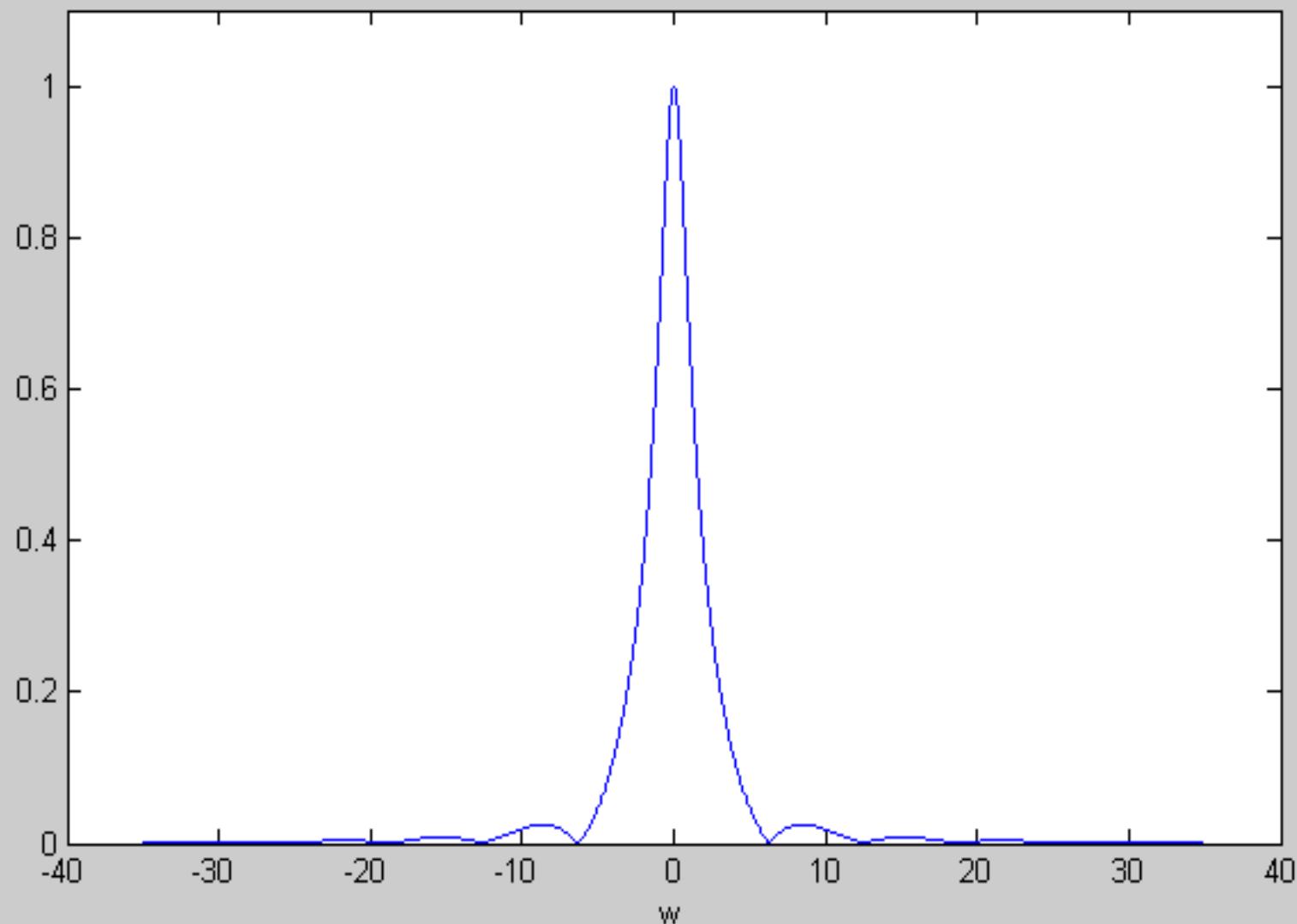
$$= \frac{aA\tau}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{-j\left(\frac{\omega\tau}{2} + \arctg\frac{\omega}{a}\right)}$$

$$|U_2(j\omega)| = \frac{aA\tau}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \left| Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right| = \frac{2aA \left| \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right|}{\omega\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

$$\phi_2(\omega) = \begin{cases} -\left(\frac{\omega\tau}{2} + \arctg\frac{\omega}{a}\right), \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) > 0 \\ \pm\pi - \left(\frac{\omega\tau}{2} + \arctg\frac{\omega}{a}\right), \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

第四章 连续时间系统的频域分析

abs(U1(jw)) (A=1,tao=1,a=1)



第四章 连续时间系统的频域分析

(4) 求 $u_2(t) = F^{-1}[U_2(j\omega)]$

$$\begin{aligned}U_2(j\omega) &= A(1-e^{-j\omega\tau}) \frac{a}{j\omega(a+j\omega)} = A(1-e^{-j\omega\tau})\left(\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{j\omega+a}\right) \\&= \frac{A(1-e^{-j\omega\tau})}{j\omega} - \frac{A}{a+j\omega} + \frac{A}{a+j\omega}e^{-j\omega\tau}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore u_2(t) &= A[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-\tau)] - Ae^{-at}\varepsilon(t) + Ae^{-a(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau) \\&= A(1-e^{-at})\varepsilon(t) - A[1-e^{-a(t-\tau)}]\varepsilon(t-\tau)\end{aligned}$$



上升和下降的时间特性：

$u_1(t): t = 0, \tau$ 急剧变化(跳变) —— 高频分量丰富

$u_2(t): t = 0, \tau$ 演变(圆滑), 有上升和下降时间

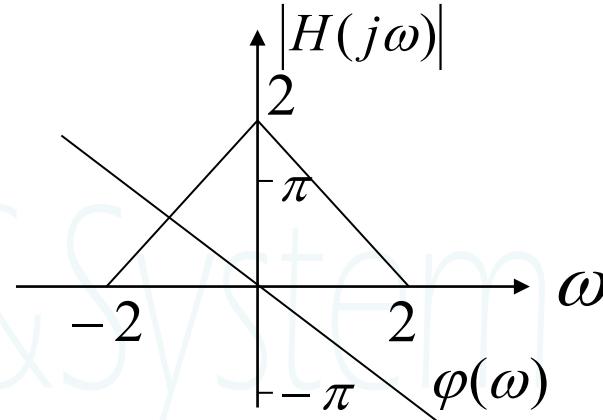
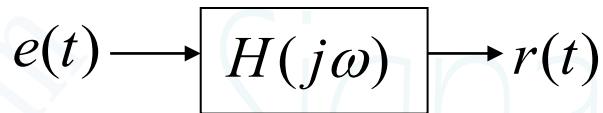
—— 高频分量被削弱

频域分析法的关键：求出系统函数！

第四章 连续时间系统的频域分析

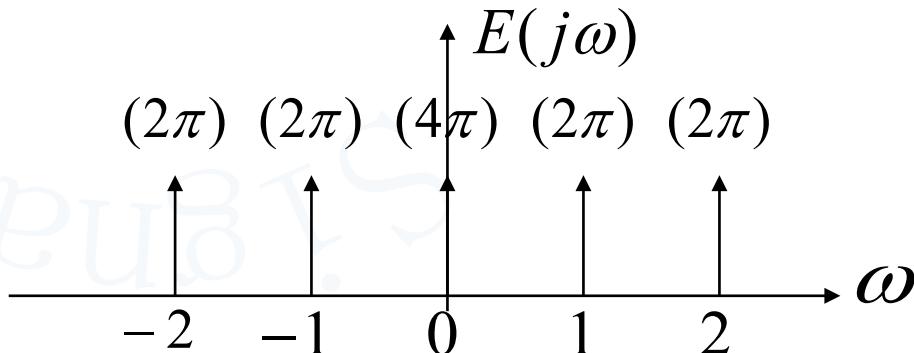
例2 已知一线性系统及系统函数 $H(j\omega)$ 如图, 设激励为

$e(t) = 2 + 2 \cos t + 2 \cos(2t)$, 求系统的输出 $r(t)$ 。



解: (1) 求 $E(j\omega)$

$$E(j\omega) = 4\pi\delta(\omega) + 2\pi[\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)] + 2\pi[\delta(\omega-2) + \delta(\omega+2)]$$



第四章 连续时间系统的频域分析

(2) 求 $H(j\omega)$

$$H(j\omega) = \begin{cases} (2 - |\omega|)e^{-j\frac{\omega\pi}{2}}, & |\omega| < 2 \\ 0, & |\omega| > 2 \end{cases}$$

(3) 求 $R(j\omega)$

$$R(j\omega) = E(j\omega)H(j\omega)$$

$$= \{4\pi\delta(\omega) + 2\pi[\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)]\}(2 - |\omega|)e^{-j\frac{\omega\pi}{2}}$$

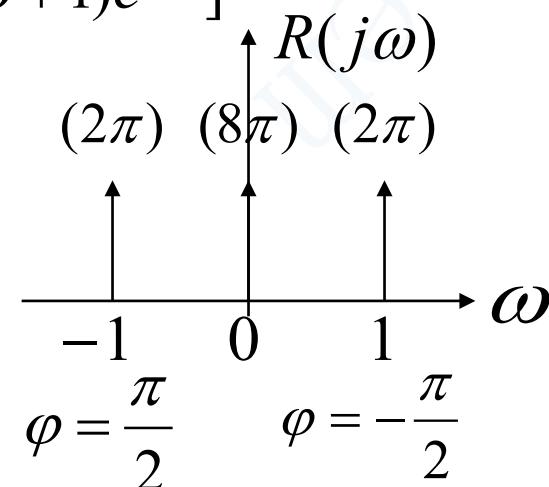
$$= 8\pi\delta(\omega) + 2\pi[\delta(\omega-1)e^{-j\frac{\pi}{2}} + \delta(\omega+1)e^{j\frac{\pi}{2}}]$$

(4) 求 $r(t) = F^{-1}[R(j\omega)]$

$$r(t) = 4 + e^{jt}e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-jt}e^{j\frac{\pi}{2}}$$

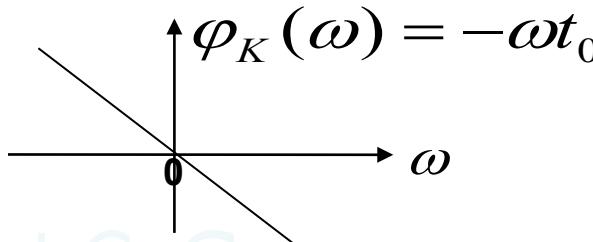
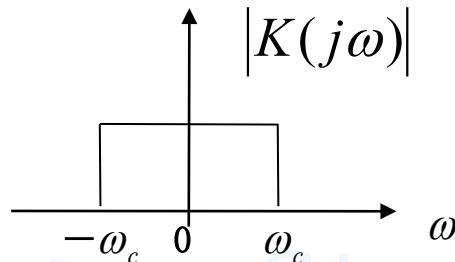
$$= 4 + e^{j(t - \frac{\pi}{2})} + e^{-j(t - \frac{\pi}{2})}$$

$$= 4 + 2\cos(t - \frac{\pi}{2}) = 4 + 2\sin t$$



二、理想低通滤波器的冲激响应与阶跃响应

(一) 理想低通滤波器的特性



$$K(j\omega) = \begin{cases} Ke^{-j\omega t_0}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

对于激励信号中低于截止频率 ω_c 的各分量可一致均匀地通过，在时间上延迟同一时间 t_0 ，而对于高于截止频率的各分量则一律不能通过，故名低通滤波器。

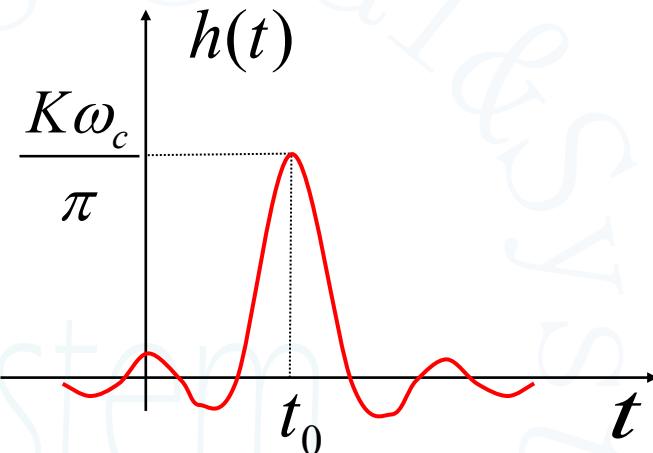
(二) 理想低通滤波器的冲激响应

$$e(t) = \delta(t) \quad H(j\omega) = K(j\omega)$$

$$E(j\omega) = F[\delta(t)] = 1$$

第四章 连续时间系统的频域分析

$$\begin{aligned}h(t) &= F^{-1}[E(j\omega)H(j\omega)] = F^{-1}[H(j\omega)] = F^{-1}[K(j\omega)] \\&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} K e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega \\&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} K e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \\&= \frac{K\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t-t_0)]\end{aligned}$$

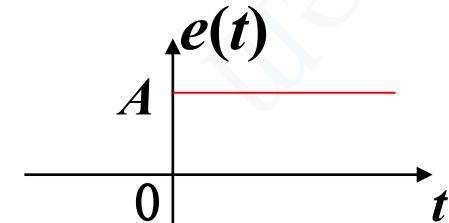


(三) 理想低通滤波器的阶跃响应

$$e(t) = A\varepsilon(t) \quad H(j\omega) = K(j\omega)$$

$$E(j\omega) = F[A\varepsilon(t)] = A[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}]$$

$$\begin{aligned}U(j\omega) &= H(j\omega)E(j\omega) = KA[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}]e^{-j\omega t_0} \\&= KA\pi\delta(\omega) + KA\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t_0}, |\omega| < \omega_c\end{aligned}$$



第四章 连续时间系统的频域分析

$$u(t) = F^{-1}[U(j\omega)] = KA \bullet \frac{1}{2} + \frac{KA}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \left(\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t_0} \right) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{KA}{2} + \frac{KA}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \\ &= \frac{KA}{2} + \frac{KA}{2\pi} \left[\int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\cos \omega(t-t_0)}{j\omega} d\omega + \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{j \sin \omega(t-t_0)}{j\omega} d\omega \right] \\ &= \frac{KA}{2} + \frac{KA}{\pi} \int_0^{\omega_c} \frac{\sin \omega(t-t_0)}{\omega} d\omega \end{aligned}$$

令 $\omega(t-t_0) = x$ 则 $\omega = \frac{x}{t-t_0}$, $d\omega = \frac{dx}{t-t_0}$

$$\omega: 0 \rightarrow \omega_c$$

$$x: 0 \rightarrow \omega_c(t-t_0)$$

$$u(t) = \frac{KA}{2} + \frac{KA}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin x}{x} dx$$

第四章 连续时间系统的频域分析

$$Si(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{——正弦积分函数}$$

$$\therefore u(t) = \frac{1}{2}KA + \frac{KA}{\pi} Si(y) = \frac{1}{2}KA + \frac{KA}{\pi} Si[\omega_c(t - t_0)]$$

当 $K = A = 1$ 时

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si[\omega_c(t - t_0)]$$

作 $u(t)$ 曲线：

讨论：响应波形与激励波形有差异

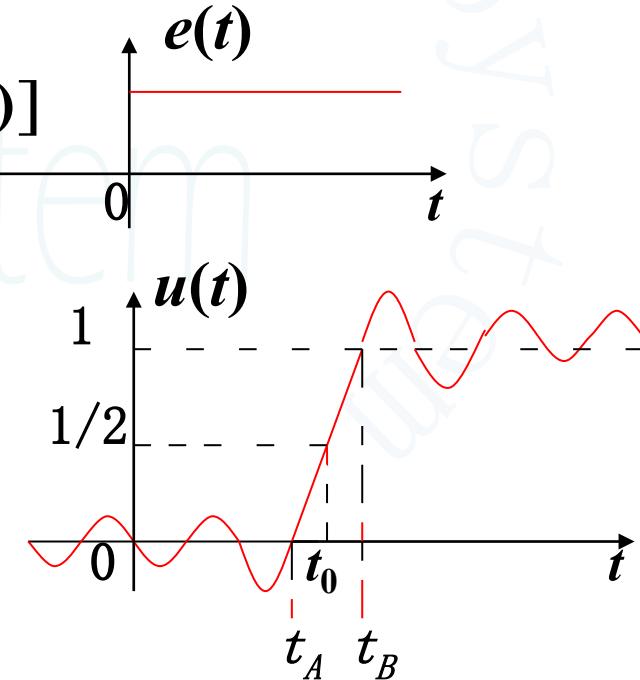
① 响应滞后于激励 t_0

($u(t) = 1/2$ 瞬间为响应出现的时间)

② 波形失真，前沿渐变

(电压的建立需要一段时间 t_r)

$$t_r = t_B - t_A$$



第四章 连续时间系统的频域分析

$$t_A : u(t_A) = 0 \rightarrow t_B : u(t_B) = 1$$

$$t_r = t_B - t_A = \frac{3.84}{\omega_c}$$

$$u(t_A) = 0.1 \rightarrow u(t_B) = 0.9$$

$$t_r = t_B - t_A = \frac{2.8}{\omega_c}$$

$$t_r \approx \frac{\pi}{\omega_c}$$

$$t_r \propto \frac{1}{\omega_c} \quad (\text{即上升时间与通带成反比})$$

物理分析：

$e(t)$ 前沿跳变(高频分量丰富)

$u(t)$ 前沿渐变，须有上升时间 t_r ，且 $\omega_c \uparrow \rightarrow t_r \downarrow$

原因：高于 ω_c 的分量没有输出

③ $t < 0$ 时， $u(t) \neq 0$ ——违背因果性 (在物理上无法实现)

因果性：时域——响应出现在激励之后

频域——系统函数的幅值应满足下列条件：

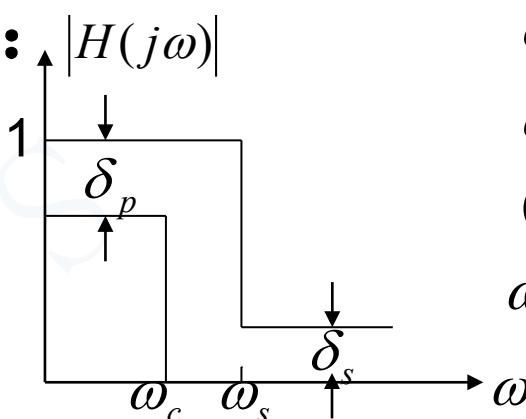
$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega < \infty \quad \text{而且} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|H(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty \quad \text{佩利-维纳准则}$$

佩利-维纳准则对物理上可实现的系统提出要求：

- 可允许其转移函数幅值 $|H(j\omega)|$ 在某些不连续的频率点上为零，但不允许在一个有限频带内为零；
- $\omega \rightarrow \infty$ 时， $|H(j\omega)|$ 的衰减速度应不大于指数衰减速率。

所有理想滤波器(低通、高通、带通、带阻)都要求通带、阻带截然分开，且阻带内输出为零，因此，在物理上都无法实现。实际滤波器的特性只能接近于理想特性。

低通滤波器的容限图：



ω_c —— 截止频率
 ω_s —— 阻带边界频率
 $0 \sim \omega_c$ —— 通频带
 $\omega_s \sim \infty$ —— 阻带

三、信号通过线性系统不产生失真的条件

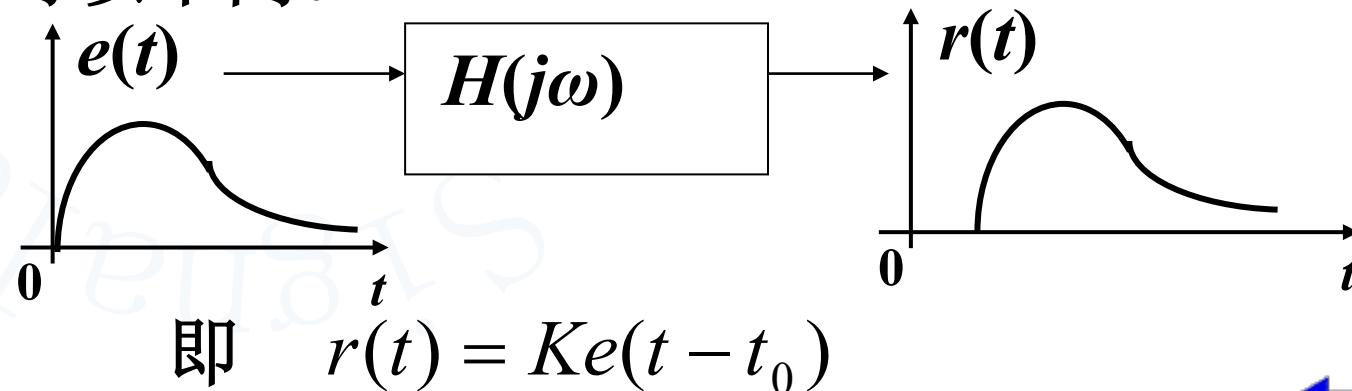
(一) 信号通过线性系统产生失真的原因

1. 系统对激励信号中各频率分量的幅度产生不同程度的衰减或放大 —— **幅度失真**

2. 系统对激励信号中各频率分量产生的相移不与频率成正比 —— **相位失真**

(二) 系统不失真的传输条件 (对 $H(j\omega)$ 提出要求)

不失真：响应与激励信号的波形相同，但大小和出现的时间可以不同。



第四章 连续时间系统的频域分析

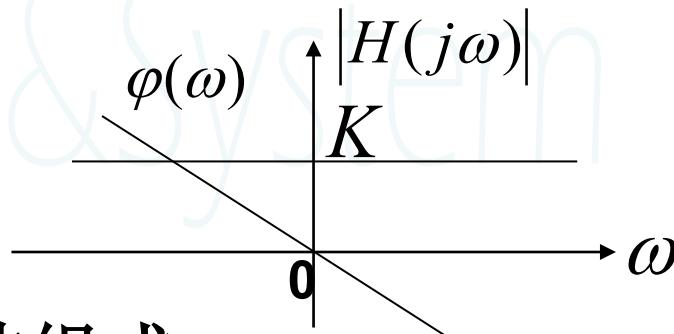
设 $e(t) \leftrightarrow E(j\omega)$ $r(t) \leftrightarrow R(j\omega)$

则 $R(j\omega) = KE(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

$$H(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{E(j\omega)} = K e^{-j\omega t_0} \stackrel{\text{令}}{=} |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

不失真条件:

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = K \\ \varphi(\omega) = -\omega t_0 \end{cases}$$



如 $e(t)$ 由基波与二次谐波组成

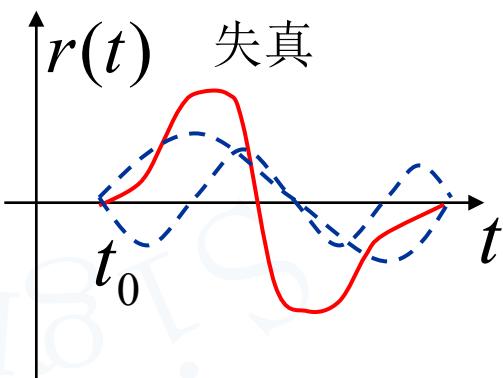
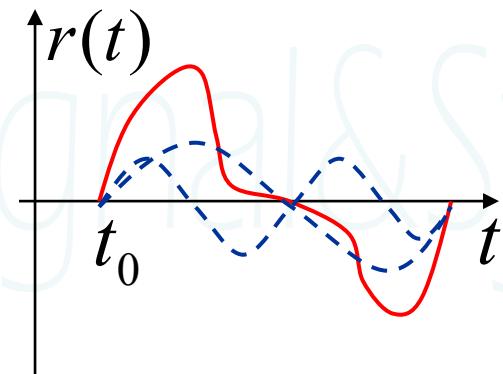
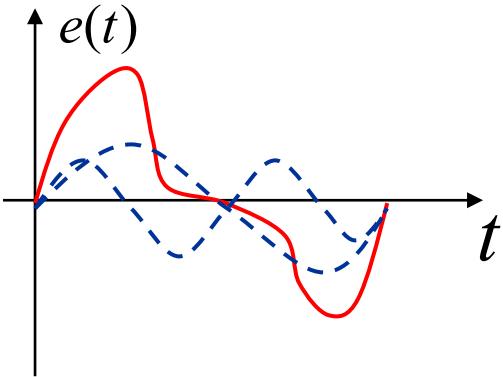
物理分析: 不失真

基波延时 $t_0 = T$, 相移 $\varphi_1 = 2\pi$

二次谐波也延时 t_0 , 相移 $\varphi_2 = 4\pi$

$$\omega = n\Omega \quad \varphi = -\omega t_0 = -n\Omega t_0 = -n\Omega T$$

第四章 连续时间系统的频域分析



第四章 连续时间系统的频域分析

$$e(t) = E_{m1} \sin \Omega t + E_{m2} \sin 2\Omega t$$

$$r(t) = KE_{m1} \sin(\Omega t - \varphi_1) + KE_{m2} \sin(2\Omega t - \varphi_2)$$

$$= KE_{m1} \sin \Omega \left(t - \frac{\varphi_1}{\Omega} \right) + KE_{m2} \sin 2\Omega \left(t - \frac{\varphi_2}{2\Omega} \right)$$

$$\therefore \frac{\varphi_1}{\Omega} = \frac{\varphi_2}{2\Omega} = t_0 \quad \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\Omega}{2\Omega} \quad \text{——可推广至高次谐波}$$

结论：为使信号传输时不产生相位失真，信号通过系统时谐波的相移必须与其频率成正比，即系统的相频特性曲线应是一条经过原点的直线。

系统传输信号不失真应具备两个条件：

- ① 系统的幅频特性在整个频率范围内为一常数，即**系统具有无限宽的响应均匀的通频带**；
- ② 系统的相频特性应是经过原点的直线。

本章小结

一、信号通过系统的响应

$$H(j\omega) = \frac{\text{零状态响应}}{\text{激励}}$$

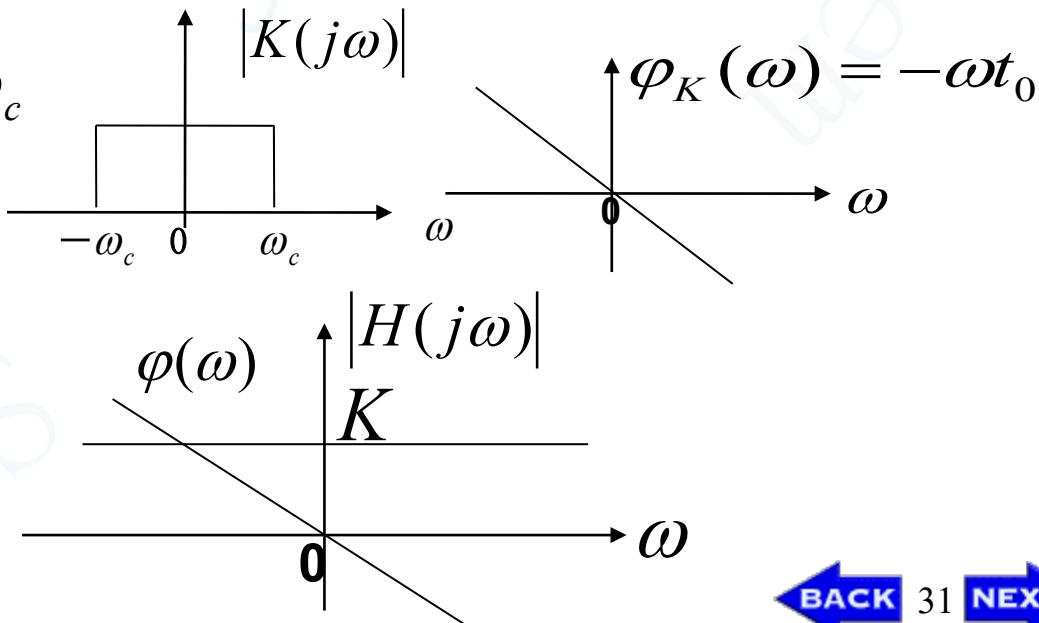
$$R(j\omega) = H(j\omega)E(j\omega)$$

$$r(t) = F^{-1}[R(j\omega)]$$

$$h(t) \leftrightarrow H(j\omega)$$

二、理想低通滤波器的特性及响应

$$K(j\omega) = \begin{cases} Ke^{-j\omega t_0}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



三、系统不失真传输条件

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = K \\ \varphi(\omega) = -\omega t_0 \end{cases}$$

第四章 连续时间系统的频域分析

作业：

4.3(第一问)

4.5

4.6

4.8

4.14

引言

1. 问题的提出

付氏变换法存在缺点：

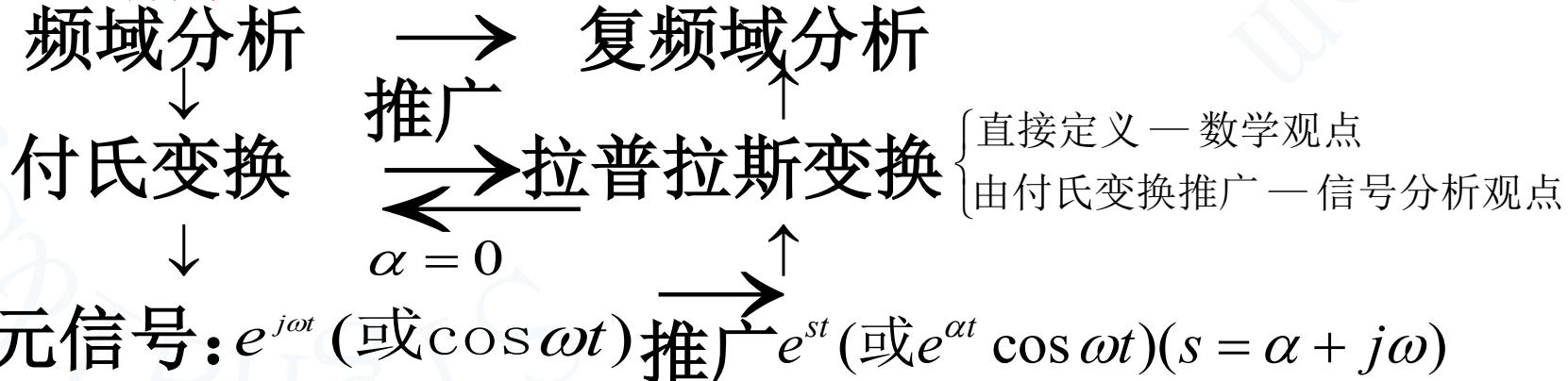
1) 局限性： $f(t)$ 要收敛，满足绝对可积条件，否则

(i) $f(t)$ 的付氏变换不存在，如 $e^{\alpha t} \varepsilon(t)$ ($\alpha > 0$)

(ii)存在，但不能用定义式求得，如 $\varepsilon(t)$, $\sin \omega t \varepsilon(t)$
可能出现冲激函数，带来分析和运算困难

2) 求反变换比较麻烦

2. 问题的解决



3. 拉氏变换分析法的基础

线性非时变系统：叠加性与齐次性

本章内容：

- 拉普拉斯变换及其收敛域
- 常用函数的拉普拉斯变换
- 拉普拉斯变换的基本性质
- 拉普拉斯反变换
- 线性系统的拉普拉斯变换分析法
- 线性系统的模拟
- 信号流图

一、拉普拉斯变换及其收敛域

(一) 双边拉普拉斯变换

付氏变换: $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \cdots (1) \text{ 正}$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \cdots (2) \text{ 反}$$

局限性: $f(t)$ 不收敛, 即 $t \rightarrow \pm\infty$ 时, $f(t)$ 不为零
 乘以衰减因子 $e^{-\sigma t}$: $f(t)e^{-\sigma t}$ 适当选取 σ 值,
 使 $f(t)e^{-\sigma t}$ 收敛, 从而可求得 $[f(t)e^{-\sigma t}]$ 的付氏变换

1. 求 $f(t)e^{-\sigma t} = f_1(t)$ 的付氏变换 $F_1(j\omega)$

$$F_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$$

令 $\sigma + j\omega = s$ (复数) $F_1(j\omega)$ 用 $F(s)$ 表示

$$F(s) = F_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \cdots (3)$$

$F(s)$ 称作 $f(t)$ 的双边拉氏变换

第五章 连续时间系统的复频域分析

2. 求 $F_1(j\omega)$ 的付氏反变换 $f(t)e^{-\sigma t}$, 再由 $F(s)$ 求 $f(t)$

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega) e^{(\sigma+j\omega)t} d\omega$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$\omega: -\infty \rightarrow \infty \Rightarrow s = \sigma - j\infty \rightarrow \sigma + j\infty$$

$$ds = jd\omega \quad d\omega = \frac{1}{j} ds$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds \cdots (4) \quad \text{—— } F(s) \text{ 的双边拉氏反变换}$$

记为: $f(t) \leftrightarrow F(s)$

讨论:

- 1) 付氏变换与拉氏变换的形式相似, 基本差别: $j\omega \rightarrow s$
付氏变换时域与变换域变量皆为实数 (t, ω)

第五章 连续时间系统的复频域分析

拉氏变换时域变量为实数，变换域变量为复数 ($s = \sigma + j\omega$)

2) 物理意义

傅氏：将 $f(t)$ 分解成许多形式为 $e^{j\omega t}$ 的指数项之和，每一对正、负 ω 组成一个余弦振荡，振幅为 $\frac{|F(j\omega)|d\omega}{\pi}$

拉氏：将 $f(t)$ 分解成许多形式为 e^{st} 的指数项之和，每一对正、负 ω 组成一个变幅的余弦振荡，振幅为 $\frac{|F(s)|d\omega}{\pi} e^{\sigma t}$

$s(\sigma + j\omega)$ —— 复频率

$F(s)$ —— 复频谱

复频率可以表示在复平面上，且复平面上的点 s 与指数函数 e^{st} 相对应

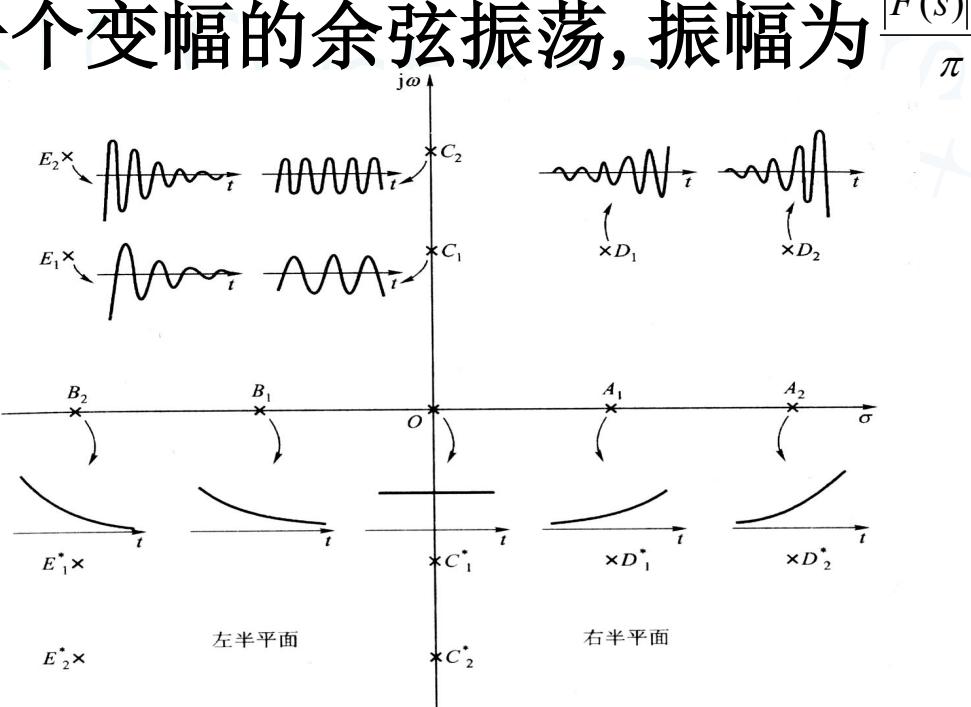


图 5-2 与复平面上位置不同的复频率相对应的时间函数模式图，带有 * 号的点如 C_1^* , D_1^* 等与其共轭点 C_1 , D_1 等分别合起来代表一时间模式

3) 傅立叶变换是双边拉普拉斯变换中 $s = j\omega$ 的一种特殊情况, 因此, 求两者反变换的积分路径不同。

(二) 单边拉氏变换

实际中, $f(t)$ 为有始信号(因果信号)—— $t < 0$ 时, $f(t) = 0$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \cdots (5) \quad \text{——单边拉氏变换}$$

此处0意为0- (即把 $t=0$ 处冲激函数的作用考虑在变换之中)

$$f(t) = \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds \right] \varepsilon(t) \cdots (6) \quad \text{——单边拉氏反变换}$$

标记: $\begin{cases} F(s) = L[f(t)] \\ f(t) = L^{-1}[F(s)] \end{cases}$

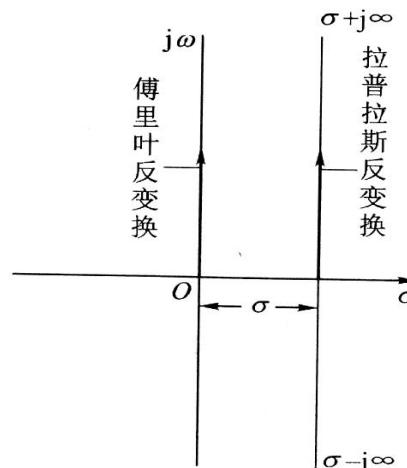


图 5-3 s 平面上反变换积分途径

(三) 拉氏变换的收敛域

若 $f(t)e^{-\sigma t}$ 是收敛的, $f(t)$ 才存在拉普拉斯变换, 即需适当选取 σ 值, $f(t)e^{-\sigma t}$ 才可能收敛, 而是否收敛, 决定于 $f(t)$ 的性质与 $e^{-\sigma t}$ 的相对关系。

收敛域: 使 $f(t)e^{-\sigma t}$ 收敛, 从而绝对可积条件得以满足的 σ 值的范围称为收敛域。

如 $f(t) = e^{\alpha t} \varepsilon(t)$ ($\alpha > 0$)

当 $\sigma > \alpha$ 时, $f(t)e^{-\sigma t} = e^{\alpha t} \varepsilon(t) \bullet e^{-\sigma t} = e^{(\alpha - \sigma)t} \varepsilon(t)$ 收敛

如 $f(t) = e^{\alpha t} \varepsilon(t)$ 的收敛域为: $\sigma > \alpha$

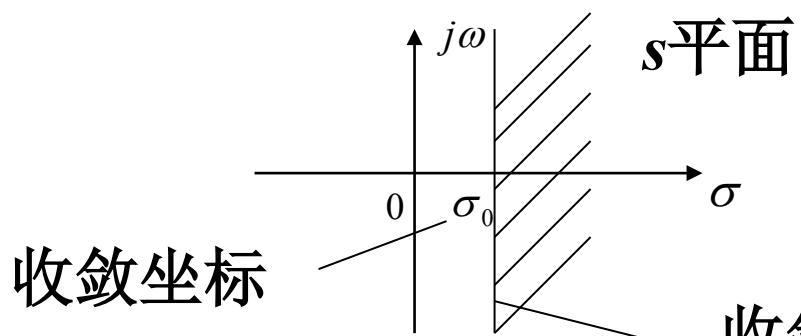
1. 单边拉氏变换的收敛域

使 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0 \cdots$ (I) 的区域

(即存在有一个常数 σ_0 , 使得 $f(t)e^{-\sigma t}$ 在 $\sigma > \sigma_0$ 范围内对于所有大于定值 T 的时间 t 均为有界, 且当 $t \rightarrow \infty$ 时其极限趋于零。)

第五章 连续时间系统的复频域分析

$\sigma > \sigma_0$ 表示在 s 平面上



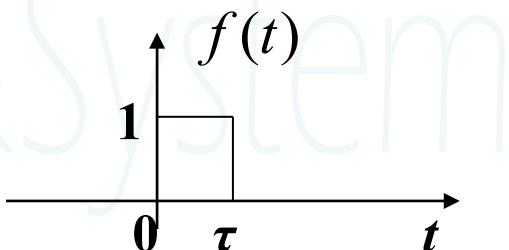
凡是满足式(I)的函数称为“指数阶函数”

即要单边拉氏变换存在，通常要求 $f(t)$ 是指数阶函数。

收敛边界（收敛轴）

例1 求单脉冲的收敛域

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \tau \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



解: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0$ 对所有的 σ 值成立 ($\because t \rightarrow \infty, f(t) = 0$)

$\therefore \sigma > -\infty$ 即在全平面收敛

例2 求指数函数 $e^{\alpha t}$ ($\alpha > 0$) 和阶跃函数的收敛域

解: (1) $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} e^{-\sigma t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\alpha - \sigma)t} = 0$

$$\sigma - \alpha > 0 \Rightarrow \sigma > \alpha$$

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) e^{-\sigma t} = 0$$

$$\sigma > 0$$

例3 求 $f(t) = e^{t^2}$ 的收敛域

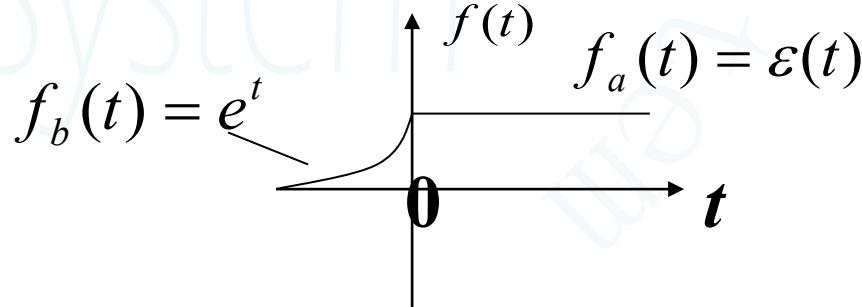
$$\text{解: } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{t^2} e^{-\sigma t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(t-\sigma)t} = 0$$

$t - \sigma < 0 \Rightarrow \sigma > t \rightarrow \infty$ 即在全平面发散, 因此没有收敛域

2. 双边拉氏变换的收敛域

$$f(t) = \begin{cases} f_a(t) = \varepsilon(t), t > 0 \\ f_b(t) = e^t, t < 0 \end{cases}$$

$$f(t) = f_a(t)\varepsilon(t) + f_b(t)\varepsilon(-t)$$



$$F_d(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 f_b(t) e^{-st} dt + \int_0^{\infty} f_a(t) e^{-st} dt$$

$$\int_{-\infty}^0 f_b(t) e^{-st} dt \stackrel{\text{令} t = -\tau}{=} \int_0^{\infty} f_b(-\tau) e^{s\tau} d\tau = \int_0^{\infty} f_b(-t) e^{st} dt$$

第五章 连续时间系统的复频域分析

$$\text{令 } s = -p \\ = \int_0^{\infty} f_b(-t) e^{-pt} dt \quad \text{——单边拉氏变换}$$

$$F_d(s) = \int_0^{\infty} f_b(-t) e^{st} dt + \int_0^{\infty} f_a(t) e^{-st} dt = F_b(s) + F_a(s)$$

分别求出 $F_b(s)$ 和 $F_a(s)$ 的收敛域，两者的公共部分必为 $F(s)$ 的收敛域，若两者无公共部分，则 $f(t)$ 的双边拉氏变换不存在！

求取方法：取积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} dt = \int_0^{\infty} f_b(-t) e^{\sigma t} dt + \int_0^{\infty} f_a(t) e^{-\sigma t} dt$

分别求出两个积分的收敛域，再找公共收敛域

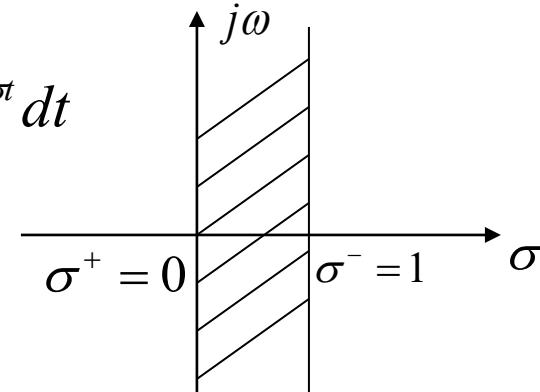
例 求 $f(t) = \begin{cases} f_a(t) = 1, t \geq 0 \\ f_b(t) = e^t, t < 0 \end{cases}$ 的双边拉氏变换的收敛域

$$\begin{aligned} \text{解: } \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} dt &= \int_0^{\infty} f_b(-t) e^{\sigma t} dt + \int_0^{\infty} f_a(t) e^{-\sigma t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(1-\sigma)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} dt \end{aligned}$$

第一积分收敛域: $1 - \sigma > 0 \Rightarrow \sigma < 1 = \sigma^-$

第二积分收敛域: $\sigma > 0 = \sigma^+$

$\therefore f(t) e^{-\sigma t}$ 的收敛域为: $0 < \sigma < 1$



第五章 连续时间系统的复频域分析

讨论：

- ① 与付氏变换相比，拉氏变换对 $f(t)$ 的限制要宽松些， $F(j\omega)$ 仅是 $F(s)$ 收敛域中虚轴 ($s = j\omega$) 上的函数， $F(s)$ 存在于收敛域的半个平面内。
- ② 给出 $F(s)$ 时应注明收敛域。

二、常用(简单)函数的拉氏变换

由 $f(t)$ 求 $F(s)$: $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

而 $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$

$$F(s) = F(j\omega) \Big|_{j\omega=s}$$

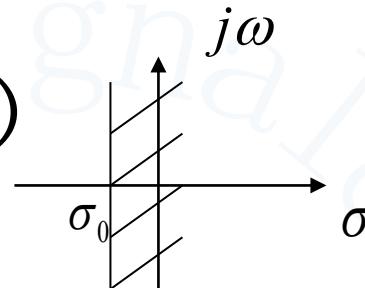
或 $F(j\omega) = F(s) \Big|_{s=j\omega}$

能进行以上对换的函数必须满足条件：
 $F(s)$ 的收敛域包括 $j\omega$ 轴在内。

三种情况：

① $\sigma_0 < 0$ (收敛边界在 s 平面的左半边)

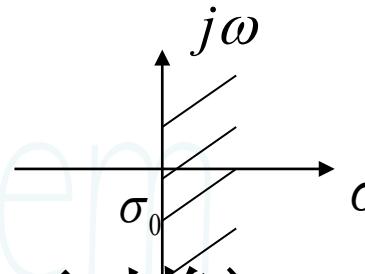
$f(t)$ 是衰减函数，可以对换



② $\sigma_0 = 0$ (收敛边界落在 $j\omega$ 轴上)

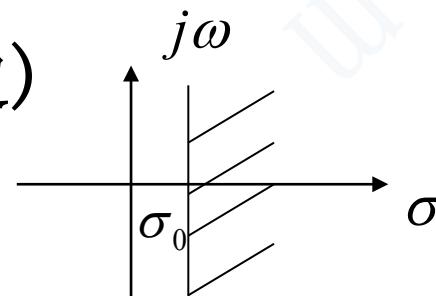
$f(t)$ 是阶跃函数(即有界的)

不可以简单对换(不出现冲激的部分可对换)



③ $\sigma_0 > 0$ (收敛边界在 s 平面的右半边)

$f(t)$ 是增长函数，不可以对换



工程中常见的函数：

t 的指数函数和 t 的正幂函数

(一) 指数函数 $e^{\alpha t} \varepsilon(t)$ (α 为常数)

$$F(s) = \int_0^\infty e^{\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{1}{s-\alpha}$$

α 为实数且 $\alpha > 0$

$$e^{\alpha t} \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-\alpha}, \sigma > \alpha$$

$$e^{-\alpha t} \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+\alpha}, \sigma > -\alpha = \sigma_0$$

$$e^{-\alpha t} \varepsilon(t) \xrightarrow{\text{付氏}} \frac{1}{j\omega + \alpha}, \text{ 可以对换}$$

1. 阶跃函数 $\varepsilon(t)$

$$\alpha = 0: \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}, \sigma > 0$$

$$\varepsilon(t) \xrightarrow{\text{付氏}} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

第五章 连续时间系统的复频域分析

2. 单边虚指数函数 $e^{j\omega_0 t} \varepsilon(t)$

$$\alpha = j\omega_0 : e^{j\omega_0 t} \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s - j\omega_0}, \quad \text{Re}[s] = \sigma > 0 \text{(不包含} j\omega \text{轴)}$$

$$e^{j\omega_0 t} \varepsilon(t) \stackrel{\text{付氏}}{\leftrightarrow} \pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{j\omega - j\omega_0} \text{(不能对换)}$$

3. 单边正、余弦函数 $\sin(\omega_0 t) \varepsilon(t)$ 、 $\cos(\omega_0 t) \varepsilon(t)$

$$\begin{aligned} F(s) = L\{\sin(\omega_0 t) \varepsilon(t)\} &= \frac{1}{2j} L\{e^{j\omega_0 t} \varepsilon(t) - e^{-j\omega_0 t} \varepsilon(t)\} \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0} \right) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

即 $\sin(\omega_0 t) \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \sigma > 0$

同理: $\cos(\omega_0 t) \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \sigma > 0$

$$\left. \begin{aligned} \sin(\omega_0 t) \varepsilon(t) &\leftrightarrow \frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ \cos(\omega_0 t) \varepsilon(t) &\leftrightarrow \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned} \right\} \text{(不能对换)}$$

(二) t 的正幂函数 t^n (n为正整数)

$$F(s) = L\{t^n \varepsilon(t)\} = \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$t^n \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}, \sigma > 0$$

n=1时: $t \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2}, \sigma > 0$ (不能对换)

(三) 冲激函数 $\delta(t)$

付氏

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (\text{收敛域为全s平面即包括虚轴, 故可对换})$$

拉氏

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

讨论: ① $F(j\omega)$ 不存在, 而可求得 $F(s)$

② $F(j\omega)$ 出现冲激, 而 $F(s)$ 不出现, 形式比较简单

例 求双边函数 $f(t) = e^{\alpha|t|}$ ($\alpha < 0$) 的拉氏变换 $F_d(s)$

解: $f(t) = e^{\alpha|t|} = \begin{cases} f_a(t) = e^{\alpha t}, & t \geq 0 \\ f_b(t) = e^{-\alpha t}, & t < 0 \end{cases}$

第五章 连续时间系统的复频域分析

$$F_d(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 f_b(t)e^{-st} dt + \int_0^{\infty} f_a(t)e^{-st} dt = F_b(s) + F_a(s)$$

$$F_a(s) = L\{f_a(t)\} = L\{e^{\alpha t} \varepsilon(t)\} = \frac{1}{s - \alpha} \quad \text{收敛域为 } \sigma_a > \alpha$$

$$\text{因为 } \int_{-\infty}^0 f_b(t)e^{-st} dt \stackrel{t=-\tau}{=} \int_{\infty}^0 f_b(-\tau)e^{s\tau} d(-\tau) = \int_0^{\infty} f_b(-\tau)e^{s\tau} d\tau \stackrel{s=-p}{=} \int_0^{\infty} f_b(-t)e^{-pt} dt$$

所以求 $F_b(s)$ 分三步：

1) 求 $f_b(-t) = e^{\alpha t} \varepsilon(t)$

2) 求 $f_b(-t) = e^{\alpha t} \varepsilon(t)$ 的单边拉氏变换 $F_b(p) = \frac{1}{p - \alpha}$

3) 求 $F_b(s) = F_b(p) \Big|_{p=-s} = -\frac{1}{s + \alpha}$ 收敛域为 $\sigma_b < -\alpha$

由于 $F_a(s)$ 和 $F_b(s)$ 有公共收敛域 $\alpha < \sigma < -\alpha$

故 $F_d(s) = \frac{1}{s - \alpha} - \frac{1}{s + \alpha} = \frac{2\alpha}{s^2 - \alpha^2}$

若 $\alpha > 0$

则 $F_a(s)$ 和 $F_b(s)$ 没有公共收敛域

从而 $F_d(s)$ 不存在

三、拉氏变换的基本性质

(一) 线性

设 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(s), f_2(t) \leftrightarrow F_2(s)$

则 $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$

(二) 延时特性

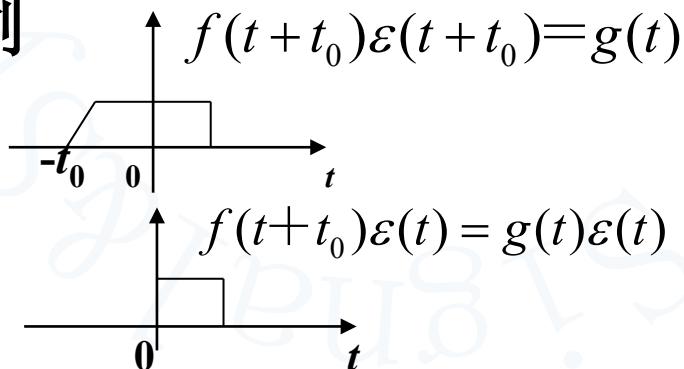
设 $f(t)\varepsilon(t) \leftrightarrow F(s)$

则 $f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0) \leftrightarrow F(s)e^{-st_0}$

$(f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)$ 是 $f(t)\varepsilon(t)$ 延时得到的)

* 时移: $f(t+t_0)\varepsilon(t+t_0) \leftrightarrow F(s)e^{st_0}$ (只对双边拉氏变换成立)

例



$$\begin{aligned}
 L\{g(t)\} &= \int_0^{\infty} f(t+t_0)\varepsilon(t+t_0)e^{-st} dt \\
 &= \int_0^{\infty} f(t+t_0)\varepsilon(t)e^{-st} dt \quad (\text{单边}) \\
 &\neq F(s)e^{st_0}
 \end{aligned}$$

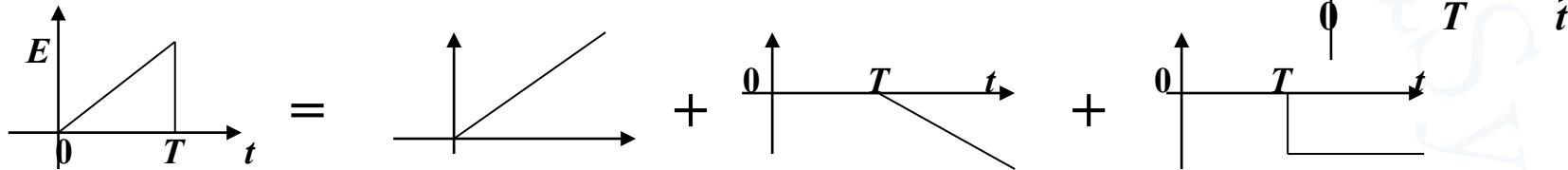
$$f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0) \neq f(t-t_0)\varepsilon(t)$$

第五章 连续时间系统的复频域分析

例1 求锯齿波 $f(t)$ 的 $F(s)$

解: [方法一] 将锯齿波分解为三个函数之和

$$f(t) = f_a(t) + f_b(t) + f_c(t)$$



$$f(t) = \frac{E}{T}t\epsilon(t) - \frac{E}{T}(t-T)\epsilon(t-T) - E\epsilon(t-T)$$

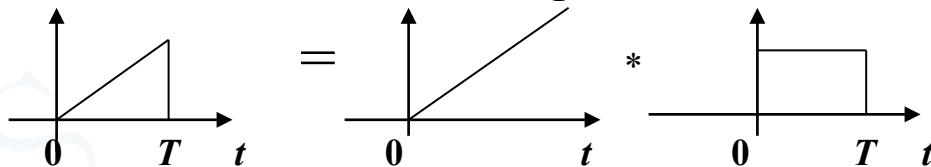
$$\therefore F(s) = \frac{E}{T} \bullet \frac{1}{s^2} - \frac{E}{T} \bullet \frac{1}{s^2} e^{-sT} - E \bullet \frac{1}{s} e^{-sT} = \frac{E}{Ts^2} [1 - (1 + sT)e^{-sT}]$$

[方法二] $f(t) = f_1(t) \bullet G_T(t)$

$$f(t) = \frac{E}{T}t[\epsilon(t) - \epsilon(t-T)]$$

$$= \frac{E}{T}t\epsilon(t) - \frac{E}{T}t\epsilon(t-T)$$

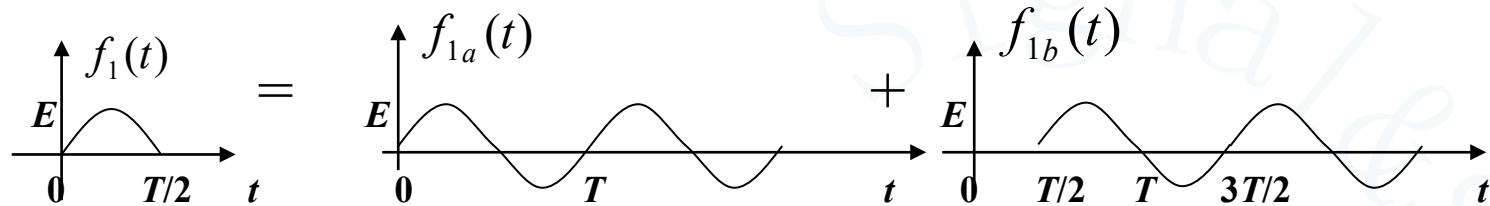
$$= \frac{E}{T}t\epsilon(t) - \frac{E}{T}(t-T)\epsilon(t-T) - \frac{E}{T}T\epsilon(t-T)$$



第五章 连续时间系统的复频域分析

例2 求单个半周正弦波 $f_1(t)$ 的拉氏变换 $F_1(s)$

解：



$$f_1(t) = f_{1a}(t) + f_{1b}(t) = E \sin \omega t \varepsilon(t) + E \sin \omega(t - \frac{T}{2}) \varepsilon(t - \frac{T}{2})$$

$$f_{1a}(t) \leftrightarrow \frac{E\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad f_{1b}(t) \leftrightarrow \frac{E\omega}{s^2 + \omega^2} e^{-\frac{sT}{2}}$$

$$\therefore F_1(s) = \frac{E\omega}{s^2 + \omega^2} (1 + e^{-\frac{sT}{2}})$$

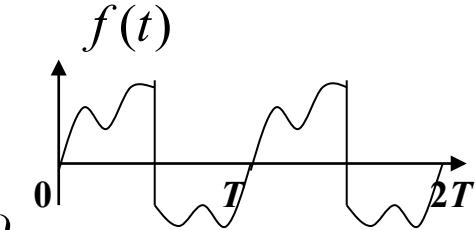
例3 求 $t=0$ 时接入周期函数 $f(t)$ 的拉氏变换 $F(s)$

解： $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \dots$

$$= f_1(t) + f_1(t-T) \varepsilon(t-T) + f_1(t-2T) \varepsilon(t-2T) + \dots$$

$$F(s) = L\{f_1(t) + f_1(t-T) \varepsilon(t-T) + f_1(t-2T) \varepsilon(t-2T) + \dots\}$$

$$= F_1(s)[1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \dots]$$



第五章 连续时间系统的复频域分析

$$= F_1(s)[1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \dots] = F_1(s) \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

定理：设 $f_1(t)\varepsilon(t) \leftrightarrow F_1(s)$, $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(t - nT)$

则 $F(s) = F_1(s) \frac{1}{1 - e^{-sT}}$

(三) 复频率平移

设 $f(t) \leftrightarrow F(s)$

则 $f(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow F(s - s_0)$

例4 $te^{-\alpha t}\varepsilon(t) = [t\varepsilon(t)]e^{-\alpha t}$

$$f(t) = t\varepsilon(t) \leftrightarrow F(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$L\{[t\varepsilon(t)]e^{-\alpha t}\} = F(s + \alpha) = \frac{1}{(s + \alpha)^2}$$

例5 $e^{-\alpha t}[\sin\omega_0 t\varepsilon(t)]$

$$f(t) = \sin\omega_0 t\varepsilon(t) \leftrightarrow F(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$L\{\sin\omega_0 t\varepsilon(t)\}e^{-\alpha t} = F(s + \alpha) = \frac{\omega_0}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$$

(四) 尺度变换

设 $f(t)\varepsilon(t) \leftrightarrow F(s)$

则 $f(at)\varepsilon(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

例6 $f(at-b)\varepsilon(at-b), a > 0, b > 0$

[方法一] 先延时后尺度变换

设 $f(t)\varepsilon(t) \leftrightarrow F(s)$

延时 $f(t-b)\varepsilon(t-b) \leftrightarrow F(s)e^{-sb} = F_1(s)$

再尺度变换 $f(at-b)\varepsilon(at-b) \leftrightarrow \frac{1}{a}F_1\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)e^{-\frac{b}{a}s}$

[方法二] 先尺度变换后延时

尺度变换 $f(at)\varepsilon(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) = F_a(s)$

再延时 $f(at-b)\varepsilon(at-b)$

$$= f\left[a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right]\varepsilon\left[a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right] \leftrightarrow F_a(s)e^{-\frac{b}{a}s} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)e^{-\frac{b}{a}s}$$

(五) 时域微分

设 $f(t)\varepsilon(t) \leftrightarrow F(s)$

则 $\frac{d[f(t)\varepsilon(t)]}{dt} \leftrightarrow sF(s) - f(0^-)$

$\frac{d^n[f(t)\varepsilon(t)]}{dt^n} \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}f'(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-)$

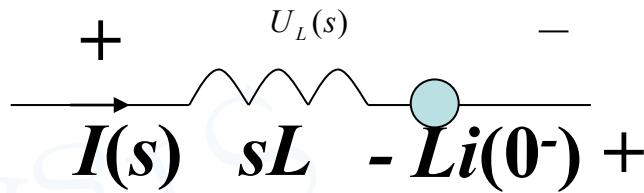
例7 纯L电路

已知 $i(t) \leftrightarrow I(s)$, 求 $U_L(s)$

解: $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$

$$U_L(s) = L \left\{ L \frac{di(t)}{dt} \right\} = L[sI(s) - i(0^-)] = LsI(s) - Li(0^-)$$

运算电压



当 $i(0^-) = 0$ 时

$$U_L(s) = sLI(s)$$

$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I} \quad \text{——正弦稳态} (s \rightarrow j\omega)$$

(六) 时域积分

设 $f(t) \leftrightarrow F(s)$

则 $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^0 f(\tau) d\tau}{s}$

例8 纯电容电路, 已知 $i(t) \leftrightarrow I(s)$, 求 $U_C(s)$

解: $u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$

$$U_C(s) = \frac{1}{C} L \left\{ \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{C} \left[\frac{I(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^0 i(\tau) d\tau}{s} \right] = \frac{I(s)}{sC} + \frac{u_C(0^-)}{s}$$

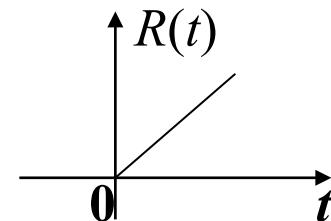
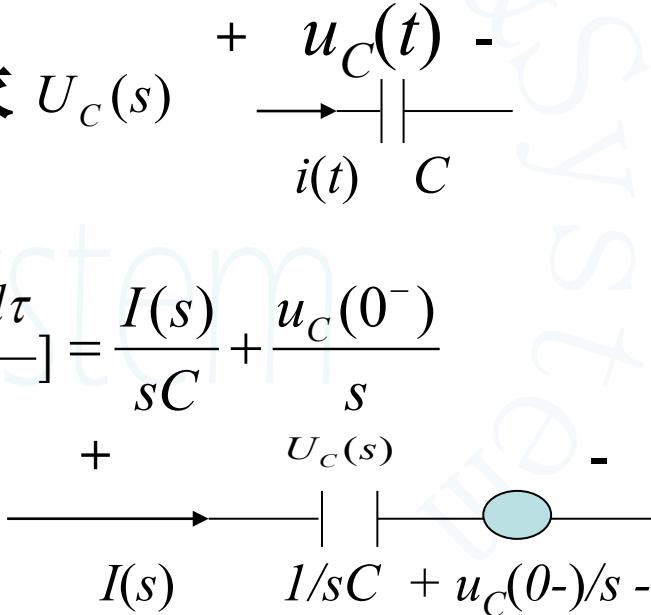
若 $u_C(0^-) = 0$

则 $U_C(s) = \frac{1}{sC} I(s)$

$$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C} I \quad \text{——正弦稳态} \quad (s \rightarrow j\omega)$$

例9 求 $R(t) = t\varepsilon(t)$ 的拉氏变换 $R(s)$

解: $R'(t) = \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} = F(s)$



第五章 连续时间系统的复频域分析

$$R(s) = L\{R(t)\} = L\left\{\int_0^t R'(\tau) d\tau\right\} = L\left\{\int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} F(s) = \frac{1}{s^2}$$

(七) 复频域微分

设 $f(t) \leftrightarrow F(s)$

则 $tf(t) \leftrightarrow -\frac{dF(s)}{ds}$

例10 求 $tsin\omega_0 t \varepsilon(t)$ 的拉氏变换

解: $f(t) = sin\omega_0 t \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} = F(s)$

$$tsin\omega_0 t \varepsilon(t) = tf(t) \leftrightarrow -\frac{dF(s)}{ds} = \frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$$

例11 求 $(t - \tau)sin\omega_0(t - \tau) \varepsilon(t - \tau) \leftrightarrow F(s)$

解: [方法一]

$$f_1(t) = sin\omega_0 t \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} = F_1(s)$$

先进行复频域微分

$$tsin\omega_0 t \varepsilon(t) = tf_1(t) \leftrightarrow -\frac{dF_1(s)}{ds} = \frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$$

第五章 连续时间系统的复频域分析

再延时 $(t-\tau) \sin \omega_0(t-\tau) \varepsilon(t-\tau) = (t-\tau) f_1(t-\tau) \leftrightarrow F(s) = \frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2} e^{-s\tau}$

[方法二]

先延时 $f_1(t-\tau) = \sin \omega_0(t-\tau) \varepsilon(t-\tau) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} e^{-s\tau}$

再进行复频域微分

$$(t-\tau) \sin \omega_0(t-\tau) \varepsilon(t-\tau) = t \sin \omega_0(t-\tau) \varepsilon(t-\tau) - \tau \sin \omega_0(t-\tau) \varepsilon(t-\tau)$$

$$\begin{aligned} F(s) &= -\frac{d}{ds} \left[\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} e^{-s\tau} \right] - \frac{\tau \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} e^{-s\tau} \\ &= \frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2} e^{-s\tau} + \frac{\tau \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} e^{-s\tau} - \frac{\tau \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} e^{-s\tau} = \frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2} e^{-s\tau} \end{aligned}$$

(八) 复频域积分

设 $f(t) \leftrightarrow F(s)$ 则 $\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^\infty F(x) dx$

* 例：试求 $\int_0^t \frac{\sin x}{x} dx$ 的拉氏变换。

$$\text{解: } \sin t \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2 + 1}$$

基本公式

$$\frac{\sin t}{t} \leftrightarrow \int_s^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctgx \Big|_s^{\infty}$$

复频域积分性质

$$= \frac{\pi}{2} - \arctg s = \arctg \frac{1}{s}$$

$$\therefore \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx \leftrightarrow \frac{1}{s} \arctg \frac{1}{s}$$

时域积分性质

(九) 参变量积分

设 $f(t, a) \leftrightarrow F(s, a)$

则 $\int_{a_1}^{a_2} f(t, a) da \leftrightarrow \int_{a_1}^{a_2} F(s, a) da$

(十) 参变量微分

设 $f(t, a) \leftrightarrow F(s, a)$ 则 $\frac{\partial f(t, a)}{\partial a} \leftrightarrow \frac{\partial F(s, a)}{\partial a}$

(十一) 时域卷积

设 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(s), f_2(t) \leftrightarrow F_2(s)$ 则 $f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(s)F_2(s)$

(十二) 复频域卷积

设 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(s), f_2(t) \leftrightarrow F_2(s)$ 则 $f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j}[F_1(s) * F_2(s)]$

(十三) 初值定理

设 $f(t)$ 及 $f'(t)$ 存在, 并有 $F(s)$

则 $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$

应用条件: **$F(s)$ 必须为真分式,**

若不是真分式, 则必须将 $F(s)$ 化为一个整式和一个真分式 $F_0(s)$ 之和, 此时

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f_0(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF_0(s)$$

例 计算 $\varepsilon(t)$ 的初值

解: 求 $F(s)$: $F(s) = L\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s}$

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} 1 = 1$$

直接求: $\varepsilon(0^+) = 1$

(十四) 终值定理

设 $f(t)$ 及 $f'(t)$ 存在, 并有 $F(s)$ 且 $F(s)$ 的所有极点都位于 s 左半平面

则 $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

应用条件: 1) $F(s)$ 的所有极点都位于 s 左半平面

2) $F(s)$ 在 $s=0$ 处若有极点也只能是一阶极点

例12 求 $e^{-\alpha t} \varepsilon(t)$ 的终值 ($\alpha > 0$)

解: $F(s) = \frac{1}{s + \alpha}$

极点 $s = -\alpha < 0$ —— 满足条件

$$sF(s) = \frac{s}{s + \alpha}$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s + \alpha} = 0$$

例13 求 $f(t) = (1 - e^{-t})\varepsilon(t)$ 的终值

解: $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s(s+1)}$

极点 $s_1 = 0, s_2 = -1 < 0$ —— 满足条件

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+1} = 1$$

例14 求 $f(t) = e^t \varepsilon(t)$ 的值

解: $F(s) = \frac{1}{s-1}$

极点 $s = 1 > 0$ —— 不满足条件

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s-1} = 0 \neq f(\infty)$$

$f(t)$ 为随 t 增长的函数, 不存在终值,
故不能用终值定理

四、拉普拉斯反变换

由 $F(s)$ 求 $f(t)$, $F(s)$ 常为 s 的有理函数

一般形式:

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (a_k, b_k \text{ 为实数, } m, n \text{ 为整数})$$

如 $m \geq n$ $F(s) = R(s) + \frac{N(s)}{D(s)}$

$R(s)$ 的拉氏变换为冲激函数及其各阶导数 —— 理想情况

一般情况下: $m < n$

求拉氏反变换有三种方法:

查表、部分分式展开法和围线积分法(留数法)

(一) 部分分式展开法

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (m < n)$$

第五章 连续时间系统的复频域分析

要点: 将 $F(s)$ 分解, 逐个求反变换, 再叠加

基本形式: $\frac{1}{s - s_k} \leftrightarrow e^{s_k t}, t \geq 0$

1. $D(s) = 0$ 的根无重根 [$F(s)$ 的极点为单阶]

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)} \cdots (1)$$

$F(s)$ 极零点

极点: 使 $F(s) = \infty$ 的 s 根值, 如 $s_k (k = 1, \dots, n)$ 为 $F(s)$ 的极点

零点: 使 $F(s) = 0$ 的 s 根值, 如 $N(s) = (s - z_1) \cdots (s - z_m)$,

$z_k (k = 1, \dots, m)$ 为 $F(s)$ 的零点

$$F(s) = \frac{k_1}{s - s_1} + \frac{k_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{k_k}{s - s_k} + \cdots + \frac{k_n}{s - s_n} \cdots (2)$$

$$f(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + \cdots + k_k e^{s_k t} + \cdots + k_n e^{s_n t}$$

求 $f(t) \rightarrow$ 求 s_k 、 k_k

求系数 k_k 的两种方法

[方法一] (2) 式两边乘以 $(s - s_k)$:

$$(s - s_k)F(s) = \frac{(s - s_k)k_1}{s - s_1} + \frac{(s - s_k)k_2}{s - s_2} + \cdots + k_k + \cdots + \frac{(s - s_k)k_n}{s - s_n}$$

令 $s = s_k$

则 $k_k = [(s - s_k)F(s)]_{s=s_k}$

[方法二] 用微分求

$$k_k = \lim_{s \rightarrow s_k} \left[\frac{(s - s_k)N(s)}{D(s)} \right] \quad \left(\frac{0}{0} \text{ 形式} \right)$$

$$= \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{\frac{d}{ds}[(s - s_k)N(s)]}{\frac{d}{ds}D(s)} \quad \text{——罗彼塔法则}$$

$$= \left[\frac{N(s)}{D'(s)} \right]_{s=s_k} \quad \left(\because [(s - s_k)N(s)]' = (s - s_k)N'(s) + N(s) \right)$$

第五章 连续时间系统的复频域分析

例1 求 $F(s) = \frac{s+4}{s(s+1)(s+2)}$ 的反变换 $f(t)$ [$F(s)$ 为真分式, 极点为实数]

解: $F(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+2}$

1) 求 s_k : $s_1 = 0, s_2 = -1, s_3 = -2$

2) 求 k_k :

[方法一]

$$k_1 = \left[\frac{s+4}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=0} = 2, \quad k_2 = \left[\frac{s+4}{s(s+2)} \right]_{s=-1} = -3, \quad k_3 = \left[\frac{s+4}{s(s+1)} \right]_{s=-2} = 1$$

[方法二] 用微分求

$$D(s) = s(s+1)(s+2) = s^3 + 3s^2 + 2s, \quad D'(s) = 3s^2 + 6s + 2$$

$$\frac{N(s)}{D'(s)} = \frac{s+4}{3s^2 + 6s + 2}$$

$$k_1 = \left[\frac{s+4}{3s^2 + 6s + 2} \right]_{s=0} = 2, \quad k_2 = \left[\frac{s+4}{3s^2 + 6s + 2} \right]_{s=-1} = -3, \quad k_3 = \left[\frac{s+4}{3s^2 + 6s + 2} \right]_{s=-2} = 1$$

第五章 连续时间系统的复频域分析

3) 求 $f(t)$: $F(s) = \frac{2}{s} + \frac{-3}{s+1} + \frac{1}{s+2}$

$$f(t) = (2 - 3e^{-t} + e^{-2t})\varepsilon(t)$$

例2 $F(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)}$ [$F(s)$ 为假分式, 极点为实数]

解: $F(s) = s + 2 + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$ 令 $= s + 2 + F_1(s)$

求 $F_1(s)$ 的反变换: $F_1(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s+2}$

求 $F(s)$ 的反变换: $f_1(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})\varepsilon(t)$

$$f(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) + f_1(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) + (2e^{-t} - e^{-2t})\varepsilon(t)$$

例3 求 $F(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 5}$ 的反变换 [$F(s)$ 为真分式, 极点为共轭复数]

解: [方法一] $F(s) = \frac{k_1}{s - s_1} + \frac{k_2}{s - s_2}$

1) 求 s_k : $D(s) = s^2 + 2s + 5 = 0$ 得 $s_1 = -1 + j2, s_2 = -1 - j2 \equiv s_1^*$

第五章 连续时间系统的复频域分析

2) 求 k_k : $k_1 = [(s - s_1)F(s)]_{s=s_1} = \frac{1}{4}(2 + j)$

$$k_2 = [(s - s_2)F(s)]_{s=s_2} = \frac{1}{4}(2 - j) = k_1 *$$

3) 求 $f(t)$: $f(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} = \frac{1}{4}(2 + j)e^{(-1+j2)t} + \frac{1}{4}(2 - j)e^{(-1-j2)t}$

$$= \frac{1}{2}e^{-t}[(e^{j2t} + e^{-j2t}) + \frac{j}{2}(e^{j2t} - e^{-j2t})]$$

$$= \frac{1}{2}e^{-t}(2\cos 2t - \sin 2t) = e^{-t}\cos 2t - \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t, \quad t \geq 0$$

$$f(t) = f(s_1, s_2, k_1, k_2)$$

$$f(t) = (c_1 + jc_2)e^{(\alpha+j\beta)t} + (c_1 - jc_2)e^{(\alpha-j\beta)t} = 2e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t - c_2 \sin \beta t)$$

$$\alpha, \beta, c_1, c_2 \rightarrow \text{求 } f(t)$$

[方法二] $D(s)$ 为二次多项式

$$D(s) = s^2 + 2s + 5 = (s + 1)^2 + 4 = [(s - \alpha)^2 + \beta^2]$$

$$F(s) = \frac{s}{(s + 1)^2 + 4} = \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2} - \frac{1}{2} \left[\frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2} \right]$$

$$\therefore f(t) = e^{-t}\cos 2t - \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t, \quad t \geq 0$$

$$\frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \omega_0^2} \leftrightarrow e^{\alpha t} \cos \omega_0 t$$

$$\frac{\omega_0}{(s - \alpha)^2 + \omega_0^2} \leftrightarrow e^{\alpha t} \sin \omega_0 t$$

第五章 连续时间系统的复频域分析

2. 当 $D(s) = 0$ 有重根的情况 [$F(s)$ 有多重极点]

设 $D(s) = 0$ 共有 n 个根，其中一个根 s_1 为 p 重根，其余为单根（异根），

即
$$D(s) = (s - s_1)^p (s - s_{p+1})(s - s_{p+2}) \cdots (s - s_n)$$

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \left[\frac{k_{1p}}{(s - s_1)^p} + \frac{k_{1(p-1)}}{(s - s_1)^{p-1}} + \cdots + \frac{k_{12}}{(s - s_1)^2} + \frac{k_{11}}{s - s_1} \right] + \left[\frac{k_{p+1}}{s - s_{p+1}} + \cdots + \frac{k_n}{s - s_n} \right] \cdots (1)$$

令异根项 $\left[\frac{k_{p+1}}{s - s_{p+1}} + \cdots + \frac{k_n}{s - s_n} \right] = \frac{N_0(s)}{D_0(s)}$ 其系数的求法如上所述

重根项 k_{1p}, \dots, k_{11} 的求取

(1) 求 k_{1p} :

$$F(s) = \left[\frac{k_{1p}}{(s - s_1)^p} + \frac{k_{1(p-1)}}{(s - s_1)^{p-1}} + \cdots + \frac{k_{12}}{(s - s_1)^2} + \frac{k_{11}}{s - s_1} \right] + \frac{N_0(s)}{D_0(s)} \cdots (2)$$

式(2)乘以 $(s - s_1)^p$ ，

$$(s - s_1)^p F(s) = k_{1p} + (s - s_1)k_{1(p-1)} + \cdots + (s - s_1)^{p-2}k_{12} + (s - s_1)^{p-1}k_{11} + (s - s_1)^p \frac{N_0(s)}{D_0(s)}$$

再令 $s = s_1$ 得 $k_{1p} = [(s - s_1)^p F(s)]_{s=s_1} \cdots (3)$

第五章 连续时间系统的复频域分析

(2) 求 $k_{1(p-1)}, \dots, k_{11}$ (系数)

引入 $F_1(s) = (s - s_1)^p F(s)$

$$= k_{1p} + k_{1(p-1)}(s - s_1) + k_{1(p-2)}(s - s_1)^2 + \dots + k_{11}(s - s_1)^{p-1} + \frac{N_0(s)}{D_0(s)}(s - s_1)^p \dots (4)$$

将式(4)对s取导一次:

$$\frac{dF_1(s)}{ds} = k_{1(p-1)} + 2k_{1(p-2)}(s - s_1) + \dots + (p-1)k_{11}(s - s_1)^{p-2} + \frac{d}{ds} \left[\frac{N_0(s)}{D_0(s)}(s - s_1)^p \right] \dots (5)$$

$$k_{1(p-1)} = \left[\frac{dF_1(s)}{ds} \right]_{s=s_1}$$

将式(5)对s取导一次, 再令 $s = s_1$ 得 $k_{1(p-2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{d^2 F_1(s)}{ds^2} \right]_{s=s_1}$

一般情况: $k_{1k} = \frac{1}{(p-k)!} \left[\frac{d^{p-k} F_1(s)}{ds^{p-k}} \right]_{s=s_1}, k = p, p-1, \dots, 1$

总结: $F(s) = \left[\frac{k_{11}}{s - s_1} + \frac{k_{12}}{(s - s_1)^2} + \dots + \frac{k_{1(p-1)}}{(s - s_1)^{p-1}} + \frac{k_{1p}}{(s - s_1)^p} \right] + \frac{N_0(s)}{D_0(s)}$

$$f(t) = k_{11}e^{s_1 t} + k_{12}te^{s_1 t} + \frac{k_{13}}{2!}t^2e^{s_1 t} + \dots + \frac{k_{1p}}{(p-1)!}t^{p-1}e^{s_1 t} + \sum_{q=p+1}^n k_q e^{s_q t}$$

第五章 连续时间系统的复频域分析

例 求 $F(s) = \frac{s^2 + 2s + 5}{(s + 3)(s + 5)^2}$ 的反变换

解: $D(s) = (s + 3)(s + 5)^2 = 0 \quad \begin{cases} 1 \text{个单根} s_1 = -3 \\ 2 \text{重根} s_2 = -5 \end{cases}$

$$F(s) = \frac{k_1}{s + 3} + \frac{k_{21}}{s + 5} + \frac{k_{22}}{(s + 5)^2} \dots (1)$$

1) 求系数: k_1, k_{21}, k_{22}

单根项 $k_1 = [(s + 3)F(s)]_{s=-3} = 2$

重根项 $k_{21} = \left[\frac{d}{ds} (s + 5)^2 F(s) \right]_{s=-5} = \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{s^2 + 2s + 5}{s + 3} \right] \right\}_{s=-5} = -1$

$$k_{22} = [(s + 5)^2 F(s)]_{s=-5} = -10$$

求 k_{21} 的另法: 把 k_1, k_{22} 代入(1)式 $F(s) = \frac{2}{s + 3} - \frac{10}{(s + 5)^2} + \frac{k_{21}}{s + 5}$

$$F(0) = \frac{5}{3 \times 5^2} = \frac{2}{3} - \frac{10}{5^2} + \frac{k_{21}}{5} \quad k_{21} = -1$$

2) 求 $f(t)$: $f(t) = (2e^{-3t} - e^{-5t} - 10te^{-5t})\mathcal{E}(t)$

(二) 围线积分法 (留数法)

拉氏反变换: $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$

留数定理: $\frac{1}{2\pi j} \oint_c F(s) e^{st} ds = \sum_{i=1}^n \text{Re } s_i$

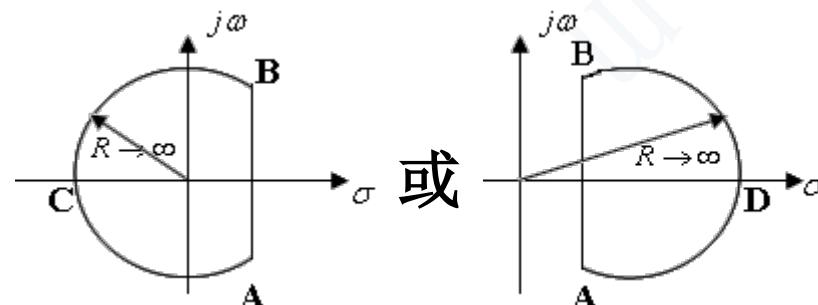
上式左边的积分是在s平面内沿一不通过被积函数极点的封闭曲线C进行的, 右边则是在此围线C中被积函数各极点上留数之和。

为应用留数定理, 在求拉氏反变换的积分线
($\sigma - j\infty \rightarrow \sigma + j\infty$) 上应补足一条积分线以构成一个封闭曲线。

当然要求必须有

$$\int_{ACB} F(s) e^{st} ds = 0 \quad \text{或} \quad \int_{ADB} F(s) e^{st} ds = 0$$

上式在满足以下两个条件
(约当引理) 时成立



① $|s| = R \rightarrow \infty$ 时, $|F(s)|$ 对于 s 一致地趋近于零;

② 因子 e^{st} 的指数 st 的实部应小于 $\sigma_0 t$, 即 $\text{Re}[st] = \sigma t < \sigma_0 t$

第五章 连续时间系统的复频域分析

一般条件①都能满足 ($\delta(t) \leftrightarrow F(s) = 1$ 除外),

当 $t > 0$ 时, $\sigma < \sigma_0$ 或 $t < 0$ 时, $\sigma > \sigma_0$ 条件②满足

即 $t > 0$ 时积分沿左半圆弧进行; $t < 0$ 时积分沿右半圆弧进行。因此

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds = \text{围线中被积函数 } F(s) e^{st} \text{ 所有极点的留数之和}$$

$$= \begin{cases} \sum_{\text{ROC左侧极点}} [F(s) e^{st} \text{ 的留数}] = \sum_{\text{ROC左侧极点}} \text{Re } s_l = f_a(t), t \geq 0 \\ - \sum_{\text{ROC右侧极点}} [F(s) e^{st} \text{ 的留数}] = - \sum_{\text{ROC右侧极点}} \text{Re } s_r = f_b(t), t < 0 \end{cases}$$

留数的求取:

[$F(s)$ 的极点即为 $F(s)e^{st}$ 的极点]

规则 I : 若 s_k 为一阶极点,

$$\text{则 } \text{Re } s_k = [(s - s_k) F(s) e^{st}]_{s=s_k} \dots \text{ (I)}$$

规则 II : 若 s_k 为 p 阶极点,

$$\text{则 } \text{Re } s_k = \frac{1}{(p-1)!} \left\{ \frac{d^{p-1}}{ds^{p-1}} [(s - s_k)^p F(s) e^{st}] \right\}_{s=s_k} \dots \text{ (II)}$$

注意：若 $f(t)$ 含 $\delta(t)$ 及其导数时，需先将 $F(s)$ 分为多项式与真分式之和。

例1 求 $F(s) = \frac{1}{s(s+3)^2}$ 的反变换 ($\sigma > 0$)

解： $D(s) = s(s+3)^2$

$\begin{cases} \text{一阶极点 } s_1 = 0 & (\text{均为左侧极点}) \\ \text{二阶极点 } s_2 = -3 \end{cases}$

$$f(t) = f_a(t) = \sum_{k=1}^2 \operatorname{Re} s_k = \operatorname{Re} s_1 + \operatorname{Re} s_2$$

$$\operatorname{Re} s_1 = [(s-0) \frac{1}{s(s+3)^2} e^{st}]_{s=0} = \frac{1}{9}$$

$$\operatorname{Re} s_2 = \frac{1}{1!} \left\{ \frac{d}{ds} \left[(s+3)^2 \frac{1}{s(s+3)^2} e^{st} \right] \right\}_{s=-3} = -\frac{1}{3} t e^{-3t} - \frac{1}{9} e^{-3t}$$

$$\therefore f(t) = \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9} e^{-3t} - \frac{1}{3} t e^{-3t} \right) \varepsilon(t)$$

第五章 连续时间系统的复频域分析

例2 求 $F_d(s) = \frac{-2}{(s-4)(s-6)}$ ，收敛域为 $4 < \sigma < 6$ 的时间原函数

解: $D(s) = (s-4)(s-6) \begin{cases} s_1 = 4, \text{ 左侧极点} \\ s_2 = 6, \text{ 右侧极点} \end{cases}$
 $f(t) = f_a(t) + f_b(t)$

$$f_a(t) = \text{Re } s_1, \quad f_b(t) = -\text{Re } s_2$$

$$\text{Re } s_1 = \left[\frac{-2}{s-6} e^{st} \right]_{s=4} = e^{4t}$$

$$\text{Re } s_2 = \left[\frac{-2}{s-4} e^{st} \right]_{s=6} = -e^{6t}$$

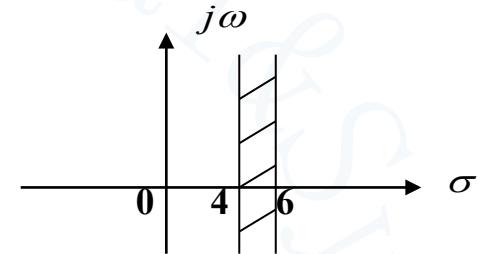
$$f(t) = e^{4t} \varepsilon(t) + e^{6t} \varepsilon(-t)$$

又若收敛域为 $\sigma > 6$ ，则两极点均为左侧极点

$$f(t) = f_a(t) = (e^{4t} - e^{6t}) \varepsilon(t)$$

若收敛域为 $\sigma < 4$ ，则两极点均为右侧极点

$$f(t) = f_b(t) = (-e^{4t} + e^{6t}) \varepsilon(-t)$$



五、线性系统的拉普拉斯变换分析法

线性定常系统: 常系数线性微分方程描述

拉氏变换分析法基本点: 将时域的常系数线性微分方程变换到s域得代数方程, 求得象函数, 再求原函数。具体方法分两种:

① **运算法** ——直接求全响应(初始状态在变换中被自动引入)

② **通过** $H(s)$ **求解:** $R_{zs}(s) \rightarrow r_{zs}(t)$, $R_{zi}(s) \rightarrow r_{zi}(t)$

(一) **运算法**(对微分方程直接进行拉氏变换)

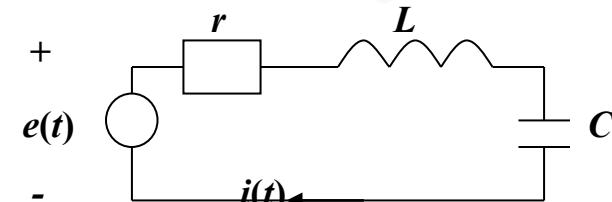
例 已知 $e(t)$, r , L , C , 求 $i(t)$

解: 1) 列电路方程

$$e(t) = u_r + u_L + u_C = ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt$$

取拉氏变换:

$$E(s) = rI(s) + LsI(s) - Li_L(0^-) + \frac{I(s)}{sC} + \frac{u_C(0^-)}{s}$$



第五章 连续时间系统的复频域分析

$$E(s) + L i_L(0^-) - \frac{u_C(0^-)}{s} = r I(s) + L s I(s) + \frac{1}{sC} I(s) \cdots (1)$$

2) 求 $I(s)$

$$I(s) = \frac{E(s) + L i_L(0^-) - \frac{u_C(0^-)}{s}}{r + Ls + \frac{1}{sC}} = \frac{E(s)}{Z(s)} + \frac{L i_L(0^-) - \frac{u_C(0^-)}{s}}{Z(s)} \cdots (2)$$

令 $r + Ls + \frac{1}{sC} = Z(s)$ —— 运算阻抗

3) 求 $i(t)$

$$i(t) = L^{-1}\{I(s)\}$$

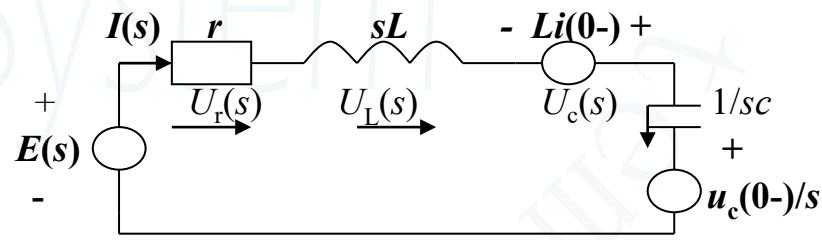
讨论:

(1) 运算电路

①参数 r 、 L 、 C —— 运算阻抗 r 、 sL 和 $\frac{1}{sC}$

②初始条件: $\begin{cases} i_L(0^-) \\ u_C(0^-) \end{cases}$ 等效为 内电压源 $\begin{cases} L i_L(0^-) \text{ (一致参考方向)} \\ u_C(0^-)/s \text{ (同 } u_C(0^-) \text{ 极性)} \end{cases}$

③时间电量 \rightarrow 象函数电量 $\begin{cases} i(t) \rightarrow I(s) \\ e(t) \rightarrow E(s) \\ \dots \end{cases}$



(2) 电路基本定律的运算形式

① 欧姆定律的运算形式

令初态为零, $I(s) = \frac{E(s)}{Z(s)}$

初态不为零时, 式(2)称作广义的欧姆定律

② 基尔霍夫电压定律的运算形式——式(1)

任一闭合回路若有 n 条支路串联,

$$\text{则 } \sum_{k=1}^n [E_k(s) + L_k i_k(0^-) - \frac{u_{ck}(0^-)}{s}] = \sum_{k=1}^n [r_k I_k(s) + sL_k I_k(s) + \frac{I_k(s)}{sC_k}]$$

③ 基尔霍夫电流定律的运算形式

$$\sum_{k=1}^m i_k = 0 \rightarrow \sum_{k=1}^m I_k(s) = 0 \quad (m \text{ 个支路汇集的节点})$$

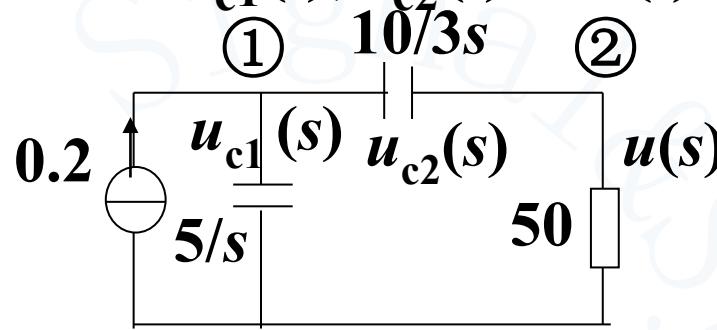
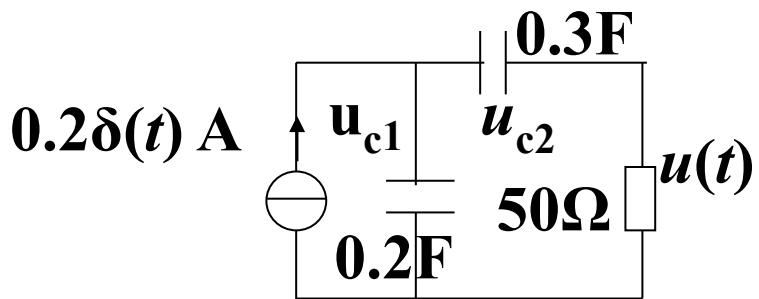
符号法可移用于运算电路

符号法: 稳态正弦信号 ($s=j\omega$)

运算法: 任意信号, 求解电路

第五章 连续时间系统的复频域分析

例1 已知下图所示零状态电路, 求 $u_{c1}(t), u_{c2}(t)$ 及 $u(t)$



解: 由于已知电路为零状态电路, 故有

$$u_{c_1}(0^-) = u_{c_2}(0^-) = 0$$

画复频域等效电路

节点电压方程

$$\begin{aligned} \left(\frac{s}{5} + \frac{3s}{10}\right)u_{c_1}(s) - \frac{3s}{10}u(s) &= 0.2 \\ -\frac{3s}{10}u_{c_1}(s) + \left(\frac{1}{50} + \frac{3s}{10}\right)u(s) &= 0 \end{aligned}$$

解得

$$u(s) = \frac{\frac{3s}{10} \times 50u_{c_1}(s)}{1 + 15s} = \frac{s}{s + \frac{1}{15}}u_{c_1}(s) \quad \frac{s}{2}u_{c_1}(s) - \frac{3s}{10} \times \frac{s}{s + \frac{1}{15}}u_{c_1}(s) = 0.2$$

第五章 连续时间系统的复频域分析

$$u_{c_1}(s) = \frac{0.2}{\frac{s}{2} - \frac{3s^2}{10(s + \frac{1}{15})}} = \frac{2(s + \frac{1}{15})}{2s^2 + \frac{1}{3}s} = \frac{(s + \frac{1}{15})}{s(s + \frac{1}{6})} = \frac{0.4}{s} + \frac{0.6}{s + \frac{1}{6}}$$

$$u(s) = \frac{s}{(s + \frac{1}{15})} \frac{(s + \frac{1}{15})}{s(s + \frac{1}{6})} = \frac{1}{s + \frac{1}{6}}$$
$$\frac{s}{2}u_{c_1}(s) - \frac{3s}{10} \times \frac{s}{s + \frac{1}{15}}u_{c_1}(s) = 0.2$$

故

$$u_{c_1}(t) = (0.4 + 0.6e^{-\frac{1}{6}t})\varepsilon(t) \quad u(t) = e^{-\frac{1}{6}t}\varepsilon(t)$$

$$u_{c_2}(t) = u_{c_1}(t) - u(t) = (0.4 - 0.4e^{-\frac{1}{6}t})\varepsilon(t)$$

讨论: $u_{c_1}(0^+) = 1V$, 不等于 $u_{c_1}(0^-) = 0$ 即电压 $u_{c_1}(t)$ 在 $t=0$ 时刻发生了突变。因为电容 C_1 回路中有冲激电流。

第五章 连续时间系统的复频域分析

例2 已知 $e(t)=10\varepsilon(t)$, $R_{12}=1/5\Omega$, $R_2=1\Omega$,

$L=1/2H$, $C=1F$, $i_L(0-)=4A$, $u_C(0-)=5V$

求 $i_1(t)$

解: 1) 作运算电路

2) 求 $I_1(s)$, 用回路法解

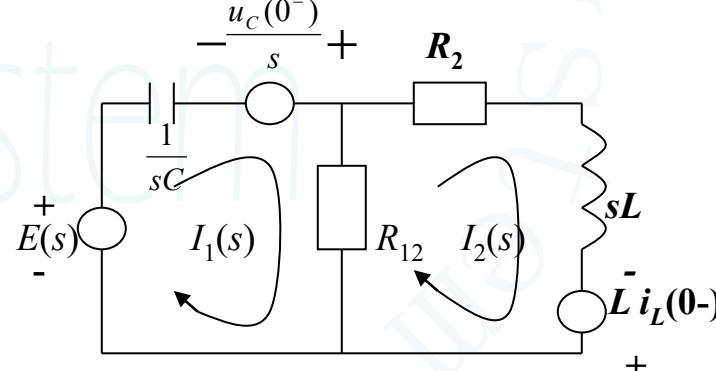
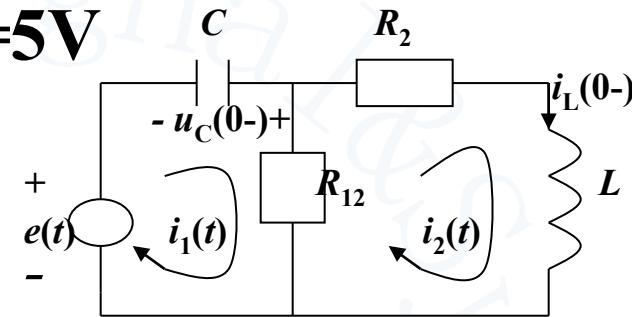
$$\left. \begin{aligned} I_1(s)\left(\frac{1}{sC} + R_{12}\right) - I_2(s)R_{12} &= E(s) + \frac{u_C(0^-)}{s} \\ -I_1(s)R_{12} + (R_{12} + R_2 + sL)I_2(s) &= Li_L(0^-) \end{aligned} \right\}$$

代入数值求得:

$$I_1(s) = \frac{79s + 180}{s^2 + 7s + 12} = \frac{-57}{s + 3} + \frac{136}{s + 4}$$

3) 求 $i_1(t) = L^{-1}\{I_1(s)\} = (-57e^{-3t} + 136e^{-4t})\varepsilon(t)$

可见, 由于自动引入了初始条件, 因此解题运算较简单, 但响应中没有区分零状态分量与零输入分量。运算法中拉氏变换仅作为数学工具, 解题过程中对信号与系统间的相互作用缺乏物理解释。



第五章 连续时间系统的复频域分析

(二) 通过 $H(s)$ 求响应 —— 从信号分解的角度看拉氏变换

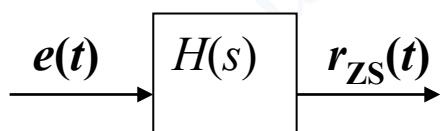
$$I(s) = \frac{E(s)}{Z(s)} + \frac{Li_L(0^-) - \frac{u_c(0^-)}{s}}{Z(s)} = I_{ZS}(s) + I_{Zi}(s) = \text{零状态响应} + \text{零输入响应}$$

$$I_{ZS}(s) = \frac{E(s)}{Z(s)}, \quad I_{Zi}(s) = \frac{Li_L(0^-) - \frac{u_c(0^-)}{s}}{Z(s)}$$

$$H(s) = \frac{I_{ZS}(s)}{E(s)} \quad [\text{转移函数} = \frac{\text{零状态响应}}{\text{激励}}]$$

求 $\left. \begin{array}{l} I_{ZS}(s) \rightarrow i_{ZS}(t) \\ I_{Zi}(s) \rightarrow i_{Zi}(t) \end{array} \right\} \rightarrow \text{求 } i(t)$

例1 已知 $H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$, $e(t) = e^{-3t} \varepsilon(t)$, 求 $r_{ZS}(t)$



解: 1) 求 $E(s)$: $E(s) = L\{e(t)\} = \frac{1}{s+3}$, $s = -3$ 源极点

2) $H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$, $s = -1, -2$ 系统极点

第五章 连续时间系统的复频域分析

3) $R_{ZS}(s) = H(s)E(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{s+3}$

4) $r_{ZS}(t) = L^{-1}\{R_{ZS}(s)\} = \frac{1}{2}(e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t})\varepsilon(t)$

$\frac{1}{2}(e^{-t} - 2e^{-2t})\varepsilon(t)$ —— 自由分量 $\frac{1}{2}e^{-3t}\varepsilon(t)$ —— 强制分量

$\frac{1}{2}(e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t})\varepsilon(t)$ —— 均为瞬态分量

例2 当 $e(t) = \delta(t)$ 时, 求 $r_{ZS}(t) = h(t)$

解: $E(s) = L\{e(t)\} = 1$

$$R_{ZS}(s) = H(s)E(s) = H(s)$$

$$h(t) = r_{ZS}(t) = L^{-1}\{H(s)\} \quad \text{即 } h(t) \leftrightarrow H(s)$$

时域 $r(t) = H(p)e(t)$, 复频域 $R_{ZS}(s) = H(s)E(s)$

转移算子 $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \stackrel{\text{令 } p=s}{\Rightarrow} H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ —— 系统函数

$D(s) = D(p)|_{p=s}$ (零输入响应由 $D(s)$ 和初始条件 —— 初始状态决定)

第五章 连续时间系统的复频域分析

例3 已知输入 $e(t) = e^{-t} \varepsilon(t)$, 初始条件为 $r(0) = 2, r'(0) = 1$, 系统的转移函数为 $H(s) = \frac{s+5}{s^2+5s+6}$, 求系统的响应。并标出受迫分量与自然分量; 瞬态分量与稳态分量。

解: (1) 求零输入响应 $r_{zi}(t)$

$$D(s) = s^2 + 5s + 6 = (s+2)(s+3) = 0 \Rightarrow s_1 = -2, s_2 = -3$$

$$r_{zi}(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

初始条件确定常数 c_1, c_2 :

$$\begin{cases} r(0) = c_1 + c_2 = 2 \\ r'(0) = -2c_1 - 3c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 7, c_2 = -5$$

$$r_{zi}(t) = \underbrace{7e^{-2t} - 5e^{-3t}}_{\text{自然分量}}, \quad t \geq 0$$

若 $D(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_{n-k})(s - \lambda)^k$ 即含有一 k 阶重极点

则 $r_{zi}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_{n-k} e^{\lambda_{n-k} t} + (c_{n-k+1} + c_{n-k+2} t + \cdots + c_n t^{k-1}) e^{\lambda t}$

(2) 求零状态响应 $r_{zs}(t)$

第五章 连续时间系统的复频域分析

$$E(s) = L\{e^{-t}\} = \frac{1}{s+1}, R_{zs}(s) = H(s)E(s) = \frac{s+5}{(s+2)(s+3)(s+1)} = \frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

$$r_{zs}(t) = (2e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t})\varepsilon(t)$$

(3) 求全响应 $r(t)$

$$r(t) = r_{zi}(t) + r_{zs}(t) = (\underbrace{2e^{-t}}_{\text{受迫分量}} + \underbrace{4e^{-2t} - 4e^{-3t}}_{\text{自然分量}}) \varepsilon(t) \quad \text{没有稳态分量}$$

瞬态分量

(三) 双边信号作用下线性系统的响应

双边信号 $f(t) \xrightarrow{LT} F_d(s), \sigma_a < \sigma < \sigma_b$

冲激响应 $h(t) \xrightarrow{LT} H(s), \sigma > \sigma_1$

$$r_{zs}(t) = f(t) * h(t) \Leftrightarrow R_{zs}(s) = F_d(s)H(s)$$

若 $F_d(s)$ 与 $H(s)$ 有公共收敛域,

则 $r_{zs}(t) = L^{-1}\{R_{zs}(s)\}$

否则 $R_{zs}(s)$ 不存在, $r(t)$ 则无法用拉氏变换求解

第五章 连续时间系统的复频域分析

例 已知激励信号 $f(t) = e^{-2t}\varepsilon(-t) + e^{-4t}\varepsilon(t) = \begin{cases} e^{-2t}, & t < 0 \\ e^{-4t}, & t > 0 \end{cases}$, 系统冲激响应为 $h(t) = e^{-3t}, t > 0$, 求系统的响应。

解: $F_d(s) = L_d\{f(t)\} = F_a(s) + F_b(s) = \frac{1}{s+4} - \frac{1}{s+2}, \quad -4 < \sigma < -2$

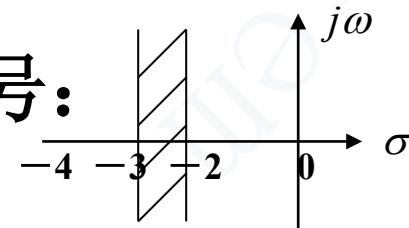
$$H(s) = L\{h(t)\} = \frac{1}{s+3}, \quad \sigma > -3$$

由于 $F_d(s)$ 和 $H(s)$ 有公共收敛域 $-3 < \sigma < -2$, 故 $R(s)$ 存在, 且

$$R(s) = F_d(s)H(s) = \frac{-2}{(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+4}, \quad -3 < \sigma < -2$$

收敛域右侧极点 -2 对应左边时间信号:

$$r_b(t) = -L^{-1}\left\{\frac{-1}{s+2}\right\} = e^{-2t}, t < 0$$



收敛域左侧极点 $-3, -4$ 对应右边时间信号:

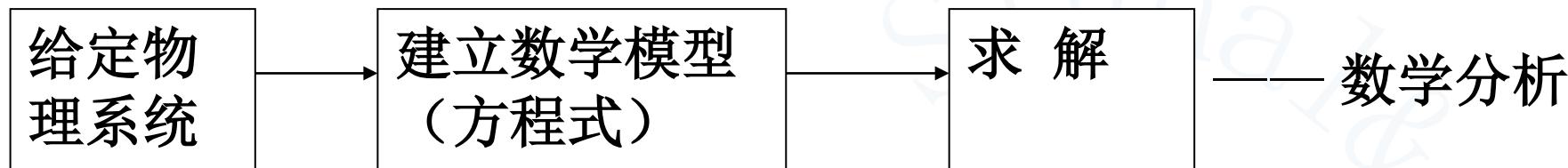
$$r_a(t) = L^{-1}\left\{\frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+4}\right\} = 2e^{-3t} - e^{-4t}, t > 0$$

$$r(t) = r_a(t) + r_b(t) = (2e^{-3t} - e^{-4t})\varepsilon(t) + e^{-2t}\varepsilon(-t)$$

可见, 在 $t < 0$ 时激励信号强迫系统作出与激励同模式的响应, 而在 $t > 0$ 时响应则由激励与系统的特性共同确定。

第五章 连续时间系统的复频域分析

前面介绍的时域和频域分析方法：



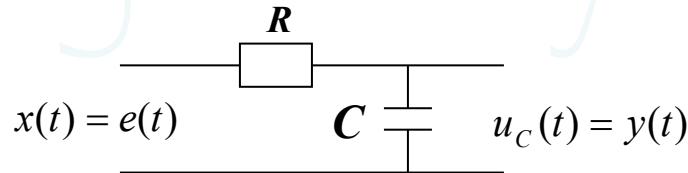
对于高阶系统：

实验方法——模拟

图解法——信号流图法

六、线性系统的模拟 (利用模拟实验方法——数学意义上的模拟)

一阶系统：



数学模型： $RC \frac{du_c}{dt} + u_c = e(t) \rightarrow \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC} u_c = \frac{1}{RC} e(t)$

一般形式： $y' + a_0 y = x$

(一) 基本单元

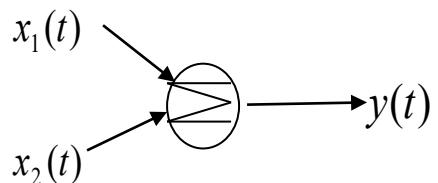
系统的模拟图由三种基本运算器组合起来：

积分器、标量乘法器、加法器

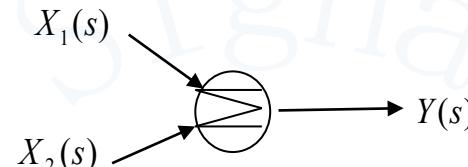
第五章 连续时间系统的复频域分析

加法器

时域



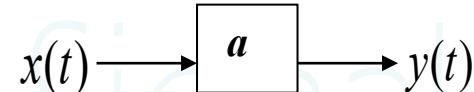
复频域 (s域)



$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

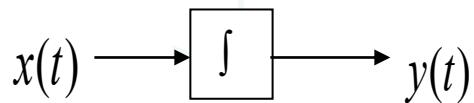
$$Y(s) = X_1(s) + X_2(s)$$

标量乘法器



$$y(t) = ax(t)$$

积分器

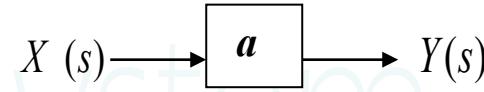
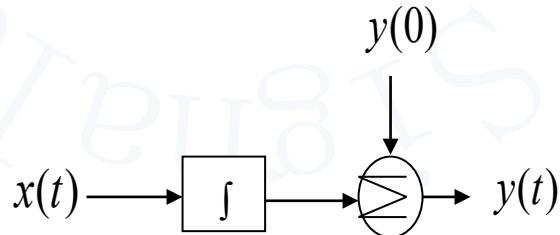


零态:

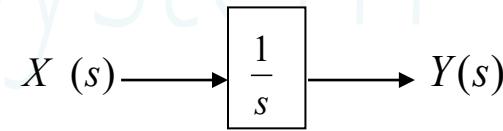
$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$$

非零态:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau + y(0)$$



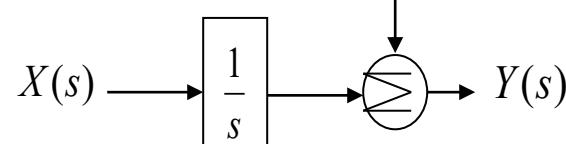
$$Y(s) = aX(s)$$



$$Y(s) = \frac{1}{s}X(s)$$

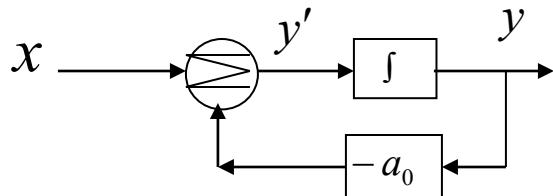
$$Y(s) = \frac{1}{s}X(s) + \frac{y(0)}{s}$$

$$\frac{y(0)}{s}$$

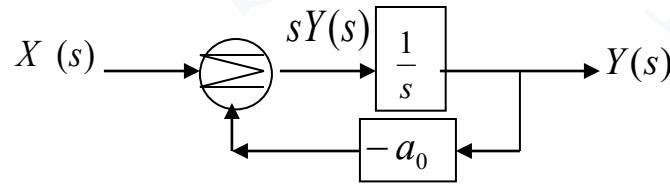


(二) 微分方程式的模拟

1. 一阶: $y' + a_0 y = x \Rightarrow y' = -a_0 y + x \xrightarrow{LT} sY(s) = X(s) - a_0 Y(s)$



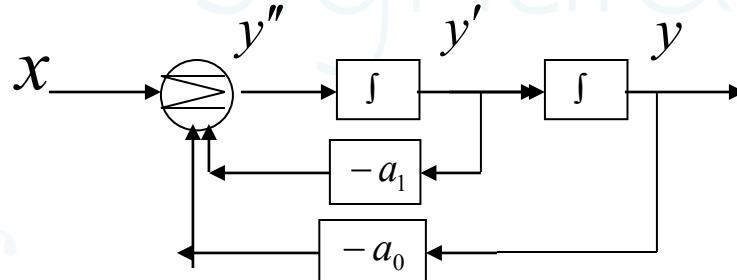
时域框图



s域框图

2. 二阶: $y'' + a_1 y' + a_0 y = x \Rightarrow y'' = -a_1 y' - a_0 y + x$

积分器个数=阶数



3. n 阶: $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = x$

模拟规则: $y^{(n)} = -a_{n-1} y^{(n-1)} - \cdots - a_1 y' - a_0 y + x$

$y^{(n)}$ 作为第一个积分器的输入, 经 n 个积分器得到输出 y (如图 5-26)

4. 系统方程含有 x 的导数

以二阶为例: $y'' + a_1y' + a_0y = b_1x' + b_0x$ (x 的阶数低于 y 的阶数——实际系统)

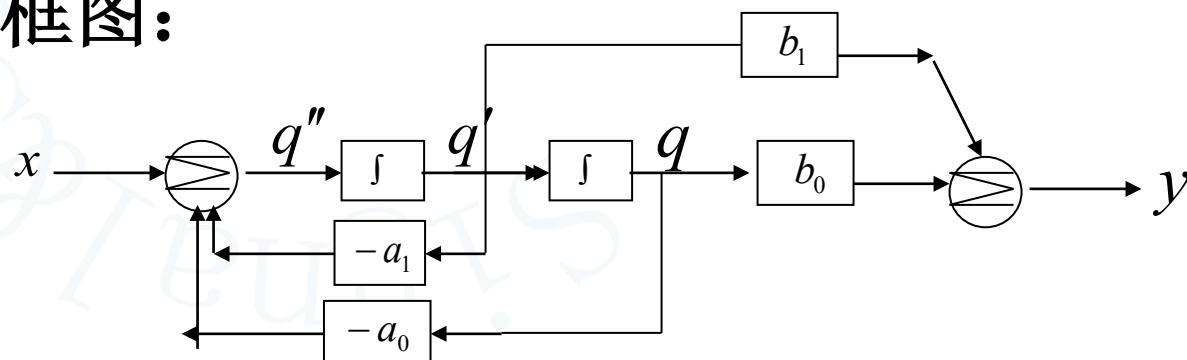
算子形式: $(p^2 + a_1p + a_0)y = (b_1p + b_0)x$

引入辅助变量 $q(t)$: $\frac{y}{x} = \frac{b_1p + b_0}{p^2 + a_1p + a_0} = \frac{(b_1p + b_0)q(t)}{(p^2 + a_1p + a_0)q(t)}$

$$\text{令} \begin{cases} x = (p^2 + a_1p + a_0)q(t) \\ y = (b_1p + b_0)q(t) \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} x = q'' + a_1q' + a_0q \rightarrow q'' = -a_1q' - a_0q + x \\ y = b_1q' + b_0q \end{cases}$$

模拟框图:



例 已知线性时不变因果系统的传递函数如下：

$$H(s) = \frac{s+1}{s^3 + (1+a)s^2 + a(1+a)s + a^2}$$

求该系统的仿真模型。

解：这是一个三阶系统， $H(p) = \frac{p+1}{p^3 + (1+a)p^2 + a(1+a)p + a^2} = \frac{y}{x}$

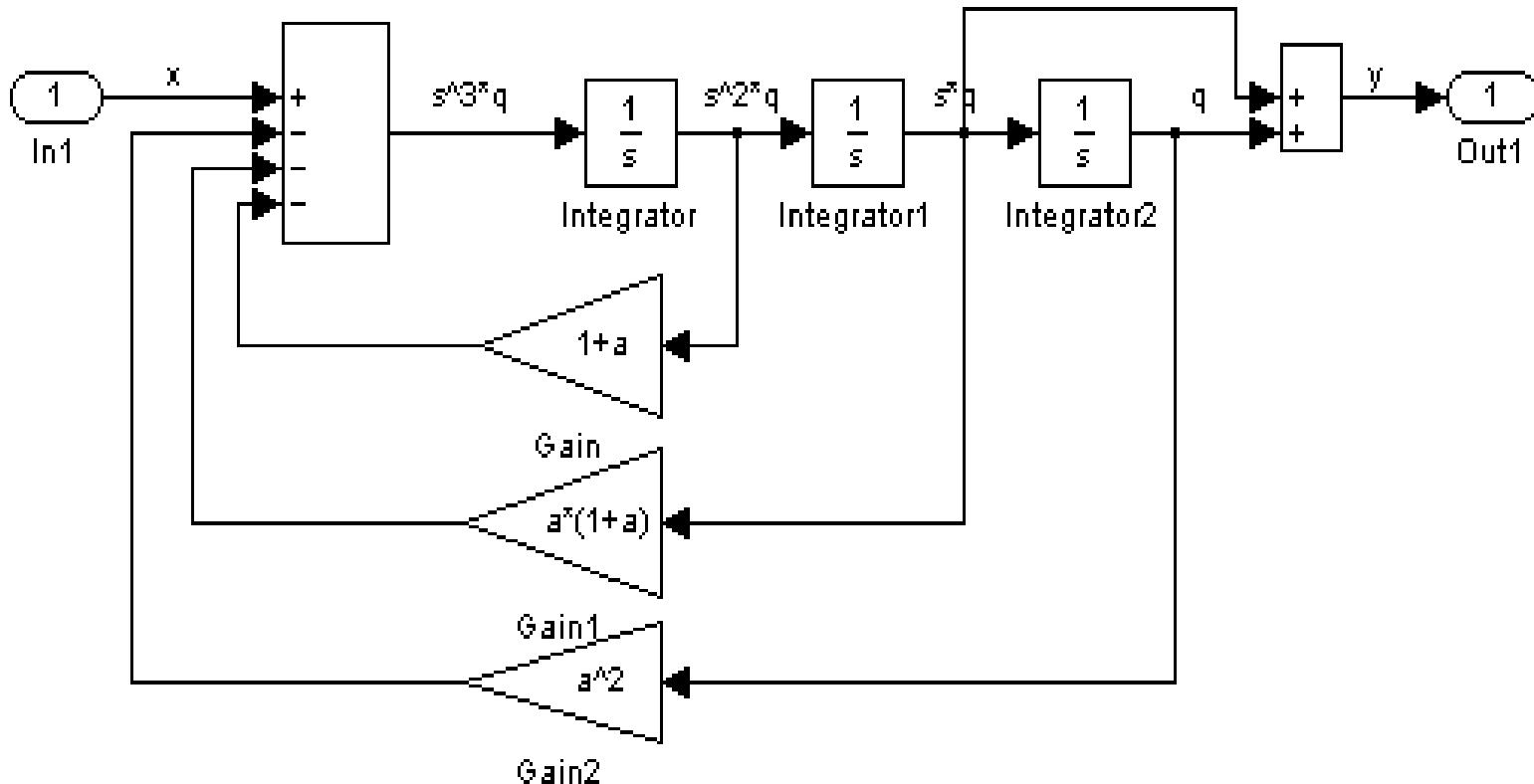
引入辅助变量 q ，设 $y = (p+1)q = q' + q$ ，

$$\text{则 } x = p^3q + (1+a)p^2q + a(1+a)pq + a^2q$$

$$\text{即 } q''' = x - (1+a)q'' - a(1+a)q' - a^2q$$

该系统包含3个积分器，3个乘法器(增益)，1个四输入加法器，1个二输入加法器，在MATLAB中通过选模块、设置模块参数、连线得到仿真模型如下：

第五章 连续时间系统的复频域分析



以上直接由系统方程得到的模拟框图称为系统的直接模拟框图，对于大系统的分析不方便，实用中常把一个大系统分成若干子系统连接的形式来构成模拟图。

(二) 子系统模拟框图 —— 系统函数的模拟

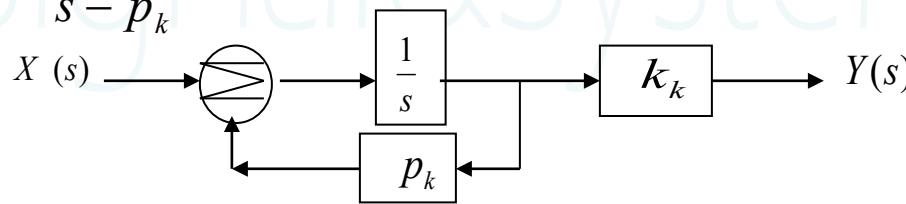
1. 子系统并联模拟

$$\begin{aligned}
 n \text{ 阶系统: } H(s) &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \\
 &= \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{k_n}{s - p_n} \quad (\text{俱为单阶极点})
 \end{aligned}$$

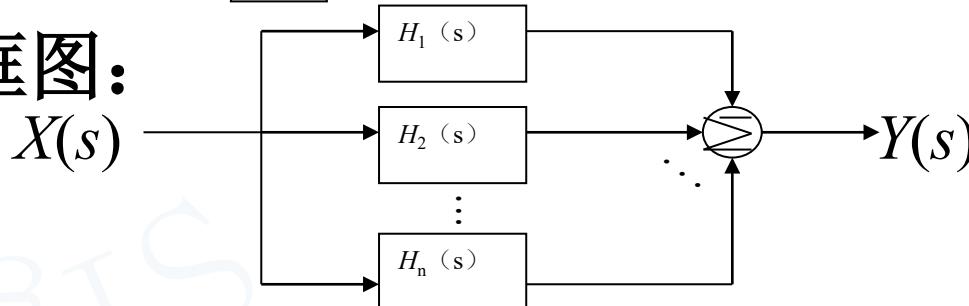
$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) + \cdots + H_n(s) \quad (n \text{ 个极点俱为实数})$$

$$H_k(s) = \frac{k_k}{s - p_k} \quad (k = 1, \dots, n) \quad \text{对应一个一阶子系统(实数极点)}$$

子系统框图:



子系统并联模拟框图:



如有共轭复数极点项, 为使子系统的系数 a_i 、 b_i 为实数, 常合并在一起组成一二阶系统, 此时 $H(s) = H_1(s) + H_2(s) + \cdots + H_r(s) (r < n)$

2. 子系统级联模拟(串联模拟)

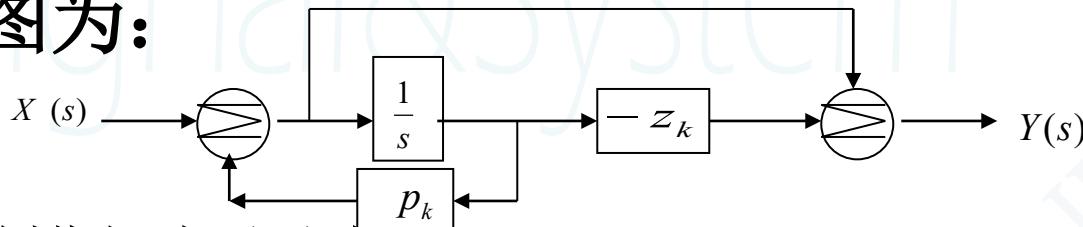
n 阶系统: $H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = b_m \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$

$$= H_1(s) \bullet H_2(s) \cdots H_r(s) (r \leq n)$$

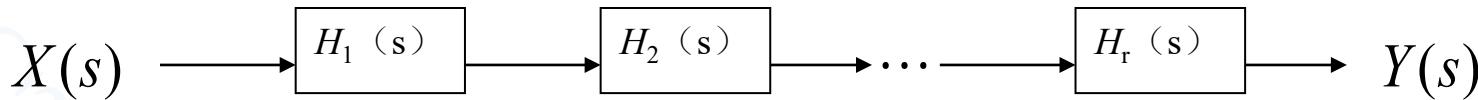
其中 $H_k(s)$ 为一阶或二阶子系统

若一阶子系统 $H_k(s) = \frac{s - z_k}{s - p_k}$

则其模拟框图为:



r 个子系统级联模拟框图为:



子系统模拟的特点:

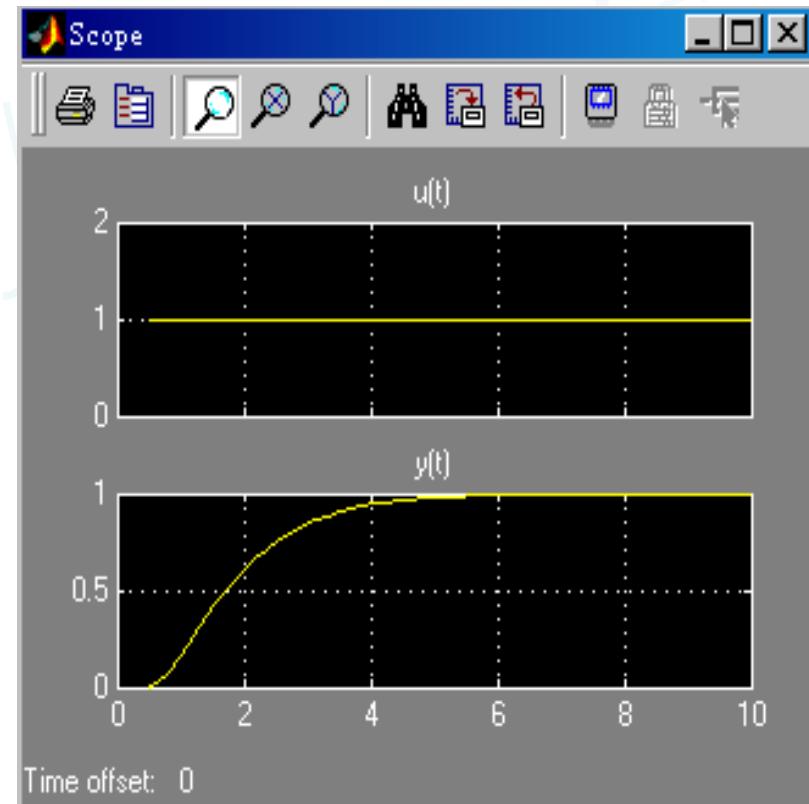
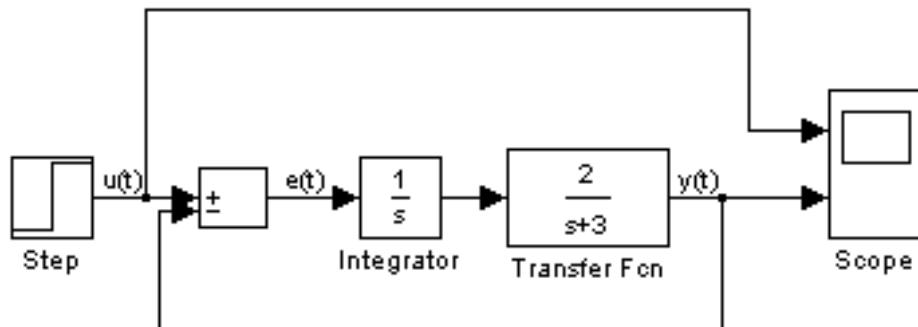
调整某一子系统的参数仅影响该子系统的极点或零点在 s 平面上的位置, 对其它子系统不产生影响。

例 二阶连续反馈系统的仿真：

开环传递函数

$$\frac{2}{s^2 + 3s}$$

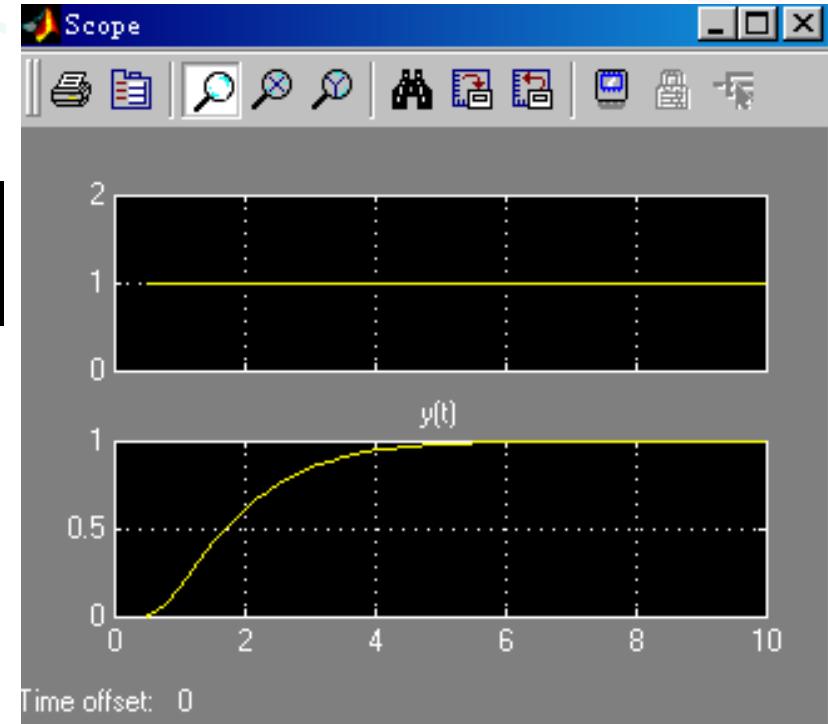
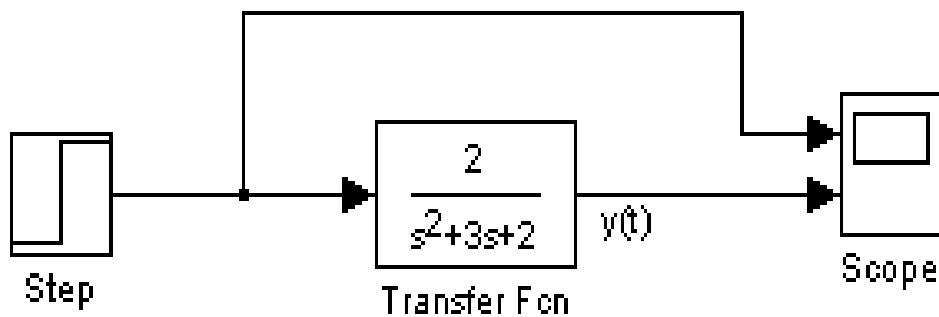
在MATLAB中建立仿真模型如下：



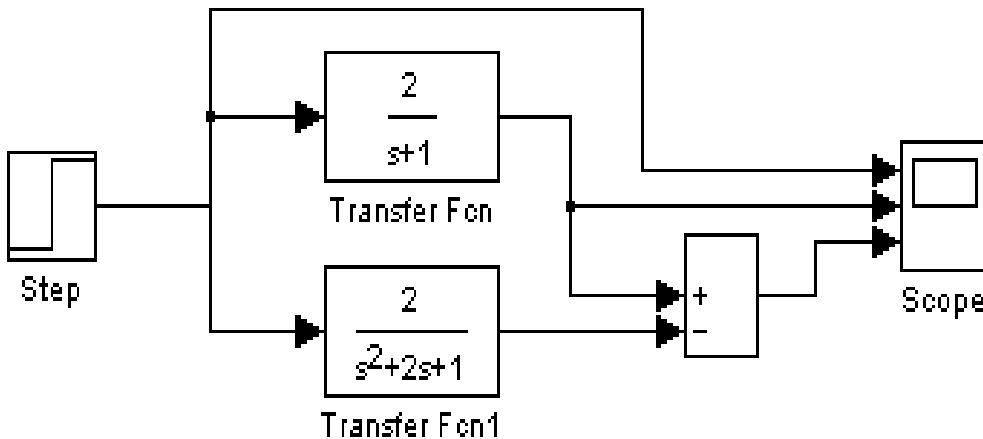
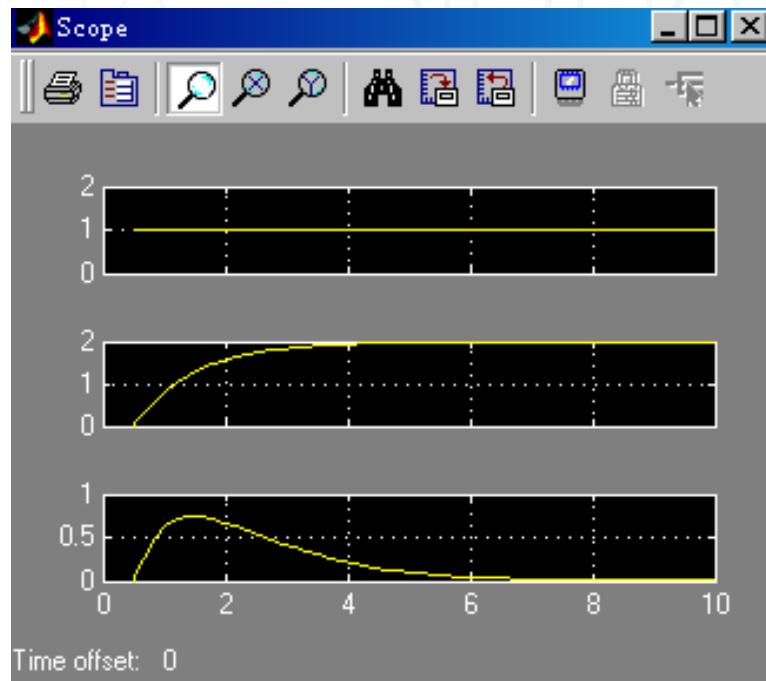
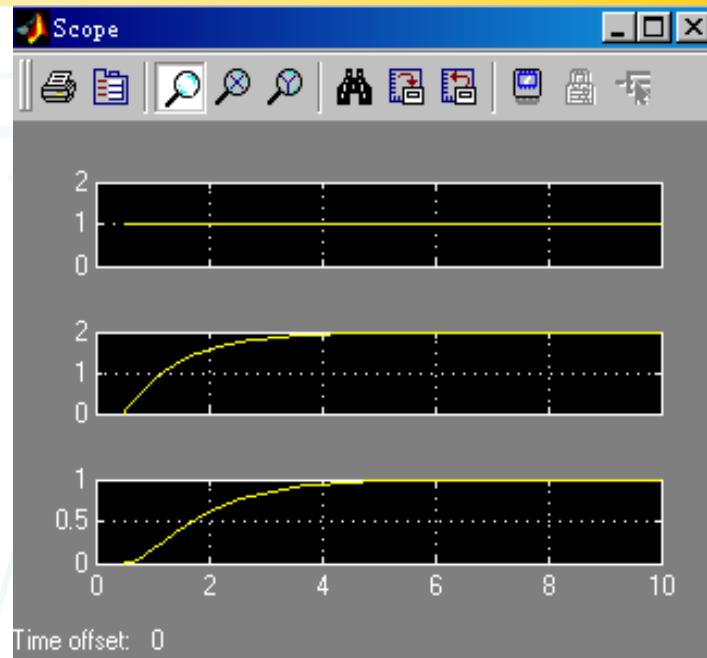
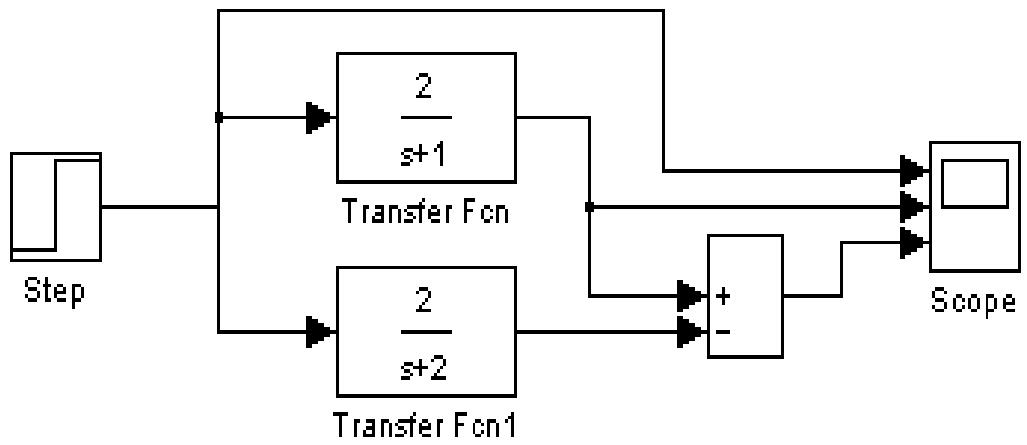
阶跃响应的仿真结果：

反馈系统的转移函数：

$$H(s) = \frac{G}{1+GF} = \frac{\frac{2}{s^2+3s}}{1+\frac{2}{s^2+3s}} = \frac{2}{s^2+3s+2} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$



第五章 连续时间系统的复频域分析



七、信号流图

信号流图:是用有向的线图来描述线性方程组变量间因果关系的一种图。
本质: 求解线性方程组的图解法。

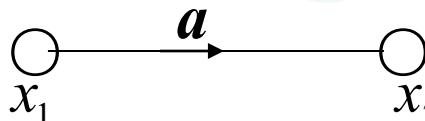
(一) 信号流图的表示法

1. 由方程作流图 作图规则:

例1 $x_2 - ax_1 = 0$ (1)首先把方程式写成因果关系式: 果=f(因);

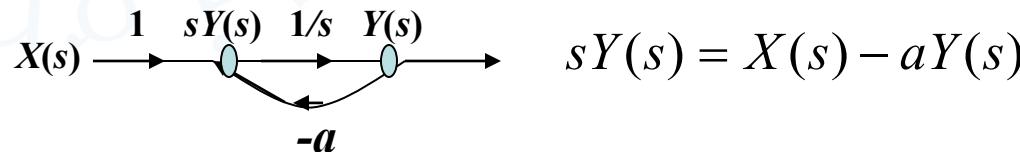
如选 x_2 为果: (2)方程式中的各个变量用“○”表示, 称作结点;

$x_2 = ax_1$ (3)变量之间的因果关系用线段来表示, 称作支路。



其特点: i) 有向, 因→果(支路的方向表示信号流动的方向)
ii) 支路旁边标上因变量的系数(传输值)
iii) 每一个结点的变量等于流入它的变量与相应支路
传输值的乘积的代数和。

如



$$sY(s) = X(s) - aY(s)$$

第五章 连续时间系统的复频域分析

例2 求 $\begin{cases} ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0 \cdots (1) \\ dx_0 + ex_1 + fx_2 = 0 \cdots (2) \end{cases}$ 的流图

解: 1) (1) 选 x_1 为果: $x_1 = -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b}x_2$

(2) 选 x_2 为果: $x_2 = -\frac{d}{f}x_0 - \frac{e}{f}x_1$

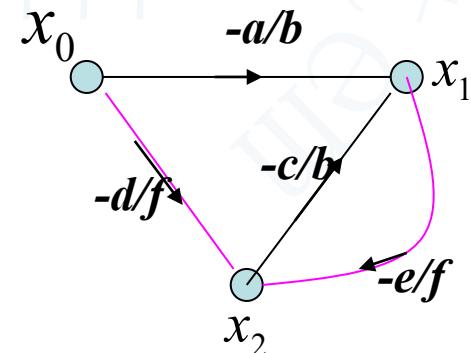
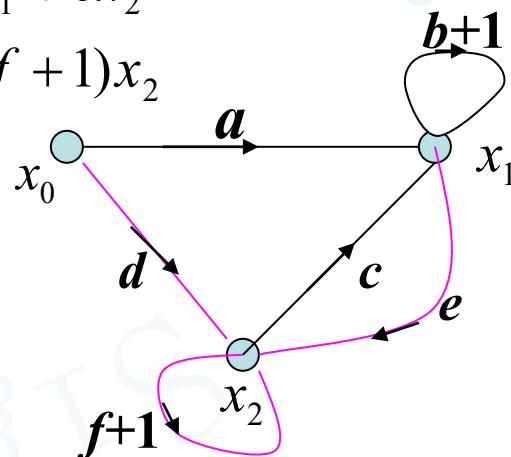
【注意】各方程的果变量不能相同

2) 用结点表示变量 (结点还兼有加法器的作用)

3) 用支路表示因果关系并标注传输值

若 $\begin{cases} x_1 = ax_0 + (b+1)x_1 + cx_2 \\ x_2 = dx_0 + ex_1 + (f+1)x_2 \end{cases}$

由此可画流图:



一个方程组的流图不是唯一的,但其解答是唯一的!

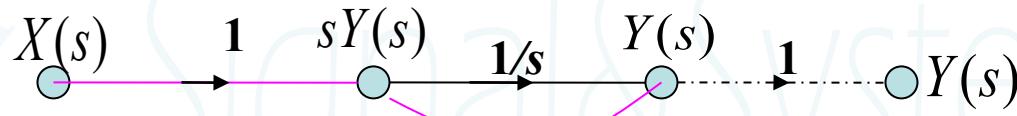
例3 求一阶系统的流图

解: $y' + a_0 y = x \rightarrow y' = -a_0 y + x$ ——时域模型

$sY(s) = -a_0 Y(s) + X(s) \cdots (1)$ ——复域模型

$X(s)、sY(s)、Y(s)$ ——复量

作流图: 结点3个—— $X(s)$ 、 $sY(s)$ 、 $Y(s)$



$$Y(s) = \frac{1}{s} \bullet sY(s) \cdots (2)$$

若只有 $X(s)$ 、 $Y(s)$ 两个复量: $Y(s)(s + a_0) = X(s)$

$$Y(s) = \frac{1}{s + a_0} X(s) = H(s)X(s) \cdots (3)$$

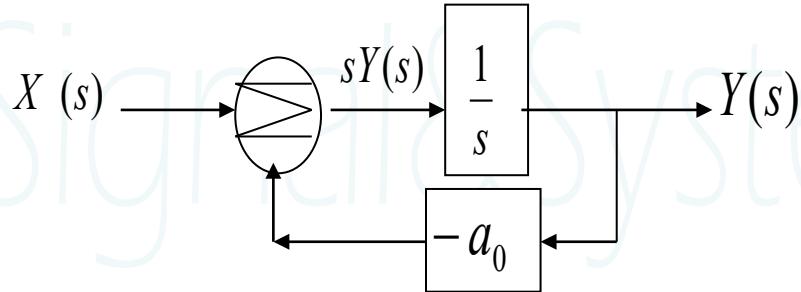
则流图为: 其中 $H(s) = \frac{1}{s + a_0}$

流图和框图都用于描述系统方程, 但流图更简洁, 使用更方便。

2. 由框图作流图

- 规则: (1) 用变量表示结点,
(2) 方框用支路代替, 且有向支路旁边记上传输值
(3) 加法器用“○”表示叫做和点

如由(1)式可得一阶系统的框图:



则由上述规则很容易得出其流图

3. 由电路图作流图

- 规则: (1) 选回路电流及节点电压为信号变量, 找出从输入到输出的流程

- (2) 列方程组
(3) 作流图

第五章 连续时间系统的复频域分析

例 求无源网络的流图: 已知 $E(s)$, 求 $U(s)$

解: 1) 信号流程:

$$E \rightarrow I_1 \rightarrow U_1 \rightarrow I_2 \rightarrow U$$

2) 列方程组

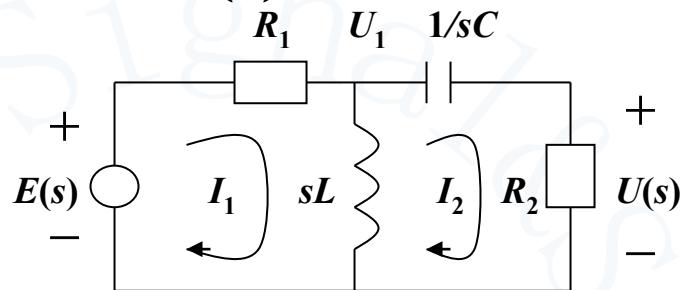
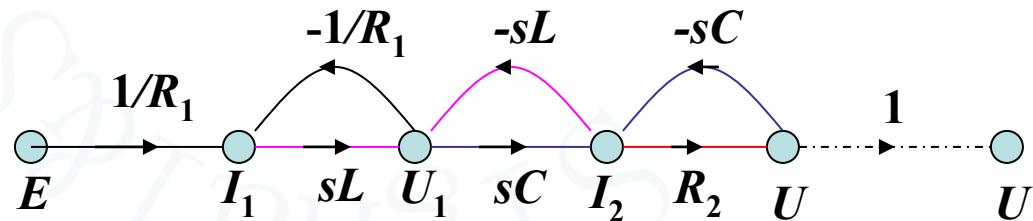
$$I_1 = \frac{E - U_1}{R_1} = \frac{E}{R_1} - \frac{U_1}{R_1} \dots (1)$$

$$U_1 = sL(I_1 - I_2) = sLI_1 - sLI_2 \dots (2)$$

$$I_2 = sC(U_1 - U) = sCU_1 - sCU \dots (3)$$

$$U = R_2 I_2 \dots (4)$$

3) 作流图: 5个结点



对于有源网络: 只需将有源器件用包含有受控源的等效电路代替

支路传输值: 支路因果变量间的转移函数

入支路: 流向结点的支路

出之路: 流出结点的支路

源结点: 只有输出, 通常表示该信号为输入激励信号, 如 E

汇结点: 只有输入, 通常表示输出响应信号, 如 $\longrightarrow U$

和点: 多输入, 单输出

分点: 多输出单输入

闭环(环): 顺向闭合路径, 如 $I_1 \rightarrow U_1 \rightarrow I_1$

自环: 仅包含有一条支路的闭环(只与一个结点相接触)

开路径: 从某一结点连续经一些顺向(有向线段的方向一致)路径至另一结点

前向路径: 从源结点至汇结点的开路径(不包含有任何环路的信号流通路径)

(二) 流图的基本分析方法 (通过流图分析系统响应与激励的关系)

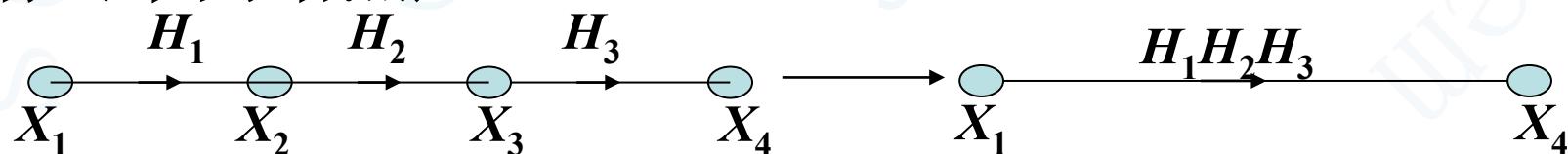
1. 简化求解

化简的目的：

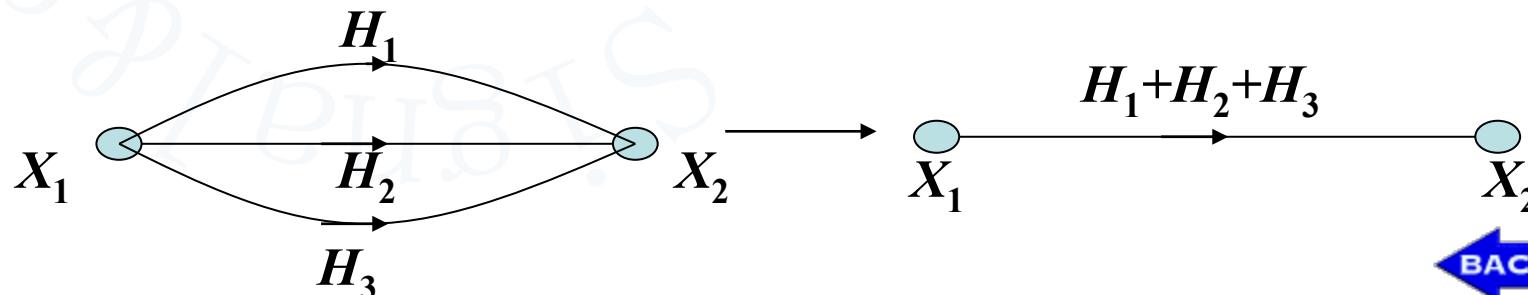
将流图逐步简化，最终在激励与输出间仅有一条支路，从而直接得出输出与激励的关系

简化规则：

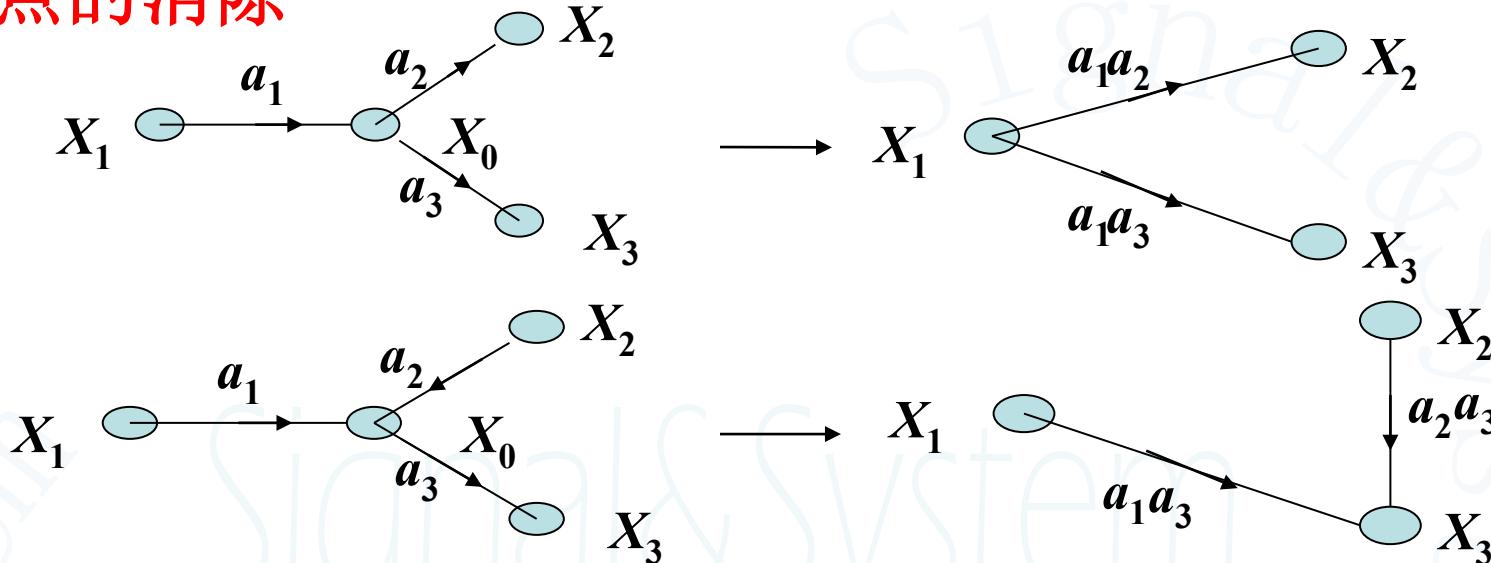
(1) **支路串联** (顺向的支路串联可合并成一条支路，并消去中间结点)



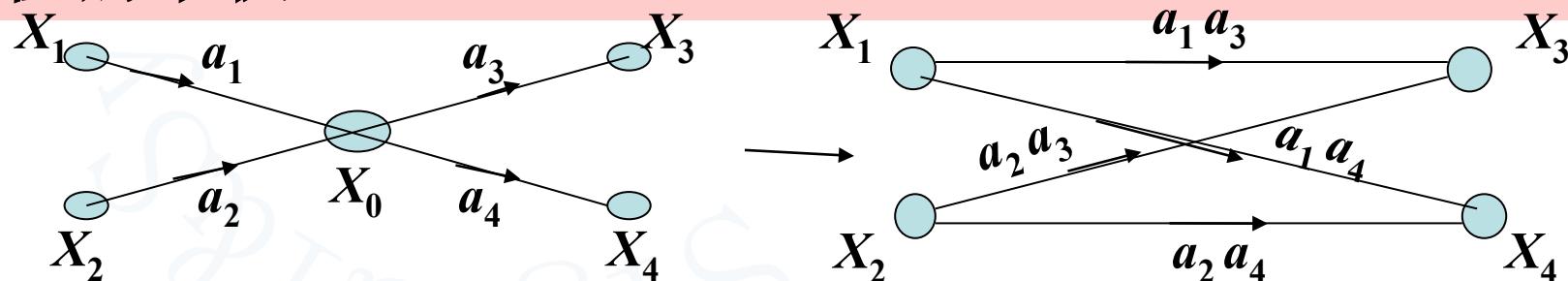
(2) **支路并联** (若干支路并联可用一等效支路代替)



(3) 结点的消除



规则：各条路径的传输值等于流入 X_0 和流出 X_0 的传输值的乘积。

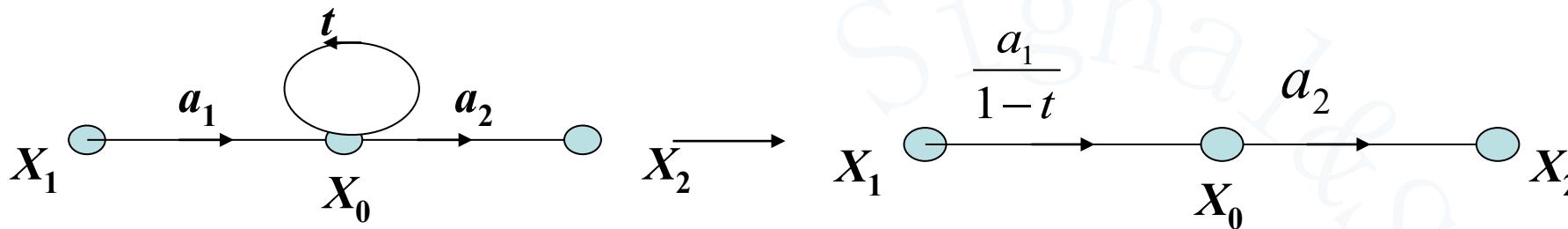


$$X_0 = a_1 X_1 + a_2 X_2$$

$$X_3 = a_3 X_0 = a_1 a_3 X_1 + a_2 a_3 X_2$$

$$X_4 = a_4 X_0 = a_1 a_4 X_1 + a_2 a_4 X_2$$

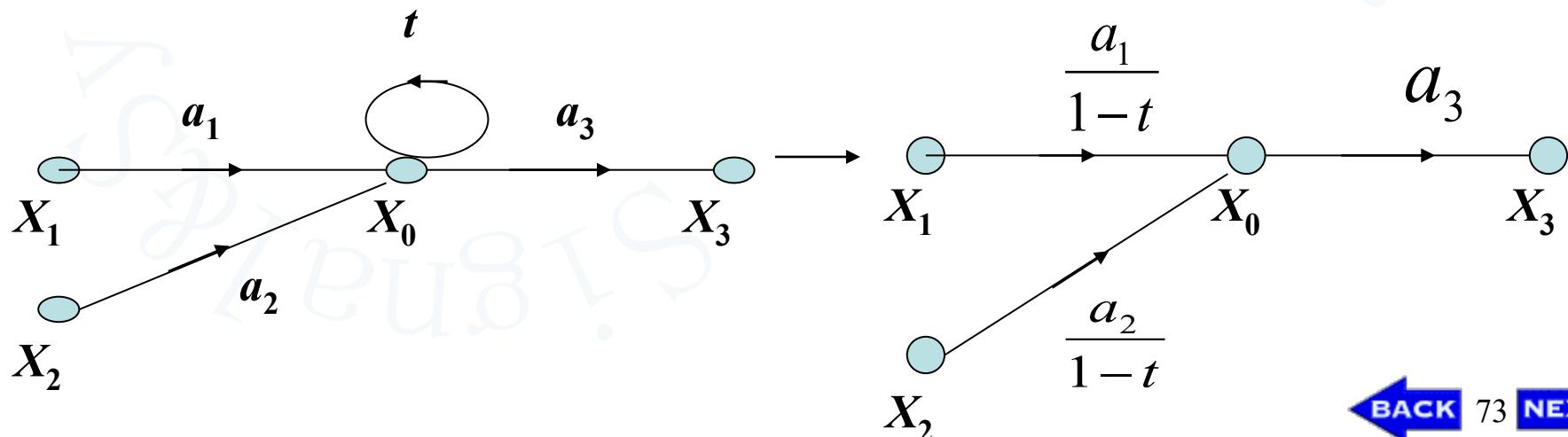
(4) 自环的消除



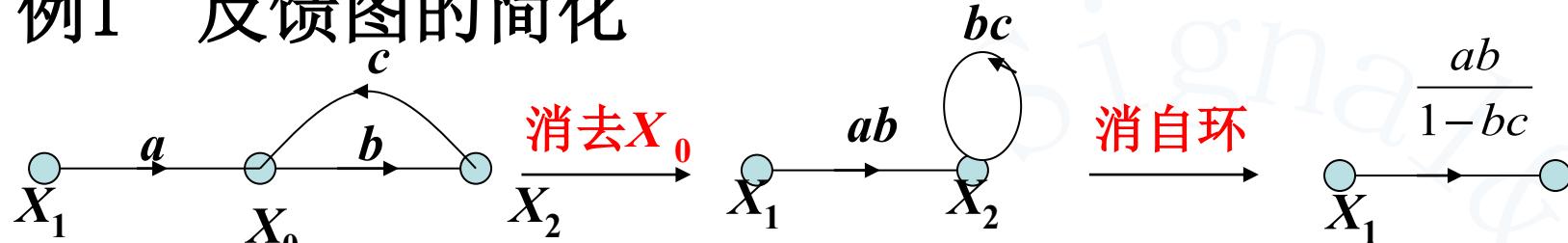
$$X_0 = a_1 X_1 + t X_0 \Rightarrow X_0 = \frac{a_1}{1-t} X_1$$

$$X_2 = a_2 X_0$$

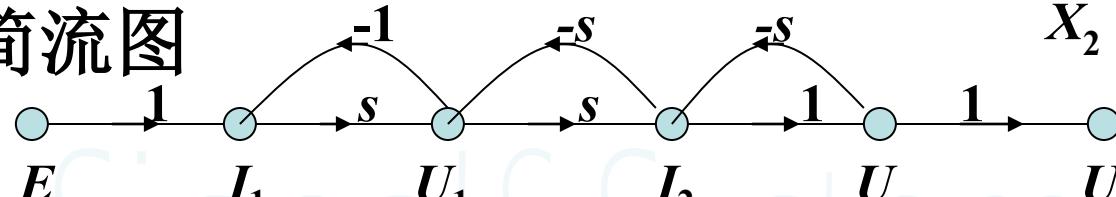
规则：消除自环后，该结点所有入支路的传输值应俱除以 $(1-t)$ 因子，而出支路的传输值不变。



例1 反馈图的简化

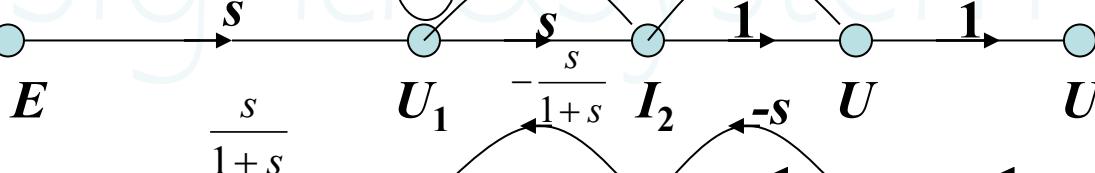


例2 化简流图



解：

(1) 消去 I_1



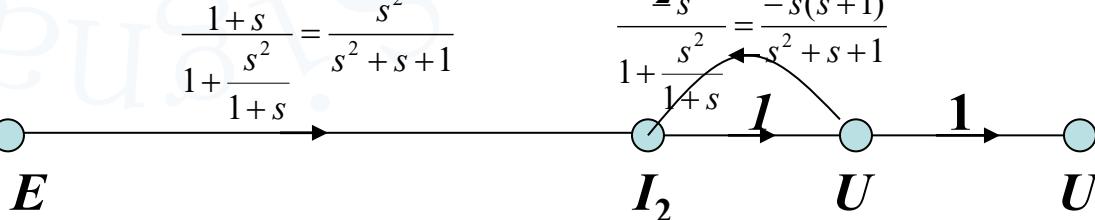
(2) 消自环



(3) 消去 U_1

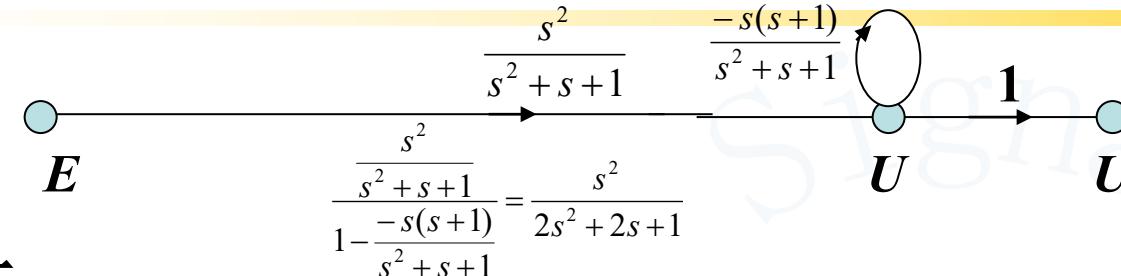


(4) 消自环

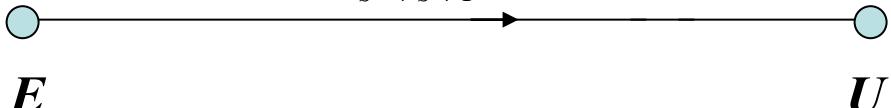


第五章 连续时间系统的复频域分析

(5) 消去 I_2



(6) 消自环



2. 用梅森 (Mason) 公式

梅森公式: $H_{X_0Y} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n G_k \Delta_k$

H_{X_0Y} —— 源结点 X_0 至非源结点 Y 的总传输值

n —— 源结点 X_0 至非源结点 Y 的开路径数

G_k —— 源结点 X_0 至非源结点 Y 的第 k 条开路径的传输值

Δ —— 信号流图的特征行列式

$$\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_{i,j} L_i \cdot L_j - \sum_{i,j,k} L_i \cdot L_j \cdot L_k + \dots$$

$= 1 - (\text{各环的传输值之和}) + (\text{所有的任取两个互不接触环的传输值乘积之和}) - (\text{所有的任取三个互不接触环的传输值乘积之和}) + (\dots) - \dots$

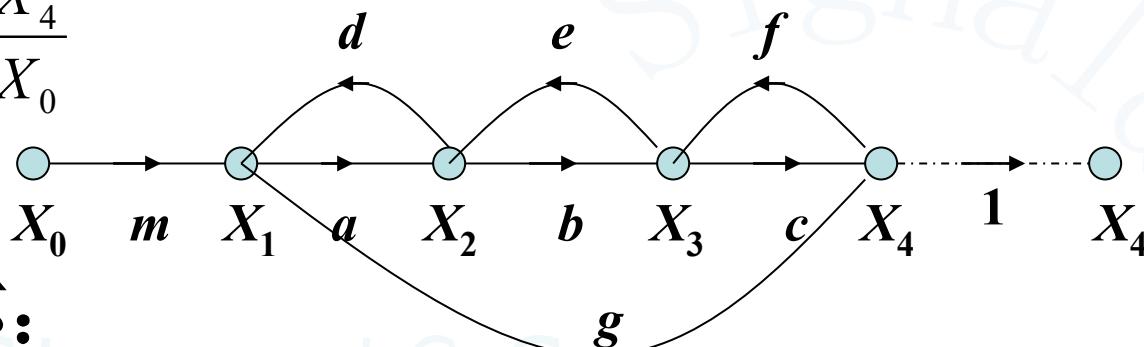
简化求解的方法适用于较简单的流图，对于复杂流图，化简过程则变得冗长。

【互不接触】指图的两部分间没有公共的结点

第五章 连续时间系统的复频域分析

Δ_k ——与第 k 条开路径不接触部分的流图的 Δ 值

例1 求 $H_{X_0X_4} = \frac{X_4}{X_0}$



共有4个环:

$$L_1 = ad \quad L_2 = be \quad L_3 = cf \quad L_4 = gfed$$

其中只有 L_1 和 L_3 互不接触

$$\Delta = 1 - (ad + be + cf + gfed) + adcf$$

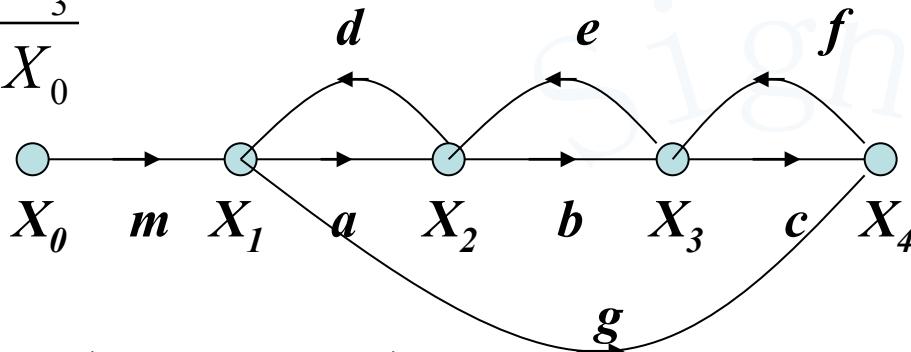
共有2条开路径: $G_1 = mabc \quad G_2 = mg$

由于各环都与开路径 G_1 相接触 $\therefore \Delta_1 = 1$

只有环 L_2 不与开路径 G_2 相接触 $\therefore \Delta_2 = 1 - be$

$$H_{X_0X_4} = \frac{X_4}{X_0} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^2 G_k \Delta_k = \frac{1}{\Delta} (G_1 \Delta_1 + G_2 \Delta_2) = \frac{mabc + mg(1-be)}{1 - (ad + be + cf + gfed) + adcf}$$

例2 求 $H_{X_0X_3} = \frac{X_3}{X_0}$



解：由于流图没变， $\therefore \Delta$ 不变

$$\Delta = 1 - (ad + be + cf + gfed) + adcf$$

有2条开路径：

$$G_1 = mab \quad G_2 = mgf$$

$\Delta_1 = 1$ (各环都与开路径 mab 有公共结点)

$\Delta_2 = 1$ (各环都与开路径 mgf 有公共结点)

$$\therefore H_{X_0X_3} = \frac{1}{\Delta} (G_1 \Delta_1 + G_2 \Delta_2) = \frac{mab + mgf}{1 - (ad + be + cf + gfed) + adcf}$$

可见：只要弄清了流图中各环与各条开路径之间的关系，运用Mason公式求总传输值比较简单。

本章小结

一、拉氏变换 及其收敛域

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \sigma_a < \sigma < \sigma_b$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \sigma_a < \sigma$$

$$f(t) = \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \right] \varepsilon(t)$$

二、拉氏变换 的基本性质

三、反拉氏变换

部分分式展开法、留数法

四、线性系统的拉氏变换分析法

运算法、通过系统函数求响应

五、线性系统的模拟

直接模拟、并联模拟、串联模拟

六、信号流图分析法

简化求解、用Mason公式求解

作业:

5.3(3)(5)(7) 5.26

5.9(c)(d) 5.10(a)(b) 5.11

5.4(2)(3)(5) 5.5(3)(4) 5.6(2)(4) 5.28

5.13(2)(4)(5) 5.14 5.15(3) 5.25

5.30 5.32(1)

5.33 5.34用梅森公式求

引言

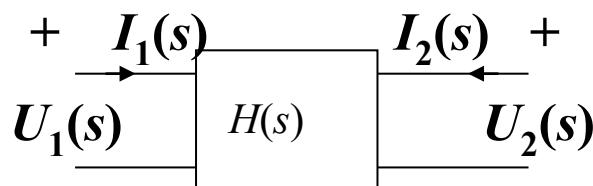
1. 系统函数 $H(s)$

定义: $H(s)$ 为零状态响应函数 $R(s)$ 与激励函数 $E(s)$ 之比 (系统的初始条件为零), 即

$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)}$ —— 系统特性在复频域中的表现形式

当 $s = j\omega$ 时, $H(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{E(j\omega)}$
—— 系统特性在频域中的表现形式

2. 系统函数的分类



(1) 策动点函数: $R(s)$ 、 $E(s)$ 属于同一端口
(输入函数) —— 输入阻抗 $Z_1(s)$ 和输入导纳 $Y_1(s)$

$$Z_1(s) = \frac{1}{Y_1(s)}$$

第六章 连续时间系统的系统函数

(2) 转移函数(传输函数): 激励和响应不属于同一端口

转移阻抗 $Z_{21t}(s) = \frac{U_2(s)}{I_1(s)}$ 转移导纳 $Y_{21t}(s) = \frac{I_2(s)}{U_1(s)}$

电压传输系数 $T_{u21}(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$

电流传输系数 $T_{i21}(s) = \frac{I_2(s)}{I_1(s)}$

3. 系统函数表示系统激励与响应之间的因果关系

复频域: $R(s) = H(s)E(s)$

时域: $r(t) = H(p)e(t)$

$$H(p) = H(s) \Big|_{s=p}$$

且 $h(t) \leftrightarrow H(s)$

本章内容：

- 系统函数的图形表示法
- 系统函数的零点和极点的分布与系统时域特性之间的关系
- 系统函数的极点、零点与系统频率特性之间的关系
- 系统的稳定性

第六章 连续时间系统的系统函数

一、系统函数的图形表示法

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

(一) 频响特性曲线

频率特性：系统在正弦信号激励下的某种稳态特性

频率响应函数 $H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$

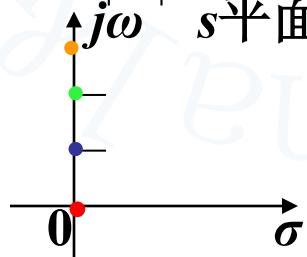
$$H(j\omega) = U(j\omega) + jV(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

幅频特性： $|H(j\omega)| \sim \omega$ 相频特性： $\varphi(\omega) \sim \omega$

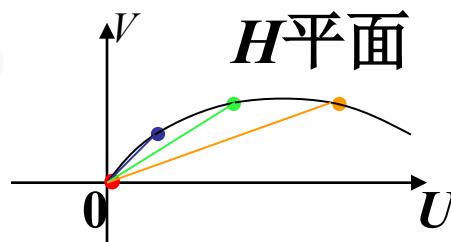
(二) 复轨迹(极坐标图)

在正弦信号激励下(即 $\sigma = 0, s = j\omega$)，复变量 s 在 s 平面上沿 $j\omega$ 轴变化 ($j0 \rightarrow j\infty$)，映射到 H 平面上得到的一条曲线称为系统函数的复轨迹(用极坐标表示)。

$$H(s) = |H| e^{j\varphi} = U + jV$$



$$U = \operatorname{Re}[H] \quad V = \operatorname{Im}[H]$$



第六章 连续时间系统的系统函数

例 RLC 并联网络 输入阻抗 $Z = |Z|e^{j\varphi} = U + jV$

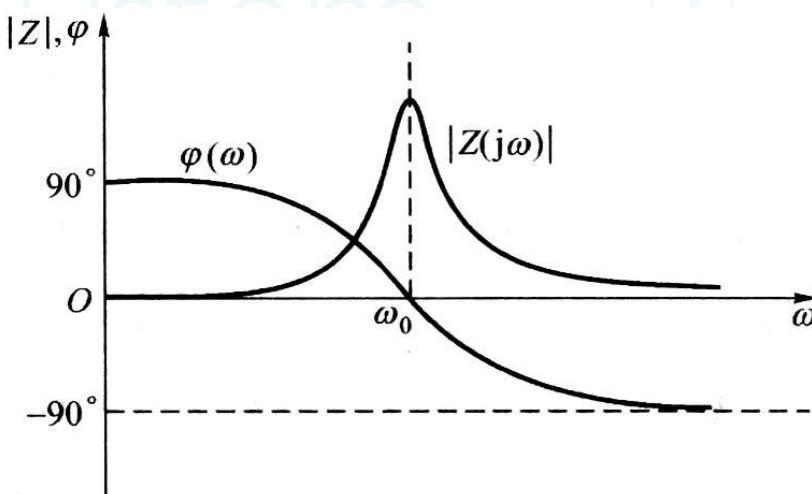
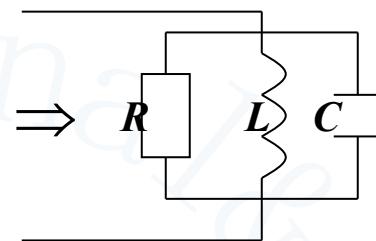
$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{j\omega LR}{R - RLC\omega^2 + j\omega L}$$

$$= \frac{j\omega LR}{R\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j\omega L} = \frac{R}{1 - j\frac{R}{\omega L}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}, \quad \text{其中 } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$|Z| = \frac{\omega LR}{\sqrt{R^2\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \omega^2 L^2}} \leq R,$$

$$\varphi = 90^\circ - \arctg \frac{\omega L}{R\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}$$

$$= \arctg \frac{\omega_0}{\omega L} = \arctg \frac{R}{L} \left(\frac{1}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0^2} \right)$$



频率特性

第六章 连续时间系统的系统函数

Z的实部和虚部满足： $(U - \frac{R}{2})^2 + V^2 = (\frac{R}{2})^2$

$\omega = 0$ 时， $|Z| = 0, \varphi = 90^\circ (0, 90^\circ)$

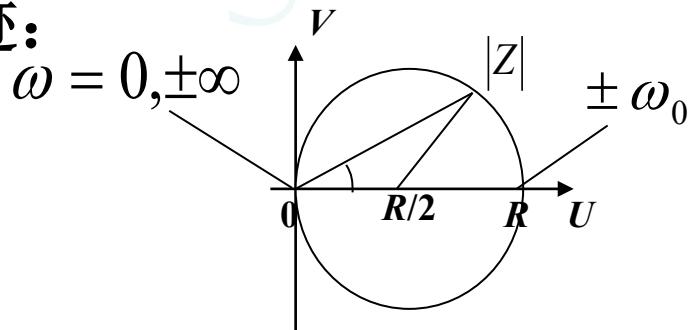
$\omega = \omega_0$ 时， $|Z| = R, \varphi = 0^\circ (R, 0)$

$\omega = \infty$ 时， $|Z| = 0, \varphi = -90^\circ (0, -90^\circ)$

$\omega : 0 \rightarrow \omega_0$ 时， $\varphi : 90^\circ \rightarrow 0^\circ$ (上半圆周)

$\omega : \omega_0 \rightarrow \infty$ 时， $\varphi : 0^\circ \rightarrow -90^\circ$ (下半圆周)

复轨迹：



即当 $s = j0 \rightarrow j\infty$ 时，复轨迹顺时针绕圆周一次
当时 $s = -j\infty \rightarrow j0$ ，复轨迹又顺时针绕圆周一次

(三) 极点零点图

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$H(s) = H_0 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad H_0 = \frac{b_m}{a_n}$$

$D(s) = 0$ 的根: p_1, p_2, \dots, p_n 称为函数 $H(s)$ 的极点, 使 $H(s) = \infty$

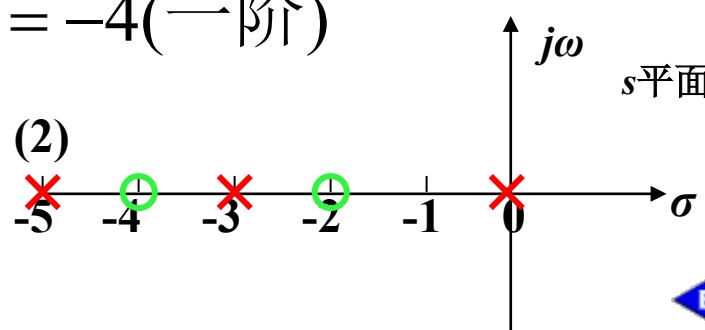
$N(s) = 0$ 的根: z_1, z_2, \dots, z_m 称为函数 $H(s)$ 的零点, 使 $H(s) = 0$

极零图: 把系统函数的极点和零点标绘在 s 平面上, 就成为极点零点分布图, 简称极零图。

例 $H(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{s(s+3)(s+5)^2}$

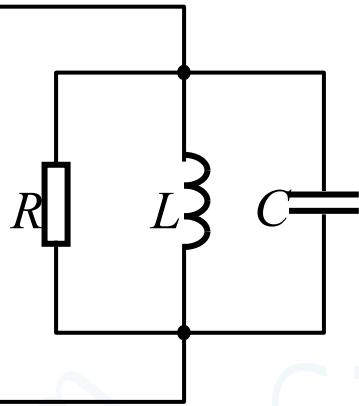
极点: $p_1 = 0$ (一阶), $p_2 = -3$ (一阶), $p_3 = -5$ (二阶)

零点: $z_1 = -2$ (一阶), $z_2 = -4$ (一阶)



第六章 连续时间系统的系统函数

又如并联 R 、 L 、 C 电路的阻抗函数(策动点阻抗)为

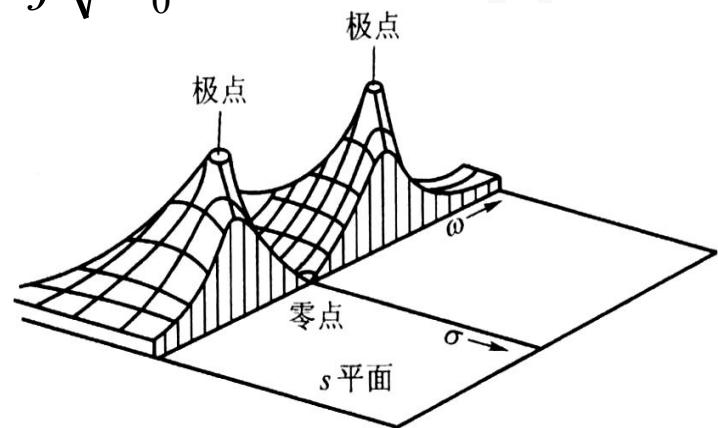
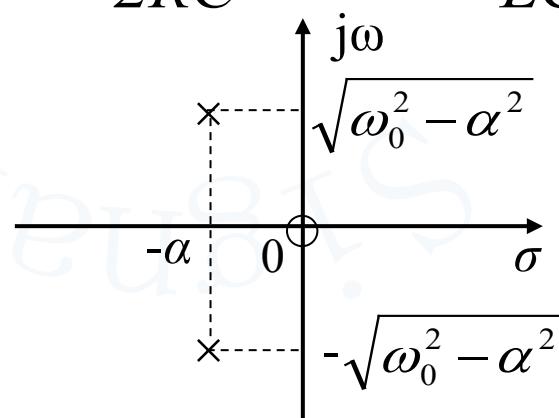


$$\begin{aligned} Z(s) &= \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{Ls} + Cs} = \frac{1}{C} \cdot \frac{s}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} \\ &= \frac{1}{C} \cdot \frac{s}{(s - p_1)(s - p_2)} \end{aligned}$$

这里, $H_0=1/C$, 零点是 $z=0$, 极点在 $\alpha < \omega_0$ 时
是成共轭对的复数

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

其中 $\alpha = \frac{1}{2RC}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

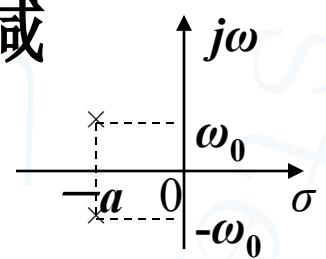
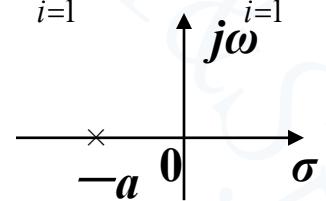


s 平面上的 $|Z|$ 曲面

第六章 连续时间系统的系统函数

二、系统函数极点和零点的分布与系统时域特性关系

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{H_0 \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s - p_i} \Rightarrow h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = \sum_{i=1}^n h_i(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{p_i t}$$



(一) 极点在左半 s 平面

1. 在实轴 $p_i = -a, a > 0$

$H_i(s) = \frac{k_i}{s + a} \Rightarrow h_i(t) = k_i e^{-at}$ ——按指数规律衰减

2. 不在实轴上 $p_i = -a \pm j\omega_0$

$H_i(s) = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega_0^2} \Rightarrow h_i(t) = e^{-at} \cos \omega_0 t$

——减幅的余弦振荡

(二) 极点在虚轴上

1. 在原点 $p_i = -a = 0$

$H_i(s) = \frac{1}{s} \leftrightarrow h_i(t) = \varepsilon(t)$

2. 不在原点上 $p_i = \pm j\omega_0$

$H_i(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \leftrightarrow h_i(t) = \cos \omega_0 t$ ——等幅振荡

第六章 连续时间系统的系统函数

(三) 极点在右半 s 平面

1. 在实轴上(正) $p_i = a, a > 0$

$$H_i(s) = \frac{k_i}{s-a} \Rightarrow h_i(t) = k_i e^{at} \text{ —— 按指数规律增长}$$

2. 不在实轴上(正) $p_i = a \pm j\omega_0, a > 0$

$$H_i(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega_0^2} \Rightarrow h_i(t) = e^{at} \cos \omega_0 t \text{ —— 增幅的余弦振荡}$$

三、系统函数的极点、零点与系统频率特性的关系

$$H(s) = H_0 \frac{(s-z_1)(s-z_2) \cdots (s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2) \cdots (s-p_n)}$$

$$\text{令 } s = j\omega, \text{ 得 } H(j\omega) = H_0 \frac{(j\omega-z_1)(j\omega-z_2) \cdots (j\omega-z_m)}{(j\omega-p_1)(j\omega-p_2) \cdots (j\omega-p_n)} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$j\omega, z_i, p_k$ 均为复数, 可用矢量表示

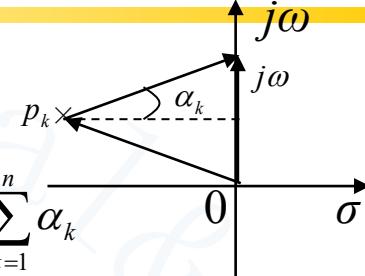
复因式
$$(j\omega-z_i) = \text{矢量 } j\omega \text{ 与 } z_i \text{ 之差} = z_i \text{ 点至 } j\omega \text{ 的矢量} = B_i e^{j\beta_i} \quad (A_k, B_i - \text{模})$$

(差矢量)
$$(j\omega-p_k) = \text{矢量 } j\omega \text{ 与 } p_k \text{ 之差} = p_k \text{ 点至 } j\omega \text{ 的矢量} = A_k e^{j\alpha_k} \quad (\alpha_k, \beta_i - \text{辐角})$$

第六章 连续时间系统的系统函数

$$H(j\omega) = H_0 \frac{B_1 B_2 \cdots B_m}{A_1 A_2 \cdots A_n} e^{j[(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)]}$$

幅频特性: $|H(j\omega)| = H_0 \frac{B_1 B_2 \cdots B_m}{A_1 A_2 \cdots A_n}$ 相频特性: $\phi(\omega) = \sum_{i=1}^m \beta_i - \sum_{k=1}^n \alpha_k$



例 求 G 、 L 、 C 并联电路的频率特性

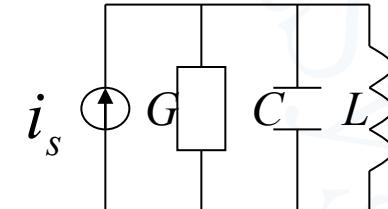
解: 1) 求输入阻抗并作其极零图

$$Z(s) = \frac{1}{G + sC + \frac{1}{sL}} = \frac{1}{C} \cdot \frac{s}{s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC}} = \frac{1}{C} \cdot \frac{s}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

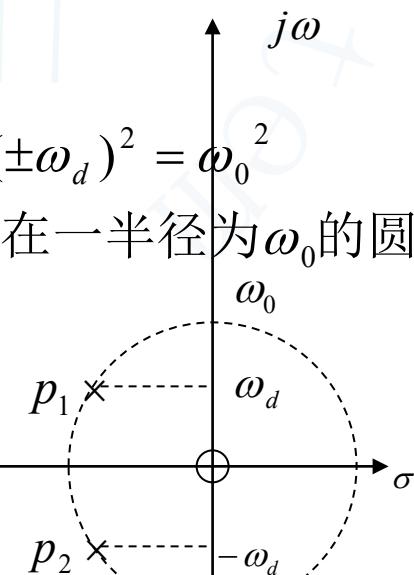
$$p_{1,2} = -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm j\omega_d$$

其中 $\alpha = \frac{G}{2C}$, $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

设 $\alpha < \omega_0$ (欠阻尼)—— p_1, p_2 为一对共轭复数



$$\begin{aligned} & \because \alpha^2 + (\pm\omega_d)^2 = \omega_0^2 \\ & \therefore p_1, p_2 \text{ 在一半径为 } \omega_0 \text{ 的圆上} \end{aligned}$$



2) 求 Z 的频响特性

$$Z(j\omega) = \frac{1}{C} \cdot \frac{j\omega}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)} = \frac{1}{C} \cdot \frac{(j\omega - 0)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)}$$

第六章 连续时间系统的系统函数

$$\begin{cases} |Z(j\omega)| = \frac{1}{C} \bullet \frac{B_1}{A_1 A_2} \\ \varphi(\omega) = 90^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2) (\beta_1 = 90^\circ \text{与 } \omega \text{ 无关}) \end{cases}$$

$\omega = 0$: $B_1 = 0, |Z| = 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \varphi(\omega) = 90^\circ$

$\omega = \infty$: $A_1, A_2, B_1 \rightarrow \infty, |Z| = 0, \alpha_1 + \alpha_2 \rightarrow 180^\circ, \varphi(\omega) \approx -90^\circ$

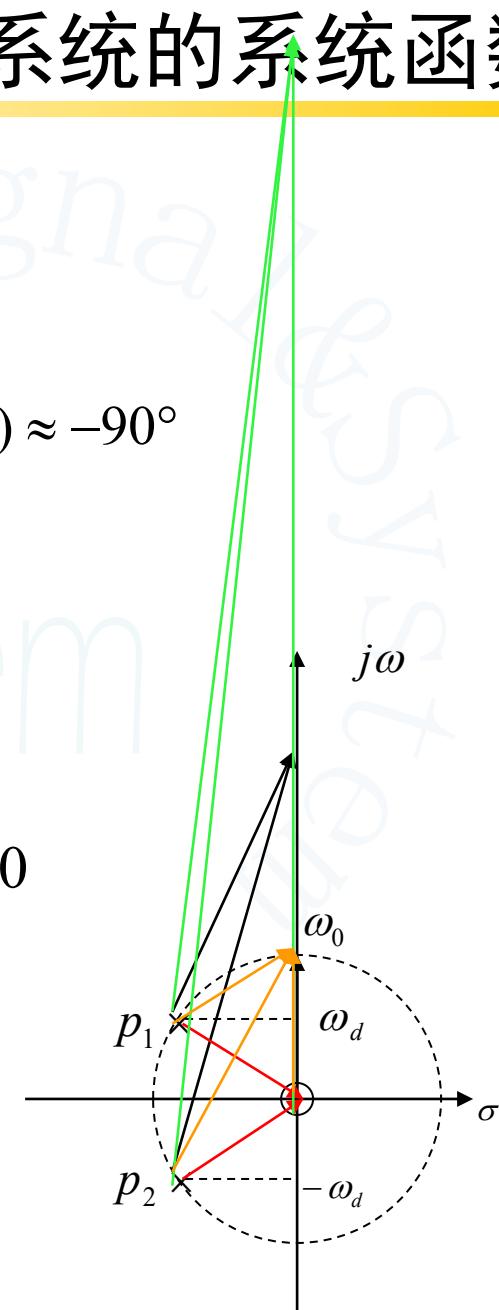
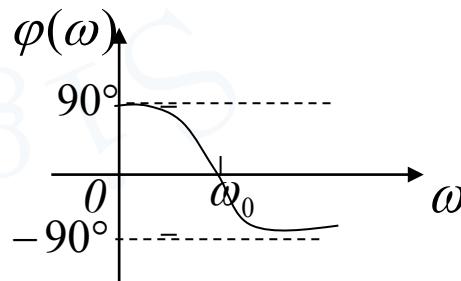
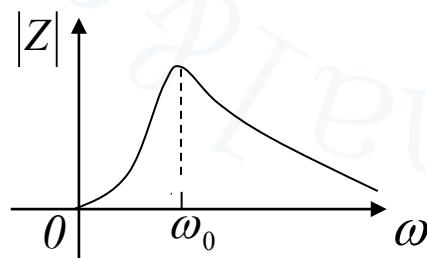
$\omega = \omega_0$: $|Z| = \text{最大值}, \alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ, \varphi(\omega) = 0$ (谐振)

$\omega < \omega_0$: $\alpha_1 + \alpha_2 < 90^\circ, \varphi(\omega) = + > 0$

$\omega \uparrow \begin{cases} B_1 \uparrow \uparrow, A_2 \uparrow, A_1 \text{ 先 } \downarrow (\omega < \omega_d) \text{ 后 } \uparrow (\omega > \omega_d) \Rightarrow |Z| \uparrow \\ \alpha_1 + \alpha_2 \uparrow \Rightarrow \varphi(\omega) \downarrow \end{cases}$

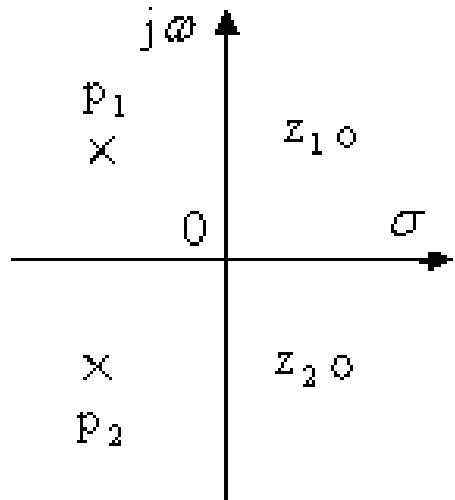
$\omega > \omega_0$: $\alpha_1 + \alpha_2 > 90^\circ, \varphi(\omega) = -[(\alpha_1 + \alpha_2) - 90^\circ] < 0$

$\omega \uparrow \begin{cases} B_1 \uparrow, A_2 \uparrow, A_1 \uparrow \Rightarrow |Z| \downarrow \\ \alpha_1 \uparrow + \alpha_2 \uparrow \Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2) \uparrow > 90^\circ \Rightarrow |\varphi(\omega)| \uparrow \end{cases}$



第六章 连续时间系统的系统函数

全通函数：在右半面的零点和在左半面的极点分别对虚轴互成镜像的网络函数。



$$p_1 = p_2^* = -z_2 = -z_1^*$$

$$\text{由于 } |H(j\omega)| = H_0 \frac{B_1 B_2 \cdots B_m}{A_1 A_2 \cdots A_n}$$

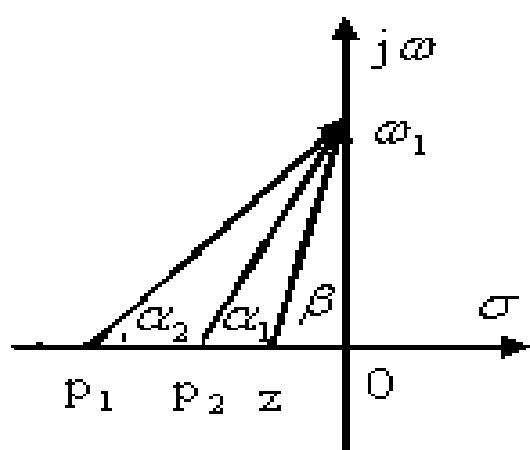
$$\text{于是 } |H(j\omega)| = H_0$$

即此种网络对各种频率的信号可以一视同仁的传输。
故常来做相位校正而不产生幅度失真。

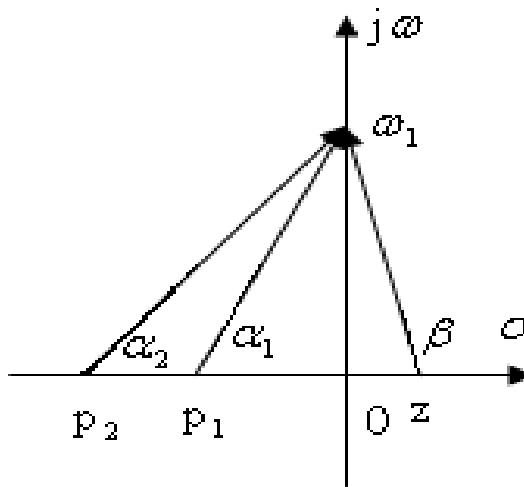
最小相移函数：全部极点和全部零点都在左半平面(包括虚轴)

非最小相移函数：至少有一个零点在右半平面

第六章 连续时间系统的系统函数



(a) 最小相移



(b) 非最小相移

按式 $\varphi(\omega) = \beta - (\alpha_1 + \alpha_2)$ 计算两者的相位

当频率由0变到 ∞ 时

从(a)图可以看出相位由 0° 减小到 -90°

从(b)图可以看出相位由 180° 减小到 -90°

四、系统的稳定性

(一) 稳定系统的定义及其条件

1. 定义:对于有限(有界)激励只能产生有限(有界)响应的系统称为稳定系统, 也叫有界输入有界输出(*BIBO*)稳定系统, 即

若激励 $|e(t)| \leq M_e, 0 \leq t < \infty$

则响应函数 $|r(t)| \leq M_r, 0 \leq t < \infty$

2. 条件: 系统稳定的充分和必要条件是: 系统的冲激响应绝对可积, 即

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt \leq M \quad (M \text{为正常数})$$

根据稳定条件: $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ (绝对可积)

故在时域 (1) $t \rightarrow \infty, h(t) \rightarrow 0$ (消失), 系统是稳定的

(2) $t \rightarrow \infty, h(t)$ 继续增长, 系统是不稳定的

(3) $t \rightarrow \infty, h(t) \rightarrow$ 有限值或等幅振荡, 系统为临(边)界稳定

第六章 连续时间系统的系统函数

相应地，在复频域：

- (1) $H(s)$ 的全部极点均分布在 s 左半平面——系统稳定
- (2) $H(s)$ 只要有一个极点分布在 s 右半平面——系统不稳定
- (3) $H(s)$ 的单阶极点分布在虚轴上——临界稳定

3. 稳定系统的性质

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

若 $n > m$, $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_m s^m}{a_n s^n} = 0$ 即 $H(s)$ 在无穷大处有一 $(n-m)$ 阶零点

若 $n < m$, $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_m s^m}{a_n s^n} \rightarrow \infty$ 即 $H(s)$ 在无穷大处有一 $(m-n)$ 阶极点

总的来说, $H(s)$ 的极点和零点的数目应该相等, 对于稳定系统, m 和 n 须满足:

$$m \leq n + 1 \begin{cases} m < n \\ m = n \\ m = n + 1 \end{cases} \quad m - n \leq 1$$

一般对零点无此限制, 对于策动点函数由于 $Z_i = \frac{1}{Y_i}$
故稳定系统 $\begin{cases} \text{策动点函数} |m-n| \leq 1 \\ \text{转移函数} m \leq n + 1 \end{cases}$

第六章 连续时间系统的系统函数

稳定系统 $H(s)$ 表示式中 $D(s)$ 系数 a_i 具有以下性质：

(i) a_i 全为正

(ii) $D(s)$ 无缺项 (可以 $a_0 = 0$)

缺 s 的全部奇数项或全部偶数项——临界稳定

例 (1) $H_1(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 4s^2 - 3s + 2}$ 不满足 (i) —— 不稳定

(2) $H_2(s) = \frac{s^3 + s^2 + s + 2}{2s^3 + 7s + 9}$ 不满足 (ii) —— 不稳定

(3) $H_3(s) = \frac{s^2 + 4s + 2}{3s^3 + s^2 + 2s + 8}$ 满足 (i)、(ii) 可能稳定

进一步确定: $D(s) = 3s^3 + s^2 + 2s + 8 = (s^2 - s + 2)(3s + 4)$

$$s^2 - s + 2 = (s - p_1)(s - p_2)$$

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{在右半平面}$$

$$3s + 4 = 0 \rightarrow p = -\frac{4}{3}$$

$\therefore H_3(s)$ 系统不稳定

以上两个性质是判断系统稳定的必要条件

第六章 连续时间系统的系统函数

(二) 罗斯-霍维茨(Routh-Hurwitz)准则(判据)

内容:若 $D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$

则 $D(s) = 0$ 的根全部位于 s 左半平面的充要条件是:

(i) $D(s)$ 的全部系数 a_i 为正, 无缺项;

(ii) 罗斯-霍维茨阵列中第一列数字 (A_i) 符号相同

$R-H$ 阵列: 第1行

A_n	a_n	B_n	a_{n-2}	C_n	a_{n-4}	D_n	a_{n-6}	\dots
A_{n-1}	a_{n-1}	B_{n-1}	a_{n-3}	C_{n-1}	a_{n-5}	D_{n-1}	a_{n-7}	\dots
A_{n-2}		B_{n-2}		C_{n-2}		D_{n-2}		\dots
A_{n-3}		B_{n-3}		C_{n-3}		D_{n-3}		\dots
:								
第 $(n-1)$ 行	A_2	B_2		0				
第 n 行	A_1	0		0				
第 $(n+1)$ 行	A_0	0		0				

其中 $A_n = a_n$, $A_{n-1} = a_{n-1}$, $B_n = a_{n-2}$, $B_{n-1} = a_{n-3}$, $C_n = a_{n-4}$, \dots

$$A_{n-2} = \frac{A_{n-1}B_n - A_nB_{n-1}}{A_{n-1}}, \quad B_{n-2} = \frac{A_{n-1}C_n - A_nC_{n-1}}{A_{n-1}}, \quad C_{n-2} = \frac{A_{n-1}D_n - A_nD_{n-1}}{A_{n-1}},$$

$$A_{n-3} = \frac{A_{n-2}B_{n-1} - A_{n-1}B_{n-2}}{A_{n-2}}, \quad B_{n-3} = \frac{A_{n-2}C_{n-1} - A_{n-1}C_{n-2}}{A_{n-2}}, \quad \dots$$

$$A_{i-1} = \frac{A_iB_{i+1} - A_{i+1}B_i}{A_i},$$

$$B_{i-1} = \frac{A_iC_{i+1} - A_{i+1}C_i}{A_i},$$

\dots

第六章 连续时间系统的系统函数

例1 $D(s) = (s+1)(s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 5s + 3 = 0$

$R-H$ 阵列:

1	3	5
2	4	3
$\frac{2 \times 3 - 1 \times 4}{2} = 1$	$\frac{2 \times 5 - 1 \times 3}{2} = \frac{7}{2}$	0
$\frac{1 \times 4 - 2 \times \frac{7}{2}}{2} = -3$	$\frac{1 \times 3 - 2 \times 0}{1} = 3$	0
$\frac{-3 \times \frac{7}{2} - 1 \times 3}{-3} = \frac{9}{2}$	$\frac{-3 \times 0 - 1 \times 0}{-3} = 0$	0
3	0	0

$R-H$ 阵列第一列系数两次变
换符号 ($1 \rightarrow -3 \rightarrow 9/2$) ,

故方程有两个正实部根,

由此可以判定与此特征方程对应
的系统不稳定。

例2 $D(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 = 0$

$R-H$ 阵列:

1	2	3	0
1	2	0	0
(0)	3	0	0
ϵ	3	0	0
$2 - 3/\epsilon$	0	0	
3	0		

此行首项为0, 用无穷小 ϵ 代替

排完阵列后再令 $\epsilon \rightarrow 0$ 从而加以判别

当 $\epsilon \rightarrow 0^+ (0-)$ 时, $2 - 3/\epsilon$ 为负(正)值, $R-H$ 数列变号两次,
即该系统有两个正实部根, 故系统不稳定。

第六章 连续时间系统的系统函数

例3 $D(s) = s^5 + s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + 2 = 0$

$R-H$ 阵列:

s^5	1	3	2
s^4	1	3	2
s^3	0	0	0
	4	6	0
s^2	3/2	2	0
s^1	2/3	0	
s^0	2	0	

此行元素全部为0, 说明虚轴上可能有极点

处理: 由全“0”的上一行组成辅助多项式: $s^4 + 3s^2 + 2$ 对其求导得 $4s^3 + 6s$ 以其系数代替全“0”

$R-H$ 数列无符号变化, 说明 s 右半平面无极点, 再来判断虚轴上的极点是否单阶极点。

原理: 辅助多项式必为原系统特征多项式的一个因式, 令它等于零所求得的根也必是原系统函数的极点, 这些极点可能分布于虚轴上(缺奇次幂项)。

由 $s^4 + 3s^2 + 2 = 0 \Rightarrow (s^2 + 1)(s^2 + 2) = 0$
 $s^2 = -1, -2$

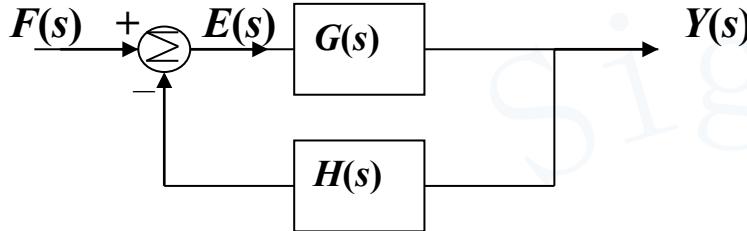
故而 $s_{1,2} = \sqrt{-1} = \pm j$ $s_{3,4} = \sqrt{-2} = \pm j\sqrt{2}$

即系统函数在虚轴上有4个单阶极点, 故系统临界稳定。

事实上: $D(s) = s^5 + s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + 2 = (s^4 + 3s^2 + 2)(s + 1) = 0$

第六章 连续时间系统的系统函数

例 4 反馈系统



放大器增益 $G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$ ，转移函数 $H(s) = K$
问当常数满足什么条件时，系统是稳定的？

解： $E(s) = F(s) - H(s)Y(s)$

$$Y(s) = E(s)G(s) = G(s)F(s) - G(s)H(s)Y(s)$$

反馈系统的传输函数(系统函数)：

$$T(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{(s-1)(s+2) + K}$$

$$D(s) = (s-1)(s+2) + K = s^2 + s + (K-2)$$

R-H阵列：

1	K-2	0
1	0	0
K-2	0	

由**R-H**判据知： $K-2 > 0$

即 $K > 2$ 时系统稳定

第六章 连续时间系统的系统函数

本章小结

一、系统函数的定义、分类和意义

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} \quad \text{当 } s = j\omega \text{ 时, } H(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{E(j\omega)}$$

二、系统函数的三种图示法

频率响应 $H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$ 、 复轨迹、零极图

三、由系统函数的零极点分布确定时域特性 [$h(t)$]

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{H_0 \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s - p_i} \Rightarrow h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = \sum_{i=1}^n h_i(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{p_i t}$$

四、由系统函数的零极点分布图画频响特性

$$H(j\omega) = H_0 \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \cdots (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \cdots (j\omega - p_n)} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

五、系统的稳定条件及其判据

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt \leq M \quad (M \text{ 为正常数})$$

Routh-Hurwitz准则

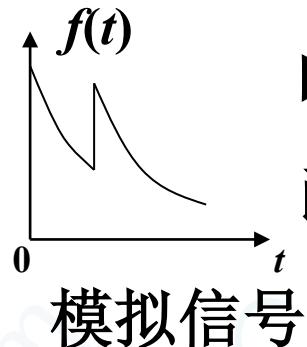
第六章 连续时间系统的系统函数

作业:

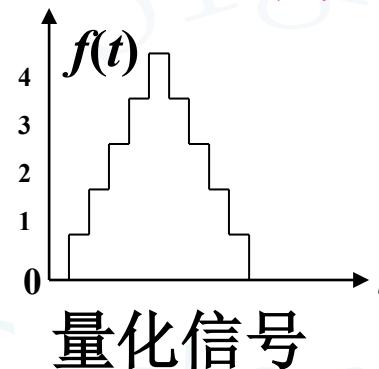
6.2 (a)(b) 6.7(c)(d) 6.9
6.15 6.20

引言

1. 连续时间信号是连续时间变量 t 的函数



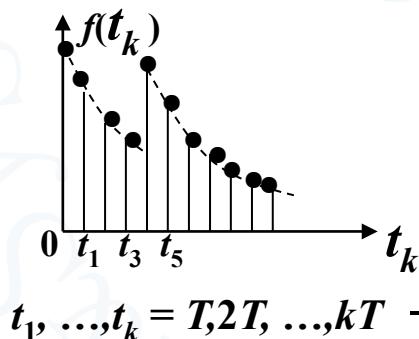
时间 t —— 连续
函数值 —— 连续



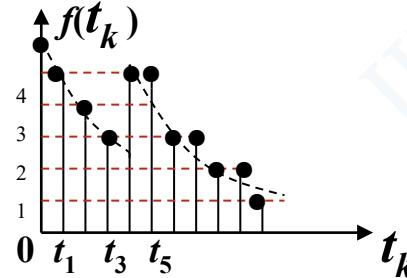
时间 t —— 连续
函数值 —— 离散

2. 离散信号是离散时间变量 t_k 的函数

离散时间信号可由对连续时间信号进行抽样得到



幅度量化



离散信号的特点：它是一个离散的数值序列，但序列中的每一数值仍按一定规律随离散变量 t_k 变化。

$$f(t_k) = f(kT) \rightarrow f(k)$$

例如, 设 $f(k) = a^k T$

当 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 等整数时, 得

-----、 a^{-2T} 、 a^{-T} 、1、 a^T 、 a^{2T} 、-----

如 a^{2T} 即为 $k = 2$ 或 $t = 2T$ 时的函数值 $f(2)$ 。

3. 离散信号的表示形式

(1) 解析式 例 $f_1(k) = 2(-1)^k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

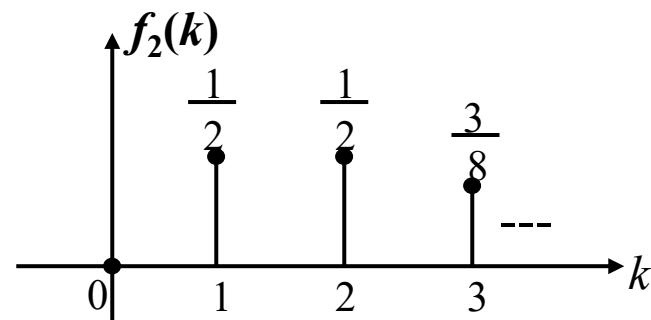
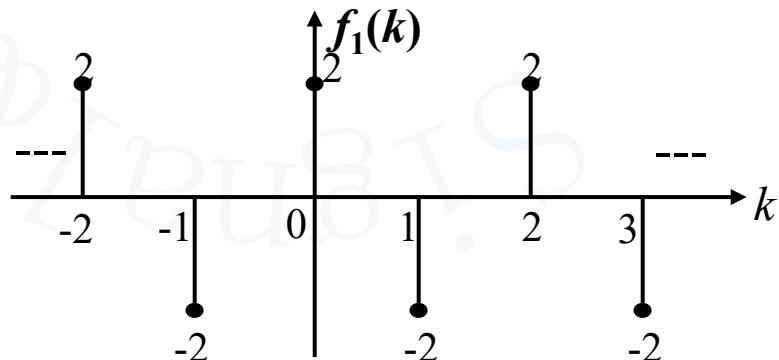
$f_2(k) = k(1/2)^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

(2) 序列形式

$$f_1(k) = \{ \dots, 2, -2, 2, -2, 2, -2, \dots \}$$

$$f_2(k) = \{ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \dots \}$$

(3) 图形



4. 离散信号的基本运算

(1) 离散信号的和、差、积

将两离散信号序号相同的样值相加、相减与相乘而构成一个新的离散信号(序列)。

例: $f_1(k) = (-1)^k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$
 $f_2(k) = k - 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

常记作

$$f_1(k) + f_2(k) = \begin{cases} (-1)^k & (k < 0) \\ (-1)^k + (k-1) & (k \geq 0) \end{cases}$$

$$f_1(k) - f_2(k) = \begin{cases} (-1)^k & (k < 0) \\ (-1)^k - (k-1) & (k \geq 0) \end{cases}$$

$$f_1(k)f_2(k) = (-1)^k (k-1) \quad (k \geq 0)$$

(2) 离散信号的反褶

将 $f(k)$ 的图形以纵轴为对称轴翻转 180° ，得到 $f(-k)$ 。

(3) 移序

将在 $f(k) \sim k$ 平面内的信号图形沿 k 轴向前(左)或向后(右)移动，这时信号各样值的序号都将增加或减少某个定值。

对一般离散信号 $f(k)$:

$f(k+1)$ —— $f(k)$ 前移(左移)一个序号 —— 增序

$f(k-1)$ —— $f(k)$ 后移(右移)一个序号 —— 减序

对于离散时间信号 $f(k)=f(kT)$:

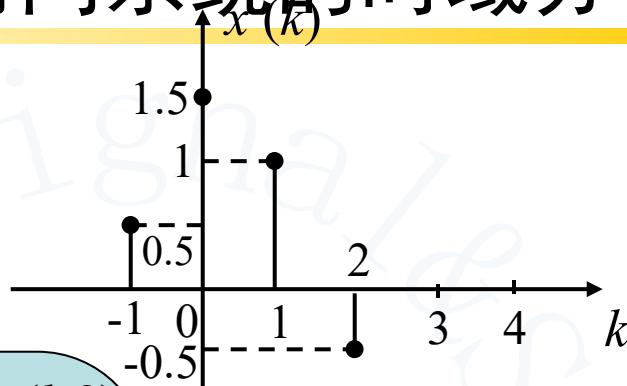
$f(k+1)=f(kT+T)$ —— 超前时间 T 【 $f(k+1)$ 比 $f(k)$ 提前 T 】

$f(k-1)=f(kT-T)$ —— 延迟时间 T 【 $f(k-1)$ 比 $f(k)$ 延时 T 】

第七章 离散时间系统的时域分析

例 已知

$$x(k) = \begin{cases} 0.5 & (k = -1) \\ 1.5 & (k = 0) \\ 1 & (k = 1) \\ -0.5 & (k = 2) \\ 0 & k \text{ 为其它值} \end{cases}$$



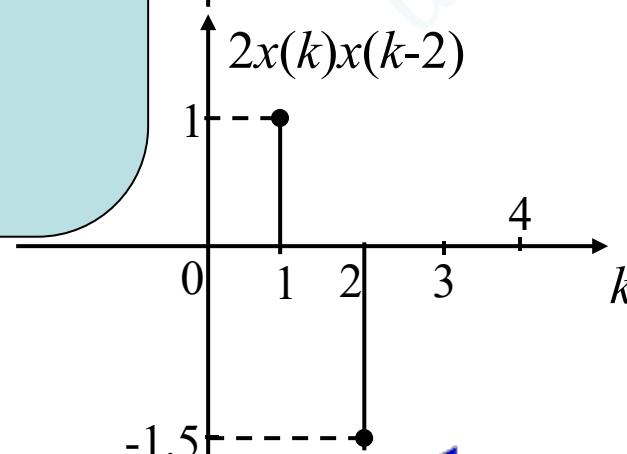
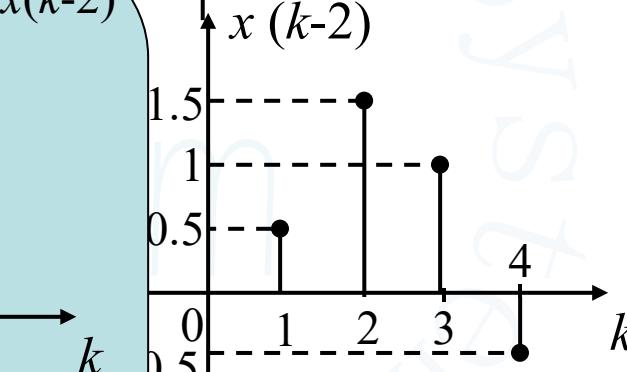
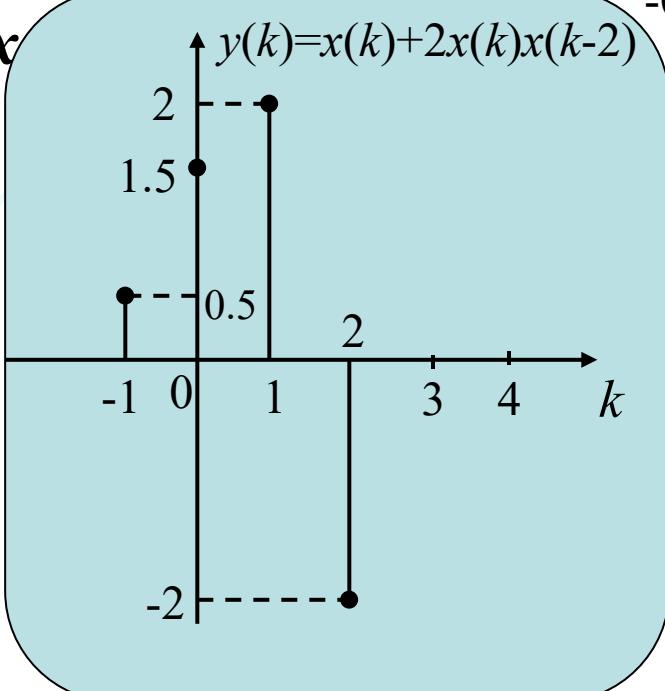
求 $y(k) = x(k) + 2x(k)x(k-2)$

解：

$$x(k-2) = \begin{cases} 0.5 & (k = -1) \\ 1.5 & (k = 0) \\ 1 & (k = 1) \\ -0.5 & (k = 2) \\ 0 & k \text{ 为其它值} \end{cases}$$

$$2x(k)x(k-2) = \begin{cases} 1 & (k = 0) \\ -1.5 & (k = 1) \\ 0 & k \text{ 为其它值} \end{cases}$$

$$y(k) = \begin{cases} 0.5 & (k = -1) \\ 1.5 & (k = 0) \\ 2 & (k = 1) \\ -2 & (k = 2) \\ 0 & k \text{ 为其它值} \end{cases}$$



(4) 序列差分

序列 $\{f(k)\}$ 的一阶前向差分 (Forward difference)

$\{\Delta f(k)\}$ 定义为: $\{\Delta f(k)\} = \{f(k+1) - f(k)\}$

一阶后向差分 (Backward difference) $\{\nabla f(k)\}$ 定义为

$\{\nabla f(k)\} = \{f(k) - f(k-1)\}$

依此类推, 二阶前向差分为

$$\begin{aligned}\{\Delta[\Delta f(k)]\} &= \{\Delta^2 f(k)\} \\ &= \{\Delta f(k+1) - \Delta f(k)\} = \{f(k+2) - 2f(k+1) + f(k)\}\end{aligned}$$

二阶后向差分为

$$\{\nabla^2 f(k)\} = \{\nabla f(k) - \nabla f(k-1)\} = \{f(k) - 2f(k-1) + f(k-2)\}$$

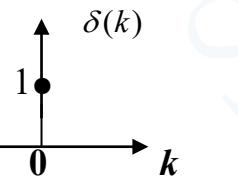
(5) $f(k)$ 的能量定义为

$$E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k)|^2$$

5. 常用典型离散时间信号

(1) 单位函数

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$



三者关系:

$$\varepsilon(k) = \delta(k) + \delta(k-1) + \delta(k-2) + \dots$$

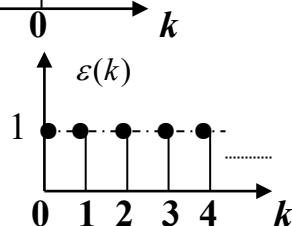
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \delta(k-j)$$

$$\delta(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)$$

$$G_N(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-N)$$

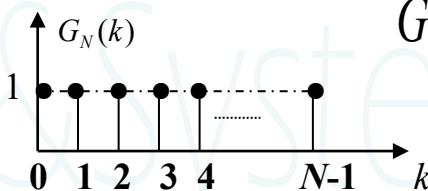
(2) 单位阶跃序列

$$\varepsilon(k) = \begin{cases} 1(k \geq 0) \\ 0(k < 0) \end{cases}$$

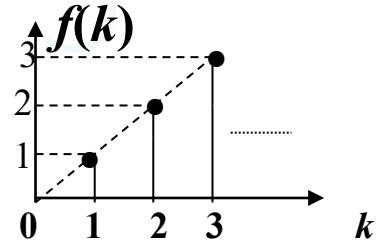


(3) 矩形序列

$$G_N(k) = \begin{cases} 1(0 \leq k \leq N-1) \\ 0(k < 0, k \geq N) \end{cases}$$



(4) 斜变序列



$$f(k) = k\varepsilon(k)$$

$a > 1$ 发散

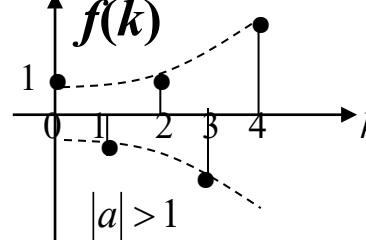
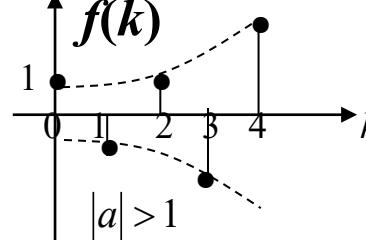
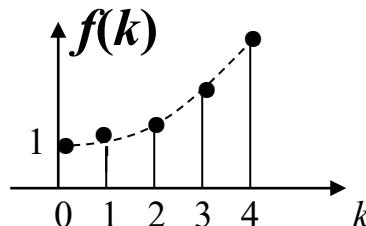
$a < 1$ 收敛

(5) 单边指数序列

$$f(k) = a^k \varepsilon(k)$$

$a > 0$, 序列值皆为正

$a < 0$, 序列值在正、负间摆动



(6) 正弦序列

$$f(k) = \sin(k\omega_0)\varepsilon(k)$$

$$f(k) = \sin k\omega_0 = \sin(k\omega_0 + 2m\pi)$$

$$= \sin[\omega_0(k + \frac{2m\pi}{\omega_0})] = \sin[\omega_0(k + mN)]$$

ω_0 ——正弦序列角频率 $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

仅当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ = 整数时，正弦序列具有周期 $N = \frac{2\pi}{\omega_0}$

当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ = 有理数而非整数，如 $\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{M}$ (N 、 M 为无公因子的整数) 时，正弦序列仍有周期性，但其周期为

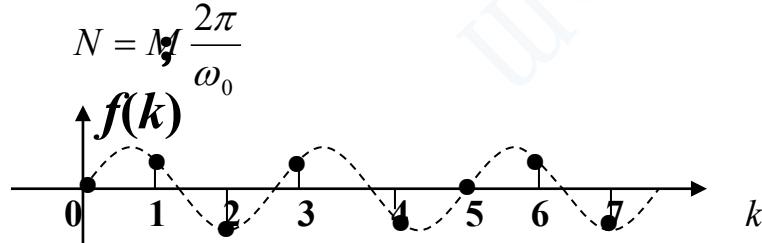
$$\text{如 } N = M \frac{2\pi}{\omega_0} = 5$$

$$\text{包络线的周期 } T = 2.5 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为无理数时，正弦序列不具有周期性，但其样值的包络线仍为正弦函数



周期 $T=N=10$

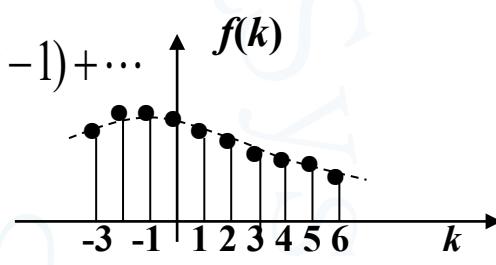


$$N = M \frac{2\pi}{\omega_0}$$

(7) 复指数序列

$$f(k) = e^{j\omega_0 k} = \cos\omega_0 k + j\sin\omega_0 k = |f(k)|e^{j\varphi_k} \quad \begin{cases} |f(k)| = 1 \\ \varphi_k = k\omega_0 \end{cases}$$

6. 离散信号的分解

$$\begin{aligned} f(k) &= \cdots + f(-3)\delta(k+3) + f(-2)\delta(k+2) + f(-1)\delta(k+1) + f(0)\delta(k) + f(1)\delta(k-1) + \cdots \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j)\delta(k-j) \end{aligned}$$


7. 线性非时(移)变离散时间系统

线性: 若 $e_1(k) \rightarrow y_1(k)$, $e_2(k) \rightarrow y_2(k)$

则 $c_1e_1(k) + c_2e_2(k) \rightarrow c_1y_1(k) + c_2y_2(k)$

非移变: 若 $e_1(k) \rightarrow y_1(k)$ 则 $e_1(k-i) \rightarrow y_1(k-i)$

线性非移变系统: 若 $e_1(k) \rightarrow y_1(k)$, $e_2(k) \rightarrow y_2(k)$

则 $c_1e_1(k-i) + c_2e_2(k-j) \rightarrow c_1y_1(k-i) + c_2y_2(k-j)$

本章内容：

- **中心问题：已知激励，求响应**
- **抽样信号与抽样定理**
- **离散时间系统的描述和模拟**
- **离散时间系统的时域分析**

一、抽样信号与抽样定理

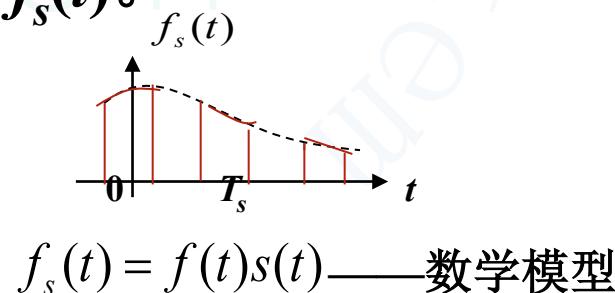
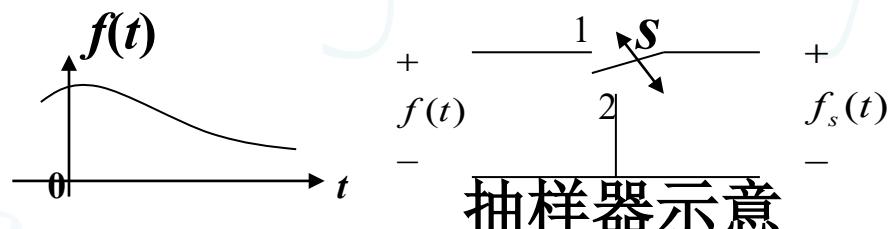
信号处理过程：



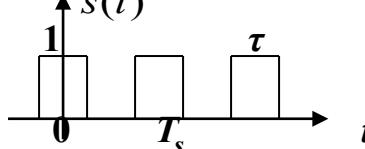
(一) 抽样信号及其频谱

抽样：所谓“抽样”就是利用取样脉冲序列 $s(t)$ 从连续时间信号 $f(t)$ 中“抽取”一系列离散样本值的过程。

抽样信号：经抽样得到的信号称为抽样信号 $f_s(t)$ 。



抽样器即是一开关 $s(t)$ ：



各抽样脉冲间隔的时间相同，均为 T_s —— 均匀抽样

抽样(取样)频率 $f_s = \frac{1}{T_s}$ 取样角频率 $\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s}$

第七章 离散时间系统的时域分析

问题：(1) $f_s(t)$ 的频谱函数如何？与 $f(t)$ 的频谱有何关系？

(2) 在什么条件下，可从 $f_s(t)$ 无失真地恢复 $f(t)$ ？

设 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega), s(t) \leftrightarrow s(j\omega), f_s(t) \leftrightarrow F_s(j\omega)$

则由频域卷积定理，得 $F_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * s(j\omega)$

将 $s(t)$ 展成付氏级数：

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\omega_s t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{jn\omega_s t} (s_n = \frac{\dot{A}_n}{2})$$

$$s_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} s(t) e^{-jn\omega_s t} dt$$

$$s(j\omega) = F \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{jn\omega_s t} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n F[e^{jn\omega_s t}] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$\therefore F_s(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [F(j\omega) * s_n \delta(\omega - n\omega_s)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n F[j(\omega - n\omega_s)]$$

抽样信号的频谱：其形状决定于 $F(j\omega)$ ，其幅度决定于 s_n ，且是 $F(j\omega)$ 以 ω_s 为周期重复的周期信号。而 s_n 只与 n 有关且取决于 $s(t)$ 形状。

第七章 离散时间系统的时域分析

1. 矩形脉冲抽样

$$s(t) = p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n e^{jn\omega_s t}$$

$$p_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{E\tau}{T_s} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right)$$

$$F_s(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n F[j(\omega - n\omega_s)] = \frac{E\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right) F[j(\omega - n\omega_s)]$$

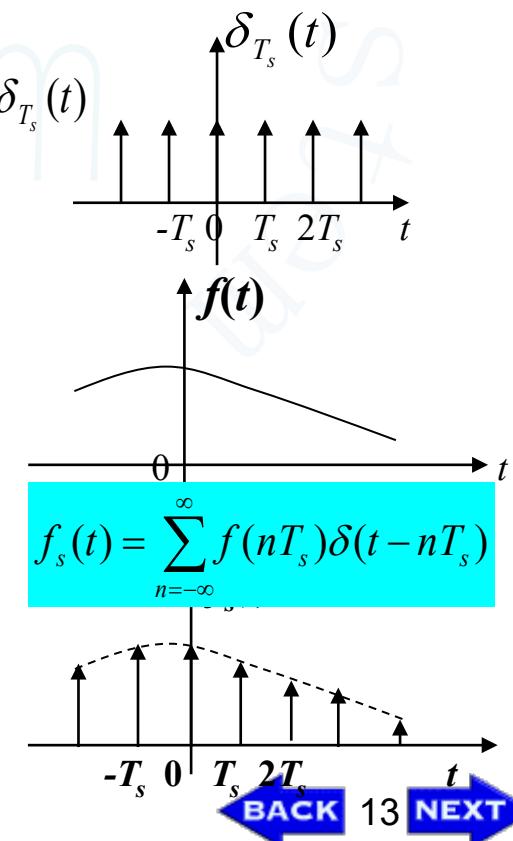
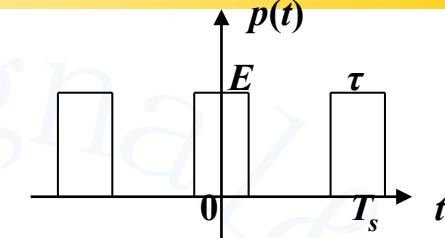
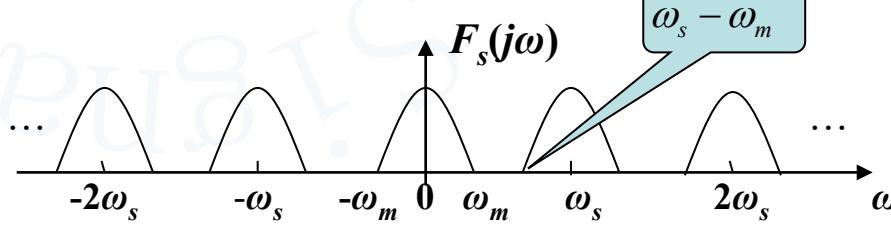
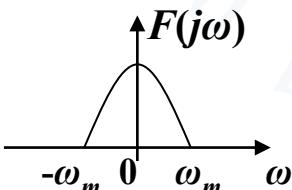
2. 冲激抽样

即取样脉冲序列 $s(t)$ 为周期是 T_s 的冲激函数序列 $\delta_{T_s}(t)$

$$s(t) = \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad \text{展成付氏级数} \quad = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{jn\omega_s t}$$

$$s_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta_{T_s}(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s} \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s}$$

$$F_s(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n F[j(\omega - n\omega_s)] = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[j(\omega - n\omega_s)]$$



(二) 由抽样信号重建原信号——抽样定理

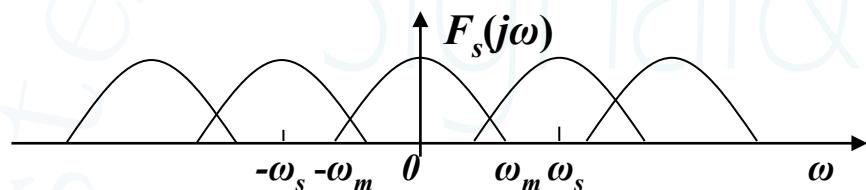
上述频谱图中: $\omega_s - \omega_m > \omega_m \Rightarrow \omega_s > 2\omega_m$

此时, 用一个理想低通滤波器就可以取出原信号的频谱, 从而在滤波器的输出端得到原信号。

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (\omega_c > \omega_m)$$

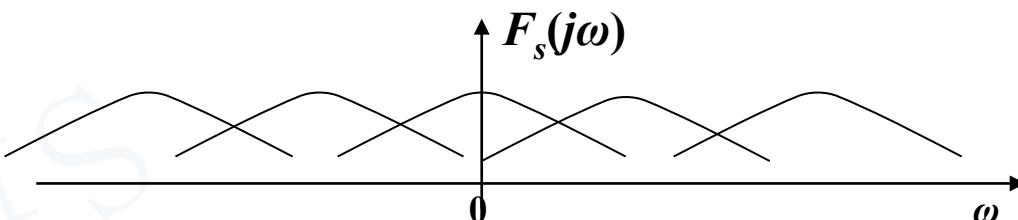
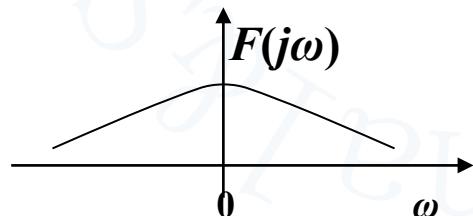
$$F(j\omega) = H(j\omega)F_s(j\omega) \Leftrightarrow f(t) = h(t) * f_s(t)$$

若 $\omega_s < 2\omega_m$



此时, 抽样信号的频谱发生混叠, 无法用低通滤波器恢复原信号

另外, 如果被抽样信号的频谱不是限定在有限带宽内, 则抽样信号的频谱也会发生混叠



第七章 离散时间系统的时域分析

重建原信号的必要条件是: 抽样信号的频谱不能混叠。则必须

(1) ω_m 有限 —— $f(t)$ 为有限频带信号(限带信号);

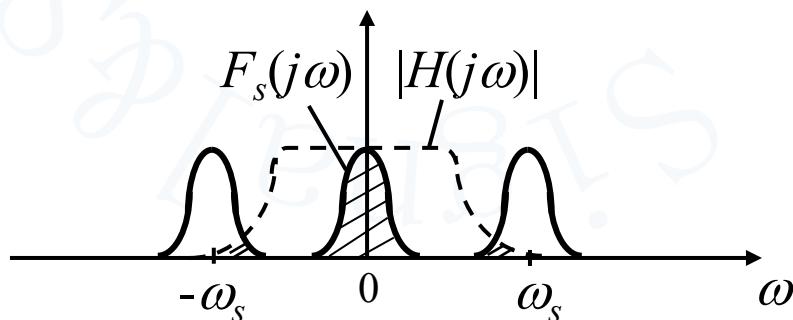
(2) 抽样频率 $\omega_s > 2\omega_m$

即 $f_s > 2f_m$, $f_{s\min} = 2f_m$ —— 奈奎斯特(香农)抽样频率

$T_s < \frac{1}{2f_m}$, $T_{s\max} = \frac{1}{2f_m}$ —— Nyquist (Shannon) 抽样间隔

均匀抽样定理(香农抽样定理):

一个频谱在区间 $(-\omega_m, \omega_m)$ 以外为零的频带有限信号 $f(t)$, 可唯一地由其在均匀间隔 T_s ($T_s < 1/2f_m$) 上的样点值 $f(nT_s)$ 确定。当这样的抽样信号通过其截止频率 ω_c 满足条件 $\omega_m < \omega_c < \omega_s - \omega_m$ 的低通滤波器后, 可以将原信号完全重建。



解决办法:

(1) 提高 ω_s 。

(2) 使用高阶滤波器。

二、离散时间系统的描述和模拟

(一) 离散系统的数学模型——差分方程

连续时间系统的数学模型——微分方程

微分方程: 一阶 $y'(t) + y(t) = e(t)$

差分方程: 一阶 $y(k+1) + y(k) = e(k)$ ——前向形式

$y(k) + y(k-1) = e(k)$ ——后向形式

问题: 怎样由离散系统得到描述该系统的差分方程?

例1 一质点沿水平方向作直线运动, 其在某一秒内所走过的距离等于前一秒所走过距离的2倍, 试列出该质点行程的方程式。

解: 设 k 秒末, 质点的位移为 $y(k)$

某一秒: 第 $(k+1)$ 秒 → 第 $(k+2)$ 秒

距离 $[y(k+2) - y(k+1)]$

前一秒：第 k 秒 \rightarrow 第 $(k+1)$ 秒

距离 $[y(k+1) - y(k)]$

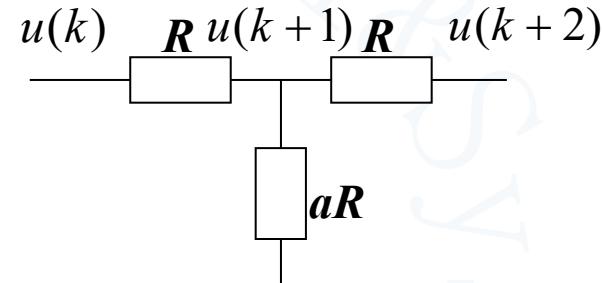
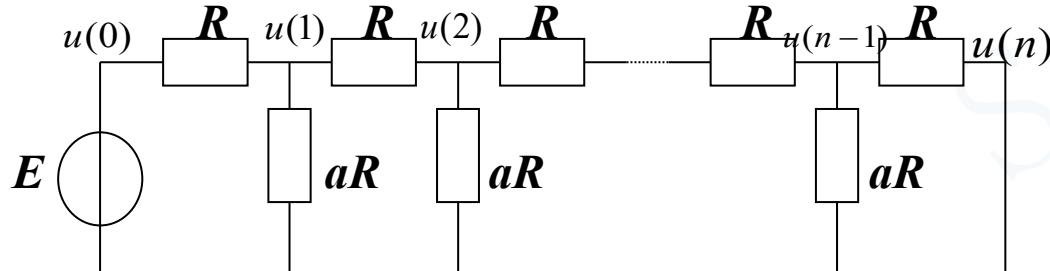
依题意： $y(k+2) - y(k+1) = 2[y(k+1) - y(k)]$

即 $y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 0$

差分方程是处理离散变量的函数关系的一种数学工具，但离散变量并不限于时间变量。

例 2 下图示出电阻梯形网络，其中每一串臂电阻都为 R ，每一并臂电阻值都为 aR ， a 为某一正实数。每个节点对地的电压为 $u(k)$ ， $k = 0, 1, 2, \dots, n$ 。已知两边界节点电压为 $u(0) = E$ ， $u(n) = 0$ 。试写出求第 k 个节点电压的差分方程式。

第七章 离散时间系统的时域分析



解：为了写出此系统的差分方程，
画出系统中第 $k+1$ 个节点。

对于任一节点 $k+1$ ，运用**KCL**不难写出

$$\frac{u(k+1)}{aR} = \frac{u(k) - u(k+1)}{R} + \frac{u(k+2) - u(k+1)}{R}$$

再经整理即得该系统的差分方程

$$u(k+2) - \frac{2a+1}{a}u(k+1) + u(k) = 0$$

再利用 $u(0) = E$, $u(n) = 0$ 两个边界条件，即可求得 $u(k)$ 。

差分方程与微分方程在形式上相似！

第七章 离散时间系统的时域分析

比较 $\frac{dy(t)}{dt} = -Ay(t) + Be(t)$

与 $y(k+1) = -ay(k) + be(k)$

可看出, 若 $y(k)$ 与 $y(t)$ 相当, 则 $y(k+1)$ 与 $y'(t)$ 相当。在一定条件下可相互转化。

一阶微分方程 $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = e(t) \cdots (1)$

考虑离散值 (T 足够小): $\frac{dy(t)}{dt} = \frac{y(t+T) - y(t)}{T}$

令 $t = 0, T, 2T, \dots, kT$

$t \rightarrow kT: e(t) \rightarrow e(kT) = e(k),$

$y(t) \rightarrow y(kT) = y(k), y(t+T) \rightarrow y[(k+1)T] = y(k+1)$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{y[(k+1)T] - y(kT)}{T}$$

第七章 离散时间系统的时域分析

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{y(k+1) - y(k)}{T} = \frac{1}{T}y(k+1) - \frac{1}{T}y(k) = A_1y(k+1) + A_0y(k)$$

代入(1)式得：

$$y(k+1) - (1-T)y(k) = Te(k) \Rightarrow y(k+1) = (1-T)y(k) + Te(k)$$

差分方程的阶数：差分方程中未知函数中变量的最高和最低序号的差数。

二阶： $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{T}\left[\frac{y(t+2T) - y(t+T)}{T} - \frac{y(t+T) - y(t)}{T}\right]$

$$= \frac{1}{T^2}y(k+2) - \frac{2}{T^2}y(k+1) + \frac{1}{T^2}y(k)$$

n 阶： $= A_2y(k+2) + A_1y(k+1) + A_0y(k)$

$$\frac{d^n y}{dt^n} = A_n y(k+n) + A_{n-1} y(k+n-1) + \cdots + A_0 y(k)$$

*n*阶微分方程：

$$A_n \frac{d^n y}{dt^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + A_1 \frac{dy}{dt} + A_0 y = B_m \frac{d^m e}{dt^m} + B_{m-1} \frac{d^{m-1} e}{dt^{m-1}} + \cdots + B_0 e$$

*T*足够小时可近似为差分方程：

$$\begin{aligned} a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \cdots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) \\ = b_m e(k+m) + b_{m-1} e(k+m-1) + \cdots + b_1 e(k+1) + b_0 e(k) \end{aligned}$$

(二) 差分方程的算子形式

连续系统的微分算子： $p = \frac{d}{dt}$, $p^n = \frac{d^n}{dt^n}$, $\frac{1}{p} = \int dt$

定义： $py(t) = \frac{dy}{dt}$

*n*阶微分方程的算子形式：

$$(A_n p^n + A_{n-1} p^{n-1} + \cdots + A_0) y(t) = (B_m p^m + B_{m-1} p^{m-1} + \cdots + B_0) e(t)$$

第七章 离散时间系统的时域分析

$$y(t) = \frac{N(p)}{D(p)} e(t), \quad H(p) = \frac{y(t)}{e(t)} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

离散系统移序算子: S

定义: $Sy(k) = y(k+1)$, $S^n y(k) = y(k+n)$, $\frac{1}{S}y(k) = y(k-1)$

n 阶差分方程的算子形式:

$$(a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \cdots + a_0) y(k) = (b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \cdots + b_0) e(k)$$

$$y(k) = \frac{N(S)}{D(S)} e(k)$$

$$H(S) = \frac{y(k)}{e(k)} = \frac{N(S)}{D(S)} \quad \text{——离散时间系统的转移算子}$$

(三) 离散时间系统的模拟

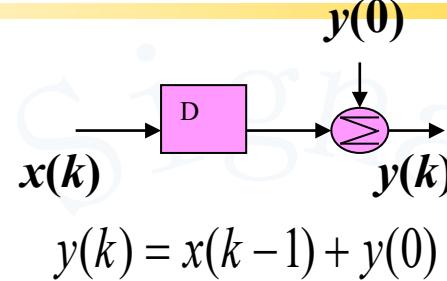
离散时间系统基本运算单元:

延时器、标量乘法器、加法器

延时器: $x(k) \rightarrow \boxed{D} \rightarrow y(k)$

$$y(k) = \frac{1}{S} x(k) = x(k-1)$$

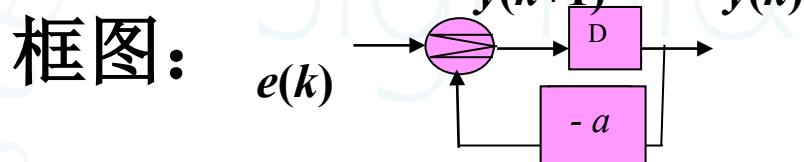
初始状态为零



初始状态不为零

1. 一阶差分方程的模拟

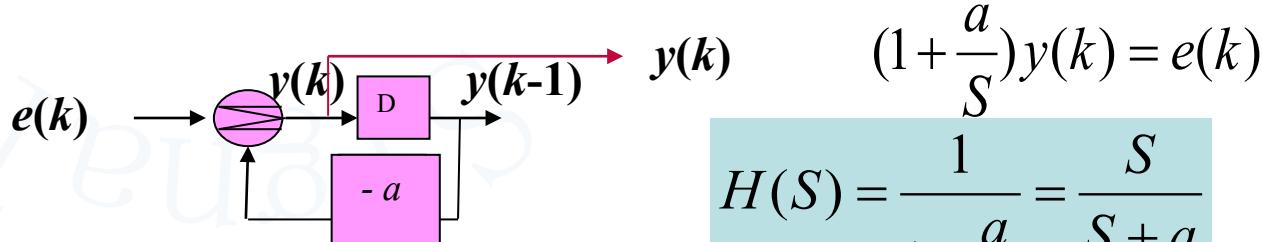
前向: $y(k+1) + ay(k) = e(k) \Rightarrow y(k+1) = -ay(k) + e(k)$



$$H(S) = \frac{1}{S + a}$$

与连续时间系统的模拟框图非常相似(延时器代替积分器!)

后向: $y(k) + ay(k-1) = e(k) \Rightarrow y(k) = -ay(k-1) + e(k)$



$$H(S) = \frac{1}{1 + \frac{a}{S}} = \frac{S}{S + a}$$

2. n 阶差分方程的模拟

$$\begin{aligned} & y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_1y(k+1) + a_0y(k) \\ &= b_m e(k+m) + \cdots + b_1e(k+1) + b_0e(k) \\ (S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \cdots + a_1S + a_0)y(k) &= (b_mS^m + b_{m-1}S^{m-1} + \cdots + b_1S + b_0)e(k) \\ H(S) &= \frac{b_mS^m + b_{m-1}S^{m-1} + \cdots + b_1S + b_0}{S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \cdots + a_1S + a_0} \end{aligned}$$

引进辅助函数 $q(k)$:

$$\begin{cases} e(k) = (S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \cdots + a_1S + a_0)q(k) \\ y(k) = (b_mS^m + b_{m-1}S^{m-1} + \cdots + b_1S + b_0)q(k) \end{cases}$$

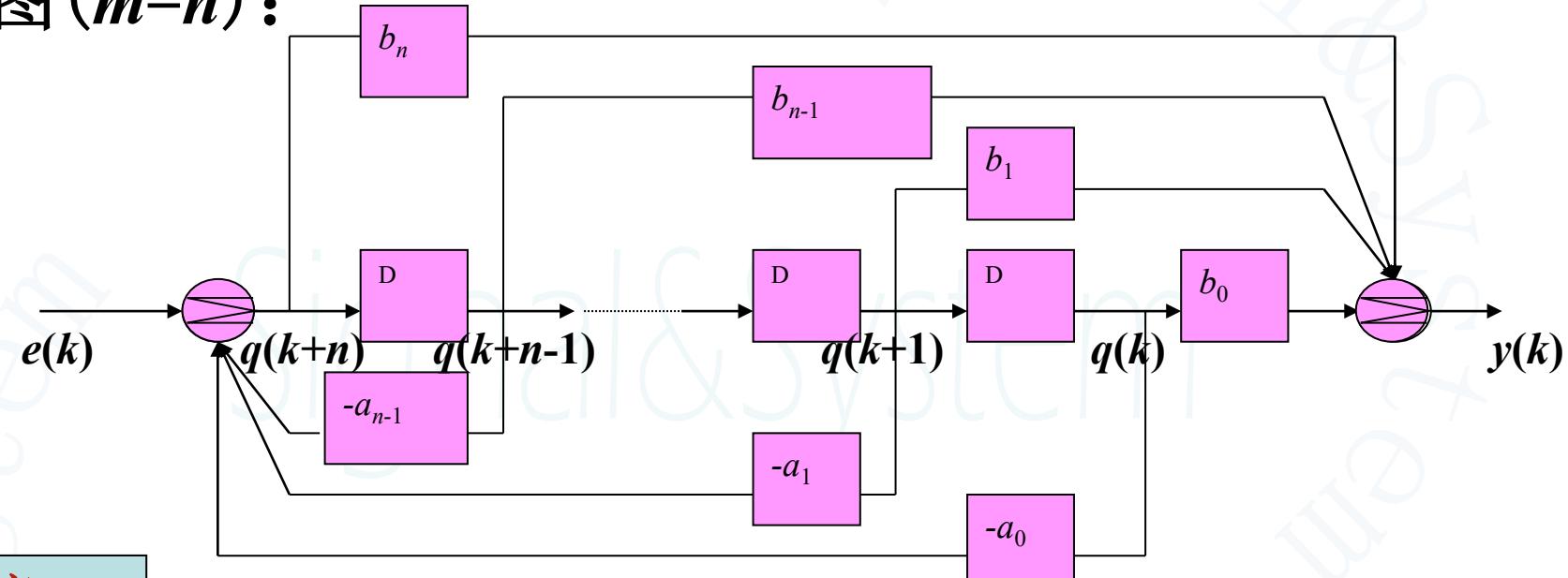
即 $e(k) = q(k+n) + a_{n-1}q(k+n-1) + \cdots + a_1q(k+1) + a_0q(k)$

$$y(k) = b_mq(k+m) + b_{m-1}q(k+m-1) + \cdots + b_1q(k+1) + b_0q(k)$$

第七章 离散时间系统的时域分析

$$q(k+n) = -a_{n-1}q(k+n-1) - \cdots - a_1q(k+1) - a_0q(k) + e(k)$$

框图 ($m=n$) :



注意：

在连续时间系统中,可能 $m > n$; 但在离散时间系统中,
 $m \leq n$

如 $y(k) = e(k+1) + e(k)$ ($n=0, m=1$) 意味着 k 时刻的响应依赖于 $(k+1)$ 时刻的激励

三、离散时间系统的时域分析

离散时间系统的分析方法：

1) 迭代法：

以初始值为起点 $y(-1)=0 \rightarrow y(0) \rightarrow y(1) \rightarrow y(2) \rightarrow \dots$

2) 时域经典法：

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k)$$

3) 分别求零输入响应和零状态响应(时域卷积和)：

全响应=零输入响应+零状态响应

4) 变换域解法：

Z变换

(一) 迭代法

例 $y(k) - a y(k-1) = x(k)$, $y(-1) = 0$, $x(k) = \delta(k)$, 求 $y(k)$

解: $y(k) = a y(k-1) + \delta(k)$

$$k = 0: y(0) = a y(0-1) + \delta(0) = 1$$

$$k = 1: y(1) = a y(1-1) + \delta(1) = a y(0) = a$$

$$k = 2: y(2) = a y(1) + \delta(2) = a y(1) = a^2$$

$$\begin{matrix} \vdots & \vdots \end{matrix}$$

$$y(k) = a^k, k \geq 0$$

$\therefore y(k) = a^k \varepsilon(k)$ (公比为 a 的等比序列)

(二) 零输入响应 $y_{zi}(k)$

1. 零输入响应的求取

一阶: $y(k+1) + a y(k) = e(k)$, 已知 $y_{zi}(0)$, 求 $y_{zi}(k)$

第七章 离散时间系统的时域分析

$$y_{zi}(k+1) + a y_{zi}(k) = 0 \quad (S + a) y_{zi}(k) = 0$$

$$y_{zi}(k+1) = -a y_{zi}(k)$$

$$\frac{y_{zi}(k+1)}{y_{zi}(k)} = -a \stackrel{\text{令}}{=} \gamma \quad (S - \gamma) y_{zi}(k) = 0$$

此式表明: $y_{zi}(k)$ 是一个公比为 γ ($= -a$) 的等比序列

$$\therefore y_{zi}(k) = c\gamma^k = c(-a)^k$$

$$\text{求 } c: \quad y_{zi}(0) = c(-a)^0 = c$$

$$\therefore y_{zi}(k) = y_{zi}(0)(-a)^k$$

$$n\text{阶: } y_{zi}(k+n) + a_{n-1}y_{zi}(k+n-1) + \dots + a_0y_{zi}(k) = 0$$

$$(S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \dots + a_1S + a_0) y_{zi}(k) = 0$$

$$\text{单根: } (S - \gamma_1)(S - \gamma_2) \dots (S - \gamma_n) y_{zi}(k) = 0$$

第七章 离散时间系统的时域分析

$$(S - \gamma_i) y_{Zi}(k) = 0 \quad y_{Zi}(k) = c_i \gamma_i^k$$

$$y_{Zi}(k) = \sum_{i=1}^n c_i \gamma_i^k$$

m 阶重根的情况：

$$(S - \gamma_1)^m (S - \gamma_{m+1}) \dots (S - \gamma_n) y_{Zi}(k) = 0$$

$$y_{Zi}(k) = (c_1 + c_2 k + \dots + c_m k^{m-1}) \gamma_1^k + c_{m+1} \gamma_{m+1}^k + \dots + c_n \gamma_n^k$$

c_1, c_2, \dots, c_n 由初始条件 $y_{Zi}(0), y_{Zi}(1), \dots, y_{Zi}(n-1)$ 确定

例1 已知 $y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = e(k+2)$,
 $y_{Zi}(0) = 1$, $y_{Zi}(1) = 4$, 求 $y_{Zi}(k)$

解: (1) 求特征根, 写出 $y_{Zi}(k)$ 的表达式

$$S^2 - 5S + 6 = (S - 2)(S - 3) = 0$$

第七章 离散时间系统的时域分析

$$\gamma_1 = 2, \gamma_2 = 3 \quad y_{zi}(k) = c_1 2^k + c_2 3^k$$

(2) 求 c_1, c_2 :

$$\left. \begin{array}{l} y_{zi}(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ y_{zi}(1) = c_1 2 + c_2 3 = 4 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} c_1 = -1, c_2 = 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} y_{zi}(k) &= (-1)(2)^k + 2(3)^k = 2(3)^k - (2)^k, k \geq 0 \\ &= [2(3)^k - (2)^k] \varepsilon(k) \end{aligned}$$

例2 已知 $y_{zi}(k+2) + 4y_{zi}(k+1) + 4y_{zi}(k) = 0$, $y_{zi}(0) = y_{zi}(1) = 2$, 求 $y_{zi}(k)$

解: $S^2 + 4S + 4 = 0 \rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 = -2$

$$y_{zi}(k) = (c_1 + c_2 k)(-2)^k$$

$$\left. \begin{array}{l} y_{zi}(0) = c_1 = 2 \\ y_{zi}(1) = (c_1 + c_2)(-2) = 2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} c_1 = 2, c_2 = -3 \end{array} \right.$$

$$y_{zi}(k) = [(2 - 3k)(-2)^k] \varepsilon(k)$$

2. 系统的自然响应和稳定

系统的零输入响应是系统无外激励时的自然响应：

$$y_{Zi}(k) = c \gamma^k$$

系统的稳定性由特征根 γ 确定

(1) γ = 实数

$|\gamma| < 1$ 时, $y_{Zi}(k)$ 收敛(响应随 k 增大而减小) —— 稳定

$|\gamma| > 1$ 时, $y_{Zi}(k)$ 发散(响应幅度随 k 增大而增大) —— 不稳定

$|\gamma| = 1$ 时, $y_{Zi}(k)$ 有界 $\left\{ \begin{array}{l} \gamma = 1 \text{ 时, } y_{Zi}(k) = c \\ \gamma = -1 \text{ 时, } y_{Zi}(k) = -c, c, -c, c, \dots \end{array} \right\}$

(2) γ = 复数 —— 临界稳定

设 $\gamma = |\gamma| e^{j\phi_\gamma} = e^{\lambda T} = e^{(\alpha + j\beta)T}$

其中 $|\gamma| = e^{\alpha T}$, $\phi_\gamma = \beta T$

$$\gamma^k = |\gamma|^k e^{jk\phi_\gamma} = e^{\alpha k T} \bullet e^{j\beta k T}$$

第七章 离散时间系统的时域分析

当 γ_1, γ_2 为一对共轭复根时

$$\gamma_1^k = e^{(\alpha+j\beta)kT} = e^{\alpha kT} [\cos \beta kT + j \sin \beta kT]$$

$$\gamma_2^k = e^{(\alpha-j\beta)kT} = e^{\alpha kT} [\cos \beta kT - j \sin \beta kT]$$

γ_1^k, γ_2^k 组成变幅正弦序列 ($\gamma_1^k + \gamma_2^k = 2e^{\alpha kT} \cos \beta kT$)

角频率 $\beta = \frac{\varphi_\gamma}{T}$

当 $\alpha < 0$ 时, $|\gamma| < 1$ 自然响应为减幅振荡, 系统稳定

当 $\alpha > 0$ 时, $|\gamma| > 1$ 自然响应为增幅振荡, 系统不稳定

当 $\alpha = 0$ 时, $|\gamma| = 1$ 自然响应为等幅振荡, 系统临界稳定

如把特征根 γ 画入一个复数平面内 (Z平面), 则系统是否稳定决定于确定的Z平面中的点是否在该平面的单位圆之内

$|\gamma| < 1$ 时, 特征根位于单位圆内, 系统稳定

$|\gamma| > 1$ 时, 特征根位于单位圆外, 系统不稳定

$|\gamma| = 1$ 时, 特征根位于单位圆上, 系统临界稳定

(三) 单位函数响应 $h(k)$

$e(k) = \delta(k)$ 时的零状态响应

1. 迭代法 $e(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$

一阶: $y(k+1) - \gamma y(k) = e(k), m < n$

即 $h(k+1) - \gamma h(k) = \delta(k)$

$$H(S) = \frac{1}{S - \gamma}$$

$k = -1$: $h(0) - \gamma h(-1) = 0$
 $\therefore h(-1) = 0$ (因果律)

$$\therefore h(0) = 0$$

$k = 0$: $h(1) - \gamma h(0) = 1 \rightarrow h(1) = 1$

$k = 1$: $h(2) - \gamma h(1) = 0 \rightarrow h(2) = \gamma$

$k = 2$: $h(3) - \gamma h(2) = 0 \rightarrow h(3) = \gamma^2$

⋮

$$h(k) = \gamma^{k-1} \varepsilon(k-1) \dots (I)$$

$$y(k+1) - \gamma y(k) = e(k+1)$$

$$h(k+1) - \gamma h(k) = \delta(k+1)$$

即

$$H(S) = \frac{S}{S - \gamma}$$

同样可得:

$$h(k) = \gamma^k \varepsilon(k) \dots (II)$$

2. 看作特定条件下的零输入响应 ($k > 0$ 时) 求解

例 已知 $y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = e(k+2)$, 求 $h(k)$

解: (1) 写出它的表达式: $h(k+2) - 5h(k+1) + 6h(k) = \delta(k+2)$

$\delta(k+2)$ 只在 $k+2 = 0$ 即 $k = -2$ 时取值为1, 其它 k 值时, 其值均为0

当 $k > 0$ 时, 此系统相当于一个具有某种初始条件的零输入系统

$$h(k) = c_1 \gamma_1^k + c_2 \gamma_2^k = c_1 (2)^k + c_2 (3)^k, k \geq 0$$

(2) 求初始条件: 用迭代法

$$h(k+2) = 5h(k+1) - 6h(k) + \delta(k+2)$$

$$k = -2: h(0) = 5h(-1) - 6h(-2) + \delta(0) = 1$$

$$k = -1: h(1) = 5h(0) - 6h(-1) + \delta(1) = 5$$

(3) 求 c_1 , c_2 和 $h(k)$

$$\begin{cases} h(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ h(1) = 2c_1 + 3c_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 3 \end{cases}$$

$$\therefore h(k) = -2(2)^k + 3(3)^k, k \geq 0 \text{ 或 } h(k) = (3^{k+1} - 2^{k+1})\varepsilon(k)$$

3. 通过 $H(S)$ 求 $h(k)$

n 阶 : $D(S) y(k) = N(S) e(k)$

$$H(S) = \frac{y(k)}{e(k)} = \frac{N(S)}{D(S)} = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \dots + b_1 S + b_0}{S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0}$$

$m < n$ 且单根 :

$$H(S) = \sum_{r=1}^n \frac{A_r}{S - \gamma_r} \Rightarrow h(k) = \sum_{r=1}^n A_r \gamma_r^{k-1} \varepsilon(k-1)$$

$m = n$:

$$H(S) = \sum_{r=1}^n \frac{S A_r}{S - \gamma_r} \Rightarrow h(k) = \sum_{r=1}^n A_r \gamma_r^k \varepsilon(k)$$

例1 已知 $y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = e(k+2) - 3e(k)$, 求 $h(k)$

解 : $(S^2 - 5S + 6)y(k) = (S^2 - 3)e(k)$

$$H(S) = \frac{S^2 - 3}{S^2 - 5S + 6} = 1 + \frac{5S - 9}{S^2 - 5S + 6} = 1 + \frac{6}{S-3} - \frac{1}{S-2}$$

$e(k) = \delta(k)$ 时, $y(k) = h(k)$

$$h(k) = \delta(k) + 6(3)^{k-1} \varepsilon(k-1) - 2^{k-1} \varepsilon(k-1)$$

第七章 离散时间系统的时域分析

例2 已知 $H(S) = \frac{S(7S-2)}{(S-0.5)(S-0.2)}$ 求 $h(k)$

解: $m = n$

[方法一] 用基本形式(I)求

$$H(S) = \frac{S(7S-2)}{(S-0.5)(S-0.2)} = 7 + \frac{2.5}{S-0.5} + \frac{0.4}{S-0.2}$$

$$\begin{aligned} h(k) &= 7\delta(k) + 2.5(0.5)^{k-1}\varepsilon(k-1) + 0.4(0.2)^{k-1}\varepsilon(k-1) \\ &= 7\delta(k) + [5(0.5)^k + 2(0.2)^k]\varepsilon(k-1) \end{aligned}$$

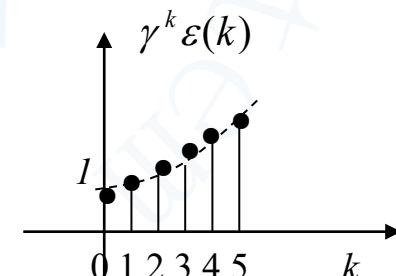
[方法二] $k = 0$ 时, $h(k) = h(0) = 7$

$$\frac{H(S)}{S} = \frac{7S-2}{(S-0.5)(S-0.2)} = \frac{5}{S-0.5} + \frac{2}{S-0.2}$$

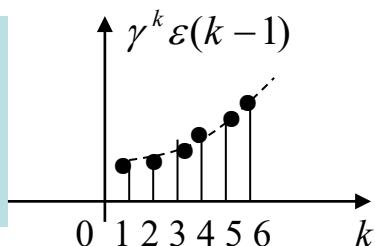
$$H(S) = \frac{5S}{S-0.5} + \frac{2S}{S-0.2}$$

$$h(k) = [5(0.5)^k + 2(0.2)^k]\varepsilon(k)$$

$$\gamma^k \varepsilon(k) = \delta(k) + \gamma^k \varepsilon(k-1)$$



$k = 0$ 时,
 $h(k) = h(0) = 7$



第七章 离散时间系统的时域分析

(四) 零状态响应

连续系统： 激励 $e(t) = \int_{0^-}^t e(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$

$$y_{ZS}(t) = e(t) * h(t) = \int_{0^-}^t e(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

离散系统： $e(k)$ 有始信号

分解 $e(k) = e(0)\delta(k) + e(1)\delta(k-1) + \dots + e(j)\delta(k-j) + \dots$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} e(j)\delta(k-j)$$

$$\delta(k) \rightarrow h(k)$$

线性非移变： $c\delta(k-j) \rightarrow ch(k-j)$

$$y_{ZS}(k) = e(0)h(k) + e(1)h(k-1) + \dots + e(j)h(k-j) + \dots$$

$$= \sum_{j=0}^k e(j)h(k-j)$$
 因果系统($k < 0$ 时 $h(k) = 0$)

$$= e(k) * h(k) = h(k) * e(k)$$
 -----卷积和, 离散卷积

卷积和求取方法：

- ①查表, 表7-1
- ②用定义求
- ③用表格求
- ④图解法
- ⑤多项式乘法

第七章 离散时间系统的时域分析

例1 已知 $f(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ $h(k) = \begin{cases} k, & k = 0, 1, 2, 3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

求两序列卷积和

解: [方法一] 用定义式求

$$y(k) = f(k) * h(k) = \sum_{j=0}^k f(j)h(k-j)$$

$$k=0: \quad y(0) = \sum_{j=0}^0 f(j)h(k-j) = f(0)h(0) = 0$$

$$k=1: \quad y(1) = \sum_{j=0}^1 f(j)h(k-j) = f(0)h(1) + f(1)h(0) = 1$$

$$k=2: \quad y(2) = \sum_{j=0}^2 f(j)h(k-j) = f(0)h(2) + f(1)h(1) + f(2)h(0) = 3$$

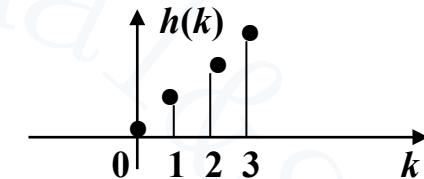
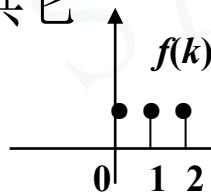
$$k=3: \quad y(3) = f(0)h(3) + f(1)h(2) + f(2)h(1) + f(3)h(0) = 1 \times 3 + 1 \times 2 + 1 \times 1 + 0 \times 0 = 6$$

$$y(4) = 5$$

$$y(5) = 3$$

$$y(6) = 0$$

...



第七章 离散时间系统的时域分析

[方法二] 用“序列阵表格”求

$h(k)$	$f(k)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	\dots	$y(0)$	$y(1)$	$y(2)$	$y(3)$	$y(4)$	$y(5)$	$y(6)$
$h(0)$		$f(0)y(0)$	$f(1)y(1)$	$f(2)y(2)$	$f(3)y(3)$								
$h(1)$		$f(0)h(1)$	$f(1)h(1)$	$f(2)h(1)$	$f(3)h(1)$	0							
$h(2)$		$f(0)h(2)$	$f(1)h(2)$	$f(2)h(2)$	$f(3)h(2)$	0							
$h(3)$		$f(0)h(3)$	$f(1)h(3)$	$f(2)h(3)$	$f(3)h(3)$	0							
:		0	0	0	0	0							

[方法三] 多项式乘法

$$\begin{array}{r} f(k) = \{1, 1, 1\} \\ \uparrow \\ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \\ \times \quad \quad 1 \ 1 \ 1 \\ \hline 0 \ 1 \ 2 \ 3 \\ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \\ + \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \\ \hline 0 \ 1 \ 3 \ 6 \ 5 \ 3 \end{array}$$

$$h(k) = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$f(k)*h(k) = \{0, 1, 3, 6, 5, 3\}$$

第七章 离散时间系统的时域分析

[方法四] 图解法

$$y(k) = f(k) * h(k) = \sum_{j=0}^k f(j)h(k-j)$$

褶迭 → 平移 → 相乘 → 取和

$$y(0) = f(0)h(0) = 0$$

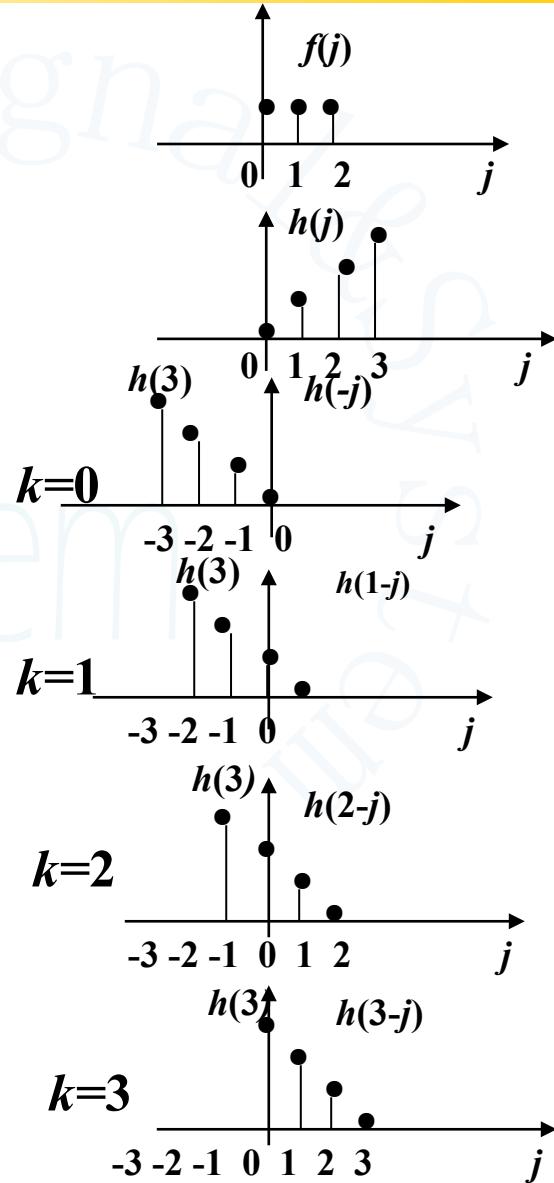
$$y(1) = f(0)h(1) + f(1)h(0) = 1$$

$$y(2) = h(2)f(0) + h(1)f(1) + h(0)f(2) = 3$$

$$y(3) = \sum_{j=0}^3 f(j)h(3-j) = 3 + 2 + 1 = 6$$

...

...



第七章 离散时间系统的时域分析

例2 已知 $e(k) = G_N(k), h(k) = \gamma^k \varepsilon(k), 0 < \gamma < 1$

求零状态响应 $y_{ZS}(k)$

解：[方法一]由定义式求

$$y_{ZS}(k) = e(k) * h(k) = G_N(k) * \gamma^k \varepsilon(k) = \sum_{j=0}^k G_N(j) \gamma^{k-j}$$

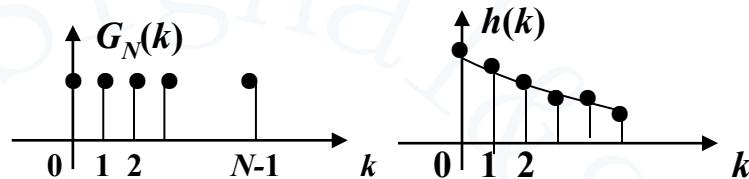
(1) 当 $0 < k < N-1$ j 从 $0 \sim k$: $G_N(j) = 1$

$$y_{ZS}(k) = \sum_{j=0}^k G_N(j) \gamma^{k-j} = \sum_{j=0}^k \gamma^{k-j} = \gamma^k \sum_{j=0}^k \gamma^{-j} = \gamma^k (1 + \gamma^{-1} + \gamma^{-2} + \cdots + \gamma^{-k})$$

$$= \gamma^k \cdot \frac{1 - \gamma^{-(k+1)}}{1 - \gamma^{-1}} = \frac{\gamma^{-1} - \gamma^k}{\gamma^{-1} - 1} \quad (> 0 \text{ 且随 } k \text{ 的增加而增加})$$

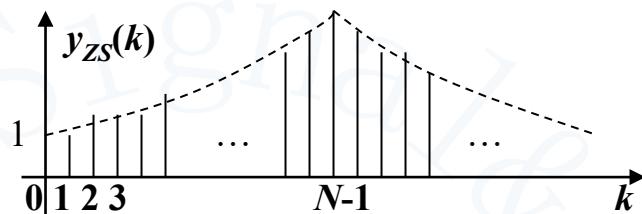
(2) 当 $k \geq N-1$

$$G_N(j) = \begin{cases} 1, & j \leq N-1 \\ 0, & j > N-1 \end{cases}$$



第七章 离散时间系统的时域分析

$$\begin{aligned}y_{ZS}(k) &= \sum_{j=0}^k G_N(j) \gamma^{k-j} = \sum_{j=0}^{N-1} G_N(j) \gamma^{k-j} + \sum_{j=N}^k G_N(j) \gamma^{k-j} \\&= \sum_{j=0}^{N-1} \gamma^{k-j} = \gamma^k \sum_{j=0}^{N-1} \gamma^{-j} \\&= \gamma^k (1 + \gamma^{-1} + \gamma^{-2} + \cdots + \gamma^{-(N-1)}) \\&= \gamma^k \cdot \frac{1 - \gamma^{-N}}{1 - \gamma^{-1}} = \frac{\gamma^{k-N} - \gamma^k}{\gamma^{-1} - 1} (> 0 \text{ 且随 } k \text{ 的增加而减小})\end{aligned}$$



[方法二] 查表结合卷积代数运算

$$\begin{cases} f(k) * \delta(k) = f(k) \\ f(k) * \delta(k-m) = f(k-m) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}y_{ZS}(k) &= G_N(k) * \gamma^k \varepsilon(k) = [\varepsilon(k) - \varepsilon(k-N)] * \gamma^k \varepsilon(k) \\&= \{\delta(k) + \delta(k-1) + \cdots + \delta[k-(N-1)]\} * \gamma^k \varepsilon(k) \\&= \gamma^k \varepsilon(k) + \gamma^{k-1} \varepsilon(k-1) + \cdots + \gamma^{k-(N-1)} \varepsilon[k-(N-1)]\end{aligned}$$

当 $k \geq N-1$ 时, $y_{ZS}(k) = \gamma^k [1 + \gamma^{-1} + \cdots + \gamma^{-(N-1)}]$

当 $k \leq N-1$ 时, $y_{ZS}(k) = \gamma^k \varepsilon(k) + \gamma^{k-1} \varepsilon(k-1) + \cdots + \gamma^{k-k} \varepsilon(k-k) = \gamma^k (1 + \gamma^{-1} + \cdots + \gamma^{-k})$

(五) 离散时间系统的因果性和稳定性

离散线性时不变系统作为因果系统的充分必要条件是

$$h(k) = 0 \text{ (当 } k < 0 \text{)}$$

或写成 $h(k) = h(k)\varepsilon(k)$

在离散时间系统的应用中，某些数据处理过程的自变量虽为时间，但是待处理的数据可以记录并保存起来。这时，不一定局限于用因果系统处理信号，可借助非因果系统。此外，若自变量不是时间(例如对某些图象处理信号)，也可能遇到非因果系统。

稳定系统的定义为：若输入是有界的，输出必定也是有界的系统。

对于离散时间系统，稳定的充分必要条件是单位函数响应绝对可和，即

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \leq M \quad (M \text{ 为有界正值})$$

第七章 离散时间系统的时域分析

既满足稳定条件又满足因果条件的离散时间系统的单位函数响应是单边的而且是有界的，即

$$\begin{cases} h(k) = h(k)\varepsilon(k) \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \leq M \end{cases}$$

如 $h(k) = a^k \varepsilon(k)$ 则该系统是因果的

若 $|a| < 1$ 则该系统是稳定的

若 $|a| > 1$ 则该系统是不稳定的

若 $|a| = 1$ 则该系统称为临界稳定 此时 $h(k) = \varepsilon(k)$

若激励 $e(k) = \varepsilon(k)$

则系统的零状态响应 $y_{zs}(k) = (1+k)\varepsilon(k)$ 系统不稳定

例 已知离散系统的差分方程 $y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = e(k)$ ，初始状态 $y(-1) = 0$ ， $y(-2) = 1/6$ ，激励 $e(k) = \cos(k\pi)\varepsilon(k) = (-1)^k \varepsilon(k)$ ，求系统的零输入响应、零状态响应和全响应，并判断系统是否稳定。

第七章 离散时间系统的时域分析

解：(1) 求零输入响应 $y_{Zi}(k)$

$y_{Zi}(k)$ 满足： $y_{Zi}(k) - y_{Zi}(k-1) - 2y_{Zi}(k-2) = 0$
及 $y_{Zi}(-1) = y(-1) = 0$ ，

$$y_{Zi}(-2) = y(-2) = 1/6$$

由迭代法可得： $y_{Zi}(0) = y_{Zi}(-1) + 2y_{Zi}(-2) = 1/3$

$$y_{Zi}(1) = y_{Zi}(0) + 2y_{Zi}(-1) = 1/3$$

两个单根： $\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 2$ (由 $1 - s^{-1} - 2s^{-2} = 0$ 求得)

故有 $y_{Zi}(k) = C_1(-1)^k + C_2(2)^k$

将 $y_{Zi}(0), y_{Zi}(1)$ 代入求得 $C_1 = 1/9, C_2 = 2/9$

$$\therefore y_{Zi}(k) = \frac{1}{9}(-1)^k + \frac{2}{9}(2)^k, k \geq 0$$

(2) 求单位函数响应 $h(k)$ 和零状态响应

第七章 离散时间系统的时域分析

$$\therefore H(S) = \frac{\frac{1}{3}S}{S+1} + \frac{\frac{2}{3}S}{S-2} \quad \therefore h(k) = \left[\frac{1}{3}(-1)^k + \frac{2}{3}(2)^k \right] \varepsilon(k)$$

$$\begin{aligned} y_{ZS}(k) &= h(k) * e(k) = \left[\frac{1}{3}(-1)^k + \frac{2}{3}(2)^k \right] \varepsilon(k) * (-1)^k \varepsilon(k) \\ &= \frac{1}{3}(-1)^k \varepsilon(k) * (-1)^k \varepsilon(k) + \frac{2}{3}(2)^k \varepsilon(k) * (-1)^k \varepsilon(k) \\ &= \frac{1}{3}(k+1)(-1)^k \varepsilon(k) + \frac{2}{3} \cdot \frac{2^{k+1} - (-1)^{k+1}}{2 - (-1)} \varepsilon(k) \\ &= \left[\frac{1}{3}k(-1)^k + \frac{5}{9}(-1)^k + \frac{4}{9}(2)^k \right] \varepsilon(k) \end{aligned}$$

(3) 求全响应

$$y(k) = y_{Zi}(k) + y_{ZS}(k) = \left[\frac{1}{3}(k+2)(-1)^k + \frac{2}{3}(2)^k \right] \varepsilon(k)$$

显然, 由于特征根 $|\gamma_1| = 1, |\gamma_2| > 1$

且 $e(k) = (\gamma_1)^k \varepsilon(k)$

所以, 该系统不稳定

$$y(0) = y_{Zi}(0) + y_{ZS}(0)$$

DTS 与 CTS 时域分析法的比较

CTS

微分方程描述

用 $H(p)$ 将微分方程写成代数方程的形式

特征根 λ 出现在指数函数的幂数中；自然响应的幅度和振荡频率分别决定于 λ 的实部和虚部；系统是否稳定取决于各特征根是否全部位于 s 平面的左半面内。

零状态响应等于系统的单位冲激响应与输入激励的卷积积分。

DTS

差分方程描述

用 $H(S)$ 将差分方程写成代数方程的形式

特征根 v 是指数函数的底数；自然响应的幅度和振荡频率分别决定于 v 的模量和相位；系统是否稳定取决于各特征根是否全部位于 z 平面的单位圆内。

零状态响应等于系统的单位冲激响应与输入激励的卷积和。

第七章 离散时间系统的时域分析

作业:

7.2 7.3 7.6 7.9

7.13(c) 7.14(2)(3) 7.17(2)(3)

7.21 7.26(3)(4) 7.29

引言

1. 连续系统的分析

时域(解微分方程) $\xrightarrow{\text{变换域}}$ s 域、频域(解代数方程)
(拉氏变换法) (付氏变换法)

2. 离散系统的分析

时域(解差分方程) $\xrightarrow{\text{变换域}}$ z 域、频域(解代数方程)
(z 变换) (离散付氏变换DFT / FFT)

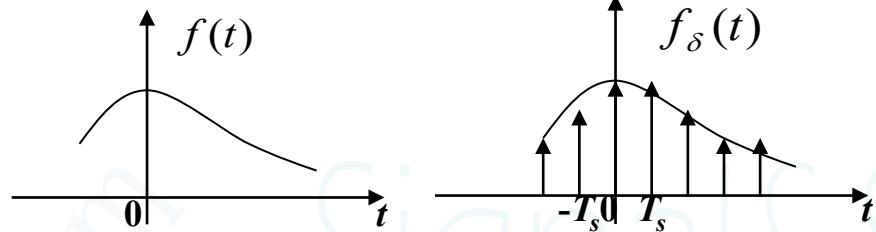
本章内容：

- **z变换定义及其收敛区（域）**
- **z 变换的性质**
- **反z变换**
- **z变换与拉普拉斯变换的关系**
- **离散时间系统的 Z 变换分析法**
- **离散时间系统的频率响应特性**

一、z变换定义及其收敛区(域)

(一) z变换的定义

由抽样信号 $f_\delta(t)$ 的拉氏变换引出



$$f_\delta(t) = f(t) \cdot \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - kT)$$

$$\begin{aligned} F_\delta(s) = \mathcal{L}\{f_\delta(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_\delta(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) \right] e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) e^{-skT} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) (e^{sT})^{-k} \end{aligned}$$

令 $e^{sT} = z$ (复数)

$$F_\delta(s) = F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) z^{-k} \quad \text{记} \quad \mathbb{Z}\{f(k)\} \quad (\text{通常令 } T=1)$$

—— $F(z)$ 称作 $f(k)$
的双边z 变换

第八章 离散时间系统的变换域分析

对有始序列，当 $k < 0$ 时 $f(k) = 0$ (右边序列)

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} \quad \text{——单边 } z \text{ 变换}$$

直接定义： $F(z)$ 为 z^{-1} 的幂级数

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots$$

(二) z 变换的收敛区(域)

定义：对于任何有界序列 $f(k)$ ，使得 $f(k)$ 的 z 变换存在的 z 值范围叫 z 变换的收敛域。

若两序列分别为 $f_1(k) = a^k \varepsilon(k)$,

$$f_2(k) = -a^k \varepsilon(-k-1)$$

则据定义 $F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a} \quad (|z| > |a|)$

第八章 离散时间系统的变换域分析

$$F_2(z) = -\sum_{k=-\infty}^{-1} a^k z^{-k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^k = -\frac{\frac{z}{a}}{1 - \frac{z}{a}} = \frac{z}{z-a} \quad (|z| < |a|)$$

表明：两个不同的序列由于收敛域不同，可能对应于相同的z变换。因此，为了单值地确定z变换所对应的序列，不仅要给出序列的z变换式，而且必须同时标明它的收敛域。

级数收敛 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}$ 的充分条件是满足绝对可和条件，即

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k)z^{-k}| < \infty$$

正项级数 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k)z^{-k}|$ 收敛的判定法：

令 $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{f(k+1)z^{-(k+1)}}{f(k)z^{-k}} \right| = \rho$ 或 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|f(k)z^{-k}|} = \rho$

则当 $\rho < 1$ 时级数收敛， $\rho > 1$ 时级数发散， $\rho = 1$ 时级数可能收敛也可能发散。

1. 有限长序列 z 变换的收敛域

$$F(z) = \sum_{k=k_1}^{k_2} f(k)z^{-k}$$

- (1) 当 $k_1 < 0, k_2 > 0$ 时, $F(z)$ 的收敛域为 $0 < |z| < \infty$
- (2) 当 $k_1 < 0, k_2 \leq 0$ 时, $F(z)$ 的收敛域为 $|z| < \infty$ (包括 $z = 0$)
- (3) 当 $k_1 \geq 0, k_2 > 0$ 时, $F(z)$ 的收敛域为 $|z| > 0$ (包括 $z = \infty$)

2. 右边序列 z 变换的收敛域

$$F(z) = \sum_{k=k_1}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

当 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|f(k)z^{-k}|} < 1$ 即 $|z| > \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|f(k)|} = R_1$ 时该级数收敛

右边序列的收敛域是半径为 R_1 的圆外区域

- (1) 当 $k_1 \geq 0$ 时, $F(z)$ 的收敛域为 $|z| > R_1$ (包括 $z = \infty$)
- (2) 当 $k_1 < 0$ 时, $F(z)$ 的收敛域为 $R_1 < |z| < \infty$

3. 左边序列 z 变换的收敛域

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{k_2} f(k)z^{-k}$$

令 $n = -k$ 则 $F(z) = \sum_{n=-k_2}^{\infty} f(-n)z^n$ 即 $F(z) = \sum_{k=-k_2}^{\infty} f(-k)z^k$

当 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|f(-k)z^k|} < 1$ 即 $|z| < \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|f(-k)|}} = R_2$ 时该级数收敛

左边序列的收敛域是半径为 R_2 的圆内区域

(1) 当 $k_2 > 0$ 时, $F(z)$ 的收敛域为 $0 < |z| < R_2$

(2) 当 $k_2 \leq 0$ 时, $F(z)$ 的收敛域为 $|z| < R_2$ (包括 $z = 0$)

讨论: ① $k < 0$ 时, $f(k) = 0$ —— 因果序列

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} \quad \text{收敛域为 } |z| > R_1 \text{ (包括 } z = \infty\text{)}$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

② $k \geq 0$ 时, $f(k) = 0$ —— 反因果序列

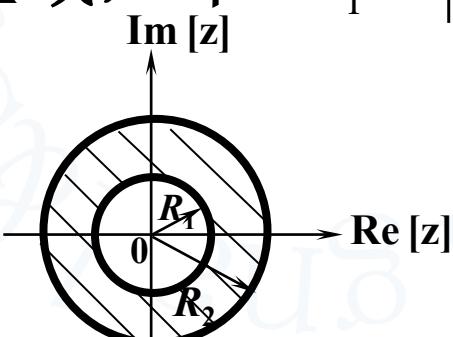
$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} f(k)z^{-k}$$

收敛域为 $|z| < R_2$ (包括 $z = 0$)

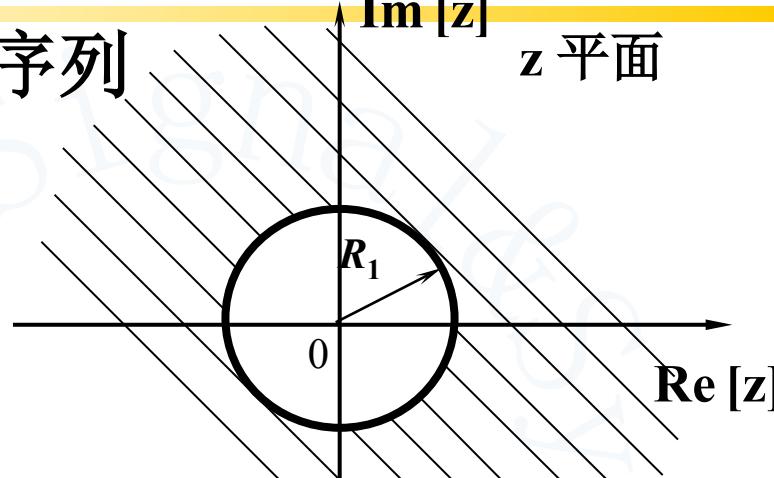
③ 双边序列

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} + \sum_{k=-\infty}^{-1} f(k)z^{-k}$$

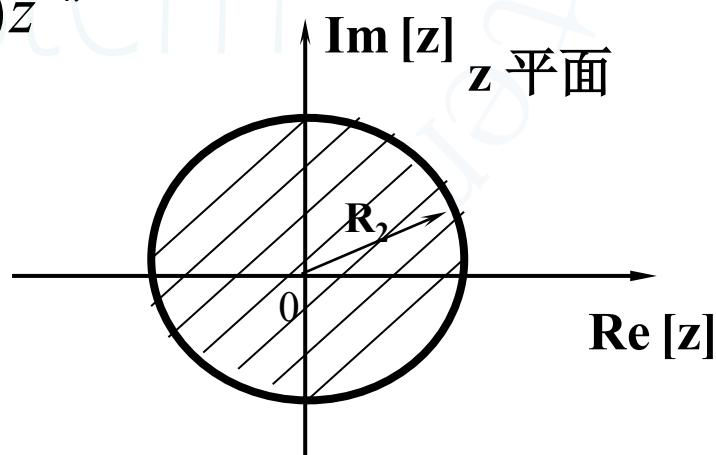
其收敛域是两个级数收敛域的公共区域, 即 $R_1 < |z| < R_2$



双边序列的收敛域



因果序列的收敛域



反因果序列的收敛域

第八章 离散时间系统的变换域分析

(三) 常用序列的 z 变换

1. 单位函数 $\delta(k)$ 的 z 变换

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad \mathbb{Z}\{\delta(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k)z^{-k} = 1$$

收敛域 $|z| \geq 0$

2. 阶跃序列 $\varepsilon(k)$ 的 z 变换

$$\varepsilon(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad \mathbb{Z}\{\varepsilon(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

公比为 z^{-1} 等比级数

3. 单边指数序列 $\gamma^k \varepsilon(k)$ 的 z 变换

$$\mathbb{Z}\{\gamma^k \varepsilon(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma z^{-1})^k$$

收敛域 $|z| > 1$

当 $|\gamma z^{-1}| < 1$ 即 $|z| > |\gamma|$ 时, 级数收敛

$$\mathbb{Z}\{\gamma^k \varepsilon(k)\} = \frac{1}{1 - \gamma z^{-1}} = \frac{z}{z - \gamma} \quad (|z| > |\gamma|)$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

若令 $\gamma = e^{\lambda T}$, 则

$$\mathbb{Z}\{\gamma^k \varepsilon(k)\} = \mathbb{Z}\{e^{\lambda k T} \varepsilon(k)\} = \frac{z}{z - e^{\lambda T}} \quad (|z| > |e^{\lambda T}|)$$

4. 双边指数序列 $\gamma^{|k|}$ 的zT

$$\gamma^{|k|} = \gamma^k \varepsilon(k) + \gamma^{-k} \varepsilon(-k-1)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}\{\gamma^{|k|}\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma^{|k|} z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \gamma^{-k} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k z^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma z)^k + \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma z^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma z)^k - 1 + \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma z^{-1})^k \end{aligned}$$

当 $|\gamma z^{-1}| < 1$ 且 $|\gamma z| < 1$ 即 $|\gamma| < |z| < |\gamma^{-1}|$ 时

$$\mathbb{Z}\{\gamma^{|k|}\} = \frac{1}{1 - \gamma z} - 1 + \frac{1}{1 - \gamma z^{-1}} = \frac{z}{z - \gamma} - \frac{z}{z - \gamma^{-1}}$$

若 $|\gamma| > 1$, 则以上 z 变换不存在

第八章 离散时间系统的变换域分析

讨论：左边序列z变换的计算

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} f(k)z^{-k}$$

令 $n = -k$ 则 $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(-n)z^n$

即 $F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f(-k)z^k = \sum_{k=1}^{\infty} f(-k)(z^{-1})^{-k}$

令 $g(k) = f(-k) + g(0)\delta(k)$, $w = z^{-1}$, $G(w) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)w^{-k}$ ($|w| > a$)

则 $F(z) = G(w) - g(0) = G(z^{-1}) - g(0)$, ($|w| = |z^{-1}| > a$ 即 $|z| < a^{-1}$)

例 求 $\mathbb{Z}\{\gamma^{-k}\varepsilon(-k-1)\} = F(z)$

解： (1) 由 $\gamma^{-k}\varepsilon(-k-1)$ 得: $g(k) = \gamma^k\varepsilon(k)$

(2) 求 $g(k)$ 的 z 变换: $G(w) = \frac{w}{w-\gamma}$, ($|w| > |\gamma|$)

(3) $F(z) = G(z^{-1}) - g(0) = \frac{1}{1-\gamma z} - 1 = -\frac{z}{z-\gamma^{-1}}$, ($|z| < |\gamma^{-1}|$)

例:

$$(1) \quad f(k) = \left(\frac{1}{3}\right)^k \varepsilon(k)$$

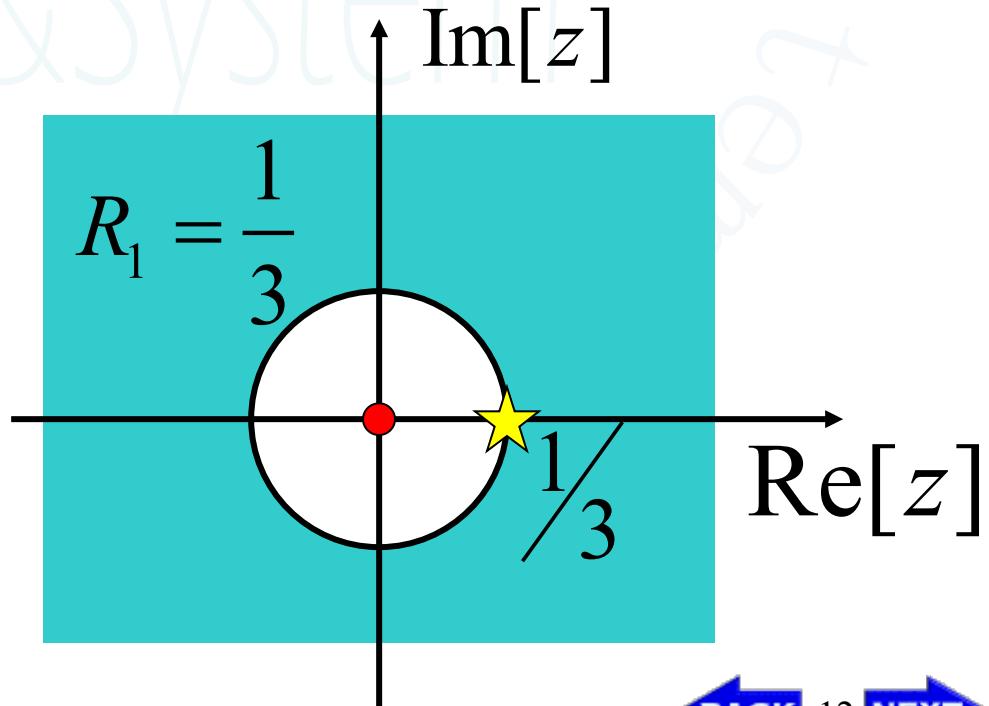
因果序列

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot z^{-k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3z} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{3z}} = \frac{z}{z - \frac{1}{3}}$$

$$\therefore R_1 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore |z| > \frac{1}{3}$$

$$\text{或} \left| \frac{1}{3z} \right| < 1 \Rightarrow |z| > \frac{1}{3}$$



第八章 离散时间系统的变换域分析

例

$$(2) f(k) = -\left(\frac{1}{3}\right)^k \varepsilon(-k-1)$$

$$F(z) = -\sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^k$$

反因果序列

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{-m}$$

$$= 1 - \sum_{m=0}^{\infty} (3z)^m$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - 3z^{-1}}$$

$$= \frac{z}{z - \frac{1}{3}}$$

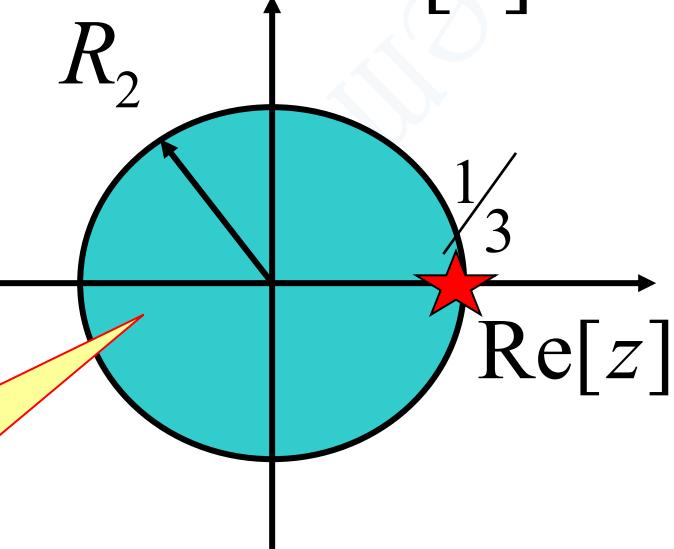
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{(3z)^k} < 1$$

$$\Rightarrow |z| < \frac{1}{3} = R_2$$

$$k_2 = -1 < 0$$

$\Rightarrow z = 0$ 包括在内。

$\text{Im}[z]$



圆内为收敛域，
若 $k_2 > 0$
则不包括 $z=0$ 点

第八章 离散时间系统的变换域分析

例

(3) $f(k) = \left(\frac{1}{3}\right)^k [\varepsilon(k) - \varepsilon(k-8)]$ 有限长序列

$$F(z) = \sum_{k=0}^{8-1} \left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^8}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{z^8 - \left(\frac{1}{3}\right)^8}{z^{8-1}(z - \frac{1}{3})}$$

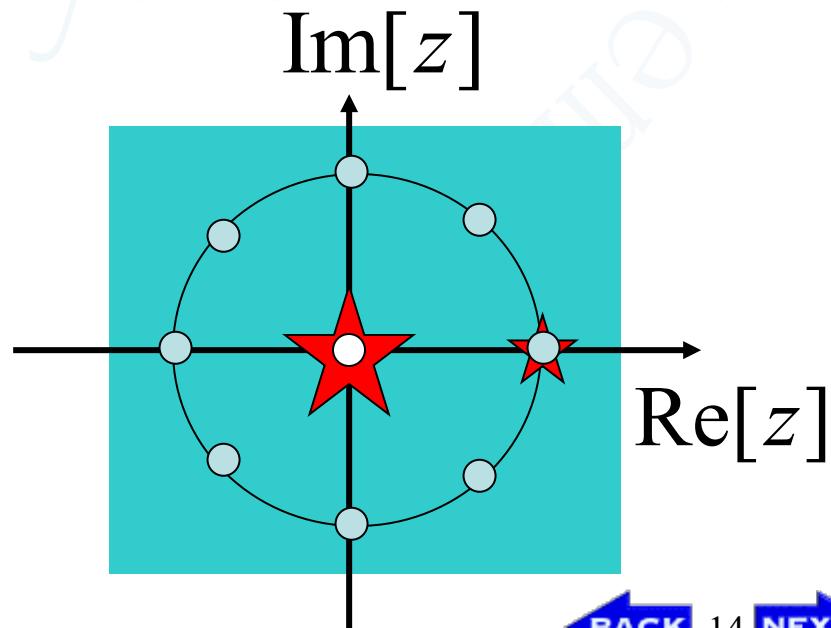
收敛域为 $|z| > 0$ 即
除了0的整个平面

$$z^8 = \left(\frac{1}{3}\right)^8 e^{j2k\pi}$$

$$z = \frac{1}{3} e^{j\frac{2K\pi}{8}} \rightarrow 8\text{个零点}$$

$$z = 0 \rightarrow 7\text{阶极点}$$

$$z = \frac{1}{3} \rightarrow \text{一阶极点}$$

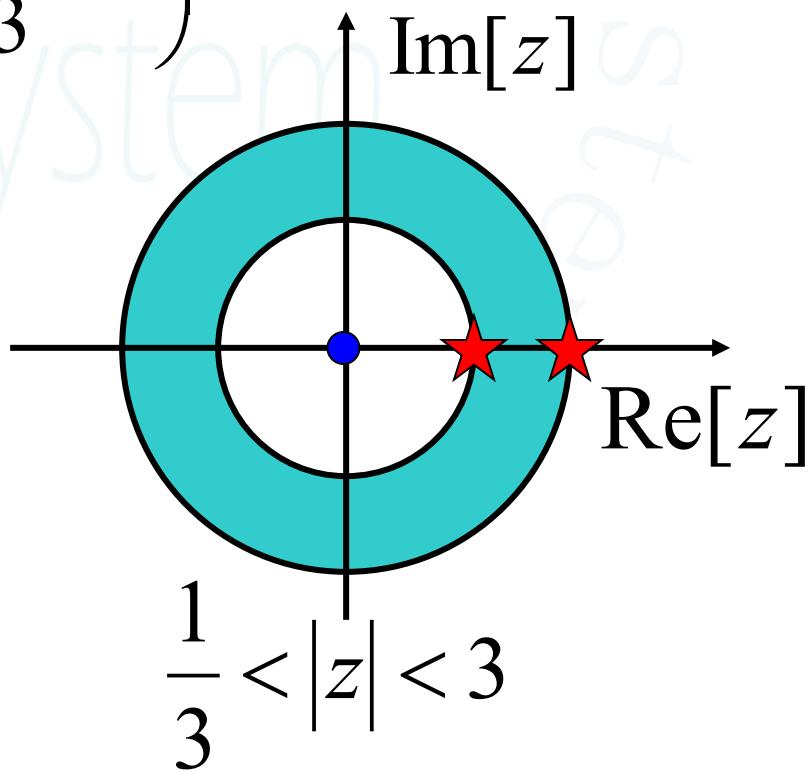


例

$$(4) \quad f(k) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|k|}$$

双边序列

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{-k} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)^k \\
 &= \frac{-z}{z-3} + \frac{1}{z-\frac{1}{3}} \\
 &= \frac{-\frac{8}{3}z}{(z-3)(z-\frac{1}{3})}
 \end{aligned}$$



小结：

- 1) Z变换存在着收敛的问题，不是任何信号都存在Z变换，也不是任何复数Z都能使 $F(z)$ 收敛。
- 2) 仅仅由 $F(z)$ 的表达式不能唯一地确定一个信号，只有 $F(z)$ 连同相应的ROC一道，才能与信号 $f(k)$ 建立一一对应的关系。
- 3) Z变换的ROC，一般是Z平面上以原点为中心的环形区域。

- 4) 如果 $f(k) = \sum_i f_i(k)$, 则其ROC是各个 $f_i(k)$ 的ROC的公共区域。若没有公共区域则表明 $f(k)$ 的Z变换不存在。
- 5) 当 $F(z)$ 是有理函数时, 其ROC的边界总是由 $F(z)$ 的极点所在的圆周界定的。

二、 z 变换的性质

(一) 线性特性

若 $f_1(k) \leftrightarrow F_1(z), f_2(k) \leftrightarrow F_2(z)$

则 $af_1(k) + bf_2(k) \leftrightarrow aF_1(z) + bF_2(z)$

其收敛域为 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 的公共收敛部分

例 求单边余弦和正弦序列的 z 变换

$$\mathbb{Z}\{e^{j\beta kT} \varepsilon(k)\} = \frac{z}{z - e^{j\beta T}}$$

$$\mathbb{Z}\{e^{-j\beta kT} \varepsilon(k)\} = \frac{z}{z - e^{-j\beta T}}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}\{\cos \beta kT \bullet \varepsilon(k)\} &= \mathbb{Z}\left\{\frac{1}{2}(e^{j\beta kT} + e^{-j\beta kT})\varepsilon(k)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z - e^{j\beta T}} + \frac{z}{z - e^{-j\beta T}}\right) \quad (|z| > |e^{j\beta}| = 1) \\ &= \frac{z(z - e^{-j\beta T} + z - e^{j\beta T})}{2(z - e^{j\beta T})(z - e^{-j\beta T})} = \frac{z(z - \cos \beta T)}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1} \quad (|z| > 1)\end{aligned}$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}\{ \sin \beta kT \bullet \varepsilon(k) \} &= \mathbb{Z}\left\{ \frac{1}{2j} (e^{j\beta kT} - e^{-j\beta kT}) \varepsilon(k) \right\} \\ &= \frac{z \sin \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1} (|z| > 1)\end{aligned}$$

(二) 移序特性

1. 单边 zT , 且 $f(k)$ 为有始序列

若 $f(k)\varepsilon(k) \leftrightarrow F(z)$

延迟 $f(k-n)\varepsilon(k-n) \leftrightarrow z^{-n}F(z) (n \geq 0)$

超前 $f(k+n)\varepsilon(k) \leftrightarrow z^n [F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k)z^{-k}] (n \geq 0)$

证明 : 延迟

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}\{f(k-n)\varepsilon(k-n)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k-n)\varepsilon(k-n)z^{-k} \quad \text{令 } k-n = m \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} f(k-n)z^{-k} \quad = \sum_{m=0}^{\infty} f(m)z^{-(n+m)} \\ &= z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} f(m)z^{-m} \quad = z^{-n} F(z)\end{aligned}$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

超前

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}\{f(k+n)\varepsilon(k)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k+n)z^{-k} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} f(k+n)z^{-(k+n)} \\ &\quad \text{令 } k+n = m \\ &= z^n \sum_{m=n}^{\infty} f(m)z^{-m} \\ &= z^n \left[\sum_{m=0}^{\infty} f(m)z^{-m} - \sum_{m=0}^{n-1} f(m)z^{-m} \right] \\ &= z^n \left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k)z^{-k} \right]\end{aligned}$$

若 $f(k)$ 为双边序列 (进行单边z变换)

则 $f(k+n) \leftrightarrow z^n F(z) - z^n \sum_{k=0}^{n-1} f(k)z^{-k}$ —— 同单边序列

$$f(k-n) \leftrightarrow z^{-n} [F(z) + \sum_{k=-n}^{-1} f(k)z^{-k}]$$

2. 双边zT, $f(k)$ 为双边序列

$$f(k+n) \leftrightarrow z^n F(z)$$

$$f(k-n) \leftrightarrow z^{-n} F(z)$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

$$\text{证明: } \mathbb{Z}\{f(k \pm n)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k \pm n)z^{-k} = z^{\pm n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k \pm n)z^{-(k \pm n)}$$

$\text{令 } m = k \pm n$

$$= z^{\pm n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)z^{-m} = z^{\pm n} F(z)$$

(三) 尺度变换特性(序列乘 a^k)

若 $f(k) \leftrightarrow F(z)$ 则 $a^k f(k) \leftrightarrow F\left(\frac{z}{a}\right)$

证明: $F\left(\frac{z}{a}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \left(\frac{z}{a}\right)^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k f(k) z^{-k} = \mathbb{Z}\{a^k f(k)\}$

$$a^{-k} f(k) \leftrightarrow F(az) \quad (-1)^k f(k) \leftrightarrow F(-z)$$

(四) z 域微分(序列乘 k)

若 $f(k) \leftrightarrow F(z)$ 则 $kf(k) \leftrightarrow -z \frac{d}{dz} F(z)$

证明: $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$

$$\frac{dF(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} (-k) f(k) z^{-(k+1)} = -z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} kf(k) z^{-k} = -z^{-1} \mathbb{Z}\{kf(k)\}$$
$$\therefore kf(k) \leftrightarrow -z \frac{dF(z)}{dz}$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

(五) 时域卷积

若 $f_1(k) \leftrightarrow F_1(z)$, $f_2(k) \leftrightarrow F_2(z)$

则 $f_1(k) * f_2(k) \leftrightarrow F_1(z)F_2(z)$

证明: $\mathbb{Z}\{f_1(k) * f_2(k)\} = \mathbb{Z}\left\{\sum_{j=0}^k f_1(j)f_2(k-j)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{\sum_{j=0}^k f_1(j)f_2(k-j)\right\} z^{-k}$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} f_1(j) \sum_{k=0}^{\infty} f_2(k-j) z^{-k} = \sum_{j=0}^{\infty} f_1(j) \cdot z^{-j} F_2(z) = F_1(z)F_2(z)$$

(六) 初值定理和终值定理

$f(k)$ 为有始序列, 且 $f(k) \leftrightarrow F(z)$

初值: $f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$

终值: $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$ (当 $|z| \geq 1$ 时 $(z-1)F(z)$ 收敛)

证明: (1) 初值定理

$$\because F(z) = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots$$

$$\therefore \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} [f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots] = f(0)$$

(2) 终值定理

由移序特性，有

$$\mathbb{Z}[f(k+1) - f(k)] = zF(z) - zf(0) - F(z) = (z-1)F(z) - zf(0)$$

$$(z-1)F(z) = zf(0) + \mathbb{Z}[f(k+1) - f(k)]$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} zf(0) + \lim_{z \rightarrow 1} \mathbb{Z}[f(k+1) - f(k)]$$

$$= f(0) + \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} [f(k+1) - f(k)] z^{-k}$$

$$= f(0) + \sum_{k=0}^{\infty} [f(k+1) - f(k)]$$

$$= f(0) + \{ [f(1) - f(0)] + [f(2) - f(1)] + [f(3) - f(2)] + \dots + [f(k+1) - f(k)] + \dots \}$$

$$= f(0) + [-f(0) + f(\infty)]$$

$$= f(\infty)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} f(k)$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

例1 求下列有始序列的 z 变换

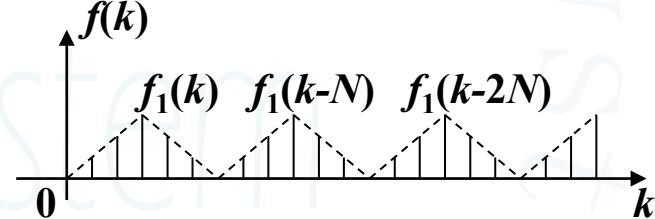
$$(1) \delta(k) - 8\delta(k-3)$$

解 : $\delta(k) \leftrightarrow 1$

由移序特性 : $\delta(k-3) \leftrightarrow z^{-3}F(z) = z^{-3}$ ($|z| > 0$)

$$\therefore \delta(k) - 8\delta(k-3) \leftrightarrow 1 - 8z^{-3}$$

(2) 单边周期序列 $f(k) = f(k - mN)$



$$f(k) = f_1(k) + f_1(k-N) + f_1(k-2N) + \dots$$

解 : 设 $f_1(k) \leftrightarrow F_1(z)$, $f(k) \leftrightarrow F(z)$

$$F(z) = F_1(z) + z^{-N}F_1(z) + z^{-2N}F_1(z) + \dots$$

若 $|z^{-N}| < 1$ 即 $|z| > 1$

$$F(z) = F_1(z) \cdot \frac{1}{1 - z^{-N}} = F_1(z) \frac{z^N}{z^N - 1}$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

(3) $k\varepsilon(k)$

解 : $\mathbb{Z}\{\varepsilon(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon(k)z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} = F_1(z) \quad (|z| > 1)$

$$k\varepsilon(k) \leftrightarrow -z \frac{d}{dZ} F_1(z) = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right) = \frac{z}{(z-1)^2} \quad (|z| > 1)$$

(4) $a^k \varepsilon(k-2)$

解 : $a^k \varepsilon(k-2) = a^2 \bullet a^{k-2} \varepsilon(k-2) \leftrightarrow F(z)$

[方法一] 先尺度变换, 再延迟

$$F_1(z) = \mathbb{Z}\{a^k \varepsilon(k)\} = \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{a}\right)^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad (|z| > |a|)$$

$$F(z) = a^2 \bullet z^{-2} F_1(z) = a^2 z^{-2} \frac{z}{z-a} = \frac{a^2}{z(z-a)} \quad (|z| > |a|)$$

[方法二] 先延迟, 后尺度变换

第八章 离散时间系统的变换域分析

$$\varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-1} \quad (|z| > 1)$$

$$\varepsilon(k-2) \leftrightarrow z^{-2} \bullet \frac{z}{z-1} = \frac{1}{z(z-1)} = F_1(z) \quad (|z| > 1)$$

$$a^k \varepsilon(k-2) \leftrightarrow F_1\left(\frac{z}{a}\right) = F(z) \quad (|z| > |a|)$$

$$F(z) = \frac{1}{\frac{z}{a} \left(\frac{z}{a} - 1 \right)} = \frac{a^2}{z(z-a)} \quad (|z| > |a|)$$

例2 $f(k) = a^k \varepsilon(k) * b^k \varepsilon(k)$ 求 $f(k)$

解 : $a^k \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-a} = F_1(z) \quad b^k \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-b} = F_2(z)$

$$f(k) \leftrightarrow F(z) = F_1(z) \bullet F_2(z) \quad (|z| > \max(|a|, |b|))$$

$$f(k) \leftrightarrow F(z) = \frac{z}{z-a} \bullet \frac{z}{z-b} = \frac{z^2}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b} \left(\frac{az}{z-a} - \frac{bz}{z-b} \right)$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

$$f(k) = \frac{1}{a-b} (a \bullet a^k - b \bullet b^k) \varepsilon(k) = \frac{1}{a-b} (a^{k+1} - b^{k+1}) \varepsilon(k)$$

例3 求卷积 $a^{k-1} \varepsilon(k-1) * \varepsilon(k) = f(k)$

解 : $f_1(k) = a^{k-1} \varepsilon(k-1) \leftrightarrow z^{-1} \frac{z}{z-a} = \frac{1}{z-a} \quad (|z| > |a|)$

$$f_2(k) = \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-1} \quad (|z| > 1)$$

$$f(k) \leftrightarrow F(z) = \frac{1}{z-a} \bullet \frac{z}{z-1} = \frac{1-a}{z-1} - \frac{1-a}{z-a}$$

$$= \frac{1}{1-a} \left(\frac{z^{-1} \bullet z}{z-1} - \frac{a}{z-a} \right) \quad (|z| > \max(|a|, 1))$$

$$f(k) = \frac{1}{1-a} [\varepsilon(k-1) - a \bullet a^{k-1} \varepsilon(k-1)]$$

$$= \frac{1-a^k}{1-a} \varepsilon(k-1)$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

例4 利用 z 变换性质求下列序列 $f(k)$ 的 z 变换 $F(z)$ 。

(1) $k(-1)^k \varepsilon(k)$

(2) $(k-1)^2 \varepsilon(k-1)$

解: (1) [方法一]

$$f_1(k) = (-1)^k \varepsilon(k) \xleftrightarrow{ZT} F_1(z) = \frac{z}{z+1} \quad (|z|>1)$$

$$f(k) = k f_1(k) \Leftrightarrow F(z) = -z \frac{d}{dz} F_1(z) = \frac{-z}{(z+1)^2} \quad (|z|>1)$$

[方法二]

$$f_1(k) = k \varepsilon(k) \xleftrightarrow{ZT} F_1(z) = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right) = \frac{z}{(z-1)^2} \quad (|z|>1)$$

因 $f(k) = (-1)^k f_1(k)$

故根据 z 域尺度变换性质得:

$$F(z) = F_1\left(\frac{z}{-1}\right) = \frac{-z}{(z+1)^2} \quad (|z|>1)$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

(2) 设 $f_1(k) = (k-1)\varepsilon(k-1)$ ，根据移序性质

$$F_1(z) = \frac{z}{(z-1)^2} z^{-1} = \frac{1}{(z-1)^2} \quad (|z|>1)$$

因 $f(k) = (k-1)f_1(k) = kf_1(k) - f_1(k)$

故由线性与z域微分性质有：

$$F(z) = -z \frac{d}{dz} F_1(z) - F_1(z)$$

$$= \frac{2z}{(z-1)^3} - \frac{1}{(z-1)^2}$$

$$= \frac{z+1}{(z-1)^3} \quad (|z|>1)$$

三、反z变换

(一) 幂级数展开法 (长除法)

由 $F(z)$ 的定义, 将其展开为幂级数, 有

$$\begin{aligned} F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k} &= \cdots + \cdots + f(-k)z^k + \cdots + f(-1)z \\ &\quad + f(0) + f(1)z^{-1} + \cdots + f(k)z^{-k} + \cdots \end{aligned}$$

展开式中 项的系数即为 $f(k)$ 。当 $F(z)$ 是有理函数时, 可以通过长除法将其展开为幂级数。

❖ 由于因果序列的展开式中应包含无数多个 z 的负幂项, 所以要按降幂长除。

- ❖ 由于反因果序列的展开式中应包含无数多个 z 的正幂项，所以要按升幂长除。
- ❖ 双边序列要先将其分成分别对应信号的右边和左边的两部分，再分别按上述原则长除。

例1 已知 $F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}, |z| > 1$, 求 $f(k)$

解 : $\because |z| > 1 \therefore f(k)$ —— 因果序列, 按 z^{-1} 展开

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z}{z^2 - 2z + 1} \quad (\text{按 } z \text{ 降幂排列})$$

$$= z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k}$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

$$\text{即 } F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k} \quad \therefore f(k) = k \varepsilon(k)$$

例2 已知 $F(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$ 求收敛域为 $|z| > 1$ 和 $|z| < 1$ 两种情况下的 $f(k)$ 。

解： (1) 当收敛域为 $|z| > 1$ 时，

$f(k)$ 为因果序列

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1+2z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}} \\ &= 1 + 4z^{-1} + 7z^{-2} + 10z^{-3} + 13z^{-4} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (3k+1)z^{-k} \\ \therefore f(k) &= (3k+1)\varepsilon(k) \end{aligned}$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

(2) 当收敛域为 $|z| < 1$ 时, $f(k)$ 为反因果序列

$$F(z) = \frac{2z^{-1} + 1}{z^{-2} - 2z^{-1} + 1} \quad (\text{按 } z \text{ 升幂排列})$$

$$= 2z + 5z^2 + 8z^3 + 11z^4 + \dots$$

$$\begin{aligned} & \text{令 } m = -k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (3k-1)z^k \\ &= \sum_{m=-1}^{-\infty} (-3m-1)z^{-m} = -\sum_{k=-\infty}^{-1} (3k+1)z^{-k} \end{aligned}$$

$$\therefore f(k) = -(3k+1)\varepsilon(-k-1)$$

讨论 : ① 收敛域 $|z| > R, F(z)$ 对应序列为因果序列;

收敛域 $|z| < R, F(z)$ 对应序列为反因果序列。

② 同一个 $F(z)$ 的 $f(k)$ 不是唯一的, 已知 $F(z)$ 和收敛域, $f(k)$ 才能唯一确定。

第八章 离散时间系统的变换域分析

例 $F(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z-2)}$, $1 < |z| < 2$, 求 $f(k)$

解 : $F(z)$ 的收敛域 $1 < |z| < 2$ 为环形区域, 其序列为双边序列

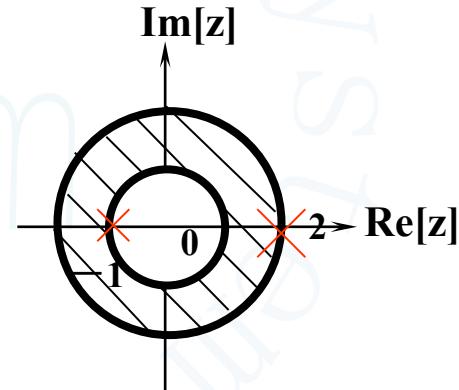
$$F(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z-2)} = \frac{\frac{1}{3}z}{z+1} + \frac{\frac{2}{3}z}{z-2} = F_1(z) + F_2(z) \quad (1 < |z| < 2)$$

$$F_1(z) = \frac{\frac{1}{3}z}{z+1} \quad (|z| > 1) \quad \text{对应于因果序列}$$

$$F_2(z) = \frac{\frac{2}{3}z}{z-2} \quad (|z| < 2) \quad \text{对应于反因果序列}$$

$$F_1(z) = \frac{\frac{1}{3}z}{z+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} - \frac{1}{3}z^{-3} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{-k}$$

$$F_2(z) = \frac{\frac{2}{3}z}{-2+z} = -\frac{1}{3}z - \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{12}z^3 - \dots = -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} z^{k+1} = -\frac{1}{3} \sum_{m=-1}^{-\infty} \frac{1}{2^{-(m+1)}} z^{-m}$$



令 $k + 1 = -m$

第八章 离散时间系统的变换域分析

令 $m = k$

$$= -\frac{1}{3} \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{2^{-(k+1)}} z^{-k}$$

$$f(k) = \frac{1}{3}(-1)^k \varepsilon(k) - \frac{1}{3} \bullet \frac{1}{2^{-(k+1)}} \varepsilon(-k-1) = \frac{1}{3}(-1)^k \varepsilon(k) - \frac{2^{(k+1)}}{3} \varepsilon(-k-1)$$

利用已知的幂级数展开式

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \cdots + \frac{1}{k!} x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, |x| < \infty$$

例 已知 $F(z) = e^{\frac{a}{z}}$, $|z| > 0$, 求 $f(k)$

解: $F(z) = e^{\frac{a}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{z}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} z^{-k}$

$$\therefore f(k) = \frac{a^k}{k!} \varepsilon(k)$$

(二) 部分分式展开法

求拉氏反变换时将 $F(s)$ 展开成部分分式

基本形式 $\frac{1}{s-a} \leftrightarrow e^{at} \varepsilon(t)$

z 反变换 : $F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ ($m \leq n$ —— 因果律)

基本形式 $\frac{z}{z-\gamma} (|z| > \gamma) \leftrightarrow \gamma^k \varepsilon(k), \frac{z}{z-\gamma} (|z| < \gamma) \leftrightarrow -\gamma^k \varepsilon(-k-1)$

为得到基本形式, 常常先把 $\frac{F(z)}{z}$ 展开成部分分式

1. $\frac{F(z)}{z}$ 含单阶极点

$$\frac{F(z)}{z} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{z - \gamma_i}$$

$$A_i = [(z - \gamma_i) \frac{F(z)}{z}]_{z=\gamma_i}$$

$$F(z) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i z}{z - \gamma_i} = \frac{A_1 z}{z - \gamma_1} + \frac{A_2 z}{z - \gamma_2} + \cdots + \frac{A_n z}{z - \gamma_n}$$

$$f(k) = \sum_{i=1}^n A_i \gamma_i^k \varepsilon(k) \text{ 或 } f(k) = -\sum_{i=1}^n A_i \gamma_i^k \varepsilon(-k-1)$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

2. $\frac{F(z)}{z}$ 含 r 重(阶)极点(γ_p)

$$F(z) = \sum_{j=1}^r \frac{B_j z}{(z - \gamma_p)^j} = \frac{B_1 z}{z - \gamma_p} + \frac{B_2 z}{(z - \gamma_p)^2} + \dots + \frac{B_r z}{(z - \gamma_p)^r}$$

$$B_j = \frac{1}{(r-j)!} \left[\frac{d^{r-j}}{dz^{r-j}} (z - \gamma_p)^r \frac{F(z)}{z} \right]_{z=\gamma_p}$$

例1 已知 $F(z) = \frac{2z^2 - 3z + 1}{z^2 - 4z - 5}$, $|z| > 5$, 求 $f(k)$

解: $\frac{F(z)}{z} = \frac{2z^2 - 3z + 1}{z(z^2 - 4z - 5)} = \frac{2z^2 - 3z + 1}{z(z-5)(z+1)} = -\frac{1}{5} + \frac{6}{z-5} + \frac{1}{z+1}$

$$F(z) = -\frac{1}{5} + \frac{6}{5} \bullet \frac{z}{z-5} + \frac{z}{z+1}$$

$$\therefore f(k) = -\frac{1}{5} \delta(k) + \left[\frac{6}{5} (5)^k + (-1)^k \right] \varepsilon(k)$$

例2 已知 $F(z) = \frac{z^3 + z^2}{(z-1)^3}$, $|z| > 1$, 求 $f(k)$

第八章 离散时间系统的变换域分析

解：
$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z^2 + z}{(z-1)^3} = \frac{B_1}{z-1} + \frac{B_2}{(z-1)^2} + \frac{B_3}{(z-1)^3}$$

$$B_1 = \frac{1}{(3-1)!} \left[\frac{d^2}{dz^2} (z-1)^3 \frac{F(z)}{z} \right]_{z=1} = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{dz^2} (z^2 + z) \right]_{z=1} = 1$$

$$B_2 = \frac{1}{(3-2)!} \left[\frac{d}{dz} (z-1)^3 \frac{F(z)}{z} \right]_{z=1} = \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{dz} (z^2 + z) \right]_{z=1} = 3$$

$$B_3 = \left[(z-1)^3 \frac{F(z)}{z} \right]_{z=1} = [z^2 + z]_{z=1} = 2$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z-1} + \frac{3}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3} \Rightarrow F(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{3z}{(z-1)^2} + \frac{2z}{(z-1)^3}$$

由于 $|z| > 1$ ，所以 $f(k)$ 为因果序列

查表知：

$$\frac{z}{(z-a)^{m+1}} \leftrightarrow \frac{k(k-1)\cdots(k-m+1)}{m!} a^{k-m}, |z| > a$$

$$\frac{z}{(z-1)^3} \leftrightarrow \frac{k(k-1)}{2} \varepsilon(k), \quad \frac{z}{(z-1)^2} \leftrightarrow k \varepsilon(k), \quad \frac{z}{z-1} \leftrightarrow \varepsilon(k)$$

$$\therefore f(k) = [1 + 3k + k(k-1)] \varepsilon(k) = (k+1)^2 \varepsilon(k)$$

(三) 留数法(围线积分法)

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} \rightarrow f(k) = ?$$

z 平面上假设有一固定的围线C, 它包围原点, 上式两边乘以 z^m 然后沿着围线逆时针转一圈积分, 得到:

$$\oint_C z^{m-1} F(z) dz = \oint_C z^{m-1} \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} dz$$

$$\oint_C F(z) z^{m-1} dz = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \oint_C z^{-k+m-1} dz$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

$$\oint_C F(z)z^{m-1} dz = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \oint_C z^{-k+m-1} dz$$

复变函数中的柯西积分公式：

$$\oint_C z^m dz = \begin{cases} 2\pi j & m = -1 \\ 0 & m \neq -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} m - k = 0 \\ (k = m) \\ \downarrow \\ m = k \end{array}$$

$$\oint_C F(z)z^{k-1} dz = f(k) \oint_C z^{-1} dz = 2\pi j \cdot f(k)$$

得逆变换

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z)z^{k-1} dz$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

由围线积分定理（留数定理）得：

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{k-1} dz = \sum_{C \text{内极点}} \text{Res}[F(z) z^{k-1}]_{z=\gamma_i}$$

$$= - \sum_{C \text{外极点}}^n \text{Res}[F(z) z^{k-1}]_{z=\gamma_i} - \text{Res}[F(z) z^{k-1}]_{z=\infty}$$

$$f_d(k) = \begin{cases} - \sum_{C \text{外极点}} \text{Res}[F(z) z^{k-1}], & k < k_0(f_l(k)) \\ \sum_{C \text{内极点}} \text{Res}[F(z) z^{k-1}], & k \geq k_0(f_r(k)) \end{cases}$$

(C 为在 $F(z)$ 的收敛域内环绕原点逆时针方向的闭合路径)

若 $F(z) z^{k-1}$ 在 $z = \gamma_i$ 处有一阶极点，则该极点的留数

$$\text{Res}[F(z) z^{k-1}] = [(z - \gamma_i) F(z) z^{k-1}]_{z=\gamma_i}$$

若 $F(z) z^{k-1}$ 在 $z = \gamma_i$ 处有 r 阶(重)极点，则

$$\text{Res}[F(z) z^{k-1}] = \frac{1}{(r-1)!} \bullet \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} [(z - \gamma_i)^r F(z) z^{k-1}]_{z=\gamma_i}$$

例：设有 z 变换式

$$F(z) = \frac{2z^2 - 0.5z}{z^2 - 0.5z - 0.5}$$

试用留数法进行反 z 变换。这里的 $f(k)$ 为因果序列。

解：先求被积函数 $F(z)z^{k-1}$ 的极点。

$$F(z)z^{k-1} = \frac{(2z^2 - 0.5z)}{z^2 - 0.5z - 0.5} z^{k-1} = \frac{(2z - 0.5)z^k}{(z - 1)(z + 0.5)}$$

其极点在 $z = 1$ 和 $z = -0.5$

$$\text{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=1} = \frac{(2z - 0.5)z^k}{z + 0.5} \Big|_{z=1} = 1$$

$$\text{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=-0.5} = \frac{(2z - 0.5)z^k}{z - 1} \Big|_{z=-0.5} = (-0.5)^k$$

$$f(k) = \left[1 - (-0.5)^k \right] \varepsilon(k)$$

例

$$F(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{z(z-1)(z-0.5)} \quad (|z| > 1), \quad f(k) = ?$$

解

$\because |z| > 1 \quad \therefore f(k)$ 是因果序列

$$\begin{aligned} f(k) &= \sum_n \text{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=z_m} \\ &= \sum \text{Res} \left[\frac{z^3 + 2z^2 + 1}{z(z-1)(z-0.5)} z^{k-1} \right]_{z=z_m} \\ &= \sum \text{Res} \left[\frac{z^3 + 2z^2 + 1}{(z-1)(z-0.5)} z^{k-2} \right]_{z=z_m} \end{aligned}$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

$$(1) k \geq 2 \quad f(k) = z^{k-2} \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{z - 0.5} \Big|_{z=1} + z^{k-2} \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{z - 1} \Big|_{z=0.5}$$

$$= 8 - 13(0.5)^k$$

$$(2) k = 1 \quad f(k) = \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{(z - 1)(z - 0.5)} \Big|_{z=0} + 8 - 13(0.5)^1$$
$$= 2 + 8 - 13(0.5) = 3.5$$

$$(3) k = 0 \quad f(k) = \frac{d}{dz} \left[\frac{z^3 + 2z^2 + 1}{(z - 1)(z - 0.5)} \right] \Big|_{z=0} + 8 - 13(0.5)^0$$
$$= 6 + 8 - 13 = 1$$

$$(4) k < 0 \quad f(k) = 0$$

$$f(k) = \sum \text{Res} \left[\frac{z^3 + 2z^2 + 1}{(z - 1)(z - 0.5)} z^{k-2} \right]_{z=z_m}$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

$$f(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 3.5 & k = 1 \\ 8 - 13(0.5)^k & k \geq 2 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

$$f(k) = \delta(k) + 3.5\delta(k-1) + [8 - 13(0.5)^k]\varepsilon(k-2)$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

例

$$F(z) = \frac{z^2}{z-a}, \quad |a| < |z| < \infty.$$

$$F(z)z^{k-1} = \frac{z^{k+1}}{z-a}$$

$k \geq -1$ 时, $F(z)z^{k-1}$ 在 C 内只有一个一阶极点: $z = a$

$$f(k) = \operatorname{Res}\left[\frac{z^{k+1}}{z-a}\right]_{z=a} = a^{k+1}$$

$k < -1$ 时, $F(z)z^{k-1}$ 在 C 内有一个一阶极点: $z = a$

和一个 $(-k-1)$ 阶极点: $z = 0$

$$f(k) = -\operatorname{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=\infty} = \operatorname{Res}[F(z^{-1})(z^{-1})^{k-1}z^{-2}]_{z=0}$$

$$= \operatorname{Res}\left[\frac{z^{-(k+2)}}{1-az}\right]_{z=0} = 0$$

$$\therefore f(k) = a^{k+1}\varepsilon(k+1)$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

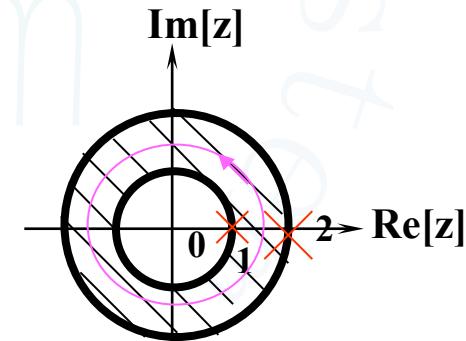
例 $F(z) = \frac{3z^2 - 5z}{(z-1)(z-2)}$ ， $1 < |z| < 2$ 的原时间序列 $f(k)$

解： $F(z)z^{k-1} = \frac{3z^2 - 5z}{(z-1)(z-2)} \bullet z^{k-1} = \frac{(3z-5)z^k}{(z-1)(z-2)}$

[方法一] 在收敛域内作闭合路径 C

则 $k \geq 0$ 时在 C 内有一单阶极点 $z=1$

$$\begin{aligned} f_r(k) &= \operatorname{Res}_{z=1} [F(z)z^{k-1}] = [(z-1)F(z)z^{k-1}]_{z=1} \\ &= \left[\frac{(3z-5)z^k}{z-2} \right]_{z=1} = 2, k \geq 0 \end{aligned}$$



$k < 0$ 时在 C 内多了 $-k$ 阶极点 $z=0$ ，在 C 外有单阶极点 $z=2$

$$\begin{aligned} f_l(k) &= \operatorname{Res}_{z=0} [F(z)z^{k-1}] + \operatorname{Res}_{z=1} [F(z)z^{k-1}] \\ &= -\operatorname{Res}_{z=2} [F(z)z^{k-1}] - \operatorname{Res}_{z=\infty} [F(z)z^{k-1}] = -\left[\frac{3z-5}{z-1} z^k \right]_{z=2} = -2^k, k < 0 \\ f(k) &= f_r(k) + f_l(k) = 2\epsilon(k) - 2^k \epsilon(-k-1) \end{aligned}$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

[方法二]

$$F(z) = \frac{3z^2 - 5z}{(z-1)(z-2)} = \frac{2z}{z-1} + \frac{z}{z-2} = F_1(z) + F_2(z)$$

$$F_1(z) = \frac{2z}{z-1}, \quad |z| > 1 \quad \text{对应因果序列 } f_r(k)$$

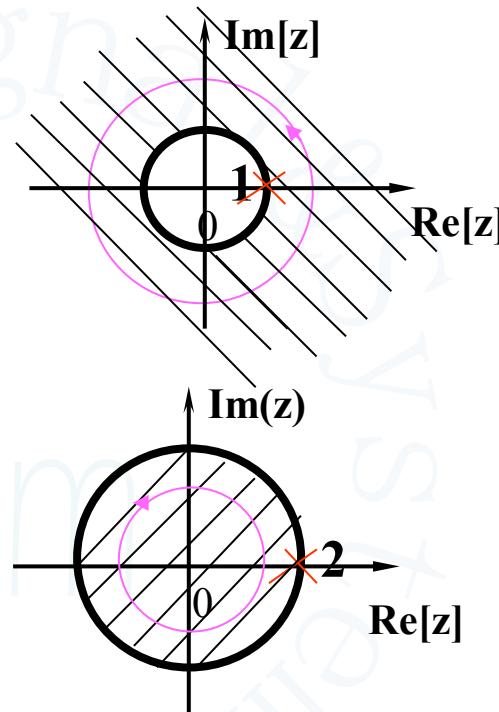
$$F_2(z) = \frac{z}{z-2}, \quad |z| < 2 \quad \text{对应反因果序列 } f_l(k)$$

$$f_r(k) = \operatorname{Res}_{z=1} [F_1(z) z^{k-1}] \\ = [(z-1) \bullet \frac{2z}{z-1} \bullet z^{k-1}]_{z=1} = 2, k \geq 0$$

$$f_l(k) = -\operatorname{Res}_{z=2} [F_2(z) z^{k-1}]_{z=2} - \operatorname{Res}_{z=\infty} [F_2(z) z^{k-1}]_{z=\infty} = -[(z-2) \bullet \frac{z}{z-2} \bullet z^{k-1}]_{z=2} = -2^k, k < 0$$

$$f(k) = f_r(k) + f_l(k) = 2\varepsilon(k) - 2^k \varepsilon(-k-1)$$

求双边反 z 变换与求双边反拉氏变换一样：
关键在于弄清极点的归属问题！



第八章 离散时间系统的变换域分析

四、 z 变换与拉普拉斯变换的关系

(一) z 变换与拉氏变换的关系

1. 抽样信号 $f_s(t)$ 的拉氏变换 $F_\delta(s)$ 与抽样序列 $f(k)$ 的 z 变换 $F(z)$ 的关系

$$F_\delta(s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z} = F(z) \cdots (1)$$

$$F(z) \Big|_{z=e^{sT}} = F_\delta(s) \cdots (2)$$

2. $F(z)$ 与相应的连续函数 $f(t)$ 的拉氏变换 $F(s)$ 的关系

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds \stackrel{\text{抽样}}{\Rightarrow} f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{skT} ds, k = 0, 1, 2, \dots$$
$$\Updownarrow zT$$

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{skT} ds \bullet z^{-k} \end{aligned}$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

$$F(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) \sum_{k=0}^{\infty} (e^{skT} z^{-k}) ds$$

当 $|z| > |e^{sT}|$ 时, $\sum_{k=0}^{\infty} (e^{sT} z^{-1})^k = \frac{1}{1 - e^{sT} z^{-1}}$

$$\therefore F(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{F(s)}{1 - e^{sT} z^{-1}} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{zF(s)}{z - e^{sT}} ds = \sum_i \operatorname{Re} s \left[\frac{zF(s)}{z - e^{sT}} \right]_{s=s_i}$$

若 $f(t) \leftrightarrow F(s)$, 且 $F(s) = \sum_i \frac{A_i}{s - s_i}$

则 $F(z) = \sum_i \operatorname{Re} s \left[\frac{zF(s)}{z - e^{sT}} \right]_{s=s_i} = \sum_i \frac{A_i z}{z - e^{s_i T}}$

小结: 由 $F(s) \rightarrow F(z)$ 求法: 由 $F(s) \rightarrow$ 求 s_i, A_i ^{公式} \rightarrow 求 $F(z)$

例 已知 $e^{-at} \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$, 求 $f(k) = e^{-akT} \varepsilon(k)$ 的 z 变换

解: $F(s) = \frac{1}{s+a} \begin{cases} A_i = 1 \\ s_i = -a \end{cases}$

$$F(z) = \frac{A_i z}{z - e^{s_i T}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \leftrightarrow e^{-akT} \varepsilon(k)$$

(二) z 平面与 s 平面的映射关系

复变量 s 与 z 的关系:

$$\begin{cases} s = \sigma + j\omega \text{ (直角坐标)} \\ z = |z|e^{j\theta} \text{ (极坐标)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = e^{sT} \\ s = \frac{1}{T} \ln z \end{cases}$$

(T 为取样周期)

由上述关系可看出 s 平面与 z 平面的映射关系:

(1) s 平面的虚轴 ($\sigma = 0$) 映射到 z 平面是单位圆 ($|z| = 1$)

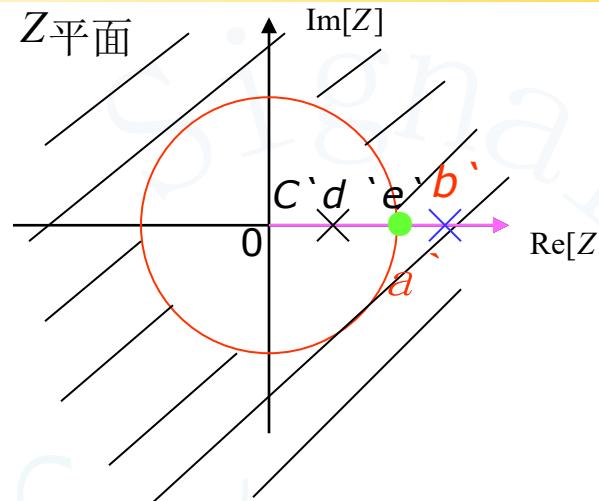
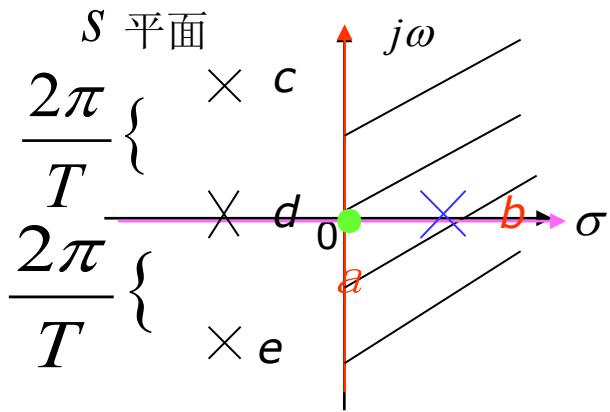
s 右半平面 ($\sigma > 0$) 映射到 z 平面是单位圆外部 ($|z| > 1$)

s 左半平面 ($\sigma < 0$) 映射到 z 平面是单位圆内部 ($|z| < 1$)

s 平面的实轴 ($\omega = 0$) 映射到 z 平面是正实轴 ($\theta = 0$)

s 平面的原点 ($\sigma = 0, \omega = 0$) 映射到 z 平面是单位圆与正实轴的交点 ($z = 1$)

第八章 离散时间系统的变换域分析



(2) 由于

$$s = \frac{1}{T} \ln Z = \frac{1}{T} \ln |Z| + j \frac{\theta + 2m\pi}{T}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

即 $e^{j\theta}$ 是以 ω_s 为周期的周期函数，

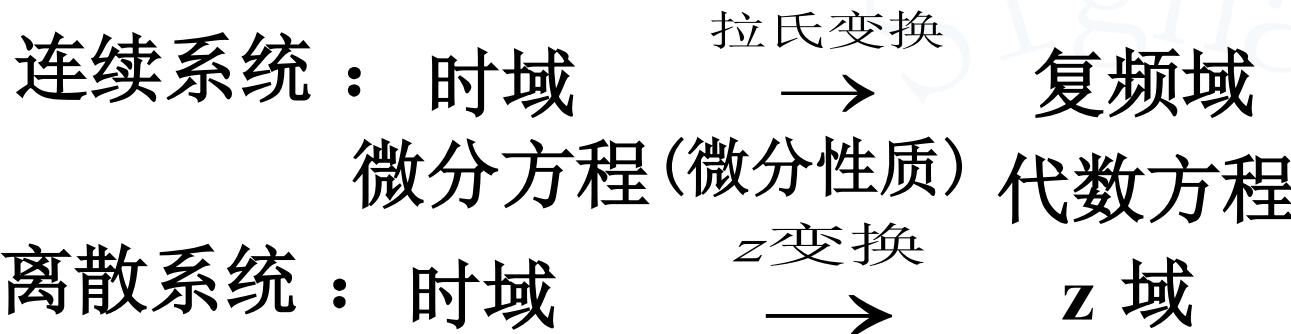
在 z 平面上 θ 每变化 2π ，相应于 s 平面上 ω 变化 $\frac{2\pi}{T}$

因此从 z 平面到 s 平面的映射是多值的。

s 平面上沿虚轴移动对应于 z 平面上沿单位圆周期旋转， s 平面上每移动 $\frac{2\pi}{T}$ ，对应于 z 平面就旋转一周。

第八章 离散时间系统的变换域分析

五、离散时间系统的 z 域分析



$$f(k) \leftrightarrow F(z)$$

$$m=1: f(k+1) \leftrightarrow zF(z) - zf(0)$$

$$m=2: f(k+2) \leftrightarrow z^2F(z) - z^2f(0) - zf(1)$$

$$y(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k) \leftrightarrow Y(z) = Y_{zi}(z) + Y_{zs}(z)$$

（一）系统的零输入响应与零状态响应的求解法

1. 零输入响应 $Y_{zi}(z), y_{zi}(k)$

考虑一个二阶系统：

$$y(k+2) + a_1y(k+1) + a_0y(k) = b_2e(k+2) + b_1e(k+1) + b_0e(k)$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

零输入时: $e(k) = 0$

$$y_{zi}(k+2) + a_1 y_{zi}(k+1) + a_0 y_{zi}(k) = 0$$

取z变换: $(z^2 + a_1 z + a_0)Y_{zi}(z) - y_{zi}(0)z^2 - y_{zi}(1)z - a_1 y_{zi}(0)z = 0$

$$Y_{zi}(z) = \frac{y_{zi}(0)z^2 + [y_{zi}(1) + a_1 y_{zi}(0)]z}{z^2 + a_1 z + a_0} = \frac{C_1 z}{z - \gamma_1}$$

$$y_{zi}(k) = C_1 \gamma_1^k + C_2 \gamma_2^k, k \geq 0$$

C_1, C_2 由零输入初始值 $y_{zi}(0), y_{zi}(1)$ 决定

$$\begin{cases} y_{zi}(0) = C_1 + C_2 \\ y_{zi}(1) = C_1 \gamma_1 + C_2 \gamma_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{y_{zi}(0)\gamma_2 - y_{zi}(1)}{\gamma_2 - \gamma_1} \\ C_2 = \frac{y_{zi}(1) - y_{zi}(0)\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1} \end{cases}$$

2. 零状态响应 $Y_{zs}(z), y_{zs}(k)$

二阶系统: $y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_2 e(k+2) + b_1 e(k+1) + b_0 e(k)$

用zT求系统零输入响应的步骤:

- (1) 对系统的齐次方程进行zT;
- (2) 代入初始条件, 求出z域内的零输入响应 $y_{zi}(z)$;
- (3) 对 $y_{zi}(z)$ 进行反zT即可得到零输入响应 $y_{zi}(k)$ 。

第八章 离散时间系统的变换域分析

取 z 变换:
$$(z^2 + a_1z + a_0)Y(z) - y(0)z^2 - y(1)z - a_1y(0)z = (b_2z^2 + b_1z + b_0)E(z) - b_2e(0)z^2 - b_2e(1)z - b_1e(0)z$$

这里: $Y(z) = Y_{zi}(z) + Y_{zs}(z)$

$$y(0) = y_{zi}(0) + y_{zs}(0) \quad y(1) = y_{zi}(1) + y_{zs}(1)$$

零状态: $y_{zi}(0) = 0, y_{zi}(1) = 0 \Rightarrow Y(z) = Y_{zs}(z)$

$$(z^2 + a_1z + a_0)Y_{zs}(z) - y_{zs}(0)z^2 - y_{zs}(1)z - a_1y_{zs}(0)z = (b_2z^2 + b_1z + b_0)E(z) - b_2e(0)z^2 - b_2e(1)z - b_1e(0)z$$

其中 $y_{zs}(0), y_{zs}(1)$ 仅由 $e(0), e(1)$ 引起, 与系统的初始状态 $y_{zi}(0), y_{zi}(1)$ 无关

令 $k = -2$: $y_{zs}(0) + a_1y_{zs}(-1) + a_0y_{zs}(-2) = b_2e(0) + b_1e(-1) + b_0e(-2)$
 $e(-1) = e(-2) = 0 \Rightarrow y_{zs}(-1) = y_{zs}(-2) = 0$
 $\therefore y_{zs}(0) = b_2e(0)$

令 $k = -1$: $y_{zs}(1) + a_1y_{zs}(0) + a_0y_{zs}(-1) = b_2e(1) + b_1e(0) + b_0e(-1)$
 $e(-1) = 0 \Rightarrow y_{zs}(-1) = 0$
 $\therefore y_{zs}(1) + a_1y_{zs}(0) = b_2e(1) + b_1e(0)$

第八章 离散时间系统的变换域分析

于是 $y_{zs}(0)z^2 + y_{zs}(1)z + a_1 y_{zs}(0)z = b_2 e(0)z^2 + b_1 e(1)z + b_0 e(0)z$

那么 $(z^2 + a_1 z + a_0)Y_{zs}(z) = (b_2 z^2 + b_1 z + b_0)E(z)$
 $D(z)Y_{zs}(z) = N(z)E(z)$

$$Y_{zs}(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} E(z) = \frac{N(z)}{D(z)} E(z) \stackrel{\text{令}}{=} H(z)E(z)$$

讨论: ① 在离散系统中可定义 $H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{E(z)}$ ——

转移函数可直接由差分方程写出: $H(z) =$

② 转移函数与移序算子的形式相同

$$H(z) = H(S) \Big|_{S=z}$$

③ $H(S)$ 是一个算符没有相消问题, 而 $H(z)$ 是

④ $y_{zs}(k) = h(k) * e(k) \leftrightarrow Y_{zs}(z) = H(z)E(z)$

$$\therefore H(z) \leftrightarrow h(k)$$

⑤ $D(z) = z^2 + a_1 z + a_0 = (z - \gamma_1)(z - \gamma_2) = 0$ —— 特

γ_1, γ_2 确定系统的自然响应

用 zT 求 $y_{zs}(k)$ 的步骤如下:

(1) 用移序算子将系统的差分方程写成算子形式;

(2) 写出转移算子 $H(s)$, 以 z 代替 s 即得系统的系统函数;

(3) 以 $e(k)$ 的 zT $E(z)$ 与 $H(z)$ 相乘, 得到 $y_{zs}(z)$;

(4) 对 $y_{zs}(z)$ 进行反 zT 即得 $y_{zs}(k)$ 。

第八章 离散时间系统的变换域分析

(二) 系统响应直接 z 变换求解法

直接对方程取 z 变换(消去有关激励信号初始值 $e(0)$ 、 $e(1)$ 的诸项)：

$$Z\{y(k+2) + a_1y(k+1) + a_0y(k)\} = Z\{b_2e(k+2) + b_1e(k+1) + b_0e(k)\}$$

$$(z^2 + a_1z + a_0)Y(z) - y_{zi}(0)z^2 - y_{zi}(1)z - a_1y_{zi}(0)z = (b_2z^2 + b_1z + b_0)E(z)$$

$y_{zi}(0), y_{zi}(1)$ 是与所加的激励无关的零输入初始值

系统响应总的初始值为：

$$\begin{cases} y_{zs}(0) + y_{zi}(0) = y(0) \\ y_{zs}(1) + y_{zi}(1) = y(1) \end{cases}$$

一般给定的初始值 $y(0), y(1)$ 是指 $y_{zi}(0), y_{zi}(1)$

例1 已知 $y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = e(k+1) - 2e(k)$, $y_{zi}(0) = 0$, $y_{zi}(1) = 1$, $e(k) = 2^k \varepsilon(k)$
求全响应

解：[方法一]

(1) 求 $Y_{zs}(z), y_{zs}(k)$

第八章 离散时间系统的变换域分析

$$Y_{zs}(z) = H(z)E(z) \quad E(z) = Z\{2^k \varepsilon(k)\} = \frac{z}{z-2}$$

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{z-2}{z^2 - 3z + 2} = \frac{z-2}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1}$$

$$Y_{zs}(z) = \frac{1}{z-1} \bullet \frac{z}{z-2} = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}$$

$$y_{zs}(k) = (2^k - 1)\varepsilon(k)$$

(2) 求 $Y_{zi}(z), y_{zi}(k)$

$$Y_{zi}(z) = \frac{y_{zi}(0)z^2 + [y_{zi}(1) + a_1 y_{zi}(0)]z}{z^2 + a_1 z + a_0} = \frac{y_{zi}(0)z^2 + [y_{zi}(1) - 3y_{zi}(0)]z}{z^2 - 3z + 2}$$

$$= \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}$$

$$y_{zi}(k) = (2^k - 1)\varepsilon(k)$$

或 $D(z) = z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2) = 0 \Rightarrow \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2$

第八章 离散时间系统的变换域分析

$$y_{zi}(k) = C_1 \gamma_1^k + C_2 \gamma_2^k = C_1 + C_2 2^k, k \geq 0$$

$$\begin{cases} y_{zi}(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ y_{zi}(1) = C_1 + 2C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow y_{zi}(k) = (2^k - 1)\varepsilon(k)$$

(3) 全响应

$$y(k) = y_{zs}(k) + y_{zi}(k) = 2(2^k - 1)\varepsilon(k)$$

[方法二]

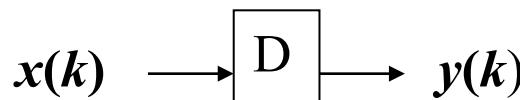
$$Z\{y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k)\} = Z\{e(k+1) - 2e(k)\}$$

$$(z^2 - 3z + 2)Y(z) - y_{zi}(0)z^2 - y_{zi}(1)z + 3y_{zi}(0)z = (z-2)E(z)$$

$$(z^2 - 3z + 2)Y(z) = z + (z-2) \bullet \frac{z}{z-2} = 2z$$

$$\therefore Y(z) = \frac{2z}{z^2 - 3z + 2} \Rightarrow y(k) = 2(2^k - 1)\varepsilon(k)$$

例2 求延迟器的 $H(z)$



解: $y(k) = \frac{1}{S}x(k) = x(k-1) \xrightarrow{z^T} Y(z) = z^{-1}X(z)$

第八章 离散时间系统的变换域分析

$$H(S) = \frac{y(k)}{x(k)} = \frac{1}{S}$$

$$H(z) = H(S) \Big|_{S=z} = \frac{1}{z} \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = z^{-1} = \frac{1}{z}$$

即 $X(z) \rightarrow \boxed{\frac{1}{z}} \rightarrow Y(z)$

例3 一线性时不变系统, 设激励为单位阶跃序列时, 已知其零状态响应为 $a(k)$, 试求系统的单位函数响应。

解: $e(k) = \varepsilon(k)$ 时, $y_{zs}(k) = a(k)$

$$Z\{e(k)\} = E(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$Y_{zs}(z) = Z\{a(k)\} = A(z)$$

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{E(z)} = \frac{A(z)(z-1)}{z} = A(z) - \frac{A(z)}{z}$$

$$\begin{aligned} h(k) &= Z^{-1}\{H(z)\} = Z^{-1}\left\{A(z) - \frac{A(z)}{z}\right\} \\ &= Z^{-1}\{A(z)\} - Z^{-1}\left\{z^{-1}A(z)\right\} = a(k) - a(k-1) \end{aligned}$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

例4 描述某线性移不变离散系统的差分方程为：

$y(k) + 3y(k-1) + 2y(k-2) = e(k)$,
 $y(-1) = 0, y(-2) = 0.5, e(k) = \varepsilon(k)$, 求系统的响应 $y(k)$ 。

解：先检验初始条件，令 $k=-1$ ，代入差分方程得：

$$y(-1) + 3y(-2) + 2y(-3) = 0 ,$$

可见 $y(-1), y(-2), y(-3)$ 与激励无关，故为初始条件

再对差分方程(包括初始条件)进行 z 变换(激励函数边不考虑初始条件)：

$$Y(z) + 3[z^{-1}Y(z) + y(-1)] + 2[z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)] = \frac{z}{z-1}$$

代入 $y(-1) = 0, y(-2) = 0.5$ ，得：

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z^2 + 3z + 2)} = \frac{\frac{z}{6}}{z-1} + \frac{\frac{z}{2}}{z+1} + \frac{\frac{-2z}{3}}{z+2}$$

$$\therefore y(k) = Z^{-1}\{Y(z)\} = \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{2}(-1)^k - \frac{2}{3}(-2)^k \right] \varepsilon(k)$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

(三) 离散时间系统系统函数对系统特性的影响

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{E(z)} = Z\{h(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k}$$

1. 由系统函数的零极点分布确定单位函数响应

n 阶系统: ($m \leq n$)

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_1y(k+1) + a_0y(k) = b_m e(k+m) + \cdots + b_1 e(k+1) + b_0 e(k)$$

$$H(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

$H(z)$ 为有理函数, 则

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^i}{\sum_{j=0}^n a_j z^j} = b_m \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{j=1}^n (z - p_j)} \quad (z_i \text{ 一零点, } p_j \text{ 一极点, } a_n = 1)$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

若 p_j 为一阶极点 p_1, p_2, \dots, p_n

则 $h(k) = Z^{-1}\{H(z)\} = Z^{-1}\left\{\sum_{j=0}^n \frac{A_j z}{z - p_j}\right\}$

$m = n : h(k) = Z^{-1}\left\{A_0 + \sum_{j=1}^n \frac{A_j z}{z - p_j}\right\} = A_0 \delta(k) + \sum_{j=1}^n A_j p_j^k \varepsilon(k)$

$m < n : h(k) = Z^{-1}\left\{\sum_{j=1}^n \frac{A_j z}{z - p_j}\right\} = \sum_{j=1}^n A_j p_j^k \varepsilon(k)$

单位函数响应 $h(k)$ 的特性取决于 $H(z)$ 的极点，其幅值由系数 A_j 决定，而 A_j 与 $H(z)$ 的零点分布有关。与拉氏变换类似， $H(z)$ 的极点决定 $h(k)$ 的波形特征，而零点只影响 $h(k)$ 的幅度与相位。

2. 离散时间系统的稳定性和因果性

离散时间系统稳定的充要条件是单位函数响应 $h(k)$ 绝对可和，即

第八章 离散时间系统的变换域分析

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \leq M$$

(M 为有限值) 或

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

由 z 变换和系统函数定义可知：

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}$$

当 $z=1$ (在 z 平面单位圆上)

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)$$

系统稳定必须满足: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) < \infty$

表明: 稳定系统的 $H(z)$ 收敛域应包含单位圆在内。

对于因果系统: $h(k) = h(k)\varepsilon(k)$

z 变换的收敛域为 $a < |z| \leq \infty$ (包含 ∞ 点)

稳定的因果系统, 应同时满足上述两个条件: $\begin{cases} a < |z| \leq \infty \\ a < 1 \end{cases}$

即对于稳定的因果系统其全部极点应在单位圆内。

第八章 离散时间系统的变换域分析

例 某离散系统的差分方程为

$$y(k) + 0.2y(k-1) - 0.24y(k-2) = e(k) + e(k-1)$$

(1) 求系统函数 $H(z)$;

(2) 讨论此因果系统的收敛域和稳定性;

(3) 求单位函数响应 $h(k)$;

(4) 当激励为单位阶跃序列时, 求此因果系统零状态响应。

解: (1) 对差分方程两边取 z 变换, 得

$$Y(z) + 0.2z^{-1}Y(z) - 0.24z^{-2}Y(z) = E(z) + z^{-1}E(z)$$

于是 $H(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.2z^{-1} - 0.24z^{-2}} = \frac{z(z+1)}{z^2 + 0.2z - 0.24} = \frac{z(z+1)}{(z-0.4)(z+0.6)}$

(2) 由于该系统为因果系统, 故其收敛域为:

$$0.6 < |z| \leq \infty$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

又因为 $H(z)$ 的两个极点分别位于0.4和-0.6,它们都在单位圆内, 所以该系统是一个稳定的因果系统。

$$(3) \frac{H(z)}{z} = \frac{z+1}{(z-0.4)(z+0.6)} = \frac{1.4}{z-0.4} - \frac{0.4}{z+0.6}$$

$$H(z) = \frac{1.4z}{z-0.4} - \frac{0.4z}{z+0.6} \quad (|z| > 0.6)$$

$$\therefore h(k) = [1.4(0.4)^k - 0.4(-0.6)^k] \varepsilon(k)$$

(4) $e(k) = \varepsilon(k)$ 时

$$E(z) = \frac{z}{z-1} \quad (|z| > 1)$$

$$\begin{aligned} Y_{zs}(z) &= H(z)E(z) = \frac{z^2(z+1)}{(z-1)(z-0.4)(z+0.6)} \\ &= \frac{2.08z}{z-1} - \frac{0.93z}{z-0.4} - \frac{0.15z}{z+0.6} \quad (|z| > 1) \end{aligned}$$

$$\therefore y_{zs}(k) = [2.08 - 0.93(0.4)^k - 0.15(-0.6)^k] \varepsilon(k)$$

3. 离散时间系统的稳定性判定

$$H(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

令 $z = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$ ($\lambda = \frac{z + 1}{z - 1}$) ----双线性变换

则 z 平面和 λ 平面之间是一种单值映射关系：

z 平面的单位圆外映射到 λ 平面为虚轴以右的半平面

z 平面的单位圆内映射到 λ 平面为虚轴以左的半平面

z 平面的单位圆映射到 λ 平面为虚轴

因此，根据特征方程 $D(z) = 0$ 的根是否位于 z 平面上单位圆内来判定离散时间系统的稳定性问题，可归结为判定 λ 域中的方程 $G(\lambda) = D\left(\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}\right) = 0$ 的根是否位于 λ 平面上的左半平面

由此，对不易直接求出特征根的离散时间系统的稳定性问题可通过上述双线性变换后，再利用罗斯-霍维茨(*R-H*)准则来判定。

第八章 离散时间系统的变换域分析

例 判定下列特征方程对应的系统是否稳定

$$(1) D(z) = z^3 - 0.5z^2 + 0.25z - 0.075 = 0$$

$$(2) D(z) = z^3 - 2z^2 + 0.25z - 0.5 = 0$$

解: (1) 令 $z = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}$ 代入 $D(z)$, 并化简得

$$G(\lambda) = D\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right) = \frac{0.685\lambda^3 + 2.475\lambda^2 + 3.025\lambda + 1.825}{(\lambda-1)^3} = 0$$

R-H阵列:

0.685	3.025
2.475	1.825
2.520	
1.825	

可见, **R-H**数列没变号, 说明 $G(\lambda) = 0$ 的根都在 λ 平面的左半平面, 即 $D(z) = 0$ 的根都在单位圆内, 故其对应的系统稳定。

(2) 令 $z = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}$ 代入 $D(z)$, 并化简得

$$G(\lambda) = D\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right) = \frac{-1.25\lambda^3 + 2.25\lambda^2 - 3.25\lambda + 3.75}{(\lambda-1)^3} = 0$$

此系统不稳定

六、离散时间系统的频率响应

连续系统

转移函数 $H(s) \xrightarrow{s=j\omega} H(j\omega)$ 频率响应特性

$$= |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad \begin{cases} |H(j\omega)| \text{—幅频特性} \\ \varphi(\omega) \text{—相频特性} \end{cases}$$

离散系统: 已知转移函数 $H(z)$, 频率特性?

(一) 系统的频率响应特性与转移函数的关系

零状态响应:

$$y_{zs}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e(k-n)$$

考虑 $e(k) = e^{j\omega T k}$ (离散的指数序列)

$$y_{zs}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{j\omega T(k-n)} = e^{j\omega T k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega T n}$$

令

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega T n} = H(e^{j\omega T})$$

第八章 离散时间系统的变换域分析

则 $y_{zs}(k) = H(e^{j\omega T})e^{j\omega Tk}$

系统对离散指数序列的稳态响应仍是一离散指数序列, $H(e^{j\omega T})$ 是其复数振幅, 即为系统的频率响应。

又 $h(k)$ 的 z 变换: $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}$

比较可见: $H(e^{j\omega T}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}}$

$$H(e^{j\omega T}) = |H(e^{j\omega T})|e^{j\varphi(\omega)}$$

幅频特性: $|H(e^{j\omega T})| \sim \omega$

相频特性: $\varphi(\omega) = \arctg H(e^{j\omega T}) \sim \omega$

例1 已知描述某离散系统的差分方程为

$y(k+1) - a_1 y(k) = e(k+1)$ ($0 < a_1 < 1$), 试求该系统的频响特性。

解: 系统函数为 $H(z) = \frac{z}{z - a_1}$

第八章 离散时间系统的变换域分析

频响特性为

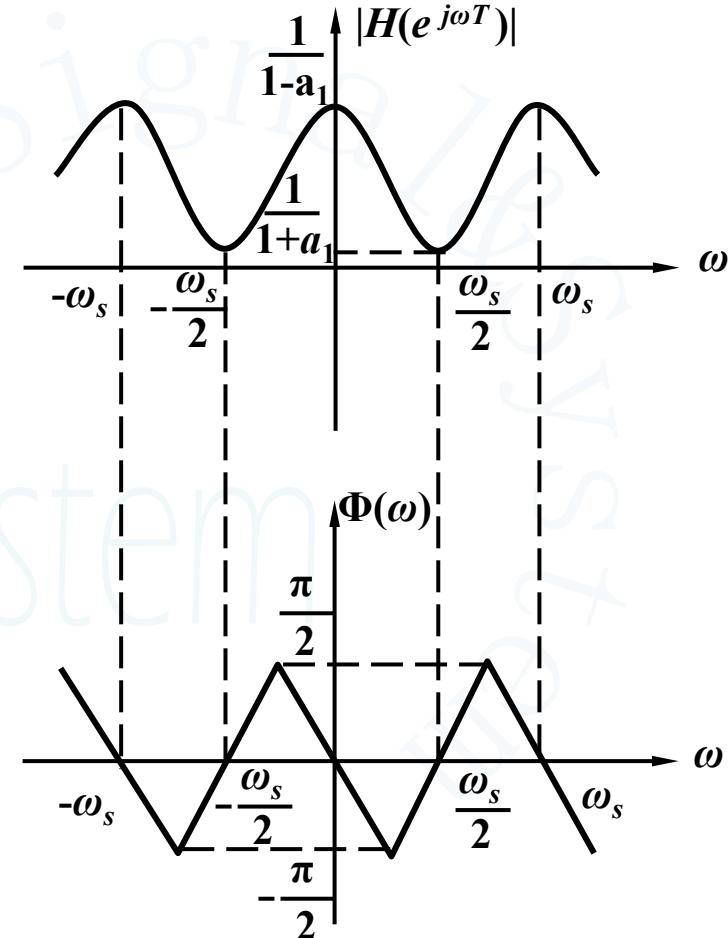
$$\begin{aligned} H(e^{j\omega T}) &= H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - a_1} \\ &= \frac{e^{j\omega T}}{e^{j\omega T}(1 - a_1 e^{-j\omega T})} \\ &= \frac{1}{(1 - a_1 \cos \omega T) + j a_1 \sin \omega T} \end{aligned}$$

于是幅频特性为

$$|H(e^{j\omega T})| = \frac{1}{\sqrt{1 + a_1^2 - 2a_1 \cos \omega T}}$$

相频特性为

$$\varphi(\omega) = -\arg \operatorname{tg} \frac{a_1 \sin \omega T}{1 - a_1 \cos \omega T}$$



DTS的频响特性

由图可见：此系统为一低通滤波器 $(0 < a_1 < 1)$

频响特性的周期是DTS区别于CTS的一个重要特点。

第八章 离散时间系统的变换域分析

例2 二阶系统 $y(k+2) + a_1y(k+1) + a_0y(k) = b_0e(k)$

转移函数 $H(z) = \frac{b_0}{z^2 + a_1z + a_0}$

则频率响应特性: $H(e^{j\omega T}) = H(z)|_{z=e^{j\omega T}}$

$$H(e^{j\omega T}) = H(z)|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{b_0}{e^{j2\omega T} + a_1e^{j\omega T} + a_0} = \frac{b_0}{(\cos 2\omega T + a_1 \cos \omega T + a_0) + j(\sin 2\omega T + a_1 \sin \omega T)}$$

$$|H(e^{j\omega T})| = \frac{b_0}{\sqrt{(\cos 2\omega T + a_1 \cos \omega T + a_0)^2 + (\sin 2\omega T + a_1 \sin \omega T)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{\sin 2\omega T + a_1 \sin \omega T}{\cos 2\omega T + a_1 \cos \omega T + a_0}$$

讨论: ① $|H(e^{j\omega T})|$ 是的 ω 偶函数, $\varphi(\omega)$ 是 ω 的奇函数

② 因为 $e^{j\omega T} (= \cos \omega T + j \sin \omega T)$ 是 ω 的周期函数

所以 $|H(e^{j\omega T})|$ 也是周期函数 $\omega T = 2\pi$

即 $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ —— 抽样系统的抽样频率

第八章 离散时间系统的变换域分析

(二) 频率响应特性曲线的几何作图法

设 $H(z)$ 只含单阶极点和零点

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\ &= \frac{b_m (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)} = \frac{b_m \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{r=1}^n (z - p_r)} \end{aligned}$$

频响特性:

$$H(e^{j\omega T}) = b_m \frac{\prod_{i=1}^m (e^{j\omega T} - z_i)}{\prod_{r=1}^n (e^{j\omega T} - p_r)}$$

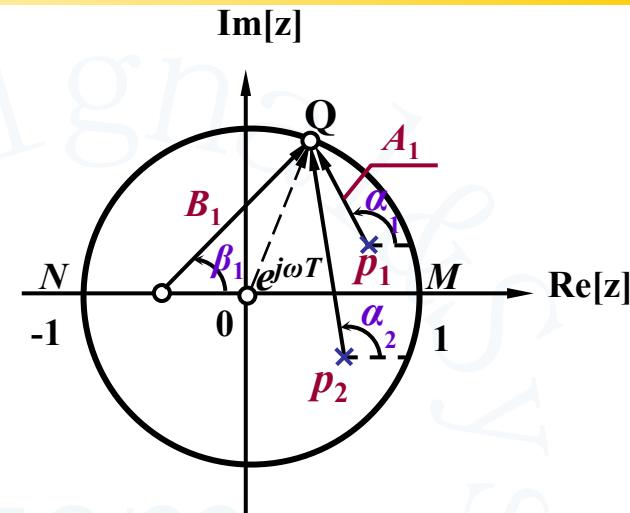
$$\left. \begin{aligned} e^{j\omega T} - z_i &= B_i e^{j\beta_i} \\ e^{j\omega T} - p_r &= A_r e^{j\alpha_r} \end{aligned} \right\} \cdots (1) \quad \text{则}$$

$$H(e^{j\omega T}) = b_m \frac{\prod_{i=1}^m B_i}{\prod_{r=1}^n A_r} e^{j(\sum_{i=1}^m \beta_i - \sum_{r=1}^n \alpha_r)}$$

令

第八章 离散时间系统的变换域分析

$$\left. \begin{aligned} \text{幅频特性: } & |H(e^{j\omega T})| = b_m \frac{\prod_{i=1}^m B_i}{\prod_{r=1}^n A_r} \\ \text{相频特性: } & \varphi(\omega) = \sum_{i=1}^m \beta_i - \sum_{r=1}^n \alpha_r \end{aligned} \right\} \cdots (2)$$



s平面中的虚轴映射到z平面为一单位圆

当s平面中的一点由原点 $j\omega = 0$ 沿 $j\omega$ 轴正方向移动时，在z平面中的点即由 $z=1$ 点沿单位圆逆时针方向移动。

几何作图法:

由(1)式用矢量作图法可对每一 ω 值求出差矢量，然后代入(2)式得幅频响应及相频响应的各样点值。

第八章 离散时间系统的变换域分析

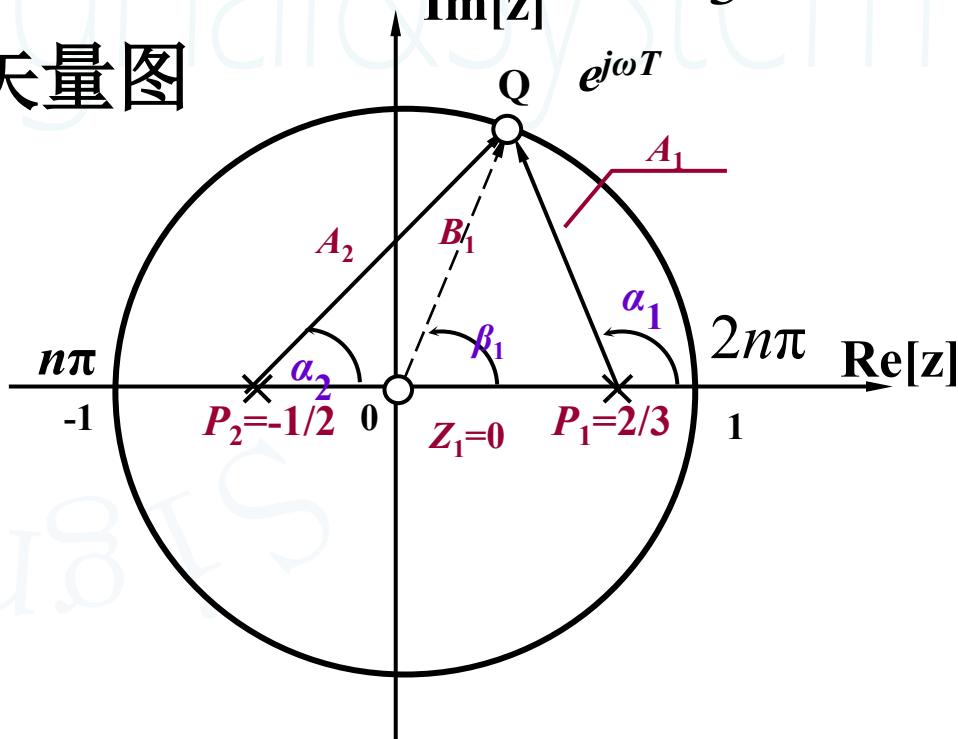
例 已知系统函数 $H(z) = \frac{z}{(z - \frac{2}{3})(z + \frac{1}{2})}$

粗略画出系统的幅频特性曲线(用几何作图法)。

解: 先求系统频响特性函数

$$H(e^{j\omega T}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{e^{j\omega T}}{(e^{j\omega T} - \frac{2}{3})(e^{j\omega T} + \frac{1}{2})}$$

作出矢量图

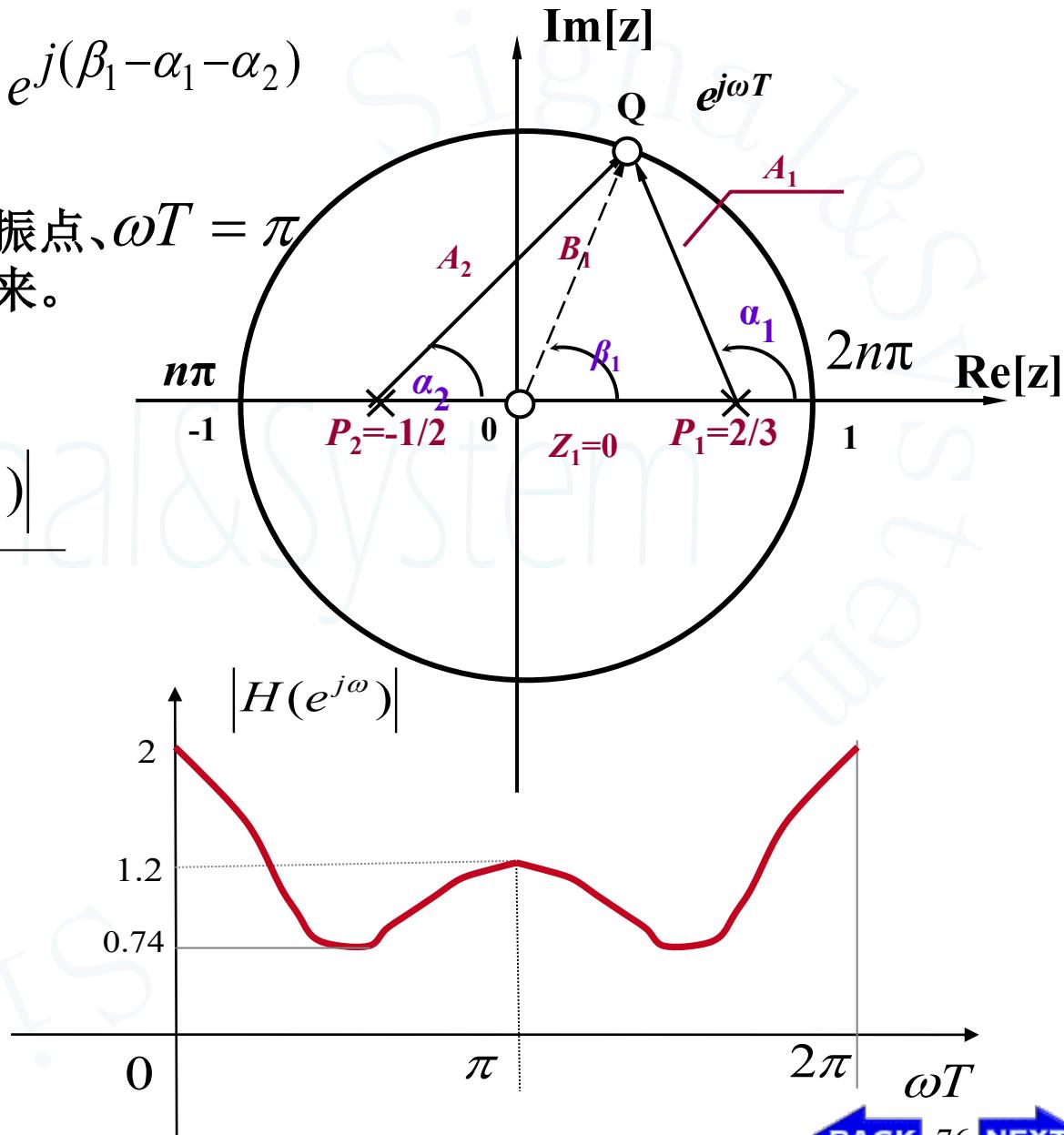


第八章 离散时间系统的变换域分析

则 $H(e^{j\omega T}) = \frac{B_1}{A_1 A_2} e^{j(\beta_1 - \alpha_1 - \alpha_2)}$

作图时要把握好零点、谐振点、 $\omega T = \pi$ 点的值，把发展趋势画出来。

ωT	A_1	A_2	B_1	$ H(e^{j\omega}) $
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	1	2
$\frac{\pi}{2}$	1.2	1.1	1	0.74
π	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	1.2



作业:

8.1 (3)(4)(5)(6) 8.2 8.3 8.9

8.7 (1)(3)(5) 8.8 8.10

8.18(1)(2) 8.19(1) 8.20