



传热传质学

主讲人：胡润

hurun@hust.edu.cn



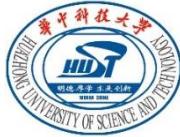
Preparation

教 材

- 《工程传热学》邬田华编著

参考书

- 《传热学》杨世铭 等
- 《Heat Transfer》 J.P.Holman
- 《Fundamentals of heat and mass transfer》
T.L.Bergman etc.



第一章 绪论

§ 1-1 传热学概述

§ 1-2 热量传递的基本方式

§ 1-3 传热过程与传热系数



§ 1-1 传热学概述

1 What?

什么是传热学?

2 Why?

为什么要学习
传热学?

传热学

3 Where?

传热学用在哪?

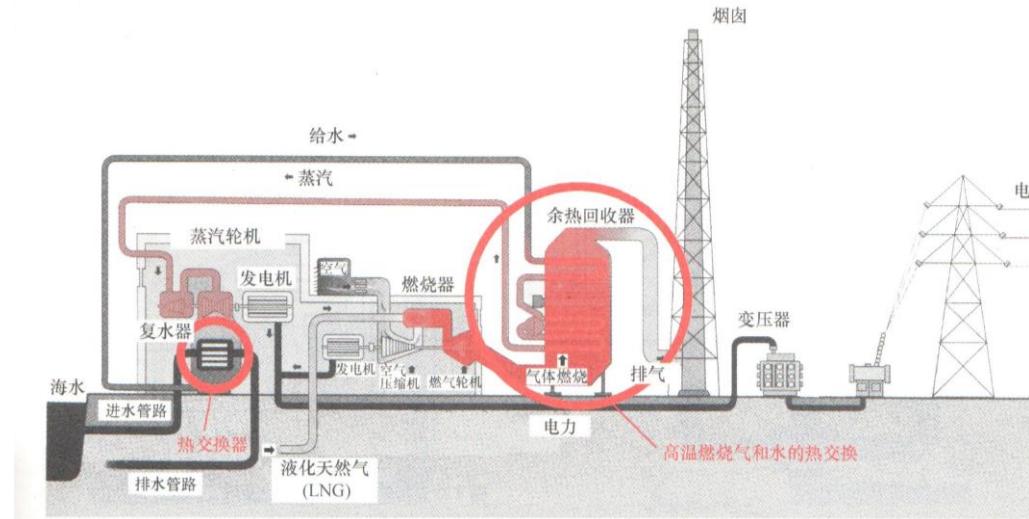


1 什么是传热学?

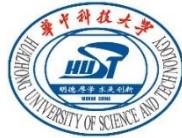
- 研究**热量传递规律**的一门科学，具体来讲主要有**热量传递的机理、规律、计算和测试方法**。



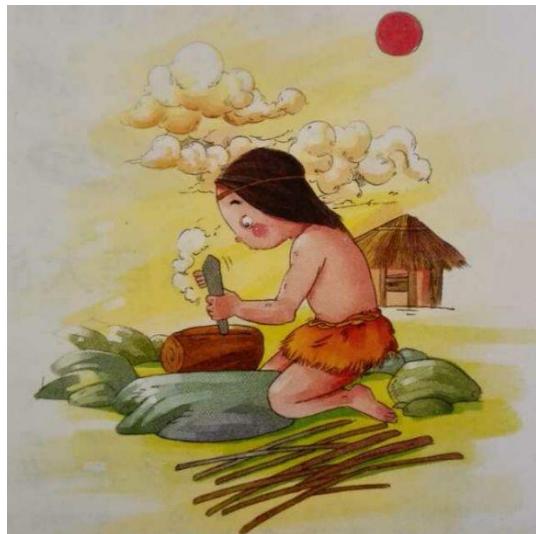
日常生活

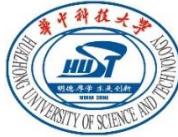


工业生产



1 什么是传热学? —热量来源





1 什么是传热学?

➤ 热量传递过程的推动力：**温差**

1. 热力学第一定律：能量守恒定律 \Rightarrow 基础
2. 热力学第二定律：热量可以自发地**由高温热源传给低温热源** \Rightarrow 有温差就会有传热 \Rightarrow 温差是热量传递的推动力



1 什么是传热学?

➤ 传热学基本任务

① 求解温度分布

② 计算热量传递的速率

热力学 + 传热学 = 热科学 (Thermal Science)



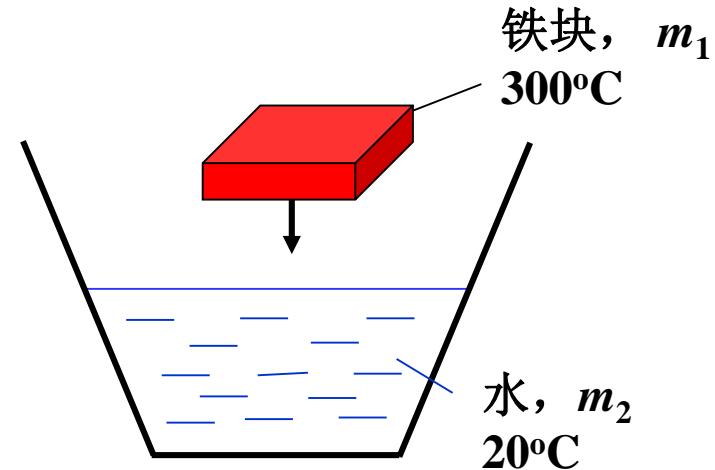
系统从一个平衡态到另一个平衡态的过程中传递热量的多少。

t_m , Q



关心的是热量传递的过程，即热量传递的速率。

$$t = f(x, y, z, \tau); Q = f(\tau)$$





2 为什么要学习传热学?

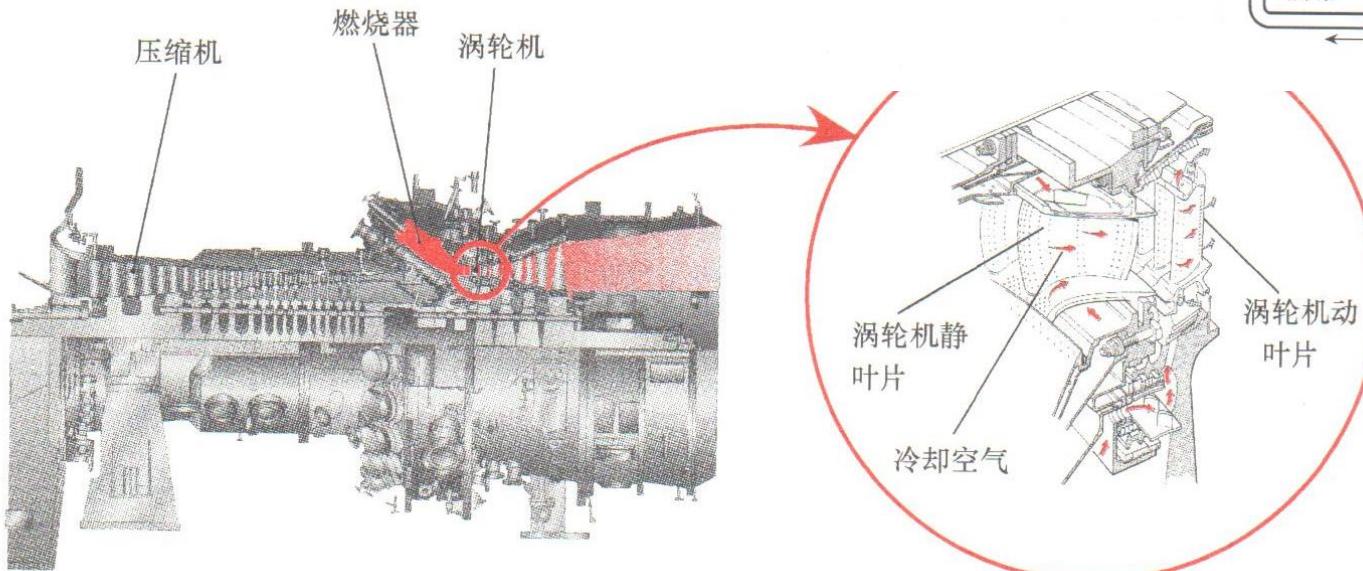
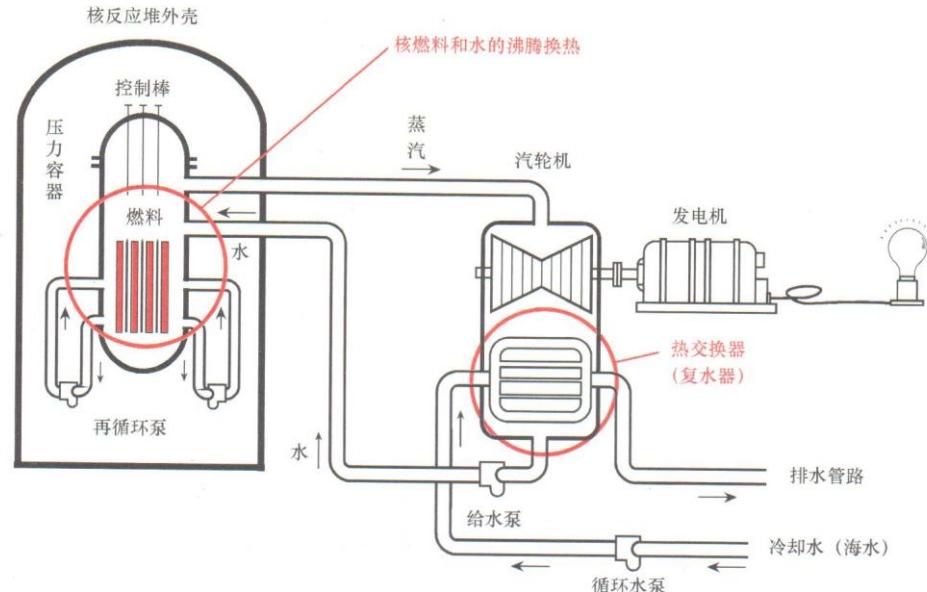


- 能源与动力
- 制冷与低温
- 材料科学
- 航天航空
- 微电子机械系统
- 电子芯片冷却
- 生命科学
- 新能源
- 其他



3 传热学用在哪?

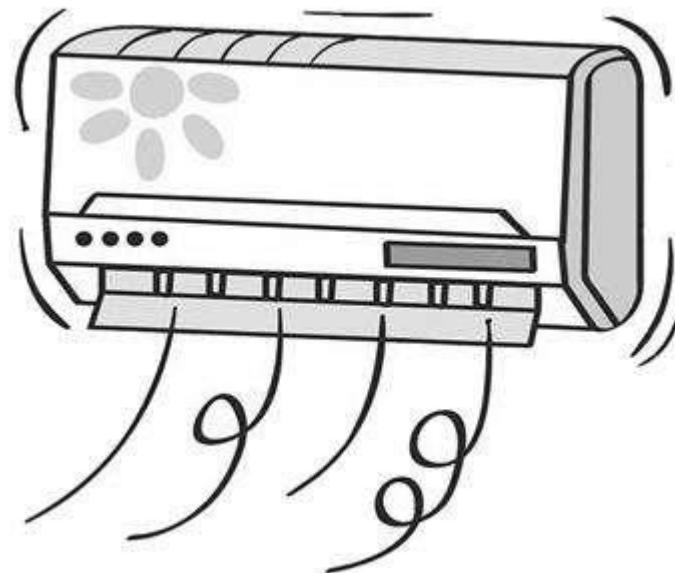
➤ 能源与动力

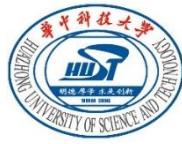




3 传热学用在哪?

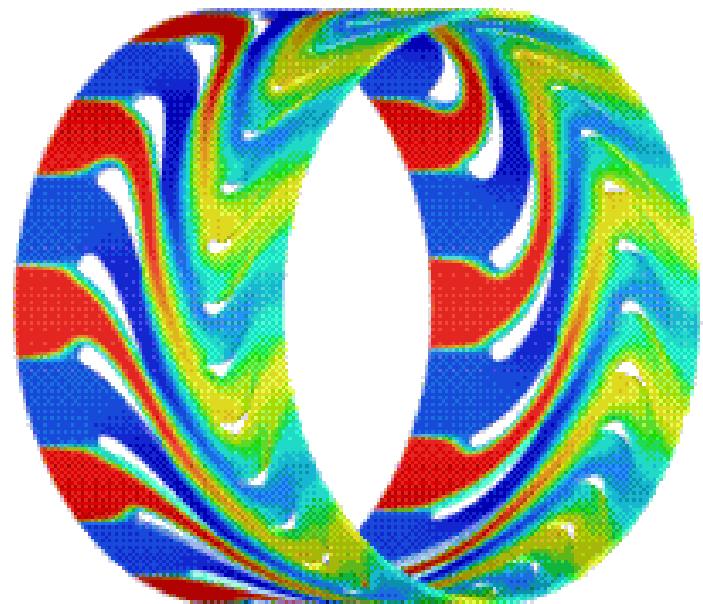
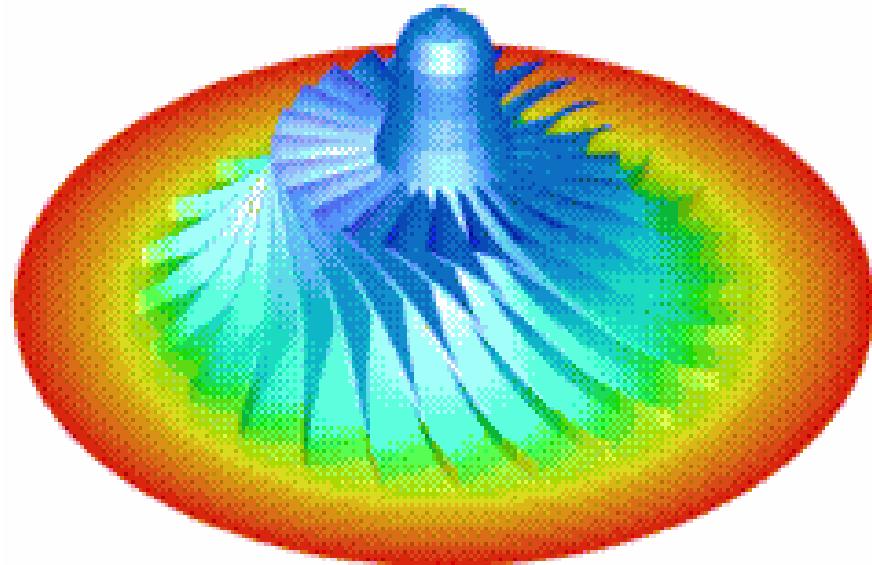
➤ 制冷与低温





3 传热学用在哪?

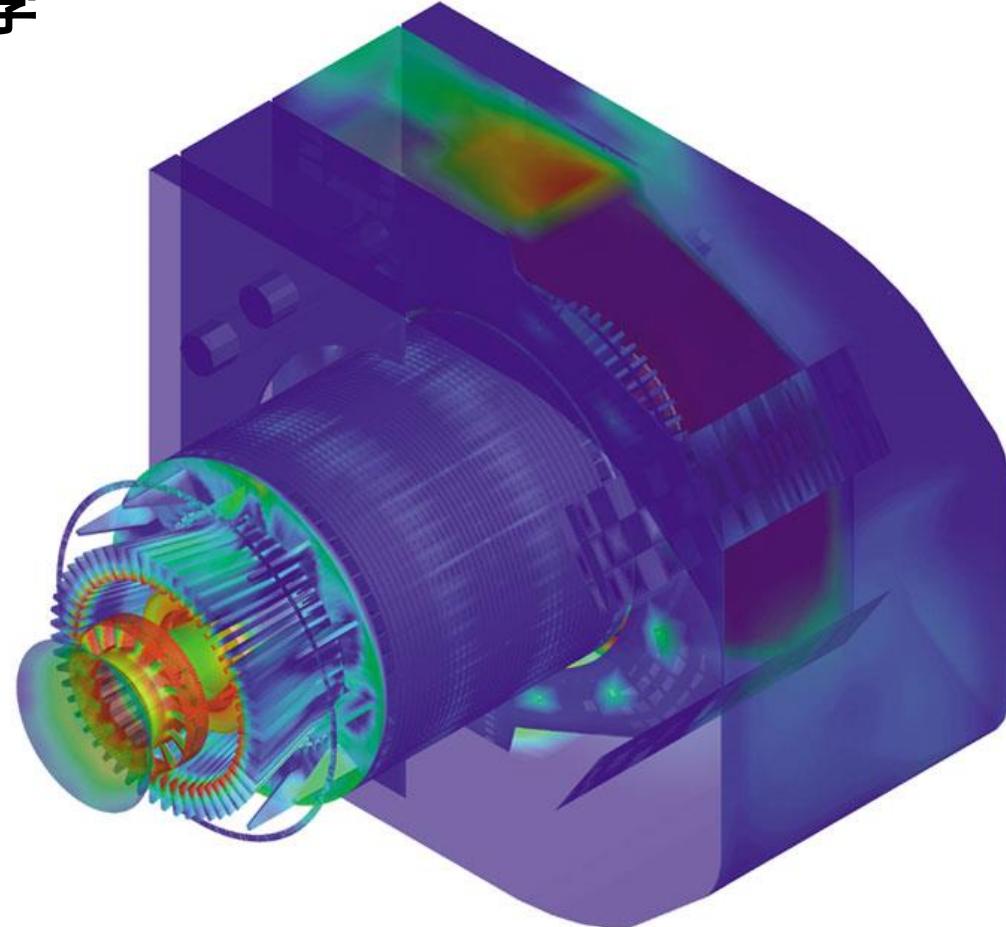
➤ 材料科学





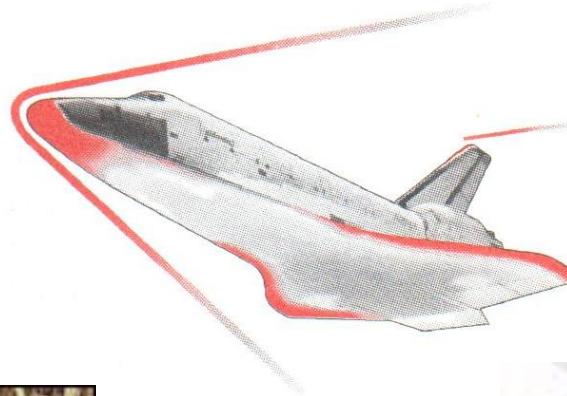
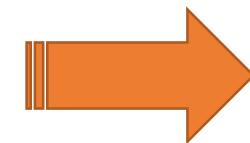
3 传热学用在哪?

➤ 材料科学



3 传热学用在哪?

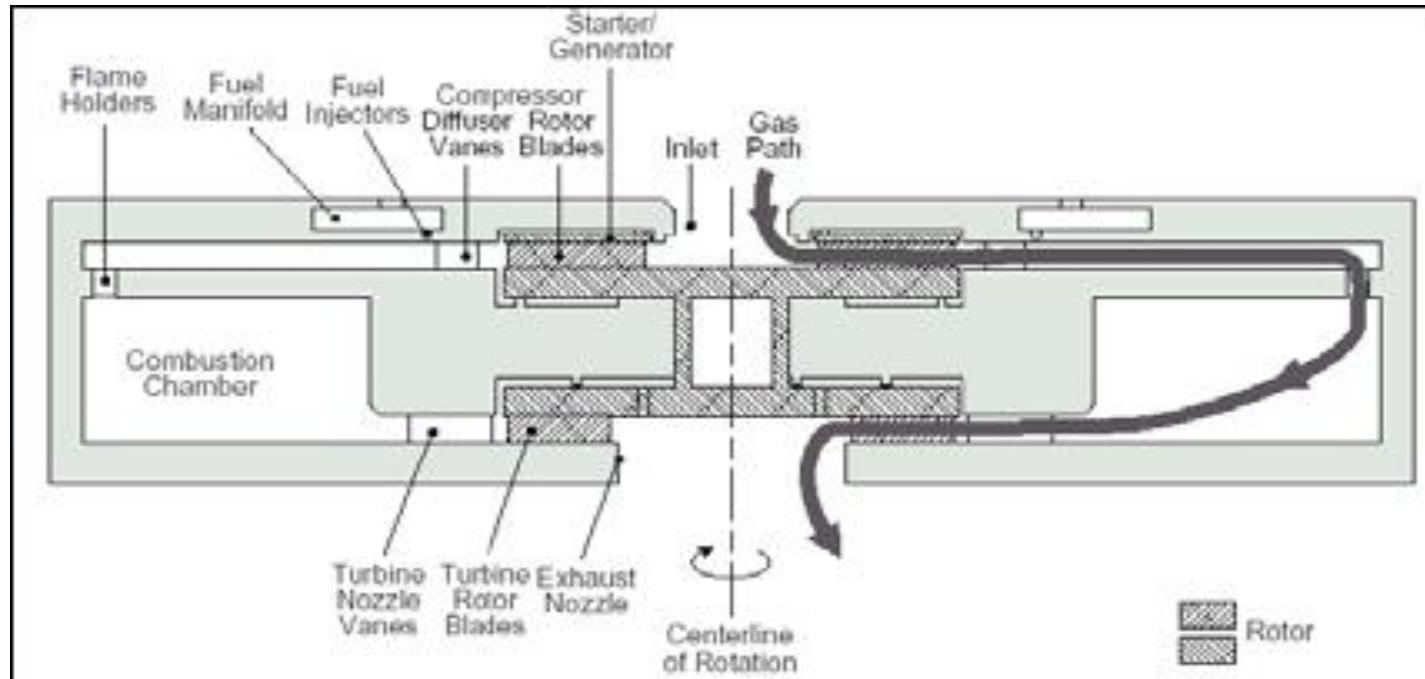
➤ 航天航空



航天器发射前与回收后

3 传热学用在哪?

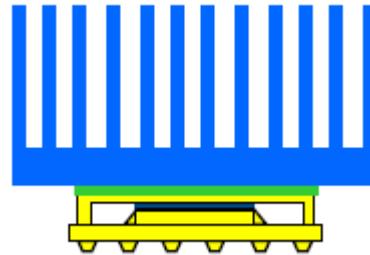
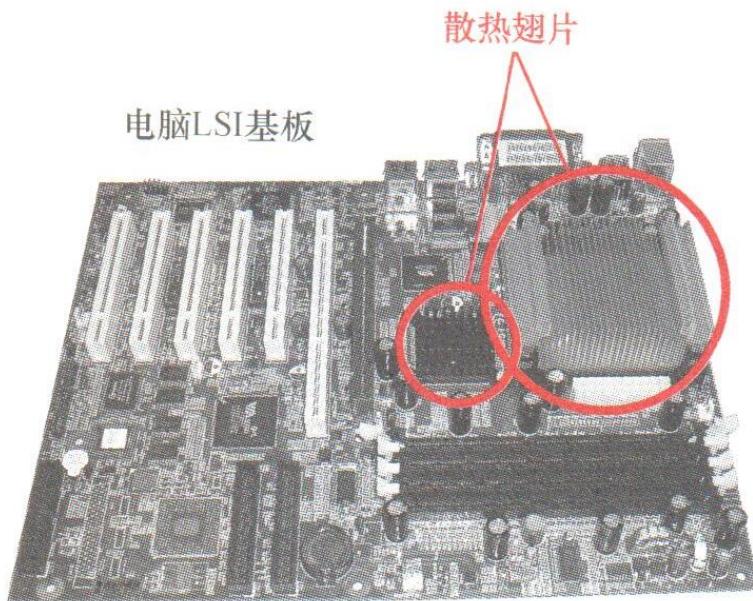
➤ 微电子机械系统 (MEMS)





3 传热学用在哪?

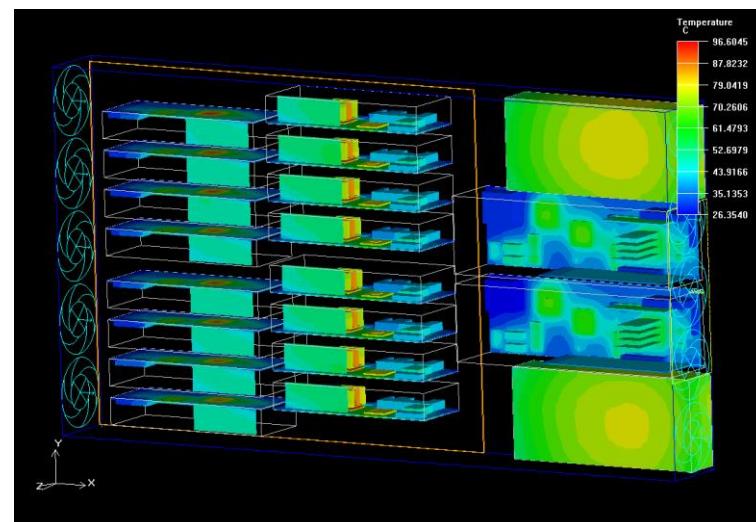
➤ 电子芯片冷却



CPU散热



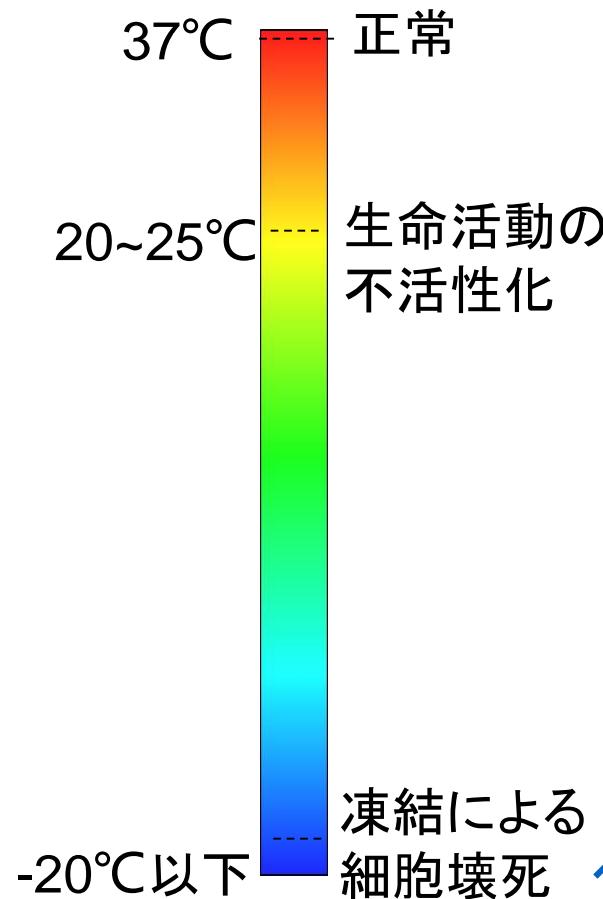
LED散热



超级计算机散热模拟

3 传热学用在哪?

➤ 生命科学



医療への応用



低温療法

<http://www.hokuto7.or.jp/treatment/lowtemperature/index.html>

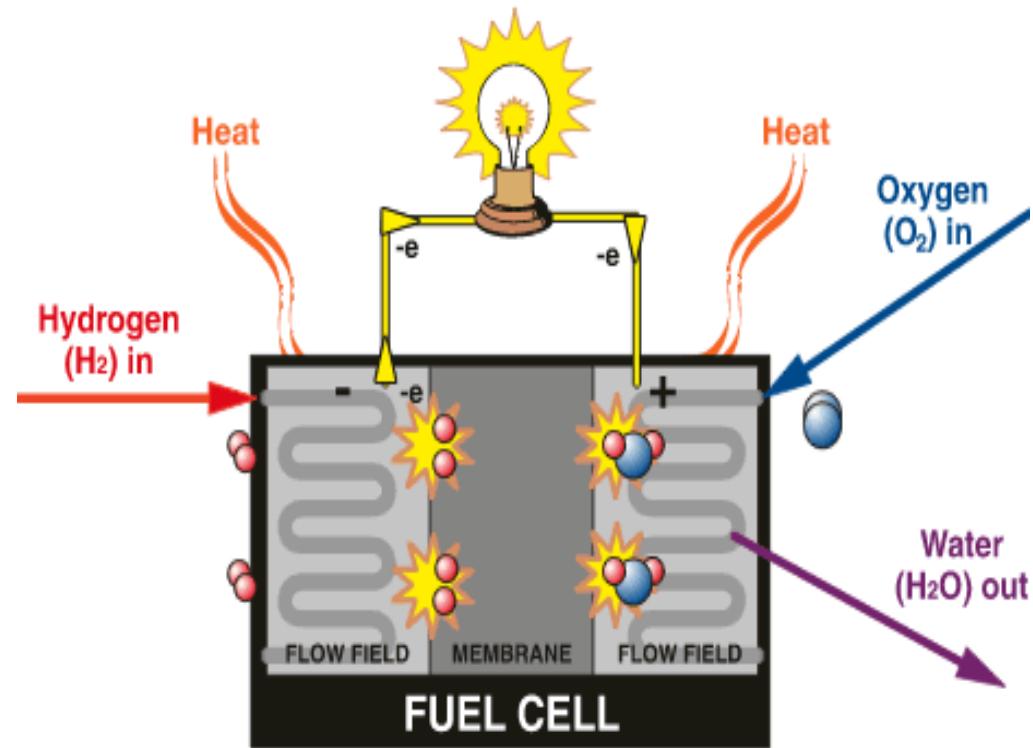


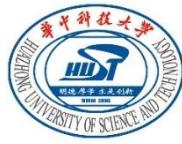
凍結手術

<http://www.ellisfischel.org/liver/cryotherapy.shtml>

3 传热学用在哪?

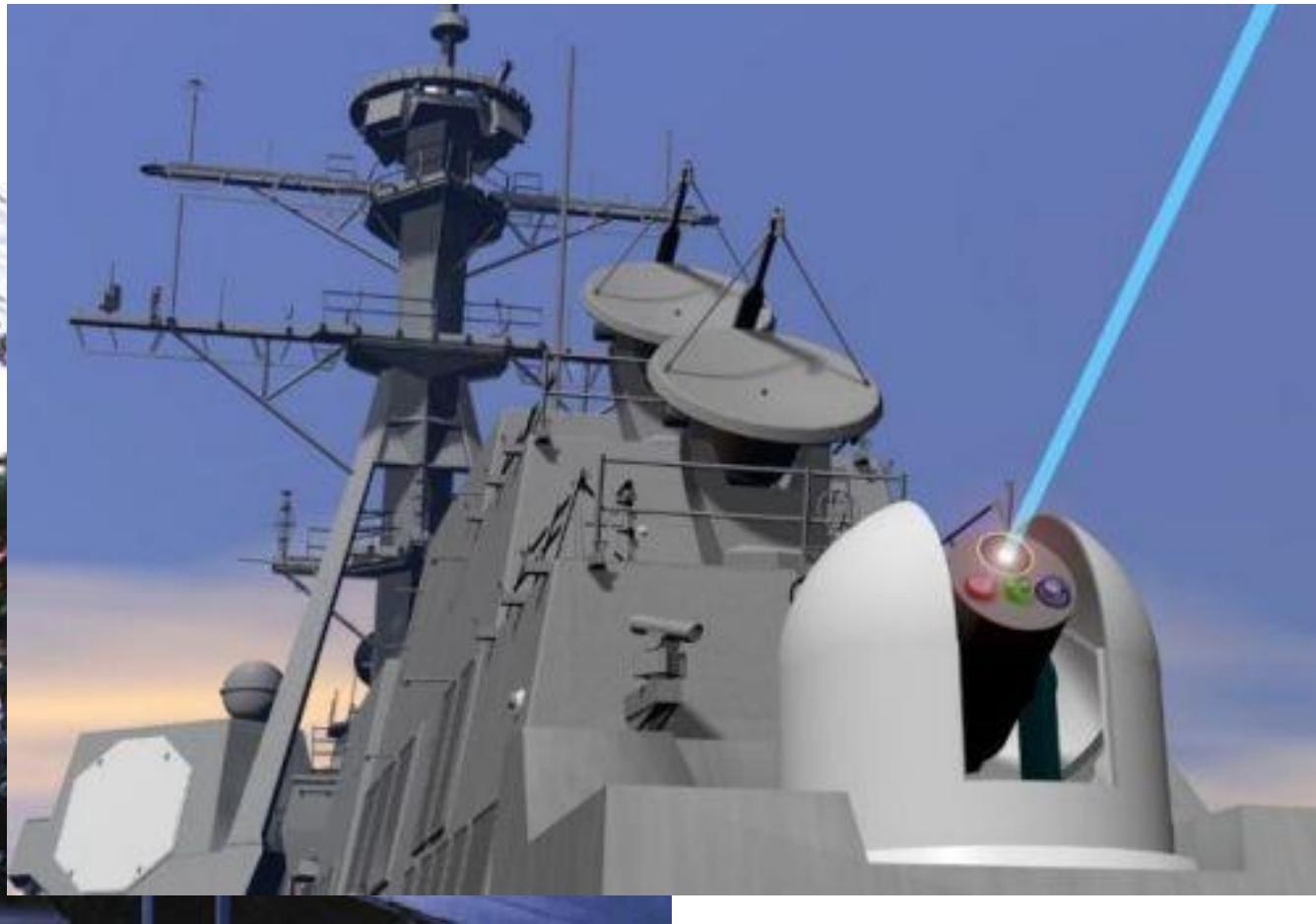
➤ 新能源





3 传热学用在哪?

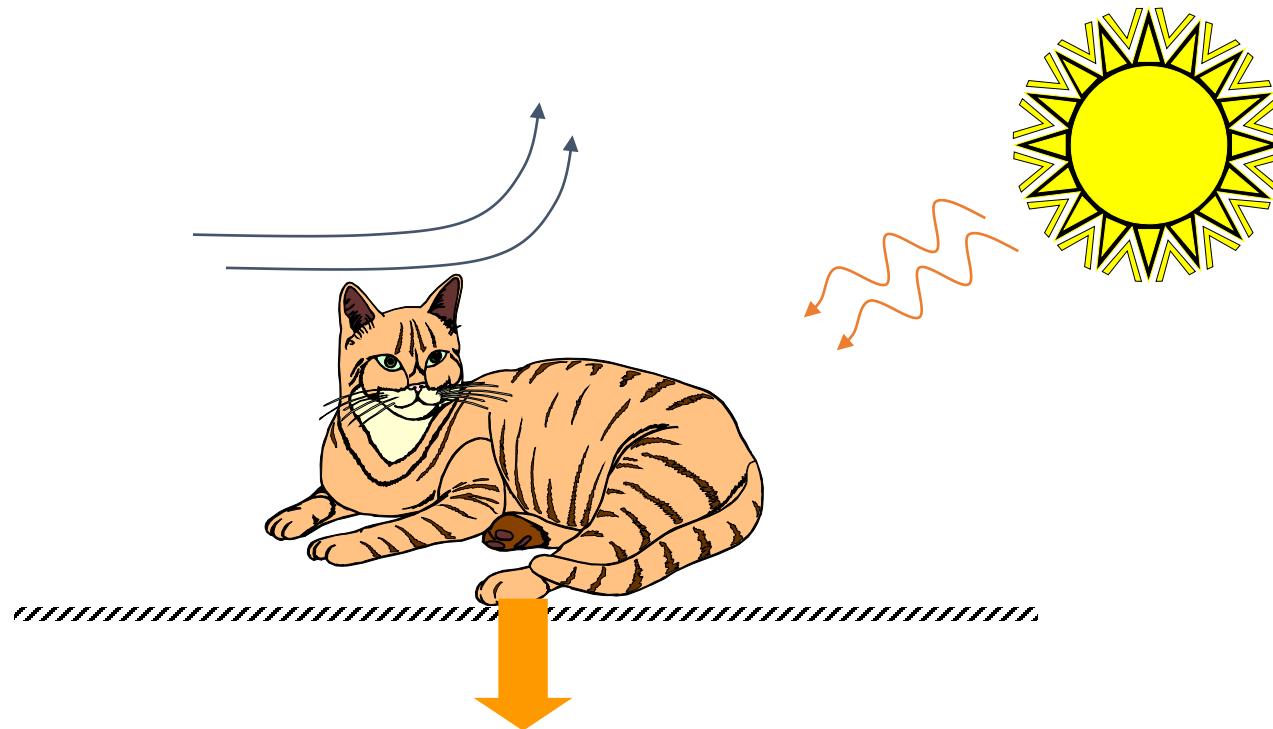
➤ 其他

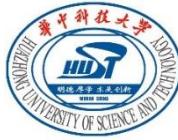




§ 1-2 热量传递的基本方式

- 热量传递基本方式：热传导、热对流、热辐射





1 热传导 (Conduction)

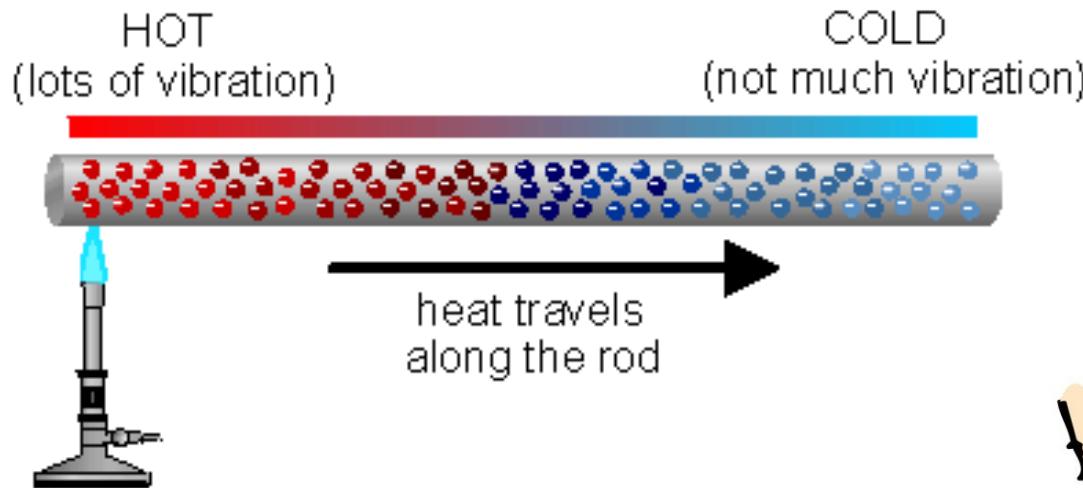
① 热传导的定义

- 温度不同的物体各部分之间或温度不同的各物体之间直接接触；
- 依靠分子、原子及自由电子等微观粒子的热运动而进行热量传递的现象。
- 不发生宏观的相对位移

② 物质的属性：可以在固体、液体、气体中发生



1 热传导 (Conduction)



同一物体内的热传导

不同物体之间的热传导





1 热传导 (Conduction)

③ 热传导的机理

- 气体：气体分子不规则运动时相互碰撞的结果
- 导电固体：自由电子运动
- 非导电固体：晶格结构振动
- 液体：兼有气体和固体导热的机理



1 热传导 (Conduction)

④ 导热基本定律—傅里叶定律 (Fourier's Law)

1822年，法国数学家Fourier：

$$q = \frac{\Phi}{A} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}$$

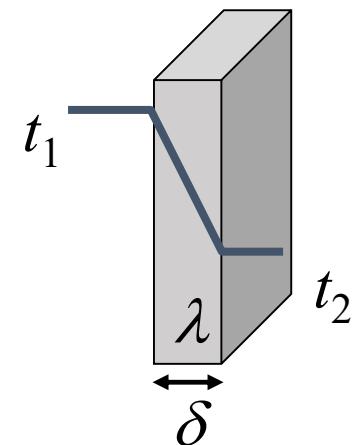


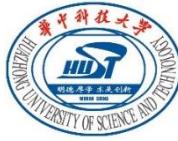
Φ ：热流量，单位时间传递的热量 [W]；

q ：热流密度，单位时间通过单位面积传递的热量 $[W/m^2]$ ；

A ：垂直于导热方向的截面积 $[m^2]$ ；

λ ：热导率 $[W/(m \cdot K)]$ 。



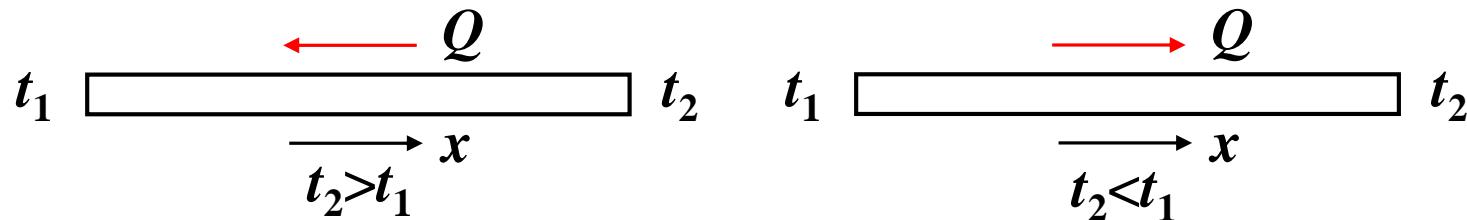


1 热传导 (Conduction)

④ 导热基本定律—傅里叶定律 (Fourier's Law)

$$q = \frac{\Phi}{A} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \quad \text{W/m}^2$$

➤ 负号表示热量传递的方向与温度升高的方向相反。



➤ 当温度 t 沿 x 方向增加时, $dt/dx > 0$, $q < 0$, 说明热量沿 x **减小** 的方向传递; 反之, $dt/dx < 0$, $q > 0$, 说明热量沿 x **增加** 的方向传递。



1 热传导 (Conduction)

④ 导热基本定律—傅里叶定律 (Fourier's Law)

$$q = \frac{\Phi}{A} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \quad \text{W/m}^2$$

λ 表征材料导热能力的大小。

- 热导率是**物性参数**，不同材料的热导率相差很大；
- 热导率是**温度**的函数；
- 某些材料具有**各向异性**特征（石墨等）；
- 一般说来，电的良导体也是热的良导体。

$$\lambda_{\text{金属}} > \lambda_{\text{非金属}} > \lambda_{\text{液体}} > \lambda_{\text{气体}}$$



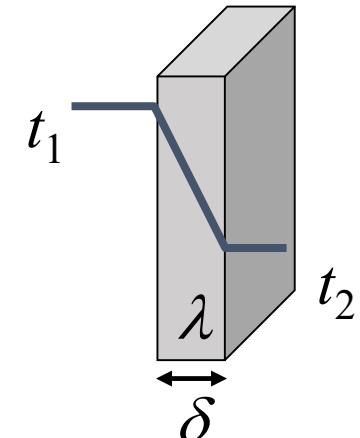
1 热传导 (Conduction)

⑤ 热流量和热阻

大平板**稳态**导热，由于是一维问题，且 Φ 和 q 为常量，积分傅立叶定律：

$$q = \frac{\Phi}{A} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} = -\lambda \frac{dt}{dx}$$

$$q \int_0^\delta dx = -\lambda \int_{t_1}^{t_2} dt \Rightarrow q = \lambda \frac{t_1 - t_2}{\delta}$$



$$q = \frac{t_1 - t_2}{\delta} = \frac{\Delta t}{r_\lambda} \quad \text{和} \quad \Phi = \frac{t_1 - t_2}{\delta} = \frac{\Delta t}{R_\lambda}$$



1 热传导 (Conduction)

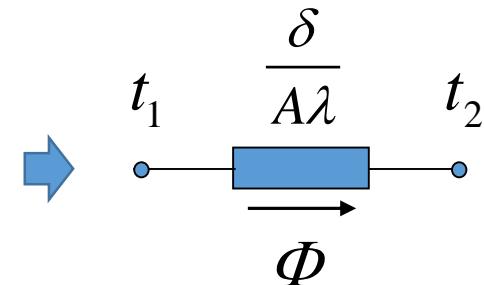
⑤ 热流量和热阻

$$q = \frac{t_1 - t_2}{\frac{\delta}{\lambda}} = \frac{\Delta t}{r_\lambda}$$

单位导热热阻

$$\Phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{\delta}{A\lambda}} = \frac{\Delta t}{R_\lambda}$$

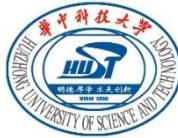
导热热阻



事实上，各种迁移过程（电量、热量、流量）都有一个共同规律，就是：

过程中的迁移量 = $\frac{\text{过程的动力}}{\text{过程的阻力}}$

→ 热量 = $\frac{\text{温差}}{\text{热阻}}$



1 热传导 (Conduction)

例题：一块厚度 $\delta = 5\text{mm}$ 的平板，两侧表面分别维持在 $t_{w1}=300\text{ }^{\circ}\text{C}$, $t_{w2}=100\text{ }^{\circ}\text{C}$ 。试求下列条件下通过单位截面积的导热量：（1）材料为铜， $\lambda = 375\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ；（2）材料为钢， $\lambda = 36.4\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ；（3）材料为铬砖， $\lambda = 2.32\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ；（4）材料为硅藻土， $\lambda = 0.242\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ 。

假设：（1）一维导热问题；（2）稳态过程；（3）导热系数为常数。

$$q = \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\frac{\delta}{\lambda}}$$

计算，将已知数值代入得：



1 热传导 (Conduction)

➤ 铜

$$q = 375 \text{W}/(\text{m} \cdot \text{K}) \times \frac{300^\circ\text{C} - 100^\circ\text{C}}{0.05\text{m}} = 1.50 \times 10^6 \text{W}/\text{m}^2$$

➤ 钢

$$q = 36.4 \text{W}/(\text{m} \cdot \text{K}) \times \frac{300^\circ\text{C} - 100^\circ\text{C}}{0.05\text{m}} = 1.46 \times 10^5 \text{W}/\text{m}^2$$

➤ 铬砖

$$q = 2.32 \text{W}/(\text{m} \cdot \text{K}) \times \frac{300^\circ\text{C} - 100^\circ\text{C}}{0.05\text{m}} = 9.28 \times 10^3 \text{W}/\text{m}^2$$

➤ 硅藻土砖

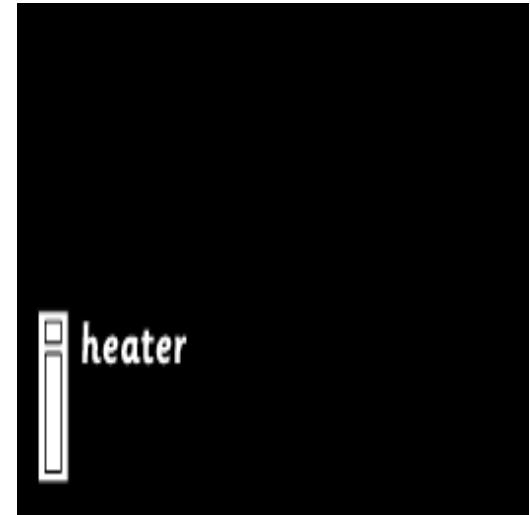
$$q = 0.242 \text{W}/(\text{m} \cdot \text{K}) \times \frac{300^\circ\text{C} - 100^\circ\text{C}}{0.05\text{m}} = 9.68 \times 10^2 \text{W}/\text{m}^2$$

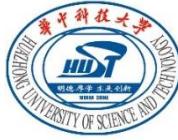


2 热对流 (Convection)

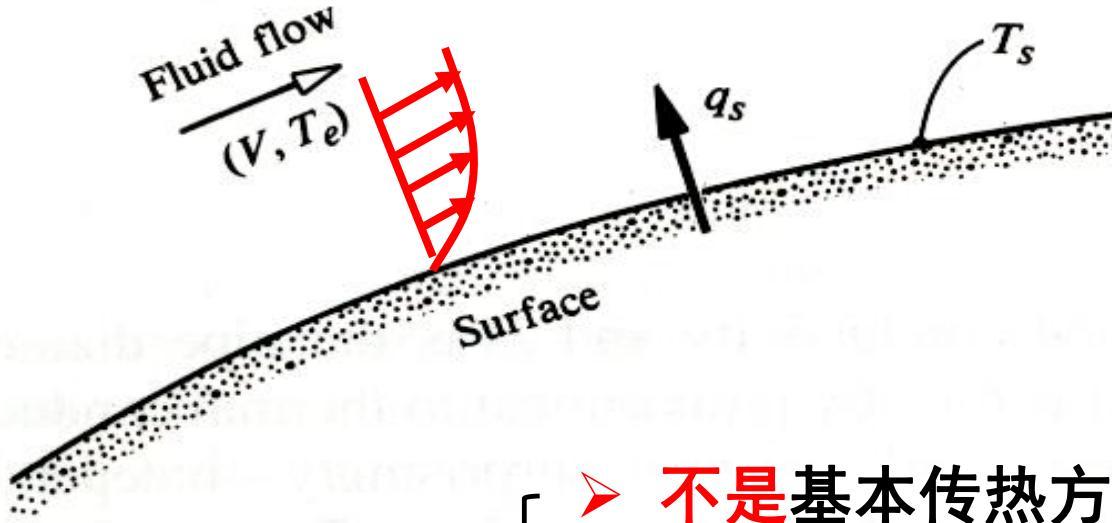
① 热对流与对流换热

- 若流体有宏观的运动，且内部存在**温差**，则由于流体各部分之间发生**相对位移**，冷热流体相互掺混而产生的热量传递现象称为**热对流**。（**对流必然伴随有导热**）
- 传热学研究的是流体流过固体表面时，对流和导热共同作用下的热量传递过程，称为**对流传热**。





2 热对流 (Convection)



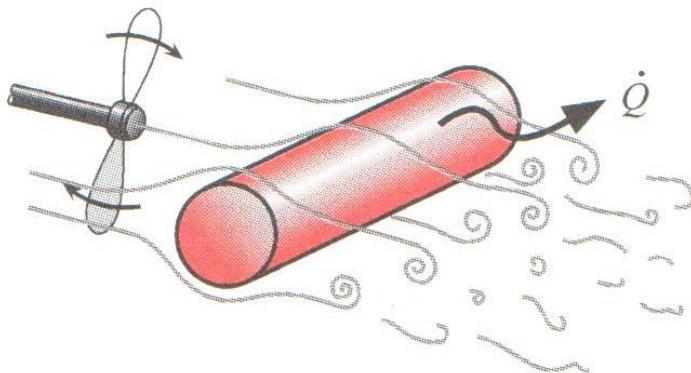
② 对流换热的特点

- 不是基本传热方式，导热与热对流同时存在的复杂热传递过程；
- 必须有直接接触（流体与壁面）和宏观运动，也必须有温差；
- 壁面处会形成速度和温度梯度很大的边界层。

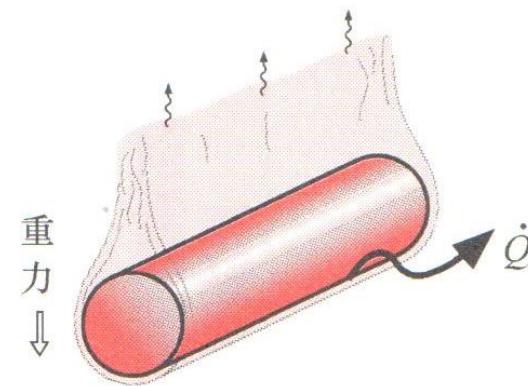
2 热对流 (Convection)

③ 分类

- 强迫对流传热—外力引起的对流传热
- 自然对流传热—密度差（温度差）引起的对流传热



强迫对流 (forced convection)



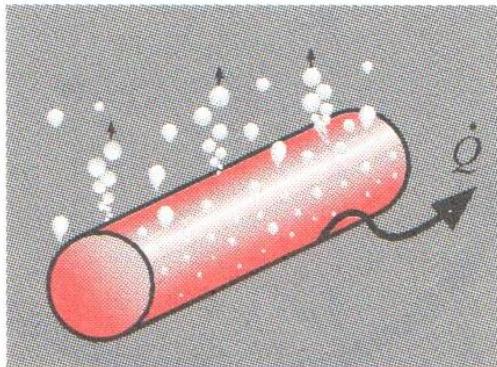
自然对流 (natural convection)



2 热对流 (Convection)

③ 分类

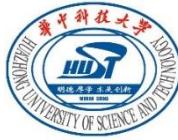
- 沸腾与凝结传热—伴随有相变的传热



沸腾 (boiling)



凝结 (condensation)

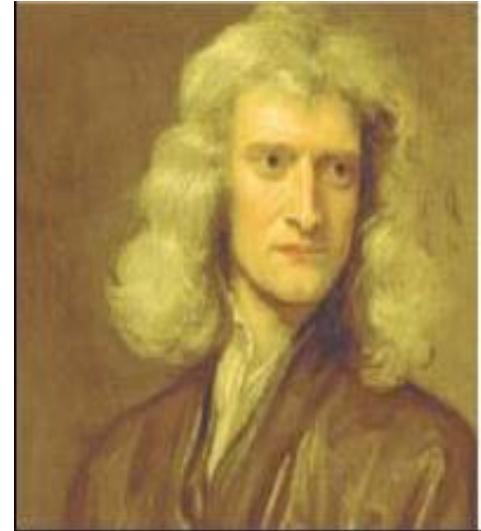


2 热对流 (Convection)

④ 对流换热公式—牛顿冷却公式

1701年，英国物理家Newton：

$$q = \frac{\Phi}{A} = h(t_w - t_\infty) \quad \text{W/m}^2$$



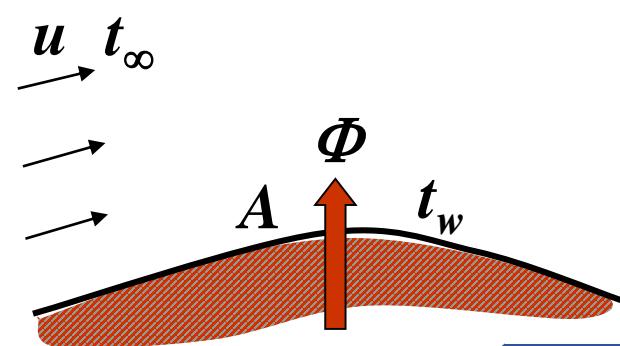
Isaac Newton (1642-1727)

Φ ：热流量，单位时间传递的热量 [W]；

q ：热流密度，单位时间通过单位面积传递的热量 $[\text{W}/\text{m}^2]$ ；

A ：垂直于导热方向的截面积 $[\text{m}^2]$ ；

h ：表面传热系数 $[\text{W}/(\text{m}^2 \text{ K})]$ 。





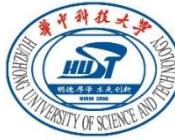
2 热对流 (Convection)

④ 对流换热公式—牛顿冷却公式

$$h = \frac{\Phi}{A(t_w - t_\infty)} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

h ：表征对流换热过程强弱的物理量。与热导率不同，表面传热系数**不是物性参数**，它是一个过程量。

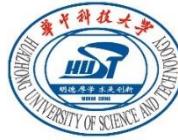
➤ 影响 h 因素：流体的物性（导热系数、粘度、密度、比热容等）、流动的形态（层流、紊流）、流动的成因（自然对流或强制对流）、物体表面的形状、尺寸，换热时有无相变（沸腾或凝结）等。



2 热对流 (Convection)

过程类型	工质类别	$h/[W/(m^2 \cdot K)]$
自然对流	空 气	1~10
	水	200~1000
强制对流	气 体	20~100
	高压水蒸气	500~3500
	水	1000~15000
相变传热	水沸腾	2500~35000
	水蒸气凝结	5000~25000

- 研究对流换热的基本任务就是用理论分析或实验方法得出不同情况下表面传热系数的计算关系式。

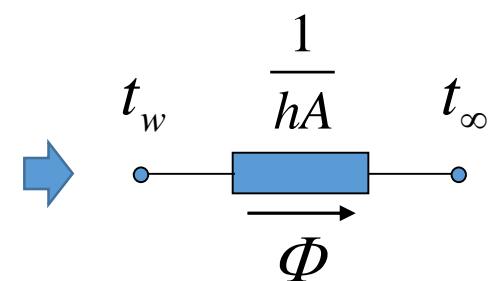


2 热对流 (Convection)

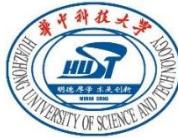
⑤ 对流换热热阻

$$q = \frac{\Phi}{A} = h(t_w - t_\infty) \quad \text{W/m}^2$$

→ $q = \frac{\Phi}{A} = \frac{t_w - t_\infty}{\frac{1}{h}} \quad \text{W/m}^2$



→ $r_h = \frac{1}{h} \quad \text{和} \quad R_h = \frac{1}{hA}$



3 热辐射 (Radiation)

① 热辐射的定义和特点

- 由热运动产生的，以**电磁波**形式传递能量的现象。
- 特点：
 - a) 温度高于0 K的任何物体，都会不停地向周围空间发出热辐射；
 - b) 可以在真空中传播；
 - c) 伴随能量形式的转变；
物体热力学能 ⇌ 电磁波能 ⇌ 物体热力学能
 - d) 辐射能与温度，波长，方向角均有关。



3 热辐射 (Radiation)

② 斯忒藩—玻尔兹曼公式

黑体 (Black body) : 能全部吸收投射到其表面辐射能的物体。或称绝对黑体。黑体的辐射能力与吸收能力最强。

➤ 黑体向外发射的辐射能:

$$E_b = \sigma T^4 \text{ W/m}^2$$

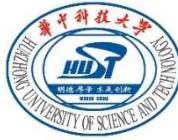
E_b : 绝对黑体辐射力

T : 黑体表面的绝对温度 (热力学温度)

σ : 斯蒂芬-玻尔兹曼常数, $\sigma=5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$



Baidu Baike



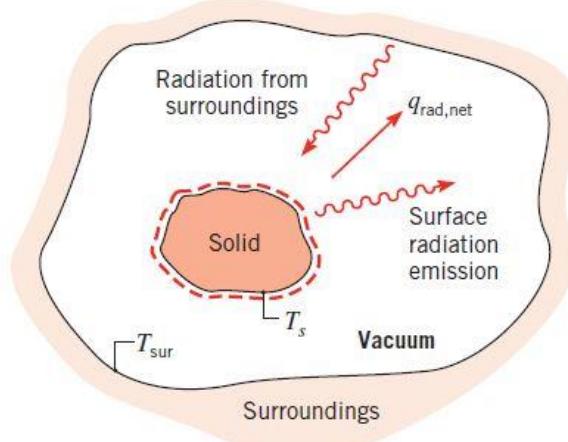
3 热辐射 (Radiation)

② 斯忒藩—玻尔兹曼公式

➤ 实际物体辐射能力：低于同温度黑体

$$E = \varepsilon \sigma T^4 \quad \text{W/m}^2$$

ε ：实际物体表面的表面发射率（黑度），0~1；
与物体的种类、表面状况和温度有关。

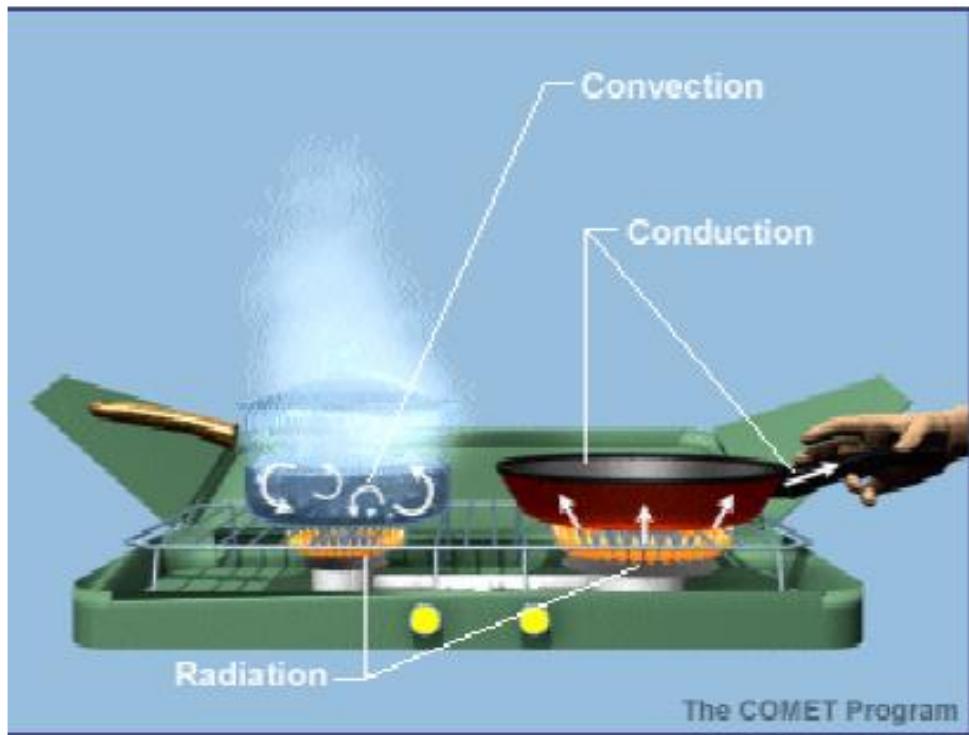


➤ 特殊情况下的两表面辐射换热：

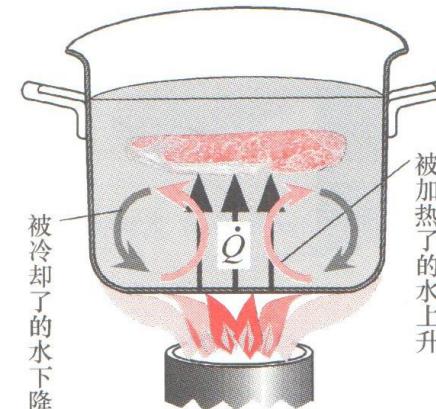
$$\Phi = \varepsilon_1 A \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$



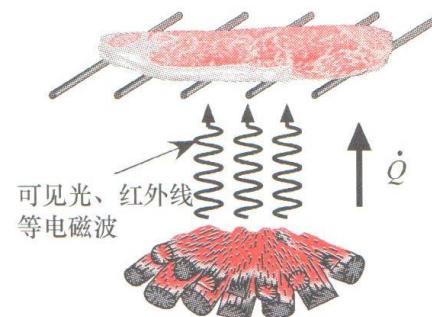
总结



(a) 热传导 (heat conduction)



(b) 对流 (convection)



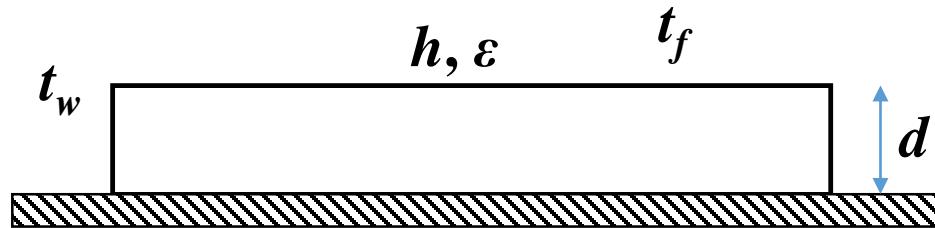
(c) 热辐射 (thermal radiation)



4 例题

一根水平放置的蒸汽管道，其保温层外径 $d=583\text{ mm}$ ，外表面实测平均温度及空气温度分别为 $t_w=48^\circ\text{C}$ ， $t_f=23^\circ\text{C}$ ，此时空气与管道外表面间的自然对流换热的表面传热系数 $h=3.42\text{W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ ，保温层外表面的发射率 $\varepsilon=0.9$ 。问：

- (1) 此管道散热必须考虑哪些热量传递方式；
- (2) 计算每米长度管道的总散热量。





4 例题

解：（1）此管道的散热有辐射换热和自然对流换热两种方式。 （2）把管道每米长度上的散热量记为 q_l

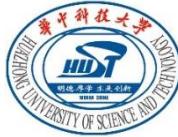
当仅考虑自然对流时，单位长度上的自然对流散热：

$$q_{l,c} = \pi dh\Delta t = 3.14 \times 0.583 \times 3.42 \times (48 - 23) = 156.5 \text{ W/m}$$

近似地取墙壁的表面温度为室内空气温度，于是每米长度管道外表
面与室内物体及墙壁之间的辐射为：

$$\begin{aligned} q_{l,r} &= \pi d \varepsilon \sigma (T_w^4 - T_f^4) \\ &= 3.14 \times 0.583 \times 5.67 \times 10^{-8} \times 0.9 \times \left[(48 + 273)^4 - (23 + 273)^4 \right] = 274.7 \text{ W/m} \end{aligned}$$

因此，总散热量为431.2 W/m，计算结果表明，对于表面温度为几
或几十摄氏度的一类表面的散热问题，**自然对流散热量与辐射具有
相同的数量级，必须同时予以考虑。**



第一次课复习

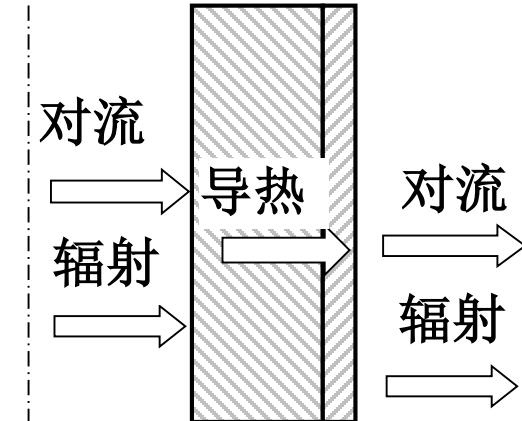
三种传热的基本方式

- 传热机理
- 基本计算公式

§ 1-3 传热过程与传热系数

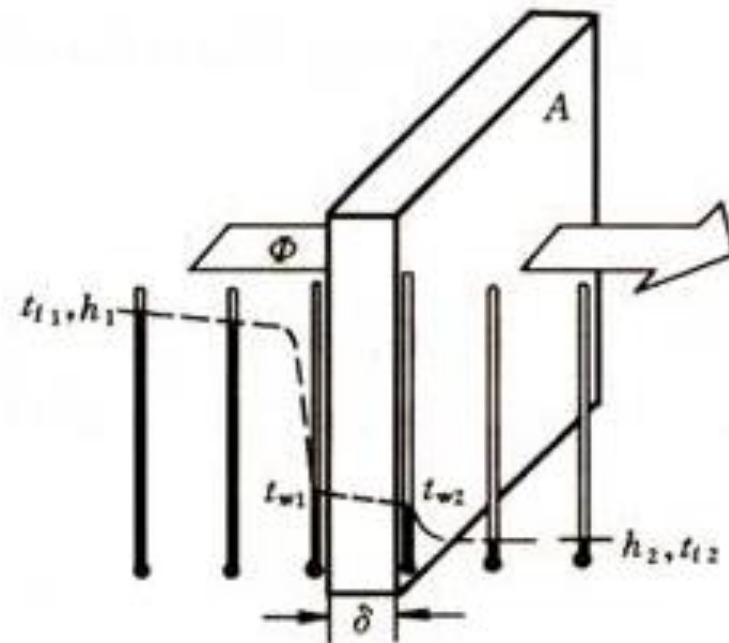
传热过程的定义

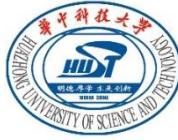
热量由热流体通过间壁传给冷流体的过程（两流体间通过固体壁面进行的传热）。



三个环节：

- | | |
|----------|-------|
| a) 热流体 | 壁面高温侧 |
| b) 壁面高温侧 | 壁面低温侧 |
| c) 壁面低温侧 | 冷流体 |



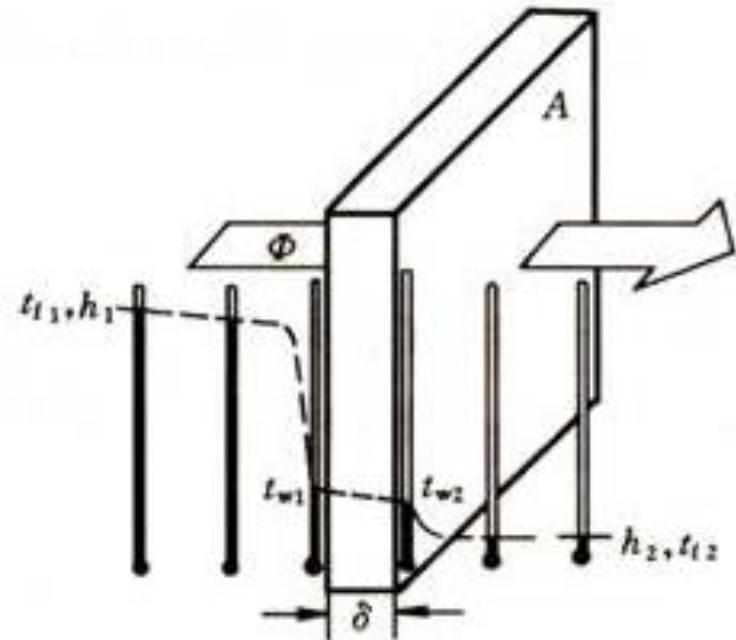


1 传热系数

$$\Phi_1 = Ah_1(t_{f1} - t_{w1})$$

$$\Phi_2 = \frac{A\lambda}{\delta}(t_{w1} - t_{w2})$$

$$\Phi_3 = Ah_2(t_{w2} - t_{f2})$$



稳态传热过程中，如果没有热损失，则热量传递的方向上，热流量 Φ 始终保持不变。

$$\Phi = \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3$$



1 传热系数

$$\Phi_1 = Ah_1(t_{f1} - t_{w1})$$

$$\Phi_2 = \frac{A\lambda}{\delta}(t_{w1} - t_{w2})$$

$$\Phi_3 = Ah_2(t_{w2} - t_{f2})$$



$$t_{f1} - t_{w1} = \frac{\Phi}{1/Ah_1}$$

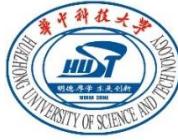
$$t_{w1} - t_{w2} = \frac{\Phi}{\delta/A\lambda}$$

$$t_{w2} - t_{f2} = \frac{\Phi}{1/Ah_2}$$



$$\Phi = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{1/Ah_1 + \delta/A\lambda + 1/Ah_2}$$

一维稳态平板传热过程的传热方程式



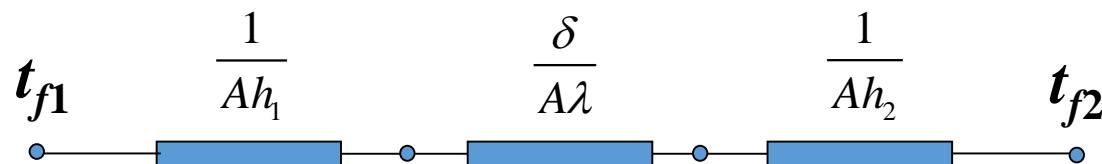
1 传热系数

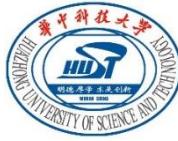
$$\Phi = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{1/Ah_1 + \delta/A\lambda + 1/Ah_2} = kA(t_{f1} - t_{f2}) = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{1/kA}$$

k 称为传热系数

$\frac{1}{kA}$ 称为热阻

传热量的表达式与欧姆定律类似，热阻等于两侧对流热阻和固壁导热热阻之和。

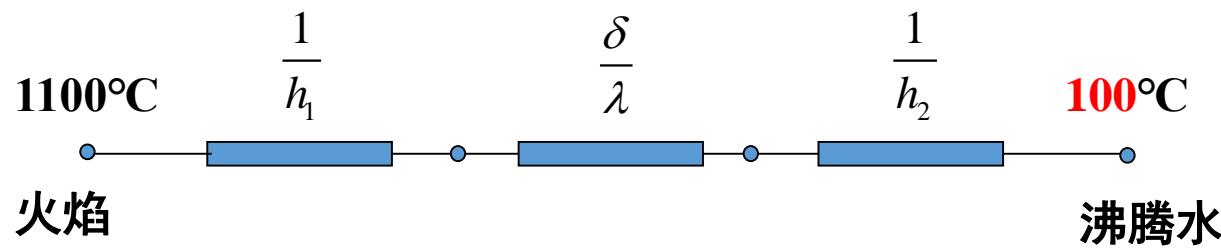




2 例題

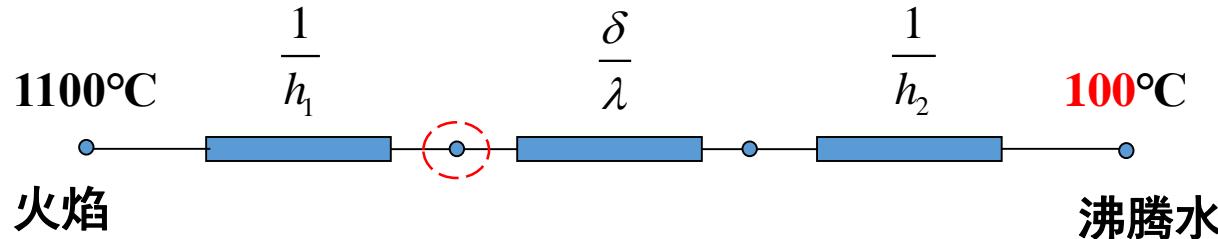
野外工作者常用纸制容器烧水。设厚度为0.2mm的纸的导热系数为0.9W/(m²·°C)，水在大气压力下沸腾，水侧沸腾换热表面传热系数为2400 W/(m²·°C)。容器用1100°C的火焰加热，火焰与纸面的表面传热系数为95 W/(m²·°C)。若纸的耐火温度为200°C。试证明该纸质容器能耐火。

解：本题属无限大平板的传热过程热阻分析问题。传热过程一共经历三热阻分别为火焰侧热流热阻，纸的导热热阻，水侧的对流热阻。





2 例題



只要证明火焰侧纸的表面温度不超过纸的耐火温度即可。由串联热阻的性质有：

$$q = \frac{t_{\text{fire}} - t_{\text{water}}}{\frac{1}{h_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{h_2}} = \frac{t_{\text{fire}} - t}{\frac{1}{h_1}}$$

$$\rightarrow \frac{\frac{1100-100}{1}}{\frac{1}{95} + \frac{0.2 \times 10^{-3}}{0.9} + \frac{1}{2400}} = \frac{\frac{1100-t}{1}}{\frac{1}{95}}$$

→ $t = 157.22^\circ\text{C} < 200^\circ\text{C}$



作业：

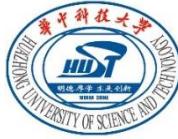
1-4, 1-7, 1-19



第二章 稳态导热

§ 2-1 分析基础

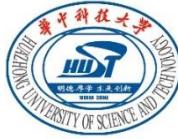
§ 2-2 一维稳态导热



分析方法

分析传热问题基本上是遵循经典力学的研究方法，即针对物理现象**建立物理模型**，而后从基本定律**导出其数学描述**（常以微分方程的形式表达，故称**数学模型**），接下来考虑**求解**的理论分析方法。

导热问题是传热学中最易于采用此方法处理的传热方式。



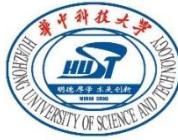
§ 2-1 分析基础

1 温度场 (Temperature Field)

① 定义

- 某一瞬间，空间(或物体内)所有各点温度分布的总称。
- 温度场是个**数量场**，可以用一个数量函数来表示。
- 温度场是**空间坐标**和**时间**的函数，在直角坐标系中，温度场可表示为：
$$t = f(x, y, z, \tau)$$

t —温度； x, y, z —空间坐标； τ —时间坐标



1 温度场 (Temperature Field)

② 分类

a) 随时间划分

稳态温度场: 物体各点温度不随时间改变。

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0 \quad t = f(x, y, z)$$

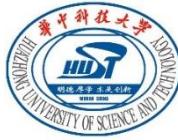
非稳态温度场: 温度分布随时间改变。

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} \neq 0 \quad t = f(x, y, z, \tau)$$

b) 随空间划分

三维稳态温度场: $t = f(x, y, z)$

一维稳态温度场: $t = f(x)$

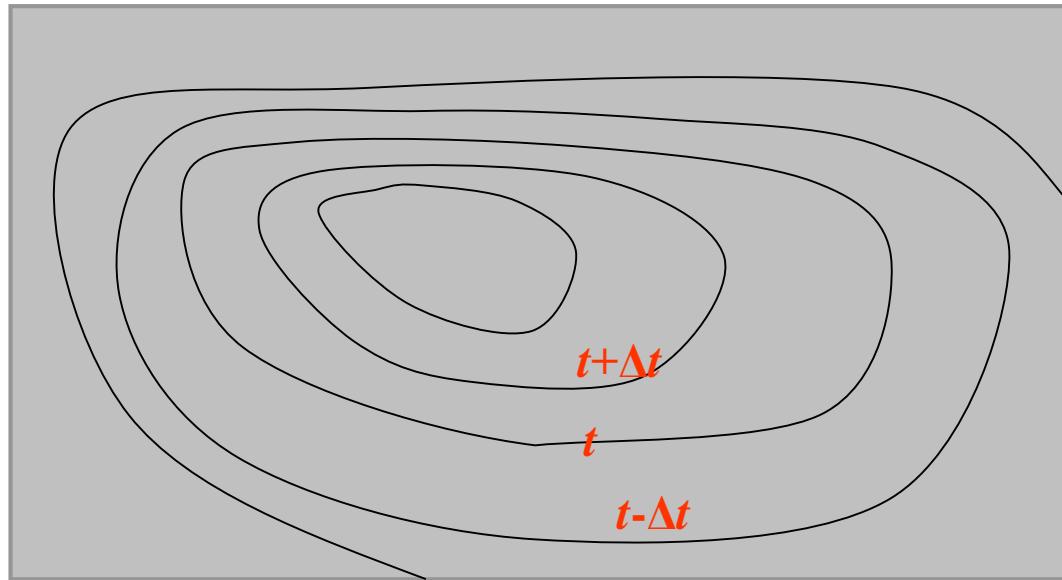


2 等温面与等温线

① 定义

等温面：温度场中同一瞬间同温度各点连成的面。

等温线：在二维情况下等温面为一等温曲线。

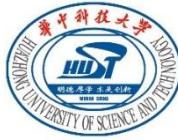




2 等温面与等温线

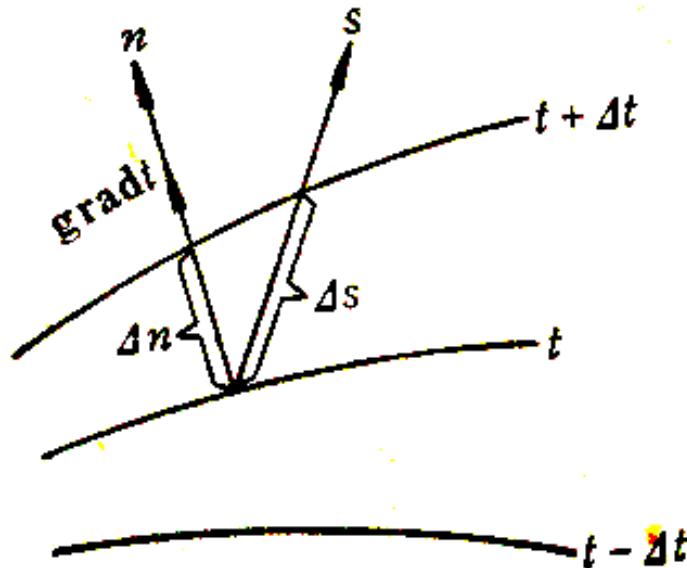
② 特点

- a) 温度不同的等温面或等温线彼此**不能相交**；
- b) 对连续介质，等温线（面）只可能在物体边界中
断或完全封闭；
- c) 沿等温线（面）**无热量传递**；
- d) 等温线（面）的疏密直观反映出不同区域温度梯
度（或热流密度）的相对大小。等温线**越密**说明温
度梯度**越大**。



3 温度梯度 (Temperature gradient)

温度的变化率沿不同的方向一般是不同的。温度沿某一方向 x 的变化率在数学上可以用该方向上温度对坐标的偏导数来表示，即



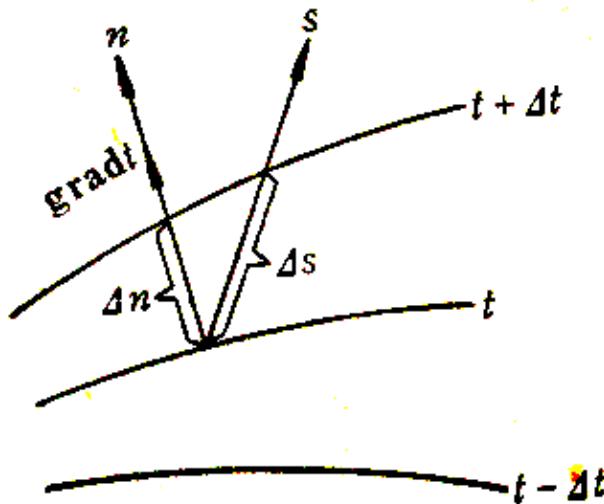
$$\frac{\partial t}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

温度梯度是反映温度场在空间的变化特征的物理量。



3 温度梯度 (Temperature gradient)

系统中某一点所在的等温面与相邻等温面之间的温差与其法线间的距离之比的极限为该点的温度梯度，记为： $\text{grad}t$ 。



$$\text{grad}t = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta n} = \frac{\partial t}{\partial n} \vec{n} = \frac{\partial t}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial t}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial t}{\partial z} \vec{k}$$

注：温度梯度是向量；正向朝着温度增加的方向



4 傅里叶定律 (Fourier's Law)

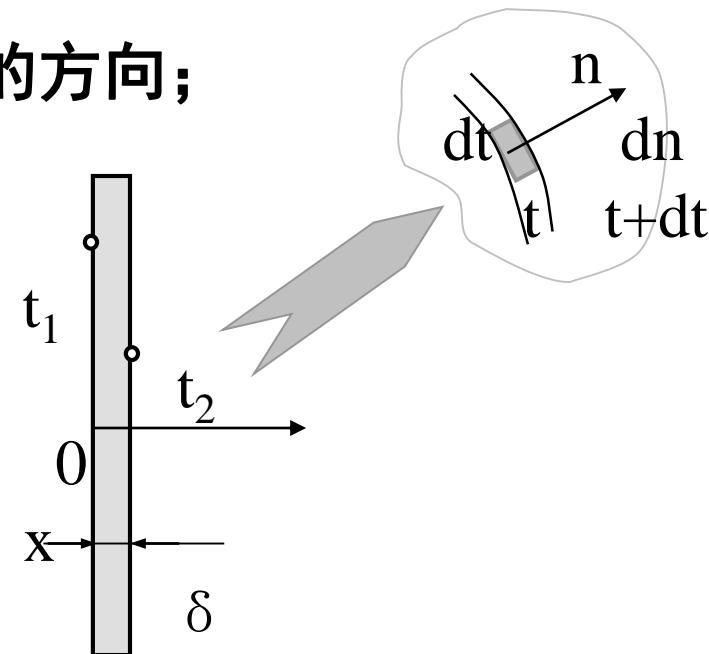
- 由第一章的一维傅里叶定律推广至更一般情况

$$q = -\lambda \mathbf{grad}t = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} \mathbf{n}$$

\mathbf{n} — 法向单位矢量，指向温度升高的方向；
 q — 是热流密度矢量。

- 热流密度在 x, y, z 方向的投影的大小分别为：

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}, q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}, q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z}$$



负号表示热量传递指向温度降低的方向。



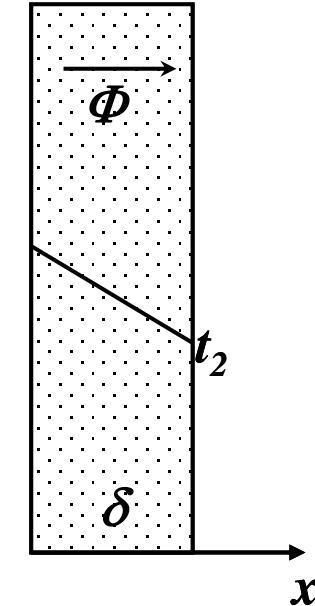
5 导热系数 (Thermal conductivity)

① 定义

傅里叶定律给出了导热系数的定义：

$$\lambda = \frac{-q}{\text{grad}t} \quad \text{W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}$$

➤ λ 在数值上等于单位温度梯度下物体所产生的热流密度。



采用平板法可以测量物质的导热系数。对于图所示的大平板的一维稳态导热，流过平板的热流量与平板两侧温度和平板厚度之间的关系为：

$$\Phi = \lambda A \frac{t_1 - t_2}{\delta} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\Phi}{A \frac{t_1 - t_2}{\delta}} = \frac{\Phi \delta}{A \Delta t}$$

这是稳态法测量导热系数实验的基本原理。



5 导热系数 (Thermal conductivity)

② 导热系数的影响因素

- 导热系数是**物性参数**，它与物质结构和状态密切相关，例如物质的种类、材料成分、温度、湿度、压力、密度等，与物质几何形状无关。
- 它反映了物质微观粒子传递热量的特性。

不同物质的导热性能不同：

$$\lambda_{\text{固体}} > \lambda_{\text{液体}} > \lambda_{\text{气体}} \quad \lambda_{\text{金属}} > \lambda_{\text{非金属}} \quad \lambda_{\text{合金}} < \lambda_{\text{纯金属}}$$

$$\lambda_{\text{金属}} \approx 12 \sim 418 \text{ W/(m}^{\circ}\text{C)} \quad \lambda_{\text{非金属}} \approx 0.025 \sim 3 \text{ W/(m}^{\circ}\text{C)}$$

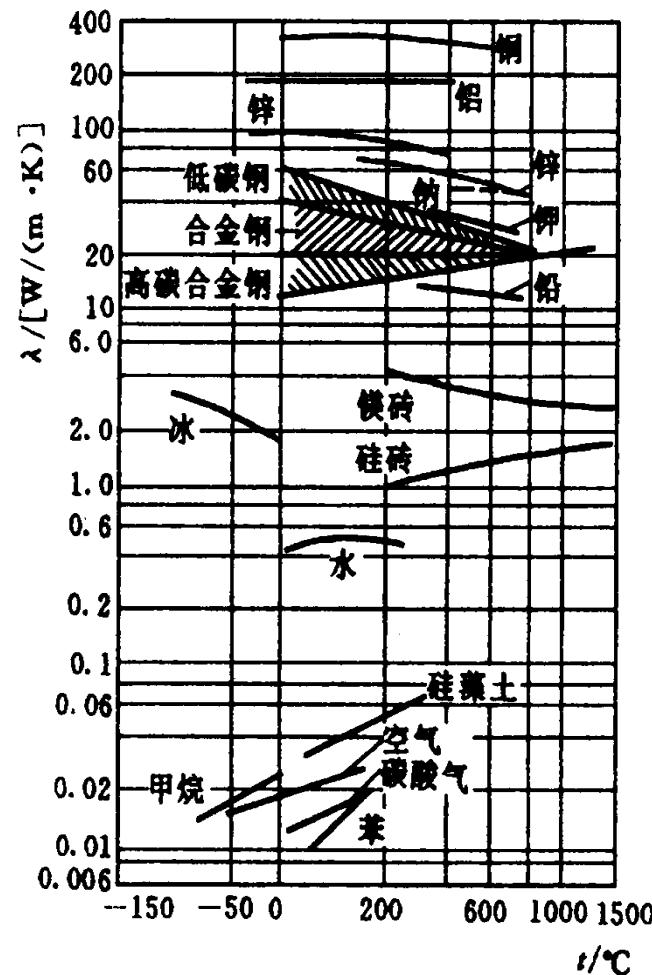


5 导热系数 (Thermal conductivity)

- 同一种物质的导热系数也会因其状态参数的不同而改变。
- 一般把导热系数仅视为温度的函数，而且在一定温度范围可以用一种**线性**关系来描述。

$$\lambda = \lambda_0 (1 + bt)$$

保温材料：平均温度为298K时热导率不大于 $0.08 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$ 的材料
(绝热材料)





6 导热微分方程 (Heat Diffusion Equation)

① 一般形式

傅里叶定律: $q = -\lambda \text{grad} t$

- 确定导热体内的**温度分布**是导热理论的首要任务。
- 建立导热微分方程, 可以揭示连续温度场随空间坐标和时间变化的内在联系。

理论基础: 傅里叶定律 + 能量守恒方程

6 导热微分方程 (Heat Diffusion Equation)

假设: (1) 所研究物体是各向同性的连续介质;

(2) 热导率、比热容和密度均为已知

(3) 物体内具有内热源; 强度 $\dot{\phi}$ [W/m³];

$\dot{\phi}$ 表示单位体积的导热体在单位时间内放出的热量

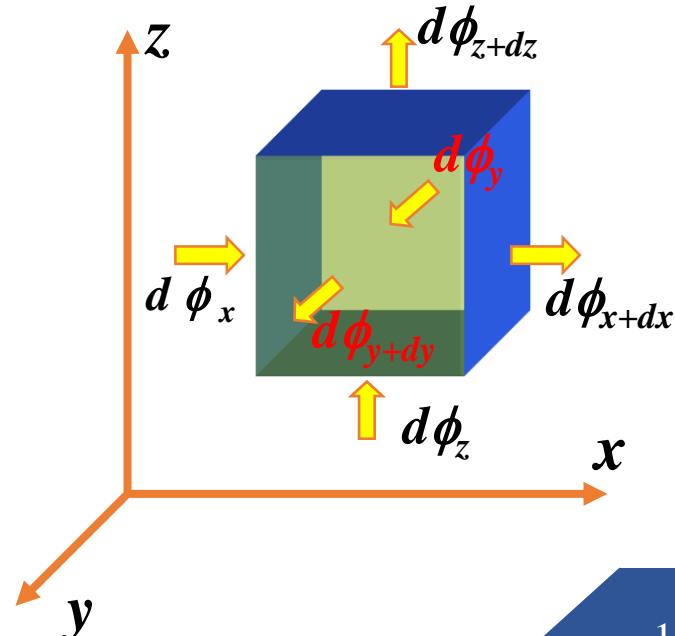
能量守恒:

导入微元体的总热流量

+ 内热源的生成热

= 导出微元体的总热流量

+ 内能的增量



6 导热微分方程 (Heat Diffusion Equation)

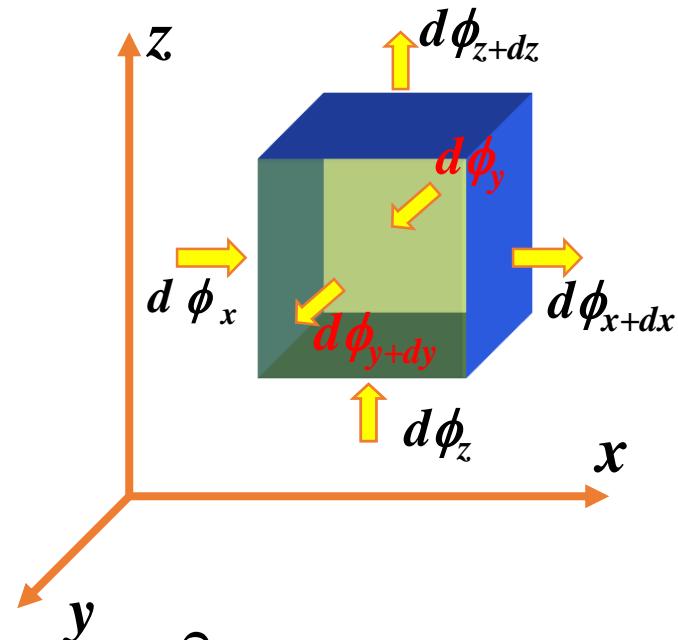
$$d\Phi_{\text{in}} + dQ = d\Phi_{\text{out}} + dU$$

➤ 导入微元体的总热流量为:

$$d\Phi_{\text{in}} = d\Phi_x + d\Phi_y + d\Phi_z$$

➤ 导出微元体的总热流量为:

$$d\Phi_{\text{out}} = d\Phi_{x+dx} + d\Phi_{y+dy} + d\Phi_{z+dz}$$



$$d\Phi_x = \cancel{q_x} dy dz = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} dy dz$$

$$d\Phi_y = \cancel{q_y} dx dz = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} dx dz$$

$$d\Phi_z = \cancel{q_z} dx dy = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z} dx dy$$

根据傅里叶定律:

6 导热微分方程 (Heat Diffusion Equation)

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$$

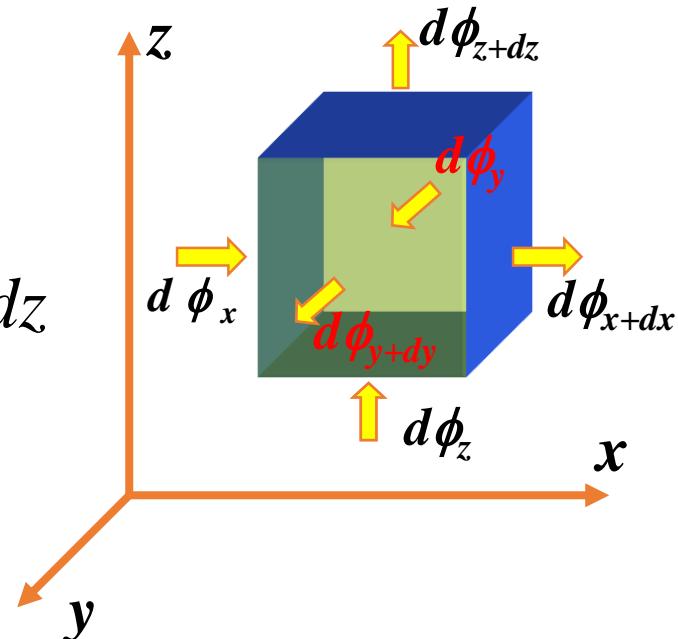
$$d\Phi_{x+dx} = q_{x+dx} dy dz = q_x dy dz + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz$$

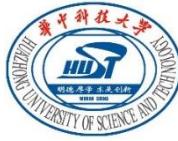
$$= d\Phi_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) dx dy dz$$

$$d\Phi_{y+dy} = d\Phi_y + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) dx dy dz$$

$$d\Phi_{z+dz} = d\Phi_z + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) dx dy dz$$

单位时间内能增量: $dU = \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} dx dy dz$





6 导热微分方程 (Heat Diffusion Equation)

微元体内热源的生成热为：

$$dQ = \dot{\Phi} dxdydz$$

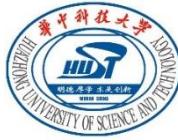
最后得到：

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + \dot{\Phi}$$

单位时间内微元
体的内能增量
(非稳态项)

扩散项 (导热引起)

源项



6 导热微分方程 (Heat Diffusion Equation)

② 导热微分方程的简化形式

(a) 导热系数为常数时

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + \dot{\Phi}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{\Phi}}{\rho c}$$

$$a = \frac{\lambda}{\rho c}$$

a 称为热扩散率, 又叫导温系数。
(thermal diffusivity)

a 反映了导热过程中材料的**导热能力** (λ) 与沿途**物质储热能力** (ρc) 之间的关系。

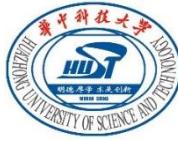


6 导热微分方程 (Heat Diffusion Equation)

- **a 值大, 即 λ 值大或 ρc 值小**, 说明物体的某一部分一旦获得热量, 该热量能在整个物体中很快扩散。
- 热扩散率表征物体被加热或冷却时, 物体内各部分温度趋于均匀一致的能力, 所以 a 反应导热过程**动态特性**, 研究**非稳态导热**重要物理量。
- 在同样加热条件下, 物体的热扩散率越大, 物体内各处的温度差别越小。

$$a_{\text{木材}} = 1.5 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}, \quad a_{\text{铝}} = 9.45 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$a_{\text{木材}}/a_{\text{铝}} = 1/600$$



6 导热微分方程 (Heat Diffusion Equation)

(b) 无内热源, 导热系数为常数

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + \dot{\Phi}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right)$$

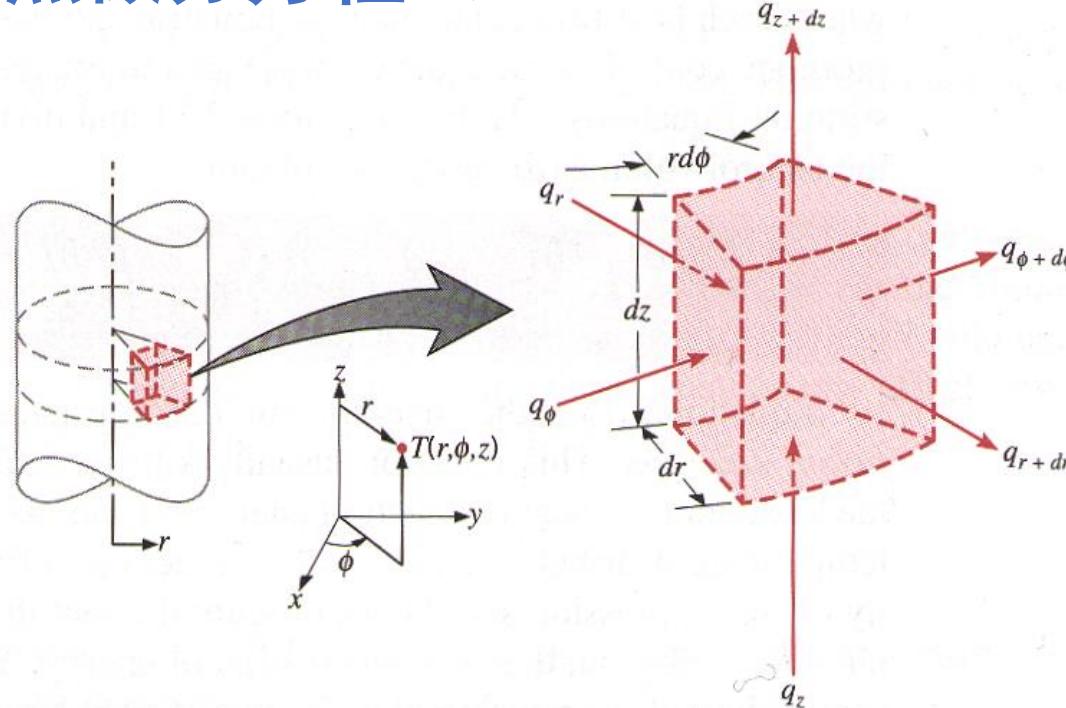
(c) 常物性、稳态

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{\dot{\Phi}}{\lambda} = 0 \quad \text{泊桑 (Poisson) 方程}$$

(d) 常物性、稳态、无内热源

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \quad \text{拉普拉斯 (Laplace) 方程}$$

6 导热微分方程 (Heat Diffusion Equation)

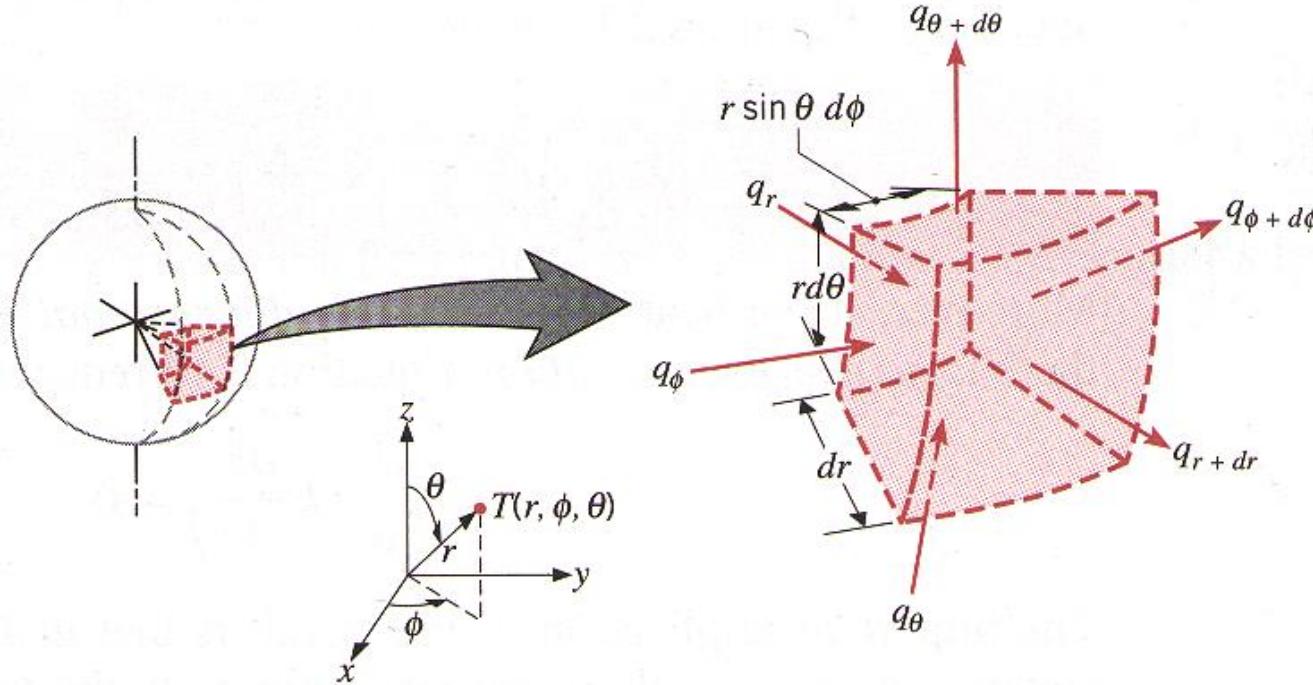


(e) 圆柱坐标系和球坐标系的方程

$$x = r \cos \phi; \quad y = r \sin \phi; \quad z = z$$

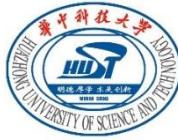
$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + \dot{\Phi}$$

6 导热微分方程 (Heat Diffusion Equation)



$$x = r \sin \theta \cdot \cos \phi; \quad y = r \sin \theta \cdot \sin \phi; \quad z = r \cos \theta$$

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r^2 \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \sin \theta \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial \phi} \right) + \dot{\Phi}$$



7 定解条件

- 导热微分方程式的理论基础：
傅里叶定律 + 能量守恒
- 它描写物体的温度随时间和空间变化的关系；没有涉及具体、特定的导热过程。通用表达式。
- **单值性条件：确定唯一解的附加补充说明条件，包括四项：几何、物理、初始、边界**

完整数学描述：导热微分方程 + 单值性条件



7 定解条件

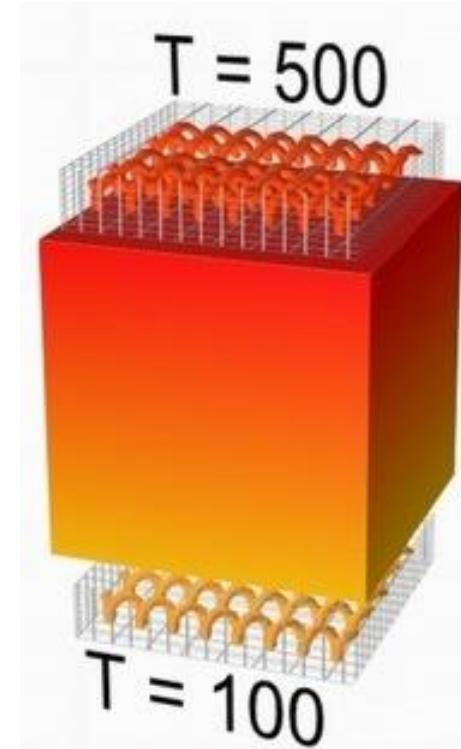
① **几何条件**: 指导热体的几何形状和大小, 如: 平壁或圆筒壁; 厚度、直径等

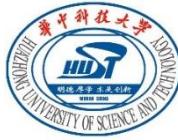
② **物理条件**: 指导热体的物理特征如: 物性参数 λ 、 c 和 ρ 的数值, 是否随温度变化; 有无内热源、其大小和分布

③ **初始条件**: 又称时间条件, 反映导热系统的初始状态:

$$t = f(x, y, z, 0)$$

④ **边界条件**: 反映导热系统在界面上的特征, 也可理解为系统与外界环境之间的关系。





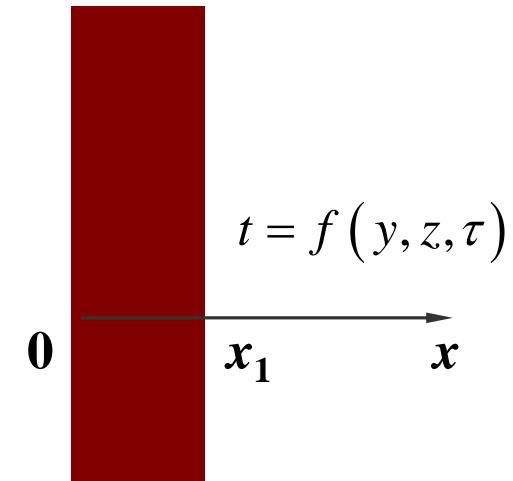
7 定解条件

边界条件 (Boundary conditions) , 常见有三类:

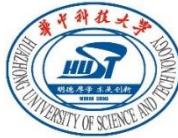
(a) 第一类边界条件:

给定系统边界上的温度值, 它可以是时间和空间的函数, 也可以为给定不变的常数值。

一般形式: $t_w = f(x, y, z, \tau)$



稳态导热: $t_w = \text{const}$; 非稳态导热: $t_w = f(\tau)$



7 定解条件

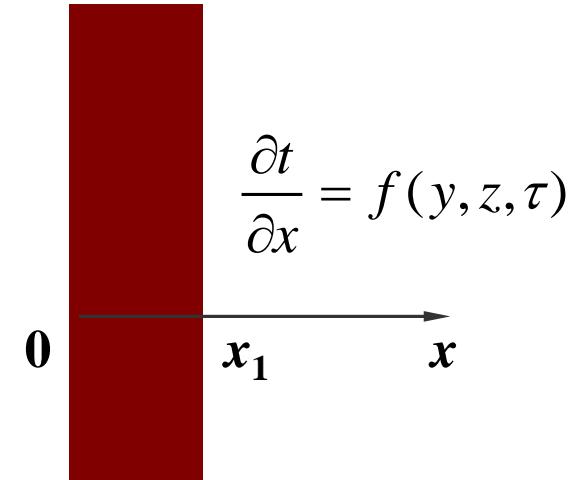
(b) 第二类边界条件:

该条件是给定系统边界上的
温度梯度，即相当于给定边
界上的**热流密度**，它可以是
时间和空间的函数，也可以
为给定不变的常数值。

一般形式: $q_w = f(x, y, z, \tau)$

特例: 绝热界面

$$q_w = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_w = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_w = 0$$

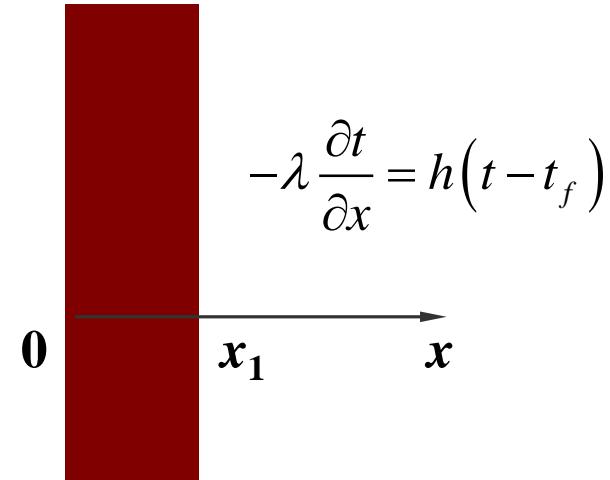




7 定解条件

(c) 第三类边界条件：

该条件是第一类和第二类边界条件的线性组合，常为给定系统边界面与流体间的**换热系数**和**流体的温度**，这两个量可以是时间和空间的函数，也可以为给定不变的常数值。



$$-\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_w = h(t_w - t_f)$$



求解思路

数学描述

物理模型

导热微分
方程

定解条件

傅里叶定律

求解方法

温度场

热流量

分析解法，试验解法，数值解法



§ 2-2 一维稳态导热

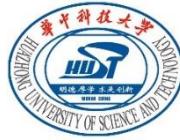
稳态导热：

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$$

直角坐标系： $\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + \dot{\Phi} = 0$

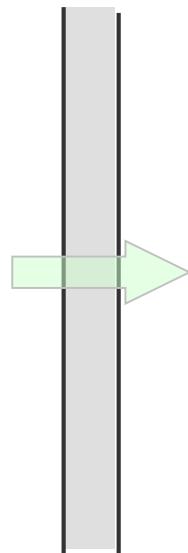
1 通过平壁的导热

平壁的长度和宽度都远大于其厚度，因而平板两侧保持均匀边界条件的稳态导热就可以归纳为一维稳态导热问题。

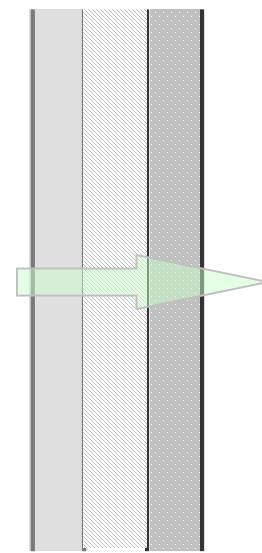


1 通过平壁的导热

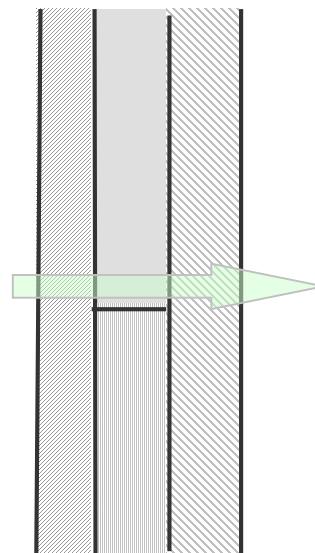
从平板的结构可分为单层壁，多层壁和复合壁等类型。



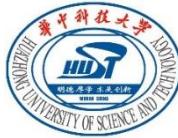
a.单层壁导热



b.多层壁导热



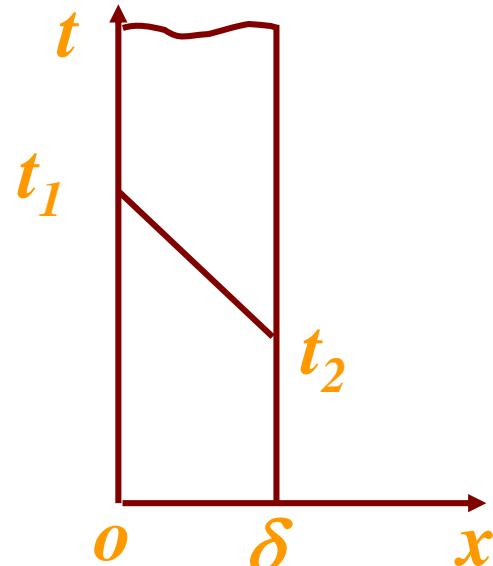
c.复合壁导热



1 通过平壁的导热

① 通过单层平壁的导热

无内热源, λ 为常数, 并已知平壁的
壁厚为 δ , 两个表面温度分别维持均
匀而恒定的温度 t_1 和 t_2



$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \dot{\Phi} \Rightarrow \frac{d^2 t}{dx^2} = 0 \quad \begin{cases} x = 0, t = t_1 \\ x = \delta, t = t_2 \end{cases}$$

直接积分, 得:

$$\frac{dt}{dx} = c_1 \Rightarrow t = c_1 x + c_2$$



1 通过平壁的导热

带入边界条件:

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{t_2 - t_1}{\delta} \\ c_2 = t_1 \end{cases}$$

线性分布

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{t_2 - t_1}{\delta} x + t_1 \\ \frac{dt}{dx} = \frac{t_2 - t_1}{\delta} \end{cases}$$

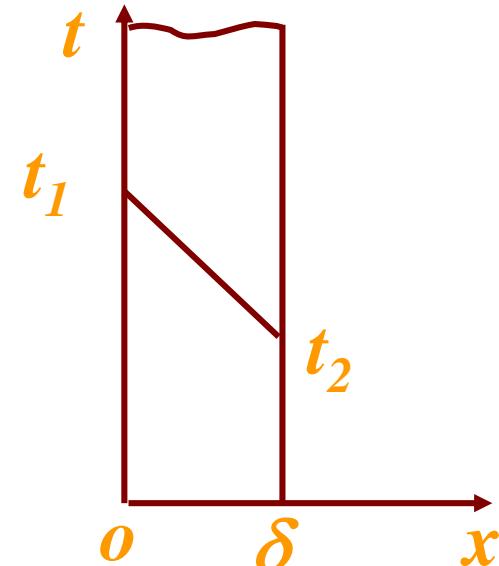
Fourier's Law



$$\begin{cases} q = -\lambda \frac{t_2 - t_1}{\delta} = \frac{\Delta t}{\delta/\lambda} \\ \Phi = \frac{\Delta t}{\delta/A\lambda} \end{cases}$$

导热热阻:

$$R = \frac{\delta}{A\lambda}$$





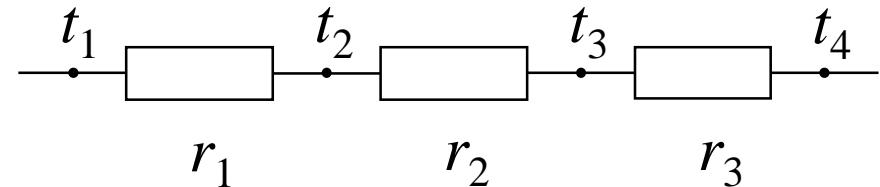
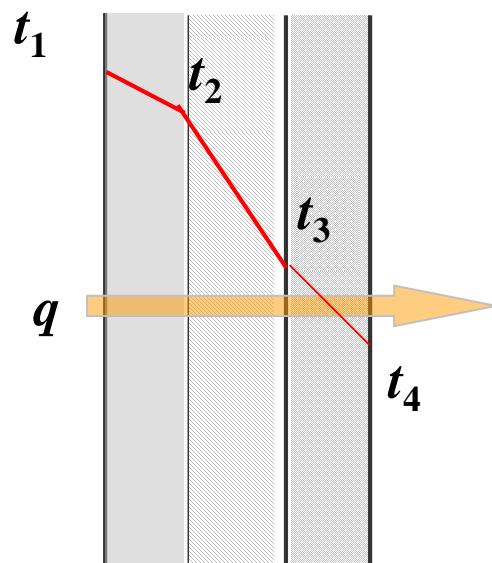
1 通过平壁的导热

② 通过多层平壁的导热

多层平壁：由几层**不同材料**组成

例：房屋的墙壁 — 白灰内层、水泥沙浆层、红砖（青砖）主体层等组成。

假设：各层之间接触良好，可以近似地认为接合面上各处的温度相等



$$r_1 = \frac{\delta_1}{\lambda_1} = \frac{\Delta t_1}{q} = \frac{t_1 - t_2}{q}$$

$$r_2 = \frac{\delta_2}{\lambda_2} = \frac{t_2 - t_3}{q}$$

$$r_3 = \frac{\delta_3}{\lambda_3} = \frac{t_3 - t_4}{q}$$

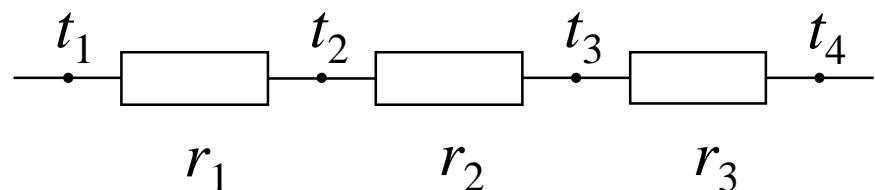


1 通过平壁的导热

$$q = \frac{t_1 - t_2}{\frac{\delta_1}{\lambda_1}} = \frac{t_2 - t_3}{\frac{\delta_2}{\lambda_2}} = \frac{t_3 - t_4}{\frac{\delta_3}{\lambda_3}}$$

通过变换得：

$$q = \frac{t_1 - t_4}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}}$$



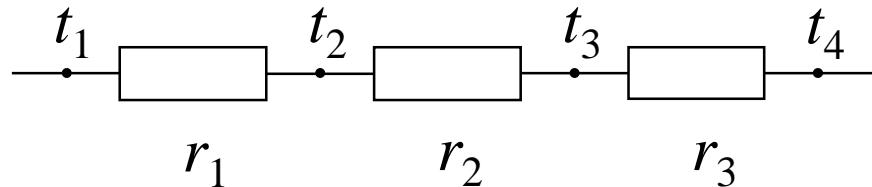
总热阻为： $r = r_1 + r_2 + r_3 = \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}$

推广到n层壁的情况：

$$q = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}}$$



1 通过平壁的导热

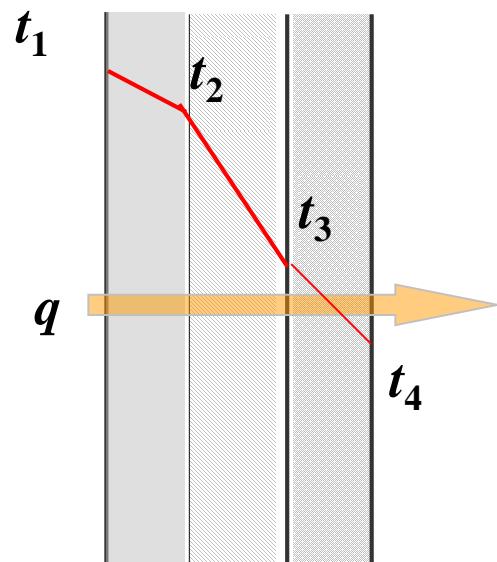


现在已知 q 的表达式，如何计算
其中第 i 层的右侧壁温？

第一层：
$$q = \frac{\lambda_1}{\delta_1} (t_1 - t_2) \Rightarrow t_2 = t_1 - q \frac{\delta_1}{\lambda_1}$$

第二层：
$$q = \frac{\lambda_2}{\delta_2} (t_2 - t_3) \Rightarrow t_3 = t_2 - q \frac{\delta_2}{\lambda_2}$$

第 i 层：
$$q = \frac{\lambda_i}{\delta_i} (t_i - t_{i+1}) \Rightarrow t_{i+1} = t_i - q \frac{\delta_i}{\lambda_i}$$





1 通过平壁的导热

③ 无内热源, λ 不为常数 (是温度的线性函数)

$$\lambda = \lambda_0(1+bt) \quad \text{其中, } \lambda_0, b \text{ 为常数}$$

数学描述:
$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dt}{dx} \right) = 0, \quad \begin{cases} x = 0, t = t_{w1} \\ x = \delta, t = t_{w2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[\lambda_0(1+bt) \frac{dt}{dx} \right] = 0 \\ & \Rightarrow \lambda_0(1+bt) \frac{dt}{dx} = c_1 \Rightarrow \lambda_0 \left(t + \frac{b}{2} t^2 \right) = c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

最后可求得其温度分布:

$$t + \frac{b}{2} t^2 = \left(t_{w1} + \frac{b}{2} t_{w1}^2 \right) - \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\delta} \left[1 + \frac{b}{2} (t_{w1} + t_{w2}) \right] x$$



1 通过平壁的导热

$$\frac{(t - t_{w1}) \left[1 + \frac{b}{2} (t + t_{w1}) \right]}{(t_{w2} - t_{w1}) \left[1 + \frac{b}{2} (t_{w2} + t_{w1}) \right]} = \frac{x}{\delta}$$

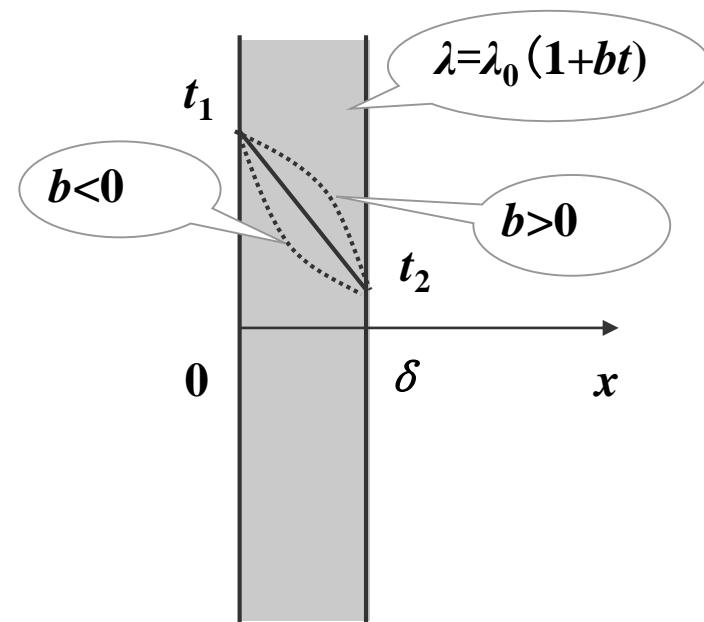
二次曲线方程

$$\frac{d^2t}{dx^2} = -\frac{b}{1+bt} \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 = -\frac{b}{\lambda/\lambda_0} \left(\frac{dt}{dx} \right)^2$$

当 $b > 0$ 时, $\frac{d^2t}{dx^2} < 0$ (下凹上凸)

当 $b = 0$ 时, $\frac{d^2t}{dx^2} = 0$ (直线)

当 $b < 0$ 时, $\frac{d^2t}{dx^2} > 0$ (上凹下凸)





1 通过平壁的导热

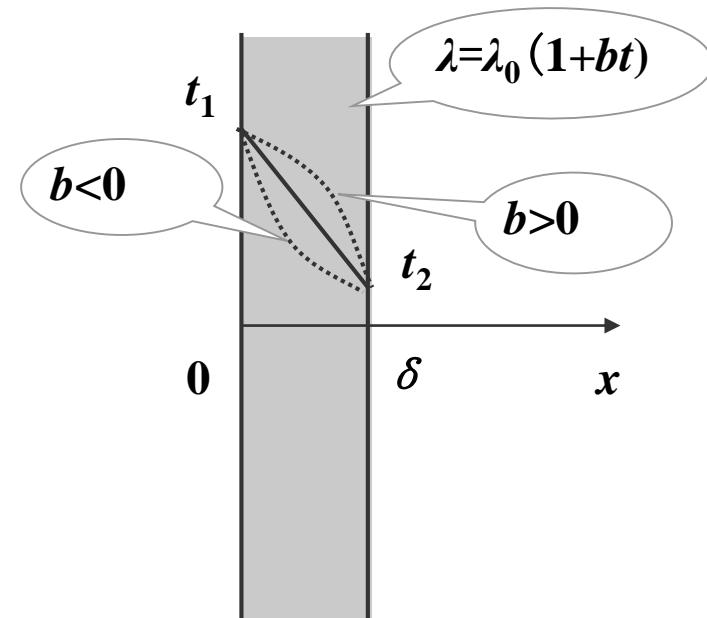
曲线的开口方向取决于系数 b 的正负。

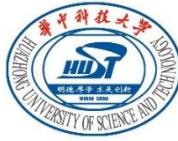
- 当 $b>0$, $\lambda = \lambda_0(1+bt)$, 随着 t 增大, λ 增大, 即高温区的导热系数大于低温区。根据:

$$\Phi = -\lambda A \frac{dt}{dx}$$

高温区的温度梯度 dt/dx 较小, 而形成上凸的温度分布。

- 当 $b<0$, $\lambda=\lambda_0(1+bt)$, 随着 t 增大, λ 减小, 高温区的温度梯度 dt/dx 较大。





1 通过平壁的导热

返回

采用另一种方法，即**傅里叶定律直接求解法**：

➤ **傅里叶定律**

$$q = -\lambda(t) \frac{dt}{dx}$$

➤ **分离变量并积分得：** $\int_{x_1}^{x_2} q dx = - \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt$

将 $\lambda = \lambda_0(1 + bt)$ 代入上式经整理得到

$$q = \left[\lambda_0 \left(1 + b \frac{t_1 + t_2}{2} \right) \right] \frac{t_1 - t_2}{\delta} \quad \longrightarrow \quad q = \bar{\lambda} \frac{t_1 - t_2}{\delta}$$

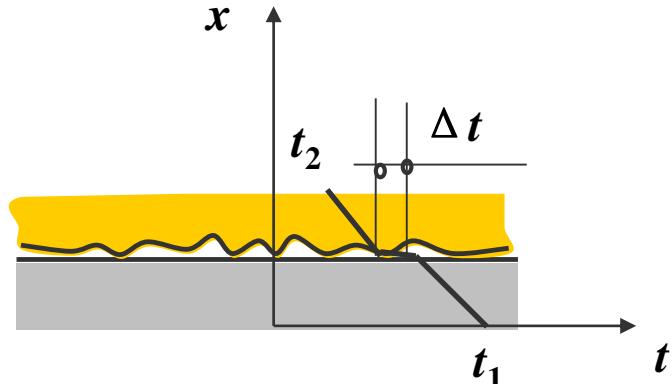
其中 $\bar{\lambda} = \lambda_0 \left(1 + \frac{t_1 + t_2}{2} b \right)$

**t_1 与 t_2 平均温度下
的导热系数**

1 通过平壁的导热

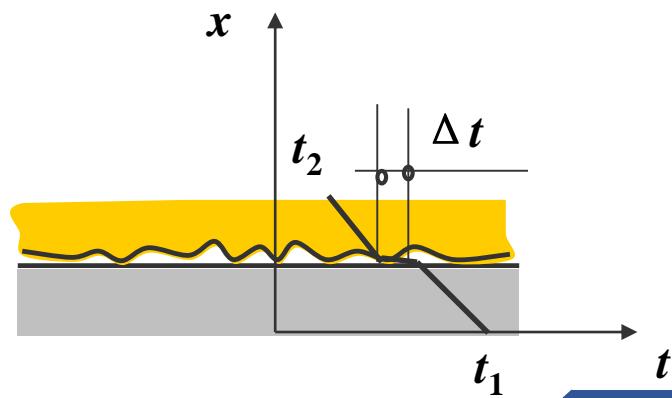
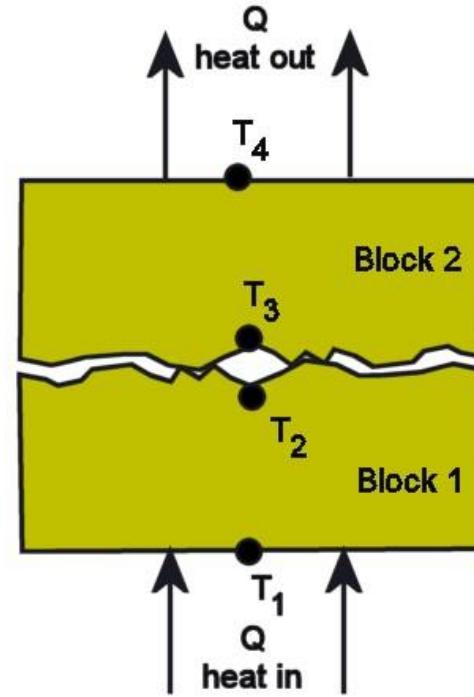
④ 接触热阻

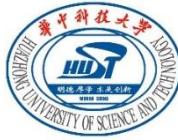
- 在推导多层壁导热的公式时，假定了两层壁面之间是保持了良好的接触，要求层间保持同一温度。而在工程实际中这个假定并不存在。因为任何固体表面之间的接触都不可能是紧密的。
- 两壁面之间只有接触的地方才直接导热，在不接触处存在空隙。
- 热量是通过充满空隙的流体的导热、对流和辐射的方式传递的，因而存在传热阻力，称为接触热阻。



1 通过平壁的导热

- 由于接触热阻的存在，使导热过程中两个接触表面之间出现温差 Δt 。
- 接触热阻是普遍存在的，而目前对其研究又不充分，往往采用一些实际测定的经验数据。
- 通常，对于导热系数较小的多层壁导热问题接触热阻多不予考虑；但是对于金属材料之间的接触热阻就是不容忽视的问题。





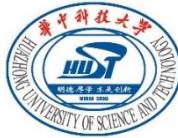
1 通过平壁的导热

接触热阻的主要影响因素：

- 物体表面的粗糙度
- 物体表面的硬度
- 物体表面之间的压力

工程上减小热阻的方法：

- 增大表面光滑度
- 增大接触压力
- 接触表面之间加一层热导率较大、硬度较小的材料，如纯铜箔、银箔，或涂一层导热油



1 通过平壁的导热

例1：一锅炉炉墙采用密度为 300 kg/m^3 的水泥珍珠岩制作，壁厚 $\delta = 100 \text{ mm}$ ，已知内壁温度 $t_1 = 500 \text{ }^\circ\text{C}$ ，外壁温度 $t_2 = 50 \text{ }^\circ\text{C}$ ，求炉墙单位面积、单位时间的热损失。

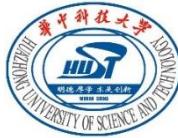
解：材料的平均温度为：

$$t = \frac{(t_1 + t_2)}{2} = \frac{500 + 50}{2} = 275 \text{ }^\circ\text{C}$$

由p.275附录4查得：

$$\{\lambda\}_{\text{W/(m}\cdot\text{K)}} = 0.0651 + 0.000105\{t\}_{^\circ\text{C}}$$

$$\bar{\lambda} = 0.0651 + 0.000105 \times 275 = 0.0940 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$$

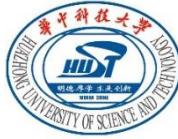


1 通过平壁的导热

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (t_1 - t_2) = \frac{0.094}{0.1} (500 - 50) = 423 \text{ W/m}^2$$

若是多层壁, t_2 、 t_3 的温度未知:

- 可先**假定**它们的**温度**, 从而计算出平均温度并查出导热系数值, 再计算热流密度及 t_2 、 t_3 的值。
- 若计算值与假设值相差较大, 需要用计算结果修正假设值, 逐步逼近, 这就是**迭代法**。

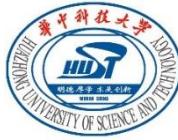


1 通过平壁的导热

例2：一双层玻璃窗，高 2 m，宽 1 m，玻璃厚 3 mm，玻璃的导热系数为 0.5 W/(m·K)，双层玻璃间的空气夹层厚度为 5 mm，夹层中的空气完全静止，空气的导热系数为 0.025 W/(m·K)。如果测得冬季室内外玻璃表面温度分别为 15 °C 和 5 °C，试求玻璃窗的散热损失，并比较玻璃与空气夹层的导热热阻。

解：这是一个三层平壁的稳态导热问题。其散热损失可用式 (2-43) 计算：

$$\Phi = qA = \frac{t_{w1} - t_{w4}}{\frac{\delta_1}{A\lambda_1} + \frac{\delta_2}{A\lambda_2} + \frac{\delta_3}{A\lambda_3}} = \frac{t_{w1} - t_{w4}}{R_{\lambda 1} + R_{\lambda 2} + R_{\lambda 3}}$$



1 通过平壁的导热

$$\Phi = \frac{\frac{15-5}{0.005}}{\frac{0.003}{2 \times 0.5} + \frac{0.005}{2 \times 0.025} + \frac{0.003}{2 \times 0.5}} = 94.3 \text{ W}$$

可见，单层玻璃的导热热阻为0.003 K/W，而空气夹层的导热热阻为0.1 K/W，是玻璃的33.3倍。

如果采用单层玻璃窗，则散热损失为：

$$\Phi' = \frac{15-5}{0.003} = 3333.3 \text{ W}$$

是双层玻璃窗散热损失的35倍，可见采用双层玻璃窗可以大大减少散热损失，节约能源。



2 通过圆筒壁的导热

稳态导热: $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$

柱坐标系: $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + \dot{\Phi} = 0$

圆筒壁就是圆管的壁面。当管子的**壁厚**相对于**管长**而言**非常小**，且管子的内外壁面又保持均匀的温度时，通过管壁的导热就是圆柱坐标系上的一维导热问题。



2 通过圆筒壁的导热

① 通过单层圆筒壁的导热

采用圆柱坐标系，设导热系数为常数，这是沿半径方向的一维导热，数学描述为：

微分方程：
$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dt}{dr} \right) = 0$$
 边界条件：

$$\begin{cases} r = r_1, t = t_1 \\ r = r_2, t = t_2 \end{cases}$$

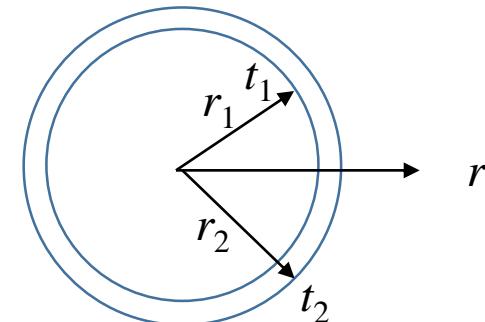
积分得：
$$t = c_1 \ln r + c_2$$

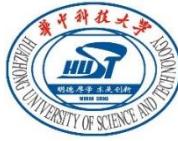
$$c_1 = \frac{t_2 - t_1}{\ln(r_2/r_1)}, \quad c_2 = t_1 - \frac{t_2 - t_1}{\ln(r_2/r_1)} \ln r_1$$

应用边界条件

$$t = t_1 - \frac{t_2 - t_1}{\ln(r_2/r_1)} \ln \frac{r}{r_1}$$

对数曲线分布





2 通过圆筒壁的导热

思考：圆筒壁内温度分布曲线的形状？

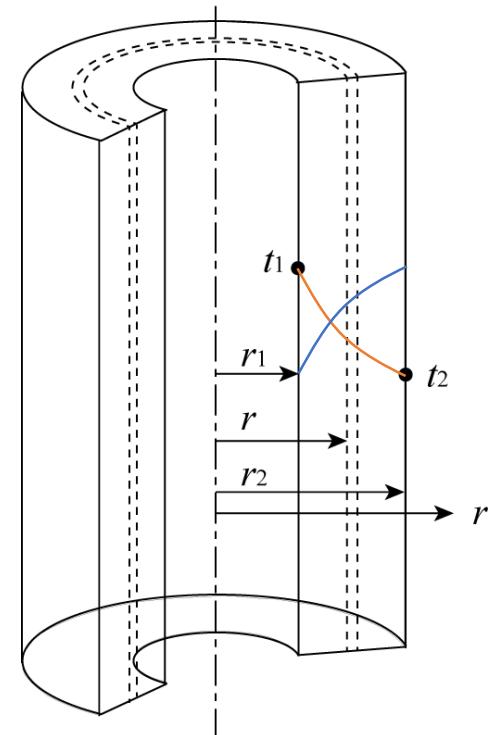
$$\frac{dt}{dr} = \frac{t_2 - t_1}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r}; \quad \frac{d^2t}{dr^2} = \frac{t_1 - t_2}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r^2}$$

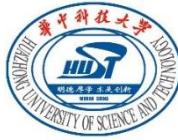
若 $t_1 > t_2$ 时, $\frac{d^2t}{dr^2} > 0$ (上凹)

若 $t_1 < t_2$ 时, $\frac{d^2t}{dr^2} < 0$ (下凹)

物理上: $\Phi = -\lambda A \frac{dt}{dr} = -\lambda (2\pi rl) \frac{dt}{dr} = \text{const}$

$$r \uparrow \rightarrow A \uparrow \rightarrow dt/dr \downarrow$$





2 通过圆筒壁的导热

$$t = t_1 - \frac{t_2 - t_1}{\ln(r_2/r_1)} \ln \frac{r}{r_1} \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{dr} = \frac{t_2 - t_1}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r}$$

$$\rightarrow \quad q = -\lambda \frac{dt}{dr} = \frac{\lambda}{r} \frac{t_1 - t_2}{\ln(r_2/r_1)} \quad \text{W/m}^2$$

虽然是稳态情况，但热流密度 q
与半径 r 成反比！

$$\Phi = (2\pi rl)q = \frac{t_1 - t_2}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{t_1 - t_2}{R_\lambda} \quad W$$
$$2\pi l \lambda$$

R_λ ：长度为 l 的圆筒壁的导热热阻

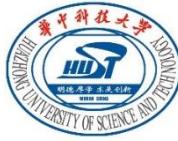


2 通过圆筒壁的导热

② 通过多层圆筒壁的导热

- 由不同材料构成的多层圆筒壁
- 例：带有保温层的热力管道、嵌套的金属管道和结垢、积灰的输送管道等

由不同材料制作的圆筒同心紧密结合而构成多层圆筒壁，如果管子的**壁厚**远小于管子的**长度**，且管壁内外**边界条件均匀一致**，那么在管子的径向方向构成一维稳态导热问题。



2 通过圆筒壁的导热

$$\Phi_l = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi l \lambda_1} \ln(r_2/r_1)} = \frac{t_2 - t_3}{\frac{1}{2\pi l \lambda_2} \ln(r_3/r_2)} = \frac{t_4 - t_3}{\frac{1}{2\pi l \lambda_3} \ln(r_4/r_3)}$$

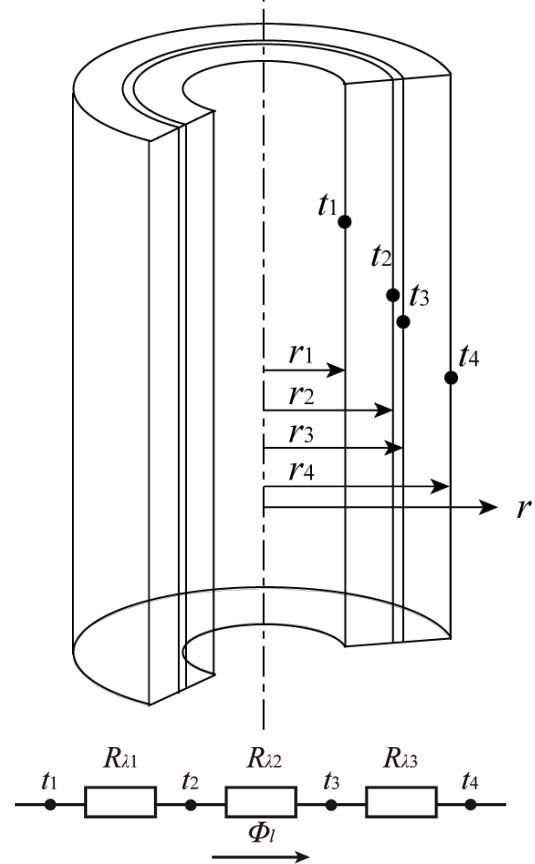
→ $R_\lambda = \frac{1}{2\pi l \lambda} \ln(r_2/r_1)$

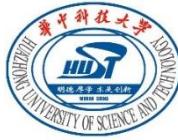
$$\Phi_l = \frac{t_1 - t_4}{\frac{1}{2\pi l} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} \ln(r_{i+1}/r_i)}$$

因此，单位管长的热流量

Φ :

$$q_l = \frac{\Phi_l}{l} = \frac{t_1 - t_4}{\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} \ln(r_{i+1}/r_i)}$$



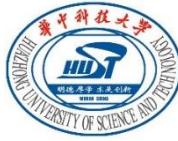


2 通过圆筒壁的导热

例：温度为 120°C 的空气从导热系数为 $\lambda_1 = 18 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ 的不锈钢管内流过，表面传热系数为 $h_1 = 65 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ ，管内径为 $d_1 = 25 \text{ mm}$ ，厚度为 4 mm 。管子外表面处于温度为 15°C 的环境中，外表面自然对流的表面传热系数为 $h_2 = 6.5 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ 。

- (1)求每米长管道的热损失；
- (2)为了将热损失降低80%，在管道外壁覆盖导热系数为 $0.04 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ 的保温材料，求保温层厚度；
- (3)若要将热损失降低90%，求保温层厚度。

解：这是一个含有圆管导热的传热过程，光管时的单位长度总热阻为：



2 通过圆筒壁的导热

$$R = \frac{1}{h_1 A_1} + \frac{\ln(d_2/d_1)}{2\pi l \lambda_1} + \frac{1}{h_2 A_2}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{65 \times 0.0125} + \frac{\ln(33/25)}{18} + \frac{1}{6.5 \times 0.0165} \right) = 1.6823 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

(1) 每米长管道的热损失为：

$$\Phi = \frac{\Delta t}{R} = \frac{120 - 15}{1.6823} = 62.4 \text{ W}$$

(2) 假设覆盖保温材料后的半径为 r_3 ，由所给条件和热阻的概念可知：

$$\frac{\Phi_{\text{保温}}}{\Phi_{\text{光管}}} = 0.2 = \frac{R_{\text{光管}}}{R_{\text{保温}}}$$



2 通过圆筒壁的导热

$$\frac{\frac{1}{h_1 A_1} + \frac{\ln(d_2/d_1)}{2\pi l \lambda_1} + \frac{1}{h_2 A_2}}{\frac{1}{h_1 A_1} + \frac{\ln(d_2/d_1)}{2\pi l \lambda_1} + \frac{\ln(d_3/d_2)}{2\pi l \lambda_2} + \frac{1}{h_2 A_3}} = 0.2$$

$$\frac{\frac{1}{65 \times 0.0125} + \frac{\ln(33/25)}{18} + \frac{1}{6.5 \times 0.0165}}{\frac{1}{65 \times 0.0125} + \frac{\ln(33/25)}{18} + \frac{\ln(r_3/0.0165)}{0.04} + \frac{1}{6.5 \times r_3}} = 0.2$$

由以上超越方程解得 $r_3 = 0.123 \text{ m}$

故保温层厚度为 $123 - 16.5 = 106.5 \text{ mm}$ 。



2 通过圆筒壁的导热

(3) 若要将热损失降低90%，按上面方法可得

$$r_3 = 1.07 \text{ m}$$

这时所需的保温层厚度为

$$\delta = 1.07 - 0.0165 = 1.05 \text{ m}$$

由此可见，热损失降低到一定程度后，若要再提高保温效果，将会使保温层厚度成倍增加。

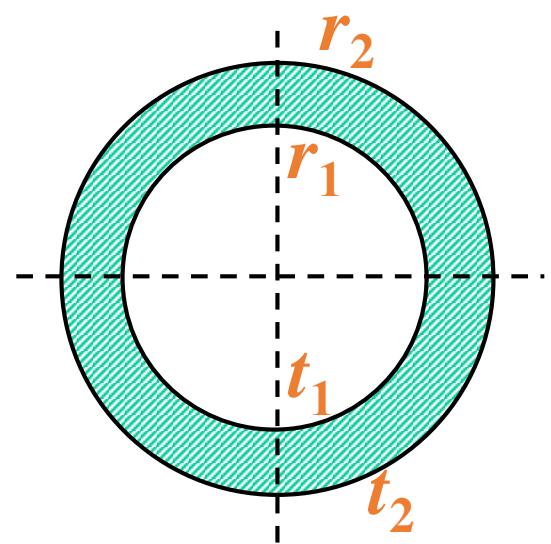
3 通过球壁的导热

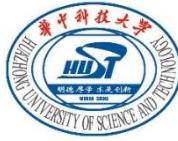
➤ **温度分布:** $t = t_2 + (t_1 - t_2) \frac{1/r - 1/r_2}{1/r_1 - 1/r_2}$

➤ **热流密度:** $q = -\lambda \frac{dt}{dr} = \frac{\lambda(t_1 - t_2)}{(1/r_1 - 1/r_2)r^2}$

➤ **热流量:** $\Phi = \frac{4\pi\lambda(t_1 - t_2)}{1/r_1 - 1/r_2}$

➤ **热阻:** $R_\lambda = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$





4 变截面或变导热系数问题

➤ 求解导热问题的一般思路：

建立导热
微分方程

获得温
度分布

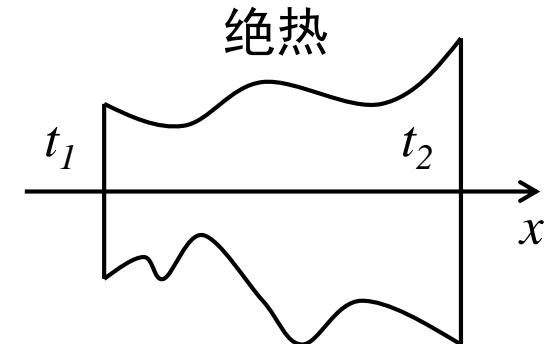
代入傅里叶定
律求解热流量

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + \dot{\Phi} = 0$$

变导热系数
变截面？

太复杂！

不通用！



$$\Phi = -\lambda A \frac{dt}{dx}$$

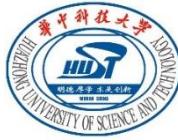
➤ 解决思路：

若仅考虑求
热流密度

稳态、无内热源、
第一类边界条件

关键： Φ 为常数

由傅里叶定律
直接求解

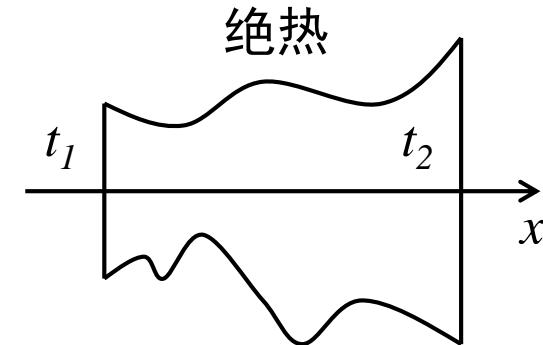


4 变截面或变导热系数问题

① 热流量的计算

➤ 由傅里叶定律: $\Phi = -\lambda(t)A(x)\frac{dt}{dx}$

➤ 分离变量: (由于是稳态问题, Φ 与 x 无关) 绝热



$$\Phi \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{A(x)} = - \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt$$

定义 λ 的积分平均值

$$\bar{\lambda} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt}{t_2 - t_1} \quad \rightarrow$$

$$\Phi = \frac{\bar{\lambda}(t_1 - t_2)}{\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{A(x)}}$$

热导率与温度成线性关系:

$$\bar{\lambda} = \lambda \left(\frac{t_2 + t_1}{2} \right)$$

变导热系数

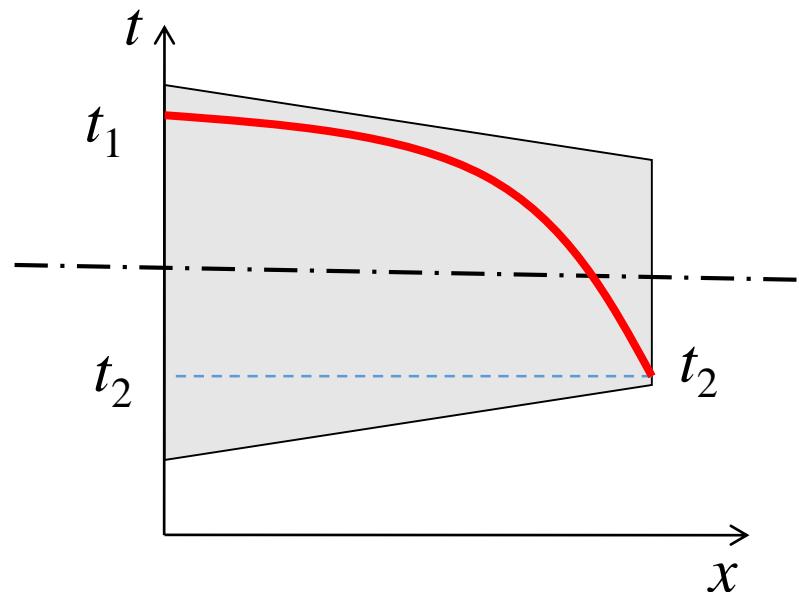
4 变截面或变导热系数问题

② 温度分布曲线判定

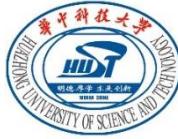
关键: Φ 为常数

$$\Phi = -\lambda(t) A(x) \frac{dt}{dx}$$

- 一圆台物体
- 两端面温度保持不变
($t_1 > t_2$)
- 侧表面为绝热面
- 常物性



温度曲线凹向如何判断?

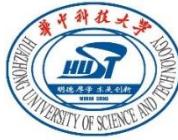


5 内热源问题

应用：

- 电流通过的导体；
- 化工中的放热、吸热反应；
- 反应堆燃料元件核反应热。

在有内热源时，即使是一维稳态导热：热流量沿传热方向也是不断变化的，微分方程中必须考虑内热源项。



5 内热源问题

① 具有内热源的平壁

如果平壁内有均匀的内热源，且认为导热系数 λ 为常数，平壁的两侧均为第三类边界条件，由于对称性，只考虑平板一半：

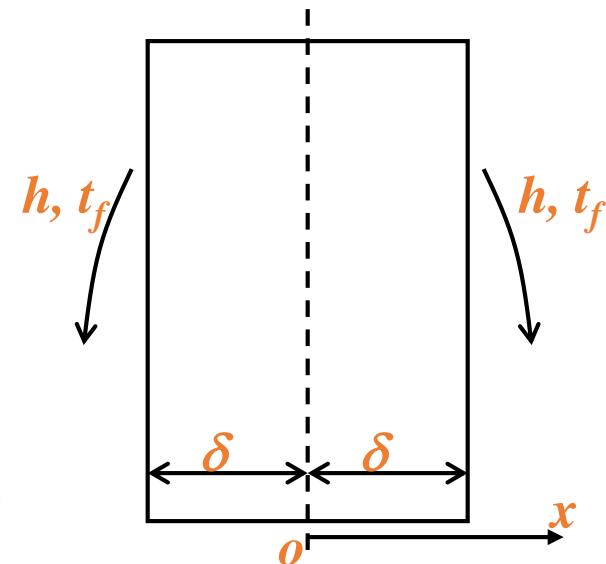
➤ 微分方程：

$$\frac{d^2t}{dx^2} + \frac{\dot{\Phi}}{\lambda} = 0$$

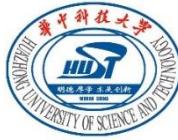
➤ 边界条件为：

$$x = 0, \frac{dt}{dx} = 0$$

$$x = \delta, -\lambda \frac{dt}{dx} = h(t - t_f)$$



对微分方程积分： $\frac{dt}{dx} = -\frac{\dot{\Phi}}{\lambda} x + c_1 \rightarrow c_1 = 0$



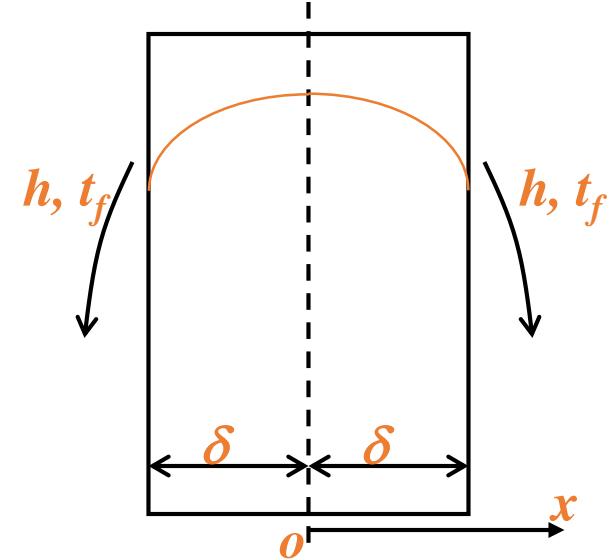
5 内热源问题

微分方程变为: $\frac{dt}{dx} = -\frac{\dot{\Phi}}{\lambda} x$

再积分: $t = -\frac{\dot{\Phi}}{2\lambda} x^2 + c_2$

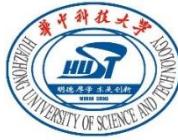
求出 c_2 后可得温度分布为:

$$t = \frac{\dot{\Phi}}{2\lambda} (\delta^2 - x^2) + \frac{\dot{\Phi}\delta}{h} + t_f$$



任一位置处的热流密度为:

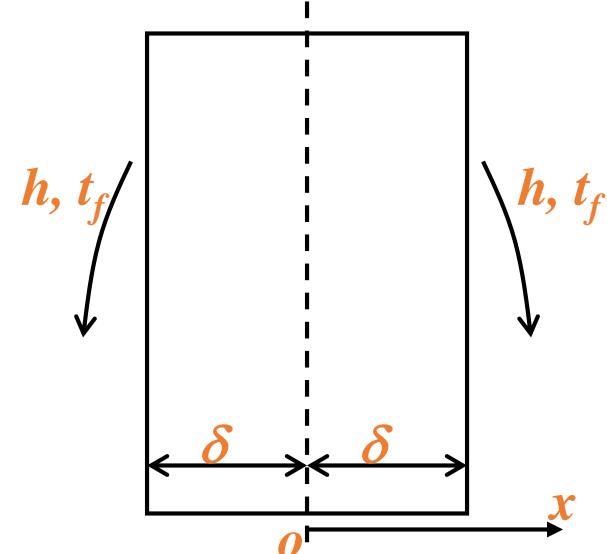
$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} = \dot{\Phi}x$$



5 内热源问题

$$t = \frac{\dot{\Phi}}{2\lambda} (\delta^2 - x^2) + \frac{\dot{\Phi}\delta}{h} + t_f$$

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} = \dot{\Phi}x$$



- 注意：**① 温度分布为**抛物线**分布；
② 热流密度与 x 成正比；
③ 当 $h \rightarrow \infty$ 时，应有 $t_w \rightarrow t_f$

故，**定壁温**时温度分布为：

$$t = \frac{\dot{\Phi}}{2\lambda} (\delta^2 - x^2) + t_w$$



5 内热源问题

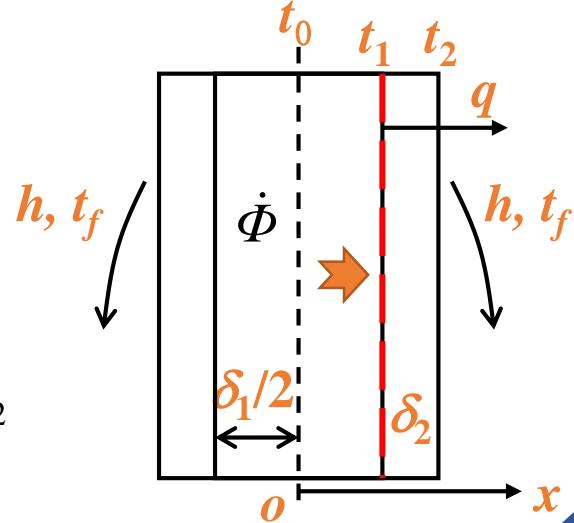
例：核反应堆燃料元件模型。三层平板，中间为 $\delta_1 = 14\text{mm}$ 的燃料层，两侧均为 $\delta_2 = 6\text{mm}$ 的铝板。燃料层发热量为 $1.5 \times 10^7 \text{W/m}^3$ ， $\lambda_1 = 35\text{W/(m K)}$ ，铝板无内热源， $\lambda_2 = 100\text{W/(m K)}$ ， $t_f = 150^\circ\text{C}$ 水冷， $h = 3500 \text{W/(m}^2 \text{K)}$ ，求各壁面温度及燃料最高温度。

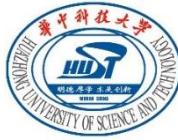
解：因对称性只研究半个模型。从燃料元件进入铝板的热量为：

$$q = \dot{\Phi}x$$

代入数据：

$$q = \frac{\delta_1}{2} \dot{\Phi} = \frac{0.014}{2} \times 1.5 \times 10^7 = 1.05 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$



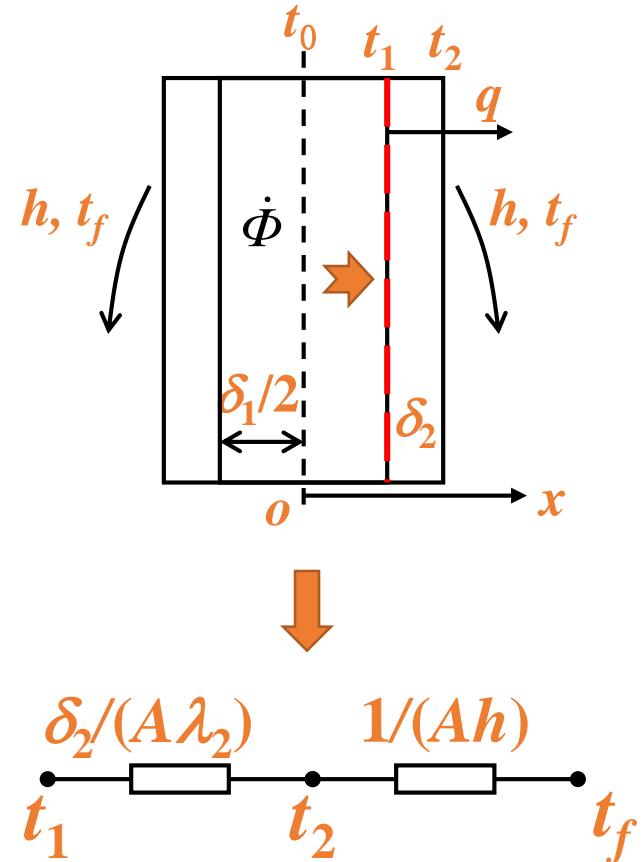


5 内热源问题

而根据牛顿冷却公式有：

$$q = h(t_2 - t_f)$$

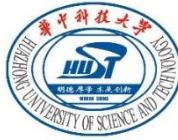
$$t_2 = t_f + \frac{q}{h} = 150 + \frac{1.05 \times 10^5}{3500} = 180$$



对铝板：

$$q = \frac{\lambda_2(t_1 - t_2)}{\delta_2}$$

$$\rightarrow t_1 = \frac{q\delta_2}{\lambda_2} + t_2 = \frac{1.05 \times 10^5 \times 0.006}{100} + 180 = 186.3 \text{ } ^\circ\text{C}$$

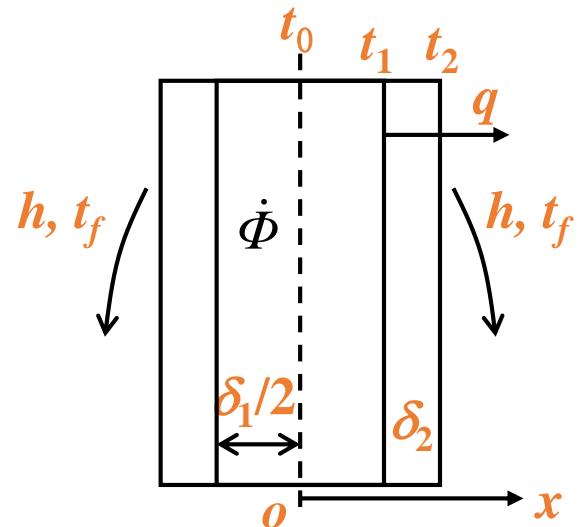


5 内热源问题

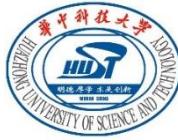
由内热源导热公式: $t = \frac{\dot{\Phi}}{2\lambda} (\delta^2 - x^2) + t_w$

$$t_0 = \frac{\dot{\Phi}}{2\lambda_1} \left(\frac{\delta_1}{2} \right)^2 + t_1$$

$$= 186.3 + \frac{1.5 \times 10^7 \times 0.007^2}{2 \times 35} = 196.8 \text{ } ^\circ\text{C}$$



注意: 热阻分析从 t_1 开始, 而不是从 t_0 开始。这是因为有内热源, 不同 x 处的 q 不相等。



5 内热源问题

② 有内热源的圆柱体

采用圆柱坐标系，设导热系数为常数，微分方程为：

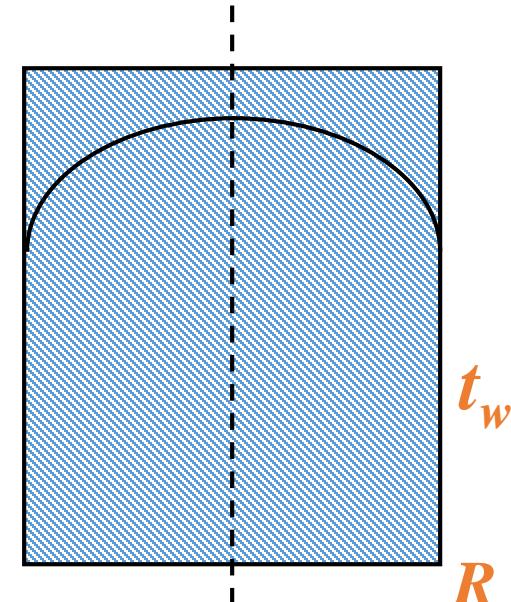
$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dt}{dr} \right) + \frac{\dot{\Phi}}{\lambda} = 0$$

边界条件为： $r = 0, \frac{dt}{dr} = 0$

$$r = R, t = t_w$$

一次积分得： $r \frac{dt}{dr} = -\frac{\dot{\Phi}}{2\lambda} r^2 + c_1$

通解为： $t = -\frac{\dot{\Phi}}{4\lambda} r^2 + c_1 \ln r + c_2$





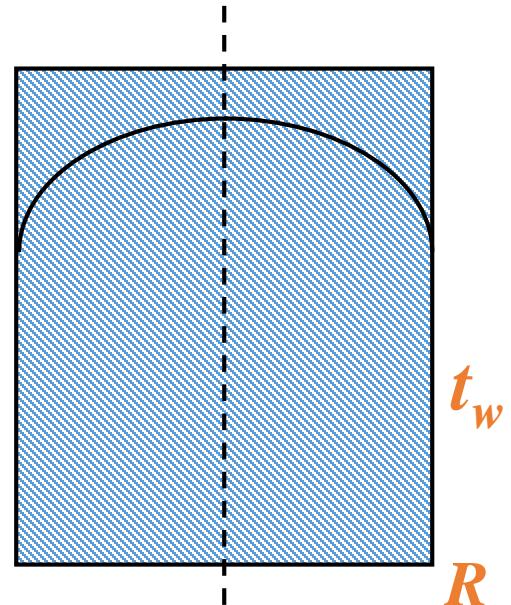
5 内热源问题

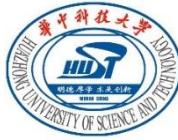
代入边界条件得：

$$c_1 = 0, \quad c_2 = t_w + \frac{\dot{\Phi}}{4\lambda} R^2$$

故温度分布为抛物线：

$$t = \frac{\dot{\Phi}}{4\lambda} (R^2 - r^2) + t_w$$





5 内热源问题

例：一直径为 3 mm、长度为 1 m 的不锈钢导线通有 200 A 的电流。不锈钢的导热系数为 $\lambda = 19 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ，电阻率为 $\rho = 7 \times 10^{-7} \Omega\cdot\text{m}$ 。导线周围与温度为 110°C 的流体进行对流换热，表面传热系数为 $4000 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ 。求导线中心的温度。

解：这里所给的是第三类边界条件，而前面的分析解是第一类边界条件，因此需先**确定导线表面的温度**。



5 内热源问题

由热平衡，导线发出的所有热量都必须通过对流传热散出，有：

$$I^2 R = \Phi = h\pi dL(t_w - t_\infty)$$

其中，电阻R为：

$$R = \rho \frac{L}{A} = \frac{7 \times 10^{-7}}{3.14 \times 0.0015^2} = 0.099 \Omega$$

故热平衡为：

$$200^2 \times 0.099 = 4000 \times 3.14 \times 0.003 \times (t_w - 110)$$

$$\Rightarrow t_w = 215 \text{ } ^\circ\text{C}$$



5 内热源问题

内热源强度求解如下：

$$I^2 R = \dot{\Phi} V$$

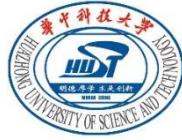
$$\dot{\Phi} = \frac{3960}{0.0015^2 \pi} = 560.2 \times 10^6 \text{ W/m}^3$$

由含内热源圆柱体温度计算公式：

$$t_c = \frac{\dot{\Phi}}{4\lambda} (R^2 - r^2) + t_w$$

得导线中心的温度为：

$$t_c = \frac{\dot{\Phi} R^2}{4\lambda} + t_w = \frac{560.2 \times 10^6 \times 0.0015^2}{4 \times 19} + 215 = 231.6 \text{ } ^\circ\text{C}$$



作业：

2-2, 2-11, 2-18



复习1

① 求解方法

- 微分方程+定解条件 
- 傅里叶定律直接积分 

$$t = f(x)$$

Φ

Φ



复习1

② 定量计算

➤ 平壁

单层
多层

$$\Phi = \frac{\Delta t}{\delta / A \lambda} = \frac{\Delta t}{R}$$



➤ 圆筒壁

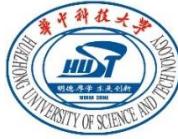
单层
多层

$$\Phi = \frac{\frac{t_1 - t_2}{\ln(r_2/r_1)}}{2\pi l \lambda} = \frac{t_1 - t_2}{R_\lambda}$$



$$\Phi = \frac{\frac{t_1 - t_{n+1}}{\ln(r_{n+1}/r_1)}}{\frac{1}{2\pi l} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i}} = \frac{t_1 - t_{n+1}}{R}$$





复习1

③ 定性分析

- 温度分布曲线 (无内热源)

$$\Phi = -\lambda A \frac{dt}{dx}$$

平板 $\longrightarrow A$ 一定

$$\lambda = \lambda_0 (1 + bt)$$

圆筒壁 $\longrightarrow \lambda$ 一定

$$\lambda \sim \frac{dt}{dx}$$

$$A \sim \frac{dt}{dx}$$

④ 应用

- 接触热阻：影响因素、减小方法





第三章 非稳态导热

§ 3-1 非稳态导热过程

§ 3-2 集总参数法

§ 3-3 一维非稳态导热的分析解



第三章 非稳态导热 (Unsteady Heat Conduction)

定义：导热系统内温度场随时间变化的导热过程为非稳态导热。

特点：温度随时间变化，热流也随时间变化。

$$t = f(\tau)$$

例如：冶金、热处理与热加工中工件被加热或冷却；锅炉、内燃机等装置起动、停机、变工况；自然环境温度；供暖或停暖过程中墙内与室内空气温度



第三章 非稳态导热

(Unsteady Heat Conduction)

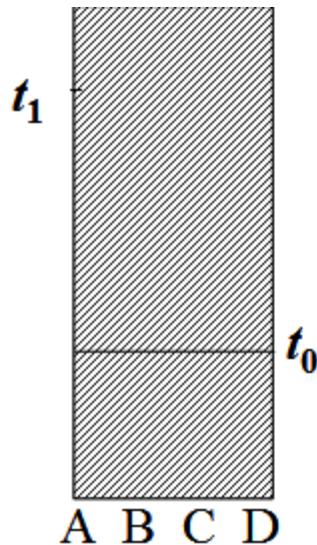
- **非稳态导热：周期性和非周期性**（瞬态导热）
- **周期性非稳态导热：**在周期性变化边界条件下发生的导热过程，物体温度按一定的周期发生变化。
- **非周期性非稳态导热：**在瞬间变化的边界条件下发生的导热过程，物体的温度随时间不断地升高（加热过程）或降低（冷却过程），在经历相当长时间后，物体温度逐渐趋近于周围介质温度，最终达到热平衡



§ 3-1 非稳态导热过程

物理过程：一平壁初始温度为 t_0 ，令其左侧表面的温度突然升高到 t_1 ，右侧与温度为 t_0 的空气接触。

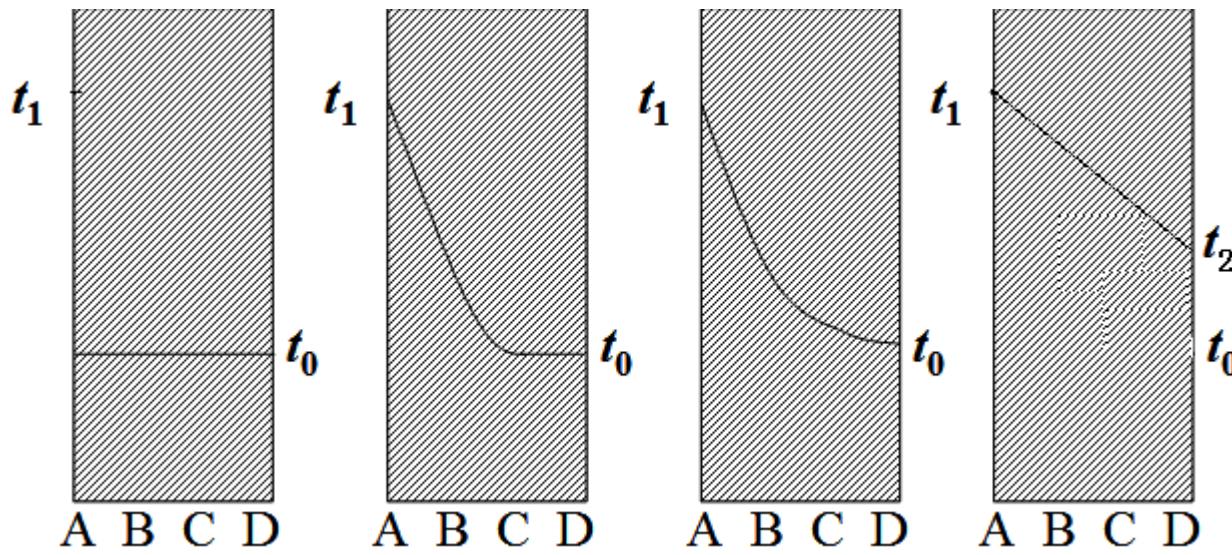
1 温度分布



- (a) $\tau = \tau_1$ (b) $\tau = \tau_2$ (c) $\tau = \tau_3$ (d) $\tau = \tau_4$

1 温度分布

动态



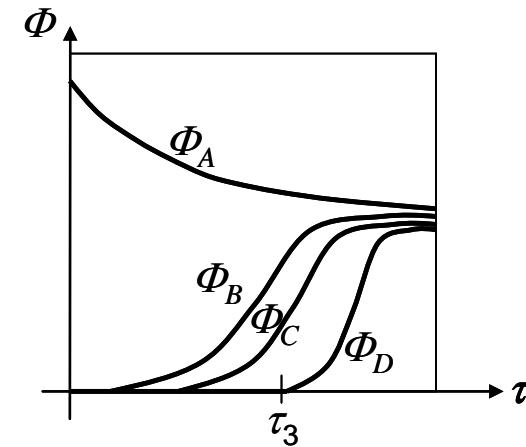
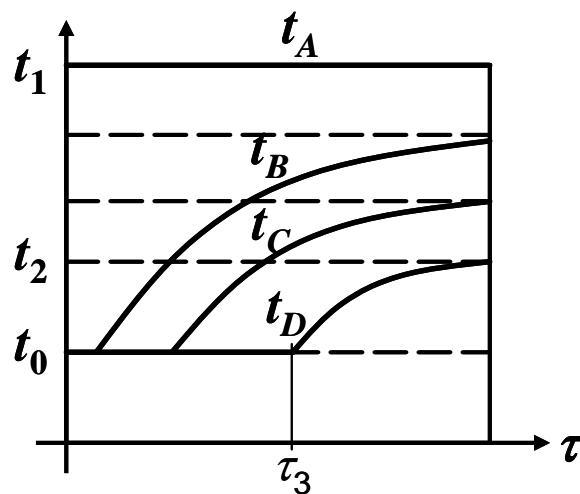
(a) $\tau = \tau_1$

(b) $\tau = \tau_2$

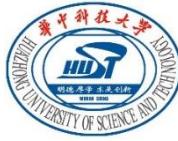
(c) $\tau = \tau_3$

(d) $\tau = \tau_4$

温度曲线



热流量曲线



2 两个阶段

➤ 非正规状况阶段（初始状况阶段）：

在 $\tau = \tau_3$ 时刻之前的阶段

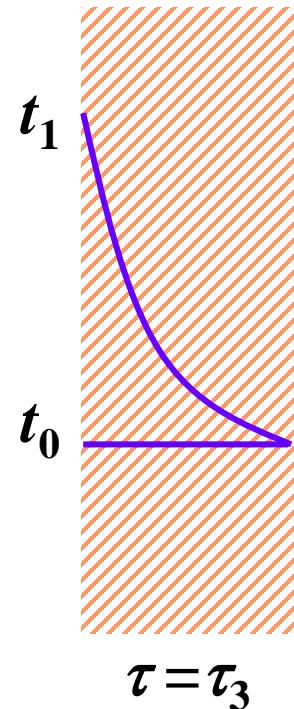
① 物体内的温度分布受初始温度分布的影响较大。

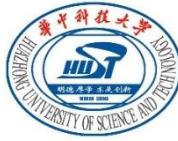
② 必须用无穷级数描述。

➤ 正规状况阶段：在 $\tau = \tau_3$ 时刻之后

① 初始温度分布的影响已经消失，物体内的温度分布主要受边界条件的影响，

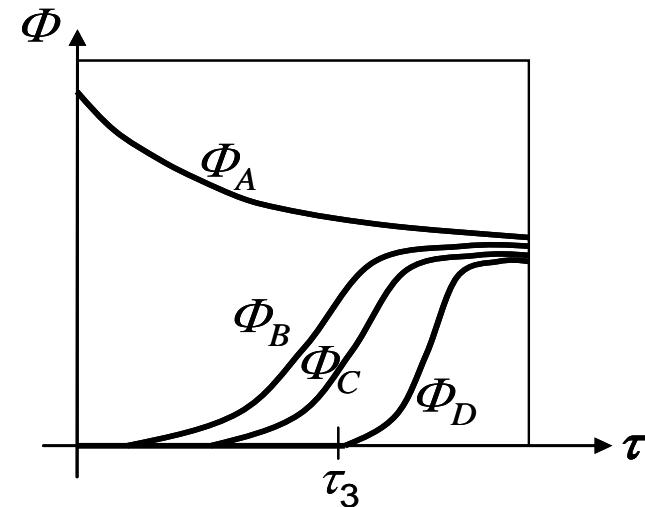
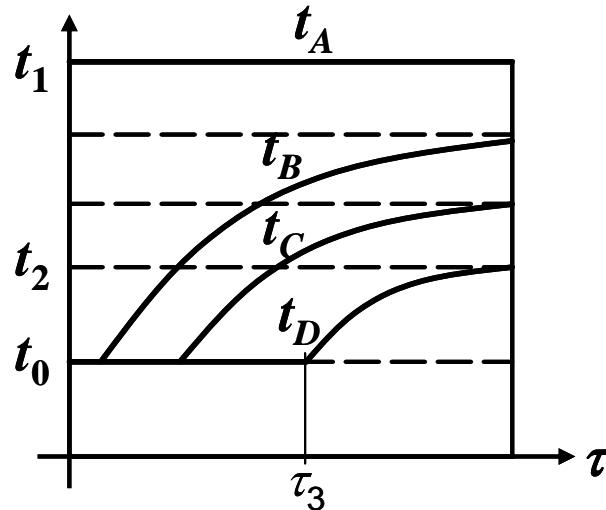
② 可以用初等函数描述。





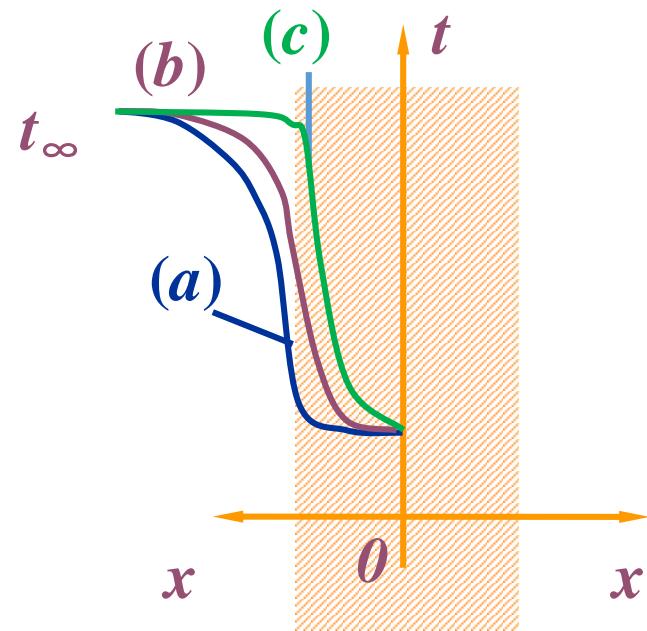
3 热量变化

与稳态导热的另一区别：同一时刻流过不同截面的热流量是不同的。通过截面 A 的热流量是从最高值不断减小，在其它各截面上，其截面温度开始升高之前通过该截面的热流量是零，温度开始升高之后，热流量才开始增加。这说明：温度变化要积聚或消耗热量。



4 边界条件对温度分布的影响

- 环境（边界条件）对系统温度分布的影响是很显著的，这里以一维非稳态导热过程（也就是大平板的加热或冷却过程）为例来加以说明。
- 图表示一个大平板的加热过程，并画出在某一时刻的三种不同边界情况的温度分布曲线 (a) 、 (b) 、 (c)



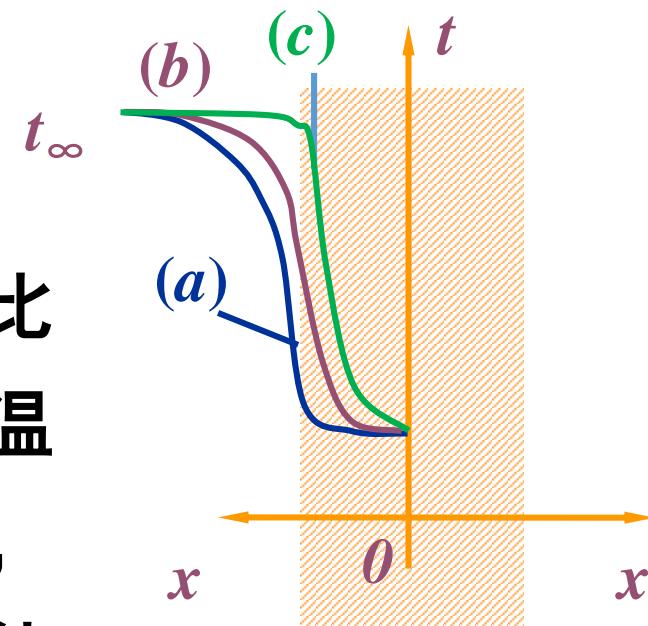


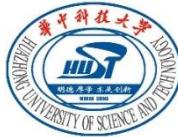
4 边界条件对温度分布的影响

曲线 (c) 表示平板外环境的换热热阻 $1/h$ 远小于平板内的导热热阻 δ/λ ，即

$$1/h \ll \delta/\lambda$$

从曲线上看，物体内部温度变化比较大，而环境与物体边界几乎无温差，此时可以认为 $t_\infty = t_w$ 。那么，边界条件就变成了第一类边界条件，即给定物体边界上的温度。



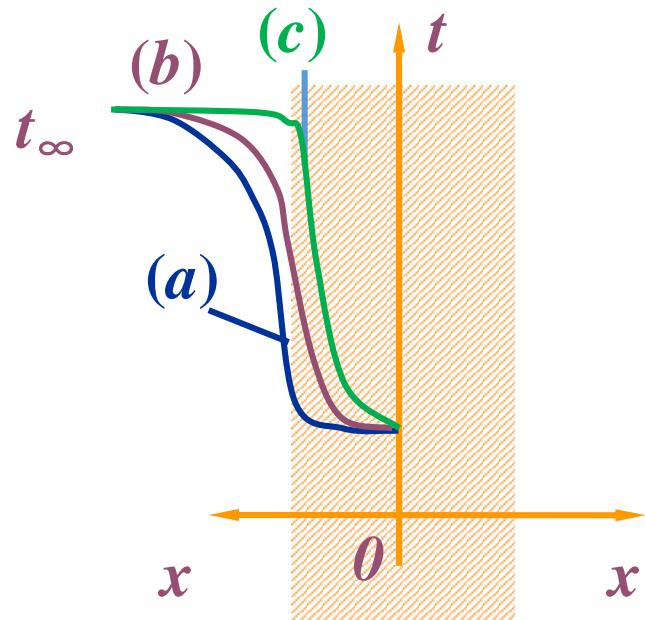


4 边界条件对温度分布的影响

曲线 (b) 表示平板外环境的换热热阻 $1/h$ 相当于平板内的导热热阻 δ/λ , 即

$$1/h \approx \delta/\lambda$$

这也是正常的第三类边界条件。



4 边界条件对温度分布的影响

曲线 (a) 表示平板外环境的换

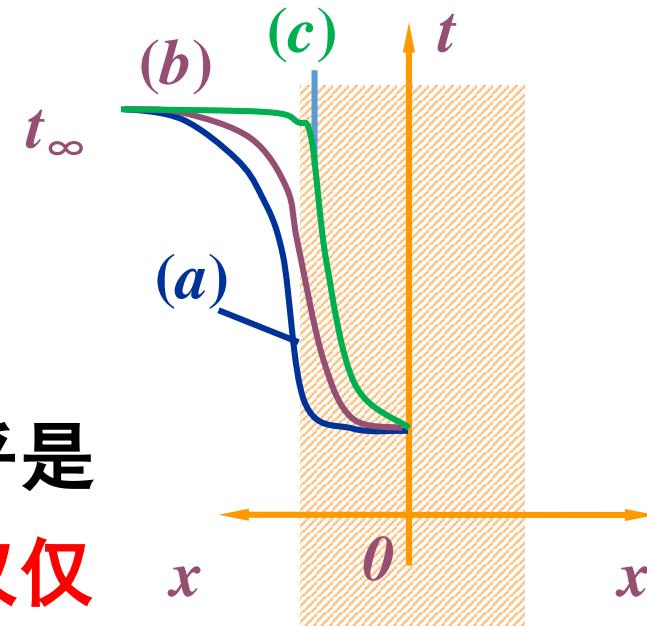
热热阻 $1/h$ 远大于平板内的导热

热阻 δ/λ ，即

$$1/h \gg \delta/\lambda$$

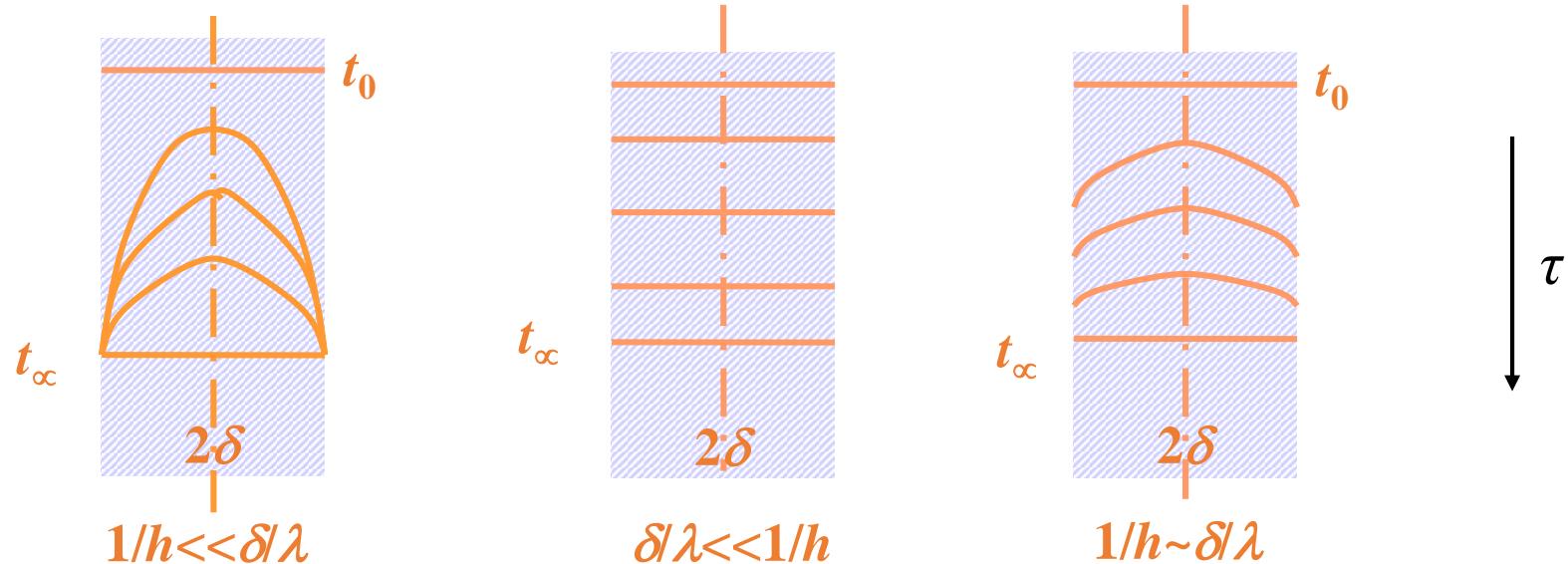
从曲线上看，物体内部的温度几乎是均匀的，这也就说**物体的温度场仅仅是时间的函数**，而与空间坐标无关。

我们称这样的非稳态导热系统为**集总参数系统**（一个等温系统或物体）。



4 边界条件对温度分布的影响

动态



平板内温度随时间变化的分布曲线



4 边界条件对温度分布的影响

把导热热阻与换热热阻相比可得到一个无因次的数，我们称之为毕渥数（Biot）数，即

$$Bi = \frac{\delta/\lambda}{1/h} = \frac{h\delta}{\lambda}$$

上述三种情况则对应着 $Bi \gg 1$ 、 $Bi \approx 1$ 和 $Bi \ll 1$ 。

毕渥数是导热分析中的一个重要的无因次准则。

物理意义：给定导热系统内的导热热阻与其和环境之间的换热热阻的对比关系。



§ 3-2 集总参数法

(The Lumped Capacitance Method)

1 定义

三维问题

$$t = f(x, y, z, \tau)$$

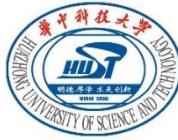


$$Bi \rightarrow 0$$

零维问题

$$t = f(\tau)$$

物体内任一时刻的温度处处相等，可用一个点的温度来描述。这种忽略物体内部导热热阻、认为物体温度均匀一致的分析方法——集总参数法。



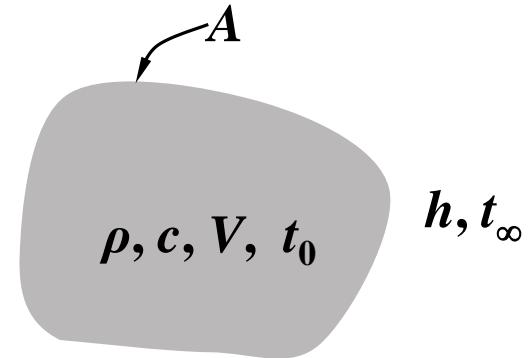
2 温度分布

物理模型：物体体积 V 、表面积 A ，密度 ρ 、比热 c ，初始温度 t_0 ， $\tau=0$ 时刻置于温度为 t_∞ 的流体中，若物体与流体之间的表面传热系数为 h 。求物体的温度变化？

能量守恒：单位时间物体热力学能的变化量等于物体表面与流体之间的对流换热量，即

$$dU = \delta Q$$

$$\rho c V \frac{dt}{d\tau} = h A (t_\infty - t)$$



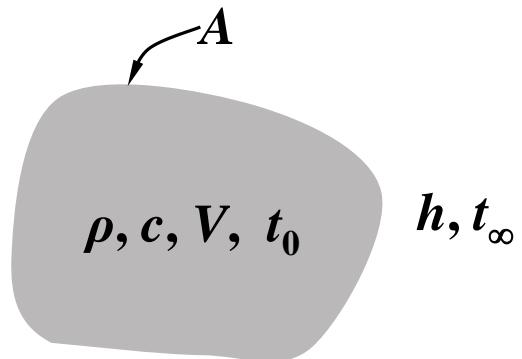


2 温度分布

$$\rho c V \frac{dt}{d\tau} = h A (t_{\infty} - t)$$

引入过余温度: $\theta = t - t_{\infty}$

$$\rho c V \frac{d\theta}{d\tau} = -h A \theta$$



分离变量: $\frac{d\theta}{\theta} = -\frac{hA}{\rho c V} d\tau$

初始条件为: $\theta(0) = t_0 - t_{\infty} = \theta_0$

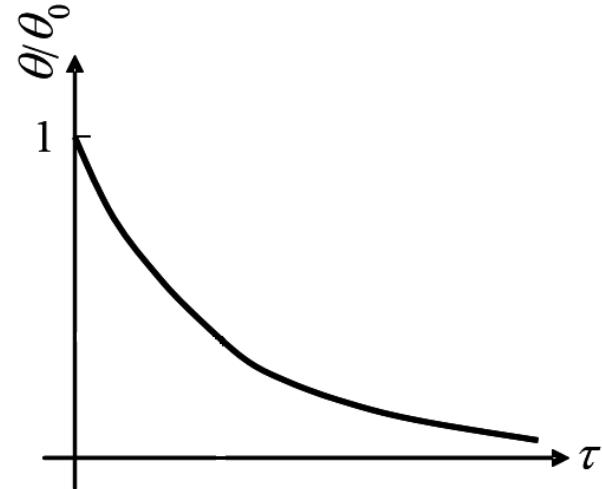


2 温度分布

积分得: $\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = - \int_0^{\tau} \frac{hA}{\rho c V} d\tau$

温度呈指
数分布

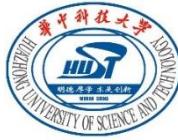
$$\ln \frac{\theta}{\theta_0} = - \frac{hA}{\rho c V} \tau$$
$$\Rightarrow \frac{\theta}{\theta_0} = \exp \left(- \frac{hA}{\rho c V} \tau \right)$$



过余温度随时间的变化曲线

方程中指数的量纲:

$$\frac{hA}{\rho c V} = \frac{\left[\frac{W}{m^2 K} \right] \cdot [m^2]}{\left[\frac{kg}{m^3} \right] \cdot \left[\frac{J}{kg K} \right] [m^3]} = \frac{W}{J} = \frac{1}{s}$$



2 温度分布

➤ 指数可写成：

$$-\frac{hA}{\rho cV} \tau = -\frac{hV}{\lambda A} \cdot \frac{\lambda A \cdot A \tau}{\rho cV \cdot V} = \frac{-h(V/A)}{\lambda} \cdot \frac{a\tau}{(V/A)^2} = -Bi_V Fo_V$$

➤ 定义傅立叶数： Fo_V

无量纲
时间

$$Fo_V = \frac{a\tau}{(V/A)^2} = \frac{\tau}{l^2/a} = \frac{\text{换热时间}}{\text{边界热扰动扩散到 } l^2 \text{ 面积上所需的时间}}$$

➤ 毕渥数的物理意义：

无量纲
热阻

$$Bi_V = \frac{h(V/A)}{\lambda} = \frac{hl}{\lambda} = \frac{l/\lambda}{1/h} = \frac{\text{物体内部导热热阻}}{\text{物体表面对流换热热阻}}$$



2 温度分布

$$Bi_V = \frac{h(V/A)}{\lambda} = \frac{hl}{\lambda}$$

$$Fo_V = \frac{a\tau}{(V/A)^2} = \frac{a\tau}{l^2}$$

Bi_V 越小，表示内部热阻小或外部热阻大，则内部温度就越均匀，集总参数法的误差就越小。

Fo_V 越大，热扰动就能越深入传播到物体内部，物体各点地温度就越接近周围介质的温度。

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \exp\left(-\frac{hA}{\rho c V} \tau\right) = e^{-Bi \cdot Fo}$$

量纲： 1/s

3 时间常数

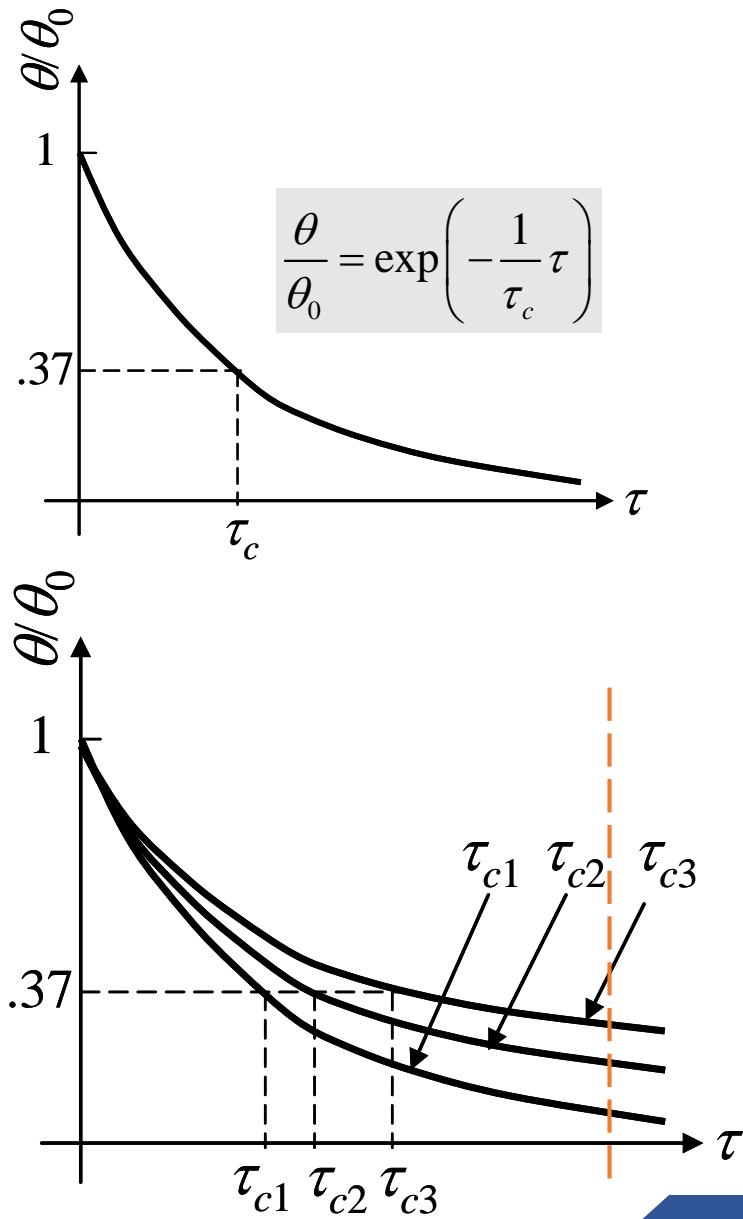
$$\tau_c = \frac{\rho c V}{hA}$$

时间常数
(弛豫时间)

当 $\tau = \tau_c$, 有:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-1} = 0.368$$

时间常数越小, 物体的温度变化就越快, 物体就越迅速地接近周围流体的温度。





3 时间常数

时间常数：反映了系统处于**一定的环境**中所表现出来的**传热动态**特征，时间常数小的响应快，时间常数大的响应慢。

测温元件：
热电偶





3 时间常数

测温元件：热电偶

极端场合：极低温速冷速热，微纳尺度系统



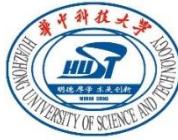
测温要求高，希望热电偶尽快地真实地反映**流体温度变化**，因此需要它的时间常数越小越好。

热容量小

$$\tau_c = \frac{\rho c V}{hA}$$

换热条件好

思考：同一个物体在不同的导热过程中时间常数会不会变化？



3 时间常数

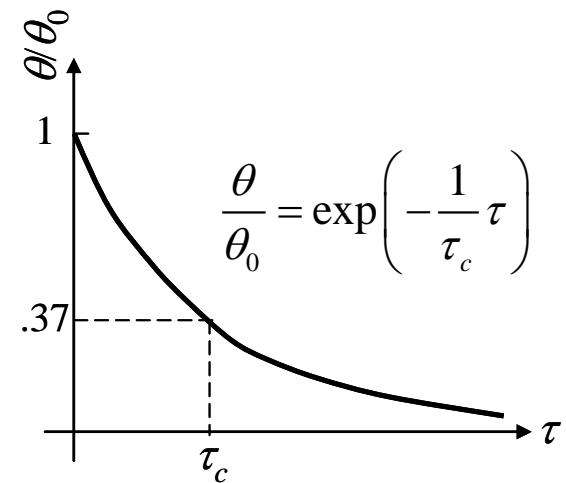
- 时间常数与其几何形状 (A 、 V) 、密度 (ρ) 及比热 (c) 有关, 还与环境的换热情况 (h) 相关。

- 同一物质不同的形状其时间常数不同, 同一物体在不同的环境下时间常数也是不相同。

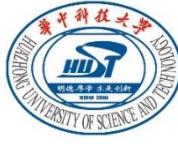
当 $\tau = 4\tau_c$ 时,

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-4} = 0.01$$

$$\tau_c = \frac{\rho c V}{h A}$$



工程上认为 $\tau = 4\tau_c$ 时导热体已达到热平衡状态



4 0~ τ 时间内传递的总热流量

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \exp\left(-\frac{hA}{\rho cV} \tau\right)$$

在 τ 时刻，物体温度为 t ，表面热流量为：

$$\Phi = hA(t - t_{\infty}) = hA(t_0 - t_{\infty}) \exp\left(-\frac{hA}{\rho cV} \tau\right)$$

导热体在时间 0~ τ 内传给流体的总热量：

$$Q_{\tau} = \int_0^{\tau} \Phi d\tau = (t_0 - t_{\infty}) \int_0^{\tau} hA \exp\left(-\frac{hA}{\rho cV} \tau\right) d\tau$$

$$= \rho cV (t_0 - t_{\infty}) \left[1 - \exp\left(-\frac{hA}{\rho cV} \tau\right) \right]$$

加热与冷却均适用!!!



5 集总参数系统的判定

以下几种情况， Bi 数将很小， 可用集总参数法：

- (1) 导热系数相当大；
- (2) 几何尺寸很小；
- (3) 表面换热系数很小。

特征尺寸

$$Bi_V = \frac{h(V/A)}{\lambda} = \frac{hl}{\lambda}$$

如何去判定一个任意的系统是集总参数系统？

$$Bi_V \leq 0.1M$$

为判定系统是否为集总参数系统，
 M 为形状修正系数。



5 集总参数系统的判定

$$Bi \leq 0.1M$$

厚度为 2δ 的大平板

$$M = 1$$

直径为 $2R$ 的长圆柱体

$$M = \frac{1}{2}$$

直径为 $2R$ 的球体

$$M = \frac{1}{3}$$

复杂端面

$$M = \frac{1}{3}$$



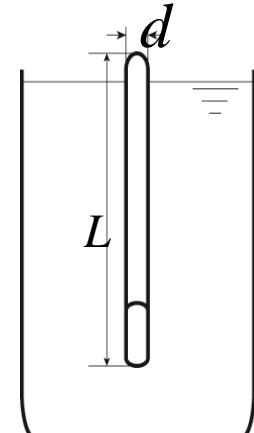
6 例题 1

一温度计水银泡是圆柱形，长20mm，内径4mm，测量气体温度，表面传热系数 $h = 12.5 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ ，若要温度计的温度与气体的温度之差小于初始过余温度的10%，求测温所需要的时间。水银 $\lambda = 10.36 \text{ W}/(\text{m K})$, $\rho = 13110 \text{ kg}/\text{m}^3$, $c = 0.138 \text{ kJ}/(\text{kg K})$.

解：

$$\begin{aligned}\frac{V}{A} &= \frac{\pi R^2 l}{2\pi R l + \pi R^2} = \frac{R l}{2l + R} \\ &= \frac{0.002 \times 0.02}{2 \times 0.02 + 0.002} = 0.953 \times 10^{-3} \text{ m}\end{aligned}$$

$$Bi = \frac{h(V/A)}{\lambda} = \frac{12.5 \times 0.953 \times 10^{-3}}{10.36} = 1.15 \times 10^{-3} < 0.03$$





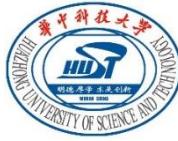
6 例题 1

$Bi < 0.03$, 故可以用集总参数法。

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \exp\left(-\frac{hA}{\rho c V} \tau\right) = \exp\left(-7.25 \times 10^{-3} \tau\right) < 10\%$$

由上式解得: $\tau > 318 \text{ s} = 5.3 \text{ min}$

为了减小测温误差, 测温时间应尽量加长。



6 例题 2

一厨师在炒鸡肉丝时要品尝一下咸淡，于是他从100°C的热炒锅中取出一鸡肉丝，用口吹了一会，待其降至65°C时再放入口中。试估算厨师需要吹多长时间？



物理模型：出锅时鸡肉丝可视为平均直径为2mm的圆条，厨师口中吹出的气流温度为30°C，其与鸡肉丝之间的表面传热系数为100 W/m²K，鸡肉丝的 $\rho = 810 \text{ kg/m}^3$ ， $c = 3.35 \text{ kJ/(kg} \cdot ^\circ\text{C)}$ ， $\lambda = 1.1 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$ 。



6 例题 2

解：首先检验是否可用集总参数法。为此计算 Bi_V ,

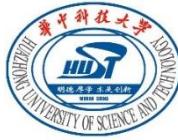
$$Bi_V = \frac{h(V/A)}{\lambda} = \frac{h(\pi r^2 l / 2\pi r l)}{\lambda} = \frac{hr}{2\lambda} = 0.045 < 0.05$$

故可以采用集总参数法。

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \exp\left(-\frac{hA}{\rho c V} \tau\right)$$

$$\frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty} = \frac{65 - 30}{100 - 30} = 0.5 \quad \frac{hA}{\rho c V} = \frac{2h}{c \rho r} = 0.0705 \text{ s}^{-1}$$

$$0.5 = \exp(-0.0705 \tau) \Rightarrow \tau = 9.83 \text{ s}$$



总结

判定依据

$$Bi \leq 0.1M$$

集总参数法

温度分布

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-\frac{hA}{\rho c V} \tau} = e^{-Bi \cdot Fo}$$

换热量计算

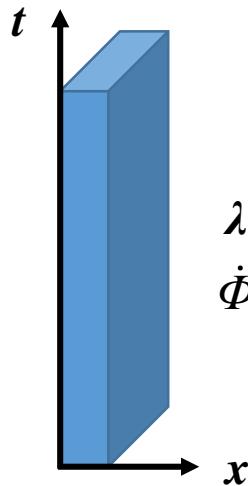
$$Q_\tau = \rho c V (t_0 - t_\infty) \left[1 - \exp \left(-\frac{hA}{\rho c V} \tau \right) \right]$$

§ 3-3 一维非稳态导热的分析解

(Analytical Solution to One-Dimensional System)

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \frac{\partial t}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda \frac{\partial t}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda \frac{\partial t}{\partial z}) + \dot{\Phi}$$

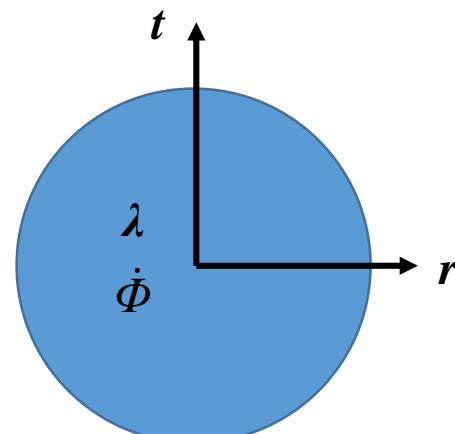
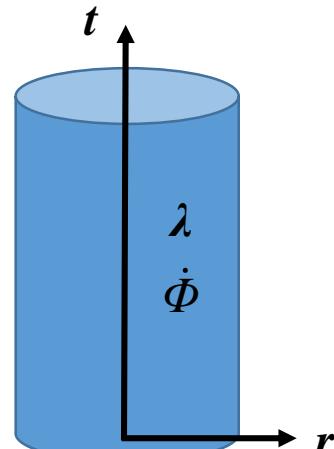
几何形状及边界条件都比较简单时可获得分析解。



$$t = f(x, \tau)$$

$$t = f(r, \tau)$$

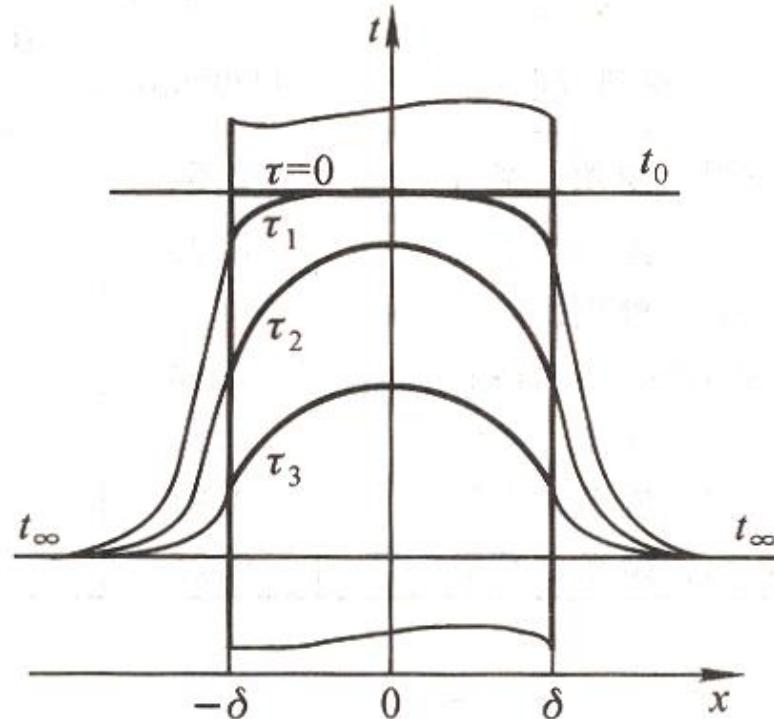
$$t = f(r, \tau)$$





1 无限大的平板的分析解

物理模型：厚度 2δ 的无限大平壁， λ 、 a 为已知常数；
 $\tau=0$ 时温度为 t_0 ；
突然把两侧介质温度降低为 t_∞ 并保持不变；壁表面与介质之间的表面传热系数为 h 。
两侧冷却情况相同、温度分布对称。中心为原点。求板内温度分布？





1 无限大的平板的分析解—温度分布

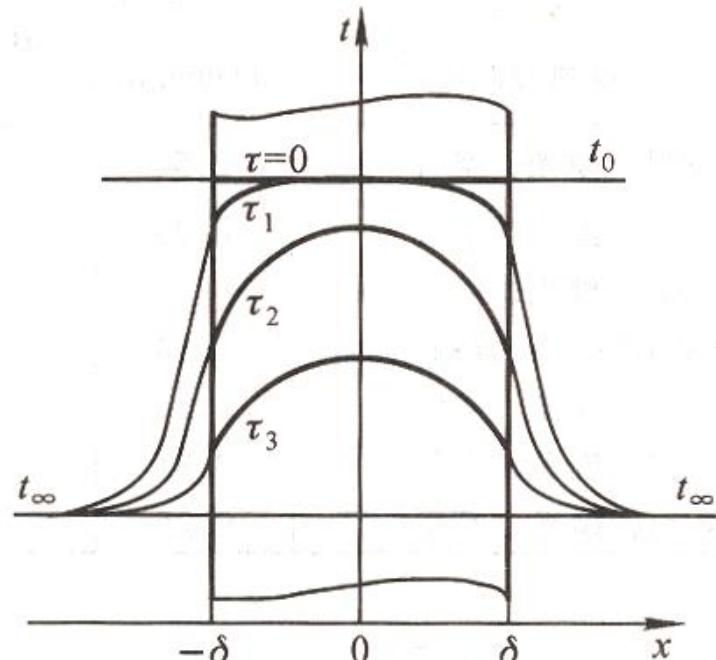
导热微分方程: $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$

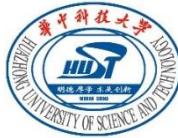
初始条件: $\tau = 0, t = t_0$

边界条件(第三类):

$$x = 0, \frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

$$x = \delta, -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{\delta} = h(t \Big|_{\delta} - t_{\infty})$$





1 无限大的平板的分析解—温度分布

微分方程:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

$$\tau = 0, \quad t = t_0$$

边界条件:

$$x = 0, \quad \partial t / \partial x = 0$$

$$x = \delta, \quad -\lambda \partial \theta / \partial x = h\theta \Big|_{x=\delta}$$

过余温度

$$\theta = t(x, \tau) - t_\infty$$

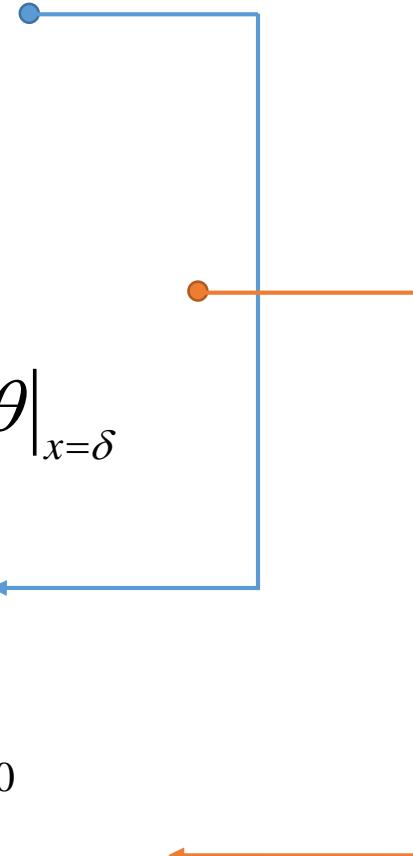


$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

$$\tau = 0, \quad \theta = t_0 - t_\infty = \theta_0$$

$$x = 0, \quad \partial \theta / \partial x = 0$$

$$x = \delta, \quad -\lambda \partial \theta / \partial x = h\theta \Big|_{x=\delta}$$



1 无限大的平板的分析解—温度分布

[Back](#)

采用分离变量法求解, 取: $\theta = X(x) \cdot T(\tau)$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

$$\tau = 0, \quad \theta = t_0 - t_\infty = \theta_0$$

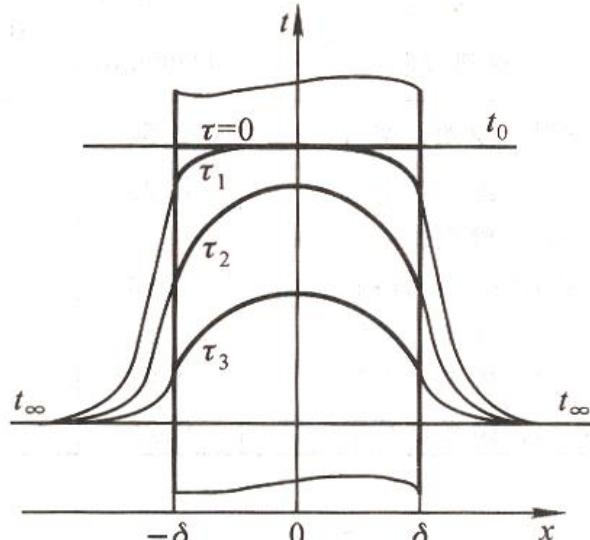
$$x = 0, \quad \partial \theta / \partial x = 0$$

$$x = \delta, \quad -\lambda \partial \theta / \partial x = h\theta \Big|_{x=\delta}$$

只为 τ 的函数

$$\frac{1}{aT} \frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}$$

只为 x 的函数



只能为常数: $\frac{1}{aT} \frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = D$



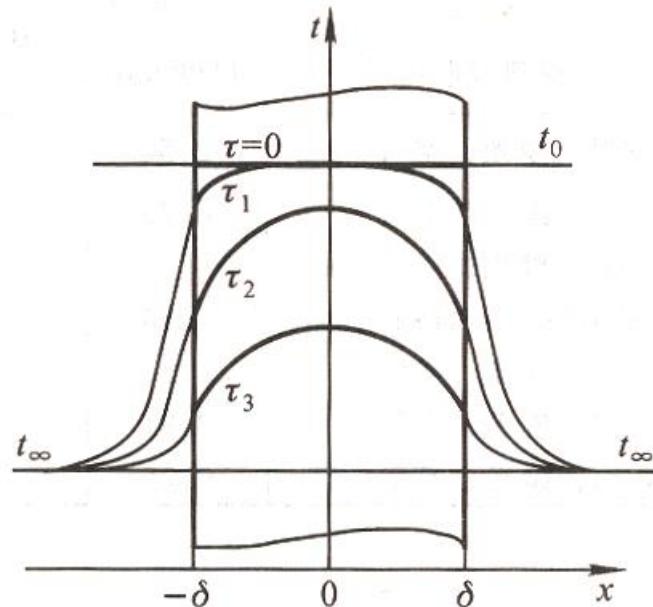
1 无限大的平板的分析解—温度分布

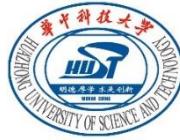
对 $\frac{1}{aT} \frac{dT}{d\tau} = D$ 积分，得：

$$T = C_1 e^{aD\tau}$$

式中， C_1 是积分常数，常数值 D 的正负可以从物理概念上加以确定。

当时间 τ 趋于无穷大时，过程达到稳态，物体达到周围环境温度，所以 D 必须为负值，否则物体温度将无穷增大。





1 无限大的平板的分析解—温度分布

令 $D = -\beta^2$

则有 $\frac{1}{aT} \frac{dT}{d\tau} = -\beta^2$ 以及 $\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = -\beta^2$

以上两式的通解为：

$$T = C_1 e^{-a\beta^2 \tau}$$

$$X = C_2 \cos(\beta x) + C_3 \sin(\beta x)$$

因此

$$\theta(x, \tau) = T \cdot X = e^{-a\beta^2 \tau} [A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)]$$



1 无限大的平板的分析解—温度分布

[Back](#)

$$\theta(x, \tau) = e^{-a\beta^2\tau} [A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)] \quad (a)$$

常数 A 、 B 和 β 可由边界条件确定。

$$\tau = 0, \quad \theta = t_0 - t_\infty = \theta_0 \quad (1)$$

$$x = 0, \quad \partial\theta/\partial x = 0 \quad (2)$$

$$x = \delta, \quad -\lambda \partial\theta/\partial x = h\theta \Big|_{x=\delta} \quad (3)$$

由边界条件(2), 得: $B=0$

(a)式变为: $\theta(x, \tau) = A e^{-a\beta^2\tau} \cos(\beta x) \quad (b)$

边界条件(3)代入(b)得: $\tan(\beta\delta) = \frac{h}{\lambda\beta}$



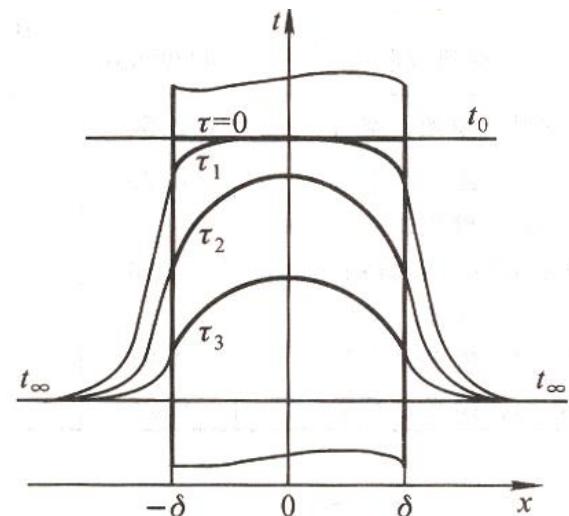
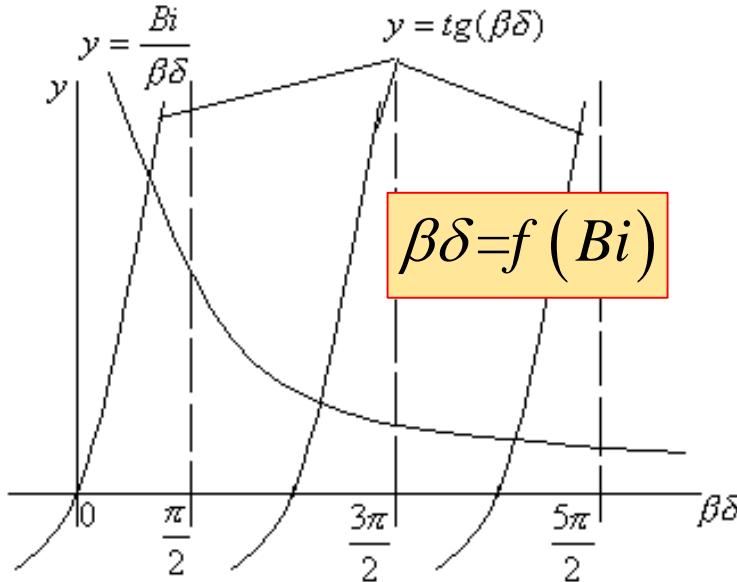
1 无限大的平板的分析解—温度分布

将 $tg(\beta\delta) = \frac{h}{\lambda\beta}$ 右端整理成：

$$y = \frac{h}{\lambda\beta} = \frac{h\delta}{\lambda} \frac{1}{\beta\delta} = \frac{Bi}{\beta\delta} \quad (c)$$

这里 **Bi数** 的尺度为 **平板厚度的一半**。

显然， β 是两曲线交点对应的所有值。式(c)称为特征方程。 β 称为特征值。分别为 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 。





1 无限大的平板的分析解—温度分布

至此，我们获得了无穷个特解：

$$\theta_1(x, \tau) = e^{-a\beta_1^2 \tau} [A_1 \cos(\beta_1 x)]$$

$$\theta_2(x, \tau) = e^{-a\beta_2^2 \tau} [A_2 \cos(\beta_2 x)]$$

.....

$$\theta_n(x, \tau) = e^{-a\beta_n^2 \tau} [A_n \cos(\beta_n x)]$$

通解为所有特解之和：

$$\theta(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a\beta_n^2 \tau} [A_n \cos(\beta_n x)]$$



1 无限大的平板的分析解—温度分布

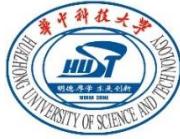
$$\theta(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a\beta_n^2 \tau} [A_n \cos(\beta_n x)]$$

利用初始条件 $\tau = 0, \theta = t_0 - t_\infty = \theta_0$, 求 A_n

$$A_n = \theta_0 \frac{2 \sin(\beta_n \delta)}{\beta_n \delta + \sin(\beta_n \delta) \cos(\beta_n \delta)}$$

解的最后形式为：

$$\theta(x, \tau) = \theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(\beta_n \delta)}{\beta_n \delta + \sin(\beta_n \delta) \cos(\beta_n \delta)} \cos(\beta_n x) \exp(-a\beta_n^2 \tau)$$



1 无限大的平板的分析解—温度分布

$$\theta(x, \tau) = \theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(\beta_n \delta)}{\beta_n \delta + \sin(\beta_n \delta) \cos(\beta_n \delta)} \cos(\beta_n x) \exp(-a \beta_n^2 \tau)$$



$$\theta(x, \tau) = \theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(\beta_n \delta)}{\beta_n \delta + \sin(\beta_n \delta) \cos(\beta_n \delta)} \cos\left(\beta_n \delta \frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-(\beta_n \delta)^2 \frac{a \tau}{\delta^2}\right)$$

$$Bi = h\delta/\lambda$$

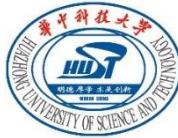
$$x/\delta$$

$$Fo = a\tau/\delta^2$$

(无量纲距离)



$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = f\left(Bi, Fo, \frac{x}{\delta}\right)$$



1 无限大的平板的分析解—传热量

0~ τ 时刻平壁的传热量：

解出温度分布之后，工程应用中还经常希望求得从
非稳态过程开始时刻算起至给定的某一时刻为止平
壁向流体所传递的**总热量**。

对双面对称加热来说，这些热量显然全部都“来自”
平壁（即物体内能改变总量）。根据能量守恒，有：

$$Q = \rho c \int_V [t_0 - t(x, \tau)] dV$$



1 无限大的平板的分析解—传热量

Back

引入平壁在整个**非稳态过程**（从开始至最终趋于平衡）中可能传递的**最大热量**：

$$Q_0 = \rho c V (t_0 - t_\infty) = \rho c \theta_0 V$$

可以将问题无量纲化

$$\begin{aligned}\frac{Q}{Q_0} &= \frac{\rho c \int_V [t_0 - t(x, \tau)] dV}{\rho c V (t_0 - t_\infty)} = \frac{1}{V} \int_V \frac{(t_0 - t_\infty) - (t - t_\infty)}{t_0 - t_\infty} dV \\ &= 1 - \frac{1}{V} \int_V \frac{\theta}{\theta_0} dV = 1 - \frac{\bar{\theta}}{\theta_0}\end{aligned}$$

其中： $\bar{\theta} = \frac{1}{V} \int_V (t - t_\infty) dV$ 是 τ 时刻物体的平均过余温度。



2 非稳态导热的正规状况阶段

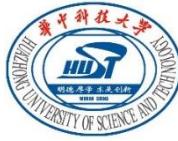
当 $Fo \geq 0.2$ 时，采用级数的第一项计算偏差小于1%，
故当 $Fo \geq 0.2$ 时：

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(\beta_n \delta)}{\beta_n \delta + \sin(\beta_n \delta) \cos(\beta_n \delta)} \cos\left[(\beta_n \delta) \frac{x}{\delta}\right] \exp\left(-(\beta_n \delta)^2 Fo\right)$$

$$\rightarrow \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{2 \sin(\beta_1 \delta)}{\beta_1 \delta + \sin(\beta_1 \delta) \cos(\beta_1 \delta)} \cos\left[(\beta_1 \delta) \frac{x}{\delta}\right] e^{-(\beta_1 \delta)^2 Fo}$$

其中 $\beta_1 \delta$ 是第一特征值，是 Bi 的函数。

Bi	0.01	0.05	0.1	0.5	1.0	5.0	10	50	100	∞
$\beta_1 \delta$	0.0998	0.2217	0.3111	0.6533	0.8603	1.3138	1.4289	1.5400	1.5552	1.5708



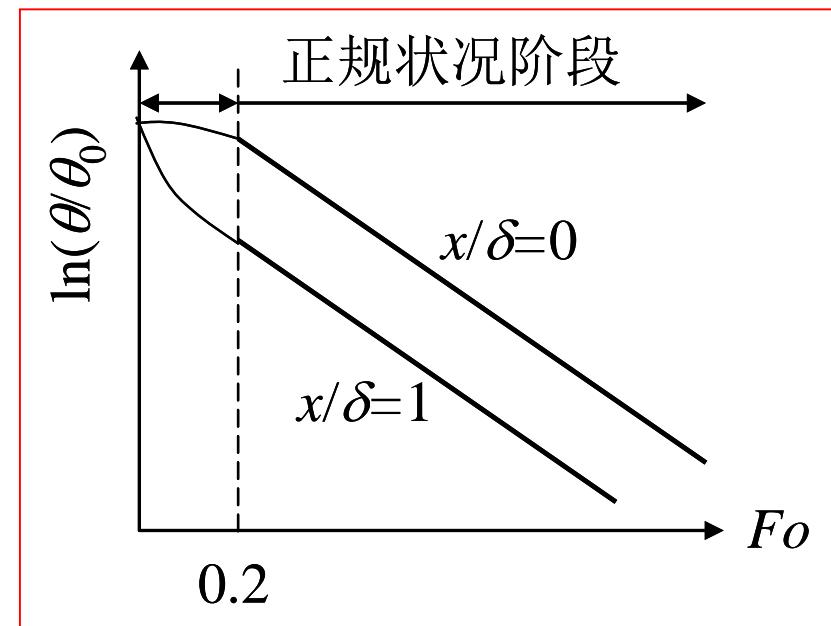
2 非稳态导热的正规状况阶段

为了分析这时温度分布的特点，将式两边取对数得：

$$\ln \frac{\theta}{\theta_0} = -[(\beta_1 \delta)^2]^{f(\tau)} \left[\frac{2 \sin(\beta_1 \delta)}{\beta_1 \delta + \sin(\beta_1 \delta) \cos(\beta_1 \delta)} \cos\left(\beta_1 \delta \frac{x}{\delta}\right) \right] \rightarrow \frac{Bi}{x/\delta}$$

Bi
f(τ)

第三类边界条件、平壁
的物性与几何尺寸。

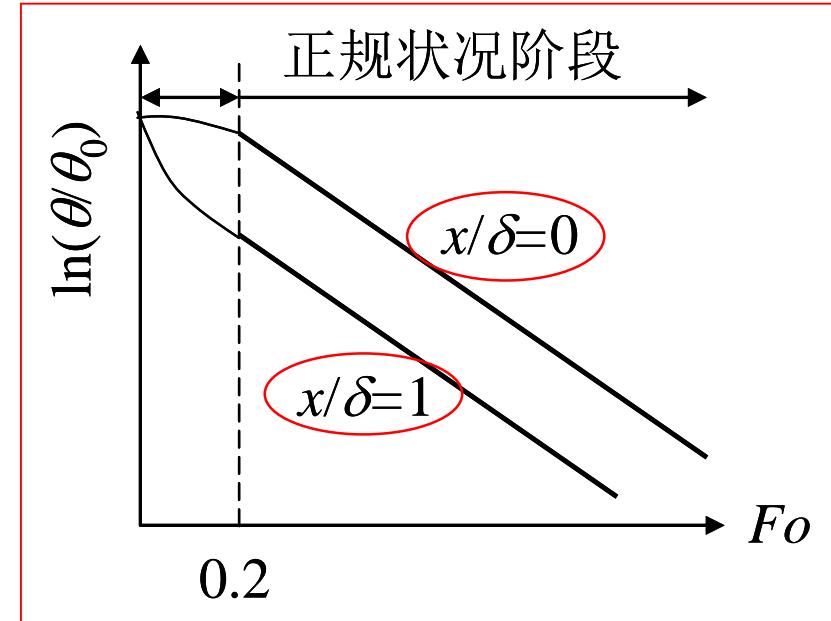


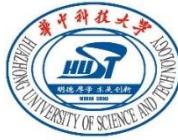


2 非稳态导热的正规状况阶段

$$\ln \frac{\theta}{\theta_0} = -(\beta_1 \delta)^2 F_o + \ln \left[\frac{2 \sin(\beta_1 \delta)}{\beta_1 \delta + \sin(\beta_1 \delta) \cos(\beta_1 \delta)} \cos\left(\beta_1 \delta \frac{x}{\delta}\right) \right]$$

可以看出, 当 $F_o \geq 0.2$, 平壁内所有各点过余温度的对数都随时间线性变化, 并且变化曲线的斜率都相等, 这一温度变化阶段称为非稳态导热的正规状况阶段。





2 非稳态导热的正规状况阶段

$$\ln \frac{\theta}{\theta_0} = -(\beta_1 \delta)^2 Fo + \ln \left[\frac{2 \sin(\beta_1 \delta)}{\beta_1 \delta + \sin(\beta_1 \delta) \cos(\beta_1 \delta)} \cos\left(\beta_1 \delta \frac{x}{\delta}\right) \right]$$

两边对时间求导：

与时间无关

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = -a \beta_1^2$$

各点冷却率/加热率相同



取决于

Bi

物体的物性参数

几何形状与尺寸

表面传热系数

冷却率/加热率：

过余温度对时间的相对变化率



2 非稳态导热的正规状况阶段

Back

对正规状况阶段，即 $Fo \geq 0.2$ 时，平壁中心 ($x=0$) 过余温度由式 (3-29) 可得

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{2 \sin(\beta_1 \delta)}{\beta_1 \delta + \sin(\beta_1 \delta) \cos(\beta_1 \delta)} \cos\left[\left(\beta_1 \delta\right) \frac{x}{\delta}\right] e^{-(\beta_1 \delta)^2 Fo}$$

$$\xrightarrow{x=0} \frac{\theta_m}{\theta_0} = \frac{2 \sin(\beta_1 \delta)}{\beta_1 \delta + \sin(\beta_1 \delta) \cos(\beta_1 \delta)} e^{-(\beta_1 \delta)^2 Fo} = f(Bi, Fo)$$

任一点过余温度与中心过余温度之比为：

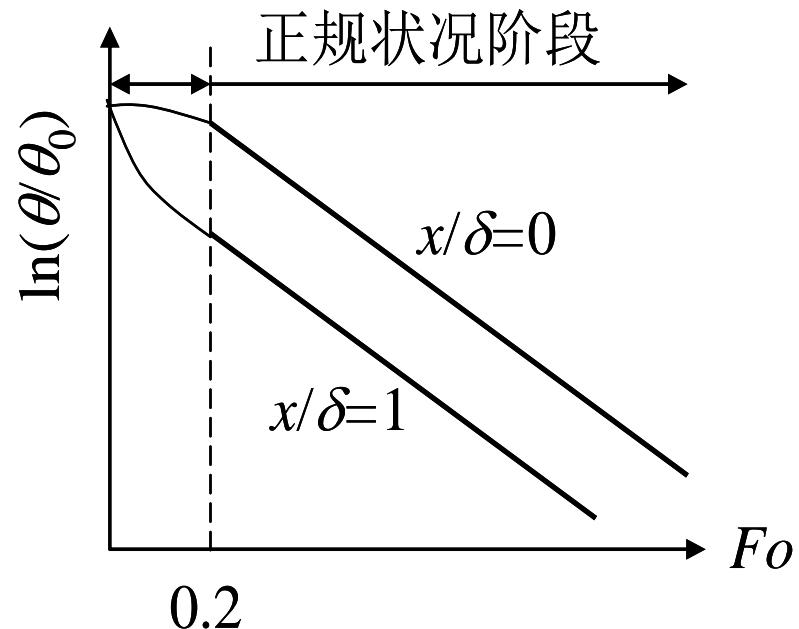
$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_m(\tau)} = \cos\left[\left(\beta_1 \delta\right) \frac{x}{\delta}\right] = f\left(Bi, \frac{x}{\delta}\right)$$

与时间无关！

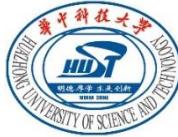


2 非稳态导热的正规状况阶段

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_m(\tau)} = \cos \left[(\beta_1 \delta) \frac{x}{\delta} \right]$$
$$= f \left(Bi, \frac{x}{\delta} \right)$$



可见，当非稳态导热进入正规状况阶段以后，虽然 θ 和 θ_m 都随时间而变化，但它们的比值与时间 τ 无关，而仅与几何位置 x/δ 及毕渥数 Bi 有关。即无论初始分布如何，无量纲温度 θ/θ_m 都一样。



2 非稳态导热的正规状况阶段

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_m(\tau)} = \cos\left[(\beta_1 \delta) \frac{x}{\delta}\right]$$

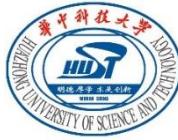
令 $x = \delta$ 可以计算平壁表面温度和中心温度的比值：

$$\frac{\theta_w(\delta)}{\theta_m} = \cos(\beta_1 \delta) \quad \rightarrow \quad \text{P. 56/表3-1}$$

当 $Bi < 0.1$ 时, $\beta_1 \delta < 0.3111$, 而 $\cos(\beta_1 \delta) > 0.95$ 。

当 $Bi < 0.1$ 时, 平壁表面温度和中心温度的差别 **小**于 5%, 可以近似认为整个平壁温度是均匀的。

这就是3-2节**集总参数法的界定值**定为 $Bi < 0.1$ 的原因。



2 非稳态导热的正规状况阶段

Remind

根据：

$$\frac{\bar{\theta}}{\theta_0} = \frac{1}{V} \int_v \frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty} dV = \frac{2 \sin^2(\beta_1 \delta)}{\beta_1 \delta [\beta_1 \delta + \sin(\beta_1 \delta) \cos(\beta_1 \delta)]} e^{-(\beta_1 \delta)^2 Fo}$$

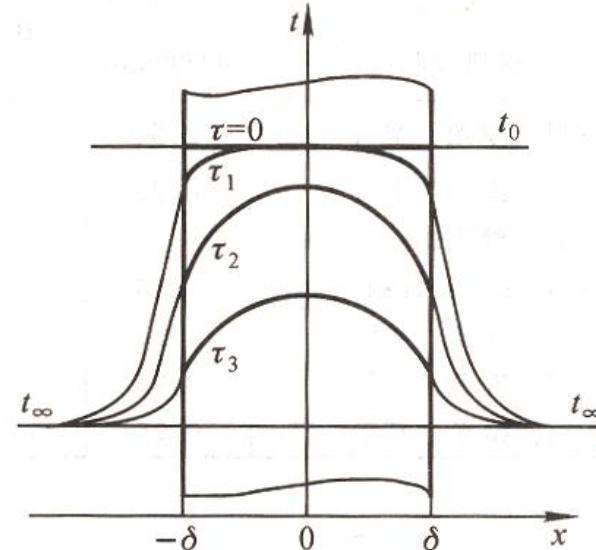
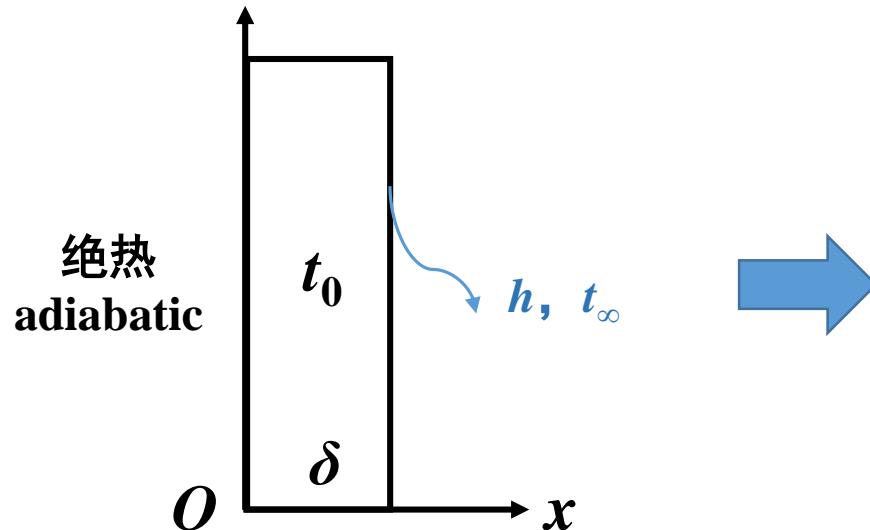
得出，进入正规状况阶段后，从初始时刻至某一时刻所传递的热量为：

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{2 \sin^2(\beta_1 \delta)}{\beta_1 \delta [\beta_1 \delta + \sin(\beta_1 \delta) \cos(\beta_1 \delta)]} e^{-(\beta_1 \delta)^2 Fo}$$

2 非稳态导热的正规状况阶段

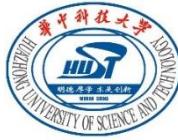
Remind

□ 关于边界条件的讨论1：



NOTE：分析解也适用于**一侧绝热、另一侧为第三类边界条件、厚度为 δ** 的一维平壁的非稳态导热。
(对称条件和绝热条件的数学表达式是相同的)





2 非稳态导热的正规状况阶段

□ 关于边界条件的讨论2:

第一类边界条件

$$\begin{array}{l} h \rightarrow \infty \\ \leftarrow \\ t_w \rightarrow t_\infty \end{array}$$

第三类边界条件

$$h \rightarrow \infty$$



$$Bi \rightarrow \infty$$



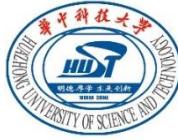
物体表面温度发生突
然变化后保持不变

P. 56/表3-1

$$\beta_1 \delta = \pi/2$$

正规状况阶段第一类边界条件下大平壁非稳态导热的
温度分布为：

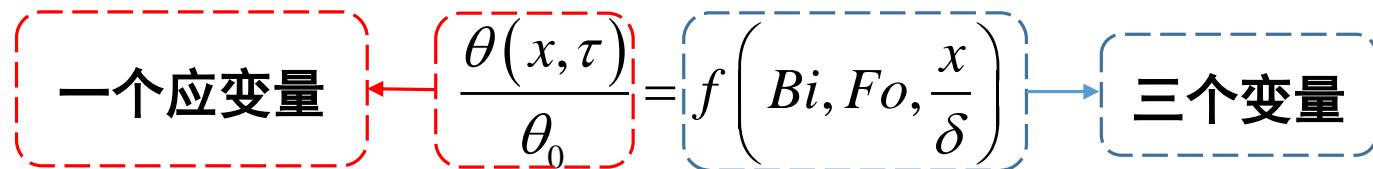
$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{4}{\pi} e^{-(\pi/2)^2 Fo} \cos \left[\frac{\pi}{2} \frac{x}{\delta} \right]$$



3 采用海斯勒图 (Heisler Chart) 计算

对于 $Fo \geq 0.2$ 时无限大平壁的非稳态导热过程，温度场可按公式计算；也可用诺谟图计算，其中用于确定温度分布的图线称为海斯勒图。

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = \frac{2 \sin(\beta_1 \delta)}{\beta_1 \delta + \sin(\beta_1 \delta) \cos(\beta_1 \delta)} \cos\left[(\beta_1 \delta) \frac{x}{\delta}\right] e^{-(\beta_1 \delta)^2 Fo}$$



$$\Theta = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\theta_m}{\theta_0} \cdot \frac{\theta}{\theta_m}$$

与坐标无关 与时间无关

其中， $\theta_m = t_m - t_\infty$ 为平板中心的过余温度。

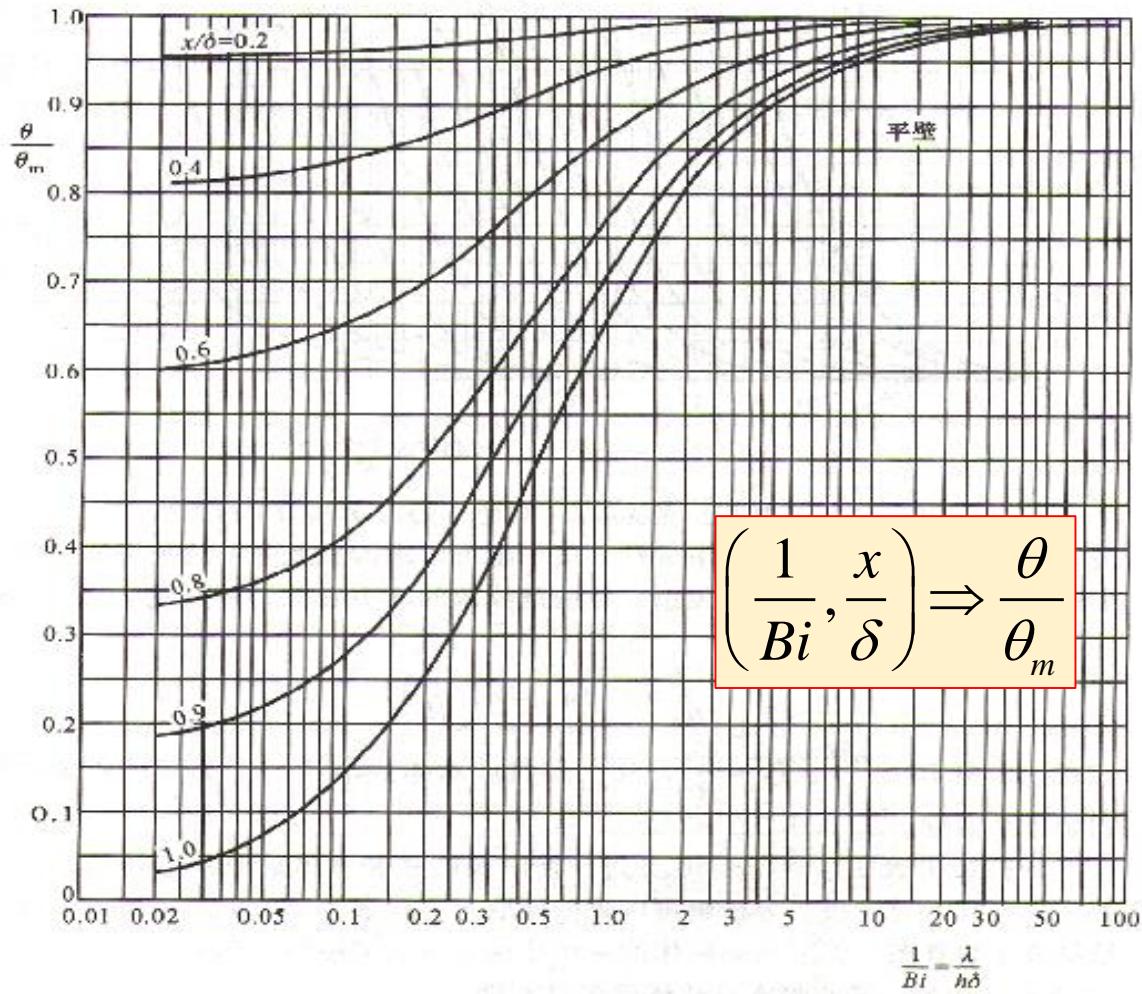


3 采用海斯勒图 (Heisler Chart) 计算

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_m(\tau)} \cdot \frac{\theta_m(\tau)}{\theta_0}$$

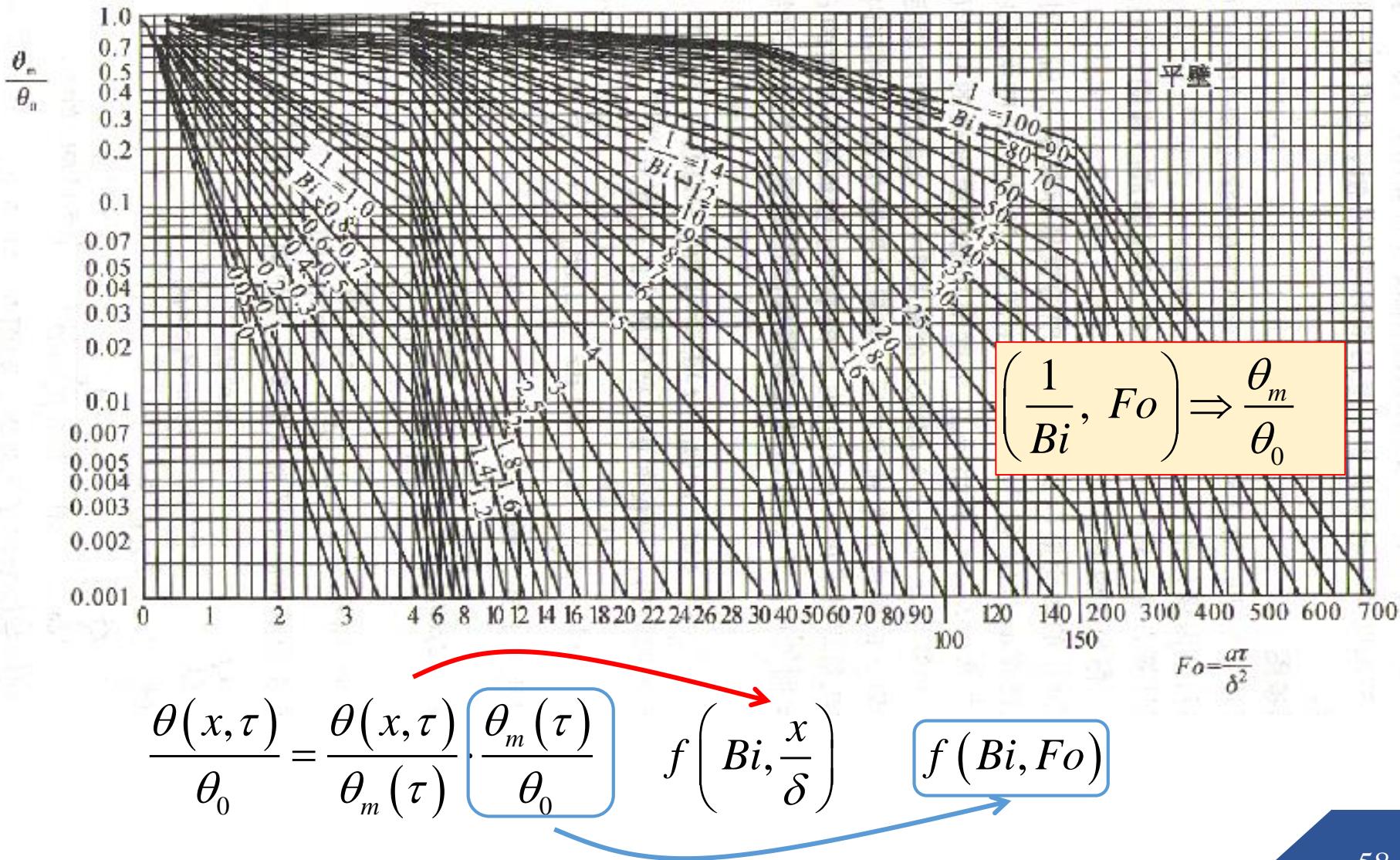
$f\left(Bi, \frac{x}{\delta}\right)$

$f\left(Bi, Fo\right)$





3 采用海斯勒图 (Heisler Chart) 计算

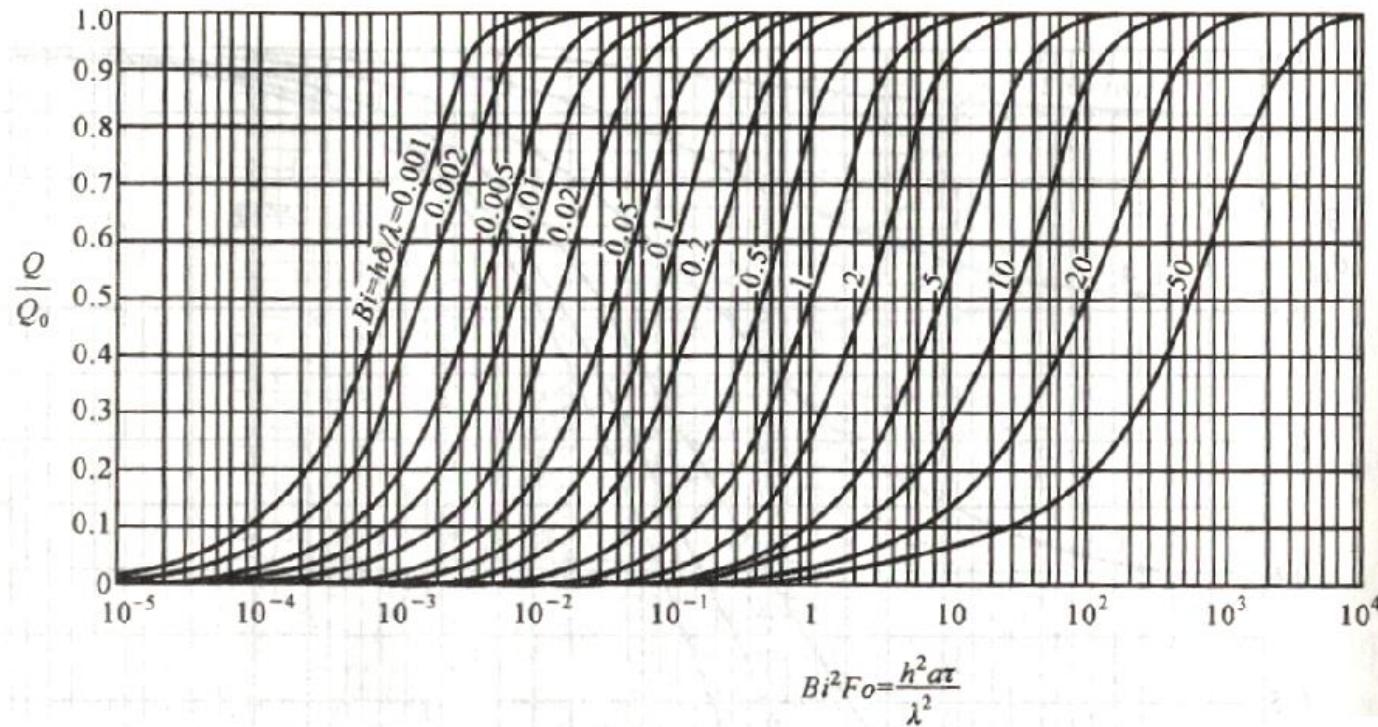




3 采用海斯勒图 (Heisler Chart) 计算

无量纲的热量：

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{2 \sin^2(\beta_1 \delta)}{\beta_1 \delta [\beta_1 \delta + \sin(\beta_1 \delta) \cos(\beta_1 \delta)]} e^{-(\beta_1 \delta)^2 Fo} = f(Bi, Bi^2 Fo)$$



3 采用海斯勒图 (Heisler Chart) 计算

➤ 如何利用线算图

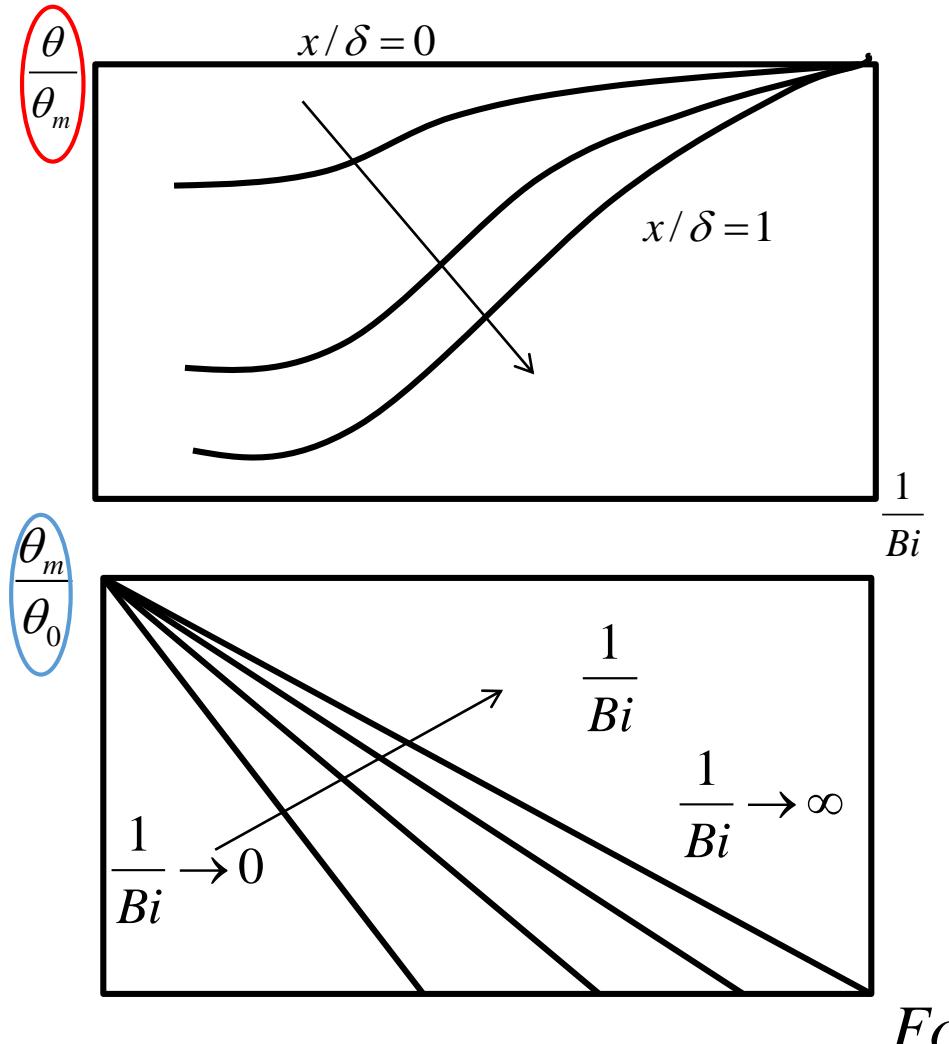
A. 由时间求温度

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = f\left(Fo, Bi, \frac{x}{\delta}\right)$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty}$$



求出温度 t



3 采用海斯勒图 (Heisler Chart) 计算



➤ 如何利用线算图

B. 由温度求时间

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty}$$



$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = \frac{\theta_m}{\theta_0} \cdot \frac{\theta}{\theta_m} = f\left(Fo, Bi, \frac{x}{\delta}\right)$$



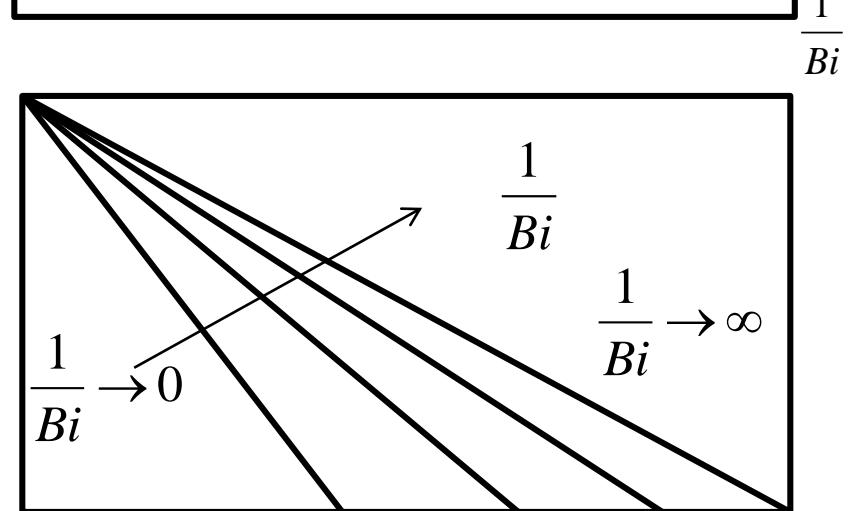
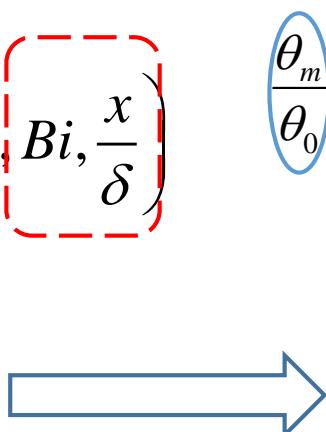
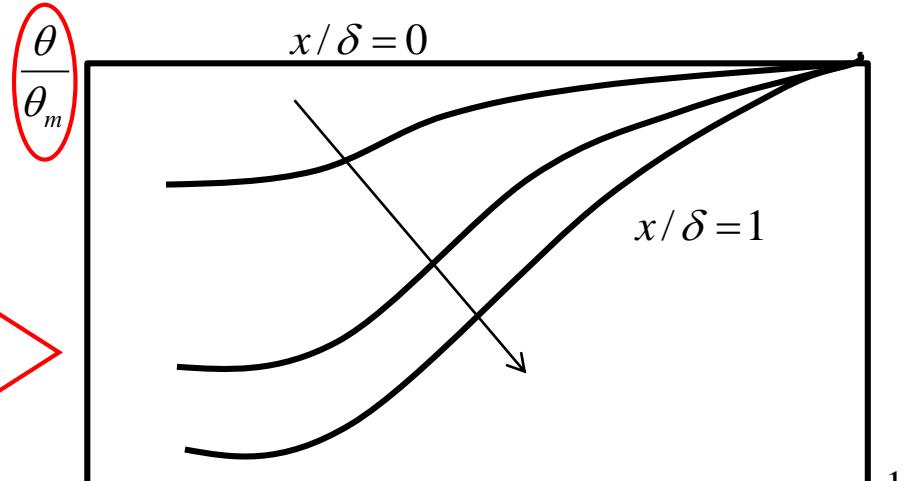
求出 θ_m / θ_0



Fo



τ



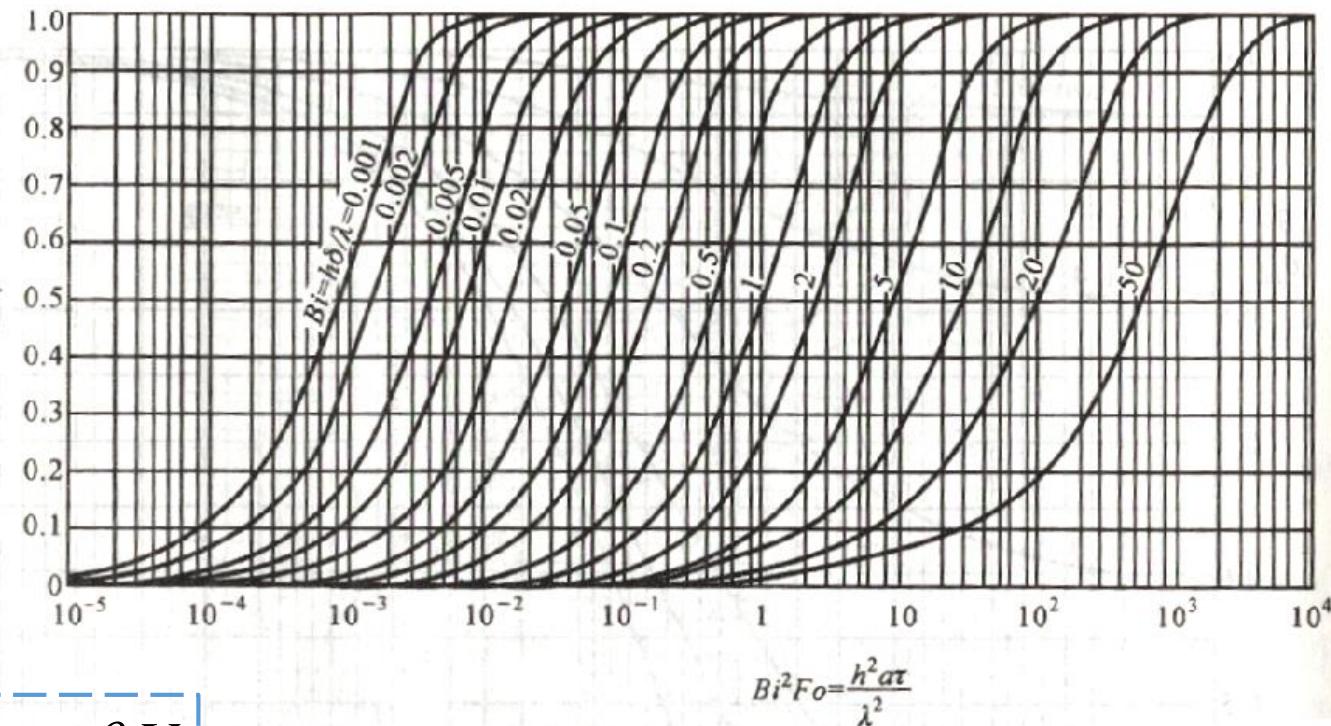
3 采用海斯勒图 (Heisler Chart) 计算

➤ 如何利用线算图

C. 平板吸收/放出的热量

$$(Bi^2 Fo, Bi)$$

$$Q = Q_0 \cdot \left(\frac{Q}{Q_0} \right) \rightarrow \frac{Q}{Q_0}$$



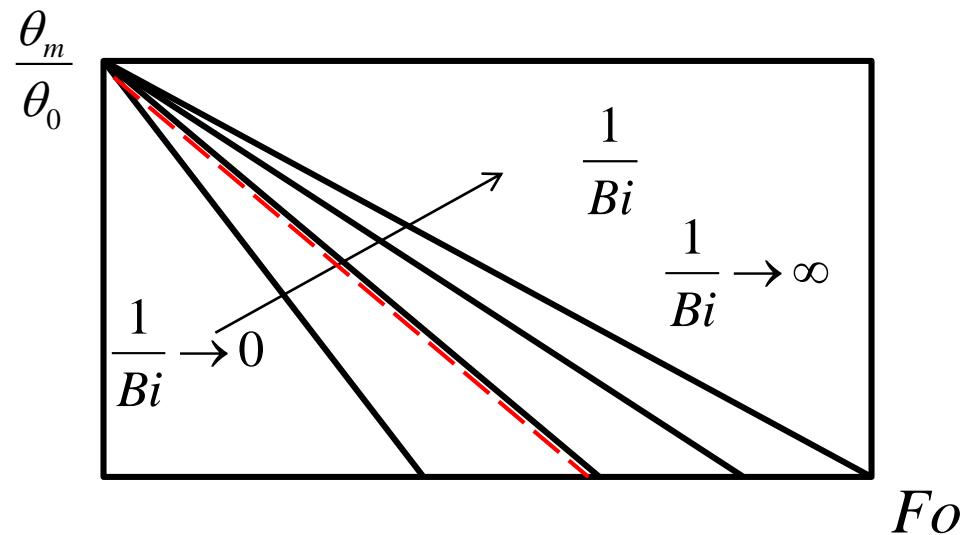
$$Bi^2 Fo = \frac{h^2 \pi}{\lambda^2}$$

$$Q_0 = \rho c V (t_0 - t_\infty) = \rho c \theta_0 V$$

3 采用海斯勒图 (Heisler Chart) 计算

➤ Fo 数及 Bi 数的影响

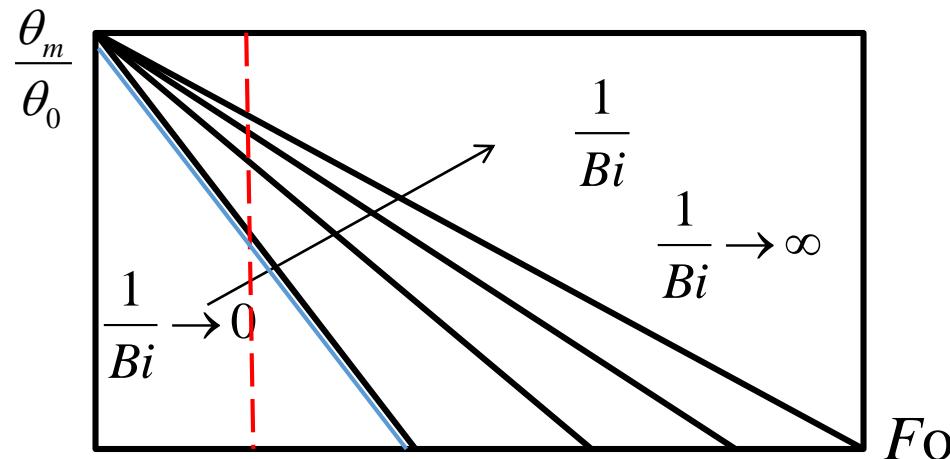
(1) 当 Bi 数一定时, θ_m 随 Fo 的增加而减小, 即随着时间的增加 (Fo 增加), 物体温度越来越接近流体温。





3 采用海斯勒图 (Heisler Chart) 计算

(2) 当 Fo 数一定时, Bi 越大 ($1/Bi$ 越小), θ_m/θ_0 越小, 这是因为 $Bi=h\delta/\lambda$ 越大, 表面换越强, 中心温度就越快地接近周围流体温度。

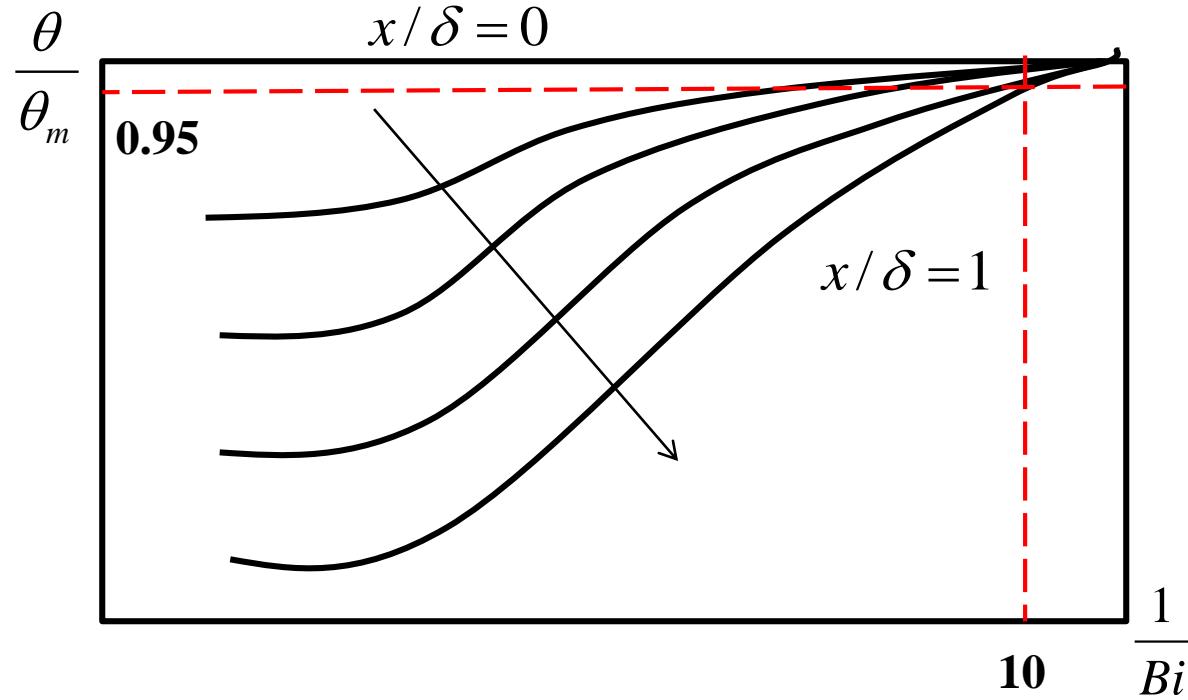


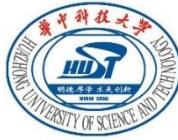
当 $1/Bi=0$ 时, 表面温度一开始就达到液体温度, 中心温度变化也最快, 这条线代表第一类边界条件。



3 采用海斯勒图 (Heisler Chart) 计算

(3) 当 $1/Bi > 10$, 即 $Bi < 0.1$ 时, 所有曲线上的过余温度差值 **小于 5%**, 这时可以用集总参数法求解而误差不大。为了得到更高精确度, 可使 $Bi < 0.01$ 为下限, 误差极微。





4 例题

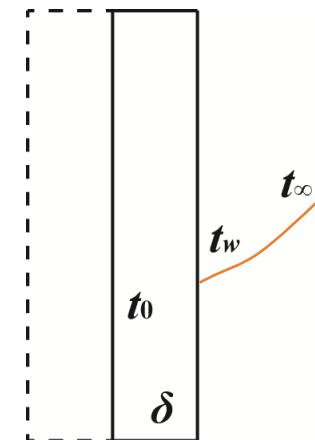
Remind

一块厚100 mm的钢板放入温度为1000 °C的炉中加热。钢板一面加热，另一面可认为是绝热。初始温度 $t_0=20$ °C，求受热面加热到500 °C所需时间，及剖面上最大温差。 $(h = 174 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}), \lambda = 34.8 \text{ W}/(\text{m K}), a=0.555 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s})$ t_∞

解：这一问题相当于厚200mm平板对称受热问题。已知温度求时间的问题。



必须先求 θ_m/θ_0 ，再由 θ_m/θ_0 、 Bi 查图求 Fo ，进而求出时间 τ 。





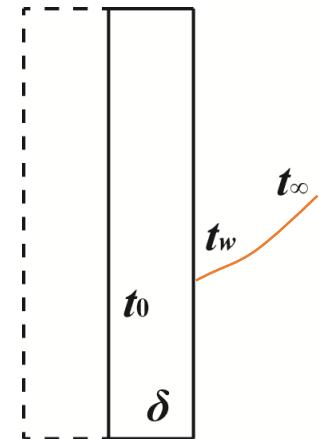
4 例题

$$\frac{\theta_m}{\theta_0} = \frac{\theta_w}{\theta_0} \left/ \frac{\theta_w}{\theta_m} \right.$$

因, $\frac{\theta_w}{\theta_0} = \frac{t_\infty - t_w}{t_\infty - t_0} = \frac{1000^\circ\text{C} - 500^\circ\text{C}}{1000^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}} = 0.51$

又, $x/\delta = 1$

$$Bi = \frac{h\delta}{\lambda} = \frac{174 \text{W/m}^2 \cdot \text{K} \times 0.1 \text{m}}{34.8 \text{W/m} \cdot \text{K}} = 0.5 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{Bi} = 2$$



从图3-9查得, $\theta_w/\theta_m = 0.8$ 。

$$\frac{\theta_m}{\theta_0} = \frac{0.51}{0.8} = 0.637$$



4 例题

由 θ_m/θ_0 和 Bi 从图3-8查得, $Fo=1.2$ 。

$$\tau = Fo \frac{\delta^2}{a} = 1.2 \times \frac{(0.1\text{m})^2}{0.555 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}} = 2.16 \times 10^3 \text{s} = 0.6\text{h}$$

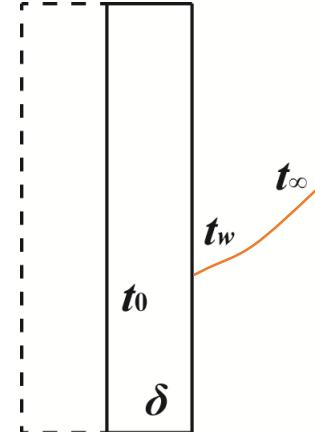
绝热面（中心）温度: $\frac{\theta_m}{\theta_0} = 0.637$

$$t_c = 0.637 \times (20^\circ\text{C} - 1000^\circ\text{C}) + 1000^\circ\text{C} = 376^\circ\text{C}$$

剖面最大温差: $\Delta t_{\max} = 500^\circ\text{C} - 376^\circ\text{C} = 124^\circ\text{C}$

方法二, 直接计算: $Fo \geq 0.2$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{2 \sin(\beta_1 \delta)}{\beta_1 \delta + \sin(\beta_1 \delta) \cos(\beta_1 \delta)} \cos \left[(\beta_1 \delta) \frac{x}{\delta} \right] e^{-(\beta_1 \delta)^2 Fo}$$





4 例题

根据：

$$Bi = \frac{h\delta}{\lambda} = \frac{174 \text{W/m}^2 \cdot \text{K} \times 0.1 \text{m}}{34.8 \text{W/m} \cdot \text{K}} = 0.5$$

查表3-1，得 $\delta\beta_1 = 0.6533$ ，又 $x/\delta = 1$ ，另：

$$\frac{\theta_w}{\theta_0} = \frac{t_\infty - t_w}{t_\infty - t_0} = \frac{1000^\circ\text{C} - 500^\circ\text{C}}{1000^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}} = 0.51$$

因此，由温度分布式：

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{2 \sin(\beta_1 \delta)}{\beta_1 \delta + \sin(\beta_1 \delta) \cos(\beta_1 \delta)} \cos \left[(\beta_1 \delta) \frac{x}{\delta} \right] e^{-(\beta_1 \delta)^2 Fo}$$

$$0.51 = \frac{2 \sin 0.6533}{0.6533 + \sin 0.6533 \cos 0.6533} \exp(-0.6533^2 Fo) \cos 0.6533$$

得 $Fo = 1.196$ 。



作业：

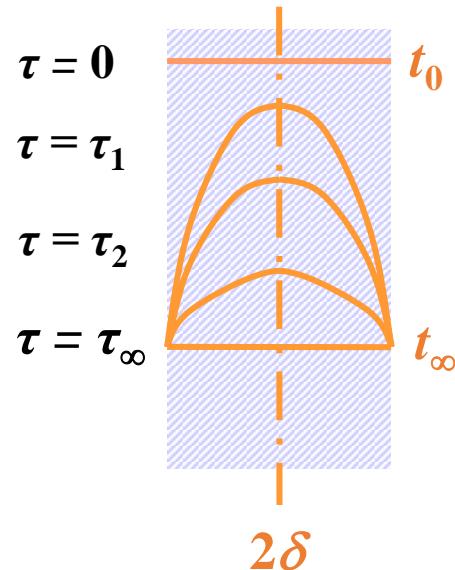
3-2, 3-4, 3-8, 3-11, 3-13



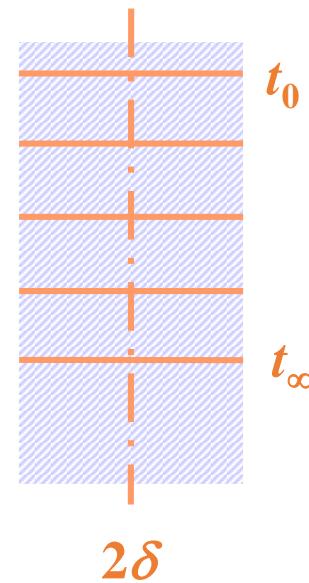
复习1：平板内温度随时间变化的分布曲线

► 若 $t_0 > t_\infty$,

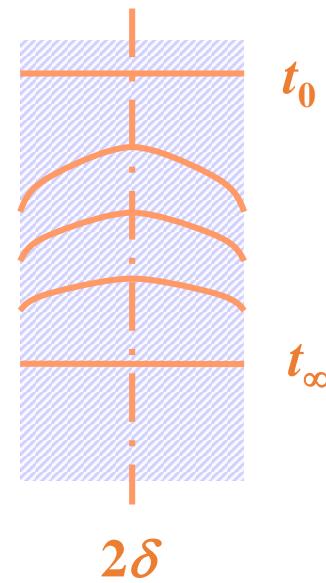
$$1/h \ll \delta/\lambda$$



$$\delta/\lambda \ll 1/h$$



$$1/h \sim \delta/\lambda$$





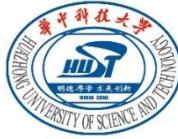
Key Concepts & Applications

1. 非周期性的加热或冷却过程可以分为哪两个阶段，它们各自有什么特征？

非周期性的加热或冷却过程可以分为**初始状况阶段**和**正规状况阶段**。

前者的**温度分布**依然受着**初始温度分布**的影响，也就是说热扰动还没有扩散到整个系统，系统中仍然存在着**初始状态**，此时的**温度场**必须用**无穷级数**加以描述；

而后者却是热扰动已经扩散到了整个系统，**系统中各个地方的温度都随时间变化**，此时温度分布可以用**初等函数**加以描述（实际为无穷级数的第一项）。



Key Concepts & Applications

2. 什么是集总参数系统，它有什么特征？

集总参数系统就是系统的物理量仅随时间变化，而不随空间位置的改变而变化，也就是一个空间上的均温系统。由于温度仅仅是时间的函数，非稳态导热问题变成了一个温度随时间的响应问题。

物体系统温度场要满足温度均匀分布，其条件是系统的毕渥数 $Bi \ll 1$ 。



Key Concepts & Applications

3. 时间常数是从什么导热问题中定义出来的？它与哪些因素有关？同一种物体导热过程中的时间常数是不是不变的？

答：时间常数是从导热问题的集总参数系统分析中定义出来的，为

$$\tau_c = \frac{\rho c V}{hA}$$

从中不难看出，它与**系统（物体）的物性、形状大小**相关，且与**环境状况（换热状况）**紧密相联。因此，同一物体处于不同环境其时间常数是不一样的。



Key Concepts & Applications

4. 一初始温度为 t_0 的固体，被置于室温为 t_∞ 的房间中。物体表面的发射率为 ε ，表面与空气间的表面传热系数为 h ，物体的体积 V ，参与换热的面积 A ，比热容和密度分别为 c 和 ρ ，物体的内热阻可忽略不计，试列出物体温度随时间变化的微分方程式。

解：

$$\begin{cases} \rho c V \frac{dt}{d\tau} + hA(t - t_\infty) + \varepsilon A \sigma (T^4 - T_\infty^4) = 0 \\ t(0) = t_0 \end{cases}$$



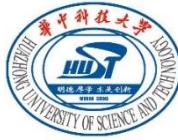
Key Concepts & Applications

5. 在某厂生产的测温元件说明书上，标明该元件的时间常数为1s，从传热学角度，你认为此值可信吗？

答：根据时间常数定义，

$$\tau_c = \frac{\rho c V}{hA}$$

在一定条件下，气体量都可认为是常数，但表面传热系数 h 却是与具体过程有关的过程量，与测温元件安装的具体环境的换热条件有关。因此，对该说明书上标明的时间常数值要进行具体分析，不能盲目相信。



Key Concepts & Applications

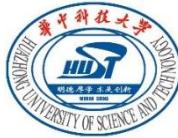
6. 两块厚度为30mm的无限大平板，初始温度为 20°C，分别用铜和钢制成。平板两侧表面的温度突然上升到 60°C，试计算使两板中心温度均上升到 56°C时两板所需时间之比。铜和钢的热扩散率分别为 $103 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$,, $12.9 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ 。

答：

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = f\left(Bi, Fo, \frac{x}{\delta}\right)$$

两块不同材料的无限大平板，均为第一类边界条件， $Bi \rightarrow \infty$ 。要达到同样工况， Bi 数和 x/δ 相同，只需 Fo 数也相等即可。

$$\left(\frac{a\tau}{\delta^2}\right)_{\text{铜}} = \left(\frac{a\tau}{\delta^2}\right)_{\text{钢}} \quad \longrightarrow \quad \frac{\tau_{\text{铜}}}{\tau_{\text{钢}}} = \frac{a_{\text{钢}}}{a_{\text{铜}}} = \frac{12.9 \times 10^{-6}}{103 \times 10^{-6}} = 0.125$$

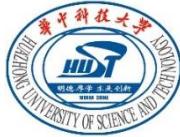


Key Concepts & Applications

7. 对一维无限大平板的非稳态导热问题的分析可知, θ/θ_m 与 Fo 数无关。实际上, 经历的时间不同, 温度分布 θ/θ_m 也应不同, 当时间趋于无穷大时, θ/θ_m 应趋近于 1, 且各处温度均应趋于流体温度。因此, 有人认为图3-9不能用于时间很长的情形, 你对这种说法有何看法?

$$\frac{\theta}{\theta_m} = \frac{t - t_{\infty}}{t_m - t_{\infty}}$$

答: 当时间趋于无穷大时, 物体内各点的温度均趋于 t_{∞} , 但 **趋近的速率**仍然不同。此时平板内部温度仍不一致, 因而各点的相对过余温度之比 θ/θ_m 仍是一个有限值。该图适用于 Fo 大于等于 0.2 以后的任何情况。



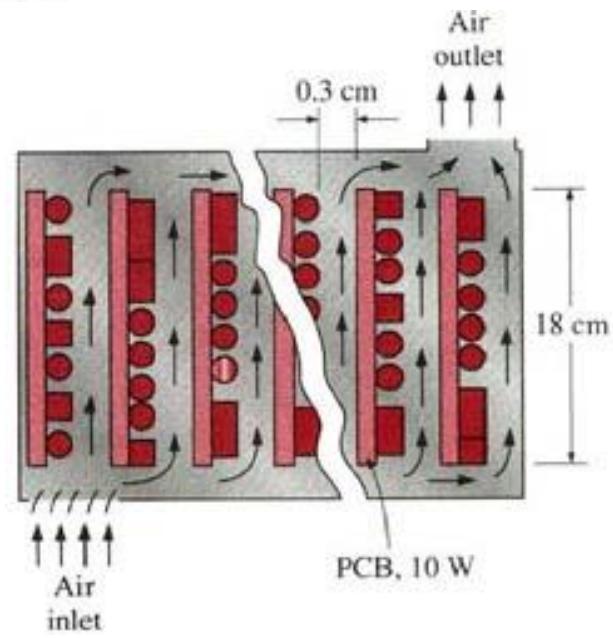
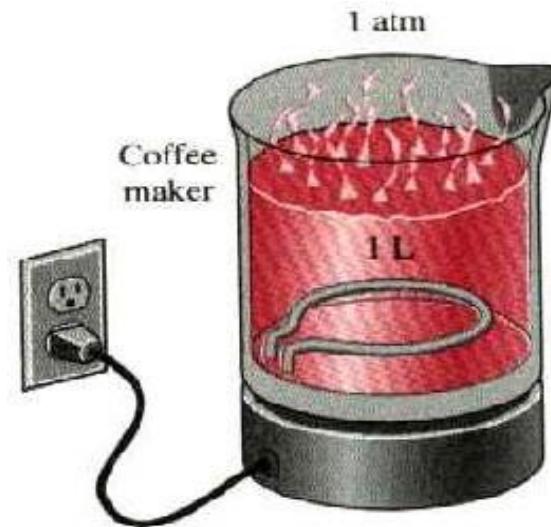
第四章 对流换热原理

§ 4-1 对流换热概述

§ 4-2 层流流动换热的微分方程组

§ 4-3 对流换热过程相似理论

§ 4-4 边界层理论





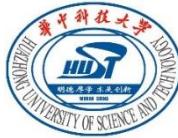
§ 4-1 对流换热概述

1 对流换热过程

① **对流换热定义：**流体和与之接触的固体壁面之间的热量传递过程，是宏观的**热对流**与微观的**热传导**的综合传热过程。

➤ 对流换热与热对流**不同**，既有热对流，也有导热；不是基本传热方式

对流换热实例：1) 暖气管道；2) 电子器件冷却



1 对流换热过程

② 对流换热的特点：

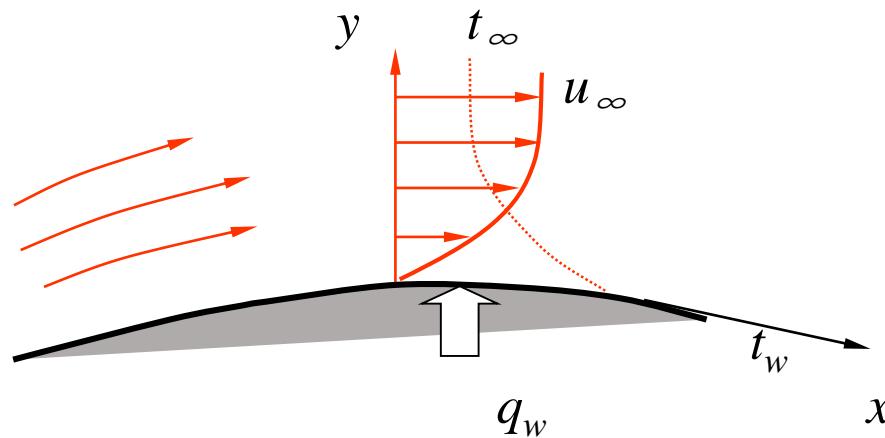
- (1)流体的宏观运动 + 微观的导热
- (2)流动与换热密不可分
- (3)对流换热的机理与通过紧靠换热面的薄膜层的热传导有关

③ 特征：以简单的对流换热过程为例，对对流换热过程的特征进行粗略的分析。



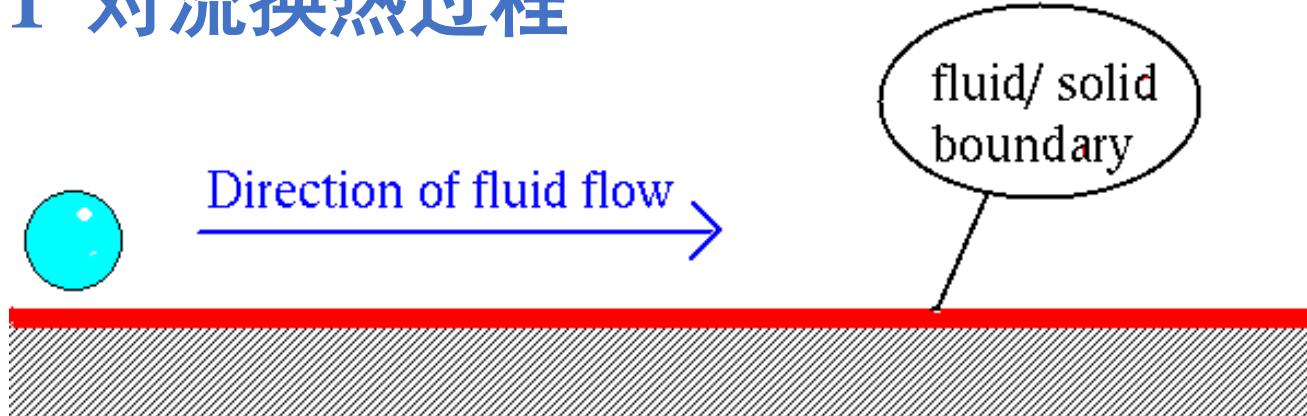
1 对流换热过程

下图表示一个简单的对流换热过程。流体以流速度 u_∞ 和来流温度 t_∞ 流过一个温度为 t_w 的固体壁面。选取流体沿壁面流动的方向为 x 坐标、垂直壁面方向为 y 坐标。



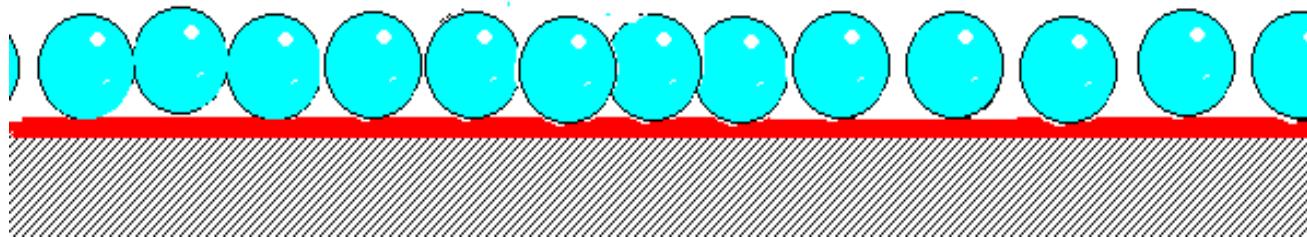


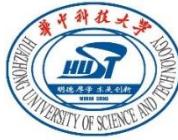
1 对流换热过程



- a. they will rebound off the solid surface
- b. they will be absorbed into the solid surface
- c. they will adhere to the solid surface

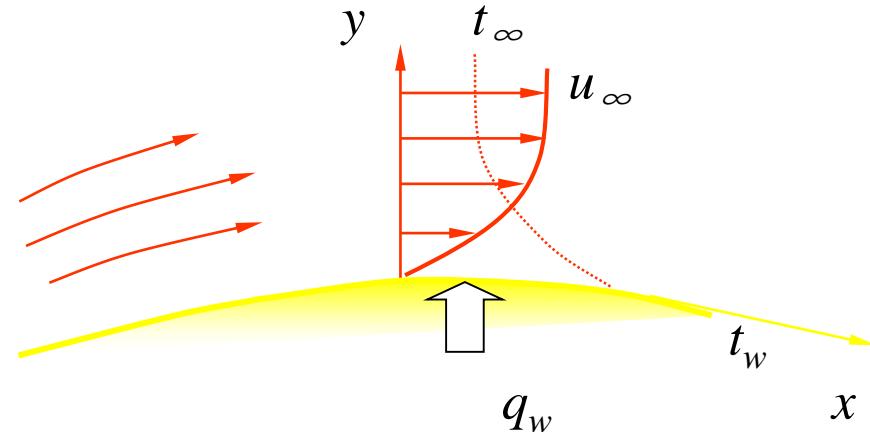
The fluid adheres to the solid surface...
.. this is called the **no slip** condition.





1 对流换热过程

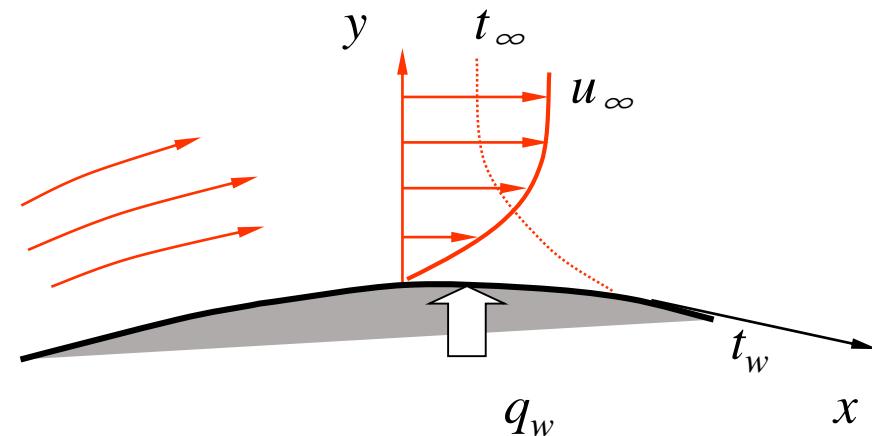
- 壁面对流体分子的吸附作用，使得壁面上的流体是处于**不滑移**的状态（此论点对于极为稀薄流体是不适用的）。
- 由于粘性力的作用，使流体速度在垂直于壁面的方向上发生改变。流体速度从壁面上的**零速度值**逐步变化到**来流的速度值**。





1 对流换热过程

➤ 通过固体壁面的热流也会在流体分子的作用下向流体扩散（**热传导**），并不断地被流体的流动而带到下游（**热对流**），导致紧靠壁面处的流体温度逐步从壁面温度变化到来流温度。





2 对流换热的分类

对流换热：导热+热对流；壁面+流动

① 流动起因

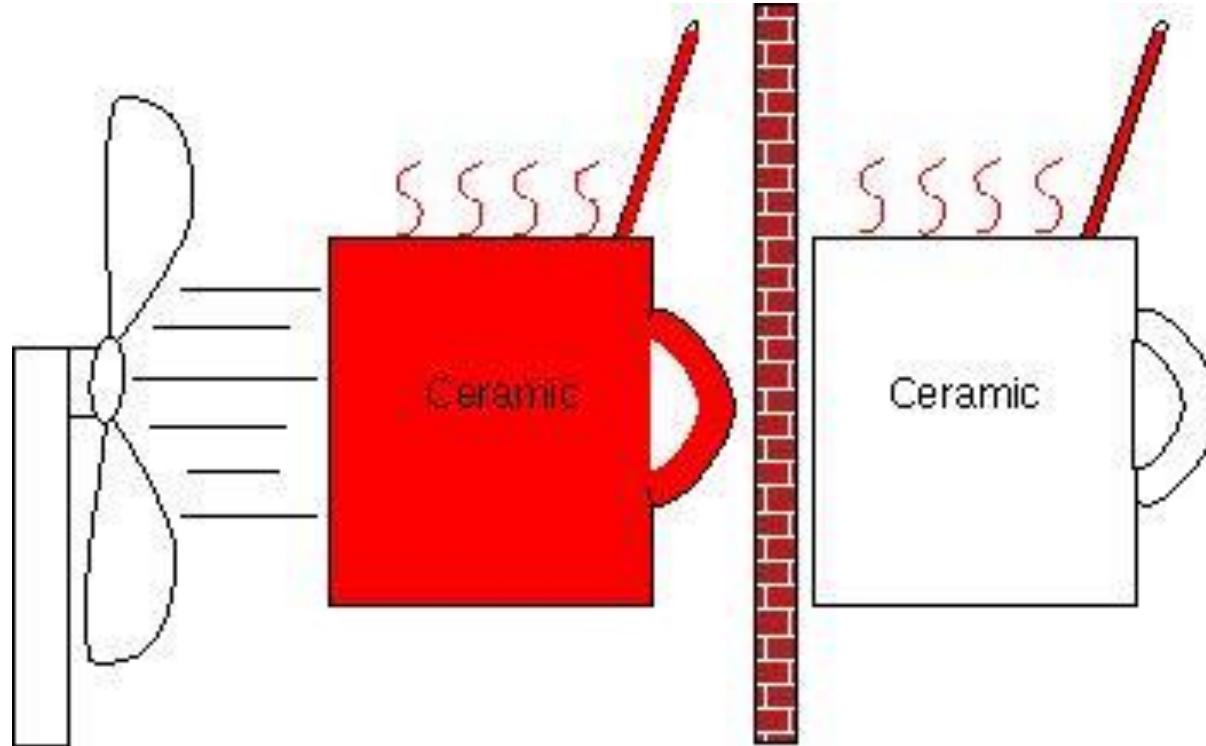
自然对流：流体因各部分温度不同而引起的密度差异所产生的流动 (**Free convection**)

强制对流：由外力 (如：泵、风机、水压头) 作用所产生的流动 (**Forced convection**)

$$h_{\text{强制}} > h_{\text{自然}}$$

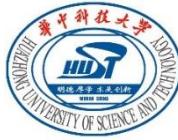


2 对流换热的分类



强制对流

自然对流



2 对流换热的分类

② 流动状态：

层流：整个流场呈一簇互相平行的流线

(Laminar flow)

湍流：流体质点做复杂无规则的运动

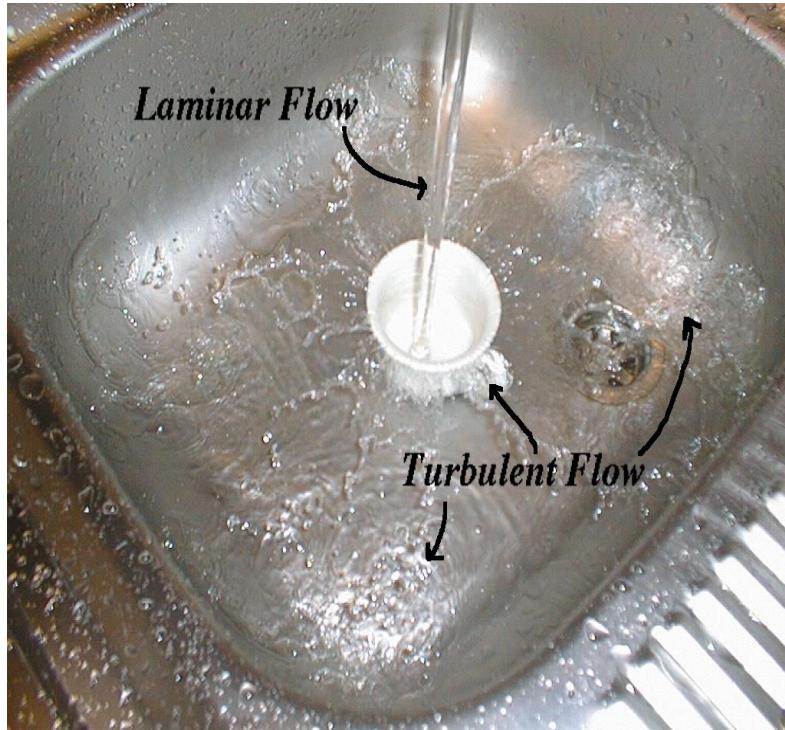
(Turbulent flow)

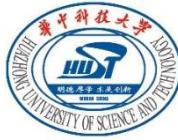
$$h_{\text{湍流}} > h_{\text{层流}}$$

举例：收获季节的麦浪滚滚，旗帜在微风中轻轻飘扬，以及袅袅炊烟都是由空气的湍流引起的。



2 对流换热的分类





2 对流换热的分类

③ 流体有无相变

- 单相换热
- 相变换热：凝结、沸腾、升华、凝固、融化

$$h_{\text{相变}} > h_{\text{单相}}$$

④ 流体与固体壁面的接触方式

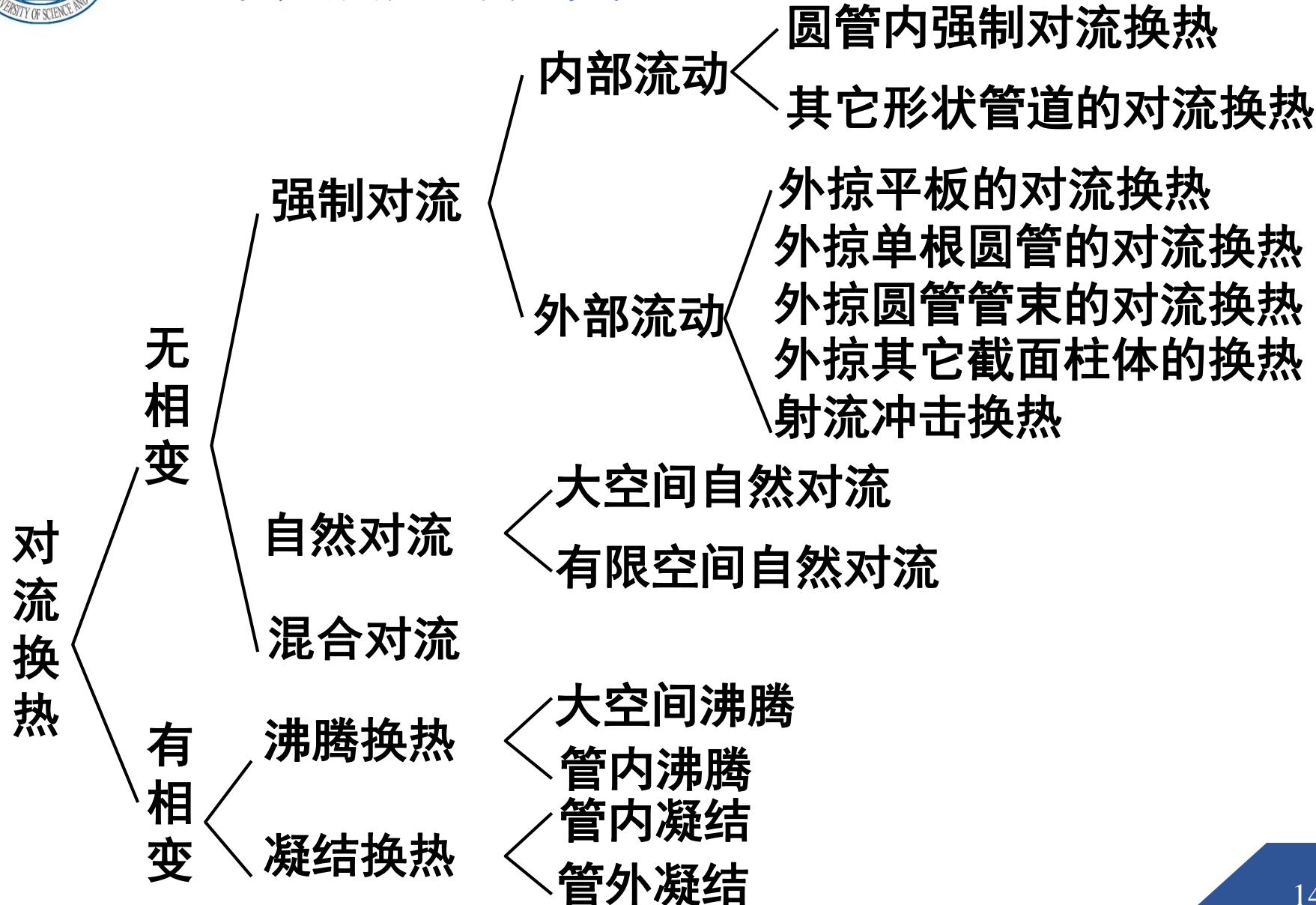
- 内部流动对流换热：管内或槽内
- 外部流动对流换热：外掠平板、圆管、管束

⑤ 流体运动是否与时间相关

- 非稳态对流换热：与时间有关
- 稳态对流换热：与时间无关



2 对流换热的分类





3 对流换热系数与对流换热的微分方程

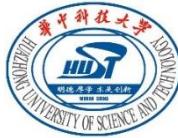
① 对流换热系数（表面传热系数）

$$h = \frac{\Phi}{A(t_w - t_\infty)} \quad [W/m^2 \cdot ^\circ C]$$

物理表征：当流体与壁面温度相差1°C时、每单位壁面面积上、单位时间内所传递的热量。



确定 h 及增强换热的措施是对流换热的核心问题



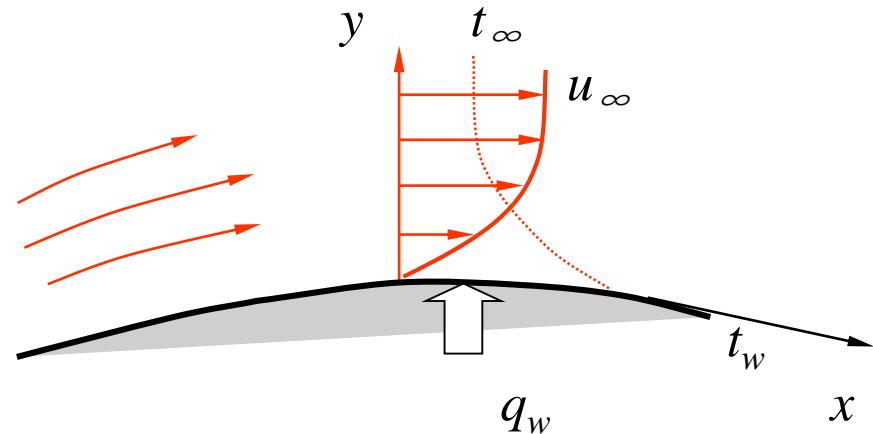
3 对流换热系数与对流换热的微分方程

② 对流换热过程微分方程式

- 壁面上的流体分子层由于受到固体壁面的吸附是处于**不滑移**的状态，其流速应为零，那么通过它的热流量只能依靠导热的方式传递。

由傅里叶定律：

$$q_w = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \bigg|_{y=0}$$



- 通过**壁面流体层**传导的热流量最终是以对流换热的方式传递到流体中。



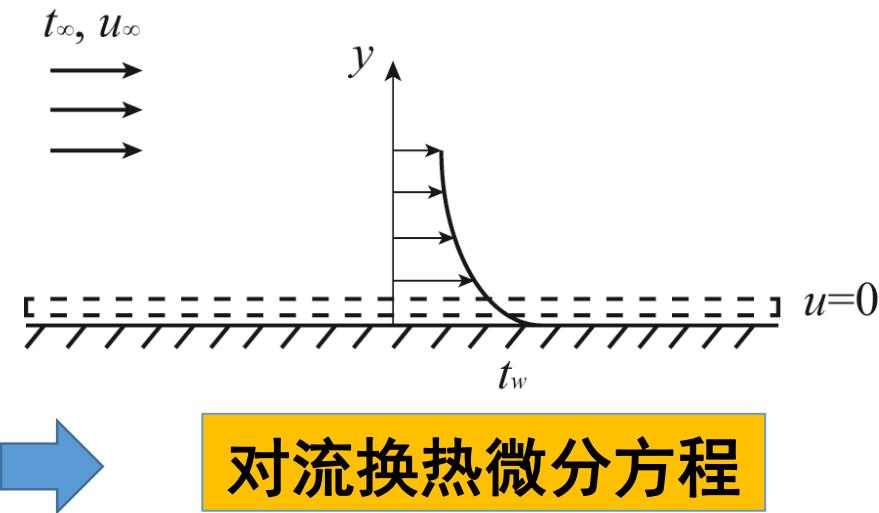
3 对流换热系数与对流换热的微分方程

$$q_w = q_c$$

$$q_c = h(t_w - t_\infty) = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

或:

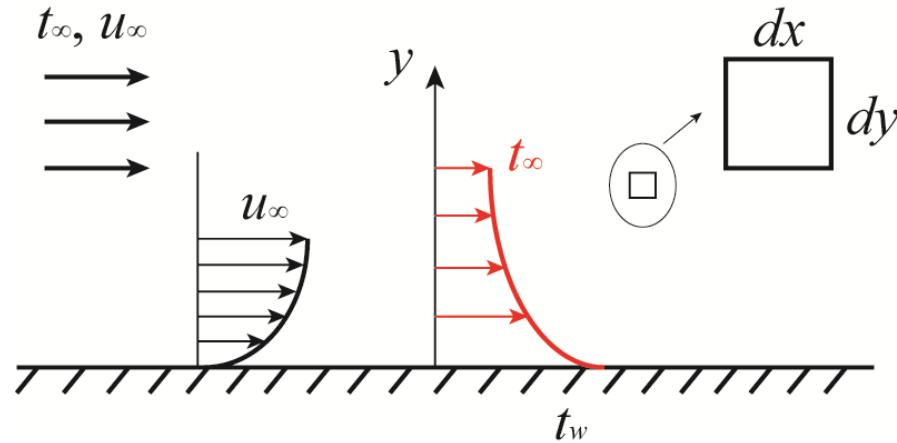
$$h = -\frac{\lambda}{\Delta t} \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=0}$$



- **h** 取决于流体热导率、温度差和贴壁流体的温度梯度。
- 温度梯度或温度场与**流速**、**流态**、**流动起因**、**换热面的几何因素**、**流体物性**均有关。
- 速度场和温度场由对流换热微分方程组确定：**连续性方程**、**动量方程**、**能量方程**

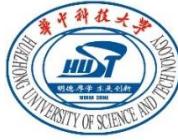
§ 4-2 层流流动换热的微分方程组

为简便，此处只分析**二维**对流换热：

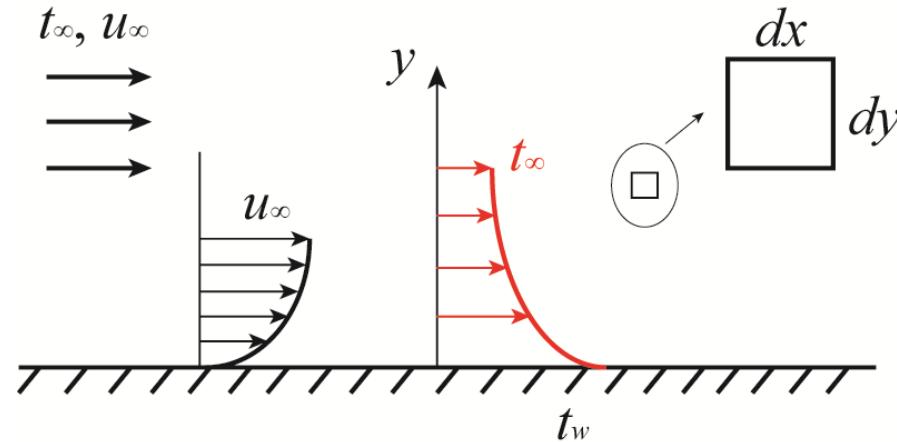


假设：

- a) 流体为不可压缩的牛顿型流体，（即：服从牛顿粘性定律的流体；而油漆、泥浆等不遵守该定律，称非牛顿型流体）
- b) 所有物性参数 (ρ 、 c_p 、 λ 、 η) 为常量



§ 4-2 层流流动换热的微分方程组



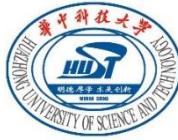
物理模型：速度分布和温度分布

数学模型：速度 u, v ; 压力 p ; 温度 t

需要4个方程：

流体力学

连续性方程 (1) ; 动量方程 (2) ; 能量方程 (1) 。

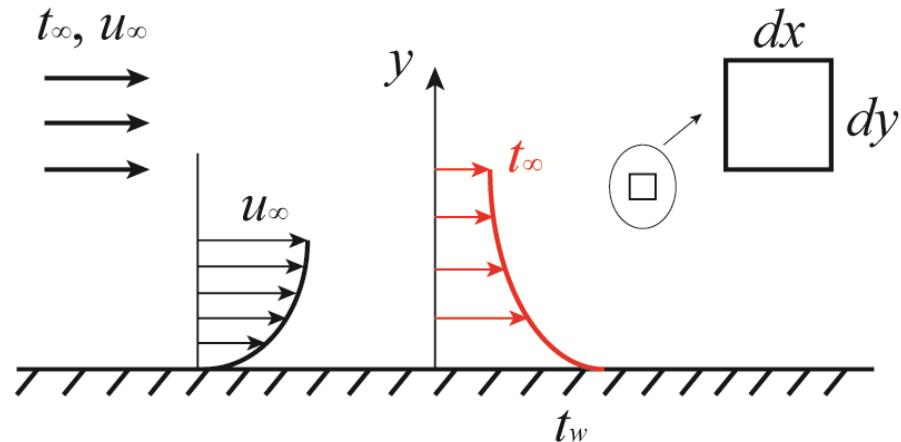


1 连续性方程

流体的连续流动遵循**质量守恒规律**。

→ 单位时间流入微元体的净质量 = 微元体内流体质量的变化

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$



对于**二维、稳态、常物性**流场：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$



2 动量微分方程

动量微分方程是纳维埃和斯托克斯分别于1827和1845年推导的，用于描述流体速度场的微分方程。

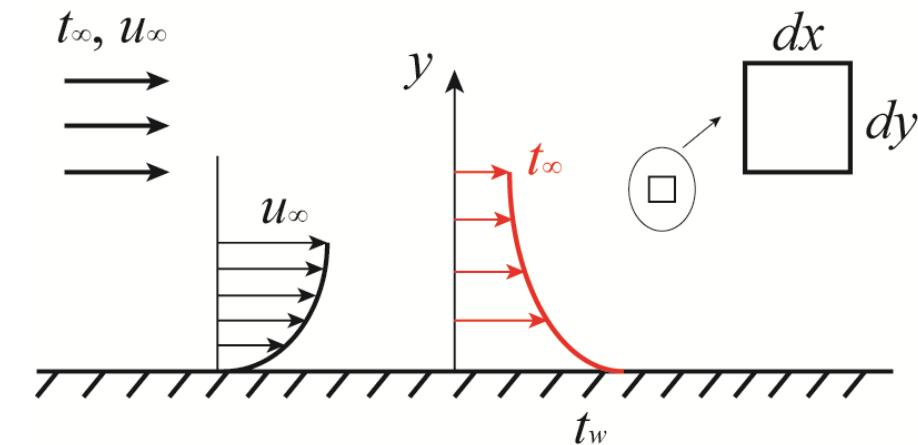
Navier-Stokes方程（N-S方程）

动量守恒：

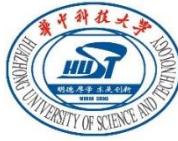
作用在微元体上各外力的总和等于控制体中流体动量的变化率



因流动引起的动量改变量



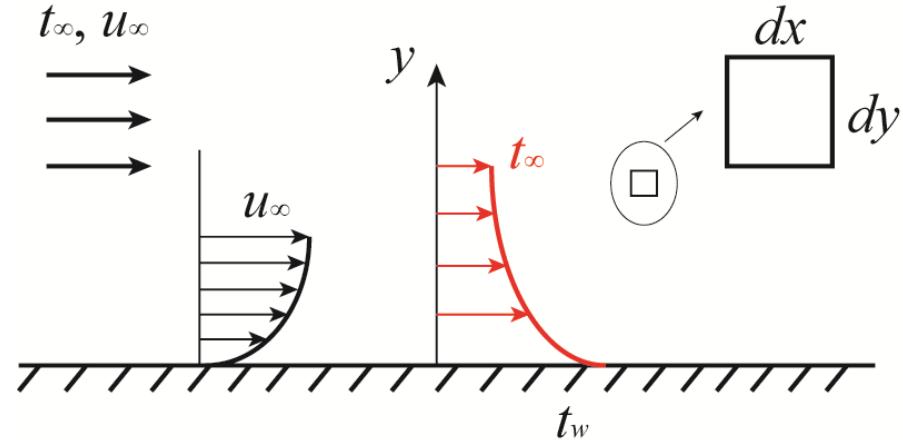
微元体内动量随时间的改变量



2 动量微分方程

作用在微元体上各外力的总和等于控制体中流体动量的变化率

➤ **体积力**: 重力、离心力、电磁力



➤ **表面力**: 作用于微元体表面上的力。
通常用作用于单位表面积上的力来表示, 称之为应力。包括粘性引起的**切向应力**和**法向应力**、**压力**等。



2 动量微分方程

作用在微元体上各外力的总和等于控制体中流体动量的变化率

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \mathbf{F} - \boxed{\nabla p} + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

压力

惯性力体积力粘性力

稳态: $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} = 0$

重力场: $\mathbf{F} = \rho \mathbf{g}$



$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$



3 能量微分方程

能量守恒（无内热源开口系）：

导入微元体的热流量



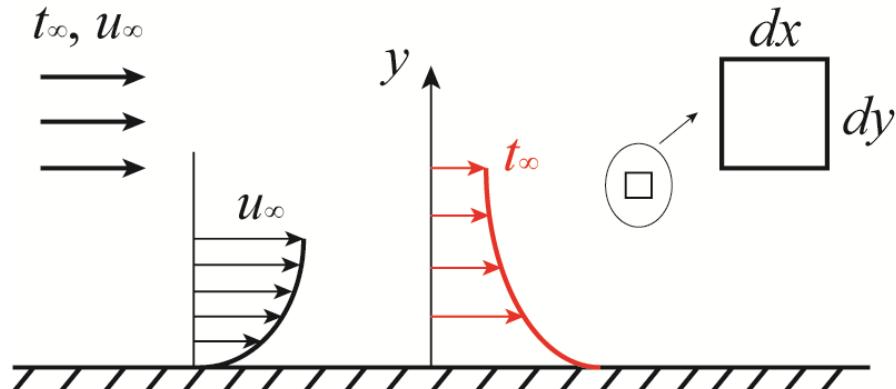
比焓

$$Q = \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} \right) + (q_m)_{out}$$



内能

位能+动能



$$- (q_m)_{in} \left(h + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)_{in} + (W_{net})$$



- ① 体积力（重力）作的功
② 表面力作的功



3 能量微分方程

假设：(1) 流体的热物性均为常量

(2) 无化学反应等内热源

(3) 流体不可压缩

(4) 一般工程问题流速低

→ 耗散热可忽略

$$Q = \frac{\partial U}{\partial \tau} + (q_m)_{out} \left(h + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)_{out} - (q_m)_{in} \left(h + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)_{in} + W_{net}$$

W_{net} ① 体积力(重力)作的功 → 一般忽略
② 表面力作的功 — (1) ~~压力作的功：变形功~~
— (2) 表面应力作的功：
— a) 动能, b) $\mu\Phi$



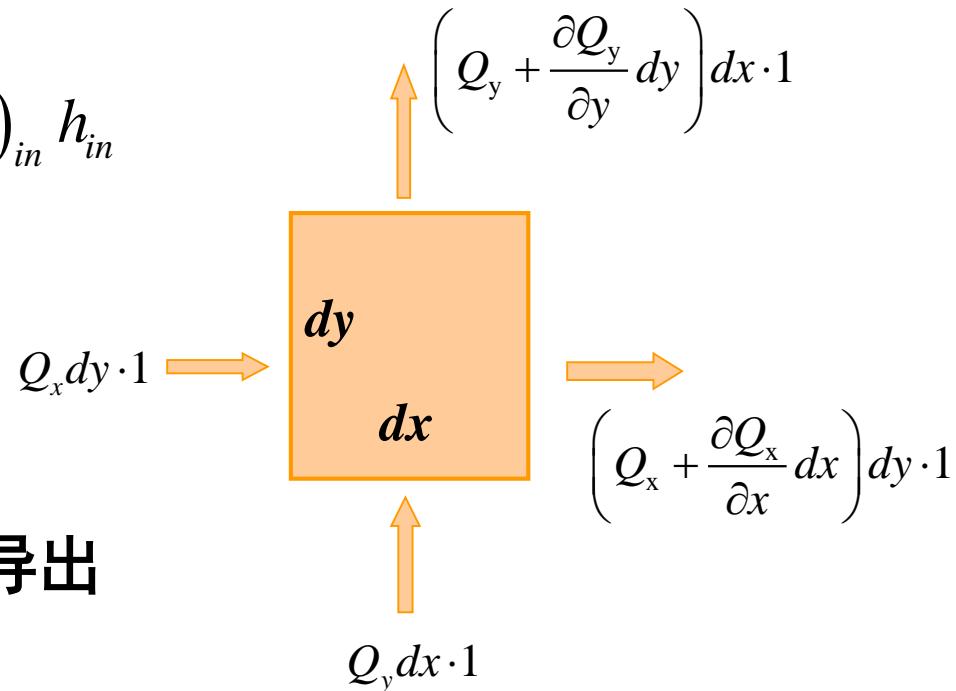
3 能量微分方程

对于二维不可压缩常物性流体流场而言，微元体的能量平衡关系式为：

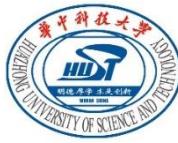
$$Q = \frac{\partial U}{\partial \tau} + (q_m)_{out} h_{out} - (q_m)_{in} h_{in}$$

① 以热传导方式进入
微元体的净热流量 (Q)

➤ 单位时间沿 x 轴方向导入与导出
微元体净热量：



$$(Q_x - Q_{x+dx}) dy = \left[Q_x - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) \right] dy = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dx dy$$



3 能量微分方程

$$Q = \frac{\partial U}{\partial \tau} + (q_m)_{out} h_{out} - (q_m)_{in} h_{in}$$

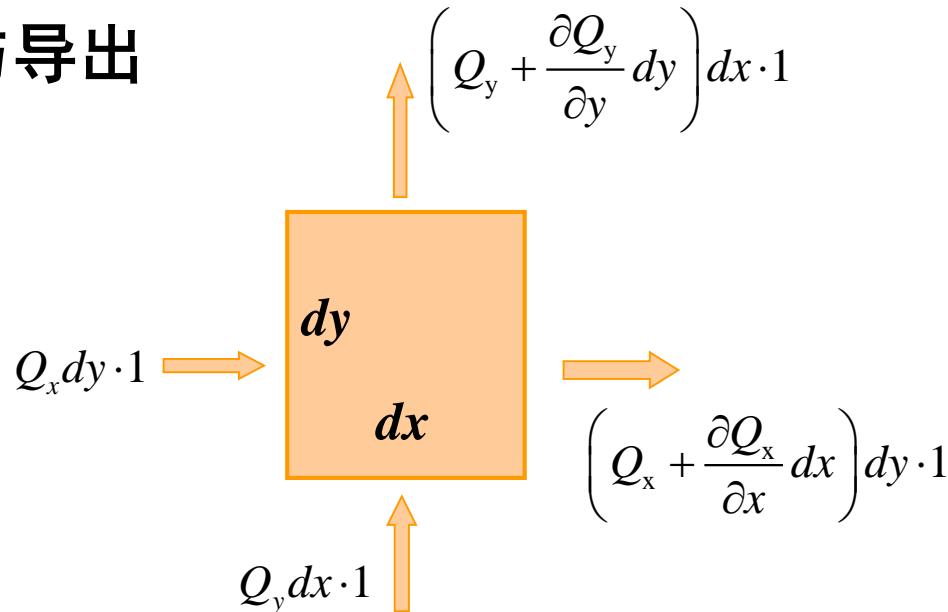
① 以热传导方式进入微元体的净热流量 (Q)

- 单位时间沿y轴方向导入与导出
微元体净热量：

$$(Q_y - Q_{y+dy}) dx = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dx dy$$

净热流量：

$$Q = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dx dy + \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dy dx$$



② 单位时间内，微元体内焓的增量（对不可压缩流体，

$$c_p = c_v$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = mc_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = \rho dx dy c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = \rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} dx dy$$



3 能量微分方程

$$Q = \frac{\partial U}{\partial \tau} + (q_m)_{out} h_{out} - (q_m)_{in} h_{in}$$

③ 流入、流出微元体的焓差：

$$H_x = (q_m h)_x = (\rho u dy \cdot 1) c_p t$$

单位时间沿 x 方向焓差：

$$H_{x+dx} - H_x = \left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx \right) - H_x$$

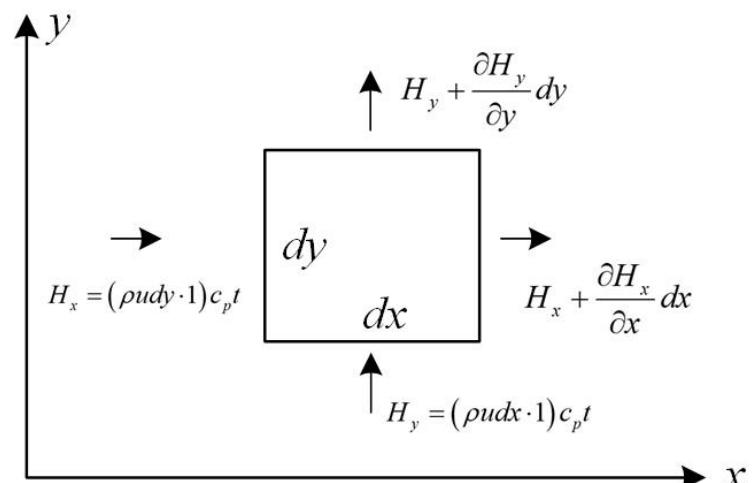
$$= -\frac{\partial H_x}{\partial x} dx = -\rho c_p \frac{\partial (ut)}{\partial x} dx dy$$

同理：

$$H_{y+dy} - H_y = \frac{\partial H_y}{\partial y} dy = -\rho c_p \frac{\partial (vt)}{\partial y} dy dx$$

因此：

$$(q_m)_{out} h_{out} - (q_m)_{in} h_{in} = H_{y+dy} - H_y + H_{x+dx} - H_x$$





3 能量微分方程

③ 流入、流出微元体的焓差：

$$(q_m)_{out} h_{out} - (q_m)_{in} h_{in} = \rho c_p \frac{\partial(ut)}{\partial x} dx dy + \rho c_p \frac{\partial(vt)}{\partial y} dy dx$$



应用
连续性方程

$$(q_m)_{out} h_{out} - (q_m)_{in} h_{in} = \rho c_p u \frac{\partial t}{\partial x} dx dy + \rho c_p v \frac{\partial t}{\partial y} dy dx$$

整理得：

$$\rho c_p \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} + u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right)$$



3 能量微分方程

$$\rho c_p \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} + u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right)$$

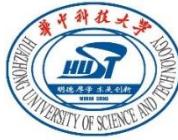


流体能量随时间的变化 对流项 热传导项

当流体不流动时，流体流速为零，热对流项为零，能量微分方程式便退化为导热微分方程式：

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right)$$

固体中的**热传导**过程是介质中**传热过程**的一个**特例**。



4 层流流动对流换热微分方程组

常物性、无内热源、二维、不可压缩牛顿流体

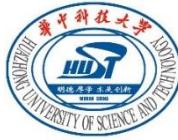
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} + u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right)$$

4个方程，4个未知量，可求速度场和温度场



5 对流换热问题的求解思路

物理模型

对流换热微分方程组

定解条件

求解方法

温度场

表面传热系数

传热量

牛顿冷却定律

$$h = -\frac{\lambda}{\Delta t} \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

分析求解, 实验求解, 数值求解



6 对流换热单值性条件

完整数学描述：对流换热微分方程组 + 单值性条件

单值性条件包括：几何、物理、时间、边界

- ① **几何条件**：表示对流换热过程中的几何形状和大小，平板、圆管；竖直圆管、水平圆管；长度、直径等
- ② **物理条件**：表示对流换热过程物理特征，如：物性参数 λ 、 ρ 、 c 和 η 的数值，是否随温度 和 压力变化；有无内热源、大小和分布



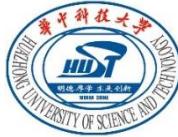
6 对流换热单值性条件

③ **时间条件**：表示在时间上对流换热过程的特点，
稳态对流换热过程不需要时间条件（与时间无关）

④ **边界条件**：表示对流换热过程的边界特点，
边界条件可分为二类：第一类、第二类边界条件

(1) **第一类**边界条件：已知任一瞬间对流换热过程
边界上的**温度值**

(2) **第二类**边界条件：已知任一瞬间对流换热过程
边界上的**热流密度值**



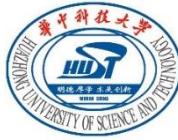
§ 4-3 对流换热过程的相似理论

对流换热的求解方法：

- ✓ 分析求解(相似理论)；
- ✓ 数值计算方法；
- ✓ 基于相似理论的实验方法；

对流换热的主要研究方法之一：
基于相似理论的实验方法

WHY? WHAT? HOW?



1 相似理论

WHY? 为什么要用相似理论?

实验变量多

$$h = f(\rho, c_p, \mu, \lambda, r, u, l, t_m, \dots)$$

1. 实验中应测哪些量? 是否所有的物理量都测?
2. 实验数据如何整理? 整理成什么样函数关系?
3. 实验结果推广应用的条件是什么? 如果实物实验无法开展怎么办?



相似理论三大定理



1 相似理论

WHAT? 什么是相似理论?

相似原理研究的基本内容：研究**相似物理现象**之间的关系

相似第一定理(相似正定理)：

1. 相似必为同类现象。
2. 这个相似包括了三个层面：①流体边界几何相似；②无量纲基本方程组完全一样；③无量纲单值条件完全一样。
3. 彼此相似的现象，其对应的**同名相似准则数相等**。

Q：实验中应测哪些量,是否所有的物理量都测?

A：实验中只需要测量相似准则数所包含的各个物理量.



1 相似理论

WHAT? 什么是相似理论?

相似第二定理（相似逆定律）：判断物理现象相似的条件

1. 同类现象单值性条件相似。（初始条件、边界条件、几何条件、物理条件）
2. 单值性条件物理量构成的相似准则数相等；

Q: 如果实物实验无法开展怎么办? 实验结果推广应用的条件是什么?

A: 实物实验可由满足相似的**模型实验**代替；只要物理现象间满足相似条件，则实验关联式（准则方程）可以推广。



1 相似理论

WHAT? 什么是相似理论?

相似第三定律：相似准则之间的关系

$$Nu = f(Re, Pr)$$

物理现象中的各物理量不是单个起作用，而是由各个准数共同起作用，所以方程的解只是由这些准则数组成的数关系式，称**准则关系式**或**准则方程式**。

Q: 实验数据如何整理? 整理成什么样函数关系?

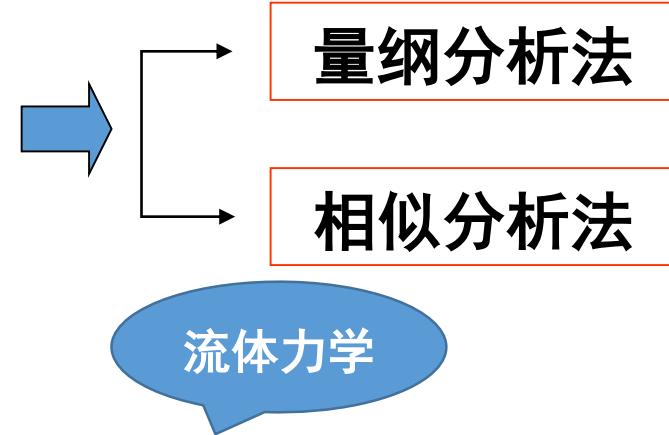
A: 实验数据按照相似准则方程式的内容进行整理，对于对流换热问题，一般整理成准则数的幂函数形式。



1 相似理论

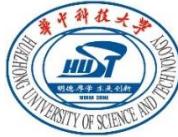
相似第三定律：相似准则之间的关系

- ✓ 某一物理现象涉及哪些无量纲准则数？
- ✓ 它们之间的函数关系（准则数方程）如何？



(1) **量纲分析法**：通过物理量量纲(单位)的匹配关系来获得无量纲相似准则数的方法

(2) **相似分析法**：通过将微分方程各物理量进行无量纲化来获得无量纲相似准则数的方法。



1 相似理论—相似分析法

方法：

- 1) 选取对流换热过程中有关变量的特征值；
- 2) 将所有变量无量纲化；
- 3) 导出以无量纲准则数表示的对流换热微分方程组。

无量纲方程组中的**系数项**就是所谓的**无量纲数**（或称：无因次数），也就是无量纲准则，它们是变量特征值和物性参数的某种组合。



1 相似理论—相似分析法

例：流体掠过平板
的对流换热

特征量

主流速度

u_∞

压力降

Δp

来流温度

t_∞

平板温度

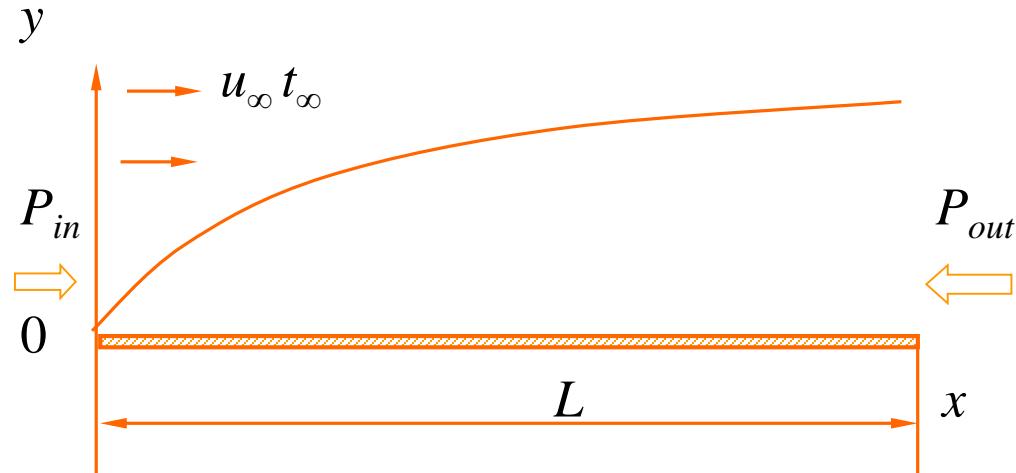
t_w

温度差

Δt

壁面特征长度

L



$$u' = u/u_\infty \quad v' = v/u_\infty$$

$$p' = p/\Delta p$$

$$\Theta = (t - t_\infty) / (t_w - t_\infty)$$

$$x' = x/L \quad y' = y/L$$

无量纲参数



1 相似理论—相似分析法

用无量纲变量取代方程组中的相应变量，可得出无量纲变量组成的方程组。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \cancel{\Gamma} - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \cancel{\Gamma} - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial t}{\partial x} + u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right)$$

假设：二维、稳态、常物性、不可压缩牛顿流体，无内热源、并忽略体积力



1 相似理论—相似分析法

连续性方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \longrightarrow \frac{u}{L} \frac{\partial \frac{u}{L}}{\partial \frac{x}{L}} + \frac{v}{L} \frac{\partial \frac{v}{L}}{\partial \frac{y}{L}} = 0 \longrightarrow \frac{u}{L} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = 0$$

动量方程：

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

↓

$$\rho \left(u_{\infty} \frac{u}{u_{\infty}} \frac{\partial \frac{u}{u_{\infty}}}{\partial \frac{x}{L}} + u_{\infty} \frac{v}{u_{\infty}} \frac{\partial \frac{u}{u_{\infty}}}{\partial \frac{y}{L}} \right) = - \frac{\Delta p}{L} \frac{\partial \frac{p}{\Delta p}}{\partial \frac{x}{L}} + \mu \left(\frac{u_{\infty}}{L^2} \frac{\partial^2 \frac{u}{u_{\infty}}}{\partial \left(\frac{x}{L} \right)^2} + \frac{u_{\infty}}{L^2} \frac{\partial^2 \frac{u}{u_{\infty}}}{\partial \left(\frac{y}{L} \right)^2} \right)$$



1 相似理论—相似分析法



动量方程：

$$\left[\frac{\rho u_{\infty}^2}{L} \right] \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) = - \frac{\Delta p}{L} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \left[\mu \frac{u_{\infty}}{L^2} \right] \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right)$$

惯性力

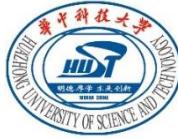
粘性力

能量方程：

$$\left[\frac{\rho c_p u_{\infty} \Delta t}{L} \right] \left(u' \frac{\partial \Theta}{\partial x'} + v' \frac{\partial \Theta}{\partial y'} \right) = \left[\lambda \frac{\Delta t}{L^2} \right] \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y'^2} \right)$$

热对流热量

热传导热量



1 相似理论—相似分析法

对流换热微分方程：

$$h = -\frac{\lambda}{\Delta t} \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=0}$$



无量纲对流
换热系数

$$\left[\frac{h_x L}{\lambda} \right] = - \frac{\partial \Theta}{\partial y'} \Big|_{y'=0}$$

Note: 方程组中的系数项均由变量的参考值组成，它们各自表征其所在项的物理特征，称作无量纲准则。



1 相似理论—相似分析法

对流换热无量纲方程组：

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0$$

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -Eu \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right)$$

$$u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -Eu \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right)$$

$$u' \frac{\partial \Theta}{\partial x'} + v' \frac{\partial \Theta}{\partial y'} = \frac{1}{RePr} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y'^2} \right)$$

$$Nu = - \left. \frac{\partial \Theta}{\partial y'} \right|_{y'=0}$$

欧拉数

$$Eu = \Delta p / (\rho u_\infty^2)$$

雷诺数

$$Re = u_\infty L / \nu$$

普朗特数

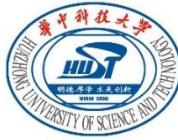
$$Pr = \nu / \alpha$$

贝克莱数

$$Pe = Re \cdot Pr = u_\infty L / \nu$$

努谢尔数

$$Nu = h_x L / \lambda$$



1 相似理论—相似分析法

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0$$

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -Eu \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right)$$

$$u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -Eu \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right)$$

$$u' \frac{\partial \Theta}{\partial x'} + v' \frac{\partial \Theta}{\partial y'} = \frac{1}{RePr} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y'^2} \right)$$

$$Nu = - \left. \frac{\partial \Theta}{\partial y'} \right|_{y'=0}$$

Eu (Euler) : 反映了流场压力降与其动压头之间的相对关系, 体现了在流动过程中动量损失率的相对大小。



欧拉数

$$Eu = \Delta p / (\rho u_\infty^2)$$

雷诺数

$$Re = u_\infty L / \nu$$

普朗特数

$$Pr = \nu / \alpha$$

贝克莱数

$$Pe = Re \cdot Pr = u_\infty L / \nu$$

努谢尔数

$$Nu = h_x L / \lambda$$



1 相似理论—相似分析法

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0$$

Re (Reynolds) : 表征了给定流场的**惯性力**与其**粘性力**的对比关系, 也就是反映了这两种力的相对大小。

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -Eu \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right)$$

$$u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -Eu \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right)$$

$$u' \frac{\partial \Theta}{\partial x'} + v' \frac{\partial \Theta}{\partial y'} = \frac{1}{RePr} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y'^2} \right)$$

$$Nu = - \left. \frac{\partial \Theta}{\partial y'} \right|_{y'=0}$$

↑ 欧拉数 $Eu = \Delta p / (\rho u_\infty^2)$

雷诺数 $Re = u_\infty L / \nu$

普朗特数 $Pr = \nu / \alpha$

贝克莱数 $Pe = Re \cdot Pr = u_\infty L / \nu$

努谢尔数 $Nu = h_x L / \lambda$



1 相似理论—相似分析法

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0$$

Pr (Prandtl) : 反映了流体的**动量扩散能力**与**能量扩散能力**的对比关系。

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -Eu \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right)$$

$$u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -Eu \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right)$$

$$u' \frac{\partial \Theta}{\partial x'} + v' \frac{\partial \Theta}{\partial y'} = \frac{1}{RePr} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y'^2} \right)$$

$$Nu = - \left. \frac{\partial \Theta}{\partial y'} \right|_{y'=0}$$

↑ 欧拉数 $Eu = \Delta p / (\rho u_\infty^2)$

雷诺数 $Re = u_\infty L / \nu$

普朗特数 $Pr = \nu / \alpha$

贝克莱数 $Pe = Re \cdot Pr = u_\infty L / \nu$

努谢尔数 $Nu = h_x L / \lambda$



1 相似理论—相似分析法

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0$$

贝克莱准则, 记为Pe, 反映了给定流场的**热对流能力**与其**热传导能力**的对比关系。

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -Eu \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right)$$

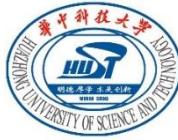
$$u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -Eu \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right)$$

$$u' \frac{\partial \Theta}{\partial x'} + v' \frac{\partial \Theta}{\partial y'} = \frac{1}{RePr} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y'^2} \right)$$

$$Nu = - \left. \frac{\partial \Theta}{\partial y'} \right|_{y'=0}$$

欧拉数	$Eu = \Delta p / (\rho u_\infty^2)$
雷诺数	$Re = u_\infty L / \nu$
普朗特数	$Pr = \nu / \alpha$
贝克莱数	$Pe = Re \cdot Pr = u_\infty L / \nu$

努谢尔数 $Nu = h_x L / \lambda$



1 相似理论—相似分析法

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0$$

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -Eu \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right)$$

$$u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -Eu \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right)$$

$$u' \frac{\partial \Theta}{\partial x'} + v' \frac{\partial \Theta}{\partial y'} = \frac{1}{RePr} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y'^2} \right)$$

$$Nu = - \left. \frac{\partial \Theta}{\partial y'} \right|_{y'=0}$$

区别 Bi

Nu (Nusselt) 准则，反映了给定流场的换热能力与其导热能力的对比关系。这是一个在对流换热计算中必须要加以确定的准则。

欧拉数

$$Eu = \Delta p / (\rho u_\infty^2)$$

雷诺数

$$Re = u_\infty L / \nu$$

普朗特数

$$Pr = \nu / \alpha$$

贝克莱数

$$Pe = Re \cdot Pr = u_\infty L / \nu$$

努谢尔数

$$Nu = h_x L / \lambda$$





1 相似理论—相似分析法

对无量纲方程组进行分析，获得各个无量纲量间的关系：

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0$$

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -Eu \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right)$$

$$u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -Eu \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right)$$

$$u' \frac{\partial \Theta}{\partial x'} + v' \frac{\partial \Theta}{\partial y'} = \frac{1}{RePr} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y'^2} \right)$$



$$u' = f_u(Re, Eu, p', x', y')$$

$$v' = f_v(Re, Eu, p', x', y')$$

$$p' = f_p(Eu, x', y')$$

$$Eu = f_e(Re)$$

$$\Theta = f_\theta(Re, Pr, u', v', x', y')$$



$$\Theta = f_\theta(Re, Pr, x', y')$$

$$Nu = -\left. \frac{\partial \Theta}{\partial y'} \right|_{y'=0} \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial \Theta}{\partial y'} \right|_{y'=0} = f'_\theta(Re, Pr, x') = -Nu_x \quad \Rightarrow \quad \overline{Nu}_x = f'_\theta(Re, Pr)$$



1 相似理论—相似分析法

在计算几何形状相似的流动换热问题时，如果只是求取其平均的换热性能，可以归结为确定几个准则之间的某种函数关系，最后得出平均的表面传热系数和总体的换热热流量。

$$\Theta = f_{\theta} (Re, Pr, x', y')$$

准则关系式

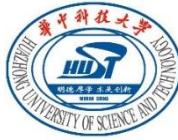
$$\overline{Nu}_x = f'_{\theta} (Re, Pr)$$

(特征数方程)



平均传热系数 \bar{h}

→ 总换热量 Q



1 相似理论

How? 如何基于相似理论设计传热学实验?

① 如何安排实验工况?

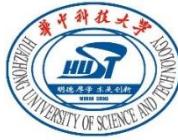
以强制对流实验测量为例,

$$Nu = f(Re, Pr)$$

则以 Re 和 Pr 为自变量确定不同的实验工况。

原则: 以相似准则数作为安排实验的依据。

优点: 可以大幅度减少实验次数。



1 相似理论

How? 如何基于相似理论设计传热学实验?

② 传热学实验研究中如何整理实验数据?

采用准则方程的幂指数形式来整理。对于对流换热问题：

$$Nu = f(Re, Pr) = cRe^m Pr^n$$

式中：常数 c, m, n ，由实验数据确定。数据点少时采用图示法确定；数据点较多时采用最小二乘法。

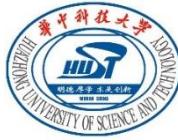


1 相似理论

$$Nu = f(Re, Pr) = cRe^m Pr^n$$

基于相似理论的对流换热实验研究方法**注意事项**：

1. 不能严格满足相似条件时，只保证某些起主要作用的相似准则；
2. 实验研究总有一定的范围 (Re , Pr , 几何参数)，依据实验结果整理得到的准则方程需**明确适用范围**；
3. **特征参数**的选取方式应与得出准则方程时的实验选择相同。

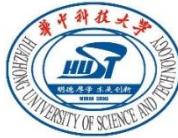


2 特征尺寸、特征流速和定性温度

特征参数是流场的具有代表性的数值，能够表征流场的**几何特征、流动特征和换热特征**。

特征尺寸：它反映了流场的几何特征。如：

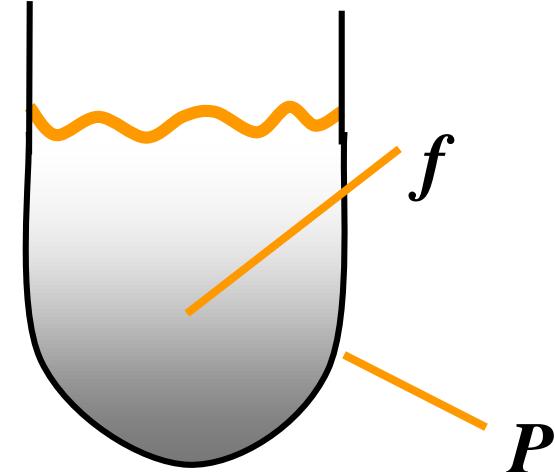
- ◆ **流体平行流过平板：**选择沿流动方向上的长度尺寸；
- ◆ **管内流体流动：**选择垂直于流动方向的管内直径；
- ◆ **流体绕流圆柱体流动：**选择流动方向上的圆柱体外直径。



2 特征尺寸、特征流速和定性温度

对于几何结构比较复杂的对流换热过程，特征尺寸无法从已知的几何尺度中选取，通常的做法是采用当量尺寸。如异型管槽内的流动换热，其当量直径定义为：

$$d_e = \frac{4f}{P}$$



式中： f 为流体流通面积； P 为流体的润湿周边。



2 特征尺寸、特征流速和定性温度

特征流速：它反映了流体流场的流动特征。

不同的流场其流动特征不同，所选择的特征流速是不同的。如，

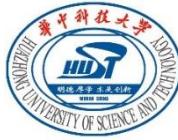
- ◆ 流体流过**平板**，来流速度被选择为特征流速；
- ◆ 流体**管内**流动，管子截面上的平均流速可作为特征流速；
- ◆ 流体**绕流**圆柱体流动，来流速度可选择为特征流速。



2 特征尺寸、特征流速和定性温度

定性温度：无量纲准则中的物性量是温度的函数，确定物性量数值的温度称为定性温度。对于不同的流场定性温度的选择是不同的。

- ◆ 外部流动常选择来流流体温度和固体壁面温度的算术平均值，称为**膜温度**；
- ◆ 内部流动常选择管内流体**进出口温度的平均值**（算术平均值或对数平均值），当然也有例外。



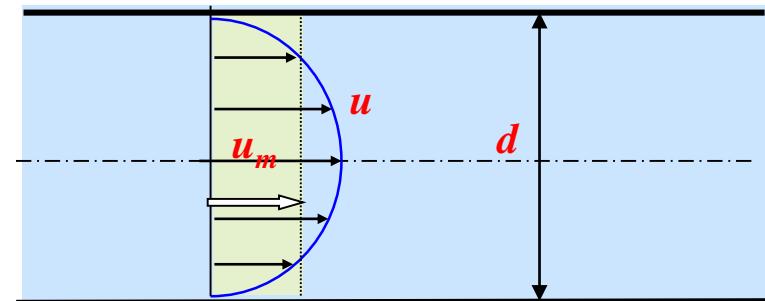
3 基于相似理论的实验方法

例：管内湍流强制对流换热实验实例。管子采用电加热。需要测量哪些物理量？如何处理实验数据？实验系统如何布置？

特征尺寸：管道的内直径 d

特征流速：管道内截面上的平均流速 u_m

定性温度：管内流体进出口温度的平均值 t_m



相应的无量纲准则为：

$$Nu = f(Re, Pr) = cRe^m Pr^n$$



3 基于相似理论的实验方法

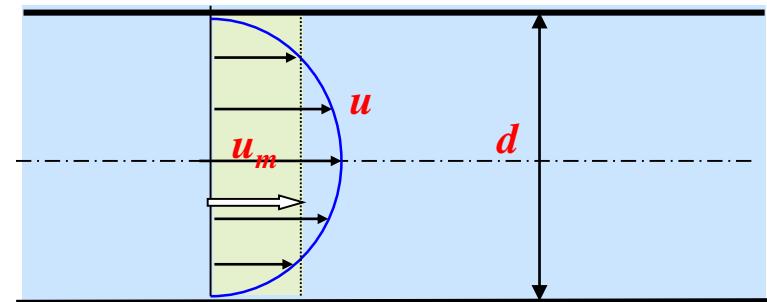
例：管内湍流强制对流换热实验实例。管子采用电加热。需要测量哪些物理量？实验系统如何布置？如何处理实验数据？

$$Nu = f(Re, Pr) = cRe^m Pr^n$$

$$Nu = \frac{hd}{\lambda}, \quad Re = \frac{u_m d}{\nu}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$



$$h = \frac{\Phi_{heat}}{\pi d l (t_w - t_f)} = \frac{I U}{\pi d l (t_w - \frac{t_{f,in} + t_{f,out}}{2})}$$



$$u_m = \frac{Q_v}{\pi d^2} \frac{4}{4}$$



3 基于相似理论的实验方法

$$Nu = \frac{hd}{\lambda}, \quad Re = \frac{u_m d}{\nu}, \quad Pr = \frac{\nu}{a}$$

$$h = \frac{\Phi_{heat}}{\pi dl(t_w - t_f)} = \frac{IU}{\pi dl(t_w - \frac{t_{f,in} + t_{f,out}}{2})} \quad u_m = \frac{Q_v}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

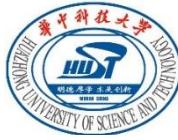
实验需要测量的物理量：

确定 h ：加热器的 **电流、电压**，由此计算加热量（管子外表
面需要绝热处理）；**管壁温度，进出口水温；管内径和长度。**

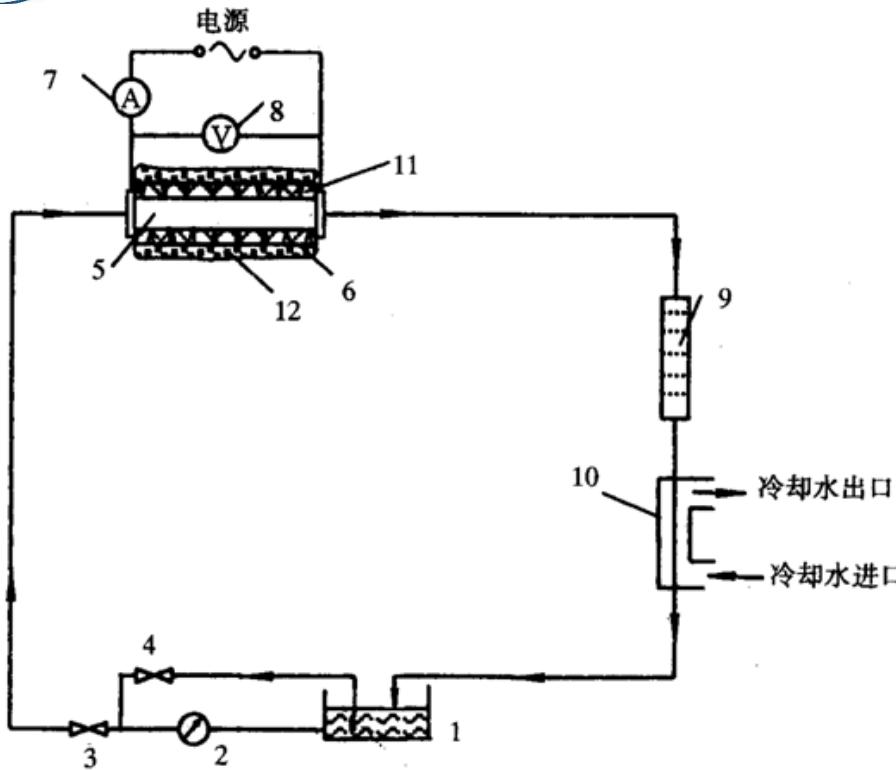
确定 u_m ：管内水 **体积流量**，管内径。

确定物性参数 (λ, μ, a) ：定性温度（进出口水温）

上述物理量按照 Nu, Re, Pr 进行整理，并确定工况。



3 基于相似理论的实验方法



1—水箱；2—水泵；3—调节阀；4—旁通阀；5—实验段；6—热电偶；
7—电流表；8—电压表；9—流量计；10—冷却器；11—电加热器；12—绝热层

$$Nu = f(Re, Pr) = cRe^m Pr^n$$



实验数据确定常数
 C, m, n



$$Nu = 0.023Re^{0.8}Pr^{0.4}$$

注：迪图斯—贝尔特管内湍流
对流换热实验关联式

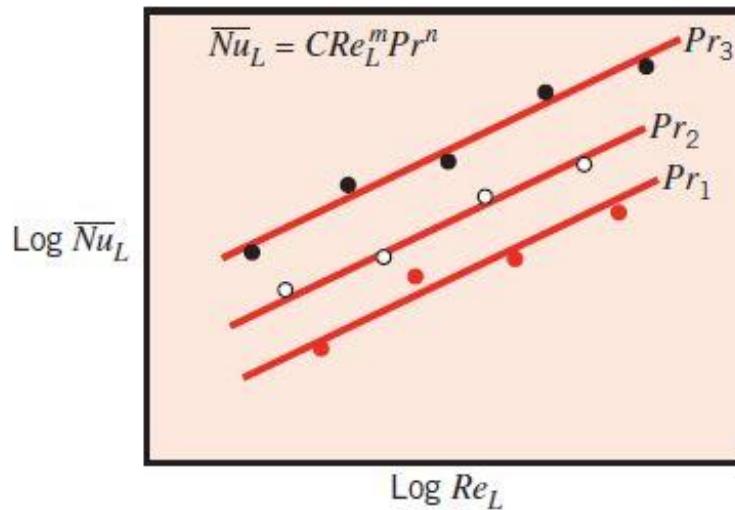
相似理论应用的意义在于，当我们通过实验得到了具体的
准则关系式，就等于解决了同一类型的所有流动换热问题。



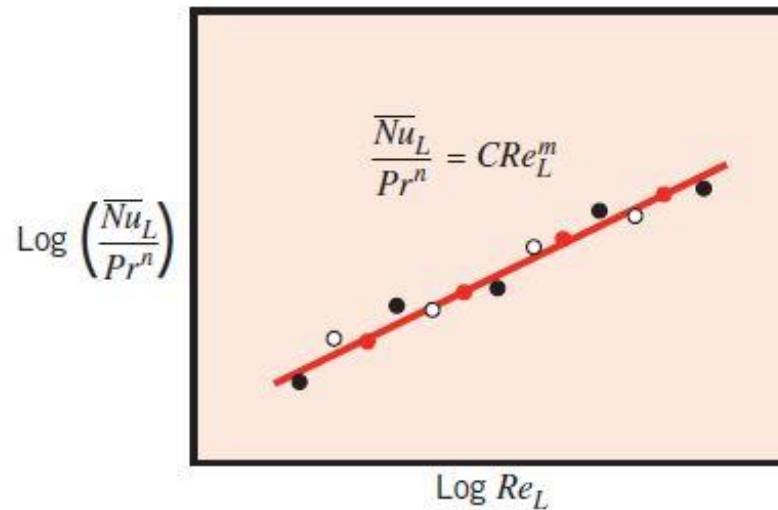
3 基于相似理论的实验方法

如何整理准则关系式？

$$Nu = f(Re, Pr) = cRe^m Pr^n$$



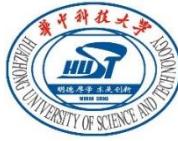
(a)



(b)

$$\lg Nu = m \lg Re + n \lg Pr + \lg c$$

$$\lg \frac{Nu}{Pr^n} = m \lg Re + \lg c$$



4 例题

为了解某空气预热器的换热性能，用尺寸为实物1/8的模型来预测。模型中用40°C的空气模拟空气预热器中133°C的空气。空气预热器中空气的流速为6.03 m/s，问模型中空气的流速应该为多少？如果模型中测得的表面传热系数为412 W/(m²•°C)，则空气预热器中对应的表面传热系数为多少？

解：由相似理论，要使模型与实物中的对流换热现象相似，就应使它们的同名相似准则数相等。



4 例题

(1) 求模型中空气的流速

以下用下标 m 表示模型的参数, 下标 p 表示实物的参数。

由相似原理:

$$Re_m = Re_p$$

$$\frac{u_m l_m}{\nu_m} = \frac{u_p l_p}{\nu_p} \quad \rightarrow \quad u_m = u_p \frac{l_p \nu_m}{l_m \nu_p}$$

查附录E得空气的物性参数:

40°C时 $\nu_m = 16.96 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $\lambda_m = 0.0276 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{°C})$;

133°C时 $\nu_p = 26.98 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $\lambda_p = 0.0344 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{°C})$ 。

计算得 $u_m = 30.32 \text{ m/s}$ 。



4 例题

(2) 求空气预热器的表面传热系数

由相似原理：

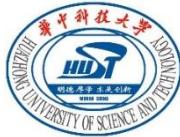
$$Nu_m = Nu_p$$

$$\frac{h_m l_m}{\lambda_m} = \frac{h_p l_p}{\lambda_p} \quad \rightarrow \quad h_p = h_m \frac{l_m \lambda_p}{l_p \lambda_m} = 64.19$$

Note:

(1) 40°C时的 $Pr_m=0.699$, 133°C时的 $Pr_p=0.685$, $Pr_m \neq Pr_p$ 。由相似原理, 其应该相等, 但两者相差不大, 近似相等, 可认为模型和实物中的对流换热是基本相似的, 由模型得到的数据仍具有参考价值。

(2) 实际中, 只要做到主要的相似准则数相等, 而不强求一些次要的准则数都相等。这称之为**近似相似**。



§ 4-4 边界层理论

对流换热的求解方法：

- ✓ 分析求解；
- ✓ 数值计算方法(数值传热学)；
- ✓ 基于相似理论的实验方法； $Nu = f(Re, Pr)$

分析法求解对流换热问题的实质：

如何从解得的温度场计算表面传热系数？

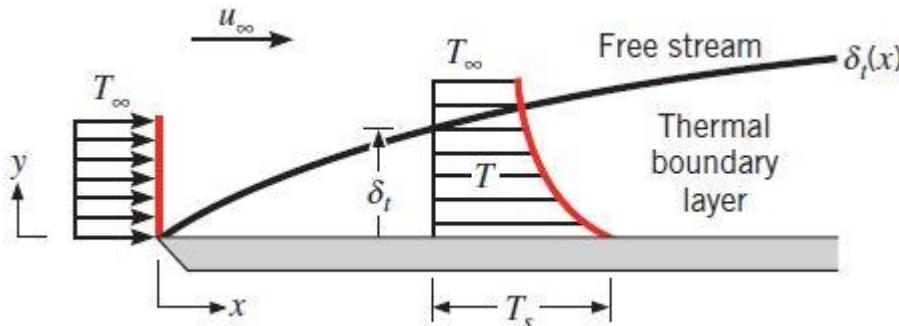
$$h = f(\rho, c_p, \mu, \lambda, r, u, l, t_m, \dots)$$



1 对流传热问题的数学描述

Remind: 对流换热量 = 贴壁流体层的导热量，
建立 h 与流体温度场的关联。

$$h\Delta t = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \bigg|_{y=0} \quad \rightarrow \quad h = -\frac{\lambda}{\Delta t} \frac{\partial t}{\partial y} \bigg|_{y=0}$$

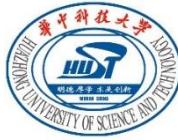


λ : 流体导热系数

$\partial t / \partial y$: 贴壁流体层的温度梯度

注意与导热问题第三类
边界条件的区别：

$$-\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_w = h(t_w - t_f)$$



1 对流传热问题的数学描述

- 假设：**
- ◆ 流体为连续介质，流动为二维；
 - ◆ 流体为不可压缩牛顿流体；
 - ◆ 常物性、无内热源；
 - ◆ 忽略粘性耗散热；
 - ◆ 忽略辐射换热。

四个未知量： u, v, p, t 。

求解四个方程： 基于质量守恒的连续方程

基于动量守恒的动量方程 (x, y 方向)

基于能量守恒的能量方程



1 对流传热问题的数学描述

常物性、无内热源、二维稳态、不可压缩牛顿流体：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) \quad \rightarrow$$

$$h = - \frac{\lambda}{\Delta t} \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=0}$$

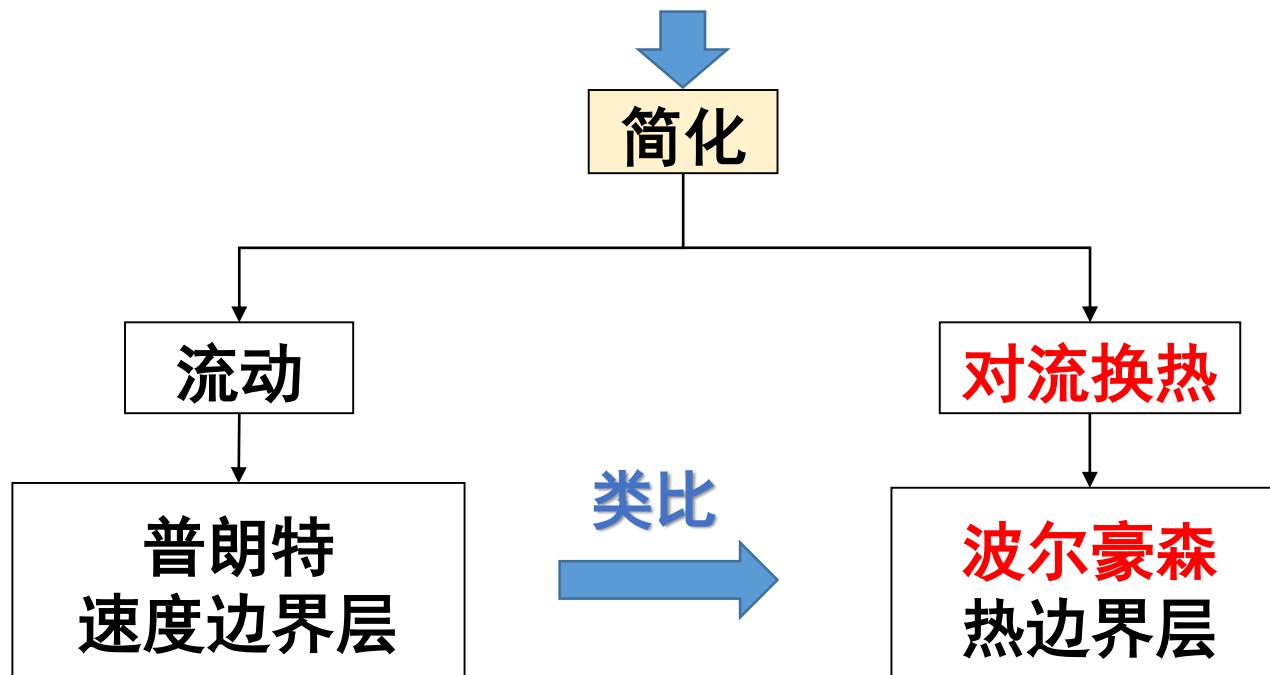
Note : 对流换热问题能量方程的边界条件只有**第一类**、**第二类**边界条件。

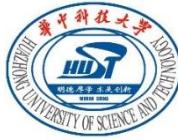


1 对流传热问题的数学描述

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \rho c_p \left(u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right)$$

动量方程中的惯性力项和能量方程中的对流项均为非线性项，难以直接求解

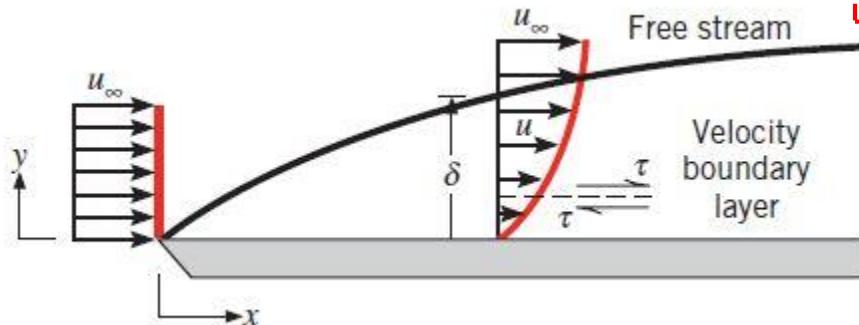




1 对流传热问题的数学描述—速度边界层



Ludwig Prandtl 1875-1953



实验结果：流体近壁面流动时基于粘性力的速度梯度主要存在于近壁面的薄层，势流区速度梯度很小。



固壁表面附近流体速度剧烈变化的薄层称为**速度边界层** δ ，速度边界层外的势流区速度梯度视为零。

$$u|_{y=\delta} = 99\% u_\infty$$

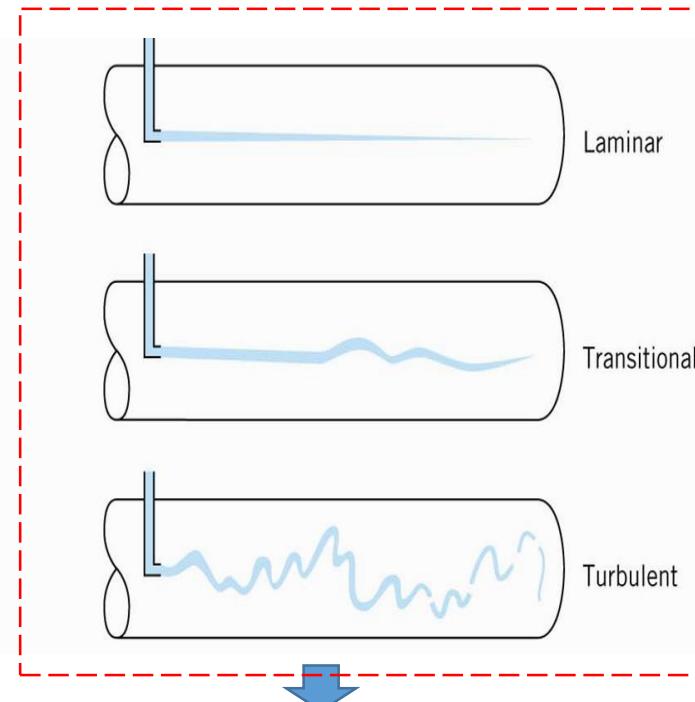
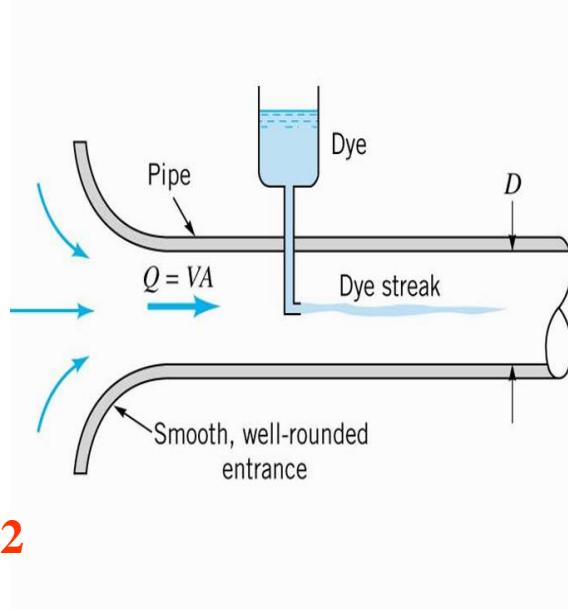
实际流动 \approx 边界层内粘性流动
+ 势流区无粘性理想流动



1 对流传热问题的数学描述—速度边界层



Osborne Reynolds 1842-1912



层流: 流体分层流动,
各层间无掺混。

湍流: 流体间相互掺混,
无规则脉动。

流速、几何尺寸及流体物性相关

→ 如何区分? →

临界雷诺数 Re_c



1 对流传热问题的数学描述—速度边界层

$$Re_c = \frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}} = \frac{\rho u_\infty x_c}{\mu} = \frac{u_\infty x_c}{\nu}$$

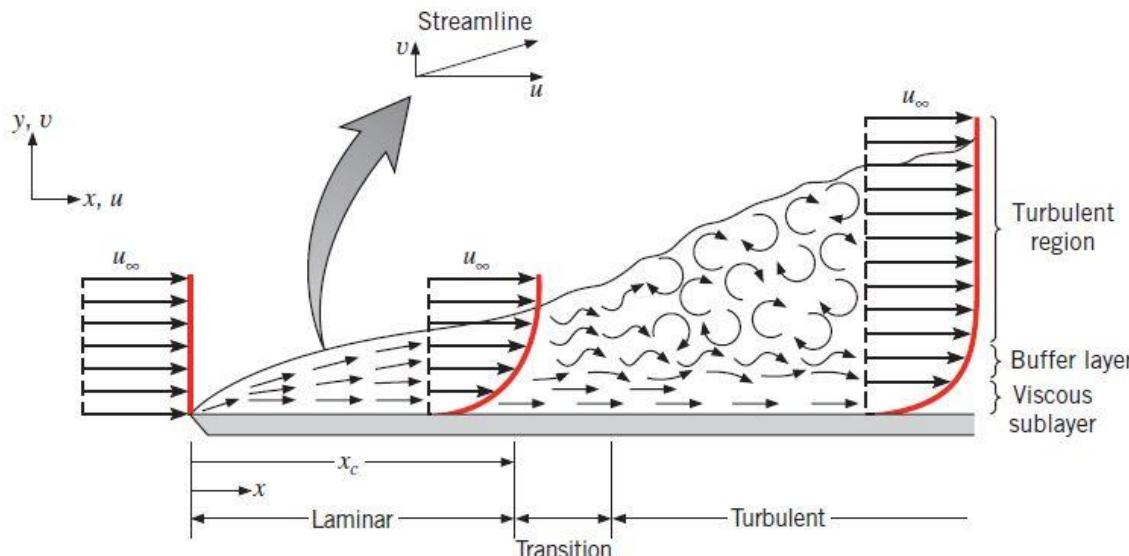
$x < x_c, Re < Re_c$ 层流
 $x > x_c, Re > Re_c$ 湍流

光滑平板：

$$Re_c = 5 \times 10^5$$

光滑圆管：

$$Re_c = 2100 \sim 2300$$

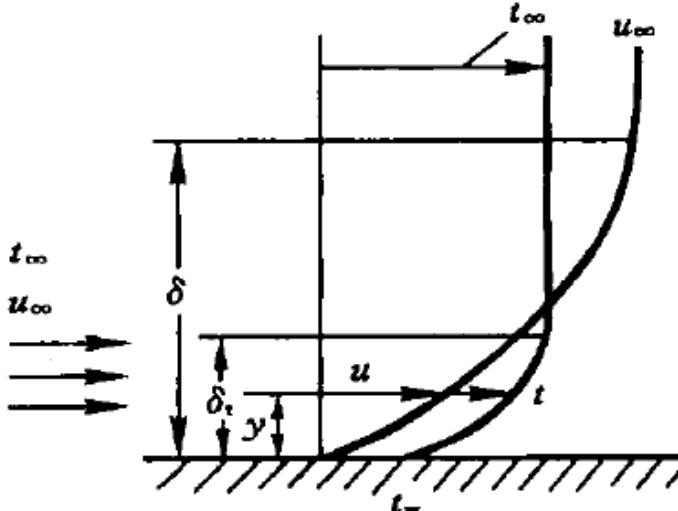


层流底层（粘性底层）：紧靠壁面处，粘性力占主导地位，使粘附于壁的一极薄层仍然会**保持层流特征**。层流底层内具有最大的速度梯度。



1 对流传热问题的数学描述—热边界层

实验发现：流体对流换热时温度梯度主要存在于近壁面的薄层，主流区温度梯度几乎为零。

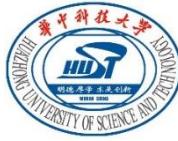


实际对流换热 \approx 热边界层内对流换热

固壁表面附近流体温度剧烈变化的薄层称为**热边界层** δ_t ，热边界层外的势流区温度梯度视为零。

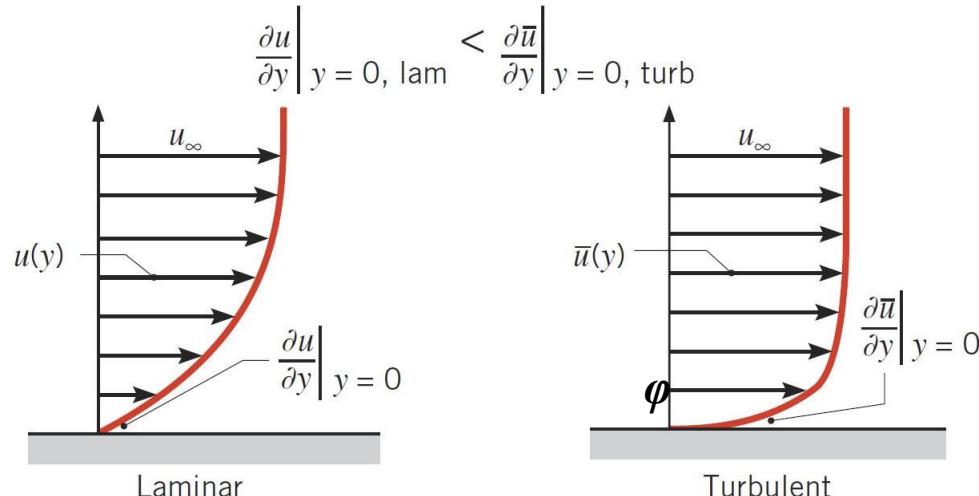
$$(t - t_w) \Big|_{\delta_t} = 99\% (t_{\infty} - t_w)$$

热边界层厚度 δ_t 的量级与速度边界层 δ 一致，但是两者不一定相等，主要取决于**普朗特数** Pr 。



1 对流传热问题的数学描述—热边界层

与边界层内速度分布一样，热边界层内的温度分布也与流动形态密切相关。



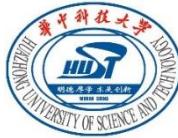
层流：温度呈抛物线分布
湍流：温度呈幂函数分布

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{w,t} > \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{w,l}$$

湍流可强
化传热

$$h_{w,t} > h_{w,l}$$

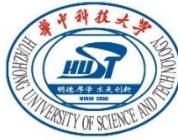
应用边界层理论进行流动和传热的计算前，一定要明确层流还是湍流。



1 对流传热问题的数学描述—热边界层

边界层的特点：

- ◆ 边界层厚度 δ_t , δ 与壁面尺寸相比是**小量**，且 δ_t 与 δ 量级一致；
- ◆ 边界层内**速度梯度**和**温度梯度很大**；
- ◆ 流动区域分为边界层区和势流区，势流区的**速度梯度**和**温度梯度**可忽略；
- ◆ 边界层内存在层流和湍流形态。



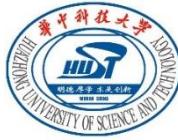
1 对流传热问题的数学描述—热边界层

引入边界层概念的意义：

- ◆ 可以有效**减小计算区域**。对流换热问题主要集中于边界层内，势流区视为理想流体；
- ◆ 应用边界层概念可以有效**简化微分方程组**。

边界层概念的适用范围：

- ◆ 对于**流动分离**的问题，**边界层概念不适用**。



2 边界层微分方程组推导

常物性、无内热源、二维稳态、不可压缩牛顿流体：

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0$$

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -Eu \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right)$$

$$u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -Eu \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right)$$

$$u' \frac{\partial \Theta}{\partial x'} + v' \frac{\partial \Theta}{\partial y'} = \frac{1}{RePr} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y'^2} \right)$$

边界层

如何简化?

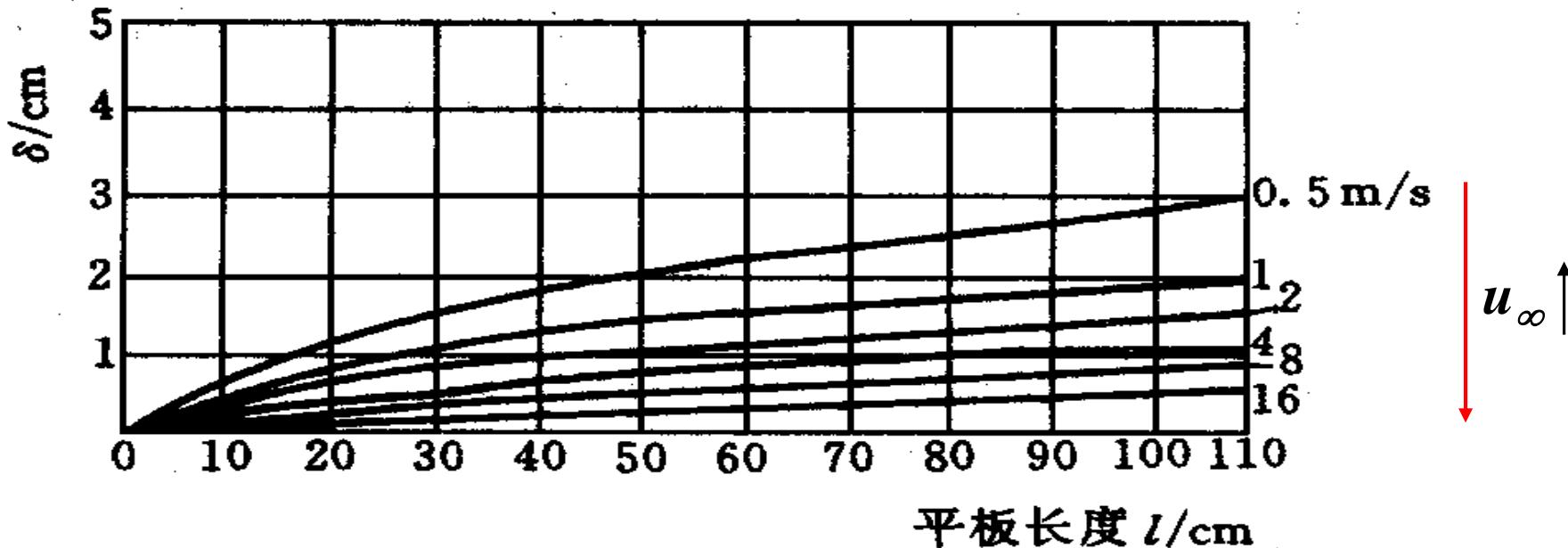
理论

$$Nu = - \left. \frac{\partial \Theta}{\partial y'} \right|_{y'=0}$$



2 边界层微分方程组推导

数量级分析：比较方程中各量或各项量级的相对大小，保留量级较大的量或项，而舍去量级小的项，实现方程的合理简化。



空气外掠平板， $u_\infty=10\text{m/s}$ ： $\delta_{x=100\text{mm}}=1.8\text{mm}$ ， $\delta_{x=200\text{mm}}=2.5\text{mm}$



2 边界层微分方程组推导

令： 1 表示量级较大的量， δ 表示量级较小的量。

六个基本量级：

主流速度 $u_\infty \sim 1$

压力 $p \sim 1$

温度 $t \sim 1$

壁面特征长度 $l \sim 1$

速度边界层厚度 $\delta \sim \delta$

温度边界层厚度 $\delta_t \sim \delta$

边界层内参数的量级：

$x' \sim l \sim 1$

$y' \sim \delta$

$u' \sim u_\infty \sim 1$





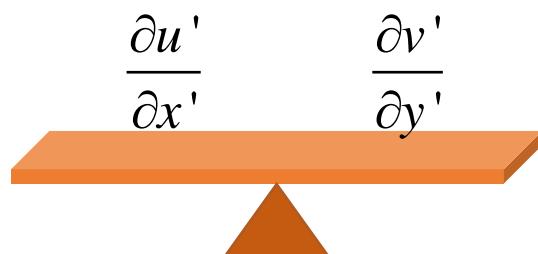
2 边界层微分方程组推导—数量级分析

由无量纲连续性方程：

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0$$

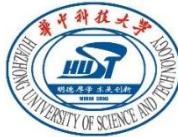
$$\frac{1}{1} \quad \frac{\delta}{\delta}$$

$$\begin{aligned} x' &\sim l \sim 1 \\ y' &\sim \delta \\ u' &\sim u_\infty \sim 1 \end{aligned}$$



可以得出 v' 的数量级为 δ

两项量级相当，方程不能进一步简化



2 边界层微分方程组推导—数量级分析

由无量纲动量方程(x 方向)：

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -Eu \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right)$$

$\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} = \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} \right)$

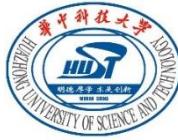
$\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} = \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)$

$$1 \cdot \frac{1}{1} \quad \delta \cdot \frac{1}{\delta} \quad \frac{1}{1} \quad \delta^2 \quad \frac{1}{1^2} \quad \frac{1}{\delta^2}$$

x 方向上的动量方程变为：

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -Eu \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right)$$

$$\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right)$$



2 边界层微分方程组推导—数量级分析

由无量纲动量方程(y 方向)：

$$u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -Eu \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right)$$

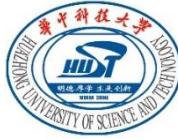
$$1 \cdot \frac{\delta}{1} \quad \delta \frac{\delta}{\delta} \quad ? \quad \delta^2 \quad \frac{\delta}{1^2} \quad \frac{\delta}{\delta^2}$$

$\sim \delta$



$$\frac{\partial p'}{\partial y'} = 0$$

式中每一项均为 δ 的量级，所以，与 x 方向的动量方程相比，可以略去。



2 边界层微分方程组推导—数量级分析

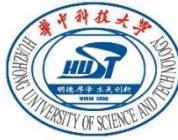
由无量纲能量方程：

$$u' \frac{\partial \Theta}{\partial x'} + v' \frac{\partial \Theta}{\partial y'} = \frac{1}{RePr} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y'^2} \right)$$

$$1 \cdot \frac{1}{1} \quad \delta \cdot \frac{1}{\delta} \quad \delta_t^2 \quad \frac{1}{1^2} \quad \frac{1}{\delta^2}$$

无量纲能量方程变为：

$$u' \frac{\partial \Theta}{\partial x'} + v' \frac{\partial \Theta}{\partial y'} = \frac{1}{RePr} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y'^2}$$



2 边界层微分方程组推导

常物性、无内热源、二维稳态、忽略体积力、不可压缩牛顿流体

对流换热完整微分方程组

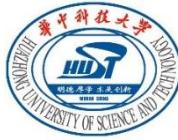
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$
$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

对流换热**边界层**微分方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$\rho c_p \left(u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} \right) = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx}$$



3 外掠等温平壁层流分析解

主流流向压力梯度为零：

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = C$$

$$\frac{dp}{dx} = -\rho u \frac{du}{dx} = 0$$

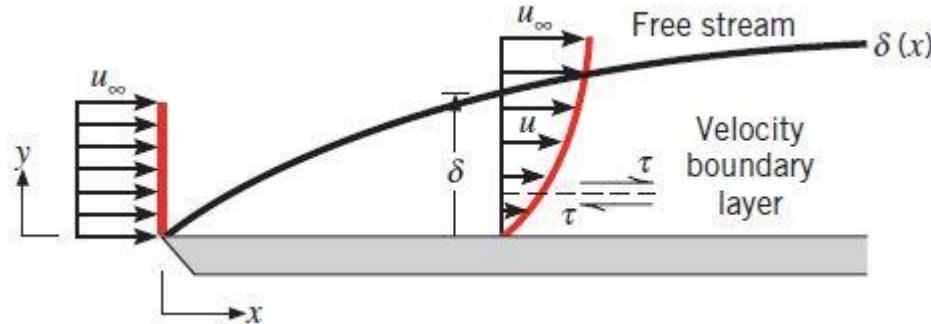
控制方程：

对流换热边界层微分方程

定解条件：

$$y = 0: u = 0, v = 0, t = t_w$$

$$y \rightarrow \infty: u = u_\infty, t = t_\infty$$



速度边界层

边界层厚度：

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}}$$

范宁局部摩擦阻力系数：

$$c_f = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$$



3 外掠等温平壁层流分析解

主流流向压力梯度为零：

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = C$$

$$\frac{dp}{dx} = -\rho u \frac{du}{dx} = 0$$

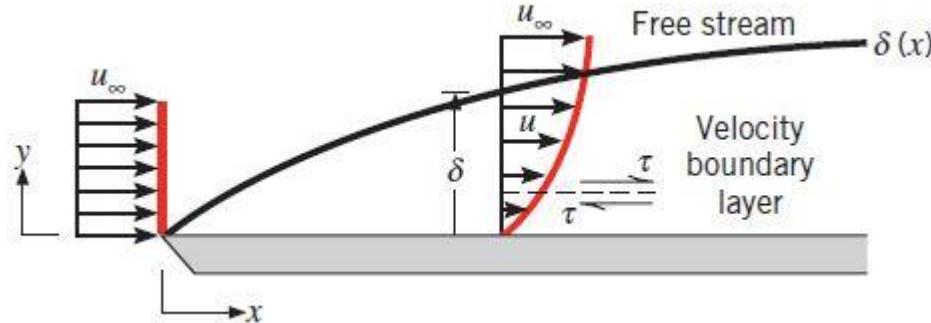
控制方程：

对流换热边界层微分方程

定解条件：

$$y = 0: u = 0, v = 0, t = t_w$$

$$y \rightarrow \infty: u = u_\infty, t = t_\infty$$



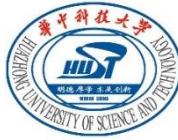
热边界层

★热边界层厚度：

$$\delta_t = \delta \Pr^{-1/3}$$

★局部对流传热系数：

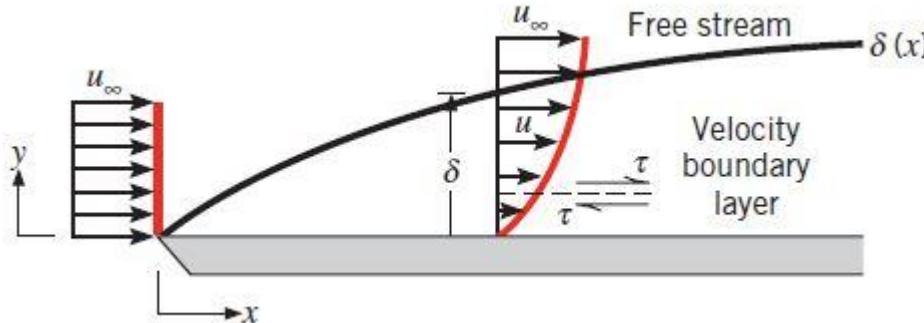
$$h_x = 0.332 \frac{\lambda}{x} \left(\frac{u_\infty x}{\nu} \right)^{1/2} \left(\frac{\nu}{a} \right)^{1/3}$$



3 外掠等温平壁层流分析解

主流流向压力梯度为零：

$$\frac{dp}{dx} = -\rho u \frac{du}{dx} = 0$$



无量纲特征数

努塞尔数: $Nu_x = \frac{h_x x}{\lambda}$ 雷诺数: $Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu}$

普朗特数: $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$

特征数方程

$$h_x = 0.332 \frac{\lambda}{x} \left(\frac{u_\infty x}{\nu} \right)^{1/2} \left(\frac{\nu}{a} \right)^{1/3}$$



$$Nu_x = 0.332 Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$$

★等温平壁 $x=0 \sim l$ 平均值

$$c_{f,m} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_l}}$$

$$Nu_l = 0.664 Re_l^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$$

定性温度: $t_m = \frac{t_w + t_\infty}{2}$



3 外掠等温平壁层流分析解

主流流向压力梯度为零：

$$\frac{dp}{dx} = 0$$



$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$



$$u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

$Pr=1$

速度边界层厚度 δ = 热边界层厚度 δ_t



$Pr > 1$

速度边界层厚度 δ > 热边界层厚度 δ_t

$Pr < 1$

速度边界层厚度 δ < 热边界层厚度 δ_t

$$\delta_t = \delta \Pr^{-1/3}$$

能量方程与动量方程完全一致，
若边界条件形式也一致，则解
的形式就会一致。

即：

**边界层内速度分布 = 热边界层
温度分布**



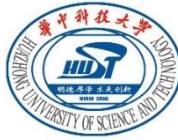
4 边界层积分方程组

1921年，冯·卡门提出了边界层动量积分方程。

1936年，克鲁齐林求解了边界层能量积分方程。所得的结果称为边界层问题的近似解。

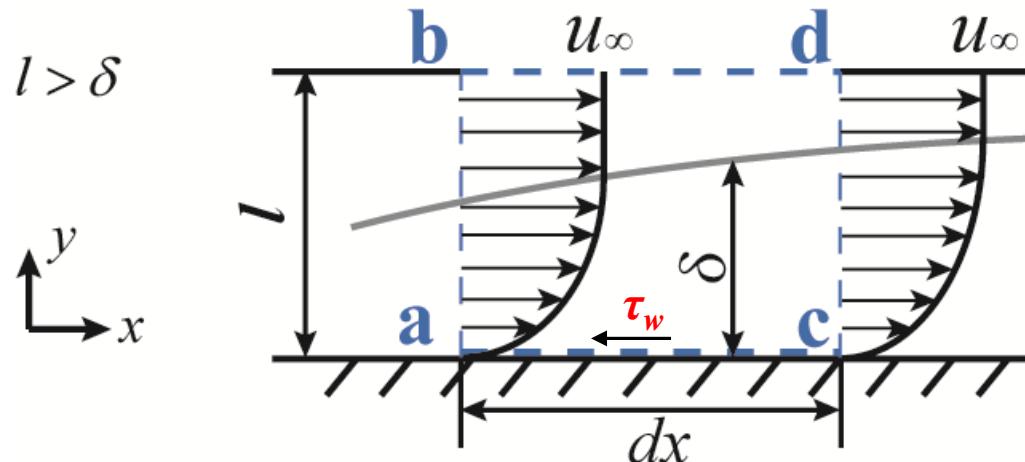
边界层积分方程一般可由两种方法获得：

其一是将动量守恒定律和能量守恒定律应用于控制体；
其二是对边界层微分方程直接进行积分。

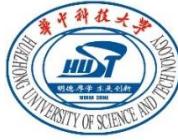


4 边界层积分方程组—动量积分方程

取常物性、不可压缩流体的二维稳态强制对流为对象作分析。

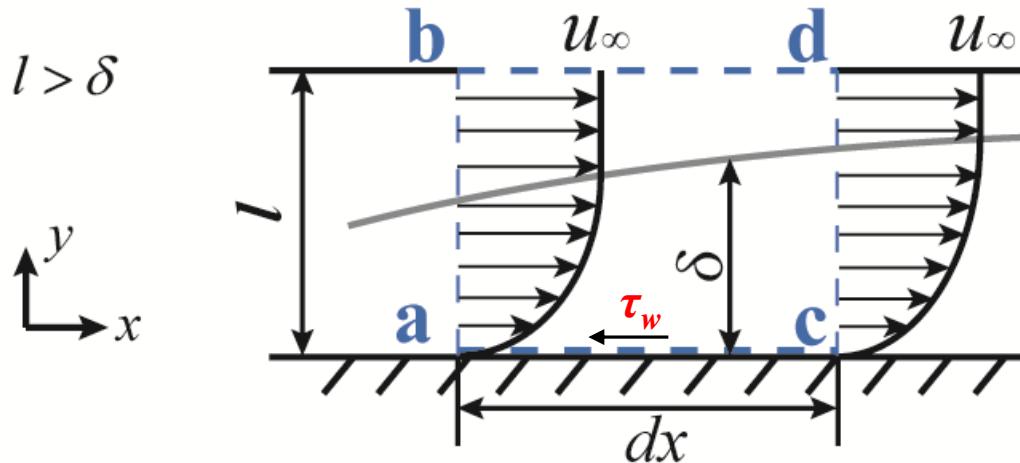


- ◆ 由于在边界层内 y 方向上的流速很小，因此推导中只考虑 x 方向上的动量变化，不引入流速 v 。
- ◆ 图中给出了速度的分布曲线。在距壁面 y 处流速为 u ，在 $y \geq \delta$ 处 $u = u_{\infty}$ 。



4 边界层积分方程组—动量积分方程

先计算出入控制容积的动量之差：



穿过ab进入控制体的动量

$$\int_0^l \rho u^2 dy$$

穿过cd流出控制体的动量

$$\int_0^l \rho u^2 dy + \frac{d}{dx} \left(\int_0^l \rho u^2 dy \right) dx$$

穿过bd流入控制体的动量

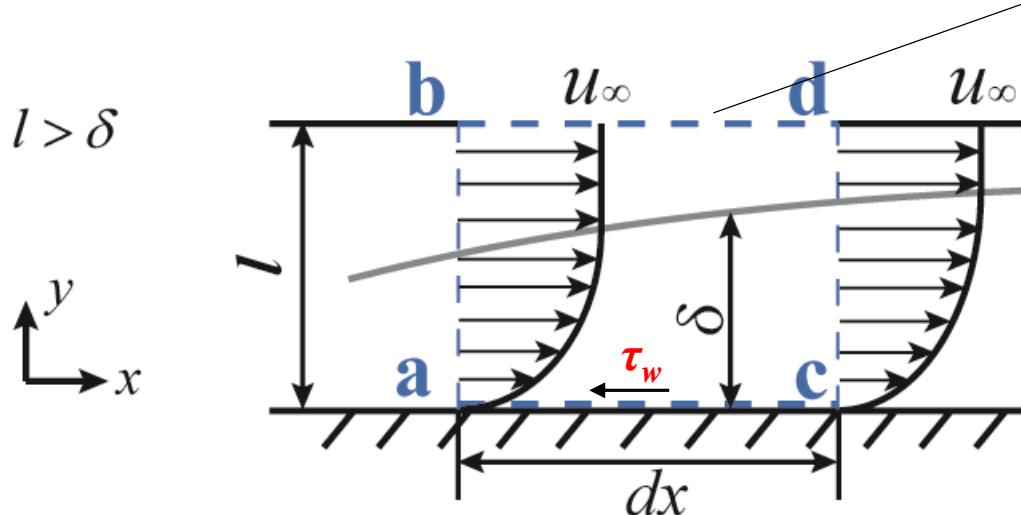
$$u_\infty \left(\frac{d}{dx} \int_0^l \rho u dy \right) dx$$



4 边界层积分方程组—动量积分方程

再计算作用在控制容积表面外力之和：

bd面没有切应力



作用在控制体上的力

cd与ab面：

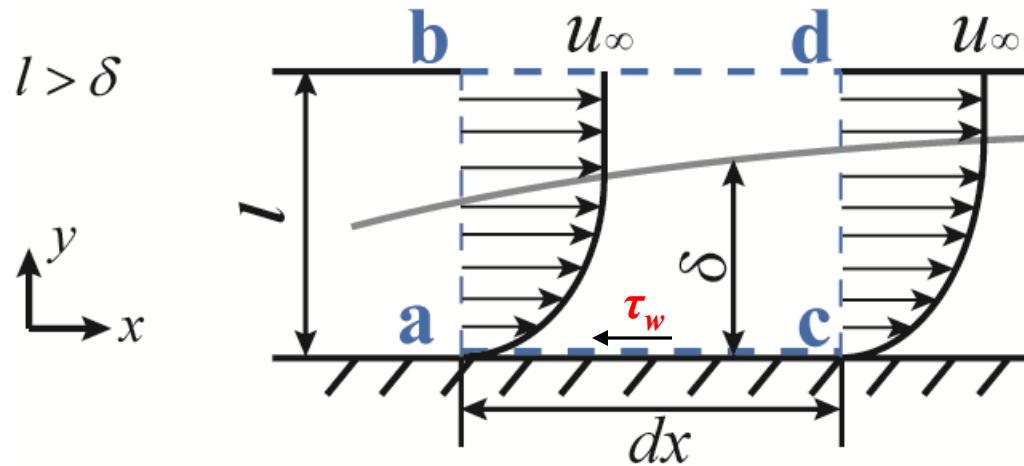
$$-l \left(P + \frac{dP}{dx} dx \right) + lP = -l \frac{dP}{dx} dx$$

ac面：

$$-\tau_w dx = -\mu dx \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$$



4 边界层积分方程组—动量积分方程

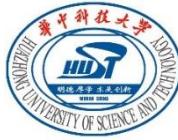


应用动量守恒：

伯努利方程 $\frac{dp}{dx} = -\rho u_\infty \frac{du_\infty}{dx}$

$$\rho \left[\frac{d}{dx} \left(\int_0^l u^2 dy \right) dx - \boxed{u_\infty dx \frac{d}{dx} \int_0^l u dy} \right] = -\tau_w dx - \boxed{l \frac{dp}{dx} dx}$$

分部积分
$$\frac{d}{dx} \left(u_\infty \int_0^l u dy \right) = u_\infty \frac{d}{dx} \int_0^l u dy + \frac{du_\infty}{dx} \int_0^l u dy$$



4 边界层积分方程组—动量积分方程

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^l (u_\infty - u) u dy + \rho \frac{du_\infty}{dx} \int_0^l (u_\infty - u) dy = \tau_w$$

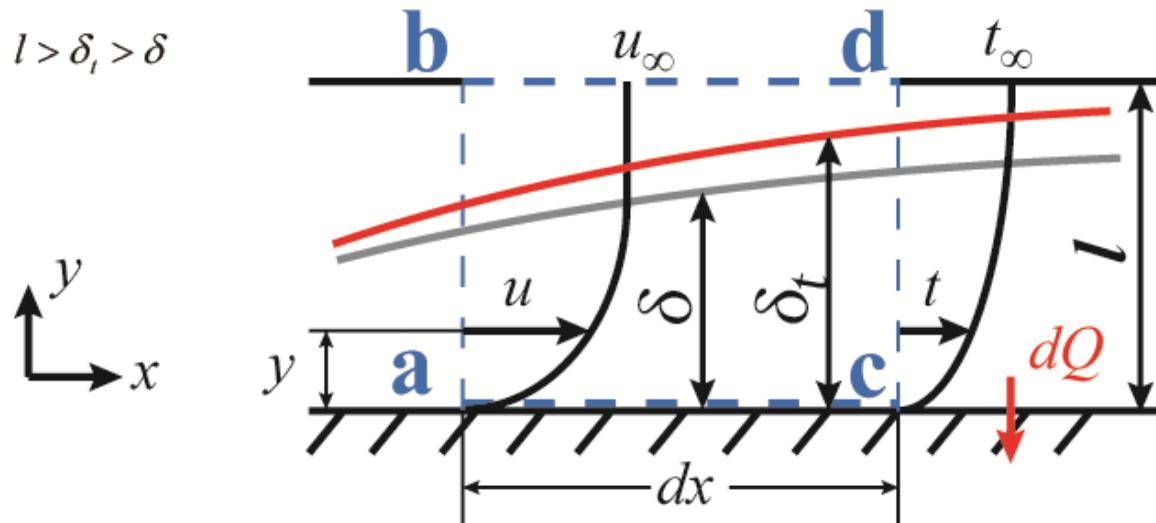
根据边界层理论，在边界层外的主流区 $u_\infty - u = 0$ 。改写上式积分上限得：

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (u_\infty - u) u dy + \rho \frac{du_\infty}{dx} \int_0^{\delta} (u_\infty - u) dy = \tau_w$$

讨论：

- 自变量只有 x , 比微分方程容易求解;
- 推导时只要求流体整体上满足动量方程，而不必每个质点都满足，其适用性更强，内部不连续、有阶跃等情况下仍然适用；
- 方程推导过程中没有引入近似，但求解时需要假定速度分布函数，解的好坏与分布函数有关。

4 边界层积分方程组—能量积分方程



在常物性、流速不致引起耗散热的条件下，考察控制容积的能量守恒。在边界层数量级分析中已经得出结论：

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

因此，推导中仅考虑 y 方向上的导热。



4 边界层积分方程组—能量积分方程

与动量方程推导类似：

穿过ab进入的热量

$$\int_0^l \rho c_p u t dy$$

穿过cd流出的热量

$$\int_0^l \rho c_p u t dy + \frac{d}{dx} \left(\int_0^l \rho c_p u t dy \right) dx$$

穿过bd流入的热量

$$\rho c_p t_\infty \frac{d}{dx} \left(\int_0^l u dy \right) dx$$

穿过ac进入的热量

$$-\lambda \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=0} dx$$



应用能量守恒定律：

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} (t_\infty - t) u dy = a \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=0}$$



4 边界层积分方程组—求解

动量积分方程：

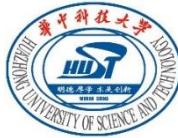
$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (u_{\infty} - u) u dy + \rho \frac{du_{\infty}}{dx} \int_0^{\delta} (u_{\infty} - u) dy = \tau_w$$

$u_{\infty} = \text{constant}$ 

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (u_{\infty} - u) u dy = \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

能量积分方程：

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} (t_{\infty} - t) u dy = a \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=0}$$



4 边界层积分方程组—求解

积分方程的求解基本思路：

- 对边界层中的**速度分布及温度分布**的函数形式做出**假设**（一般为多项式）；
- 利用边界条件确定速度/温度分布函数系数；
- 将分布函数带入积分方程**求得** δ 和 δ_t 的常微分方程；
- 计算速度/热边界层厚度，得出**阻力系数**和**换热系数**。



4 边界层积分方程组—求解

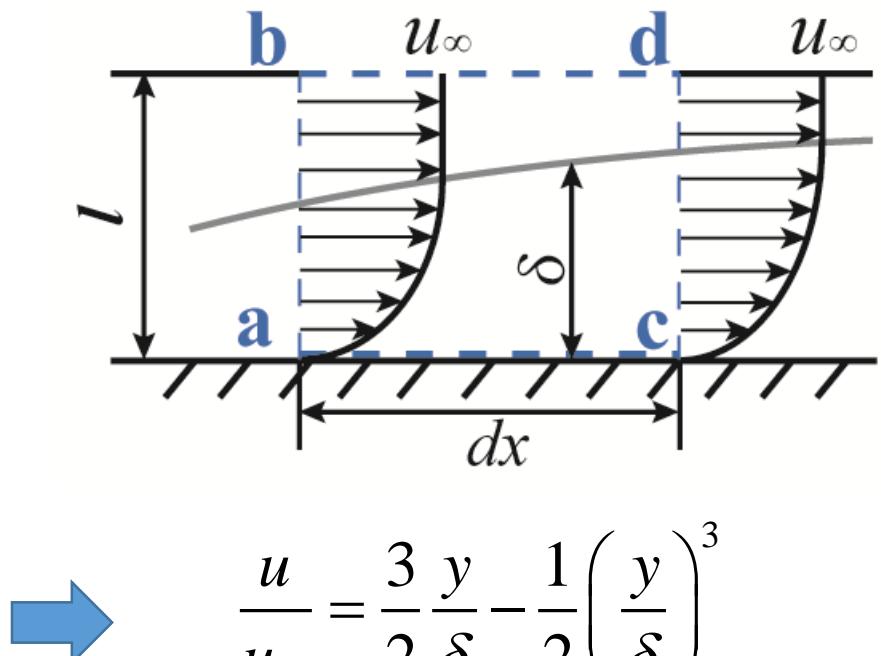
以稳态常物性流体强制掠过平板层流时的换热为例，
壁面具有定壁温的边界条件。

速度分布函数（多项式近似）：

$$u(y) = a + by + cy^2 + dy^3$$

边界条件：

$$\begin{cases} y=0, u=0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \\ y=\delta, u=u_\infty, \frac{\partial u}{\partial y}=0 \end{cases}$$





4 边界层积分方程组—求解

代入：

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (u_{\infty} - u) u dy = \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$$



$$\delta d\delta = \frac{140}{13} \frac{\nu}{u_{\infty}} dx$$

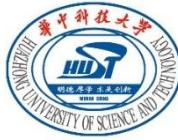
两边积分：

$$\int_0^{\delta} \delta d\delta = \frac{140\nu}{13u_{\infty}} \int_0^x dx$$

应用 $x = 0$ 时 $\delta = 0$ 的条件：

$$\frac{\delta}{x} = 4.64 Re_x^{-1/2} \quad \text{←} \quad Re_x = \frac{u_{\infty} x}{\nu}$$

$$\rightarrow \tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{3}{2} \mu \frac{u_{\infty}}{\delta} = \frac{3}{2} \mu u_{\infty} \frac{Re_x^{1/2}}{4.64 x} = 0.323 \frac{\rho u_{\infty}^2}{Re_x^{1/2}}$$



4 边界层积分方程组—求解

同样方法可以求解温度边界层和传热系数, 现给出积分方程的近似解:

➤ 速度边界层厚度

$$\delta = \frac{4.64x}{\sqrt{Re_x}}$$

➤ 局部壁面切应力

$$\tau_w = \frac{0.323 \rho u_\infty^2}{\sqrt{Re_x}}$$

➤ 热边界层厚度

$$\delta_t(x) / \delta(x) = \frac{1}{1.026} Pr^{-1/3}$$

➤ 局部表面传热系数

$$h_x = 0.332 \frac{\lambda}{x} Pr^{1/3} Re_x^{1/2}$$

➤ 局部表面传热系数

$$Nu_x = 0.332 Pr^{1/3} Re_x^{1/2}$$



4 边界层积分方程组

Note 1:

$$\frac{\delta}{x} = 4.64 Re_x^{-1/2}$$

$\nu \uparrow, \delta \uparrow$

粘性系数大，边界层厚度增大

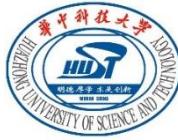
$x \uparrow, \delta \uparrow$

尺度越大，边界层厚度越大

$u_\infty \uparrow, \delta \downarrow$

来流速度增大，边界层厚度减小

上述三个参数可合并为雷诺数，雷诺数足够大时，
边界层厚度才足够小，因此，当雷诺数很小时，
应用**边界层理论** ($\delta(x)/x \ll 1$) 将带来**较大误差**。



4 边界层积分方程组

Note 2:

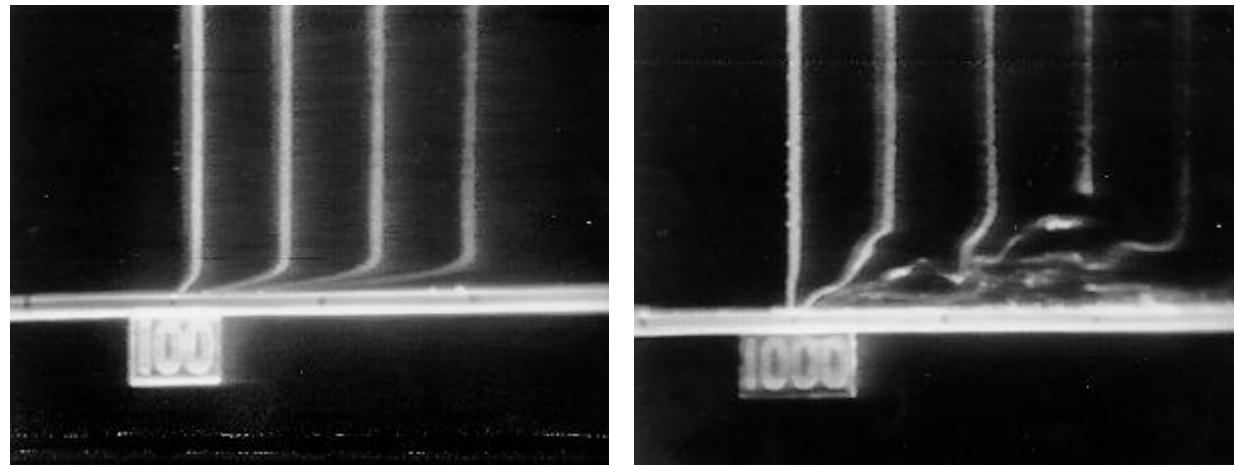
随着 x 的增大， $\delta(x)$ 也逐步增大，同时黏性力对流场的控制作用也逐步减弱，从而使边界层内的流动变得紊乱。边界层从层流过渡到紊流的 x 值称为临界值，记为 x_c 。



临界雷诺数：

$$Re_c = u_\infty x_c / \nu$$

平板： $Re_c = 5 \times 10^5$





4 边界层积分方程组

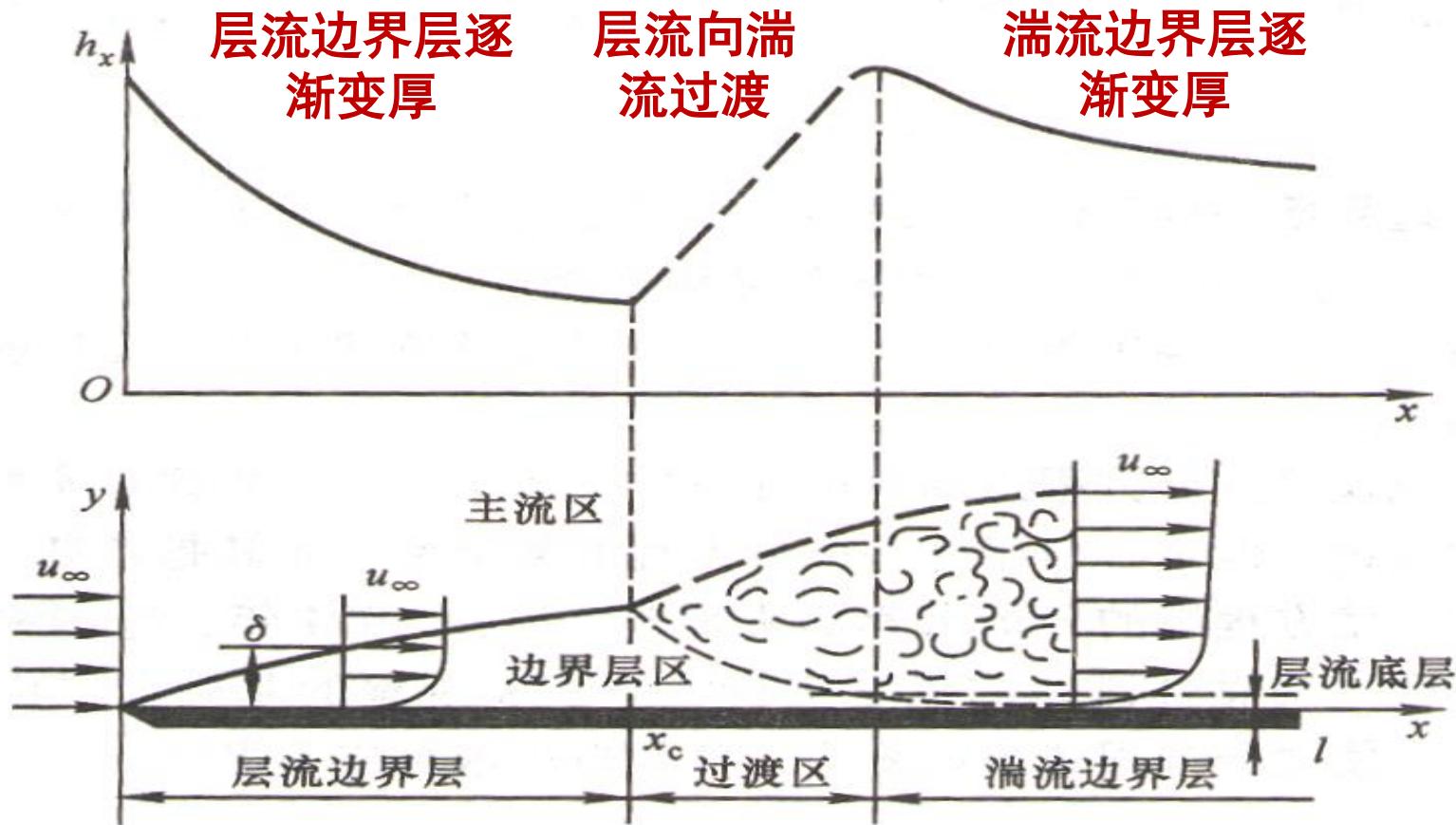
Note 3:

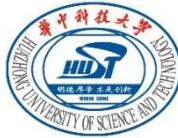
$$\begin{array}{c|c} x, v, u & \xleftarrow{Re_x} \\ a, \nu & \xleftarrow{Pr} \end{array} \quad \frac{\delta_t(x)}{\delta(x)} = \frac{1}{1.026} Pr^{-\frac{1}{3}}$$

- 由此式可以看出，热边界层是否满足薄层性的条件，除了 Re_x 足够大之外还取决于 Pr 的大小，当普朗特数非常小时($Pr \ll 1$)，热边界层相对于速度边界层就很厚，反之则很薄。
- 按照普朗特的假设，在紊流状态下速度边界层与热边界层具有相同的数量级，即 $\delta_t(x)/\delta(x) \approx 1$

4 边界层积分方程组

Note 4: 对流换热系数随 x 的变化规律





4 边界层积分方程组

Note 5:

速度分布函数不同，所得近似解不同。

不同的边界条件也可求出不同的分布函数；不是多项式的幂次越高解越精确。

Note 6: 求解平均表面传热系数

$$h = \frac{1}{l} \int_0^l h_x dx = \frac{B}{l} \int_0^l x^{-1/2} dx = 2h_l$$

$$Nu = \frac{hl}{\lambda} = 0.664 \Pr^{\frac{1}{3}} \text{Re}_x^{\frac{1}{2}}$$



5 例题

温度为30°C的空气以0.5m/s的速度平行掠过长250mm、温度为50°C的平板，试求出平板末端流动边界层和热边界层的厚度及空气与单位宽度平板的换热量。

解：边界层的平均温度为：

$$t_m = \frac{1}{2}(t_w + t_\infty) = 40$$

空气40°C的物性参数分别为：

$$\nu = 16.96 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}, \lambda = 2.76 \times 10^2 \text{W/m}\cdot\text{K}, Pr = 0.699,$$

在离平板前沿250mm处，雷诺数为：



5 例题

$$Re = \frac{ul}{\nu} = \frac{0.5 \times 0.25}{16.96 \times 10^{-6}} = 7.37 \times 10^3$$

边界层为层流。流动边界层的厚度为

$$\delta = 4.64x \cdot Re^{-1/2} = 4.64 \times 0.25 \times (7.37 \times 10^3)^{-0.5} = 14.6 \text{ mm}$$

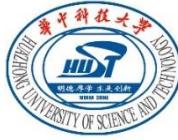
热边界层的厚度为

$$\delta_t = \delta Pr^{-1/3} / 1.026 = 14.6 \times (0.699)^{-1/3} / 1.026 = 16.4 \text{ mm}$$

可见，空气的热边界层比流动边界层略厚。

整个平板的平均表面传热系数为

$$Nu = 0.664 Re^{1/2} Pr^{1/3} = 0.664 \times (7.37 \times 10^3)^{1/2} \times 0.699^{1/3} = 50.6$$



5 例题

$$h = \frac{\lambda}{l} Nu = \frac{2.76 \times 10^{-2}}{0.25} \times 50.6 = 5.6 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

1m宽平板与空气的换热量为

$$\begin{aligned}\Phi &= Ah(t_w - t_\infty) \\ &= 1 \times 0.25 \times 5.6 \times (50 - 30) = 28 \text{ W}\end{aligned}$$



对流换热问题的求解一般方法：

定性温度



流体物性参数



← 定性尺寸、定性速度

Re/Gr



选择准则关系式，计算 Nu



计算换热系数 h



← 牛顿冷却公式

计算换热量 Q



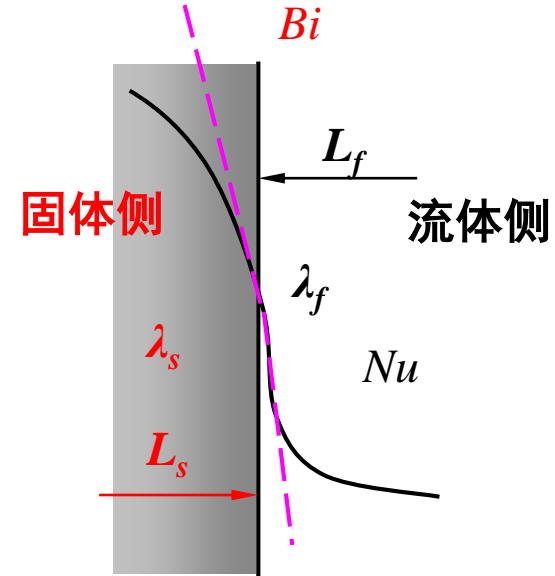
作业：

4-2, 4-3, 4-14, 4-15

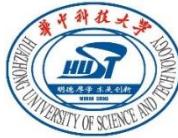


- 努谢尔特数与非稳态导热分析中的毕渥数形式上是相似的。但是， Nu 中的 L_f 为流场的特征尺寸， λ_f 为流体的导热系数

$$Nu = \frac{hL_f}{\lambda_f} \quad Bi = \frac{hL_s}{\lambda_s}$$



- 而 Bi 中的 L_s 为固体系统的特征尺寸， λ_s 为固体的导热系数。它们虽然都表示边界上的无量纲温度梯度，但一个在流体侧一个在固体侧。



Supplement——量纲分析法

本质：

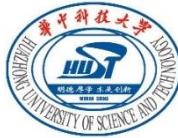
凡是反映客观物理过程间物理量相互关系的方程式，必然是量纲和谐的，即方程式各项的量纲（单位）是一致的，称为**量纲和谐原理**。

基本依据：

π 定理：一个表示 n 个物理量间关系的量纲一致的方程式，一定可以转换为包含 $n - r$ 个独立的无量纲物理量群间的关系。 r 指基本量纲的数目。

流体力学的基本量纲：时间T [s]，长度L [m]，质量M [kg]

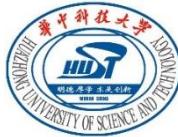
传热学的基本量纲：时间 T [s]，长度 L [m]，质量 M [kg]，
温度 Θ [K]



Supplement——量纲分析法

基本步骤：

1. 明确影响传热过程的全部 n 个物理量；
2. 选择其中 r 个物理量作为基本物理量，对于传热学问题，一般 $r=4$ ；
3. 对于 r 个基本物理量之外的 $n-r$ 个物理量，每次取一个，与 r 个基本物理量一起组成一个幂指数形式的 π 方程，共有 $n-r$ 个方程；
4. 对每个 π 方程应用量纲和谐原理确定 r 个待定指数；
5. 根据确定的 r 个幂指数得到 $n-r$ 个无量纲准则数，并确定准则数方程。



Supplement——量纲分析法

优点：

- 方法简单；
- 在不知道微分方程的情况下，仍然可以获得无量纲量。

实例：圆管内单相强制对流换热问题（流体力学）

$$h = f(u, d, \lambda, \eta, \rho, c_p) \longrightarrow Nu = f(Re, Pr)$$



Supplement——积分方程的推导

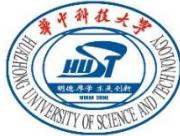
采用对微分方程积分得到积分方程

能量方程为：

$$u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

对一固定 x ，将能量方程从 $y = 0$ 到 $y = \infty$ 积分得：

$$\int_0^\infty u \frac{\partial t}{\partial x} + \int_0^\infty v \frac{\partial t}{\partial y} = \int_0^\infty a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$



Supplement——积分方程的推导

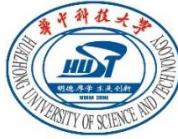
$$\int_0^\infty u \frac{\partial t}{\partial x} + \int_0^\infty v \frac{\partial t}{\partial y} = \int_0^\infty a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

当 $y > \delta_t$ 时, $t \approx t_\infty$, 故: $\frac{\partial t}{\partial x} \approx \frac{\partial t}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \approx 0$

→ $\int_0^{\delta_t} u \frac{\partial t}{\partial x} dy + \int_0^{\delta_t} v \frac{\partial t}{\partial y} dy = \int_0^{\delta_t} a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dy \quad (1)$

由分部积分:

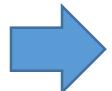
$$\int_0^{\delta_t} v \frac{\partial t}{\partial y} dy = vt \Big|_0^{\delta_t} - \int_0^{\delta_t} t \frac{\partial v}{\partial y} dy = v_{\delta_t} t_\infty - \int_0^{\delta_t} t \frac{\partial v}{\partial y} dy$$



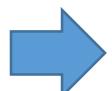
Supplement——积分方程的推导

将 v 转化为 u , 利用连续性方程: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

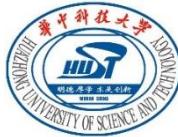
$$\int_0^{\delta_t} t \frac{\partial v}{\partial y} dy = - \int_0^{\delta_t} t \frac{\partial u}{\partial x} dy$$



$$v_{\delta_t} = \int_0^{\delta_t} \frac{\partial v}{\partial y} dy = - \int_0^{\delta_t} \frac{\partial u}{\partial x} dy$$



$$\int_0^{\delta_t} v \frac{\partial t}{\partial y} dy = - \int_0^{\delta_t} t_{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{\delta_t} t \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (a)$$



Supplement——积分方程的推导

(1) 式中的扩散项为：

$$\int_0^{\delta_t} a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = a \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_0^{\delta_t} = -a \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (b)$$

将 (a) 和 (b) 代入 (1) 式得：

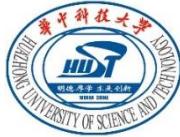
$$\int_0^{\delta_t} u \frac{\partial t}{\partial x} dy - \int_0^{\delta_t} t_{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{\delta_t} t \frac{\partial u}{\partial x} dy = -a \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

上式左边可进一步简化为：

$$\int_0^{\delta_t} \left(u \frac{\partial t}{\partial x} + t \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy - \int_0^{\delta_t} \frac{\partial (ut_{\infty})}{\partial x} dy = \int_0^{\delta_t} \frac{\partial}{\partial x} (ut - ut_{\infty}) dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} (ut - ut_{\infty}) dy$$

最后能量积分方程为：

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} (t_{\infty} - t) u dy = a \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=0}$$



第五章 对流换热计算

§ 5-1 流体外掠物体的强制对流换热

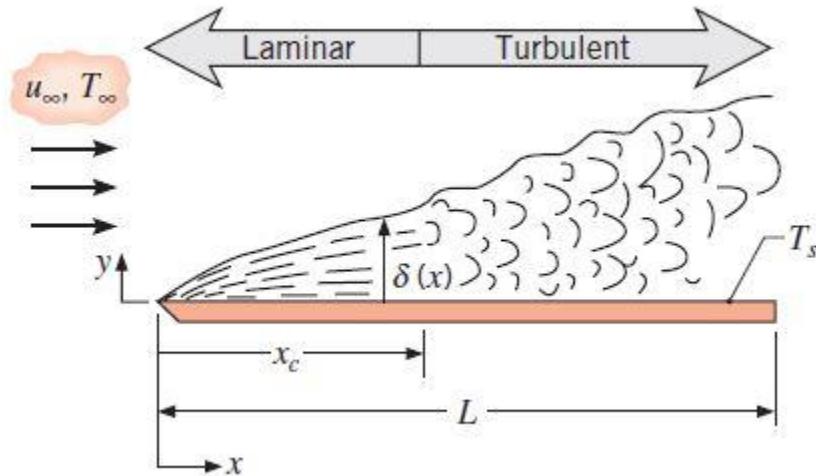
§ 5-2 管内流体强制对流换热

§ 5-3 自然对流换热

§ 5-1 流体外掠物体的强制对流换热

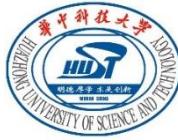
1 流体平行外掠平板的对流换热

- 边界层流流动换热可以通过边界层微分方程组的求解获得相应的准则关系式。



流体流过平板换热示意图

- 而湍流问题也可以通过求解边界层积分方程而得出相应的准则关系式。



1 流体平行外掠平板的对流换热

定性尺寸: 平板流向尺寸: x 或 L ; **定性温度**: 膜温度
 $t_m = (t_w + t_\infty)/2$; **定性速度**: 主流速度 (u_∞)

① 层流流动:

$$Re = \frac{u_\infty x}{\nu} < 5 \times 10^5$$

• 恒定壁温

$$Nu_x = 0.332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$$

局部

$$Nu_L = 0.664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$$

平均

• 恒定热流

$$Nu_x = 0.453 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$$

局部

$$Nu_L = 0.680 Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$$

平均

Extra requirement: $0.6 < Pr < 50$



1 流体平行外掠平板的对流换热

定性尺寸: 平板流向尺寸: x 或 L ; **定性温度**: 膜温度
 $t_m = (t_w + t_\infty)/2$; **定性速度**: 主流速度 (u_∞)

① 湍流流动:

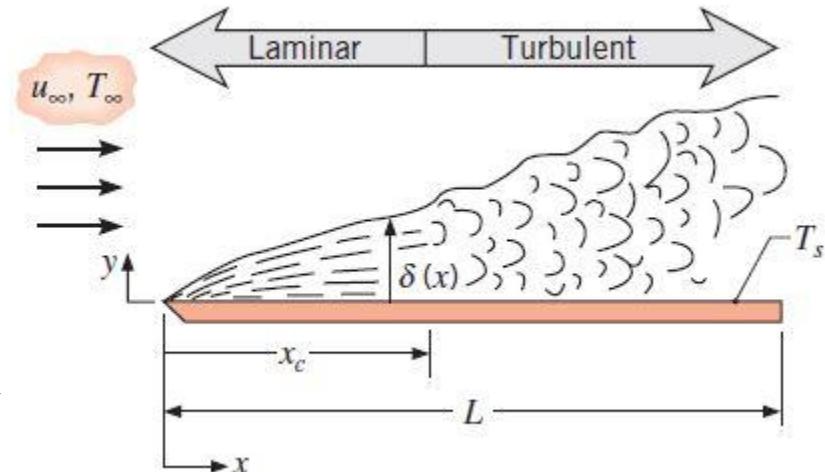
$$5 \times 10^5 < Re < 10^7$$

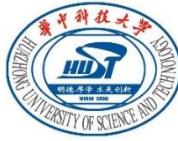
• **恒定壁温**

将整个平板都视为**湍流状态**, 其换热计算的准则关系式如下:

$$Nu_x = 0.029 Re_x^{0.8} Pr^{1/3} \quad \text{局部}$$

$$Nu_L = 0.037 Re_L^{0.8} Pr^{1/3} \quad \text{平均}$$





1 流体平行外掠平板的对流换热

定性尺寸: 平板流向尺寸: x 或 L ; **定性温度**: 膜温度
 $t_m = (t_w + t_\infty)/2$; **定性速度**: 主流速度 (u_∞)

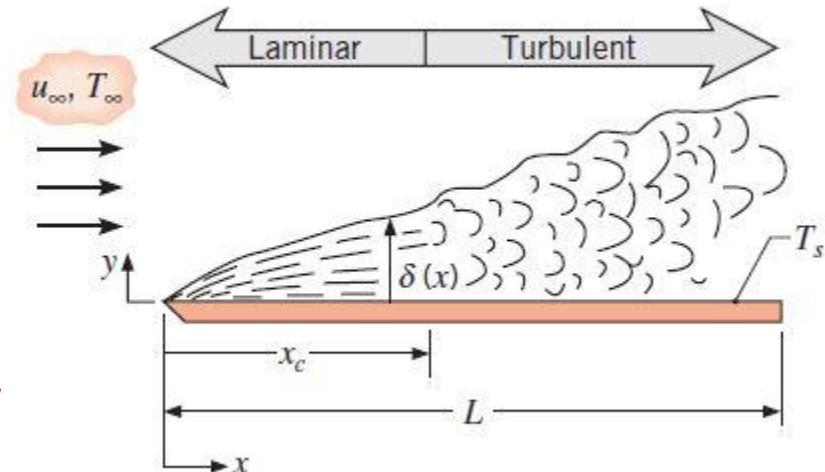
① 湍流流动:

$$5 \times 10^5 < Re < 10^7$$

- **恒定热流**

考虑紊流边界层均由**层流**

发展形成湍流, 这时:



$$Nu_x = 0.029 Re_x^{0.8} Pr^{1/3} \quad \text{局部}$$

$$Nu_L = \left[0.664 Re_{x_c}^{0.5} + 0.037 (Re_x^{0.8} - Re_{x_c}^{0.8}) \right] Pr^{1/3} \quad \text{平均}$$



1 流体平行外掠平板的对流换热

定性尺寸: 平板流向尺寸: x 或 L ; **定性温度**: 膜温度
 $t_m = (t_w + t_\infty)/2$; **定性速度**: 主流速度 (u_∞)

① 湍流流动:

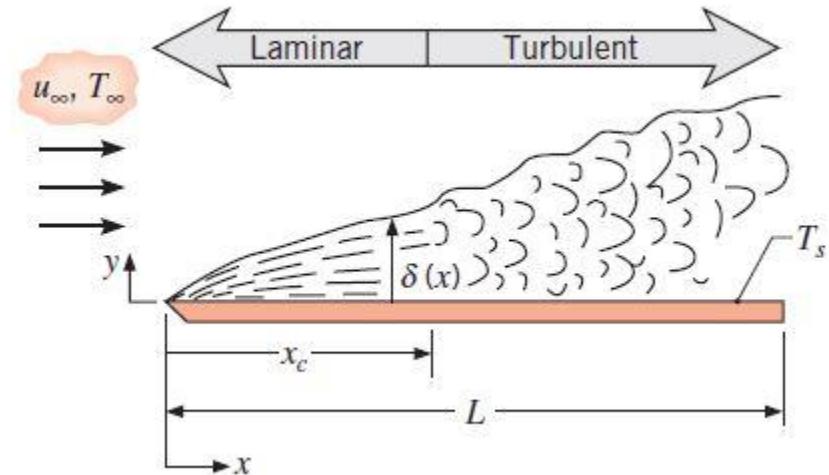
$$5 \times 10^5 < Re < 10^7$$

• 恒定热流

局部: $Nu_x = 0.0308 Re_x^{0.8} Pr^{1/3}$

与恒定壁温的局部传
热系数相差4%

Extra requirement (turbulence) : $0.6 < Pr < 60$

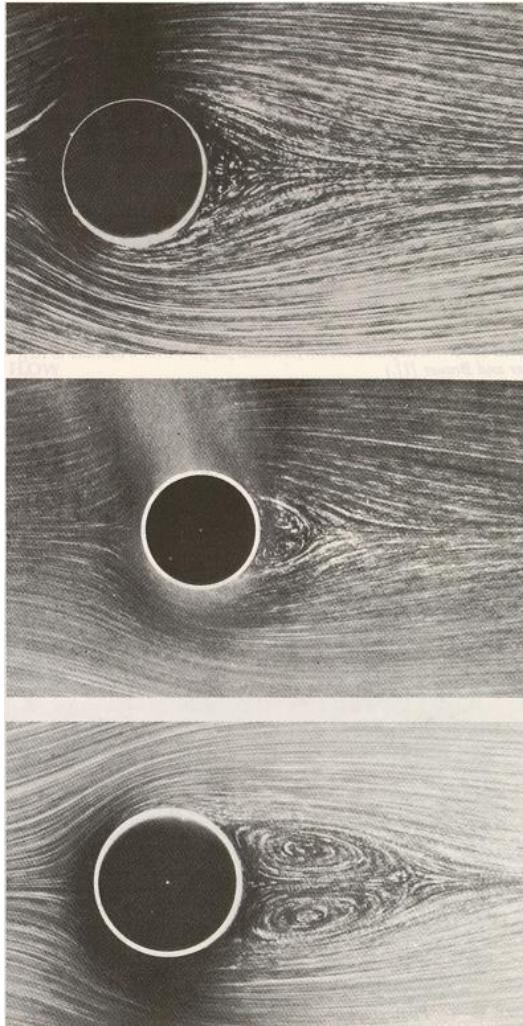


**湍流下边界条
件影响不大**

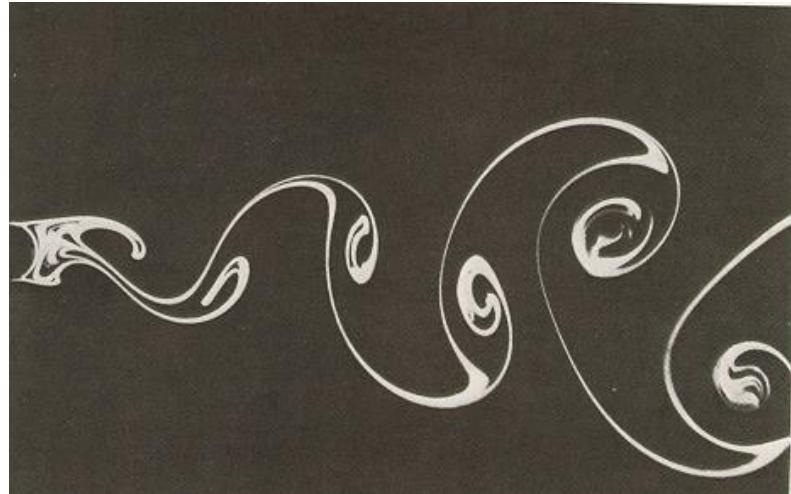


2 流体横向绕流单个圆柱体的强制对流换热

流体绕流圆柱后的回流现象

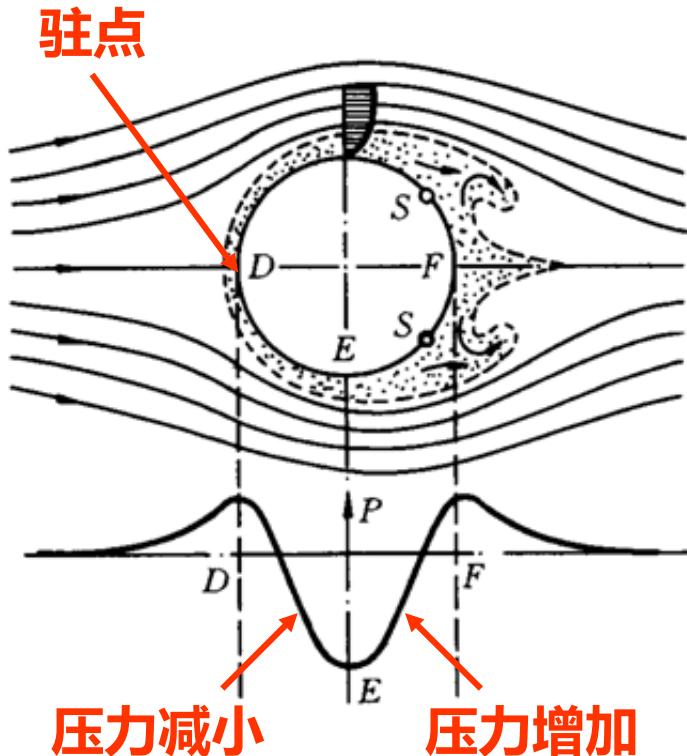


卡门涡街现象



2 流体横向绕流单个圆柱体的强制对流换热

① 横掠单管绕流的特点：



前半圆周：压力减小速度增加

$$\frac{\partial p}{\partial x} < 0, \frac{\partial u}{\partial x} > 0$$

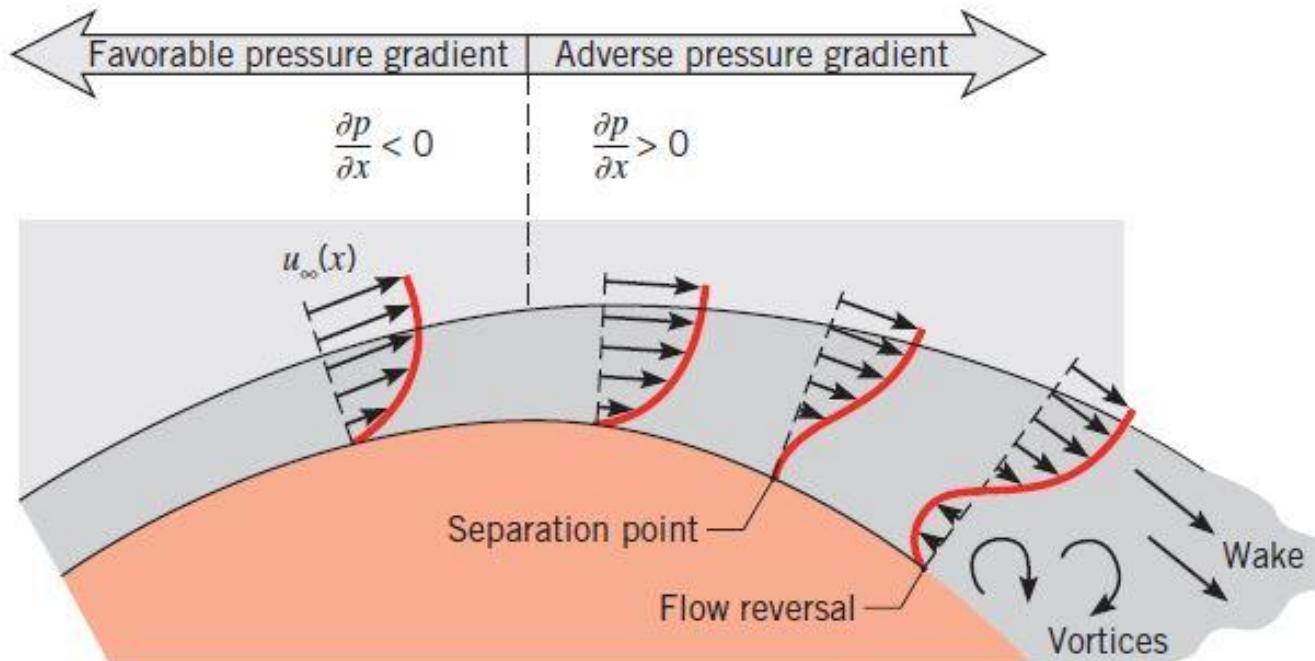
后半圆周：压力增加速度减小

$$\frac{\partial p}{\partial x} > 0, \frac{\partial u}{\partial x} < 0$$

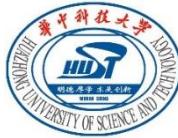
逆压梯度是造成流动分离的直接原因

2 流体横向绕流单个圆柱体的强制对流换热

① 横掠单管绕流的特点：分离现象

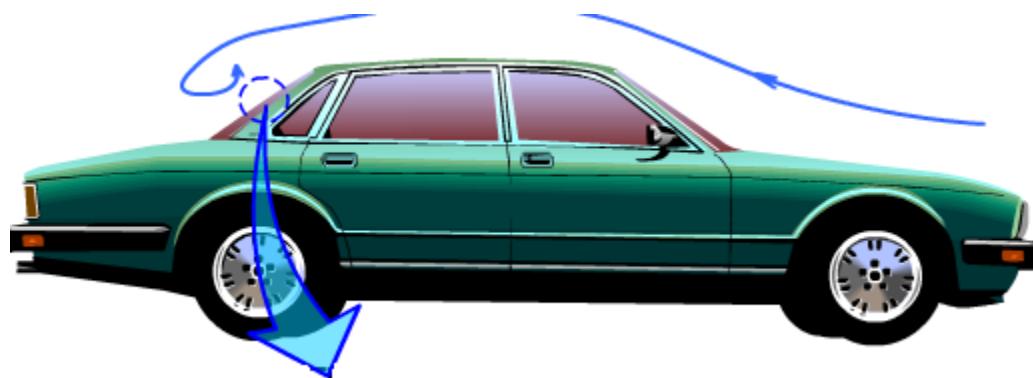
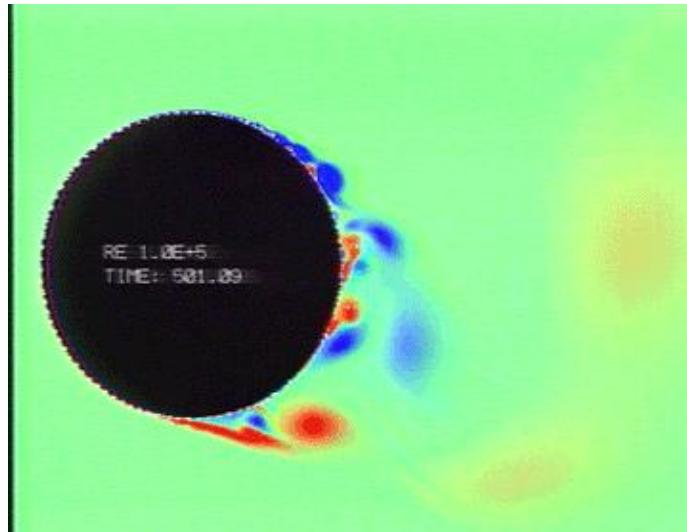
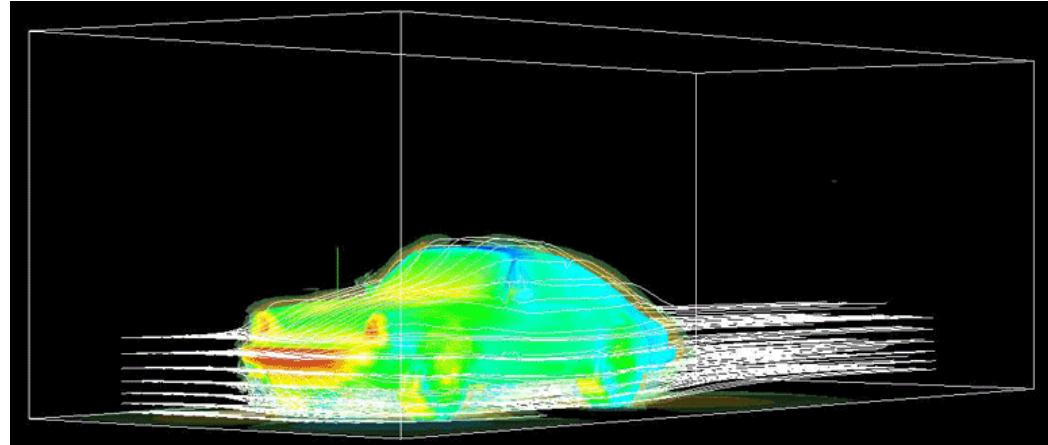


沿程速度梯度变化示意图



2 流体横向绕流单个圆柱体的强制对流换热

流体外掠一切非流线型物体时，都会发生边界层分离。

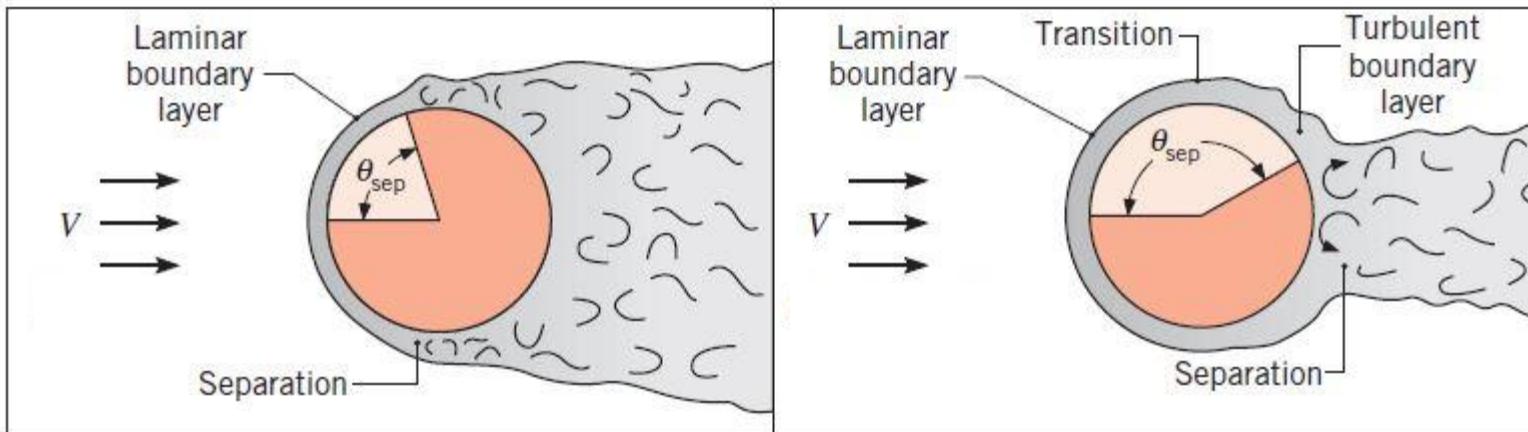


2 流体横向绕流单个圆柱体的强制对流换热

② 流态对分离的影响

取决于

$$Re = \frac{u_\infty D}{\nu}$$

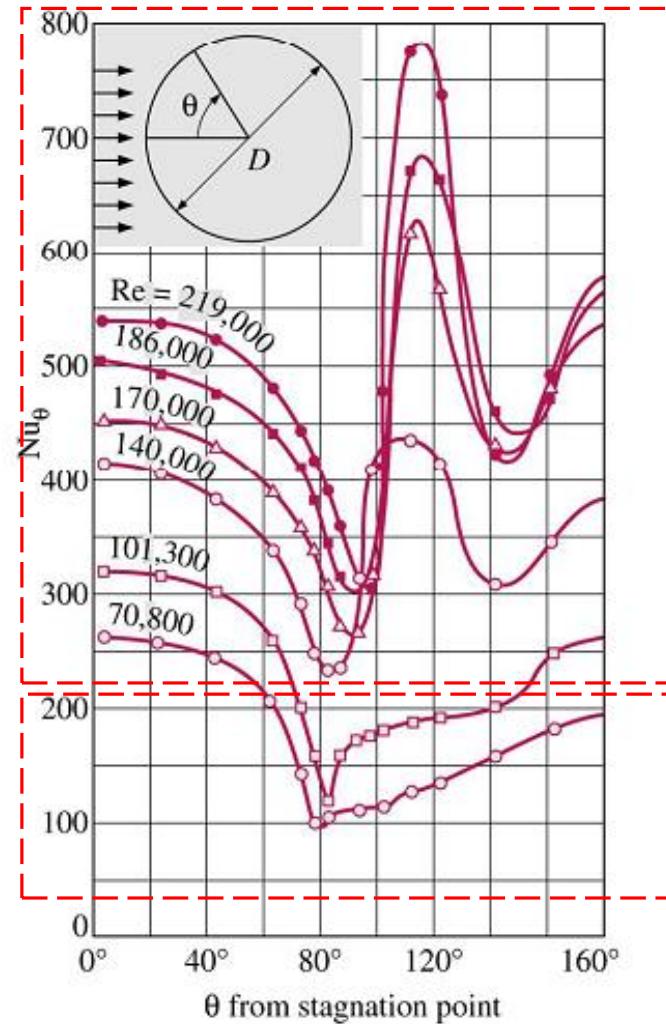


- 当 $Re < 10$ 时流动不会发生分离现象；
- 当 $10 \leq Re \leq 10^5$ 时边界层为层流，流动分离点在 $80^\circ \leq \phi \leq 85^\circ$ 之间；
- 当 $Re > 10^5$ 时，边界层在脱体前已转变为湍流，流动分离点推后到 $\phi = 140^\circ$ 处。湍流延迟了分离。

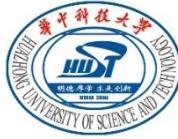
2 流体横向绕流单个圆柱体的强制对流换热

③ 表面传热系数的变化

- 在 $\theta=0\sim80^\circ$ 左右的递降，是由于层流边界层不断增厚的原因。
- 低 Re 时，回升点反映了绕流脱体的起点，这是由于脱体区的扰动强化了换热。
- 高 Re 数时，第一次回升是由于转变为了湍流， $\theta=140^\circ$ 处的第二次回升是由于脱体的缘故。



$$Nu \sim \theta$$



2 流体横向绕流单个圆柱体的强制对流换热

④ 准则关系式

➤ 计算平均传热系数的A.zhukaus-kas准则关系式：

$$Nu = cRe^n Pr^m \left(\frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0.25} \quad \begin{aligned} 1 \leq Re \leq 10^6 \\ 0.7 \leq Pr \leq 500 \end{aligned}$$

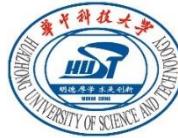
特征流速为流体的来流速度 u_∞ ；

特征尺寸为圆柱体外直径 d ；

定性温度除 Pr_w 按壁面温度 t_w 取值之外皆用流体的主流温度 t_f ；

系数：表5-1

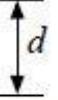
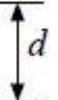
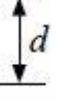
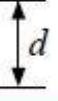
$\left(\frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0.25}$ 是在选用 t_f 为定性温度时考虑热流方向不同对换热性能产生影响的一个修正系数。



2 流体横向绕流单个圆柱体的强制对流换热

④ 准则关系式

➤ 计算平均传热系数的通用准则关系式：

Geometry	Re_{df}	C	n
 $u_{\infty} \rightarrow$	$5 \times 10^3 - 10^5$	0.246	0.588
 $u_{\infty} \rightarrow$	$5 \times 10^3 - 10^5$	0.102	0.675
 $u_{\infty} \rightarrow$	$5 \times 10^3 - 1.95 \times 10^4$ $1.95 \times 10^4 - 10^5$	0.160 0.0385	0.638 0.782
 $u_{\infty} \rightarrow$	$5 \times 10^3 - 10^5$	0.153	0.638
 $u_{\infty} \rightarrow$	$4 \times 10^3 - 1.5 \times 10^4$	0.228	0.731

$$Nu = c \left(\frac{u_{\infty} d}{\nu} \right)^n Pr^{1/3}$$

定性温度：

$$t_m = (t_w + t_{\infty})/2$$

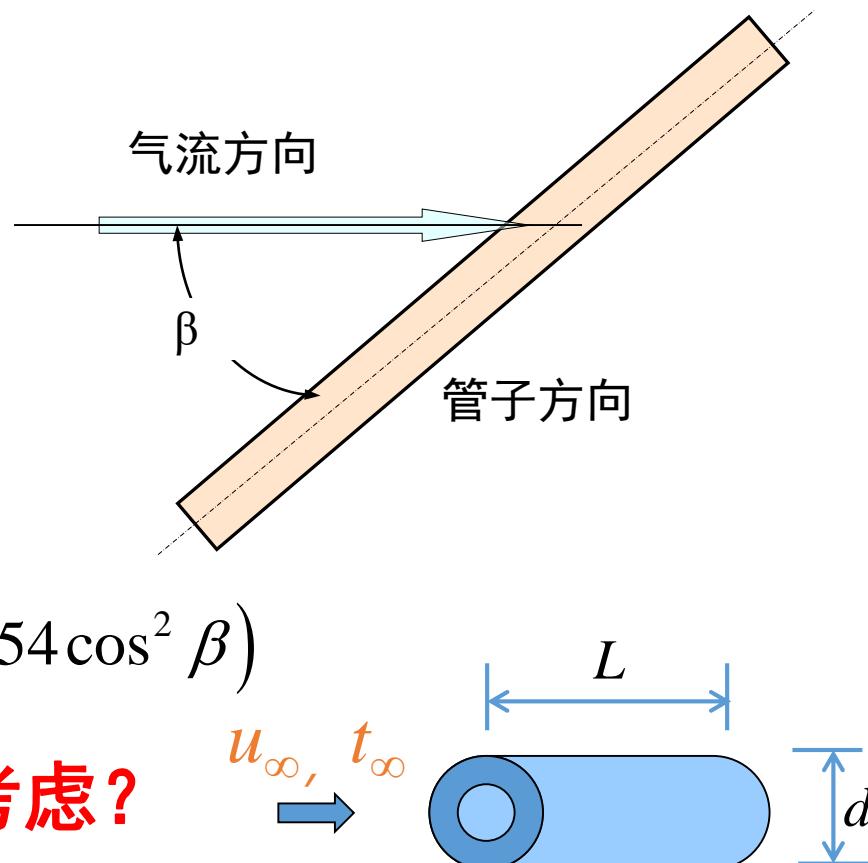
2 流体横向绕流单个圆柱体的强制对流换热

④ 准则关系式

如果流体流动方向与圆柱体轴线的夹角（亦称冲击角）在 $30^\circ\sim90^\circ$ 的范围内时，平均表面传热系数可按下式计算

$$h_\beta = h_{\beta=90^\circ} (1 - 0.54 \cos^2 \beta)$$

➤ 纵掠单管对流换热如何考虑？



可视为长 L , 宽 πd 的平板



外掠平板准则关系式



2 流体横向绕流单个圆柱体的强制对流换热

外掠球体对流换热实验关联式：

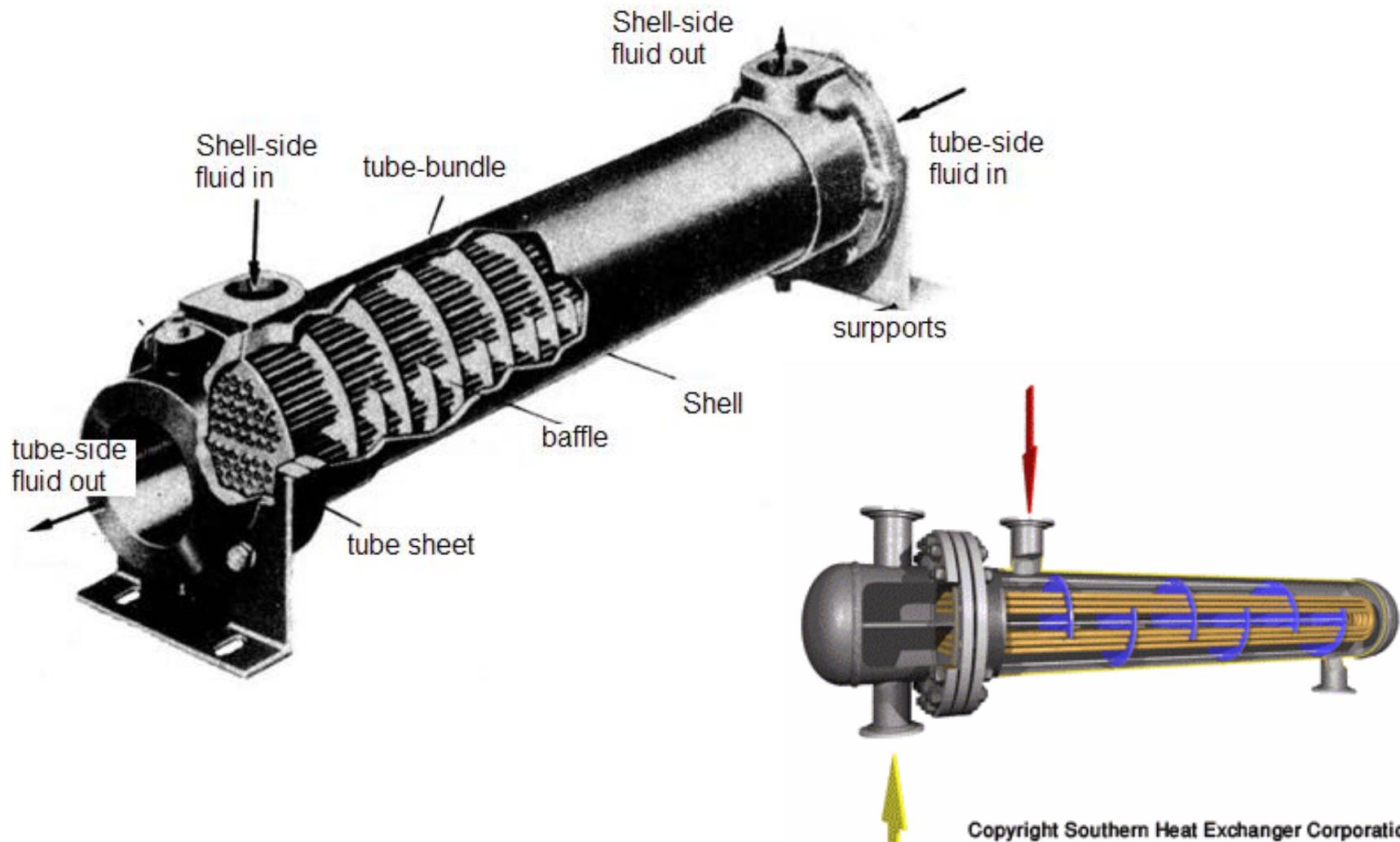
$$Nu = 2 + (0.4Re^{0.5} + 0.06Re^{2/3})Pr^{0.4} \left(\frac{\eta_{\infty}}{\eta_w} \right)^{1/4}$$

式中：定性温度为来流温度 t_f ；特征流速为来流速度 u_{∞} ；特征长度为球直径 d ；

适用于： $Pr=0.71\sim 380$, $Re=3.5\sim 7.6\times 10^4$



3 流体横向绕流光管管束的对流换热

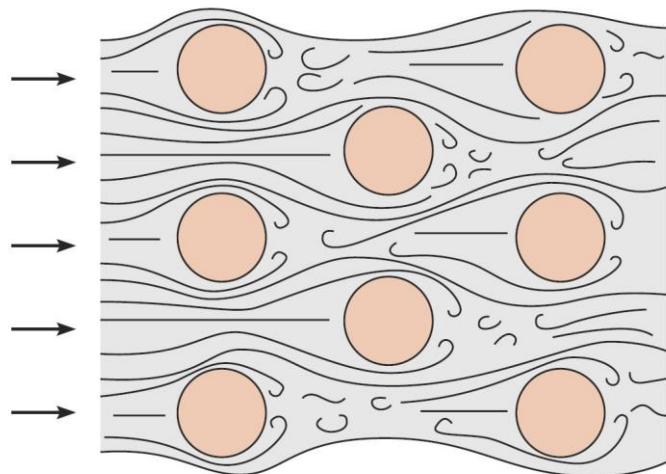


Copyright Southern Heat Exchanger Corporation

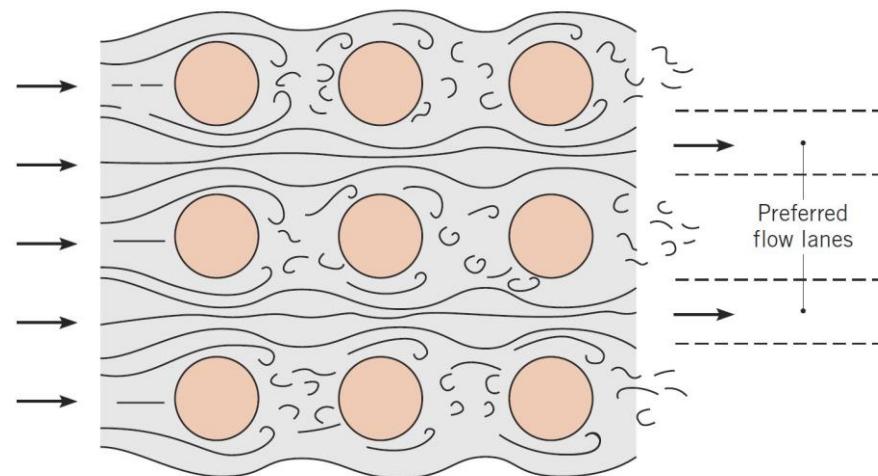


3 流体横向绕流光管管束的对流换热

管束（长圆柱体管束）是由多根长管（长圆柱体）按照一定的的排列规则组合而成的。

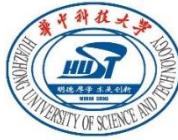


(1) 叉排管束



(2) 顺排管束

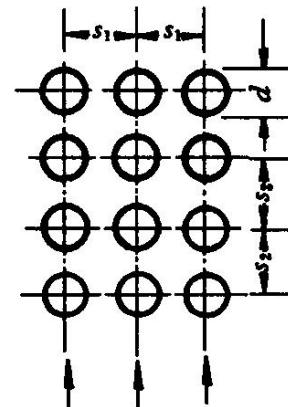
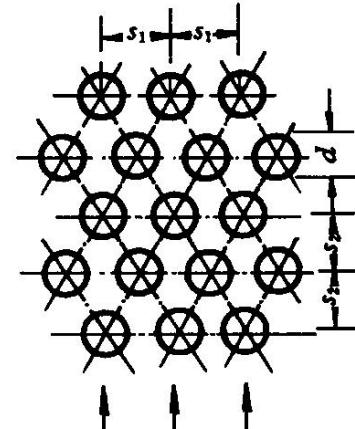
管束的排列方式很多，最常见的有**顺排**和**叉排**两种。

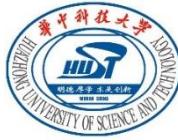


3 流体横向绕流光管管束的对流换热

影响管束换热的因素 (Re 和 Pr 除外)

- **管排方式:** 叉排、顺排；叉排换热比顺排强，但阻力大，不易清洗。
- **管间距:** 包括横向间距和纵向间距；
- **管排数:** 后排受前排尾流的扰动，换热增强，10排以上，可认为达到稳定。

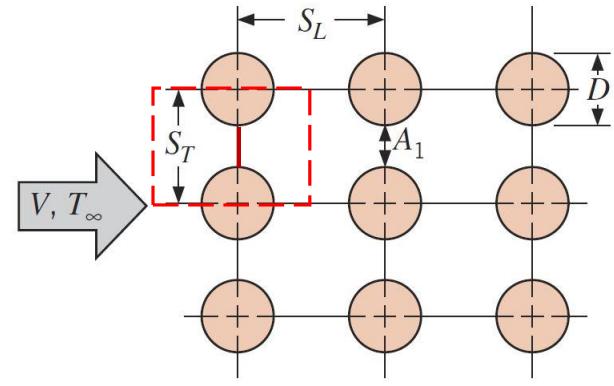




3 流体横向绕流光管管束的对流换热

平均表面传热系数

$$Nu = c Re^n Pr^m \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^p \left(\frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0.25} \epsilon_z \epsilon_\beta$$



➤ 特征流速: u_{max} → 最小流通面积

顺流

$$u_{max} = \frac{S_T V}{S_T - D}$$

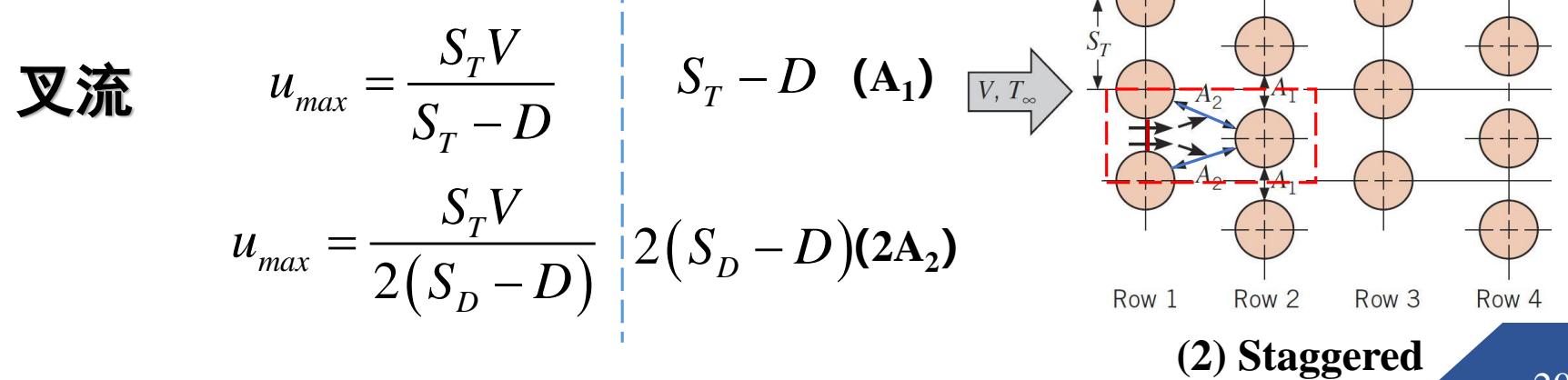
$$S_T - D \quad (A_1)$$

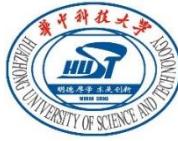
叉流

$$u_{max} = \frac{S_T V}{S_T - D}$$

$$S_T - D \quad (A_1)$$

$$u_{max} = \frac{S_T V}{2(S_D - D)} \quad 2(S_D - D)(2A_2)$$

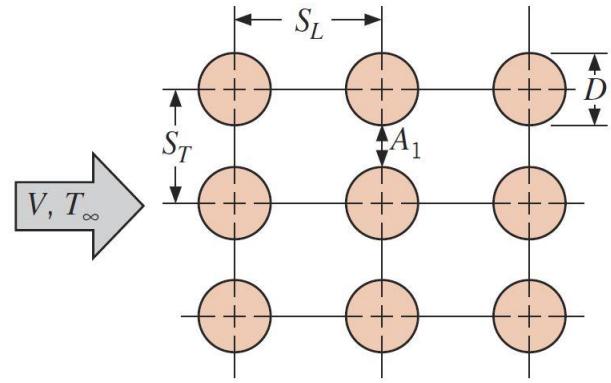




3 流体横向绕流光管管束的对流换热

平均表面传热系数

$$Nu = c Re^n Pr^m \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^p \left(\frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0.25} \epsilon_z \epsilon_\beta$$



Row 1 Row 2 Row 3

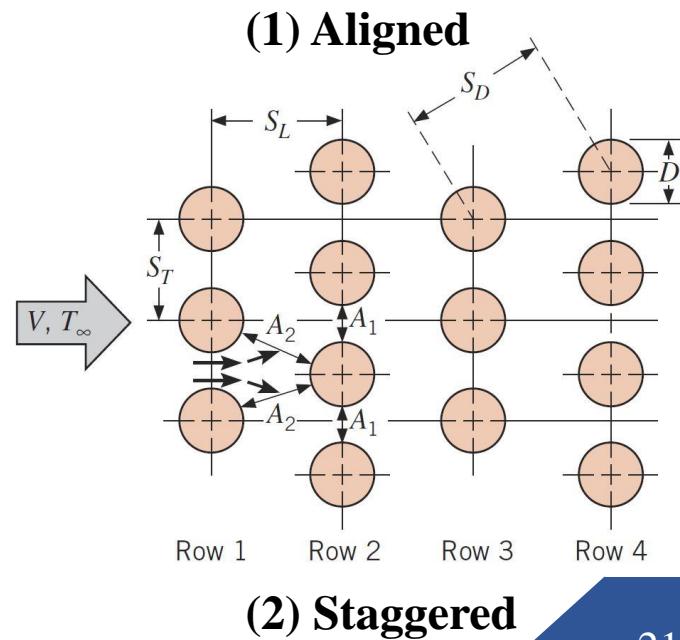
➤ 特征长度: D

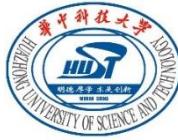
$$Re = \frac{u_{max} D}{\nu}$$

➤ 定性温度:

$$t = \frac{T_\infty + T_{out}}{2}$$

Note: Pr_w 按壁面温度 t_w 取值





3 流体横向绕流光管管束的对流换热

平均表面传热系数

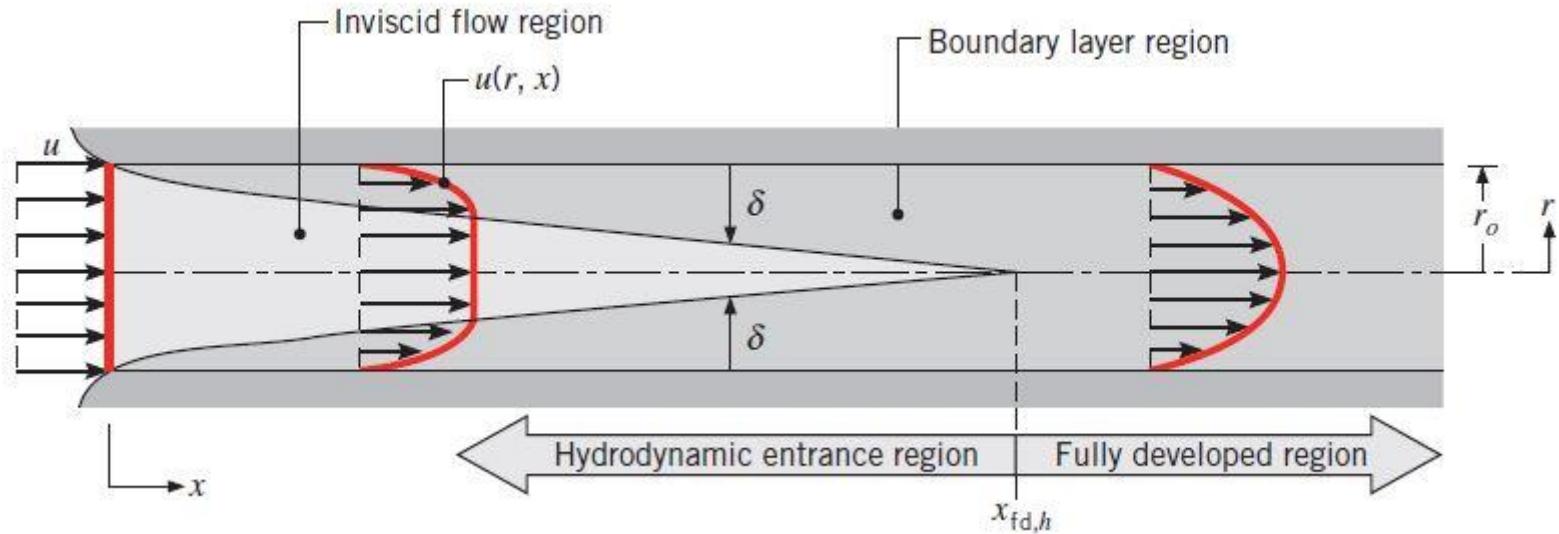
$$Nu = c Re^n Pr^m \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^p \left(\frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0.25} \varepsilon_z \varepsilon_\beta$$

c 、 n 、 m 及 p 的具体数值列于表5-2中。

- ε_z 为管排数目的修正系数：考虑了管子排列和管排数目对换热的影响，见表5-3。
- 如果流体流动的方向与管束不垂直，也就是流体对管子的冲击角 $\beta < 90^\circ$ 的情况，在进行换热计算时需要修正，修正系数 ε_β 。表5-4给出了不同冲击角对应的修正系数值。

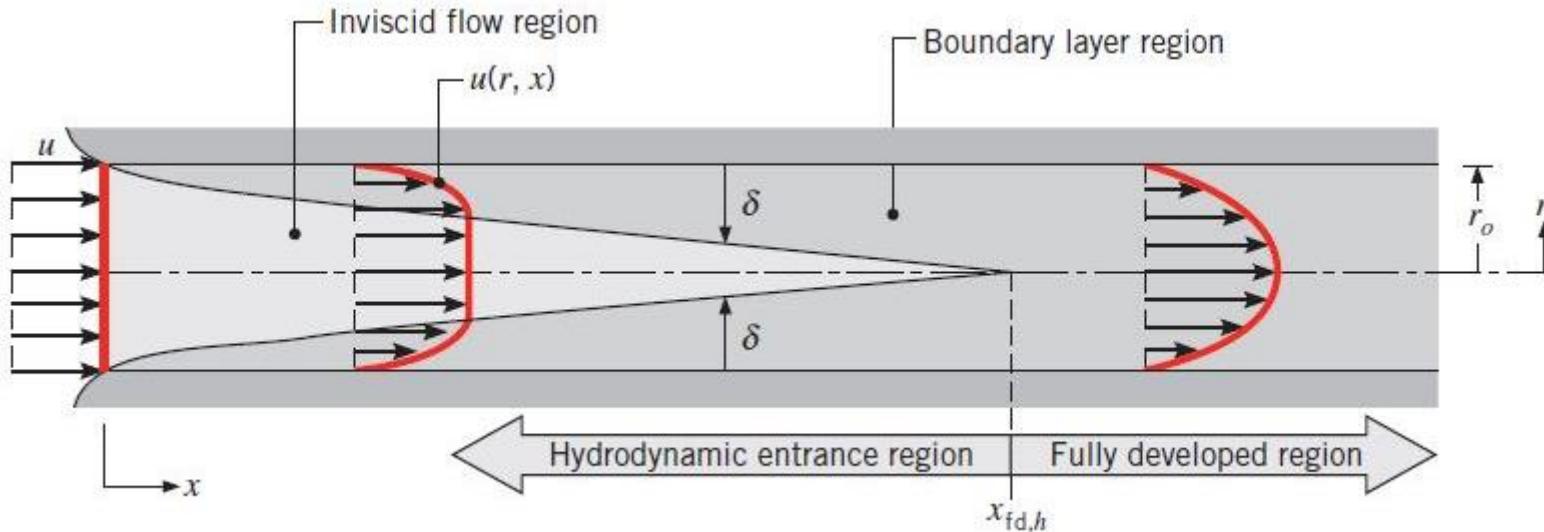
§ 5-2 管内流体强制对流换热

1 管内流动换热特点

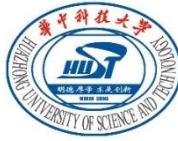


属于内部流动过程，流动存在着两个明显的流动区段，即流动进口（或发展）区段和流动充分发展区段。

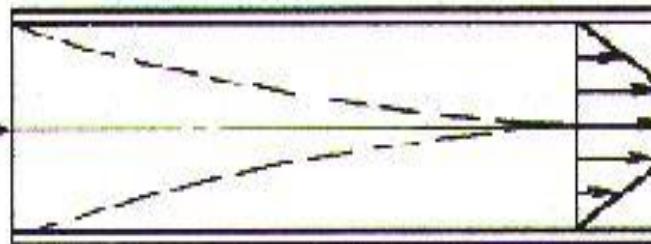
1 管内流动换热特点



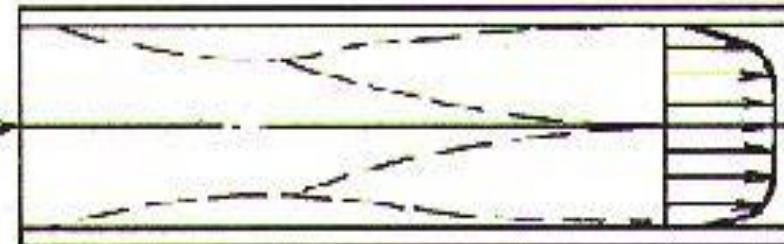
- **进口区：**流动和热边界层从零开始增长，直到汇合至管子中心线。管子进口到边界层汇合处的这段管长内的流动称为管内流动进口区
- **充分发展区：**边界层汇合于管子中心线以后的区域，即进入定型流动的区域。



1 管内流动换热特点



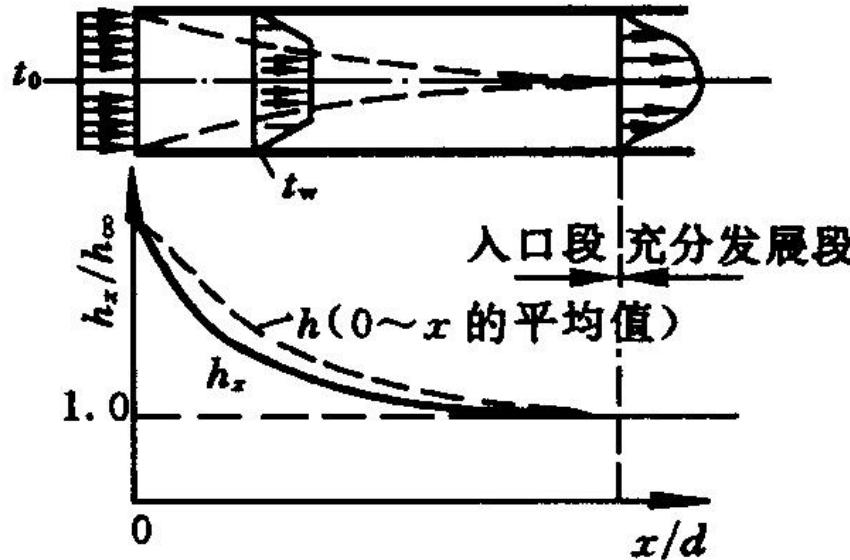
(1) 层流



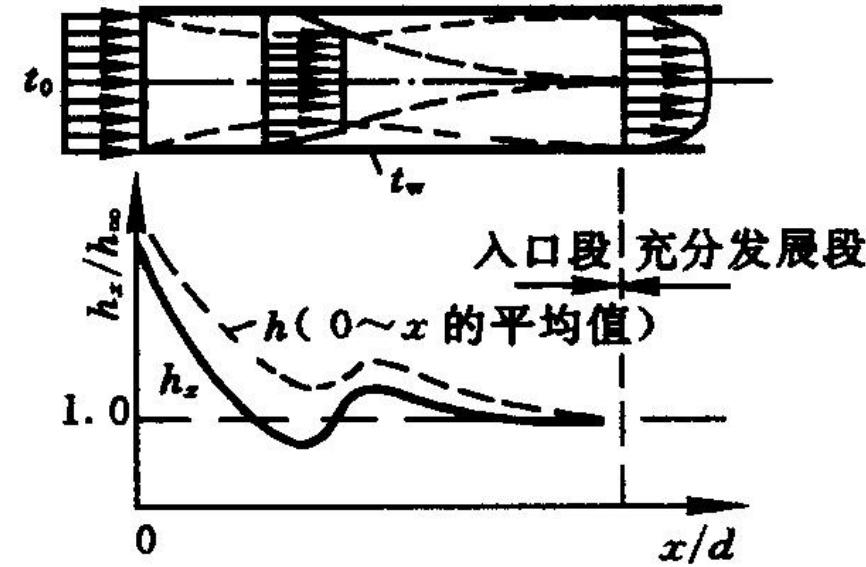
(2) 湍流

Re	边界层在管中心 汇合时流态	充分发展区 流态	管内流动 流态
$Re < 2200$	层流	层流	层流
$Re > 10^4$	湍流	湍流	湍流
$2200 < Re < 10^4$	过渡流	过渡流	过渡流

1 管内流动换热特点



(a) 层流



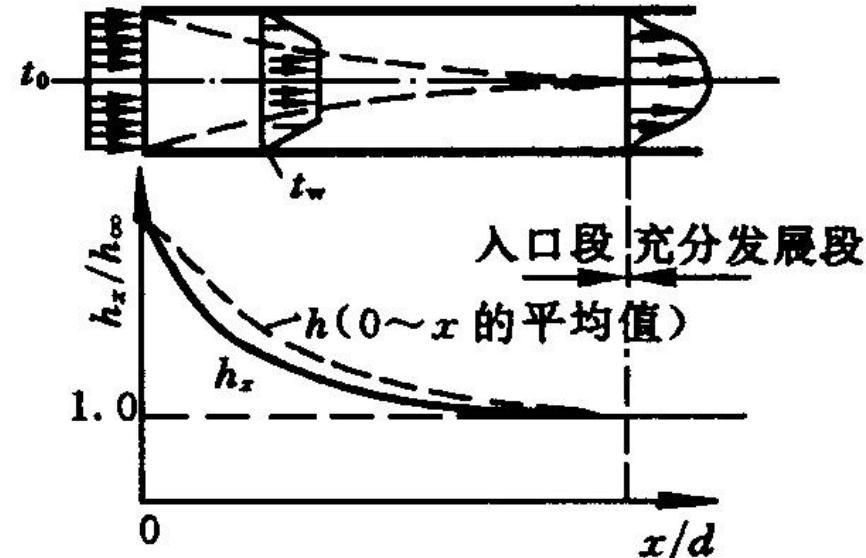
(b) 湍流

同理：当流体温度和管壁温度不同时，随着流体流动也有热边界层在发展，最后也会在管中心汇合，从而进入热充分发展的流动换热区域，汇合之前的区域称为热进口区段。

1 管内流动换热特点

① 层流

- ◆ 入口段向充分发展段过渡，边界层变厚，壁面速度梯度减小，因此，入口段的换热较强；



(a) 层流

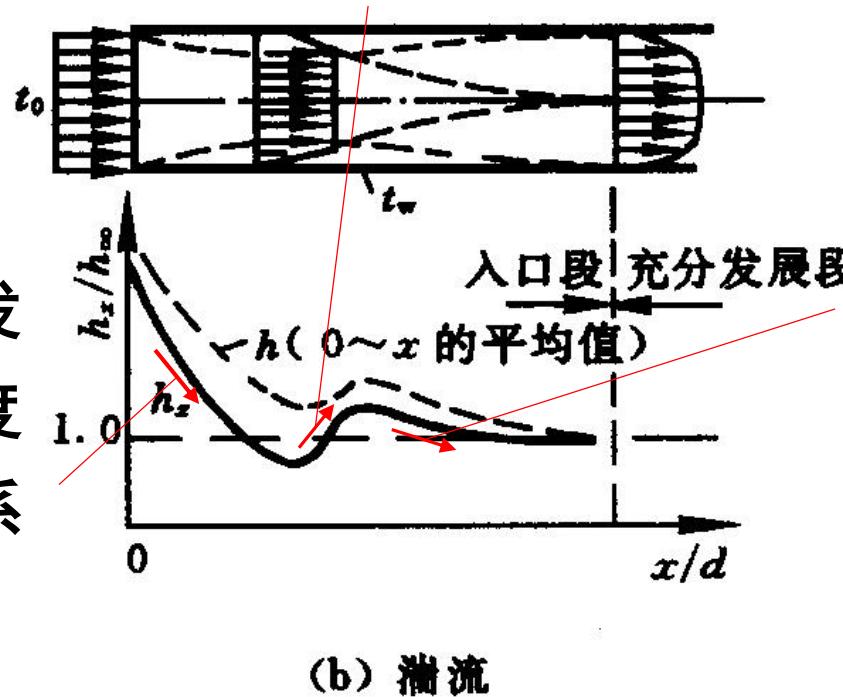
- ◆ 表面传热系数的平均值一直高于局部表面传热系数。

1 管内流动换热特点

② 湍流

随着层流边界层发展，壁面速度梯度减小，表面传热系数减小；

边界层从层流向湍流转捩，脉动增加，传热增强；

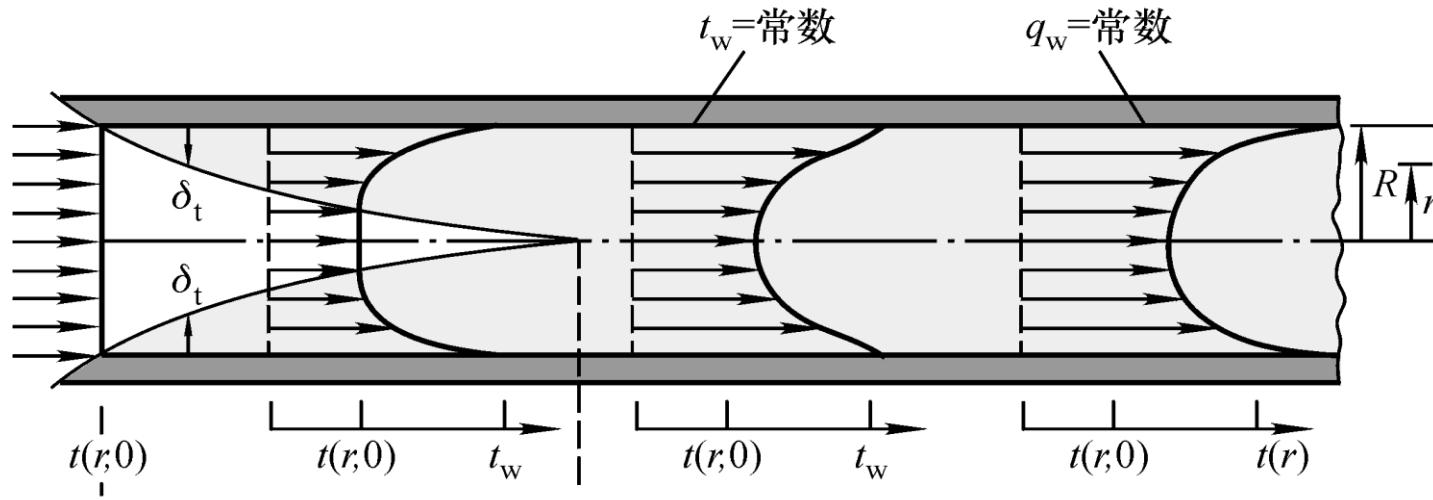


随着湍流边界层发展，表面传热系数减小；

- ◆ 紊流的当地局部表面传热系数有可能小于充分发展段的表面传热系数（圆角入口）。



1 管内流动换热特点



流动进口段长度：

$$\frac{L}{d} \approx 0.06 Re$$

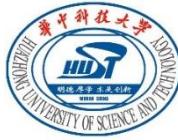
$$\frac{L_{t_w}^{t_w}}{d} \approx 0.055 Re Pr$$

热进口段长度：

$$\frac{L_{t_w}^{q_w}}{d} \approx 0.07 Re Pr$$

湍流

$$\frac{L}{d} \approx 60$$



1 管内流动换热特点—流体温度变化

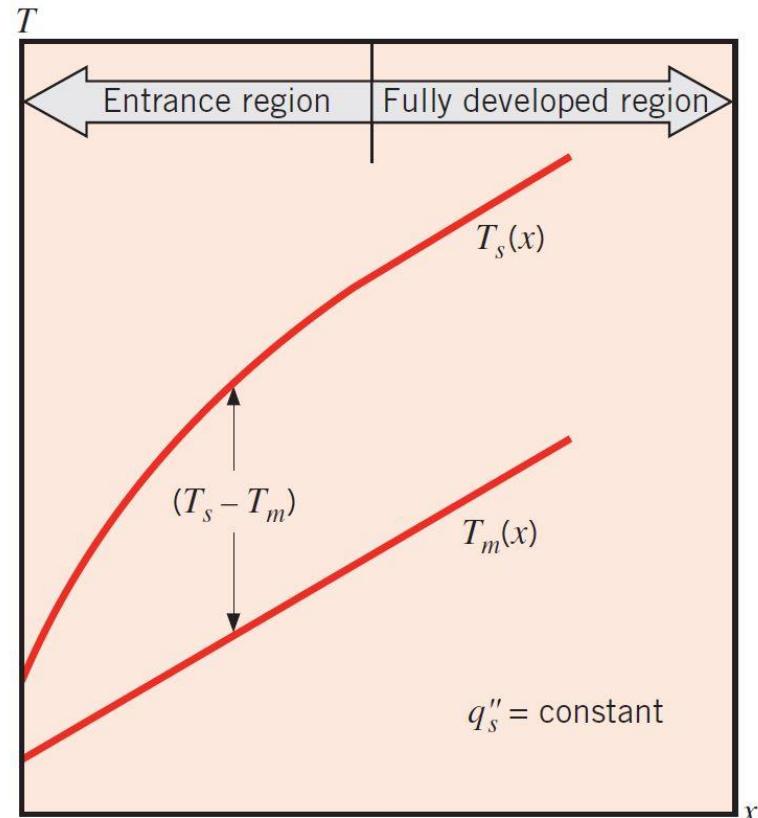
两种典型热边界条件—均匀壁温和均匀热流。

① 均匀热流

$$t_{f(x)} = t_f + \frac{4q''_s}{\rho c_p u_m d} x$$

管内流体截面上的平均温度：

$$t_f = \frac{\int_{A_c} \rho c_p u t dA}{\int_{A_c} \rho c_p u dA}$$



- 流体温度随流动方向线性变化，且与管壁之间的温差保持不变。



1 管内流动换热特点—流体温度变化

② 均匀壁温

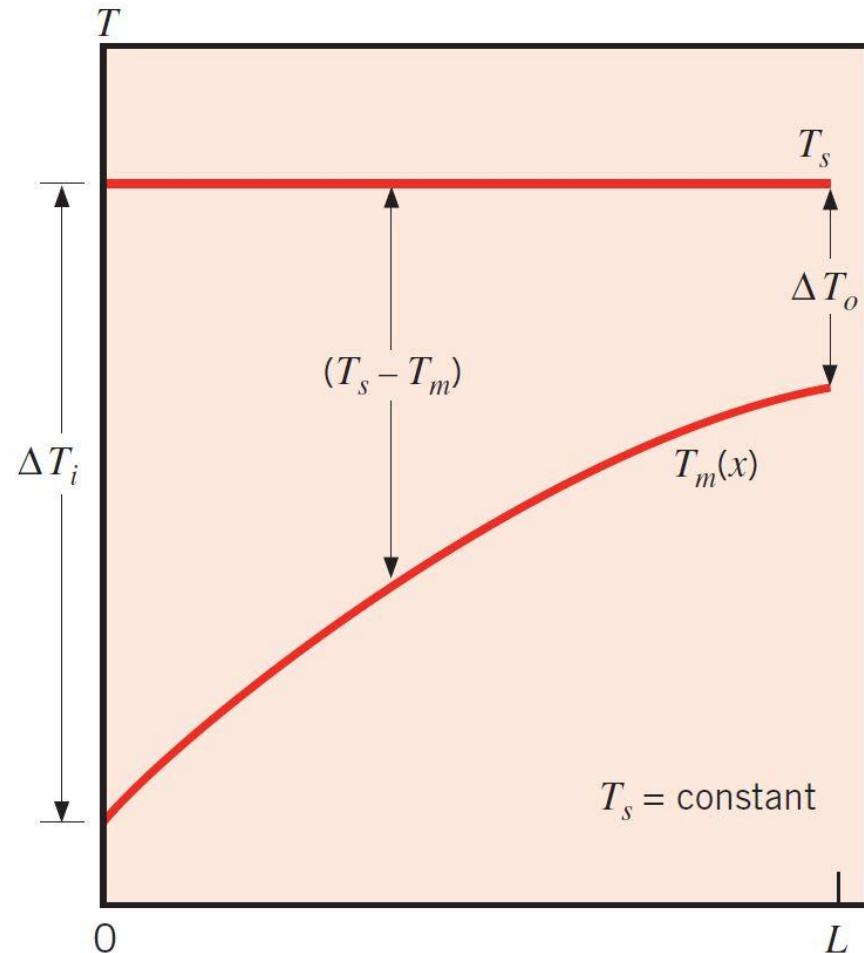
$$t_{f(x)} = t_w + (t_f - t_w) \exp\left(-\frac{4\bar{h}_x x}{\rho c_p u_m d}\right)$$

利用在整个管长内的流动换热平衡关系式：

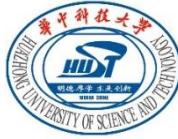
$$\frac{\pi d^2}{4} \rho c_p u_m (t_f - t_f) = \bar{h}_l \pi d l \Delta t_m$$

计算平均表面传热系数的平均温差表达式：

$$\Delta t_m = \frac{(t_f - t_w) - (t_f - t_w)}{\ln \frac{t_f - t_w}{t_f - t_w}}$$



指数规律变化



1 管内流动换热特点—流体温度变化

② 均匀壁温

$$\Delta t_m = \frac{\left(t_f'' - t_w\right) - \left(t_f' - t_w\right)}{\ln \frac{t_f'' - t_w}{t_f' - t_w}}$$

其中, t_f' , t_f'' 分别为进口、出口截面上的平均温度。

当出口与进口截面上的温差比满足,

$$0.5 < \frac{t_f'' - t_w}{t_f' - t_w} < 2$$

可按算术平均温差计算, 两种温差间的相对误差在 4% 以内。

$$\Delta t_m = t_f - t_w \quad t_f = \frac{\left(t_f' + t_f''\right)}{2}$$



1 管内流动换热特点—特征参数

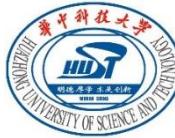
特征速度：一般多取截面平均流速。

$$u_m = \frac{1}{A} \int_A u dA$$

定性温度：进出口截面平均温度。

$$t_f = \frac{\int_{A_c} \rho c_p u t dA}{\int_{A_c} \rho c_p u dA} \quad t_m = \frac{t'_f + t''_f}{2}$$

特征尺寸：管内径



2 管内强制对流换热准则关系式

① 管内层流对流换热（充分发展） $Re < 2200$

	均匀热流	均匀壁温
特征速度	截面平均速度	
定性温度	进出口截面平均温度	
温差	$\Delta t_m = (t_w - t_f)$	$\Delta t_m = \frac{t_f'' - t_f'}{\ln \left(\frac{t_w - t_f'}{t_w - t_f''} \right)}$
Nu	4.36	3.66



2 管内强制对流换热准则关系式

TABLE 8.1 Nusselt numbers and friction factors for fully developed laminar flow in tubes of differing cross section

Cross Section	$\frac{b}{a}$	$Nu_D \equiv \frac{hD_h}{k}$		
		(Uniform q_s'')	(Uniform T_s)	Re_{D_h}
	—	4.36	3.66	64
	1.0	3.61	2.98	57
	1.43	3.73	3.08	59
	2.0	4.12	3.39	62
	3.0	4.79	3.96	69
	4.0	5.33	4.44	73
	8.0	6.49	5.60	82
	∞	8.23	7.54	96
	∞	5.39	4.86	96
	—	3.11	2.49	53

不同的管截面形状、不同边界条件层流充分发展下的 Nu



2 管内强制对流换热准则关系式

① 管内层流对流换热(考虑入口效应) $Re < 2200$

由于层流时流体的进口段比较长, 因而管长的影响可直接加入计算公式中。这里给出 Sieder-Tate 的准则关系式:

$$Nu = 1.86 \left(Re Pr \frac{d}{l} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_f}{\mu_w} \right)^{0.14}$$

流体在表面温
度下的粘度

适用范围: $Re < 2200$, $Pr > 0.6$, $Re \cdot Pr \cdot d/L > 10$, 用于平直管。特征参数相同。



2 管内强制对流换热准则关系式

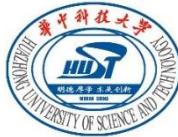
② 管内过渡流对流换热 $2200 < Re < 10^4$

该流区流动十分不稳定。工程上常常避免采用管内过渡流动区段。

➤ 对于气体：

$$Nu = 0.0214 \left(Re^{0.8} - 100 \right) Pr^{0.4} \left[1 + \left(\frac{d}{l} \right)^{2/3} \right] \left(\frac{T_f}{T_w} \right)^{0.45}$$

$$Re = 2200 \sim 10^4, \quad Pr = 0.6 \sim 6.5, \quad \frac{T_f}{T_w} = 0.5 \sim 1.5$$



2 管内强制对流换热准则关系式

② 管内过渡流对流换热

$$2200 < Re < 10^4$$

➤ 对于液体：

$$Nu = 0.012 \left(Re^{0.87} - 280 \right) Pr^{0.4} \left[1 + \left(\frac{d}{l} \right)^{2/3} \right] \left(\frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0.11}$$

$$Re = 2300 \sim 10^4, \quad Pr = 1.5 \sim 500, \quad \frac{Pr_f}{Pr_w} = 0.05 \sim 20$$



2 管内强制对流换热准则关系式

③ 管内湍流对流换热

$$Re > 10^4$$

采用迪图斯-贝尔特 (Dittus-Boelter) 准则关系式：

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^n$$

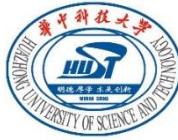
- 加热流体时, $n=0.4$; 冷却流体时, $n=0.3$
- 适用范围
$$\begin{cases} Re_f = 10^4 - 1.2 \times 10^5 \\ Pr_f = 0.7 - 120 \\ l/d > 60 \end{cases} \longrightarrow \text{充分发展}$$
- 小温差：对于气体 $\leq 50^{\circ}\text{C}$; 对于水 $\leq 20\text{~}30^{\circ}\text{C}$; 对于油类流体 $\leq 10^{\circ}\text{C}$ 。



2 管内强制对流换热准则关系式

Notes:

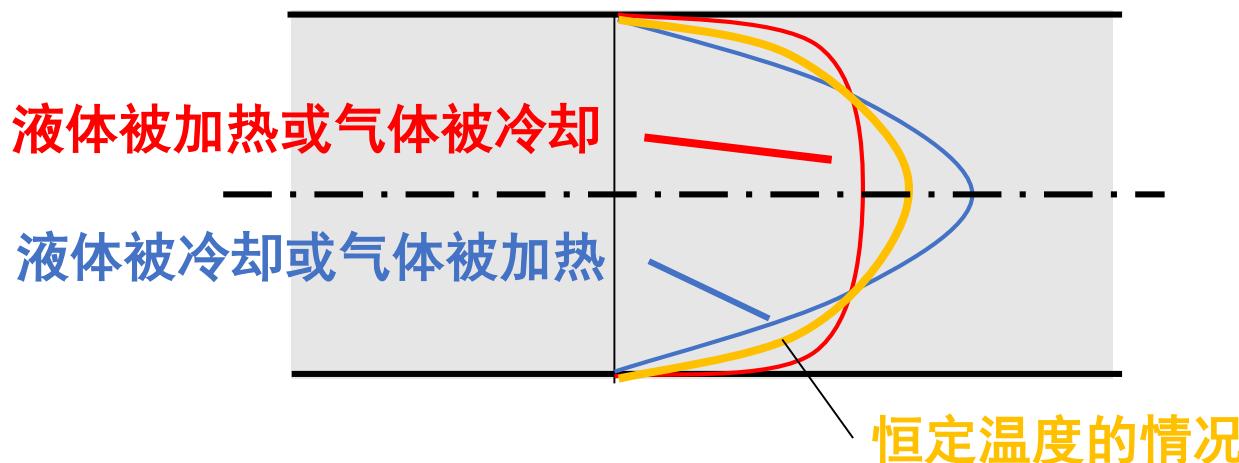
- ◆ 均须认清准则关系式的**应用条件和范围**（**特征尺度、定性温度、适用范围**），适用范围是不能随便外推的；
- ◆ 大多数准则关系式的偏差都在20%以内；
- ◆ 旺盛紊流关联式计算过渡区对流换热偏大；
- ◆ 准确与方便是一对矛盾，将气体与液体的换热分开、加物性修正都会使公式复杂化，但其准确度会提高；
- ◆ 准则关系式通常是对**充分发展段直管**整理出来的，使用时要针对具体情况作修正和扩展。



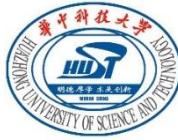
2 管内强制对流换热准则关系式

④ 关联式修正-物性修正

当流体与管壁之间的温差较大时，流体粘性随温度变化较大导致管截面上流体速度的分布也发生改变，进而影响流体与管壁之间的热量传递和交换。

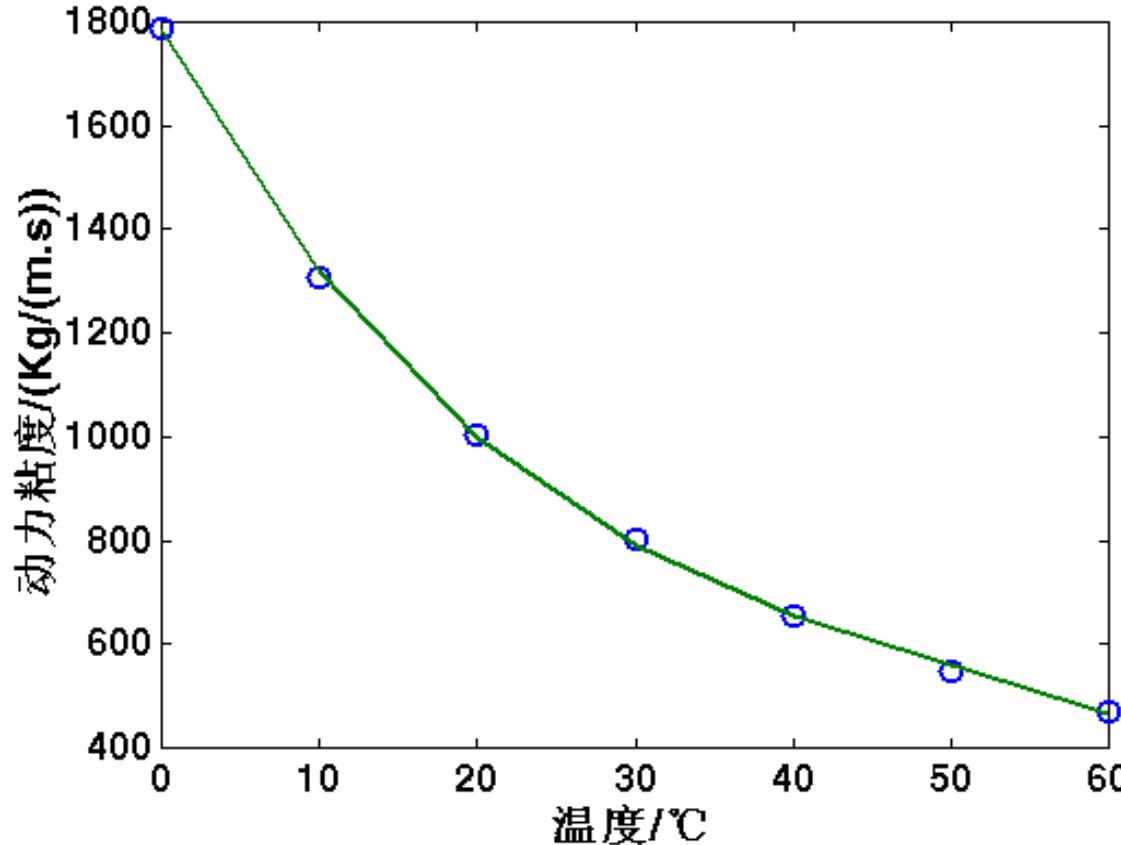


管内流动温度对速度分布的影响示意图

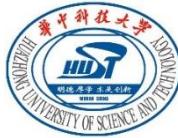


2 管内强制对流换热准则关系式

④ 关联式修正-物性修正



水的动力粘度与温度 (°C) 之间的关系



2 管内强制对流换热准则关系式

④ 关联式修正-物性修正

因此，计算换热时准则式右边要乘以物性修正项。

➤ 对于液体乘以

$$\left(\mu_f / \mu_w \right)^n$$

被加热 $n=0.11$
被冷却 $n=0.25$

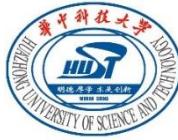
物性量的下标表示取值的定性温度。

➤ 对于气体乘以

$$\left(T_f / T_w \right)^n$$

被加热 $n=0.55$
被冷却 $n=0.0$

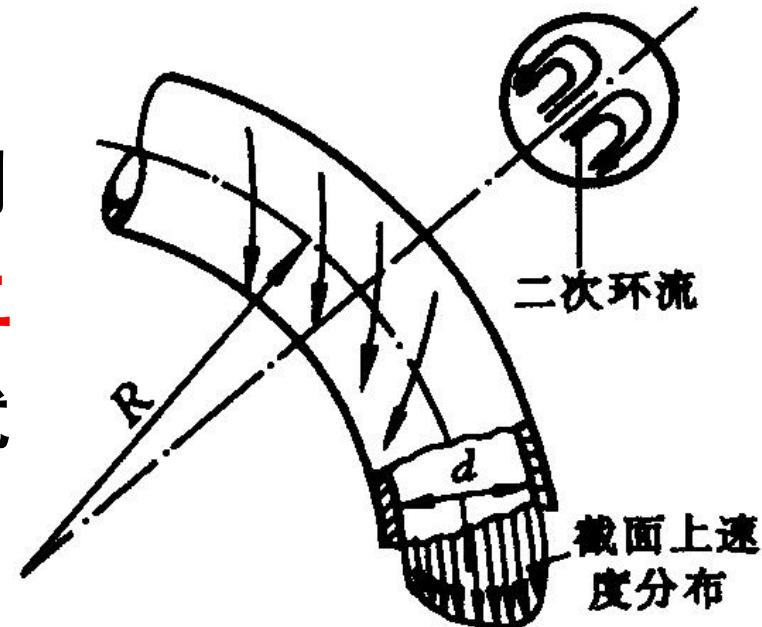
温度用大写字符是表示取绝对温标下的数值。



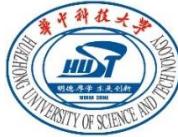
2 管内强制对流换热准则关系式

④ 关联式修正-弯管修正

弯曲的管道中流动的流体，在弯曲处由于**离心力**的作用会形成**垂直于流动方向的二次流动**，从而加强流体的扰动，带来换热的增强。



为什么工业上强化换热常常会采用螺旋管？



2 管内强制对流换热准则关系式

④ 关联式修正-弯管修正

工程上先按直管算出平均 Nu , 再乘以修正系数

气体:

$$c_r = 1 + 1.77 \frac{d}{R}$$

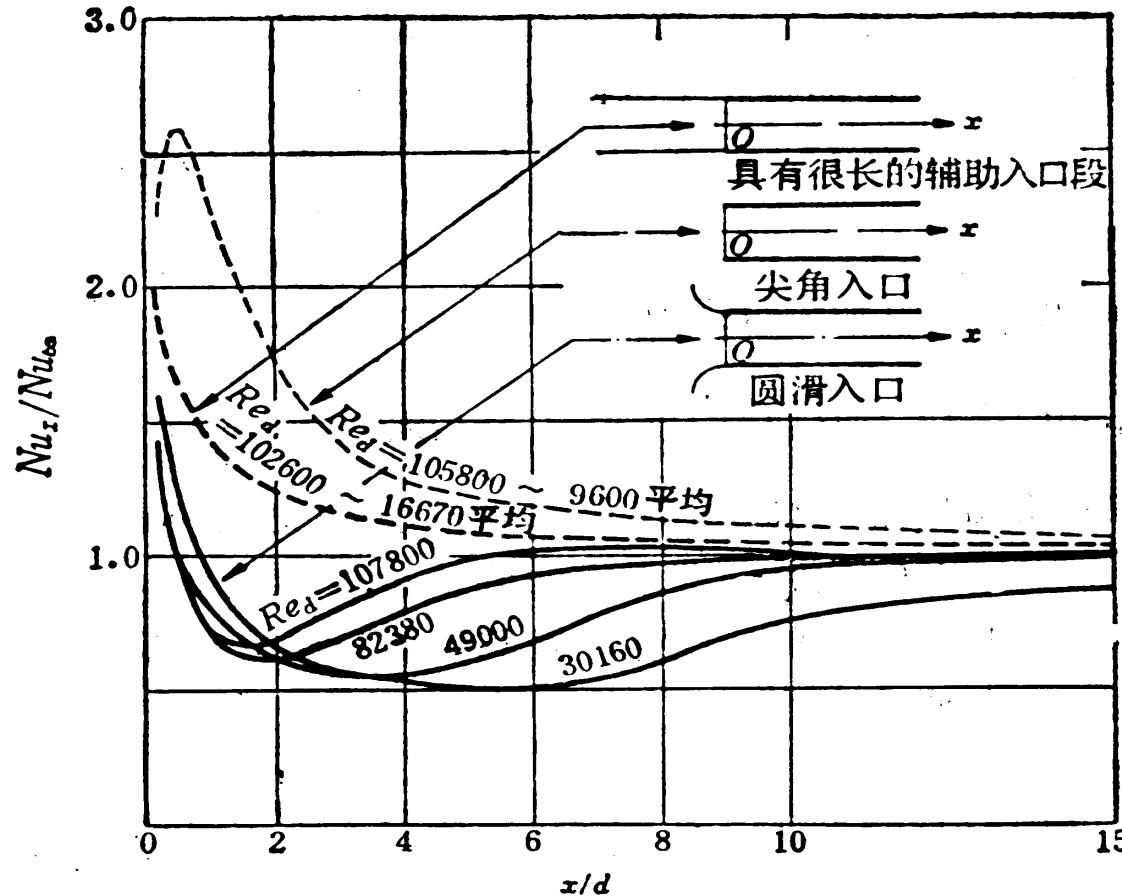
液体:

$$c_r = 1 + 10.3 \left(\frac{d}{R} \right)^3$$

其中: d —管子直径; R —弯管的曲率半径。

2 管内强制对流换热准则关系式

④ 关联式修正-短管修正



不同的入口条件对入口段局部表面传热系数的影响



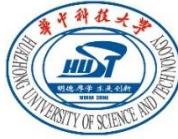
2 管内强制对流换热准则关系式

④ 关联式修正-短管修正

当管子的长径比 $l/d < 60$ 时，属于短管内流动换热，进口段的影响不能忽视。此时亦应在按照长管计算出结果的基础上乘以相应的修正系数 C_l 。

$$C_l = 1 + \left(\frac{d}{l} \right)^{0.7}$$

- 如果准则关系式中含有 d/l ，则可认为已经考虑了入口段的影响。
- 当 $l/d = 60$ 时， $C_l = 1.057$ ，不计入口段影响，带来约 6% 的误差。

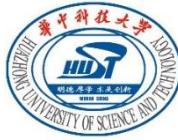


2 管内强制对流换热准则关系式

④ 关联式修正-非圆截面管道修正

采用当量直径 (水力直径) $d_e = \frac{4A_e}{P}$

- 对于长方形通道，采用当量直径可获得满意的结果，但当长宽比较大时会产生较大误差，有尖角时更是如此。
- 对微通道流动换热问题，若液体中有残余气体，则不能简单采用当量直径的概念。



2 管内强制对流换热准则关系式

④ 关联式修正

湍流准则式	$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^n c_l c_t c_r$			
短管效应	$c_l = 1 + \left(\frac{d}{l} \right)^{0.7}$			边界层薄， 利于强化传热
弯曲管	气体	$c_r = 1 + 1.77 \frac{d}{R}$		二次环流， 破坏边界层
	液体	$c_r = 1 + 10.3 \left(\frac{d}{R} \right)^3$		
大温差	气体	$c_t = \left(\frac{T_f}{T_w} \right)^n$	被加热	$n=0.55$
			被冷却	$n=0$
	液体	$c_t = \left(\frac{\mu_f}{\mu_w} \right)^n$	被加热	$n=0.11$
			被冷却	$n=0.25$



3 增强对流换热的方法

利用入口效应
(层流)

破坏边界层

扭曲管

微肋管

...

$$Q = h \cdot A \cdot \Delta t$$

$$Nu = c Re^m Pr^n \quad (m > 0, n > 0)$$

$$h \sim u^m d^{m-1} \quad (m > 0)$$

增大换热面积

增加流速

减小管径



管内换热问题的求解一般方法：

定性温度



流体物性参数



定性尺寸、定性速度

Re/Gr



选择准则关系式，计算 Nu

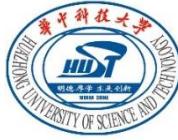


计算换热系数 h



能量守恒

计算待求量（温度、管长）



4 例题

空气以 2m/s的速度在内径为10 mm的管内流动，入口处空气的温度为 20°C，管壁温度为 120°C，试确定将空气加热至 60°C所需管子的长度。

解：

定性温度为： $t_f = (20+60)/2=40^\circ\text{C}$ ，查出空气的物性参数为：

$\rho = 1.128 \text{ kg/m}^3$ ， $c_p = 1.005 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$ ， $\lambda = 2.76 \times 10^{-2} \text{ W/m}\cdot\text{^\circ C}$ ， $\mu_f = 19.1 \times 10^{-6} \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ ， $Pr = 0.699$ 。而当 $t_w = 120^\circ\text{C}$ 时，查得 $\mu_w = 22.8 \times 10^{-6} \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ 。



5 例题

雷诺数 $Re=1.18\times10^3<2200$, 为层流。

$$Nu = 1.86 \left(Re Pr \frac{d}{l} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_f}{\mu_w} \right)^{0.14} \quad (1)$$

适用范围: $\cancel{Re<2200, \ Pr>0.6, \ Re \ Pr \ d/L>10}$, 用于平直管。

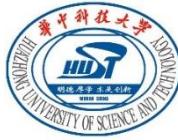


假设: $L<0.825 \text{ m}$

根据 (1) 计算得: $h=10.12L^{-1/3}$ 。

由能量平衡有:

$$h\pi dL(t_w - t_f) = u_m \frac{\pi d^2}{4} \rho c_p (t_f - t_f')$$



5 例题

代入数据得 $hL=2.83$

比较上述两步得到的结果，有 $10.12L^{-1/3} L=2.83$ ，最后解得 $L=0.148$ m。由于 $L < 0.825$ m，前述假设是正确的。

Note: 对流传热的计算，常常需要采用迭代方法，原因当出口温度未知时，物性难以确定。通常情况下，**先假定出口温度，计算物性，再计算 Nu 和出口温度。二者不符时重复计算，直到合适为止。**



§ 5-3 自然对流换热

(Natural/Free convection)

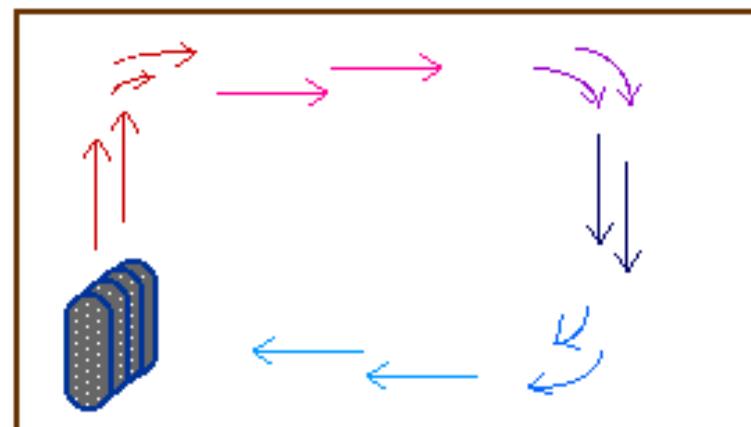
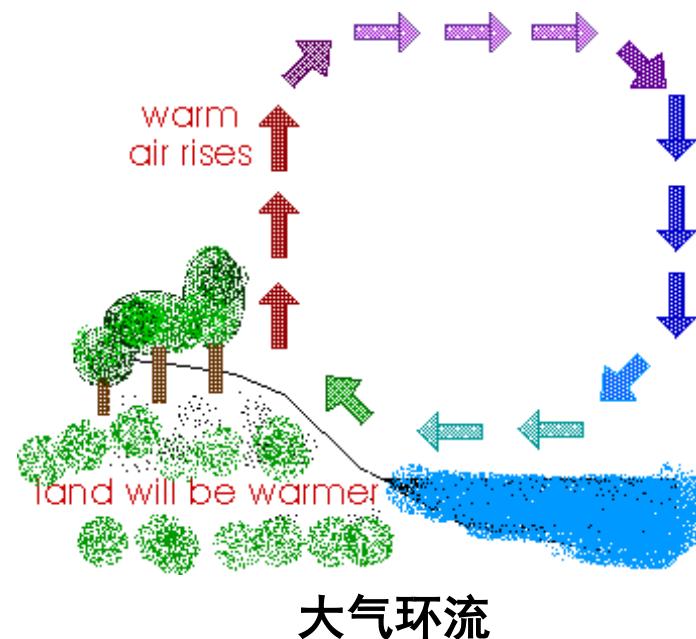
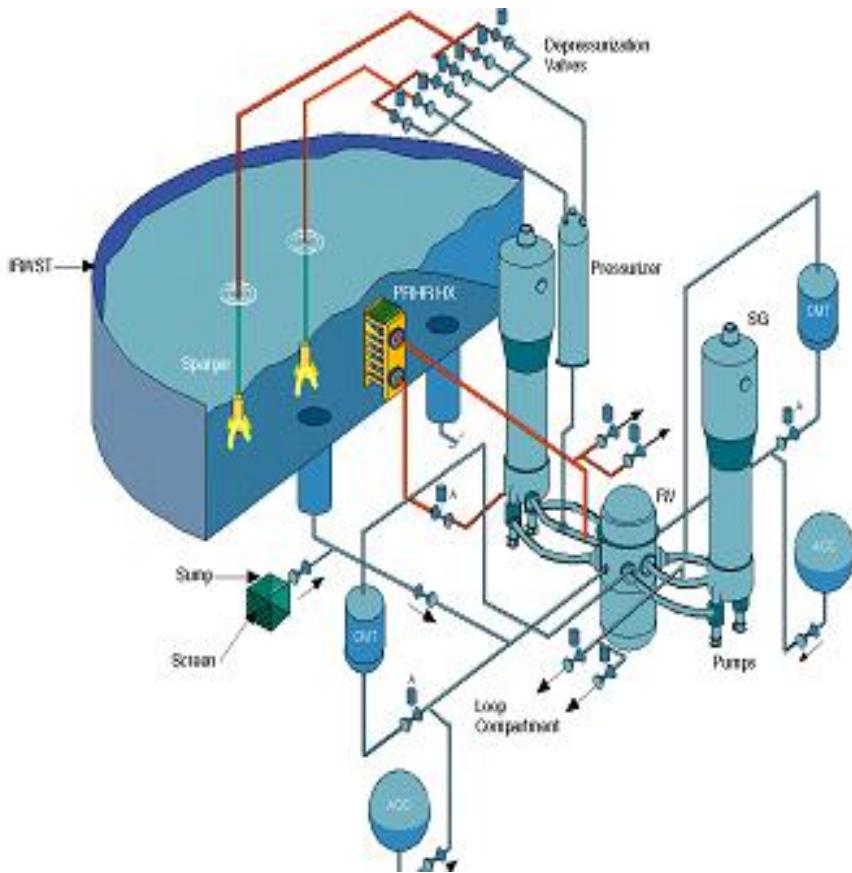
由流体的温差或温度场的不均匀性引起的流体流动，称为自然对流或自由对流。

- **特点：**没有外力驱动（温差驱动），换热比受迫对流弱得多。
- **应用：**电子设备的冷却；建筑物供暖；火灾；反应堆冷却与安全系统；大气物理；大型空冷器，等等。

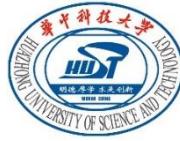


1 概述与分类

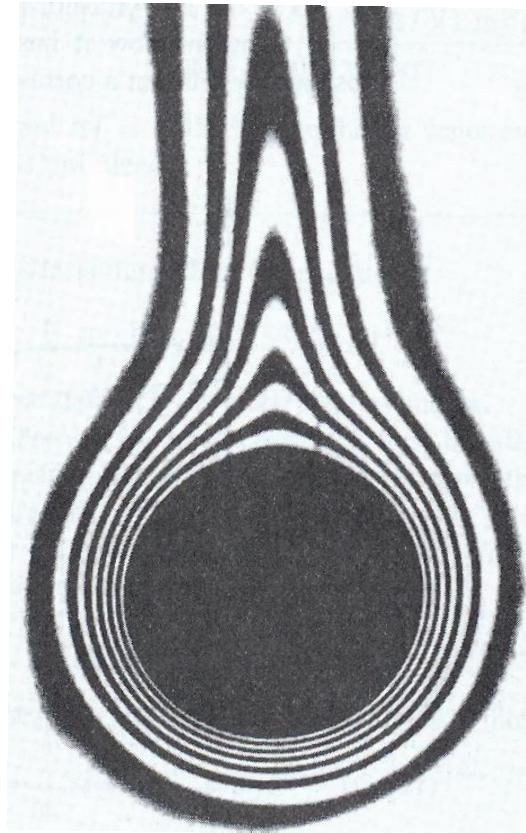
四代核电技术中的固有安全系统



暖气片对室内空气的加温

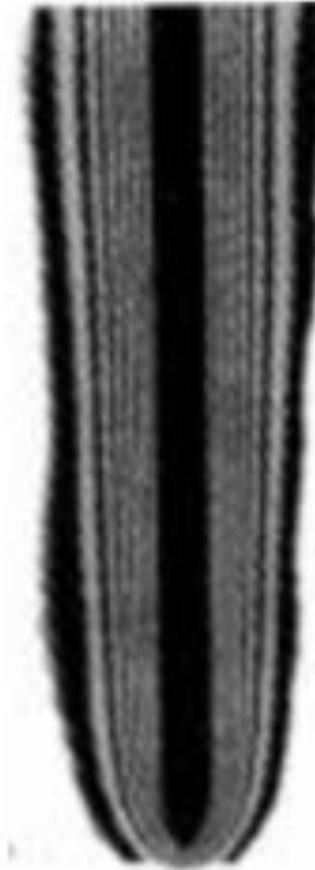


1 概述与分类



水平圆柱自然对流
光学图像

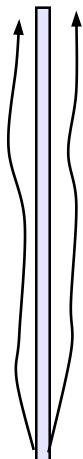
竖壁自然对流的光衍
射照片



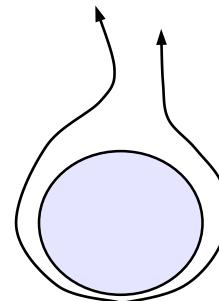
1 概述与分类

按流体所在空间及固壁边界层发展特性分类：

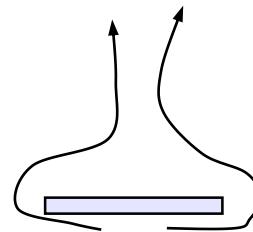
无限大空间自然对流



1. 竖板



2. 水平管

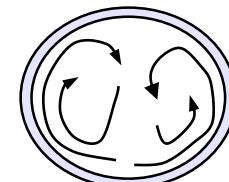


3. 水平板

有限空间自然对流



4. 竖直夹层

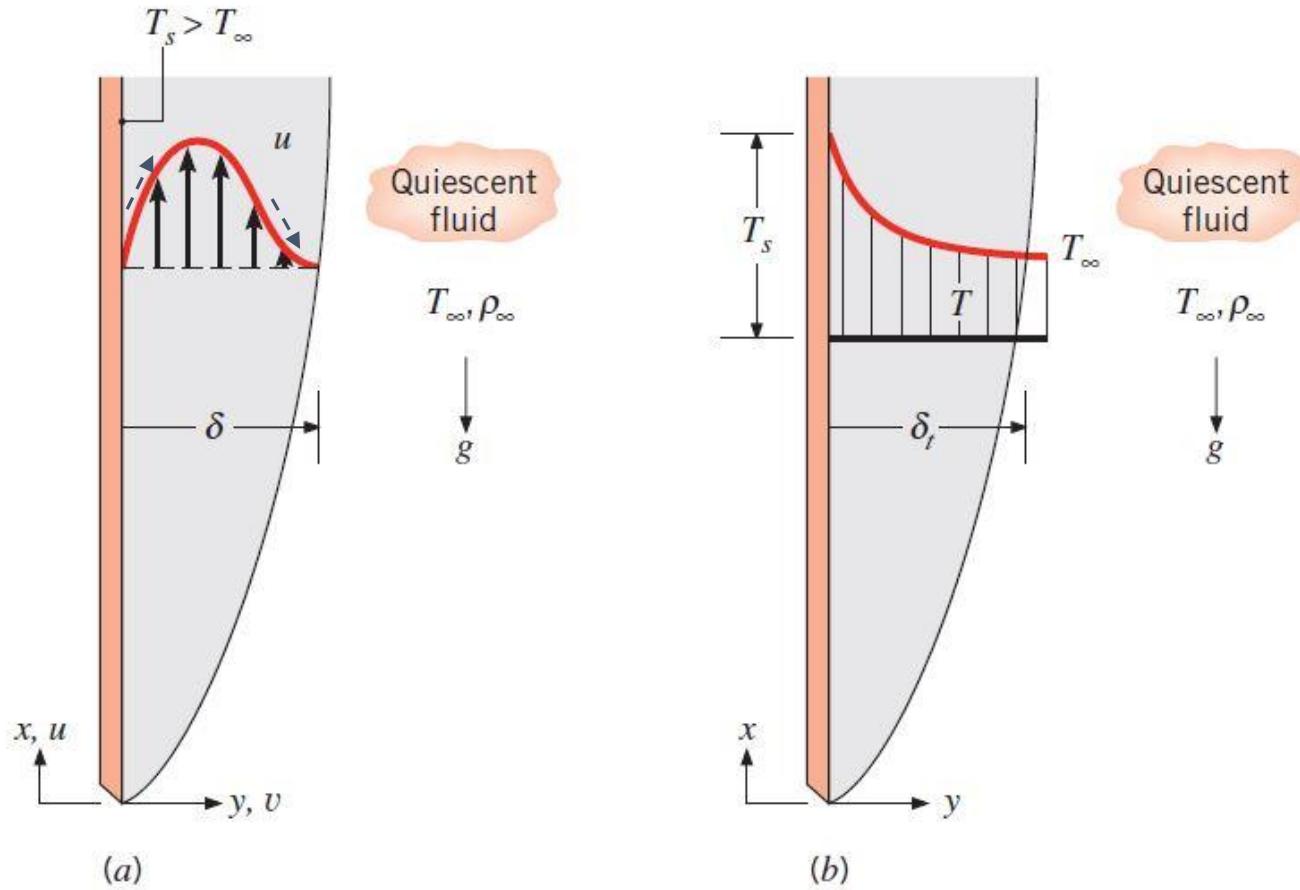


5. 横圆管内侧



2 大空间自然对流的流动与换热特征

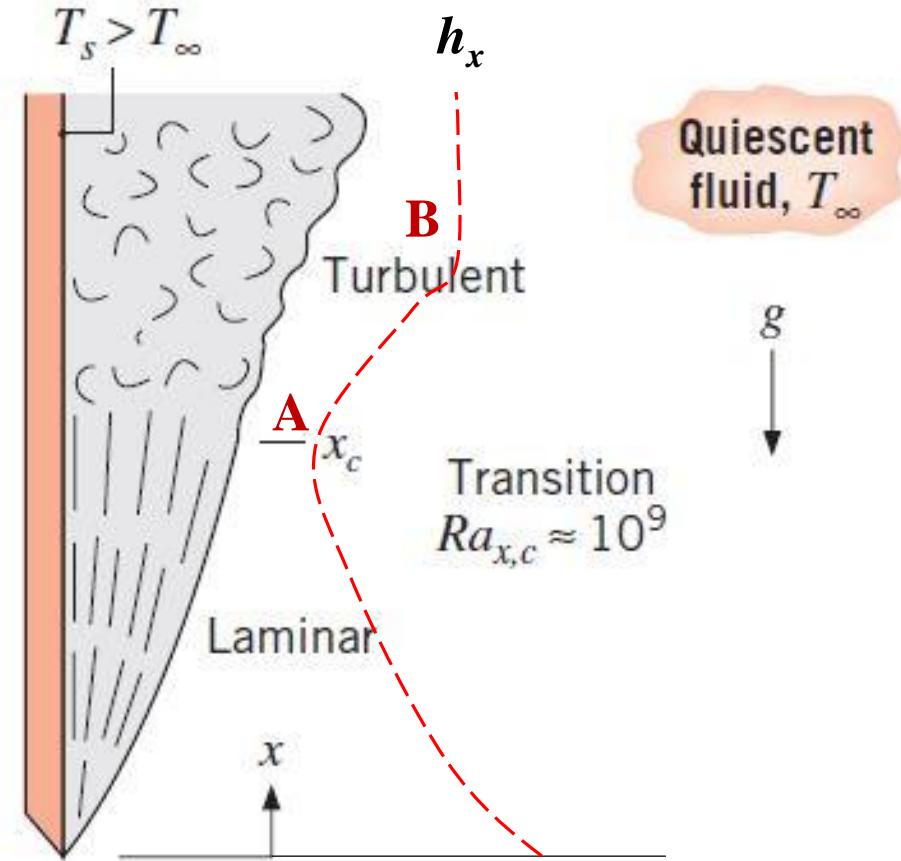
等温竖板的温度为 T_s ，大空间空气处于静止状态，即 $u_\infty=0$ ，空气温度为 T_∞ ，且 $T_s > T_\infty$ ，即平板被冷却。





2 大空间自然对流的流动与换热特征

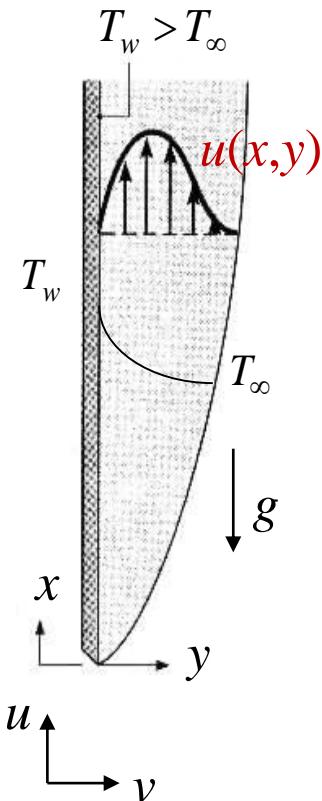
- 层流时换热的强弱完全取决于薄层的厚度
- A处：开始向湍流过渡
- B处：旺盛湍流
- 湍流时局部表面传热系数几乎是个常量。





3 竖直平板自然对流换热的微分方程

大空间条件下的竖板自然对流换热是属于边界层流动换热的类型。



边界层流动换热微分方程组

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \boxed{F_x} - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

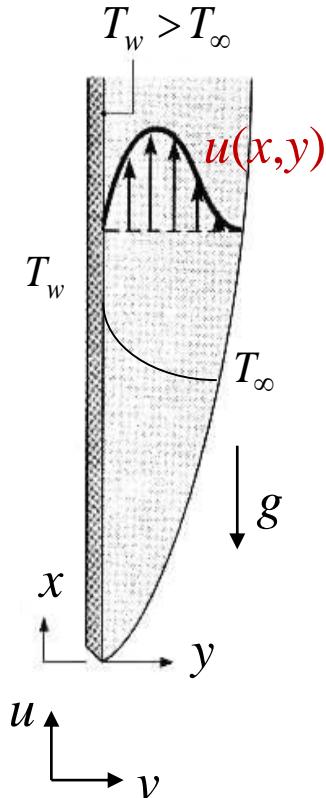
$$\rho c_p \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)$$

$$\boxed{F_x = -\rho g}$$



3 竖直平板自然对流换热的微分方程

自然对流的特点



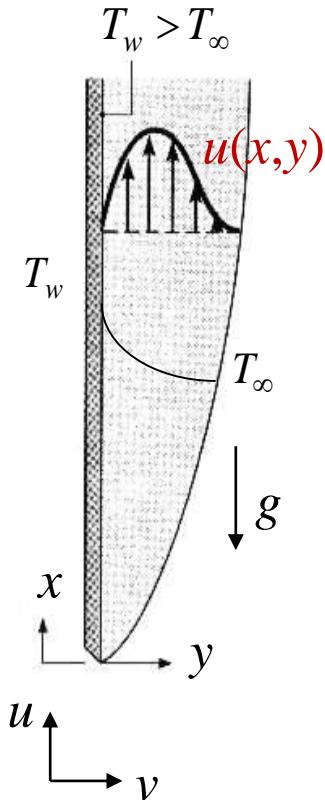
- 流动是由温度差导致密度差从而产生**浮升力**引起的，体积力项必须考虑；
- 密度是**温度的函数**，不再是常数；
- 动量方程中包含温度（密度是温度的函数），动量方程与能量方程是耦合的；
- 求解方程组需要进一步简化；



3 竖直平板自然对流换热的微分方程

Boussinesq 近似

只考虑在动量方程中的浮升力项中密度的变化，其它物性及别处的密度均作常数处理。



边界层流动换热微分方程组

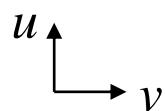
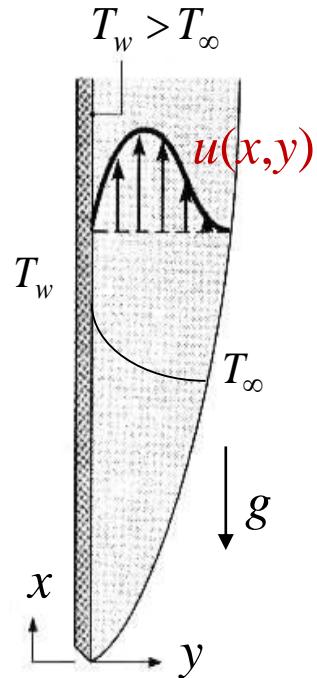
$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left(\mu \left(\frac{\partial u \partial u}{\partial x \partial x} + v \frac{\partial u \partial u}{\partial y \partial y} \right) \right) = \rho g \rho g \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial^2 \partial u}{\partial y \partial y} \right)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial y}$$



3 竖直平板自然对流换热的微分方程



边界层流动换热微分方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\rho g - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

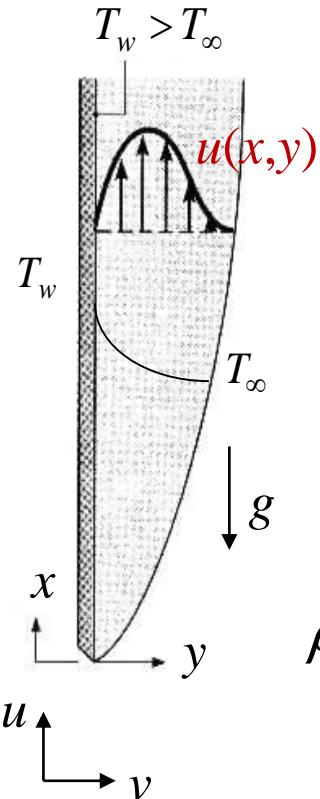
薄层外
 $u=0, v=0$

代入动量方程

$$\frac{dp}{dx} = -\rho_\infty g$$



3 竖直平板自然对流换热的微分方程



自然对流的浮升力

自然对流换热边界层微分方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = (\rho_\infty - \rho) g + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho \beta \theta + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

引入体积膨胀系数 β , 温差不大时, 采用线性近似:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \approx -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho_\infty - \rho}{T_\infty - T} \right) = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho \theta} \quad \rightarrow \quad \rho_\infty - \rho = \rho \beta \theta$$



3 竖直平板自然对流换热的微分方程

边界层流动换热微分方程组

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = F_x - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)$$

自然对流换热边界层微分方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho \beta \theta + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

根据微分方程获得自然对流准则式：

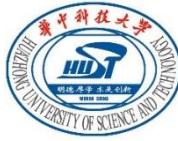


自然对流动量微分方程



自然对流的准则方程

无量纲相似分析法



3 竖直平板自然对流换热的微分方程

边界层流动换热微分方程组

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = F_x - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)$$

自然对流换热边界层微分方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho \beta \theta + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

引入
变量
参考
值

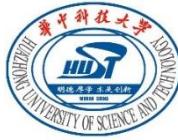
竖板高度: L

特征流速: u_0

温度差: $\theta_w = t_w - t_\infty$

无量纲相
似分析法

自然对流的准则方程



3 竖直平板自然对流换热的微分方程

动量方程无量纲化：

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho \beta \theta + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

流体温差引起的浮升力导致的流场中的流体惯性力与其黏性力之间的对比关系。

$$\left(U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = \frac{g \beta \theta L}{u_0^2} \Theta + \frac{1}{\frac{u_0 L}{\nu}} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}$$

惯性力
黏性力

令： $u_0^2 = g \beta \theta L \rightarrow u_0 = \sqrt{g \beta \theta L}$

格拉晓夫数

$$Gr = Re^2 = \left(\frac{L \cdot \sqrt{g \beta \theta L}}{\nu} \right)^2 = \frac{g \beta \theta L^3}{\nu^2}$$

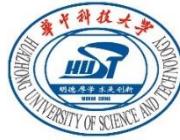
浮升力
黏性力



3 竖直平板自然对流换热的微分方程

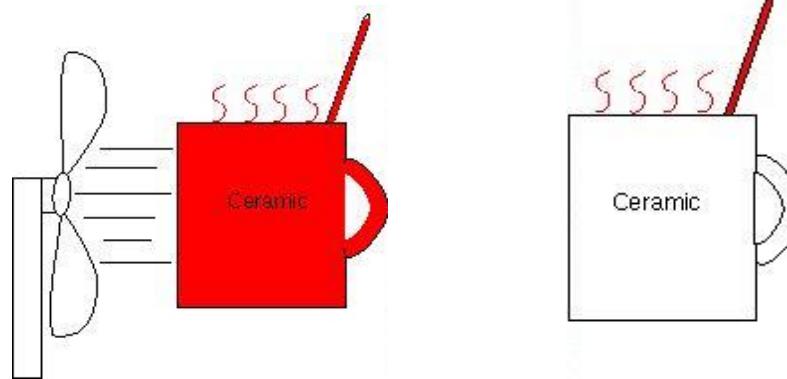
Notes:

- 1、和 Re 类似， Gr 是判断自然对流流态的准则数，当 $Gr>10^9$ 时，自然对流边界层就会失去稳定而从层流状态转变为紊流状态。
- 2、体积膨胀系数 β 对于理想气体为其绝对温度值的倒数，即 $\beta=1/T$ ，大多数一般气体可利用此式。



4 自然对流和强制对流换热的区别

$$Gr = \frac{g \beta \theta L^3}{\nu^2}$$



分类	强制对流	自然对流
流动起因	外力驱动	温差驱动
流动形态判据	Re	Gr
准则关系式	$Nu = f(Re, Pr)$	$Nu = f(Gr, Pr)$



5 大空间自然对流计算

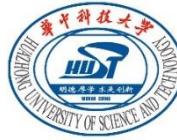
大空间: 热边界层不受相邻壁面干扰的均可。

$$Nu = c(GrPr)^n = c \boxed{Ra^n}$$

↓
瑞利数

$$Gr = \frac{g \beta \theta_w L^3}{\nu^2}$$

- θ_w : 壁面与流体之间的温度差
- β : 体积膨胀系数, 对理想气体有 $\beta=1/T$
- **特征长度:** L (竖板/管) , D_{out} (横管)
- **定性温度:** $t_m = (t_w + t_\infty) / 2$
- 此公式仅用于壁面温度保持常数, 即 $t_w = \text{const}$



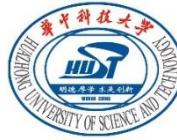
5 大空间自然对流计算

$$Nu = c (GrPr)^n = c Ra^n$$

加热表面形 状与位置	图示	系数C及指数n			特征尺寸	Ra范围
		流态	C	n		
竖平板 与 竖圆柱		层流	0.59	1/4	高度H	$10^4 \sim 10^9$
		紊流	0.10	1/3		$10^9 \sim 10^{12}$
横圆柱		层流	0.53	1/4	外径d	$10^4 \sim 10^9$
		紊流	0.13	1/3		$10^9 \sim 10^{12}$
水平板热面 朝上		层流	0.54	1/4	正方形取边长； 长方形取两边 平均值； 狭长条取短边； 圆盘取0.9d (d 为圆盘直径)	$10^5 \sim 2 \times 10^7$
		紊流	0.14	1/3		$2 \times 10^7 \sim 3 \times 10^{10}$
水平板热面 朝下		层流	0.27	1/4		$3 \times 10^5 \sim 3 \times 10^{10}$

Note 1:

适用于恒壁温
 $t_w = \text{const}$



5 大空间自然对流计算

$$Nu = c (GrPr)^n = c Ra^n$$

$$Nu = \frac{hL}{\lambda} \quad Gr = \frac{g \beta \theta_w L^3}{\nu^2}$$

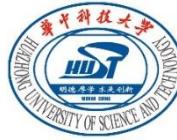
加热表面形 状与位置	图示	系数C及指数n			特征尺寸	Ra范围
		流态	C	n		
竖平板 与 竖圆柱		层流	0.59	1/4	高度H	$10^4 \sim 10^9$
		紊流	0.10	1/3		$10^9 \sim 10^{12}$
横圆柱		层流	0.53	1/4	外径d	$10^4 \sim 10^9$
		紊流	0.13	1/3		$10^9 \sim 10^{12}$
水平板热面 朝上		层流	0.54	1/4	正方形取边长； 长方形取两边 平均值； 狭长条取短边； 圆盘取0.9d (d 为圆盘直径)	$10^5 \sim 2 \times 10^7$
		紊流	0.14	1/3		$2 \times 10^7 \sim 3 \times 10^{10}$
水平板热面 朝下		层流	0.27	1/4		$3 \times 10^5 \sim 3 \times 10^{10}$

Note 2:

湍流时 $n=1/3$



定性尺寸L已
经不影响h的
大小。实验
可以小型化。



5 大空间自然对流计算

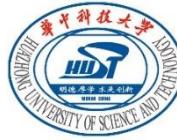
$$Nu = c (GrPr)^n = c Ra^n$$

加热表面形 状与位置	图示	系数C及指数n			特征尺寸	Ra范围
		流态	C	n		
竖平板 与 竖圆柱		层流	0.59	1/4	高度H	$10^4 \sim 10^9$
		紊流	0.10	1/3		$10^9 \sim 10^{12}$
横圆柱		层流	0.53	1/4	外径d	$10^4 \sim 10^9$
		紊流	0.13	1/3		$10^9 \sim 10^{12}$
水平板热面 朝上		层流	0.54	1/4	正方形取边长; 长方形取两边 平均值;	$10^5 \sim 2 \times 10^7$
		紊流	0.14	1/3		$2 \times 10^7 \sim 3 \times 10^{10}$
水平板热面 朝下		层流	0.27	1/4	狭长条取短边; 圆盘取 $0.9d$ (d 为圆盘直径)	$3 \times 10^5 \sim 3 \times 10^{10}$

Note 3:

径高比 d/H
必须满足

$$\frac{d}{H} \geq \frac{35}{Gr_H^{1/4}}$$



5 大空间自然对流计算

$$Nu = c(GrPr)^n = cRa^n$$

$$\rightarrow Nu = c(GrPr)^n \psi$$

加热表面形 状与位置	图示	系数C及指数n			特征尺寸	Ra范围
		流态	C	n		
竖平板 与 竖圆柱		层流	0.59	1/4	高度H	$10^4 \sim 10^9$
		紊流	0.10	1/3		$10^9 \sim 10^{12}$
横圆柱		层流	0.53	1/4	外径d	$10^4 \sim 10^9$
		紊流	0.13	1/3		$10^9 \sim 10^{12}$
水平板热面 朝上		层流	0.54	1/4	正方形取边长； 长方形取两边 平均值； 狭长条取短边； 圆盘取0.9d (d 为圆盘直径)	$10^5 \sim 2 \times 10^7$
		紊流	0.14	1/3		$2 \times 10^7 \sim 3 \times 10^{10}$
水平板热面 朝下		层流	0.27	1/4		$3 \times 10^5 \sim 3 \times 10^{10}$

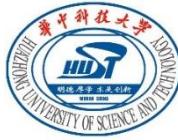
Note 4:

传热温差较大
时，需考虑流
体的物性变化

$$\psi = (Pr/Pr_w)^{0.11}$$

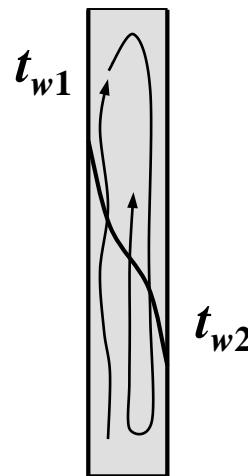
$$\psi = (Pr/Pr_w)^{0.25}$$

$$\psi = Pr^{0.047}$$

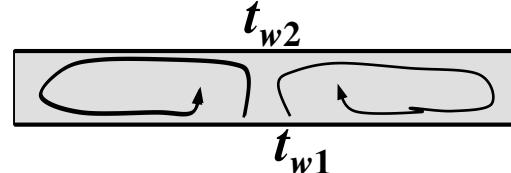


6 受限空间自然对流计算

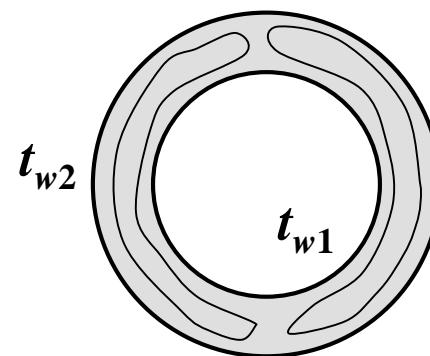
有些自然对流换热过程受到固体表面的限制而形成受限空间中的自然对流换热。



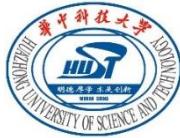
(1) 竖夹层



(2) 水平夹层



(3) 水平环缝



6 受限空间自然对流计算

① 竖夹层

恒壁温条件下：

$$Gr_\delta < 2000$$

$$6 \times 10^4 < Gr_\delta < 2 \times 10^5$$

$$2 \times 10^5 < Gr_\delta < 1.1 \times 10^7$$

$$Gr_\delta = \frac{g\alpha\Delta t \delta^3}{\nu^2}$$

$$Nu_\delta = 1$$

$$Nu_\delta = 0.18 Gr_\delta^{1/4} \left(\frac{h}{\delta} \right)^{-1/9}$$

$$Nu_\delta = 0.065 Gr_\delta^{1/3} \left(\frac{h}{\delta} \right)^{-1/9}$$

$$Nu_\delta = \frac{h\delta}{\lambda}$$

公式中准则的定性温度为： $t_m = \frac{t_{w1} + t_{w2}}{2}$

$$t_{w1} > t_{w2}$$

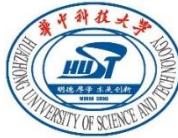
$$t_{w1}$$

$$t_{w2}$$

$$L$$



$$\delta \ll L$$

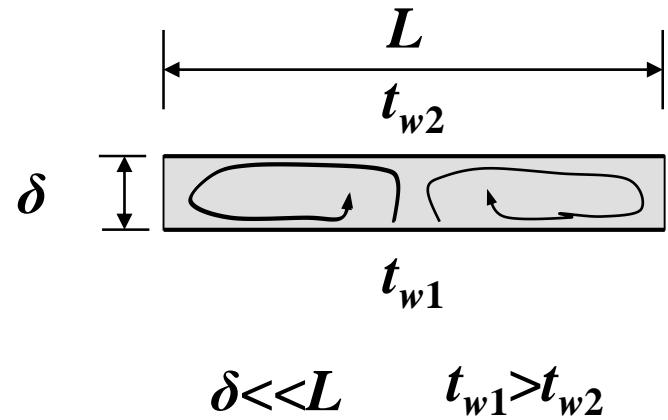


6 受限空间自然对流计算

② 水平夹层

恒壁温条件下：

$$10^4 < Gr_\delta < 4 \times 10^5$$



$$Nu_\delta = 0.195 Gr_\delta^{1/4}$$

$$Gr_\delta = \frac{g \alpha \Delta t \delta^3}{\nu^2}$$

$$Gr_\delta > 4 \times 10^5$$

$$Nu_\delta = 0.068 Gr_\delta^{1/3}$$

$$Nu_\delta = \frac{h\delta}{\lambda}$$

公式中准则的定性温度为： $t_m = \frac{t_{w1} + t_{w2}}{2}$



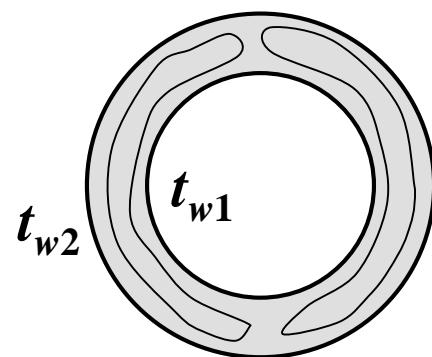
6 受限空间自然对流计算

③ 水平环缝

$$Nu_{\delta} = \left(0.2 + 0.145 \frac{\delta}{d_1} Gr_{\delta} \right)^{0.25} \exp \left(-0.02 \frac{\delta}{d_1} \right)$$

定性温度：

$$t_m = \frac{t_{w1} + t_{w2}}{2}$$



该公式适用于： $\delta/d_1 = 0.55 \sim 2.65$



7 混合对流

$$Gr = \frac{g \beta \Delta t l^3}{\nu^2}$$

浮升力
粘性力

$$Re = \frac{ul}{\nu}$$

惯性力
粘性力



$$\frac{Gr}{Re^2} = \frac{g \beta \Delta t l}{u^2}$$

浮升力
惯性力

$$\frac{Gr}{Re^2} \geq 10$$

时可只考虑自然对流

$$\text{当, } \frac{Gr}{Re^2} < 0.1$$

时只考虑强制对流

$$\frac{Gr}{Re^2} = 0.1 \sim 10$$

时必须考虑混合对流



8 例题

若一个人表面温度为25°C。如果此人站在风速为5m/s、温度为5°C的环境中，热损失是多少？如果无风，环境温度仍为5 °C，热损失是多少？
定性尺寸怎么选？

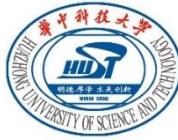
解：将人近似的视为直径为30cm、高为1.7m的圆柱。

定性温度为：

$$T_f = \frac{1}{2}(5 + 25) = 15^\circ\text{C}$$

查出空气的物性参数：

$$\lambda = 2.55 \times 10^{-2} \text{ W/(m}\cdot\text{K}), \quad Pr = 0.704, \quad \nu = 14.61 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$



8 例题

1) 有风时

$$Re = \frac{ud}{v} = 1.03 \times 10^5$$

选择P.119, 表5-1用于空气的简化公式:

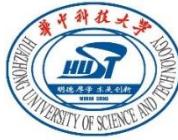
$$Nu = cRe^n = 0.22Re^{0.6}$$

得到:

$$h = 19.03 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

因此:

$$Q = h\pi dL(t_w - t_\infty) = 609 \text{ W}$$



8 例题

2) 无风时

$$Ra = GrPr = \frac{g \beta \Delta t L^3}{\nu^2} Pr = 1.1 \times 10^{10}$$

为湍流，代入湍流公式：

$$Nu = c(GrPr)^n = 0.1 \times (GrPr)^{1/3}$$

得到：

$$h = 3.34 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

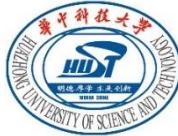
因此：

$$Q = h \pi d L (t_w - t_\infty) = 107 \text{ W}$$



作业:

**5-4, 5-9, 5-11, 5-15 , 5-25,
5-28, 5-33 , 5-36**



Supplement— $\beta=1/T$ 的推导

理想气体状态方程: $pV = R_g T$



$$V = \frac{R_g T}{p}, \quad \frac{R_g}{p} = \frac{V}{T}$$



$$\beta = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{V} \frac{R_g}{p} = \frac{1}{V} \frac{V}{T} = \frac{1}{T}$$



Supplement

竖夹层：

$$Gr_\delta < 2000 \quad Nu_\delta = 1$$



$$Nu_\delta = \frac{h\delta}{\lambda} = 1 \Rightarrow h = \frac{\lambda}{\delta}$$

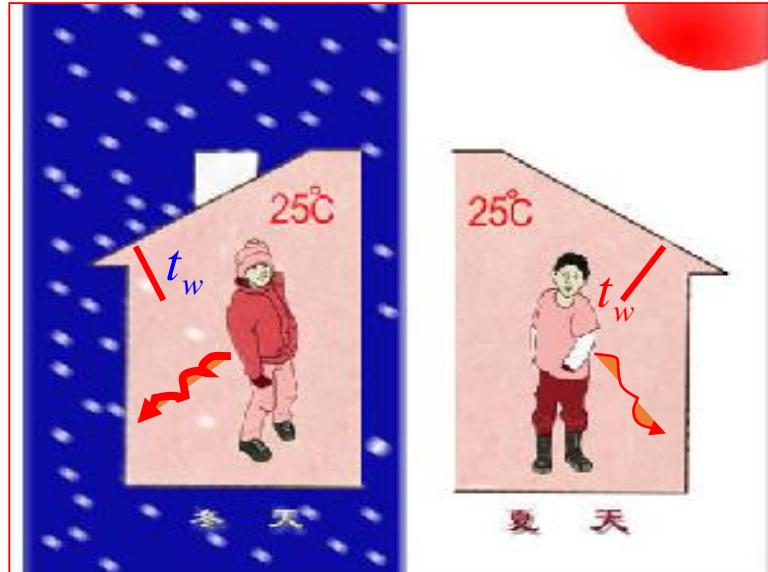
$$q = h\Delta t = \frac{\lambda}{\delta} \Delta t$$



意味着只有导热存在



引入问题：能解释下面两种情况吗？



冬天和夏天室温相同

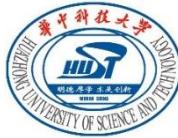
晴朗无风的夜晚，空气温度 $>0^{\circ}\text{C}$

- ✓ 导热？？
- ✓ 导热？？
- ✓ 对流？？

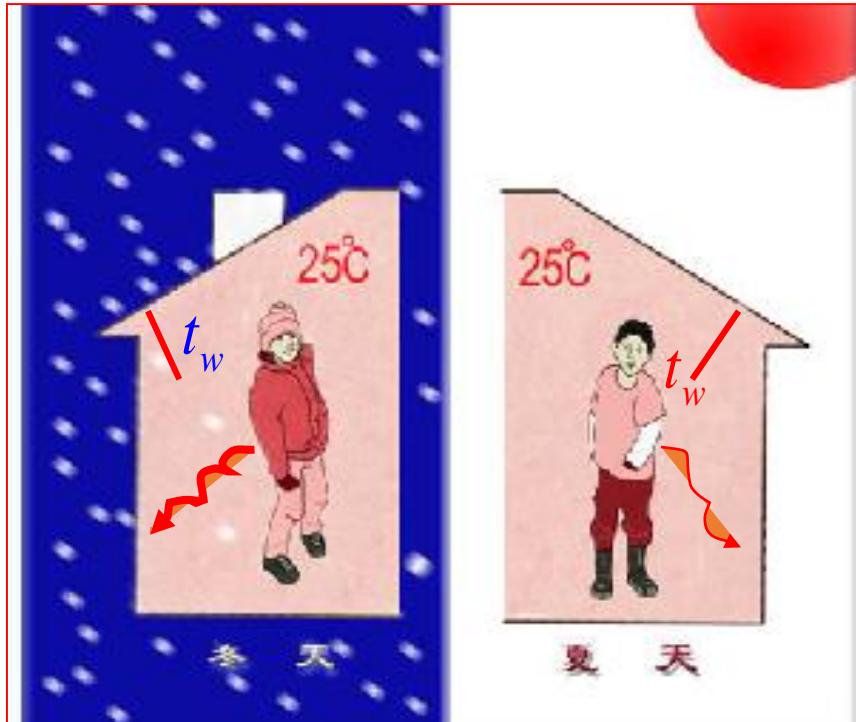
不能解释！

- ✓ 辐射？？





辐射是如何影响传热的？



墙壁

冬天: 10°C

夏天: 26°C

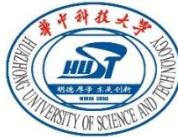
人体与墙壁之间的辐射换热是形成差异的主要原因！

无需接触

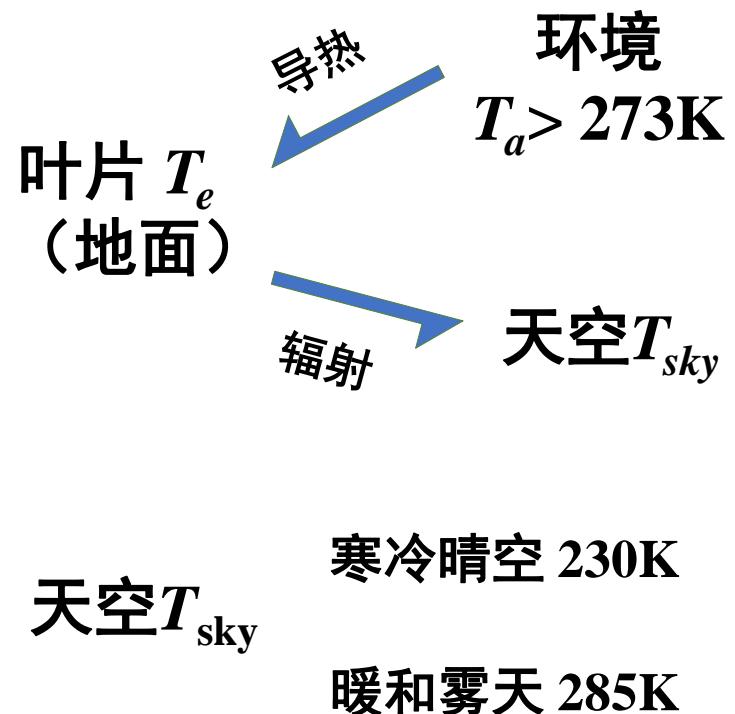
人体



墙壁



辐射是如何影响传热的？



!!! 导热与辐射换热之间的综合效果！ ($T_e < 273 K$)

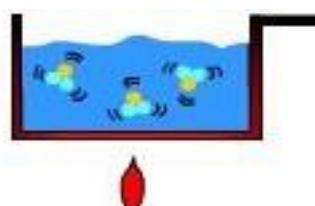


导热、对流换热与辐射换热的异同



Conduction

直接接触、依靠微观粒子热运动而传递热量



Convection

既有热对流，也有导热，
必须有**直接接触**（流体与壁面）和**宏观运动**



Radiation

无需介质！
→ 怎么传？
→ 变换能量形式
无需接触！

物体热力学能 ⇌ 电磁波能 ⇌ 物体热力学能

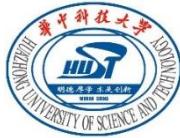


第六章 热辐射基础

§ 6-1 基本概念

§ 6-2 黑体辐射和吸收的基本定律

§ 6-3 实际物体的辐射和吸收



§ 6-1 基本概念

1 热辐射

由物体内部微观粒子热运动产生的，以**电磁波**形式传递的能量，称之为热辐射。

特点

- 任何物体，只要温度高于0K，就会不停地向周围空间发出热辐射；
- 无需介质，可以在真空中传播。

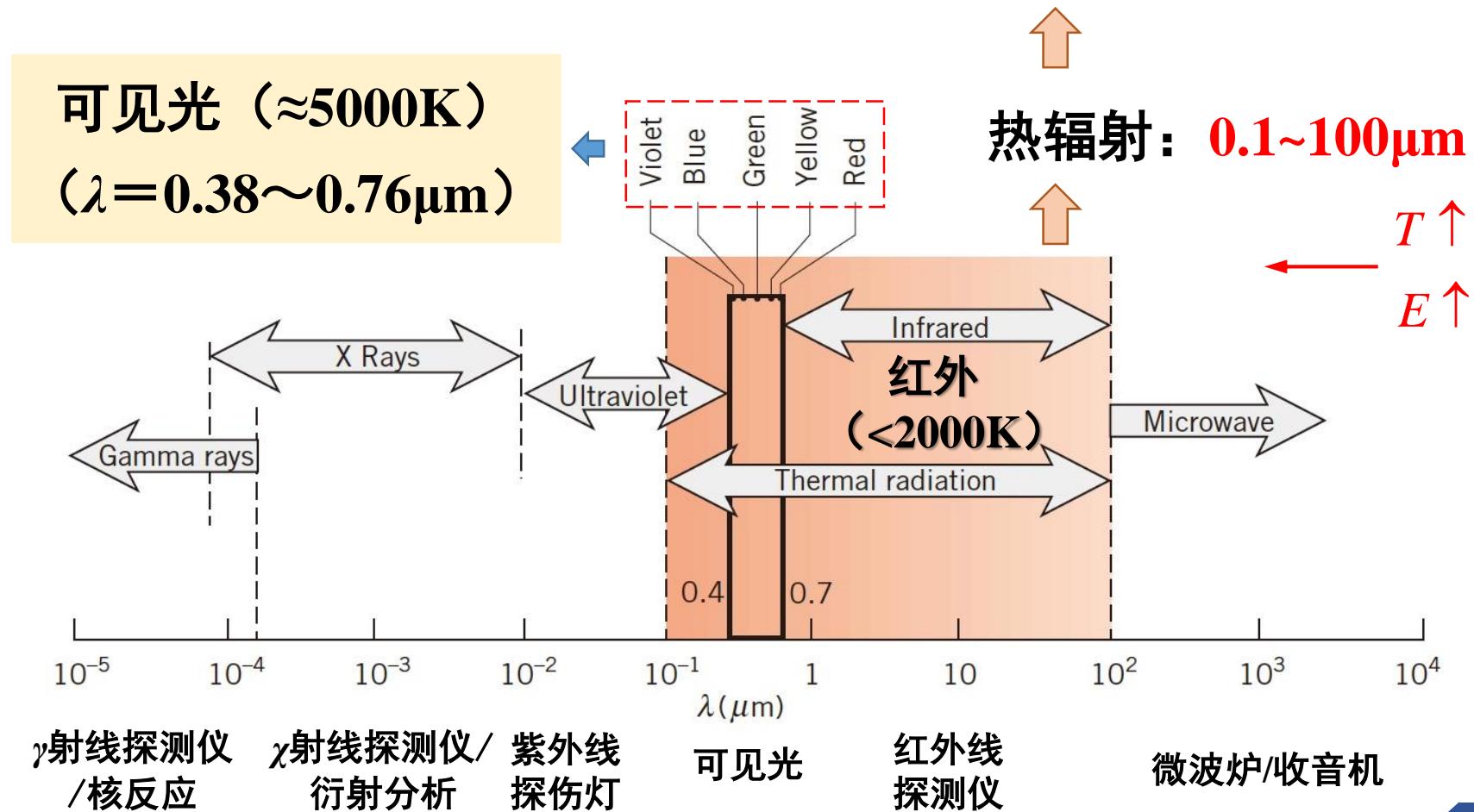
作为一种电磁波，热辐射也是**光速**在空间**传播**，其具有的**能量与波长（频率）有关**。其波速、频率与波长的关系：

$$c = f\lambda, \quad \text{真空中: } c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$



2 电磁波频谱

这一波长区段的电磁波最容易被物体吸收转化为热能。





3 辐射换热

辐射换热：物体间通过相互热辐射与吸收传递热量的过程。

辐射换热与导热、对流传热的区别：

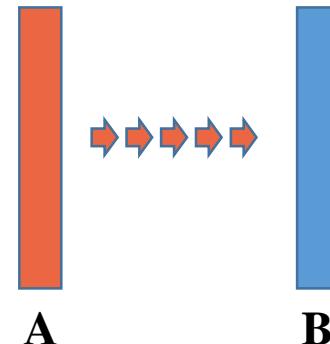
- 无需任何的介质；
- 伴随**能量形式的转变**：

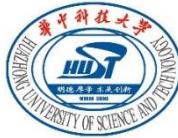
热力学能 → 辐射能 → → 辐射能 → 热力学能

A 物体（发射）

B 物体（吸收）

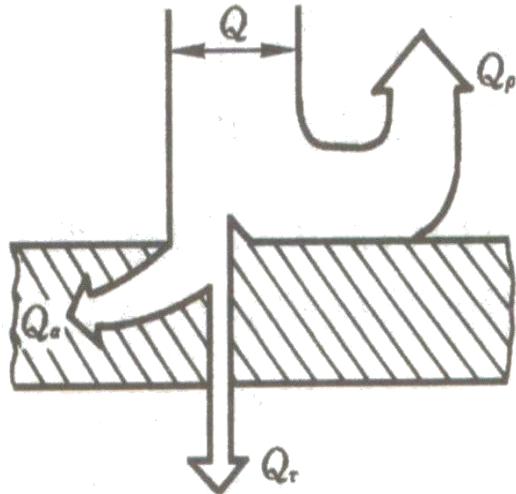
- 辐射换热量是物体间相互辐射与吸收的**动态平衡**（当物体间处于热平衡时，净辐射换热量等于零，但是相互间的辐射与吸收仍在进行）。注意**热辐射与辐射换热的概念区别**！





4 物体表面对热辐射的影响

可见光、声波、热辐射



物体对热辐射的吸收、反射与穿透：

$$Q = Q_\alpha + Q_\rho + Q_\tau \Rightarrow \frac{Q_\alpha}{Q} + \frac{Q_\rho}{Q} + \frac{Q_\tau}{Q} = 1$$

(能量守恒)

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$\alpha + \rho + \tau = 1$$

其中 α 、 ρ 和 τ 分别为吸收比、反射比和穿透比

理想辐射体： $\alpha = 1$ (黑体)； $\rho = 1$ (镜体/白体)； $\tau = 1$ (透明体)

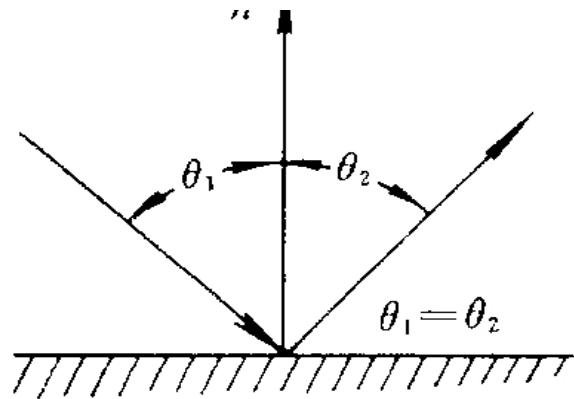
对于大多数的固体和液体： $\tau = 0$, $\alpha + \rho = 1$ 辐射表面的状况影响大

对于不含颗粒的气体： $\rho = 0$, $\alpha + \tau = 1$ 辐射表面的状况影响小，
容器的形状影响大



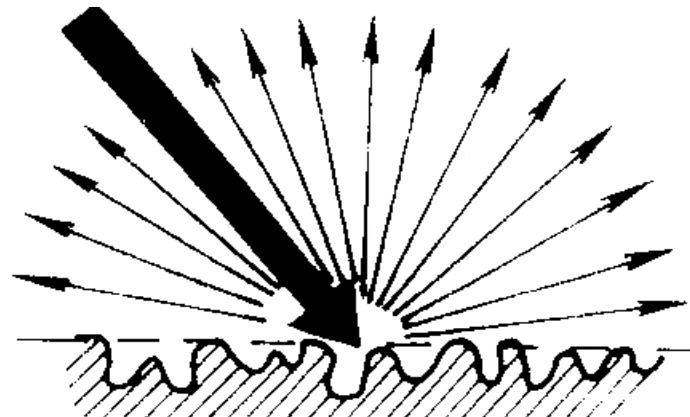
4 物体表面对热辐射的影响

➤ 辐射表面的状况对固体、液体辐射能的反射



镜面反射

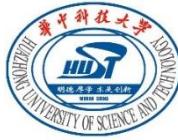
(表面粗糙度 < 波长)



漫反射

(表面粗糙度 > 波长)

一般工程材料表面均为漫反射

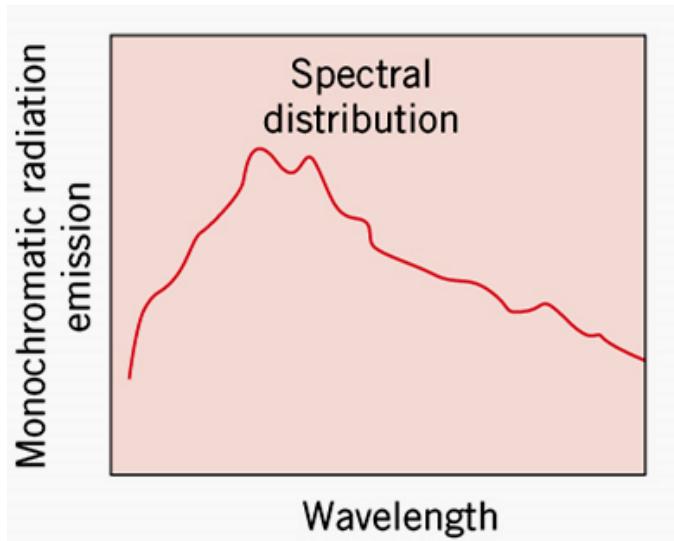


5 辐射换热的计算特点

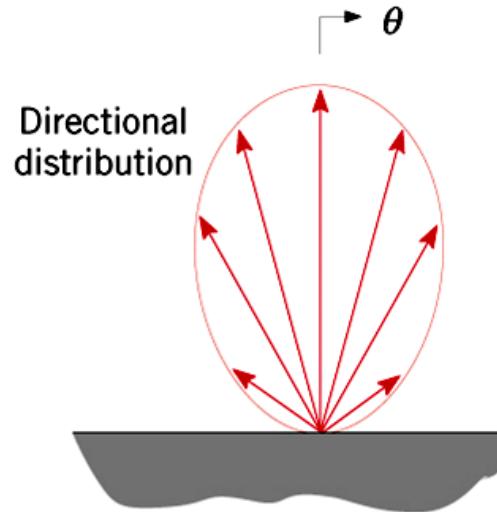
- 辐射能力正比于热力学温度的**四次方**；
- 发射和吸收不仅与自身的**温度**和**表面状况**相关，还取决于**波长**和**方向**；

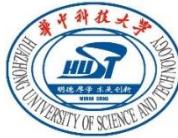
$$E_{rad} = f(\lambda, \theta, T)$$

频谱分布特性



方向性分布特性

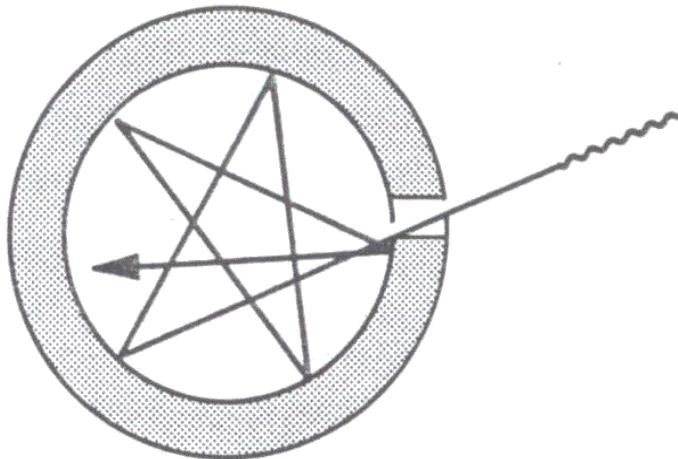




§ 6-2 黑体辐射和吸收的基本定律

1 黑体

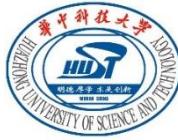
吸收比 $\alpha=1$ ，能够全部吸收各种波长热辐射能的理想物体。
在相同温度的物体中，**黑体的辐射能力最大**。



黑体模型

辐射换热的基本研究方法：
将真实物体的辐射与**黑体对比**进行修正，通过实验获得修正系数，从而获得真实物体的热辐射规律。

*内壁吸收比0.6时，如果小孔与内壁面积比小于0.6%，则该模型的吸收比 >0.996 ，
近似为黑体



2 热辐射的能量表示参数

① 总辐射力（半球辐射力） E : 单位时间内，物体的**单位辐射面积**向**半球**空间发射的**所有波长**的能量总和。 (W/m²)

$$E = d\Phi/dA$$

② 光谱辐射力（半球光谱辐射力） E_λ : 单位时间内，物体的**单位辐射面积**向**半球**空间发射的**某一波长范围**的辐射能量。 (W/m³)

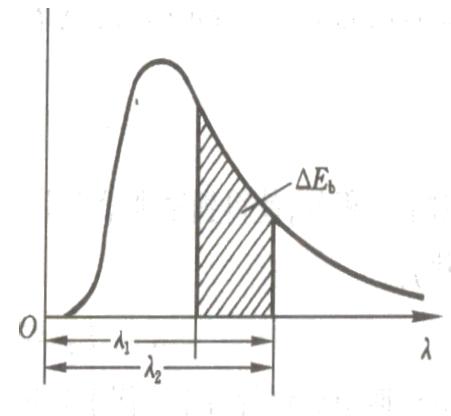
$$E_\lambda = \frac{d^2\Phi}{dAd\lambda}$$



$$E = \int_0^\infty E_\lambda d\lambda$$



辐射力是光谱辐射力曲线下的总面积



黑体一般采用下标**b**表示，如黑体的辐射力为 E_b ，黑体的光谱辐射力为 $E_{b\lambda}$



2 热辐射的能量表示参数

dA



③ 方向辐射力（定向辐射力） E_θ ：单位时间内，每单位辐射面积向半球空间中某一方向上单位立体角内辐射的所有波长的辐射量。（ $\text{W/m}^2\text{sr}$ ）

$d\varpi$

$$E_\theta = \frac{d^2\Phi}{dAd\varpi}$$

◆ 立体角：球面面积除以球半径的平方，单位：sr（球面度）

$$\varpi = \frac{A_n}{r^2}$$

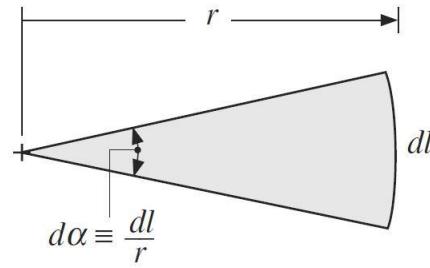
半球面立体角： $\varpi = 2\pi$ (sr)

球面微元立体角： $d\varpi = \frac{dA_n}{r^2} = \sin\theta d\theta d\phi$

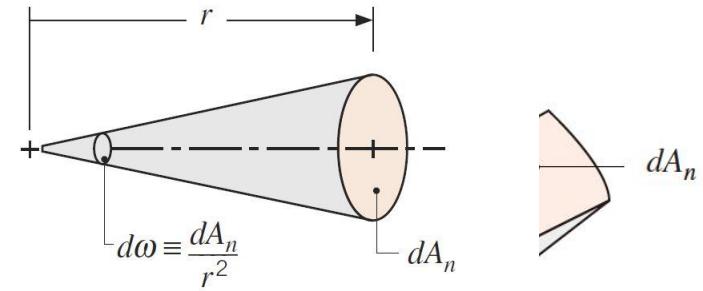




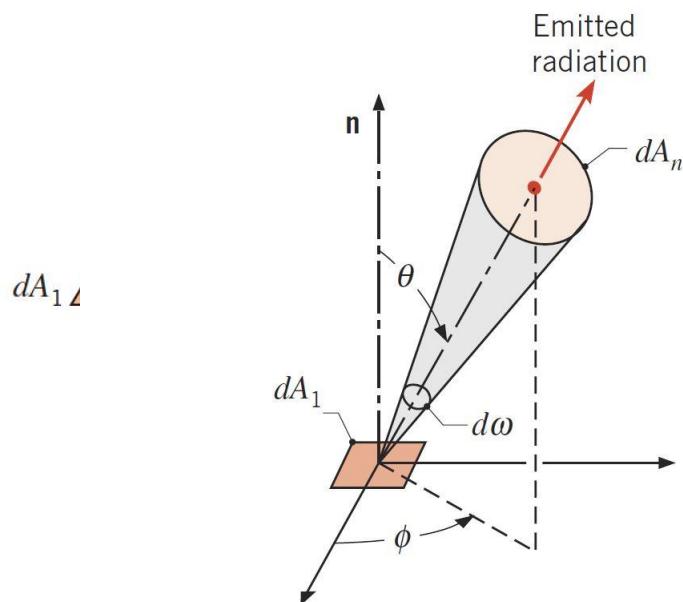
2 热辐射的能量表示参数



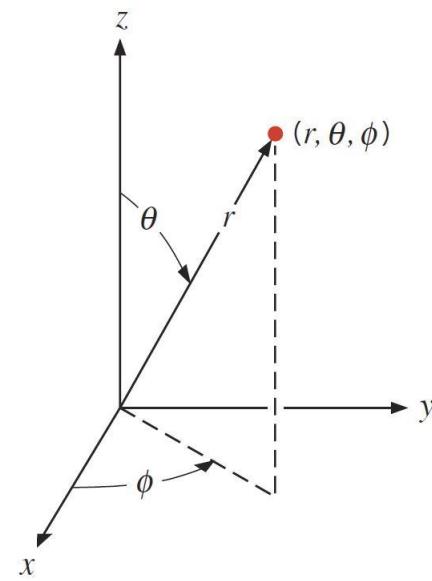
(a)



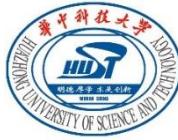
(b)



(c)

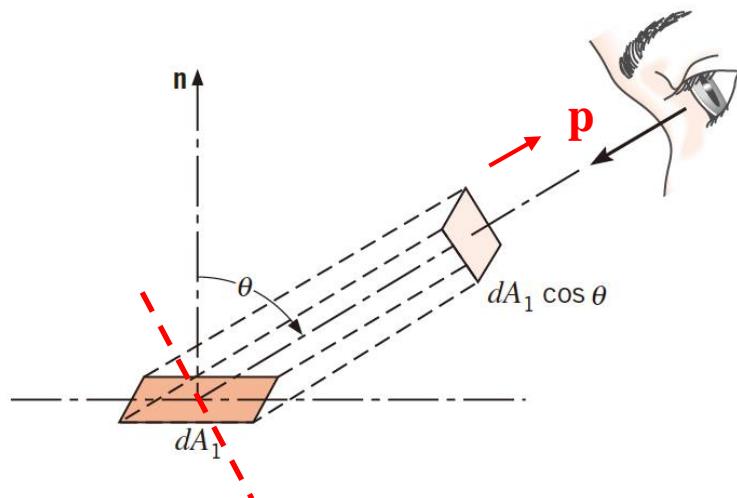


(d)



2 热辐射的能量表示参数

③ 方向辐射力（定向辐射力） E_θ ：单位时间内，每单位辐射面积向半球空间中某一方向上单位立体角内辐射的所有波长的辐射量。（ $\text{W/m}^2\text{sr}$ ）



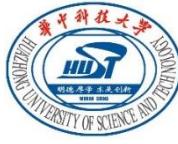
辐射面积 VS. 可见辐射面积

◆ 单位可见辐射面积：沿p方向发射的辐射能， dA 的可见面积就是其在与p垂直方向的投影面积。

n方向：可见面积为 dA

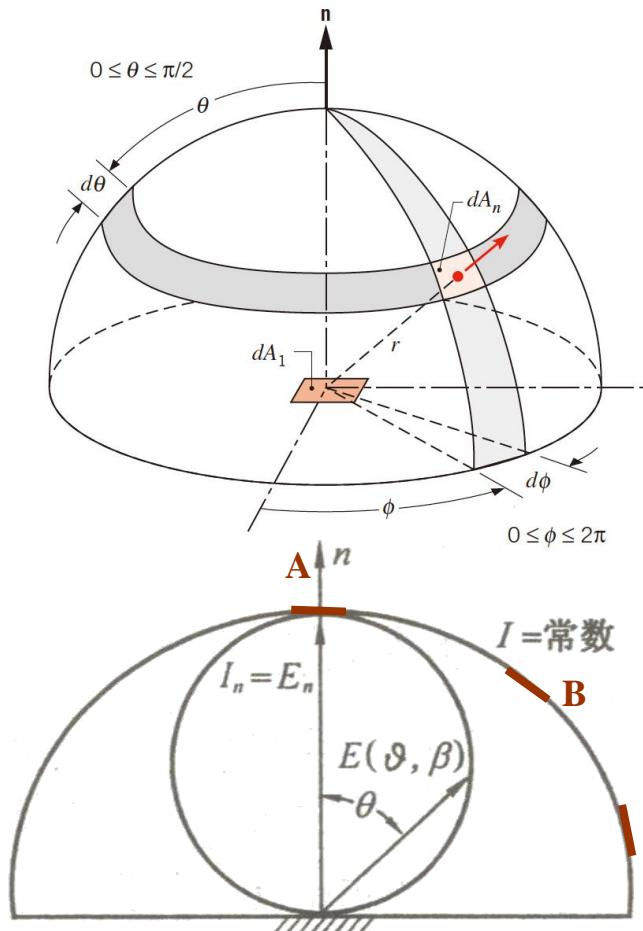
p方向：可见面积为 $dA \cos\theta$

$\theta=90^\circ$ ：可见面积为0



2 热辐射的能量表示参数

④ 定向辐射强度 I_θ ：单位时间、单位可见辐射面积辐射的在单位立体角内的辐射能量。 (W/m²sr)



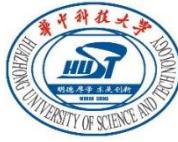
$$I_\theta = \frac{d^2\Phi}{dA \cos \theta d\omega}$$

➤ 黑体定向辐射力与定向辐射强度的关系：

$$E_\theta = I_\theta \cos \theta$$

➤ 黑体定向辐射力与辐射力的关系：

$$E = \int_0^{2\pi} E_\theta d\omega = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} I_\theta \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi$$



3 黑体热辐射基本定律

$$E_{rad} = f(\lambda, \theta, T)$$

黑体辐射三大定律

斯忒藩-玻尔兹曼定律

总辐射力 E

一定温度下单位面积黑体辐射的总能量？

光谱辐射力 E_λ

总能量中各个波段的能量分别占多少比例？

方向辐射力 E_θ

普朗克定律

定向辐射强度 I_θ

维恩位移定律

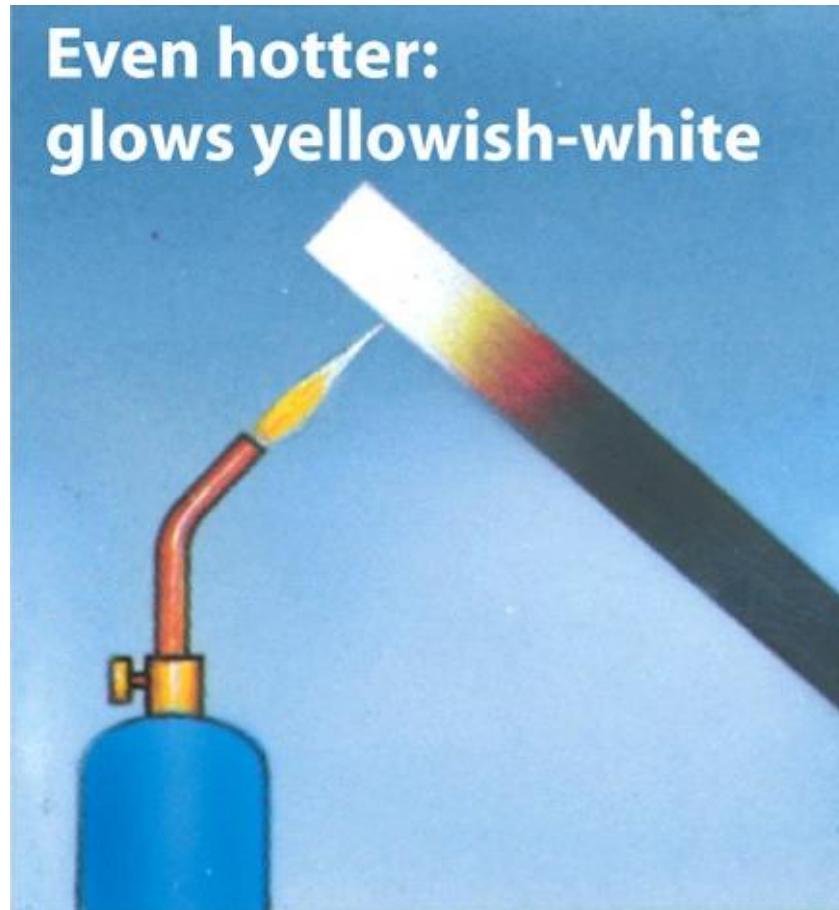
辐射能在空间是如何分布的？

兰贝特定律

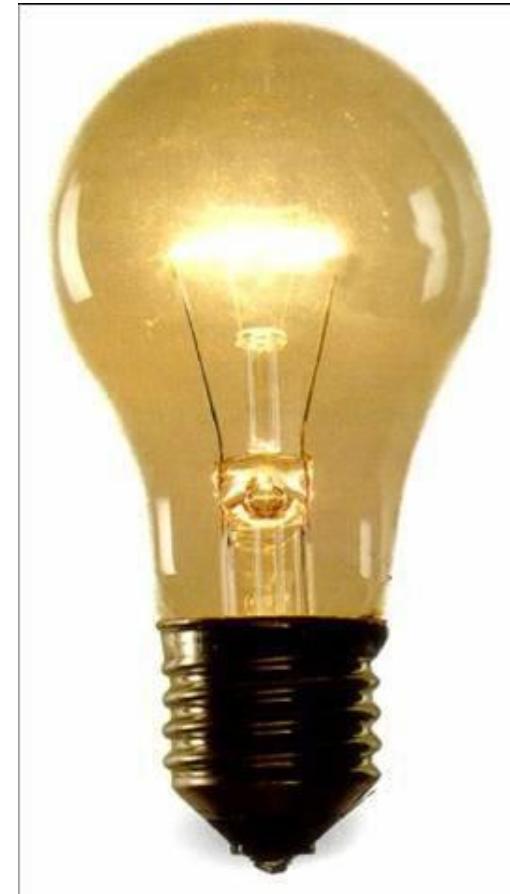


3 黑体热辐射基本定律

问题1：观察金属加热

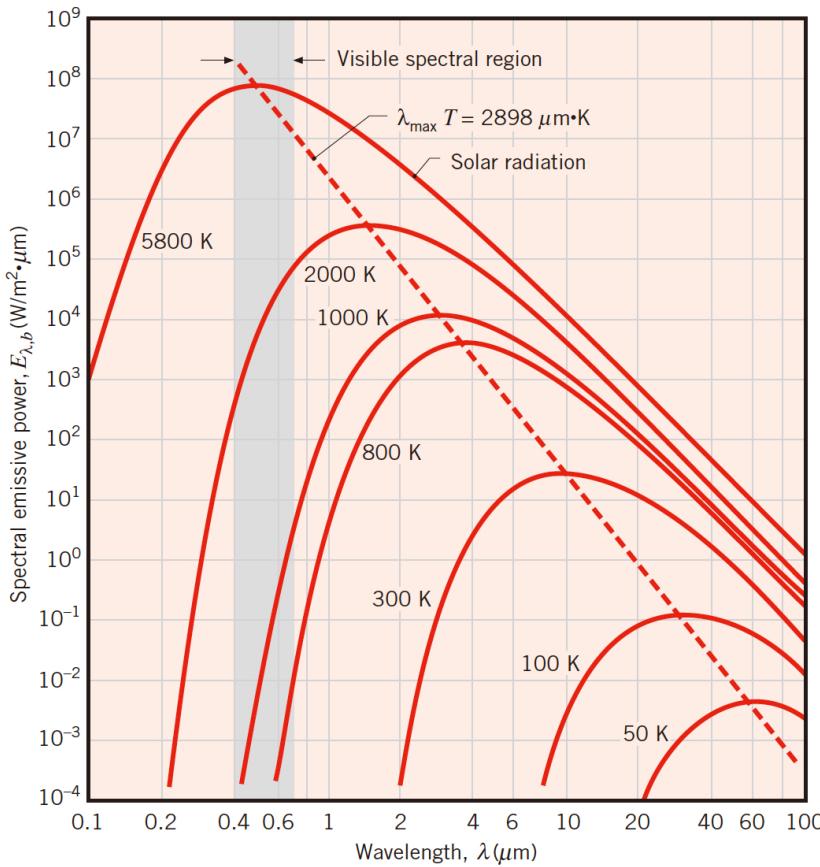


问题2：100W白炽灯的发光效率是多少？



3 黑体热辐射基本定律

① 普朗克定律 (The Planck's Law) : 揭示了黑体辐射能的光谱特性, 即黑体的光谱辐射力 $E_{b\lambda}$ 随波长和温度变化的规律。



$$E_{b\lambda} = f(\lambda, T) = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{c_2/(\lambda T)} - 1}$$

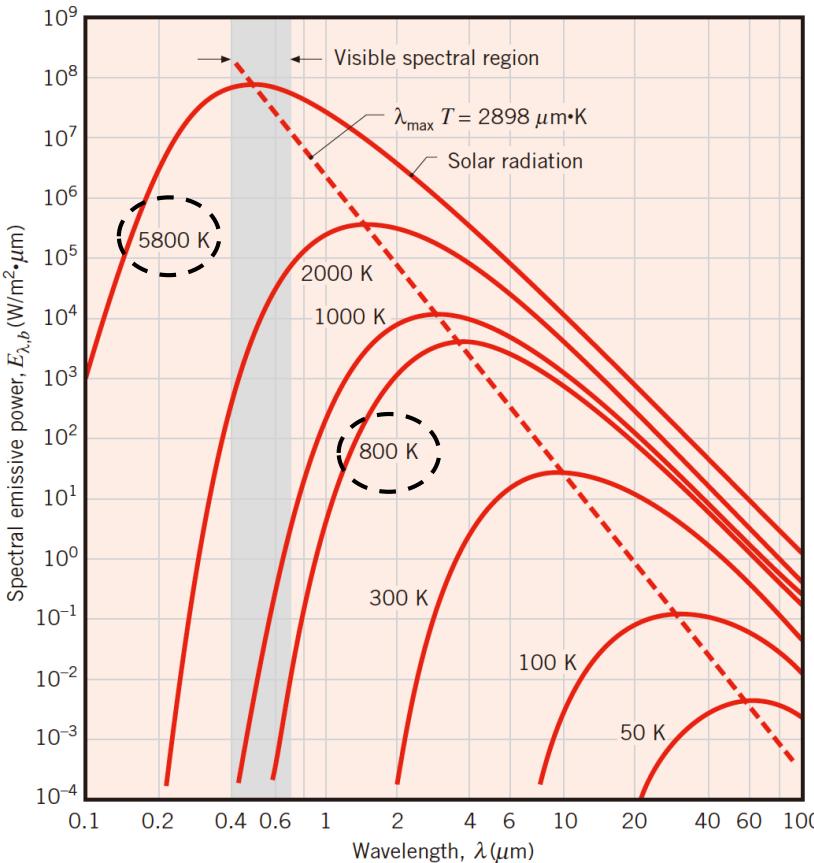
λ —波长, m ; T —黑体温度, K ;

c_1 —第一辐射常数, $3.7419 \times 10^{-16} \text{ W}\cdot\text{m}^2$;

c_2 —第二辐射常数, $1.4388 \times 10^{-2} \text{ m}\cdot\text{K}$;

3 黑体热辐射基本定律

① 普朗克定律 (The Planck's Law)



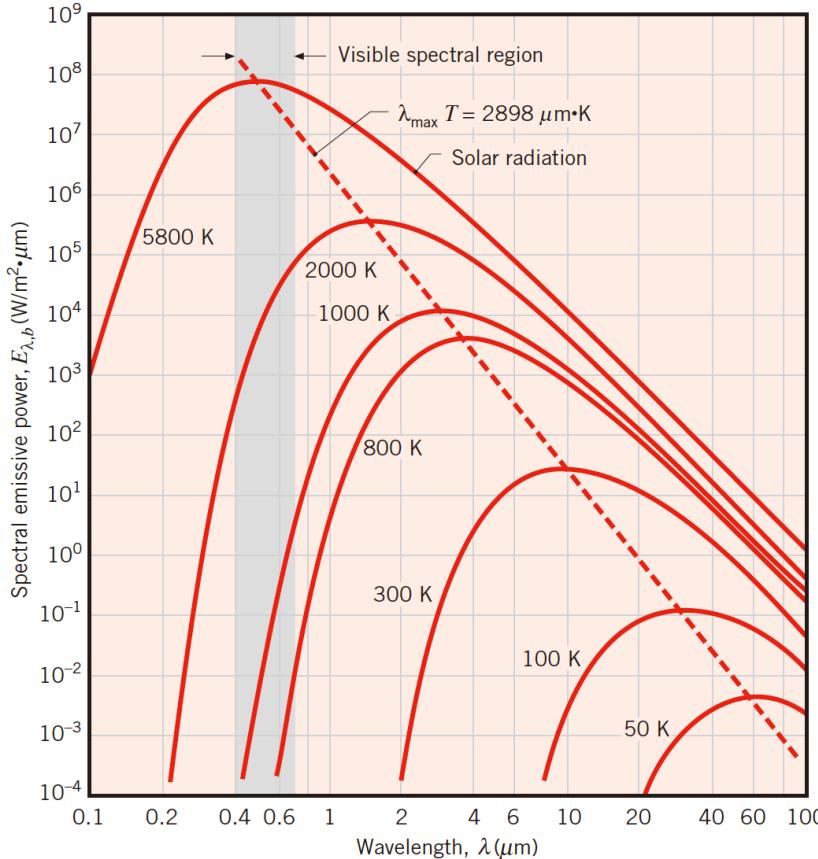
$$E_{b\lambda} = f(\lambda, T) = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{c_2/(\lambda T)} - 1}$$

- 黑体光谱辐射力随波长连续变化；
- 温度越高，黑体的光谱辐射力越大；
- 温度决定辐射能量集中的光谱区域，温度越高，辐射能量向短波区移动；
- 太阳辐射（近似5800K黑体）的绝大部分能量集中在可见光区域。



3 黑体热辐射基本定律

② 维恩位移定律 (Wien's Displacement Law)



$$E_{b\lambda} = f(\lambda, T) = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{c_2/(\lambda T)} - 1}$$

□ 一定温度下，黑体的光谱辐射力随波长的增加而“先增后减”

对应黑体最大光谱辐射力的波长 λ_{max} 与温度的关系（维恩位移定律）：

$$\frac{dE_{b\lambda}}{d\lambda} = 0$$

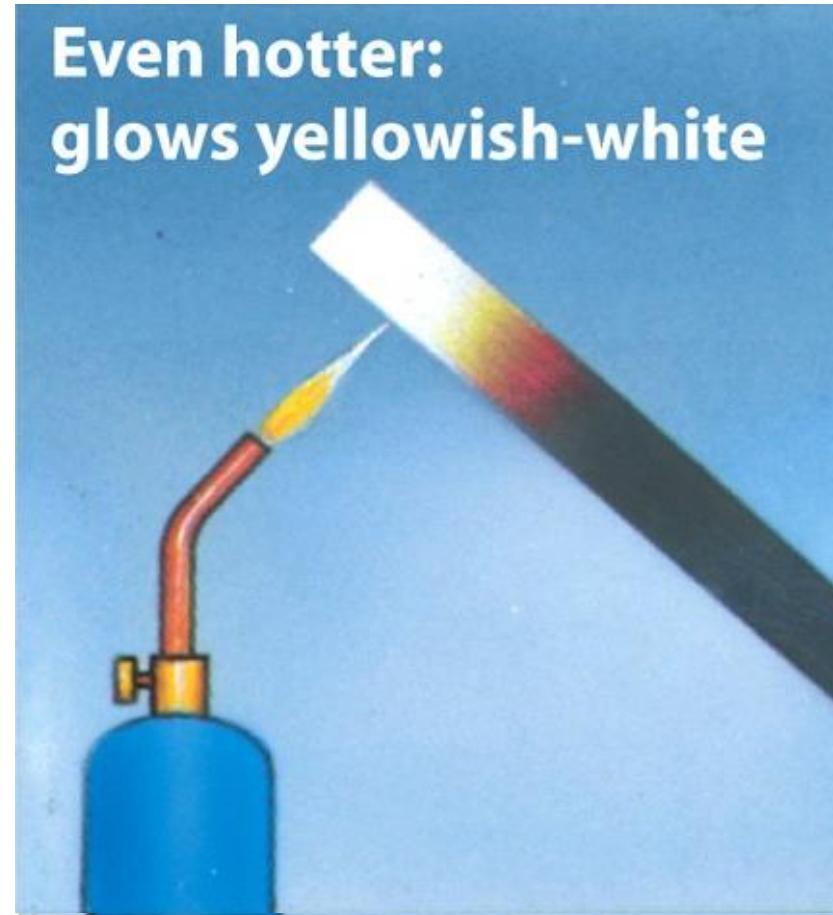
↓

$$\lambda_m T = 2.8976 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$



3 黑体热辐射基本定律

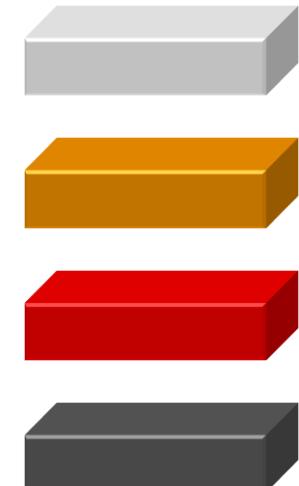
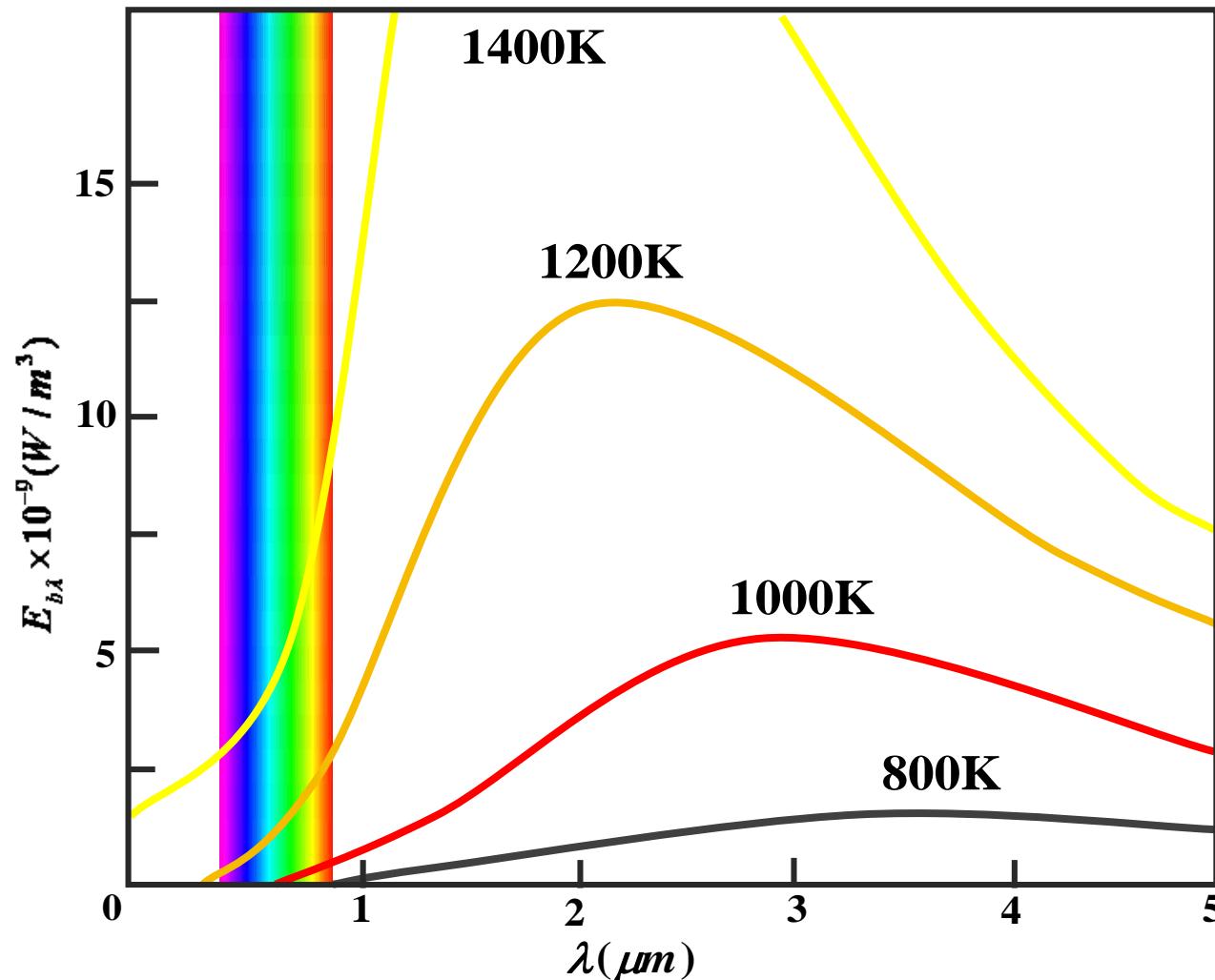
★普朗克定律典型应用：金属加热问题

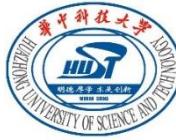




3 黑体热辐射基本定律

★普朗克定律典型应用：金属加热问题

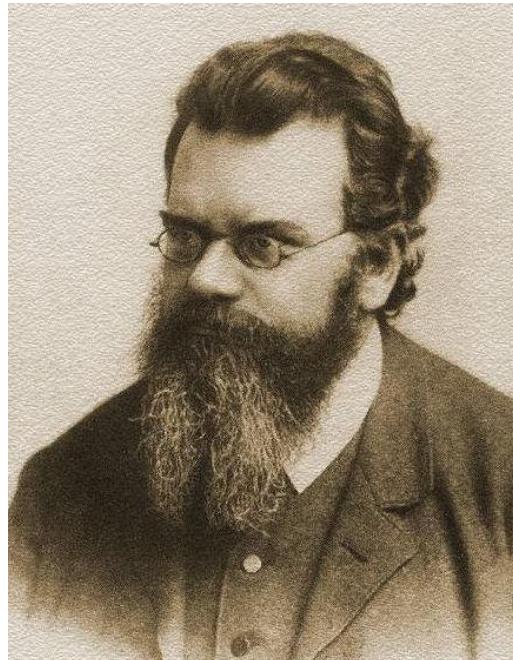




3 黑体热辐射基本定律

③ 斯忒藩-玻尔兹曼定律 (The Stefan-Boltzmann Law) :

揭示了黑体辐射能的特性，即黑体的辐射力 E_b 随波长和温度变化的规律。



$$E_b = \int_0^{\infty} E_{b\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{c_2/(\lambda T)} - 1} d\lambda = \sigma T^4$$

黑体辐射常数： $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/(m}^2\cdot\text{K}^4)$

➤ 特定波段的黑体辐射力：

$$\Delta E_b = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_{b\lambda} d\lambda$$

玻尔兹曼



3 黑体热辐射基本定律

③ 斯忒藩-玻尔兹曼定律

$$\Delta E_{b,\lambda_1 \rightarrow \lambda_2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_{b\lambda} d\lambda$$

$$= \int_0^{\lambda_2} E_{b\lambda} d\lambda - \int_0^{\lambda_1} E_{b\lambda} d\lambda$$

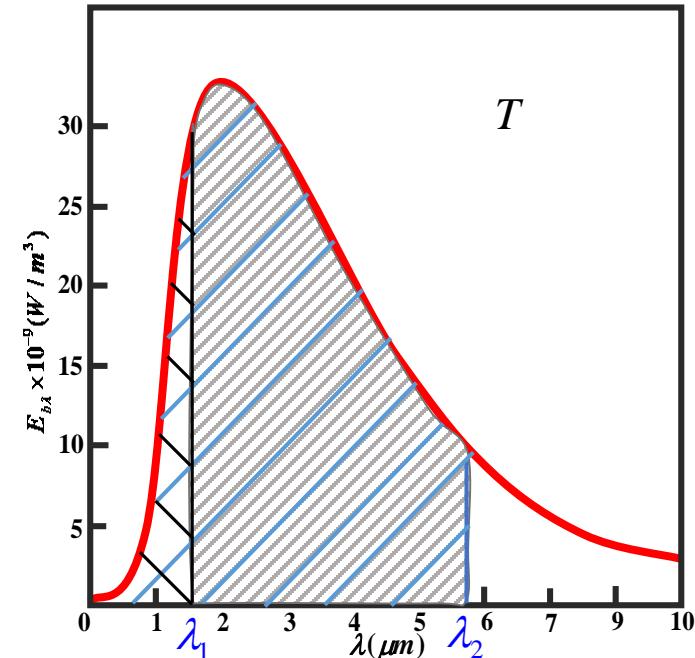
$$= \Delta E_{b,0 \rightarrow \lambda_2} - \Delta E_{b,0 \rightarrow \lambda_1}$$



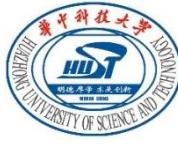
$$\frac{\Delta E_{b,\lambda_1 \rightarrow \lambda_2}}{\sigma T^4} = \frac{\Delta E_{b,0 \rightarrow \lambda_2}}{\sigma T^4} - \frac{\Delta E_{b,0 \rightarrow \lambda_1}}{\sigma T^4}$$



$$F_{b,\lambda_1 \rightarrow \lambda_2} = F_{b,0 \rightarrow \lambda_2} - F_{b,0 \rightarrow \lambda_1}$$



波段辐
射函数



3 黑体热辐射基本定律

③ 斯忒藩-玻尔兹曼定律

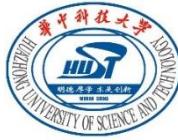
$$F_{b,0 \rightarrow \lambda} = \frac{\int_0^{\lambda} E_{b\lambda} d\lambda}{\sigma T^4} = \int_0^{\lambda} \frac{E_{b\lambda}}{\sigma T^5} d(\lambda T) = \int_0^{\lambda} \frac{1}{\sigma (\lambda T)^5} \frac{c_1}{e^{c_2/(\lambda T)} - 1} d(\lambda T) = f(\lambda T)$$

$\lambda T / (\mu\text{m} \cdot \text{K})$	$F_{b,0 \rightarrow \lambda} / (\%)$	$\lambda T / (\mu\text{m} \cdot \text{K})$	$F_{b,0 \rightarrow \lambda} / (\%)$	$\lambda T / (\mu\text{m} \cdot \text{K})$	$F_{b,0 \rightarrow \lambda} / (\%)$
1000	0.0323	3800	44.38	16000	97.38
1100	0.0916	4000	48.13	18000	98.08
1200	0.214	4200	51.64	20000	98.56
1300	0.434	4400	54.92	22000	98.89

P.171 表6-1

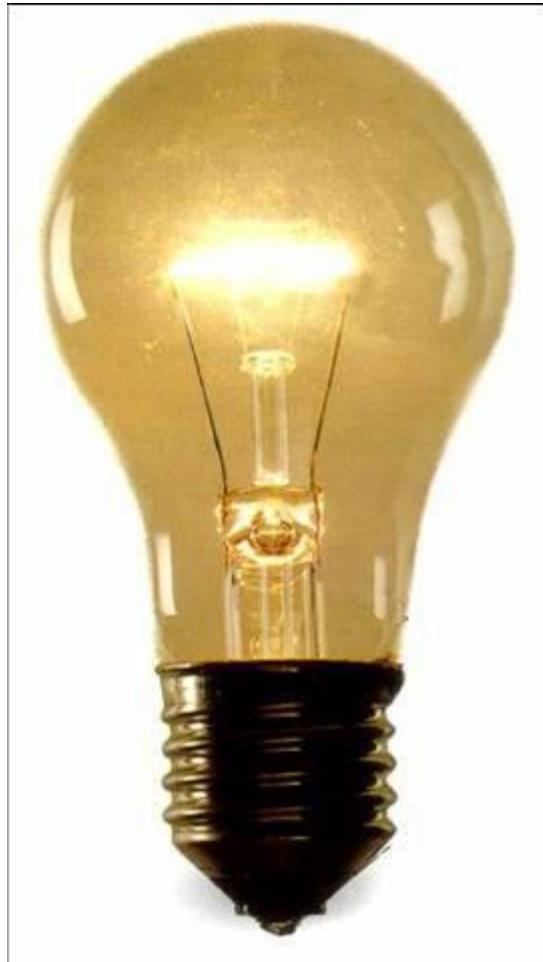
$$E_{b,\lambda_1 \rightarrow \lambda_2} = (F_{b,0 \rightarrow \lambda_1} - F_{b,0 \rightarrow \lambda_2}) \cdot E_b$$

$$E_{b\lambda} = f(\lambda, T) = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{c_2/(\lambda T)} - 1}$$



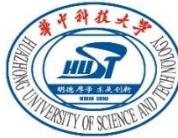
3 黑体热辐射基本定律

★波段辐射函数典型应用：白炽灯发光效率



100W白炽灯的发光效率是多少？

$$\eta_{\text{发光}} = \frac{\text{可见光波段的辐射能}}{\text{额定功率}} \times 100\%$$



3 黑体热辐射基本定律

★波段辐射函数典型应用：白炽灯发光效率

试确定一个电功率为100W的灯泡的发光效率。假设该灯泡的钨丝可看成是2900K的黑体，其表面积为 $2 \times 10^{-4} \text{m}^2$ 。

解：

$$\eta_{\text{发光}} = \frac{\text{可见光波段的辐射能}}{\text{额定功率}} \times 100\%$$

可见光波长为0.38~0.76μm，则单位面积可见光波长范围的辐射能为：

$$E_{b,0.38 \rightarrow 0.76} = (F_{b,0 \rightarrow 0.76} - F_{b,0 \rightarrow 0.38}) \cdot E_b$$



3 黑体热辐射基本定律

$$F_{b,0 \rightarrow \lambda} = f(\lambda T)$$

★波段辐射函数典型应用：白炽灯发光效率

$$E_{b,0.38 \rightarrow 0.76} = (F_{b,0 \rightarrow 0.76} - F_{b,0 \rightarrow 0.38}) \cdot E_b$$

$$\lambda_1 T = 0.38 \mu\text{m} \times 2900 \text{K} = 1102 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

$$\lambda_2 T = 0.76 \mu\text{m} \times 2900 \text{K} = 2204 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

由表6-1查得：

$$F_{b,0 \rightarrow 0.38} = 0.00094, \quad F_{b,0 \rightarrow 0.76} = 0.10189$$

于是单位面积可见光范围的辐射能为：

$$\begin{aligned} E_{b,0.38 \rightarrow 0.76} &= (F_{b,0 \rightarrow 0.76} - F_{b,0 \rightarrow 0.38}) \cdot E_b \\ &= (0.10189 - 0.00094) \times 5.67 \times \left(\frac{2900}{100} \right)^4 = 4.05 \times 10^4 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$



3 黑体热辐射基本定律

★波段辐射函数典型应用：白炽灯发光效率

发光效率为：

$$\eta_{\text{发光}} = \frac{E_{b,0.38 \rightarrow 0.76} \times A_{\text{钨丝}}}{E_{\text{总}}} \times 100\%$$

$$= \frac{4.05 \times 10^4 \times 0.0002}{100} \times 100\%$$

$$= 8.1\%$$

可见白炽灯的发光效率很低。

我国从2016年10月开始全面停产禁用白炽灯。



3 黑体热辐射基本定律

④ 兰贝特定律 (The Lambert's Law) : 揭示了黑体具有漫辐射表面的特性, 即沿半球空间各方向上定向辐射强度 $I_{b\theta}$ 均相等, 且满足:

$$I_{b\theta} = E_{b,\theta=0} = \text{const}$$



揭示了黑体辐射能的空间分布特性。



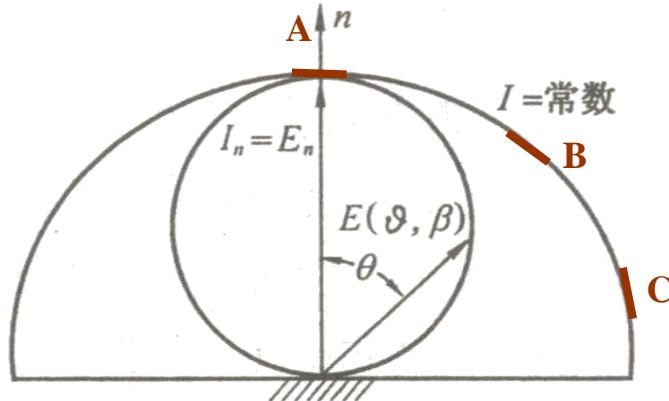
黑体辐射强度类似灯泡的亮度

“灯泡亮度”, 即从不同方向看过去, 其亮度都是一样的。



3 黑体热辐射基本定律

④ 兰贝特定律（余弦定律）



$$E_{b\theta} = I_{b\theta} \cos \theta$$

黑体辐射能的空间分布（定向辐射力）
不均匀，在法向最大，切向最小。

半球空间所有波长辐射能量的总和（半球辐射力 E ）：

$$E_b = \int_{\varpi=2\pi} I_b \cos \theta d\varpi = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} I_{b\theta} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = I_b \pi$$

遵守兰贝特定律的黑体辐射，半球辐射力等于定向辐射强度的 π 倍。



3 黑体热辐射基本定律

Planck定律：给出了特定波长下的辐射力；

Wien位移定律：给出了单色辐射力峰值波长 λ_m 与温度 T 的关系；

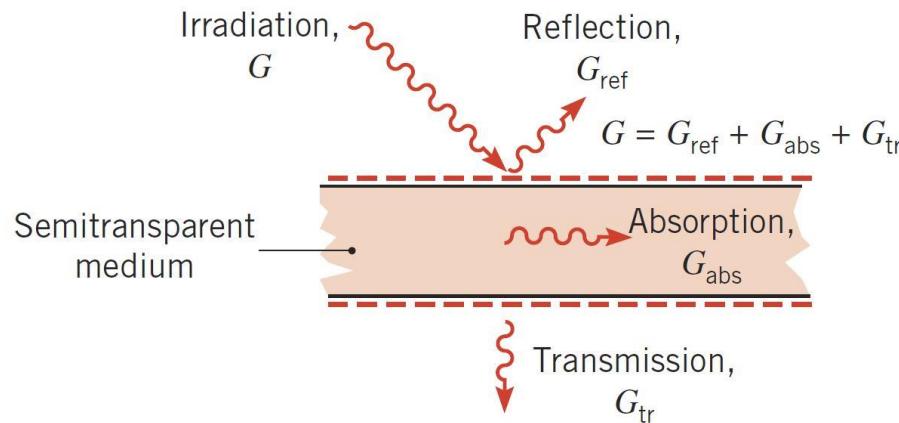
Stefan-Boltzmann定律：给出了一切波长下的总辐射力；

Lambert定律：描述了辐射能量按空间方向分布的规律。

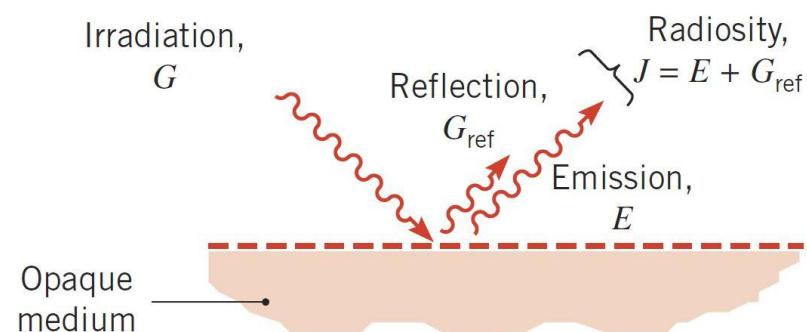


4 黑体的吸收特性

(1) 半透明体对辐射的吸收、反射与透射



(2) 不透明体对辐射的吸收和反射



事实上，物体不断向外辐射的同时，也不断接收外界环境投入辐射 G 的影响。

吸收比是表示物体吸收投入辐射的能力，用 α 表示。



4 黑体的吸收特性

吸收比可划分为以下四种：

- **总吸收比** (简称吸收比)：对来自**一切方向**和**所有波长**的入射辐射的吸收比；
- **单色吸收比**：对来自**一切方向的某一波长**的入射辐射的吸收比；
- **方向吸收比**：对来自**某一方向的所有波长**的入射辐射的吸收比；
- **单色方向吸收比**：对来自**某一方向某一波长**的入射辐射的吸收比。

黑体是理想的吸收体，它对一切波长和所有方向入射辐射的吸收比均等于1。于是对黑体有：

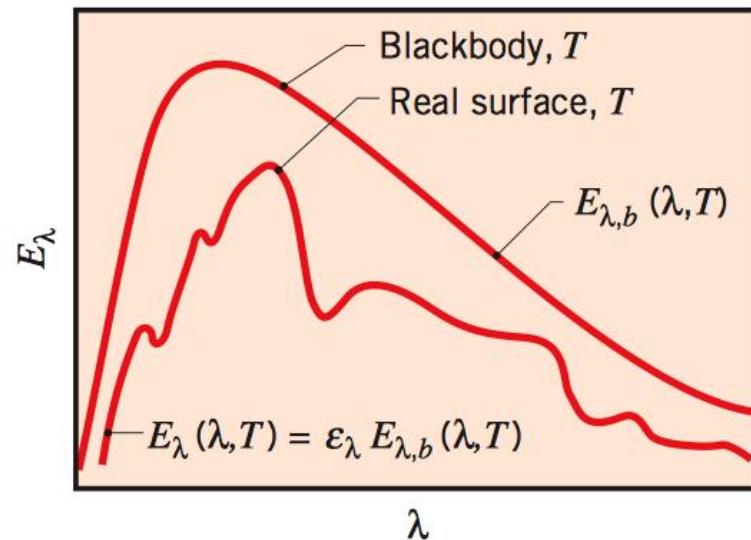
$$\alpha_b = \alpha_{b\lambda} = \alpha_{b\phi} = \alpha_{b\lambda,\phi} = 1$$



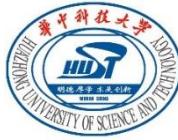
§ 6-3 实际物体的辐射和吸收

1 实际物体的辐射性质

- 实际物体表面的热辐射性能均弱于黑体表面。
- 实际物体的光谱辐射力往往随波长作不规则的变化。



同温度下黑体辐射和实际物体辐射的单色辐射力随温度变化的曲线



1 实际物体的辐射性质

黑度（发射率emissivity）：实际表面的辐射力与同温度下黑体辐射力的比值。

① 总发射率（发射率/黑度） total emissivity

$$\varepsilon = \frac{E}{E_b}$$

黑度仅仅与物体表面自身的辐射特性相关，也就是与物体的种类、它的表面特征以及物体的温度相关，而与物体外部环境的情况无关。

根据辐射力的不同定义，可以得到不同的发射率。



1 实际物体的辐射性质

② 单色（光谱）发射率 spectral emissivity

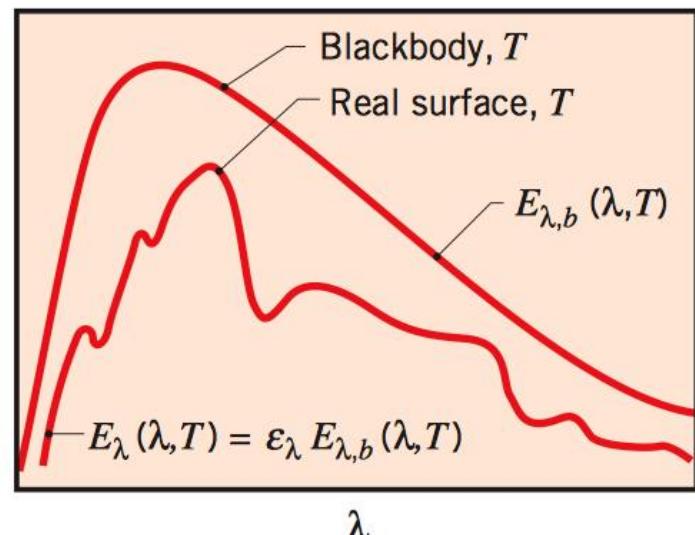
$$\varepsilon = \frac{E}{E_b}$$

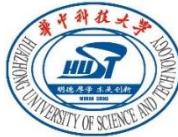
实际表面的单色辐射力与同温度下黑体表面的单色辐射力之比

$$\varepsilon_\lambda = \frac{E_\lambda}{E_{b\lambda}}$$

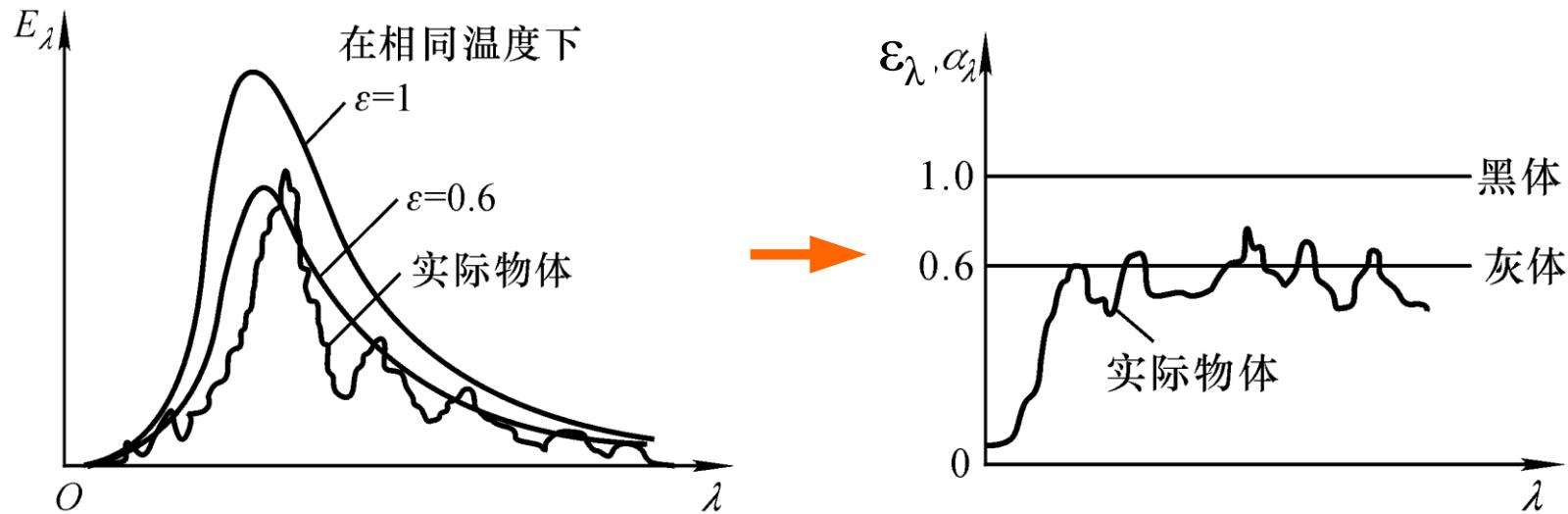
发射率与单色发射率之间的关系为：

$$\varepsilon = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda E_{b\lambda} d\lambda}{E_b}$$





1 实际物体的辐射性质—光谱发射率特性



$$\varepsilon = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda} E_{b\lambda} d\lambda}{E_b} \quad \xrightarrow{\varepsilon_{\lambda} = \text{const}} \quad \text{灰体}$$
$$E = \varepsilon_{\lambda} E_b = \varepsilon E_b$$

(发射和吸收特性与波长无关)



1 实际物体的辐射性质

$$E = \varepsilon_\lambda E_b = \varepsilon E_b$$

- 口 真实物体表面的辐射力并非严格随温度的四次方定律，但为了简化，基于灰体的概念，实际物体的辐射力仍可按与热力学温度的四次方成正比计算。
- 口 实际物体与灰体之间的**偏差**，被**归在发射率**的值中。
- 口 由于以上原因，发射率除了与物体本身性质有关外还与**温度**相关。



1 实际物体的辐射性质

③ 方向发射率directional emissivity

物体表面在某方向上的方向辐射力与同温度黑体辐射在该方向上的方向辐射力之比。

$$\varepsilon_\theta = \frac{E_\theta}{E_{b\theta}} = \frac{I_\theta \cos \theta}{I_{b\theta} \cos \theta} = \frac{I_\theta}{I_{b\theta}}$$

漫射表面  = const

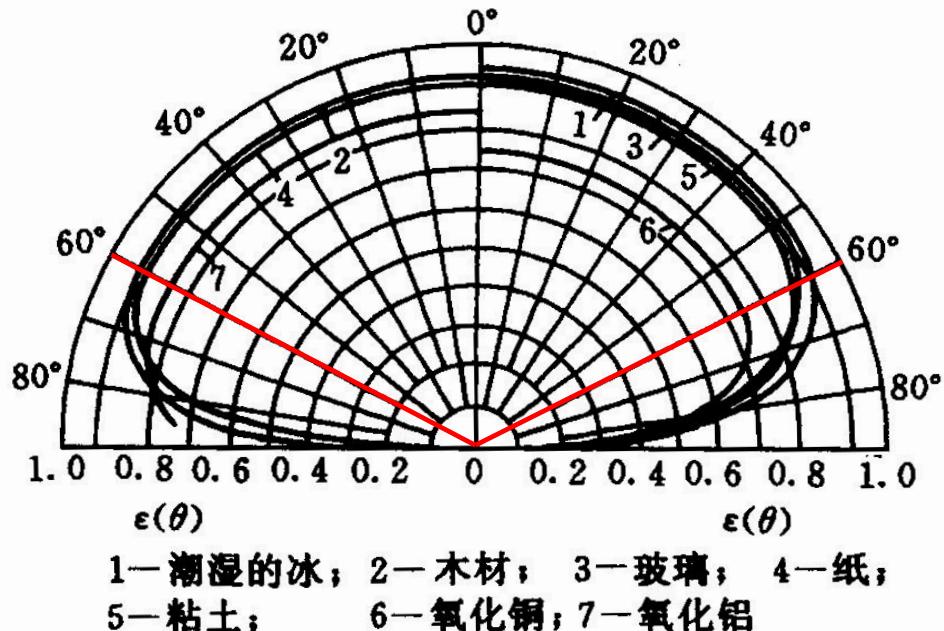
④ 单色方向发射率 spectral directional emissivity

$$\varepsilon_{\lambda,\theta} = \frac{E_{\lambda,\theta}}{E_{b\lambda,\theta}}$$

1 实际物体的辐射性质—方向发射率特性

实际物体：**非漫射表面**，辐射强度在空间各个方向的分布不遵循兰贝特定律，是方向角的函数。

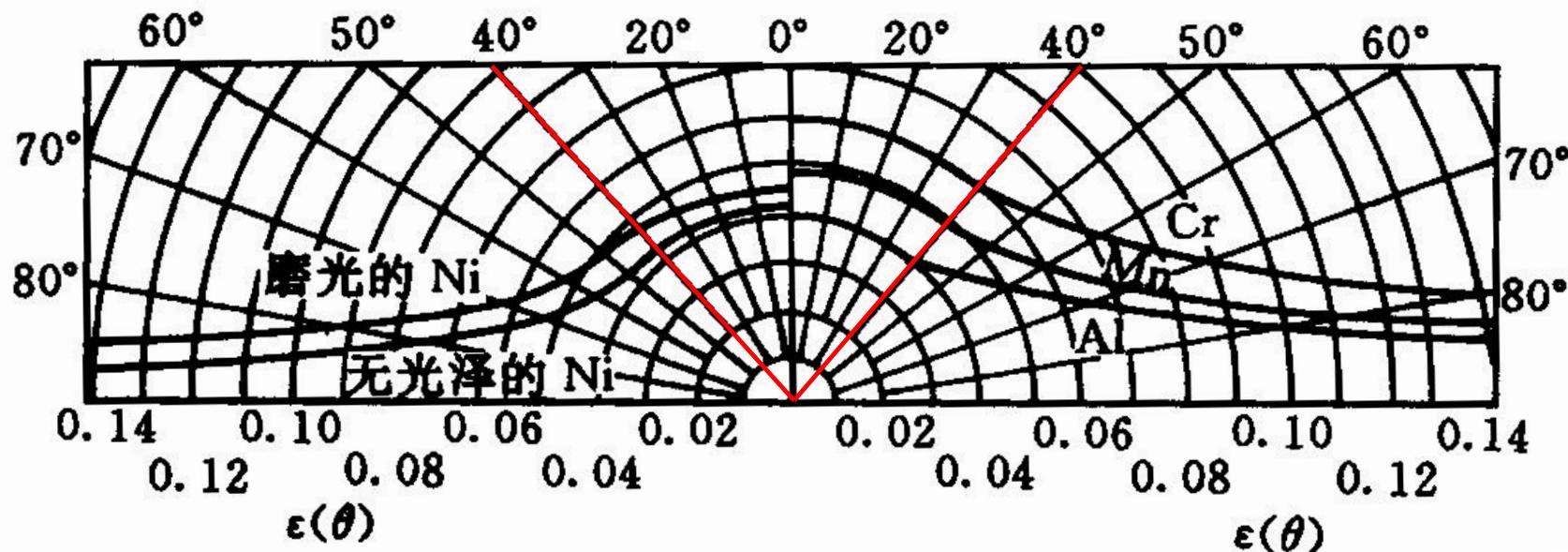
- **非金属表面**在很大范围内方向发射率为一个常数值，表现出等强辐射的特征，而在**60°**之后方向黑度急剧减小。



Typical directional behavior of emissivity for nonconductors

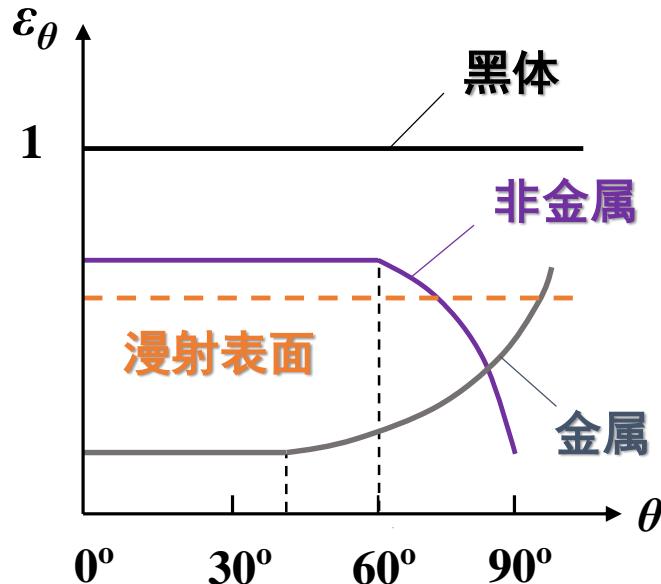
1 实际物体的辐射性质—方向发射率特性

- **金属表面：**在一个小的 θ 角范围内 ($<40^\circ$) 亦有等强辐射的特征，方向发射率可视为不变，然后随着 θ 角增大而急剧增大，直到 θ 接近 90° 才有减小。





1 实际物体的辐射性质—方向发射率特性

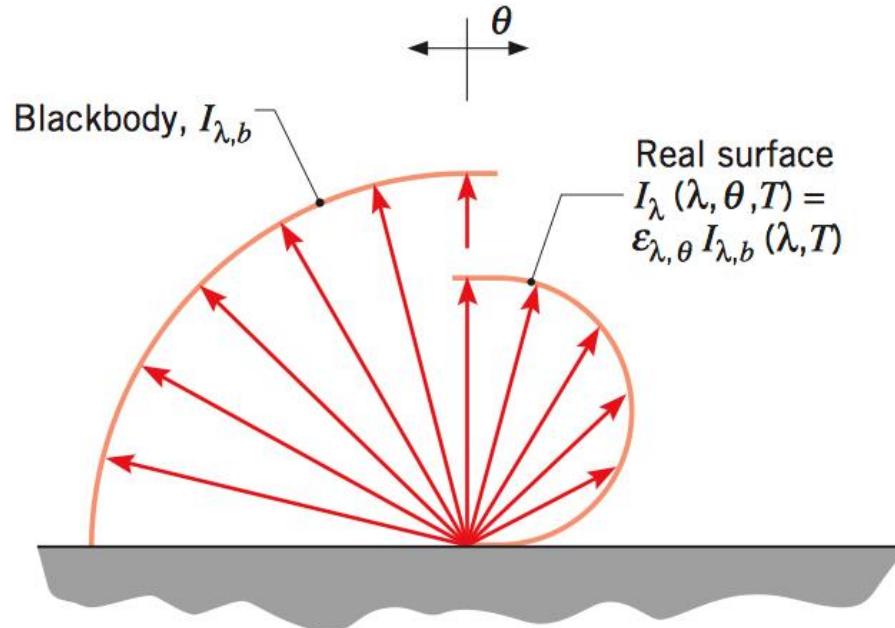


$$\varepsilon_\theta = \frac{E_\theta}{E_{b\theta}} = \frac{I_\theta \cos \theta}{I_{b\theta} \cos \theta} = \frac{I_\theta}{I_{b\theta}}$$

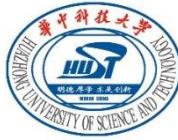
如果实际物体的方向辐射力遵守兰贝特定律，则其方向辐射率等于常数，该物体表面即称为**漫射表面**。



1 实际物体的辐射性质—方向发射率特性



- 一般来说，与壁面法线方向成 60° 的范围内，大多数金属非金属的定向发射率均为常数，而表面辐射能量绝大部分亦位于该区域，因此可以将工程上大多数材料看成漫射体。

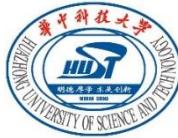


1 实际物体的辐射性质

工程上主要应用的是沿半球空间的**平均发射率**，即总发射率。一般发射率多用实验方法测定，而测量法线方向的方向发射率最为简单，所以我们通常测量物体表面的发射率是**法线方向上的方向发射率** $\varepsilon_{\theta=0}$ 。

金属： $\varepsilon = 1.2 \varepsilon_{\theta=0}$

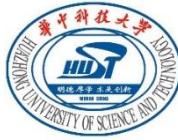
非金属： $\varepsilon = (0.95 \sim 0.98) \varepsilon_{\theta=0}$



1 实际物体的辐射性质

实际物体总发射率的特点：

- 口 物体表面的发射率只取决于发射体本身，**与外界条件无关**。
- 口 影响因素：**温度**、材料种类、表面特性、状况，如粗糙度、氧化和玷污程度、表面涂层厚度等。
- 口 大部分**非金属材料**的发射率都在0.85-0.95之间，且与表面状况关系不大，通常可取为**0.9**。
- 口 同一种金属，表面状况不同，发射率不同；氧化、粗糙表面高于非氧化、光滑表面，如**磨光的铜**，法向发射率为0.03，**氧化的铜**的法向发射率为0.6-0.7。

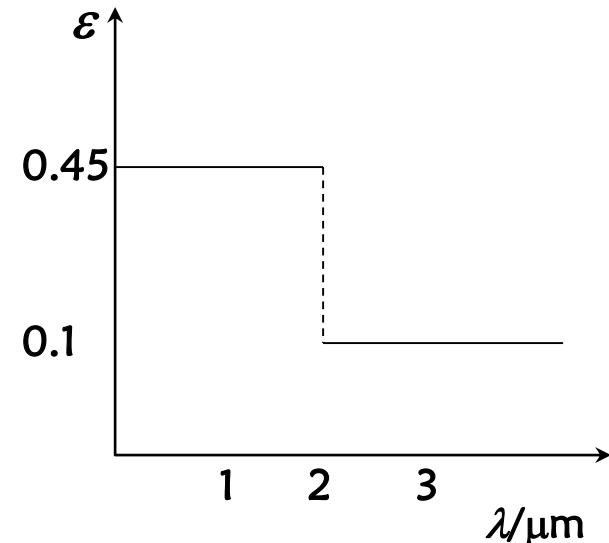


1 实际物体的辐射性质—例题

例：实验测得2500K钨丝的法向单色发射率如图所示，计算其辐射力及发光效率。

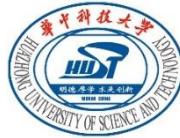
解：

$$\eta_{\text{发光}} = \frac{\text{可见光波段的辐射能}}{\text{总辐射能}} \times 100\%$$



可见光波长为0.38~0.76μm，则单位面积可见光波长范围的辐射能为：

$$E_{0.38 \rightarrow 0.76} = \epsilon_{0.38 \rightarrow 0.76} E_{b, 0.38 \rightarrow 0.76} = 0.45 (F_{b, 0 \rightarrow 0.76} - F_{b, 0 \rightarrow 0.38}) \cdot E_b$$



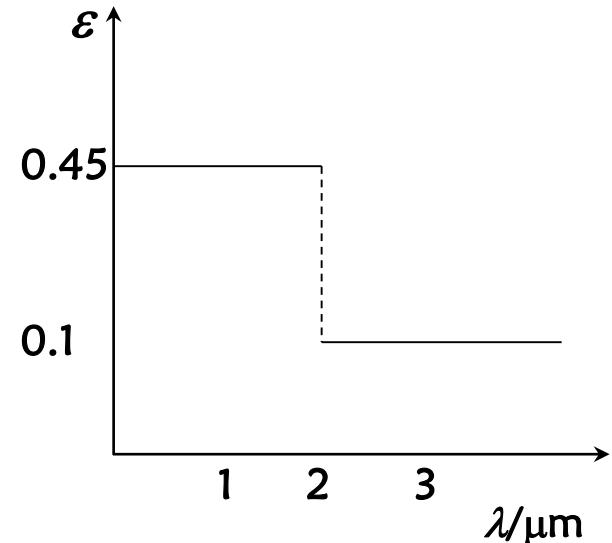
1 实际物体的辐射性质—例题

$$\lambda_1 T = 0.38\mu\text{m} \times 2500\text{K} = 950\mu\text{m} \cdot \text{K}$$

$$\lambda_2 T = 0.76\mu\text{m} \times 2500\text{K} = 1900\mu\text{m} \cdot \text{K}$$

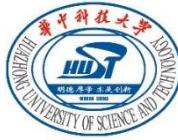
由表6-1查得：

$$F_{b,0 \rightarrow 0.38} = 0.0003, \quad F_{b,0 \rightarrow 0.76} = 0.0523$$



于是单位面积可见光范围的辐射能为：

$$\begin{aligned} E_{0.38 \rightarrow 0.76} &= \epsilon_{0.38 \rightarrow 0.76} E_{b,0.38 \rightarrow 0.76} = 0.45 (F_{b,0 \rightarrow 0.76} - F_{b,0 \rightarrow 0.38}) \cdot E_b \\ &= 0.45 \times (0.0523 - 0.0003) \times 5.67 \times \left(\frac{2500}{100} \right)^4 = 5.18 \times 10^4 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$



1 实际物体的辐射性质—例题

$$\eta_{\text{发光}} = \frac{\text{可见光波段的辐射能}}{\text{总辐射能}} \times 100\%$$



$$E = \varepsilon E_b$$



$$\varepsilon = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda} E_{b\lambda} d\lambda}{E_b} = \frac{1}{E_b} \left(\int_0^2 \varepsilon_{\lambda 1} E_{b\lambda} d\lambda + \int_2^{\infty} \varepsilon_{\lambda 2} E_{b\lambda} d\lambda \right)$$

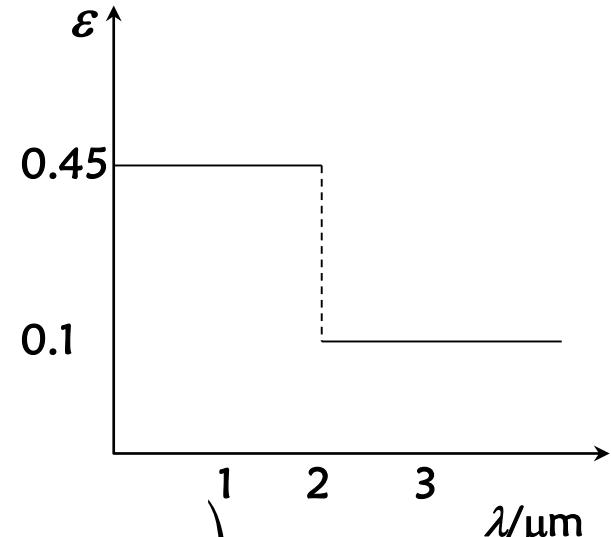
$$= \varepsilon_{\lambda 1} F_{b,0 \rightarrow 2} + \varepsilon_{\lambda 2} (1 - F_{b,0 \rightarrow 2})$$

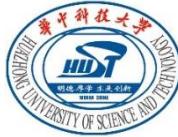


$$\lambda_0 T = 2\mu\text{m} \times 2500\text{K} = 5000\mu\text{m} \cdot \text{K} \xrightarrow{\text{查表}} F_{b,0 \rightarrow 2} = 0.6341$$



$$\varepsilon = 0.322$$



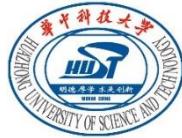


1 实际物体的辐射性质—例题

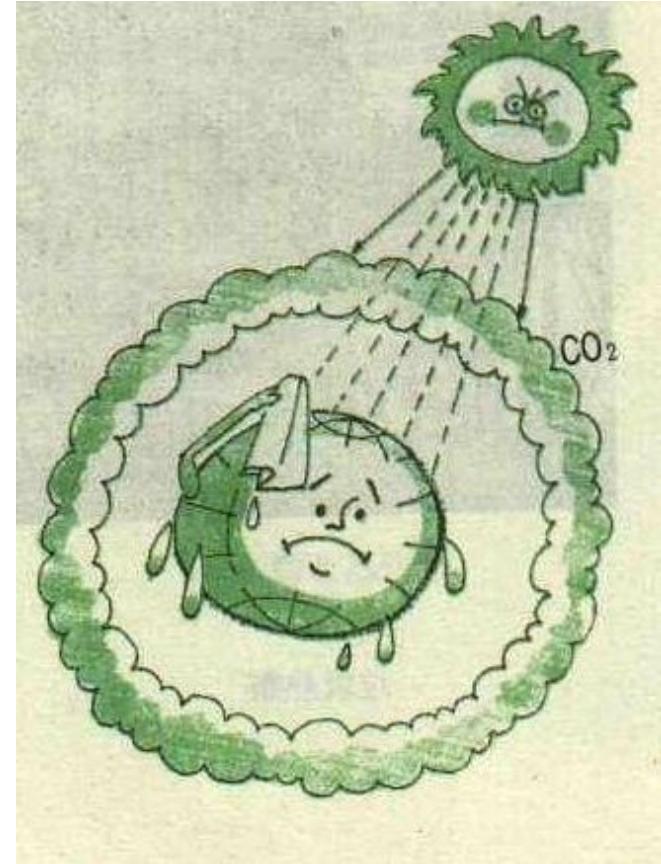
$$E = \varepsilon E_b = 0.322 \times 5.67 \times \left(\frac{2500}{100} \right)^4 = 7.13 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$

$$\begin{aligned}\eta_{\text{发光}} &= \frac{\text{可见光波段的辐射能}}{\text{总辐射能}} \times 100\% \\ &= \frac{\Delta E}{E} = \frac{5.18 \times 10^4}{7.13 \times 10^5} = 7.27\%\end{aligned}$$

可见发光效率很低。另注意，例题中近似认为总发射率 \approx 法向发射率。

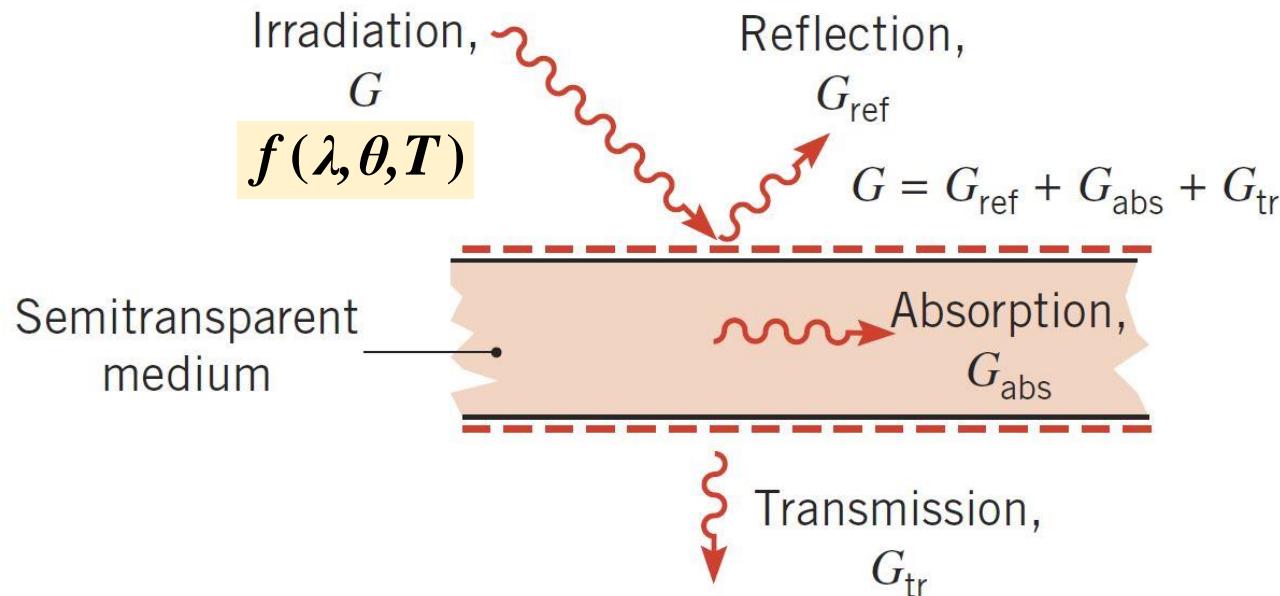


问题：温室效应的原理？

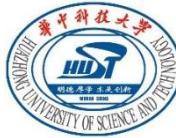


2 实际物体的吸收特性

实际物体表面对热辐射的吸收是针对投入辐射而言的。



Nontransparent : the transmission part equal to zero.



2 实际物体的吸收特性

① 投入辐射 (irradiation) :

单位时间内投射到单位表面积上的总辐射能。

② 吸收比 (absorptance) : 物体对投入辐射所吸收的百分数, 通常用 α 表示, 即:

$$\alpha = \frac{\text{吸收的能量}}{\text{投入的能量 (投入辐射)}} = \frac{G_{abs}}{G}$$

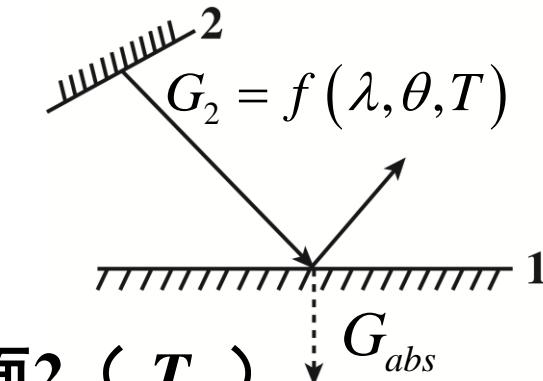
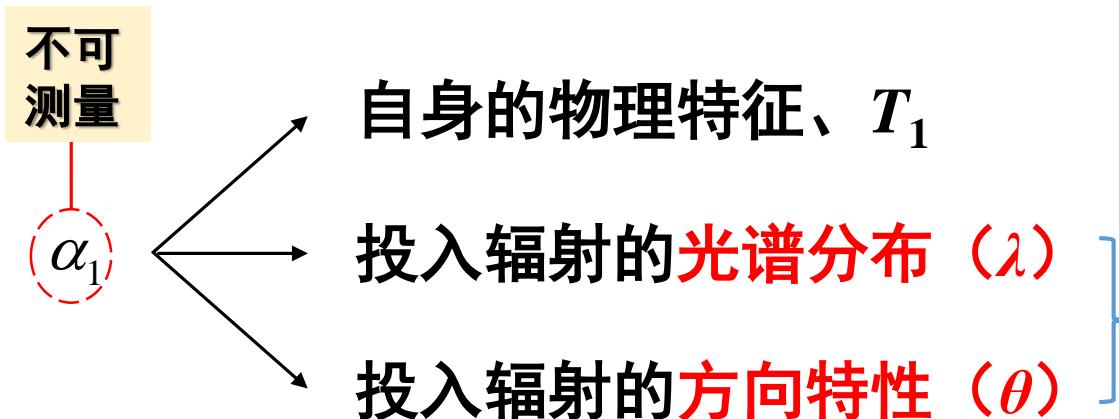
③ 选择性吸收 (selective absorption) $f(\lambda, \theta, T)$

投入辐射本身具有光谱特性和方向特性, 因此, 实际物体对投入辐射的吸收能力也与投入辐射的波长和空间角有关。

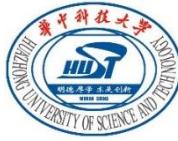


2 实际物体的吸收特性

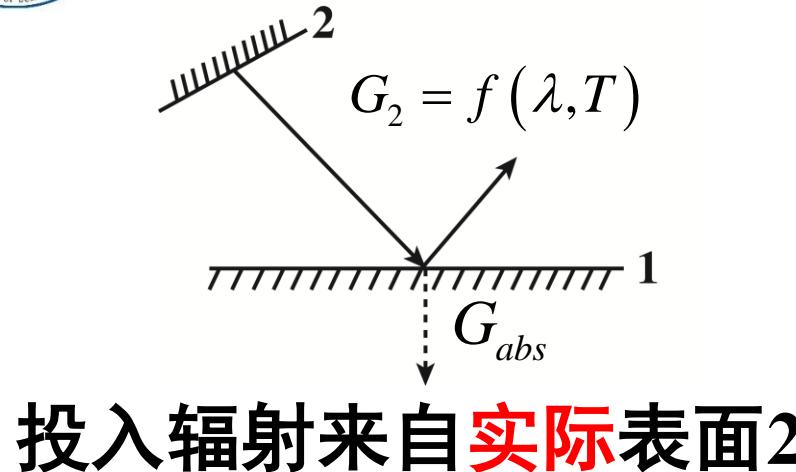
- 假定投入辐射来自实际表面2，那么吸收表面1对其的吸收比



- 在本课程中，我们仅考虑吸收比受波长的影响，忽略方向特性的影响。即认为实际物体表面是“漫”的，或者在半球方向上已经作积分。



2 实际物体的吸收特性



$$\alpha = \frac{G_{abs}}{G}$$

对漫射表面成立

$$\alpha_1 = \frac{\int_0^{\infty} \alpha_{\lambda}(T_1) \varepsilon_{\lambda}(T_2) E_{b\lambda}(T_2) d\lambda}{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda}(T_2) E_{b\lambda}(T_2) d\lambda}$$



投入辐射来自**黑体**表面2

$$\alpha_1 = \frac{\int_0^{\infty} \alpha_{\lambda}(T_1) E_{b\lambda}(T_2) d\lambda}{\int_0^{\infty} E_{b\lambda}(T_2) d\lambda}$$

α_{λ} 为**物体表面**对黑体辐射的单色吸收比。

2 实际物体的吸收特性

- 假定投入辐射来自**黑体表面2**，那么**吸收表面1**对其的吸收比可以定义为：

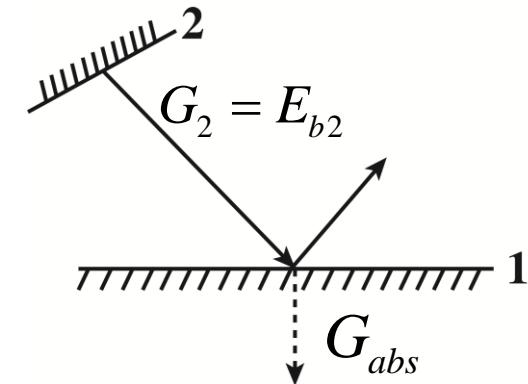
$$\alpha_1 = \frac{\int_0^{\infty} \alpha_{\lambda}(T_1) E_{b\lambda}(T_2) d\lambda}{\int_0^{\infty} E_{b\lambda}(T_2) d\lambda} = \int_0^{\infty} \frac{\alpha_{\lambda}(T_1) E_{b\lambda}(T_2) d\lambda}{\sigma_0 T_2^4}$$

$$= f(T_1, \boxed{T_2}, \text{表面1性质}, \boxed{\text{表面2性质}})$$



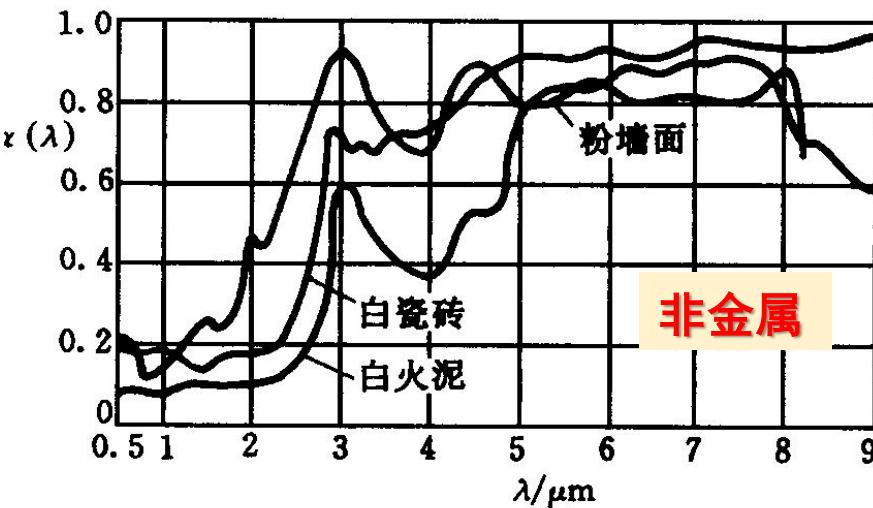
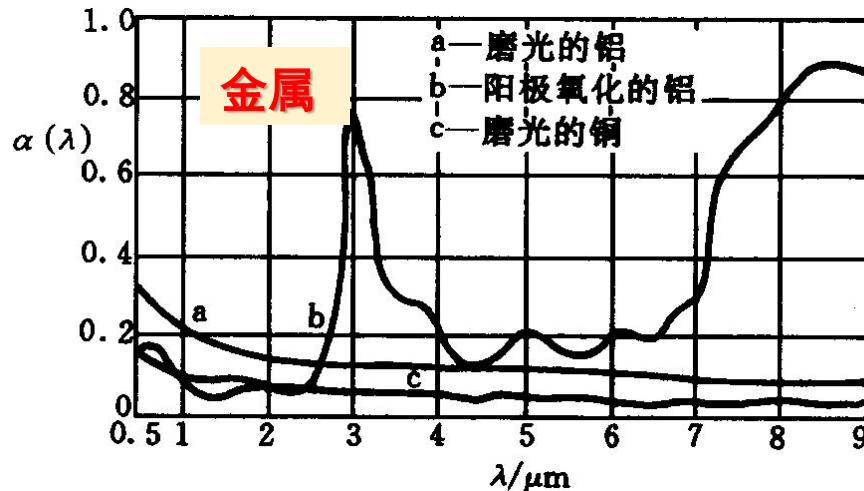
$$\varepsilon_1 = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda 1} E_{b\lambda} d\lambda}{E_b} = f(T_1, \text{表面1性质})$$

(dependent on itself)

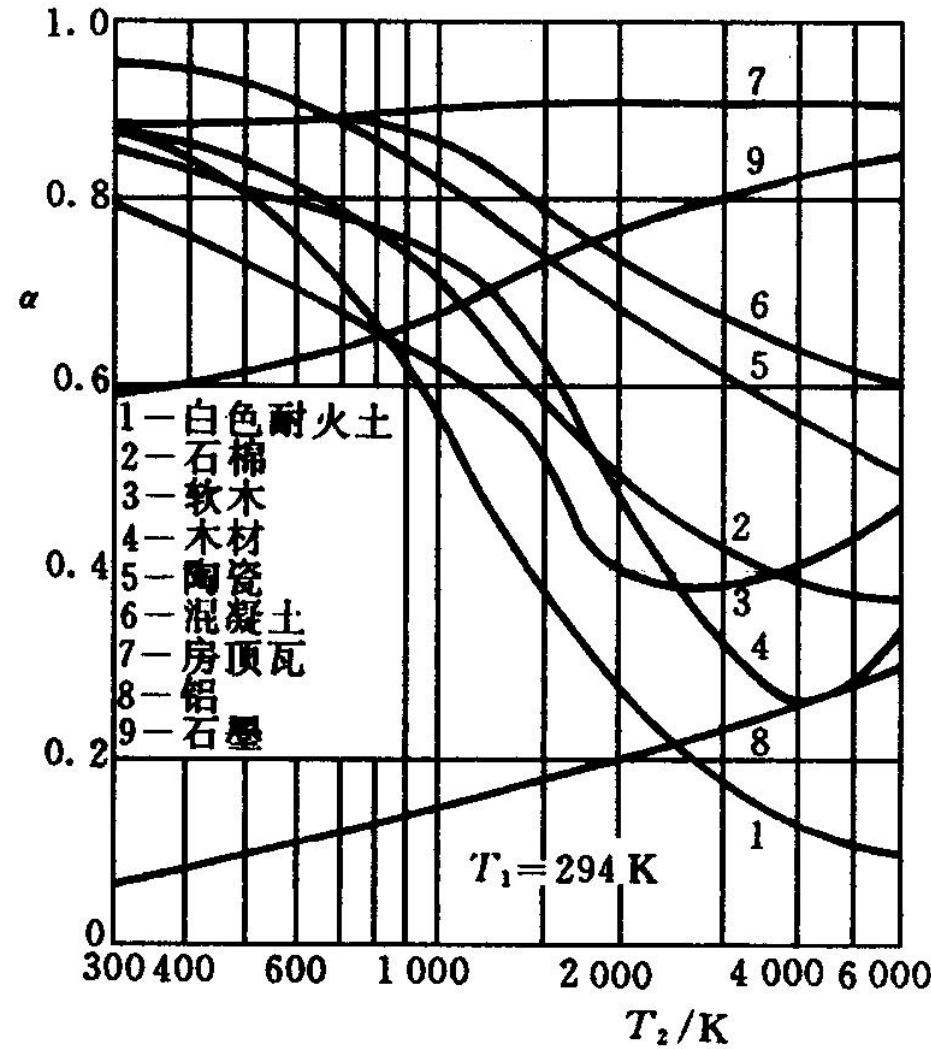


实际物体的吸收
比发射更复杂。

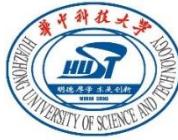
2 实际物体的吸收特性



$$\alpha \sim \lambda$$



$$\alpha \sim T_2$$

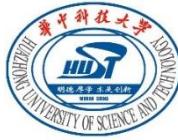


2 实际物体的吸收特性

物体表面的单色吸收比随波长变化的特性，称为吸收的**波长选择性**。

应用实例：

- **万物的色彩**。物体对不同波段的吸收比不同。
- **墨镜**。吸收紫外线。
- **玻璃暖房**。玻璃对可见光是透明的，即吸收比很小，但对红外光的吸收比却很大。



2 实际物体的吸收特性—温室效应

物体表面的单色吸收比随波长变化的特性，称为吸收的**波长选择性**。



- 太阳 (5800K)
- ↑
- 玻璃对波长小于 $2\mu\text{m}$ 的辐射能吸收比很小；
 - 而玻璃对于波长大于 $3\mu\text{m}$ 的辐射能吸收比很大；
- ↓
- 普通物体 (298K)

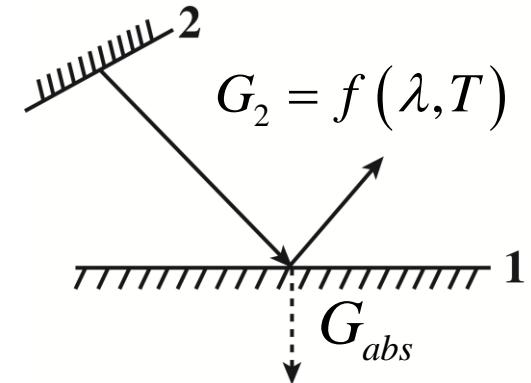


2 实际物体的吸收特性

如果物体表面的单色吸收比为常数，

$$\alpha_\lambda = \text{const}$$

那么它的吸收比也就为常数



$$\alpha_1 = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda(T_1) \varepsilon_\lambda(T_2) E_{b\lambda}(T_2) d\lambda}{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda(T_2) E_{b\lambda}(T_2) d\lambda} = \alpha_\lambda = \text{const}$$

这样吸收比就和投射表面无关，仅与表面1自身特性有关了。

与波长无关

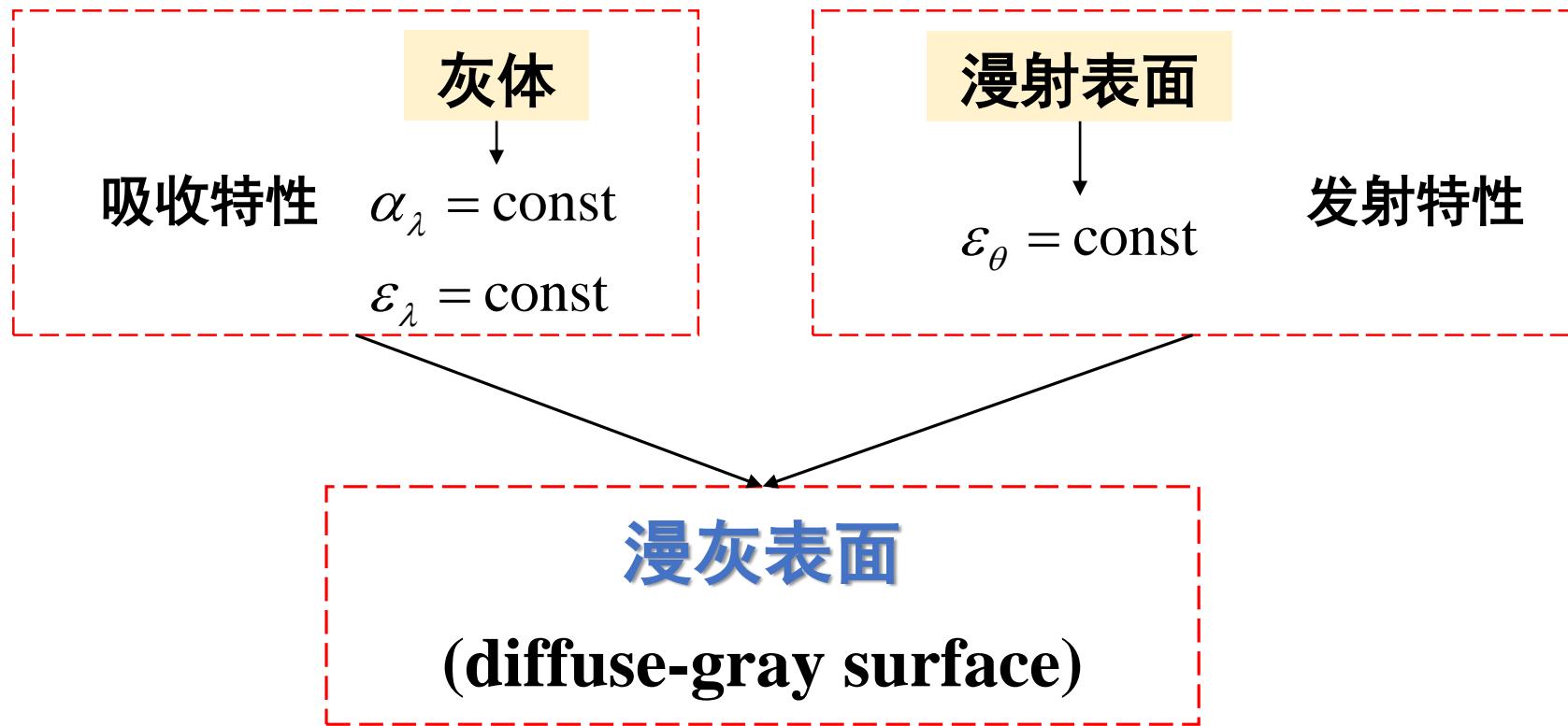


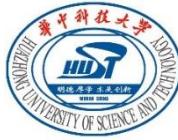
灰体



2 实际物体的吸收特性

灰体 (gray body): 单色吸收比和单色发射率与波长无关的物体。

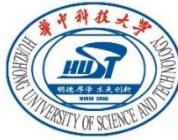




2 实际物体的吸收特性

Notes:

- 与黑体一样，灰体也是一种理想物体。工业上通常遇到的物体的辐射多为**红外辐射**，将其视为灰体是允许的。
- 灰体的引入可使辐射换热的计算大大简化。
- 漫灰表面是基尔霍夫定律应用的重要条件。



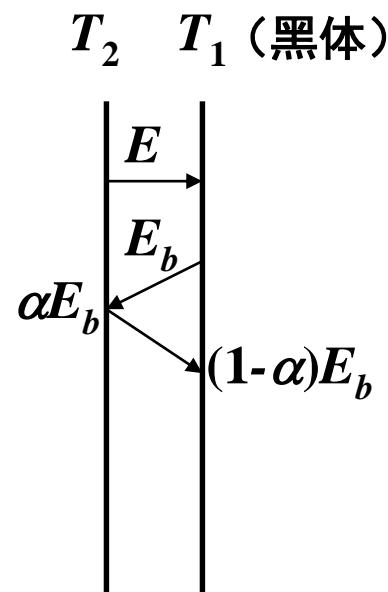
3 基尔霍夫定律 (Kirchhoff's law)

描述实际物体辐射与吸收之间关系的定律。

物理模型：假定两块平行平板距离很近，从一块板发出的辐射能全部落到另一块板上。若板1为黑体表面，板2为任意物体的表面。

两者的辐射力、吸收比和表面温度分别为：

E_b 、 $\alpha_b (=1)$ 、 T_1 ； E 、 α 和 T_2 。





3 基尔霍夫定律 (Kirchhoff's law)

板2发出的辐射能 E 全部被板1吸收，而板1发出的辐射能 E_b 只被板2吸收 αE_b ，因此板2能量收支为：

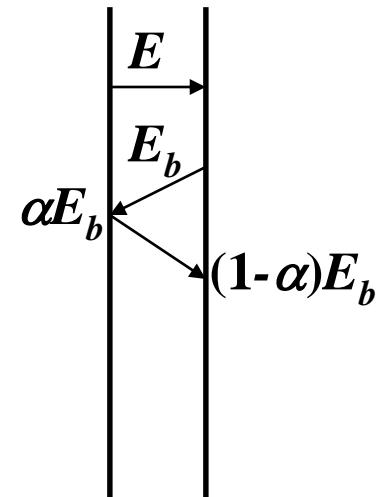
$$q = E - \alpha E_b$$

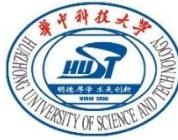
T_2 T_1 (黑体)

当体系处于热平衡时 $T_1=T_2$, $q=0$, 则

$$q = E - \alpha E_b = 0$$

即: $\frac{E}{\alpha} = E_b$ 或 $\alpha = \frac{E}{E_b} = \varepsilon$





3 基尔霍夫定律 (Kirchhoff's law)

$$\frac{E}{\alpha} = E_b \quad \text{或} \quad \alpha = \frac{E}{E_b} = \varepsilon$$

a. 满足基尔霍夫定律的物体，其辐射力与吸收率的比值恒等于同温度下的绝对黑体的辐射力，而与物体的性质无关。

b. 热平衡时任意物体对黑体投入辐射的吸收比等于同温度下该物体的发射率。



必要条件：物体与黑体投入辐射热平衡



3 基尔霍夫定律 (Kirchhoff's law)

投入辐射既非来自黑体，也不可能
处于热平衡，何时不需此限制呢？



3 基尔霍夫定律 (Kirchhoff's law)

某温度 T 下：某物体
与黑体处于热平衡

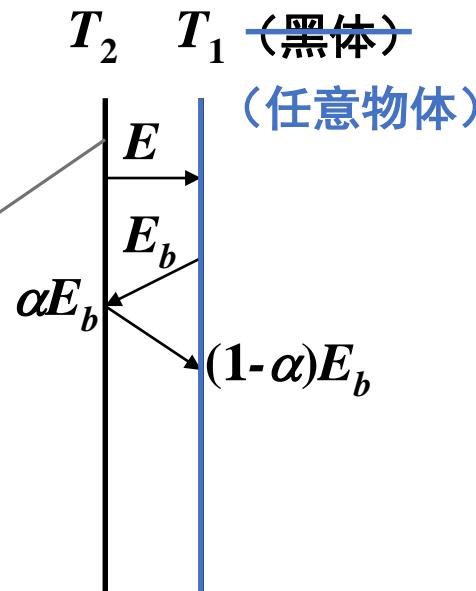
基尔霍夫定律

$$\alpha(T) = \varepsilon(T)$$

$$\alpha(T_2) = \alpha_\lambda(T_2)$$

$$\varepsilon(T_2) = \varepsilon_\lambda(T_2)$$

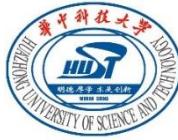
灰体



α 和 ε 与投入辐射
是否为黑体，温
度如何无关

结论：灰体是无条件满足基尔霍夫定律的。

$$\alpha = \varepsilon$$



3 基尔霍夫定律 (Kirchhoff's law)

$$\alpha_\lambda = \frac{\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \alpha_{\lambda,\theta} I_\theta \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I_\theta \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi} \stackrel{?}{=} \frac{\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \varepsilon_{\lambda,\theta} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi} = \varepsilon_\lambda$$

等号的成立只要满足下列两种情况之一即可：

多数表面满足，特别是非金属材料满足

- ① 该表面为漫射表面， $\alpha_{\lambda,\theta}$ ， $\varepsilon_{\lambda,\theta}$ 与空间角无关；
- ② 投入辐射面为漫射表面， $I_\theta = \text{const.}$

绝大多数工程材料满足

Note: $\alpha_{\lambda,\theta} = \varepsilon_{\lambda,\theta}$ 恒成立，是表面的固有属性。



3 基尔霍夫定律 (Kirchhoff's law)

$$\alpha = \frac{\int_0^{\infty} \alpha_{\lambda}(T_1) G_{\lambda}(\lambda, T_2) d\lambda}{G(T_2)} \stackrel{?}{=} \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda} E_{b\lambda}(T_1) d\lambda}{E_{\lambda}(T_1)} = \varepsilon$$

若两表面其一是漫射表面，则： $\alpha_{\lambda} = \varepsilon_{\lambda}$ 。

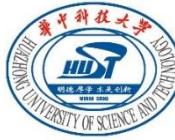
等号的成立只要满足下列两种情况之一即可：

与黑体处于热平衡

① $G(T_2) = E_b(T_1)$ 且 $G_{\lambda}(\lambda, T_2) = E_{b\lambda}(T_1)$ ；

② 该表面为灰体， α_{λ} ， ε_{λ} 与波长无关。

结论：漫灰表面是无条件满足基尔霍夫定律的。



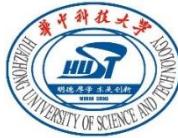
3 基尔霍夫定律 (Kirchhoff's law)

基尔霍夫定律有**几个层次上的表达式**:

层 次	数学表达式	成立条件
单色, 定向	$\varepsilon(\theta, \phi, \lambda, T) = \alpha(\theta, \phi, \lambda, T)$	无条件
单色, 半球	$\varepsilon(\lambda, T) = \alpha(\lambda, T)$	漫射表面
全波段, 半球	$\varepsilon(T) = \alpha(T)$	与黑体热平衡或 漫灰表面

Notes:

(1) 对工程计算而言, 只要在所研究的波长范围内单色吸收率基本上与波长无关, 则**灰体假设成立**。在工程常见的温度范围 ($\leq 2000K$) 内, 许多工程材料都具有这一特点。

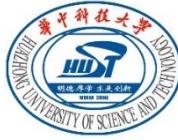


3 基尔霍夫定律 (Kirchhoff's law)

Notes:

(2) 由基尔霍夫定律，物体的辐射力越大，其吸收能力也就越大，换句话说，满足基尔霍夫定律的实际物体，**善于辐射必善于吸收**，反之亦然。所以，同温度下黑体的辐射力最大。

(3) 当研究物体表面对太阳能的吸收时，一般不能把物体作为灰体，即不能把物体在常温下的发射率作为对太阳能的吸收比。原因在于**太阳辐射中可见光占比大**，物体对可见光的吸收差别较大。



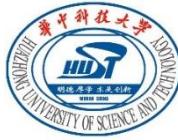
3 基尔霍夫定律 (Kirchhoff's law) —例题

例：一火床炉墙内表面温度为500K，其光谱发射率可近似地表示为： $\lambda \leq 1.5\mu\text{m}$ 时， $\varepsilon_\lambda = 0.1$ ， $\lambda = 1.5 \sim 10\mu\text{m}$ 时， $\varepsilon_\lambda = 0.5$ ； $\lambda > 10\mu\text{m}$ 时， $\varepsilon_\lambda = 0.8$ （**非灰体**）；炉墙内壁接受来自燃烧着的煤层的辐射，煤层温度为2000K。设煤层的辐射可作为黑体辐射，炉墙为**漫射**表面，试计算（1）炉墙发射率及其（2）对煤层辐射的吸收比。

解：

（1）按发射率定义：

$$\varepsilon(T_1) = \frac{\varepsilon_{\lambda,1}}{E_b} \int_0^{\lambda_1} E_{b\lambda} d\lambda + \frac{\varepsilon_{\lambda,2}}{E_b} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_{b\lambda} d\lambda + \frac{\varepsilon_{\lambda,3}}{E_b} \int_{\lambda_2}^{\infty} E_{b\lambda} d\lambda$$



3 基尔霍夫定律 (Kirchhoff's law) — 例题

$$\varepsilon(T_1) = \varepsilon_{\lambda,1} \frac{\int_0^{\lambda_1} E_{b\lambda} d\lambda}{E_b} + \varepsilon_{\lambda,2} \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_{b\lambda} d\lambda}{E_b} + \varepsilon_{\lambda,3} \frac{\int_{\lambda_2}^{\infty} E_{b\lambda} d\lambda}{E_b}$$

$$\lambda_1 T = 1.5 \mu\text{m} \times 500 \text{K} = 750 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

查表得: $F_{b,0 \rightarrow \lambda_1} = 0.000$

$$\lambda_2 T = 10 \mu\text{m} \times 500 \text{K} = 5000 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

$F_{b,0 \rightarrow \lambda_2} = 0.0634$

$$\varepsilon(T_1) = 0.1 \times 0.000 + 0.5 \times 0.634 + 0.8 \times (1 - 0.634) = 0.61$$

(2) 按吸收比定义:

$$\alpha = \int_0^{\infty} \alpha_{\lambda}(\lambda, \boxed{T_1}) E_{b\lambda}(T_2) d\lambda / \int_0^{\infty} E_{b\lambda}(\boxed{T_2}) d\lambda$$

炉膛温度 煤层温度



3 基尔霍夫定律 (Kirchhoff's law) —例题

$$\alpha = \int_0^{\infty} \alpha_{\lambda}(\lambda, T_1) E_{b\lambda}(T_2) d\lambda / \int_0^{\infty} E_{b\lambda}(T_2) d\lambda$$

因为炉墙是漫射的：

$$\varepsilon(\lambda, T) = \alpha(\lambda, T)$$

$$\alpha = \varepsilon(\lambda_1) F_{b,0 \rightarrow \lambda_1} + \varepsilon(\lambda_2) F_{b,\lambda_1 \rightarrow \lambda_2} + \varepsilon(\lambda_3) F_{b,\lambda_3 \rightarrow \infty}$$

其中的辐射函数是2000K下的值：

$$\lambda_1 T_2 = 1.5 \mu\text{m} \times 2000 \text{K} = 3000 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

查表得：

$$F_{b,0 \rightarrow \lambda_1} = 0.274$$

$$\lambda_2 T_2 = 10 \mu\text{m} \times 2000 \text{K} = 20000 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

$$F_{b,0 \rightarrow \lambda_2} = 0.986$$



3 基尔霍夫定律 (Kirchhoff's law) —例题

$$\alpha = 0.1 \times 0.274 + 0.5 \times (0.986 - 0.274) + 0.8 \times (1 - 0.986) = 0.395$$

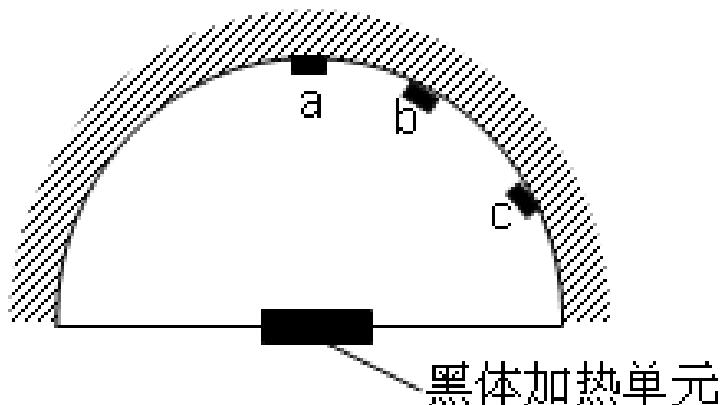
这里 $\varepsilon(T_1) = 0.61$, 而 $\alpha(T_1, T_2) = 0.395$, $\alpha \neq \varepsilon$ 。这是由于在所研究的波长范围内, $\alpha(\lambda)$ 不是常数所致。 (非漫灰表面)



作业：

6-3, 6-10, 6-12, 6-13 , 6-14

例题：如图所示的真空辐射炉，球心处有一黑体加热元件，试比较a、b、c三处定向辐射强度的大小、辐射能量的大小。假设a、b、c处对球心所张立体角相同。

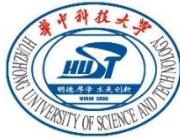




第七章 辐射换热计算

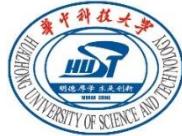
§ 7-1 黑体表面间的辐射换热

§ 7-2 灰体表面间的辐射换热

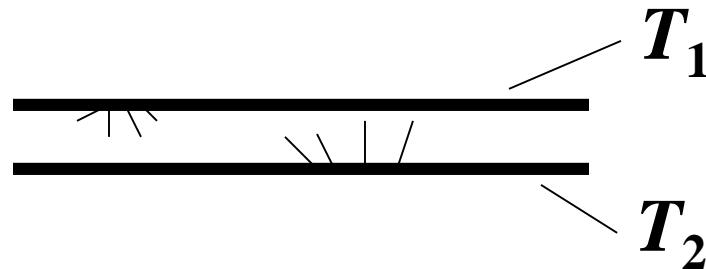


假设：

- ① 把参与辐射换热的有关表面视作一个**封闭腔**，表面间的开口设想为具有黑表面的假想面；
- ② 进行辐射换热的物体表面之间是不参与辐射的**透明介质**（如单原子或具有对称分子结构的双原子气体、空气）或真空；
- ③ 参与辐射换热的物体表面都是**漫灰体或黑体表面**；每个表面的温度、辐射特性及投入辐射分布均匀。



§ 7-1 黑体表面间的辐射换热



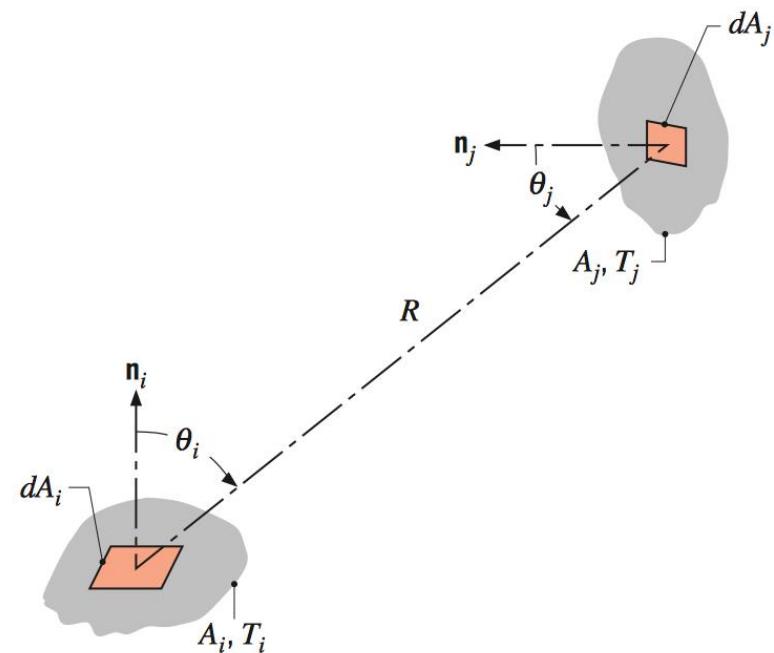
两个表面的相对位置对其辐射换热的影响

§ 7-1 黑体表面间的辐射换热

1 角系数 (View Factor)

定义：表面1发出的辐射能中落到表面2上的百分数称为表面1对表面2的角系数，记为 $X_{1,2}$ 。

- 两无限大平行平板间的角系数等于1；
- 在同一平面内的两表面间的角系数等于0；
- 呈任意角度的两表面间的辐射角系数介于0和1之间。





1 角系数 (View Factor)

黑体表面1发射并被黑体表面2吸收的辐射为：

$$Q_{1 \rightarrow 2} = E_{b1} A_1 X_{1,2}$$

黑体表面2发射并被黑体表面1吸收的辐射为：

$$Q_{2 \rightarrow 1} = E_{b2} A_2 X_{2,1}$$

两黑体之间的净辐射换热量（可为正可为负）为：

$$Q_{1,2} = E_{b1} A_1 X_{1,2} - E_{b2} A_2 X_{2,1}$$



2 角系数的性质

① 相对性 (reciprocity relation)

描述了两个任意位置的漫射表面之间角系数的相互关系，称为角系数的相对性（或互换性）

$$dA_1 X_{d1,d2} = dA_2 X_{d2,d1}$$

$$A_1 X_{1,2} = A_2 X_{2,1}$$



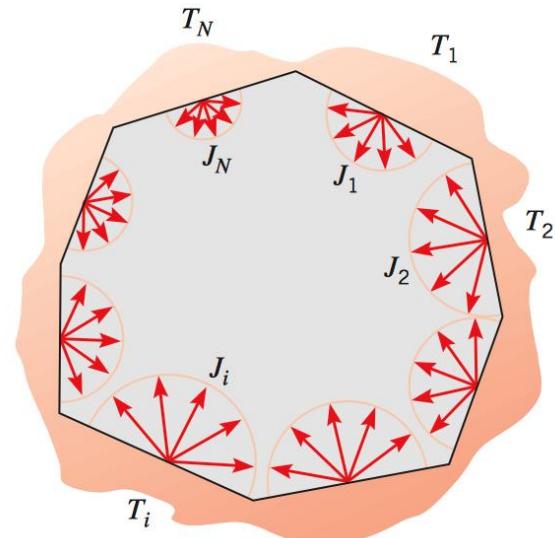
2 角系数的性质

② 完整性 (the summation rule)

所有参与辐射换热的物体构成一个封闭空腔，任一物体发出的辐射都能百分之百地落其他各个表面上，因此一个表面辐射到半球空间的能量全部被其它包围表面接收。

$$Q_{1 \rightarrow 1} + Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{1 \rightarrow 3} + \cdots + Q_{1 \rightarrow n} = Q_1$$

$$X_{1,1} + X_{1,2} + X_{1,3} + \cdots + X_{1,n} = \sum_{i=1}^n X_{1,i} = 1$$



Note: 当平面1为平面或凸面时, $X_{1,1}=0$



2 角系数的性质

③ 可加性 (superposition rule)

➤ 从 A_j 落到 A_i 的辐射考虑:

$$A_j E_{bj} X_{ji} = \sum_{k=1}^n A_k E_{bk} X_{ki} \rightarrow A_j X_{ji} = \sum_{k=1}^n A_k X_{ki} \rightarrow X_{ji} = \frac{\sum_{k=1}^n A_k X_{ki}}{\sum_{k=1}^n A_k}$$

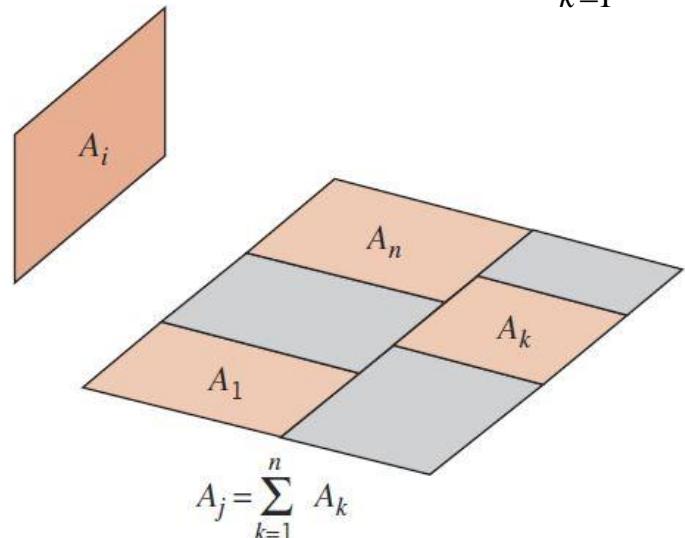
➤ 从 A_i 落到 A_j 的辐射考虑:

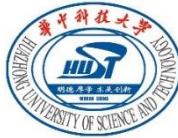
$$A_i E_{bi} X_{ij} = \sum_{k=1}^n A_i E_{bi} X_{ik}$$



$$X_{ij} = \sum_{k=1}^n X_{ik}$$

第二个
角码是
可加的





3 角系数的计算

① 积分法

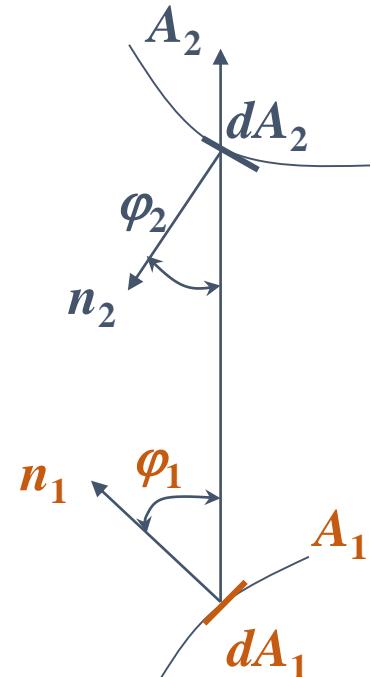
分别从表面 A_1 和 A_2 上取两个微元面积 dA_1 和 dA_2 , dA_1 向 dA_2 表面辐射的能量:

$$dQ_{1,2} = dA_1 I_1 \cos \varphi_1 d\varpi_1$$

根据立体角的定义:

$$d\varpi_1 = dA_2 \cos \varphi_2 / r^2$$

$$dQ_{1,2} = I_1 \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{r^2} dA_1 dA_2$$





3 角系数的计算

若 A_1 为漫射表面，则 dA_1 向半球空间发出的辐射能为

$$Q_1 = \pi I_1 dA_1$$

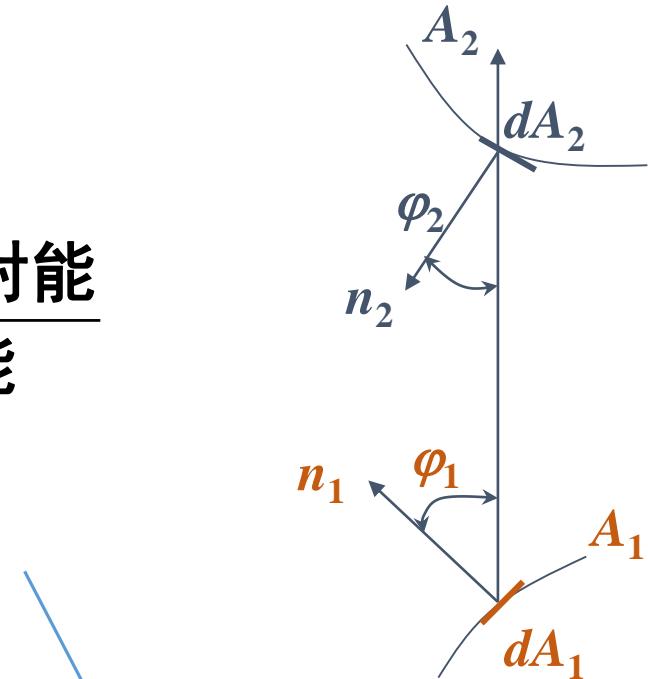
于是， dA_1 对 dA_2 的角系数

$$X_{d1,d2} = \frac{\text{落在 } dA_2 \text{ 上由 } dA_1 \text{ 发出的辐射能}}{dA_1 \text{ 向外发出的总辐射能}}$$

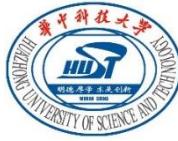
$$= \frac{dQ_{1,2}}{Q_1} = \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dA_2$$

同理，可推得 dA_1 对 dA_2 的角系数

$$X_{d2,d1} = \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dA_1$$



验证了角系数
的相对性



3 角系数的计算

由角系数的可加性，对接收辐射的表面积分，就能导出微元表面对另一表面的角系数：

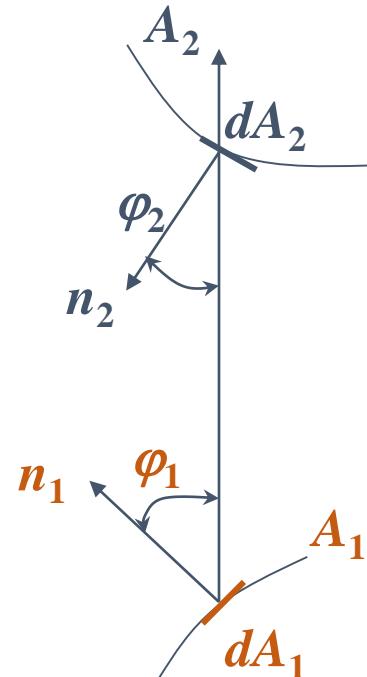
$$X_{d1,2} = \int_{A_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dA_2$$

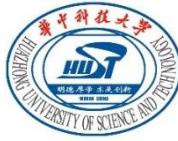
$$X_{d2,1} = \int_{A_1} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dA_1$$

利用角系数的相对性有： $dA_1 X_{d1,2} = A_2 X_{2,d1}$

表面2对微元表面 dA_1 的角系数为：

$$X_{2,d1} = \frac{1}{A_2} \int_{A_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dA_2 dA_1$$





3 角系数的计算

积分微元表面 dA_1 得到表面2对表面1的角系数：

$$X_{2,1} = \frac{1}{A_2} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dA_2 dA_1$$

同理可以导出表面1对表面2的角系数：

$$X_{1,2} = \frac{1}{A_1} \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2$$

适用于所有漫射表面

纯粹的
几何量

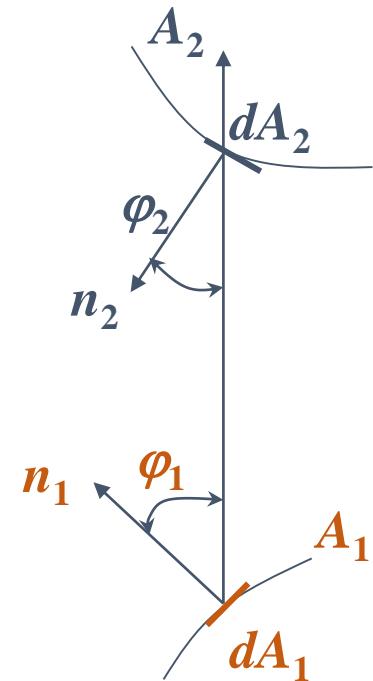
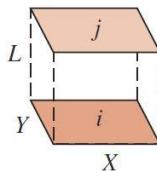
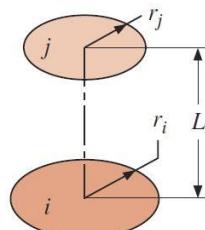
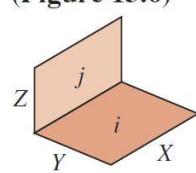
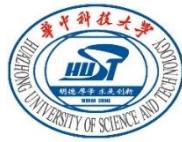


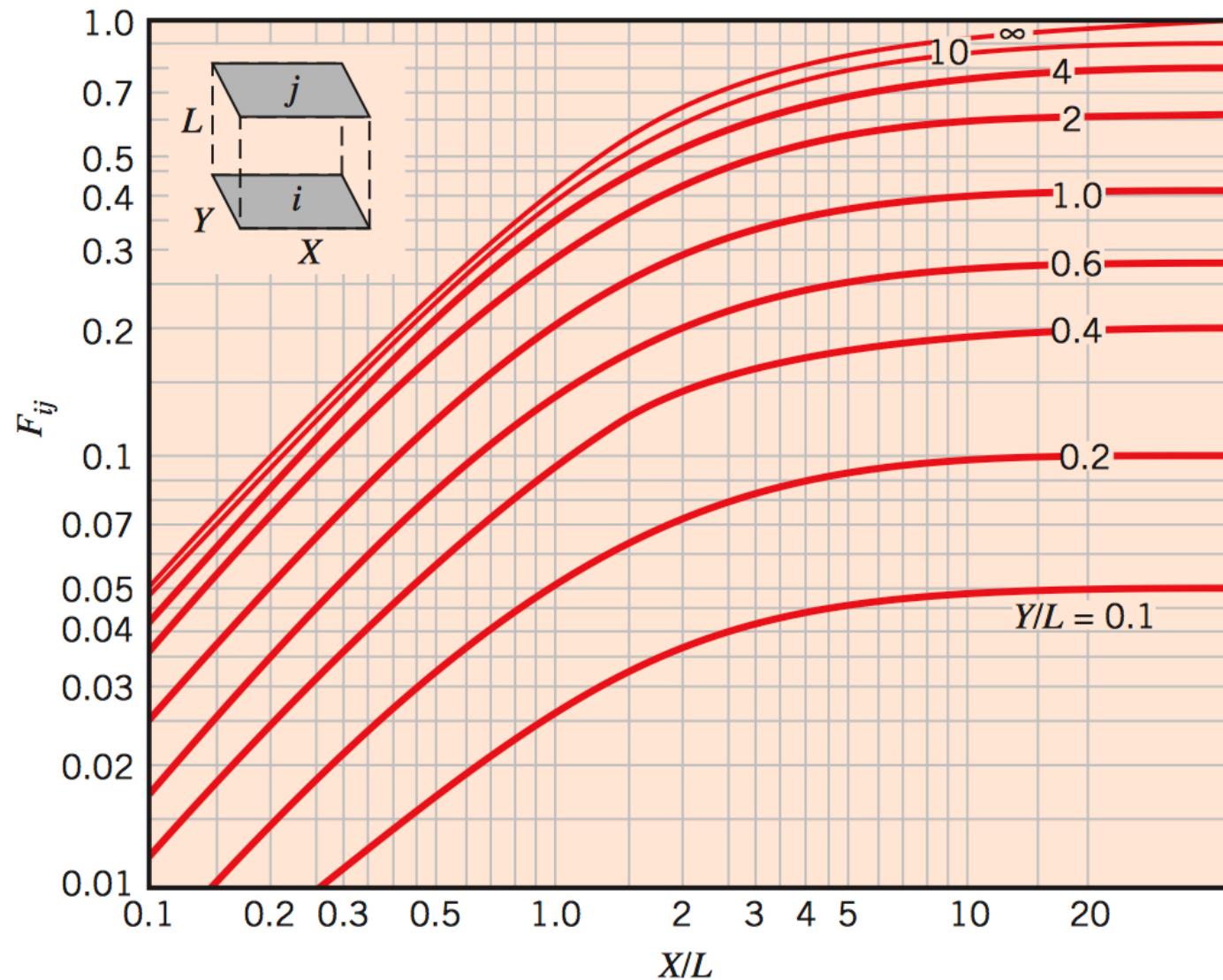


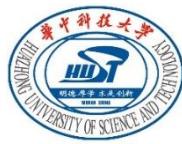
TABLE 13.2 View Factors for Three-Dimensional Geometries [4]

Geometry	Relation
Aligned Parallel Rectangles (Figure 13.4) 	$\bar{X} = X/L, \bar{Y} = Y/L$ $F_{ij} = \frac{2}{\pi \bar{X} \bar{Y}} \left\{ \ln \left[\frac{(1 + \bar{X}^2)(1 + \bar{Y}^2)}{1 + \bar{X}^2 + \bar{Y}^2} \right]^{1/2} \right. \\ \left. + \bar{X}(1 + \bar{Y}^2)^{1/2} \tan^{-1} \frac{\bar{X}}{(1 + \bar{Y}^2)^{1/2}} \right. \\ \left. + \bar{Y}(1 + \bar{X}^2)^{1/2} \tan^{-1} \frac{\bar{Y}}{(1 + \bar{X}^2)^{1/2}} - \bar{X} \tan^{-1} \bar{X} - \bar{Y} \tan^{-1} \bar{Y} \right\}$
Coaxial Parallel Disks (Figure 13.5) 	$R_i = r_i/L, R_j = r_j/L$ $S = 1 + \frac{1 + R_j^2}{R_i^2}$ $F_{ij} = \frac{1}{2} \{ S - [S^2 - 4(r_j/r_i)^2]^{1/2} \}$
Perpendicular Rectangles with a Common Edge (Figure 13.6) 	$H = Z/X, W = Y/X$ $F_{ij} = \frac{1}{\pi W} \left(W \tan^{-1} \frac{1}{W} + H \tan^{-1} \frac{1}{H} \right. \\ \left. - (H^2 + W^2)^{1/2} \tan^{-1} \frac{1}{(H^2 + W^2)^{1/2}} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \ln \left\{ \frac{(1 + W^2)(1 + H^2)}{1 + W^2 + H^2} \left[\frac{W^2(1 + W^2 + H^2)}{(1 + W^2)(W^2 + H^2)} \right]^{W^2} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[\frac{H^2(1 + H^2 + W^2)}{(1 + H^2)(H^2 + W^2)} \right]^{H^2} \right\} \right)$

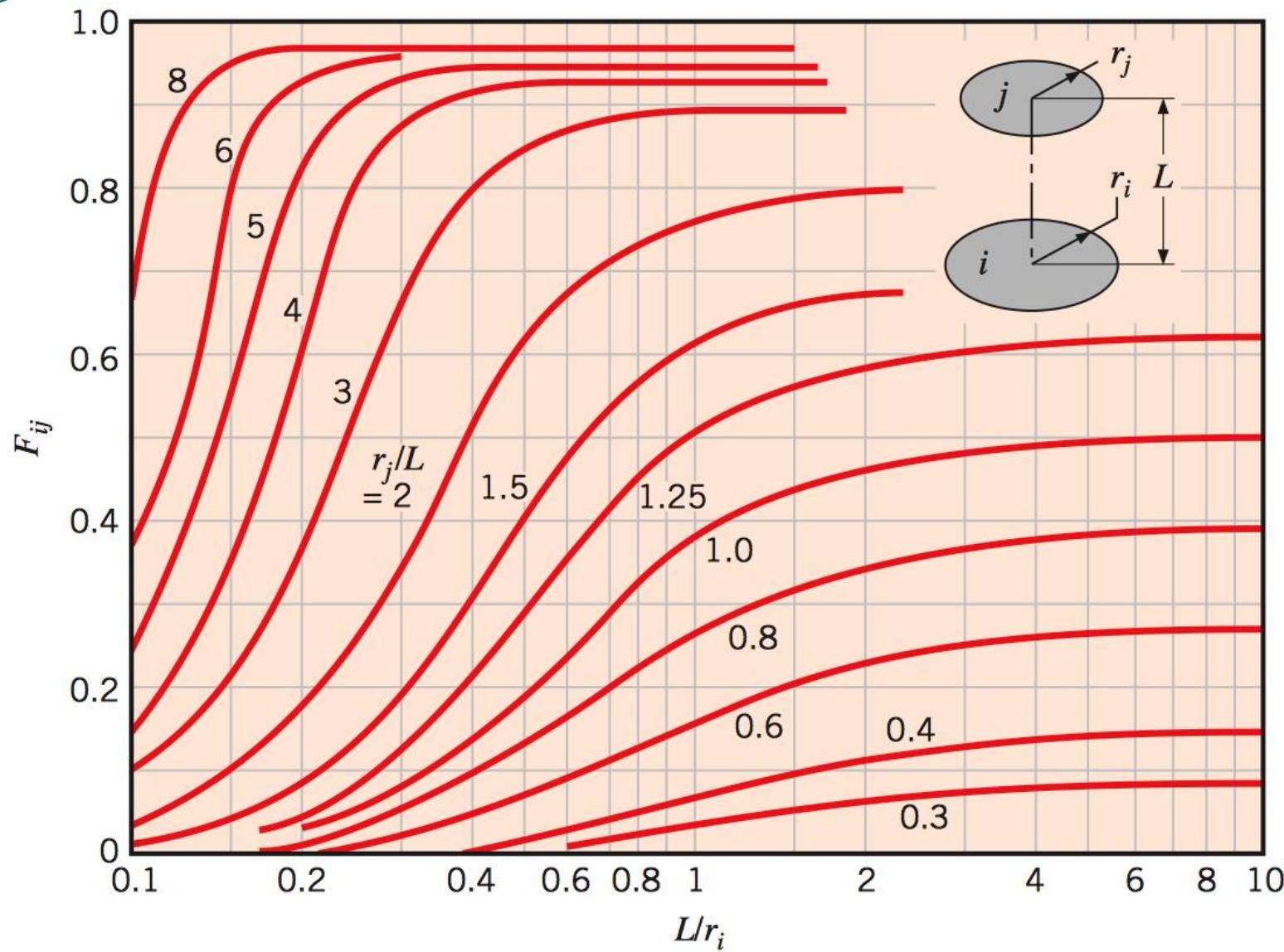


3 角系数的计算



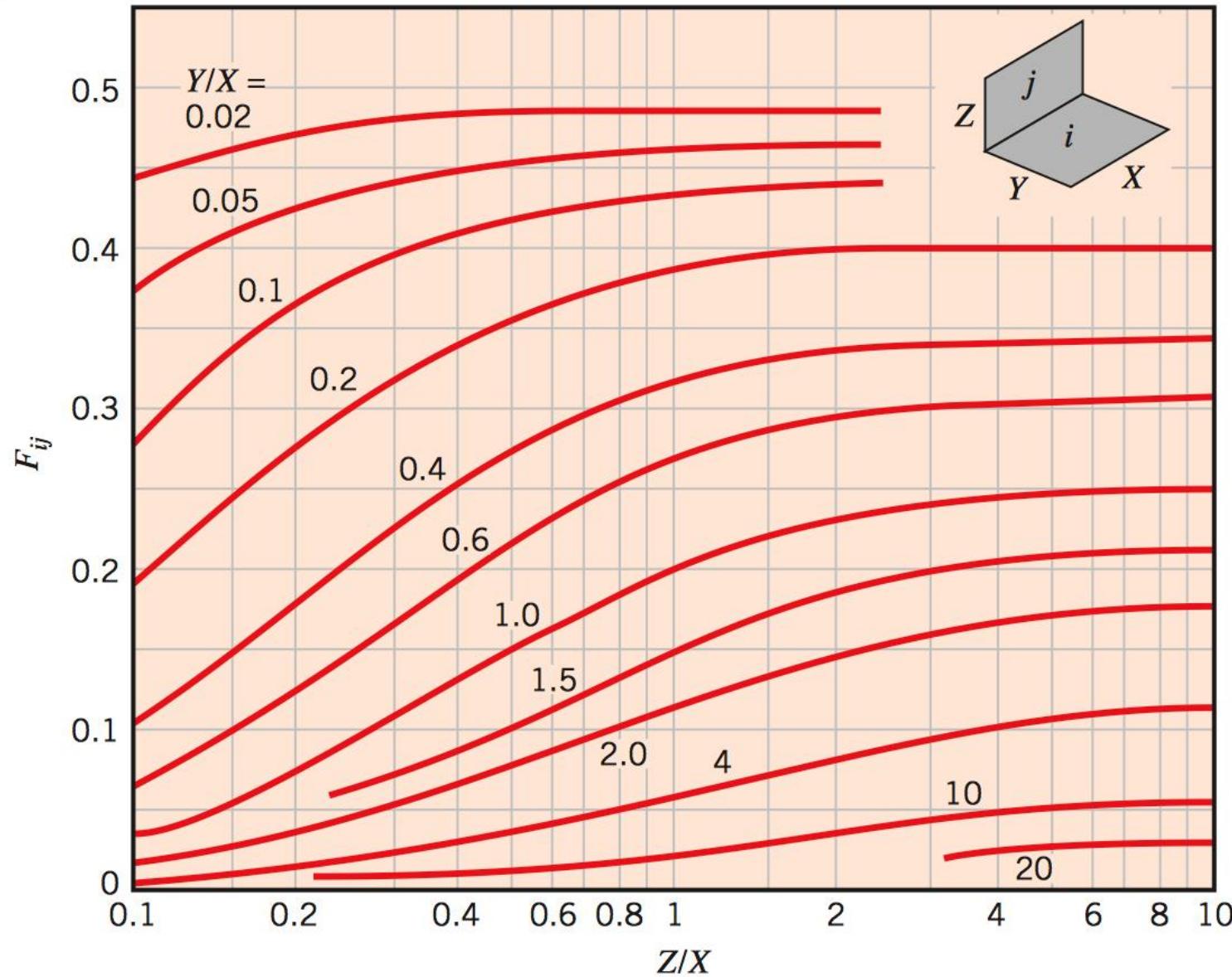


3 角系数的计算





3 角系数的计算

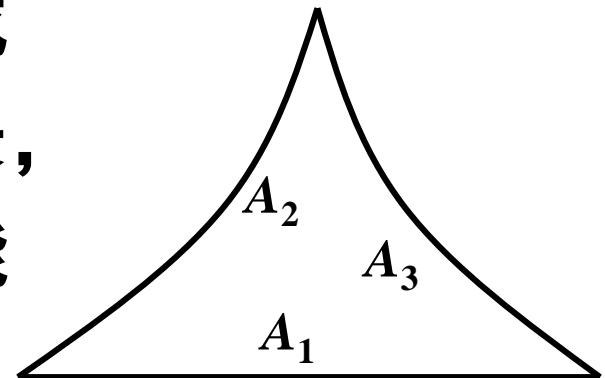




3 角系数的计算

② 代数法

Case1：对如图三个非凹表面组成的系统（在垂直屏幕方向为无限长，故从系统两端开口处逸出的辐射能可略去不计）：



$$X_{1,2} + X_{1,3} = 1$$

$$A_1 X_{1,2} = A_2 X_{2,1}$$

可
加
性

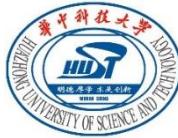
$$X_{2,1} + X_{2,3} = 1$$

$$A_1 X_{1,3} = A_3 X_{3,1}$$

相
对
性

$$X_{3,1} + X_{3,2} = 1$$

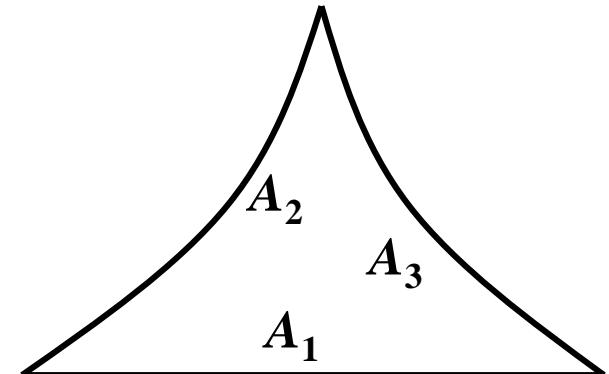
$$A_2 X_{2,3} = A_3 X_{3,2}$$



3 角系数的计算

这是一个六元一次方程组，
可解出：

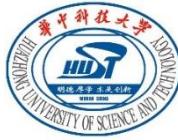
$$X_{1,2} = \frac{A_1 + A_2 - A_3}{2A_1}$$



或：

$$X_{1,2} = \frac{l_1 + l_2 - l_3}{2l_1}$$

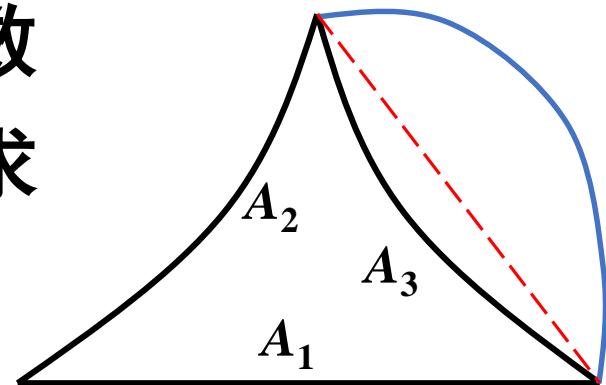
一个表面对另一表面的角系数可表示为两个**参与表面之和减去非参与表面**，然后除以二倍的该表面。



3 角系数的计算

思考题：

如果表面3为**凹面**，由角系数的完整性和相对性得到的代数方程组不封闭，如何用代数法求角系数？





3 角系数的计算

Case2：有两个凸形无限长相对放置的表面，如图所示，由角系数的完整性：

$$X_{ab,cd} = 1 - X_{ab,ac} - X_{ab,bd}$$

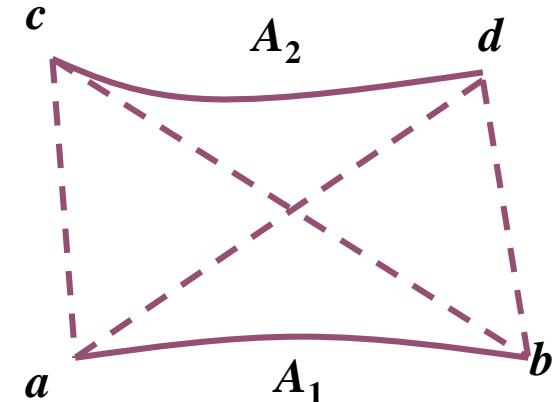
把 abc 和 abd 看作两个三表面系统：

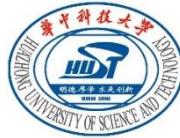
$$X_{ab,ac} = \frac{ab + ac - bc}{2ab} \quad X_{ab,bd} = \frac{ab + bd - ad}{2ab}$$

可得：

$$X_{ab,cd} = \frac{(bc + ad) - (ac + ad)}{2ab}$$

一般有： $X_{1,2} = \frac{\text{交叉线之和} - \text{不交叉线之和}}{2 \times \text{表面} A_1 \text{的断面长度}}$

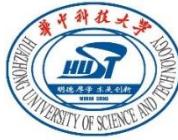




4 两黑体表面间辐射换热量的计算

求出黑体表面之间的角系数之后，即可方便的算出它们之间的辐射换热量，即

$$Q_{1,2} = E_{b1} A_1 X_{1,2} - E_{b2} A_2 X_{2,1} = A_1 X_{1,2} (E_{b1} - E_{b2})$$



5 例题

确定如图所示的表面1对表面2的角系数 $X_{1,2}$ 。

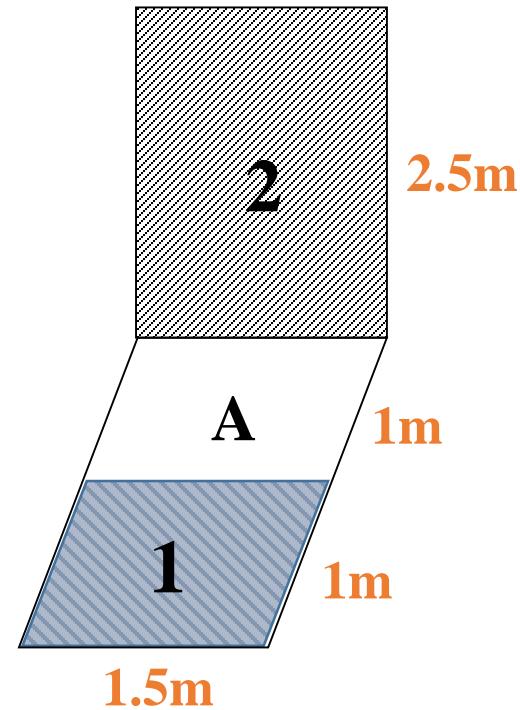
解：分别对 $2 \rightarrow A$, $2 \rightarrow (A+1)$ 查图7-5, 得：

$$X_{2,A} = 0.1, X_{2,(1+A)} = 0.15$$

$$X_{2,(1+A)} = X_{2,1} + X_{2,A} \quad X_{2,1} = X_{2,(1+A)} - X_{2,A}$$



$$\begin{aligned} X_{1,2} &= \frac{A_2}{A_1} X_{2,1} = \frac{2.5}{1} \left[X_{2,(1+A)} - X_{2,A} \right] \\ &= 2.5 \times (0.15 - 0.10) = 0.125 \end{aligned}$$

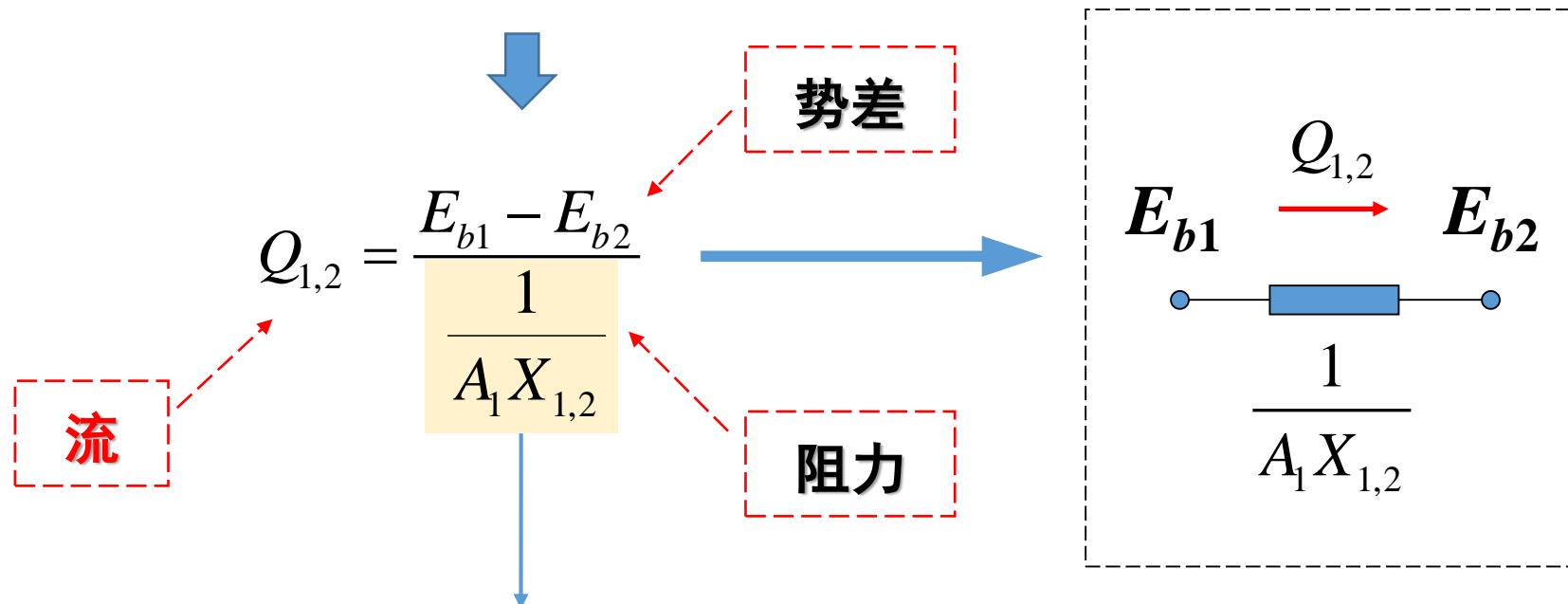




§ 7-2 灰体表面间的辐射换热

1 黑体间的辐射换热

$$Q_{1,2} = E_{b1}A_1X_{1,2} - E_{b2}A_2X_{2,1} = A_1X_{1,2}(E_{b1} - E_{b2})$$



两表面辐射换热的**空间热阻**：与**空间几何分布**有关

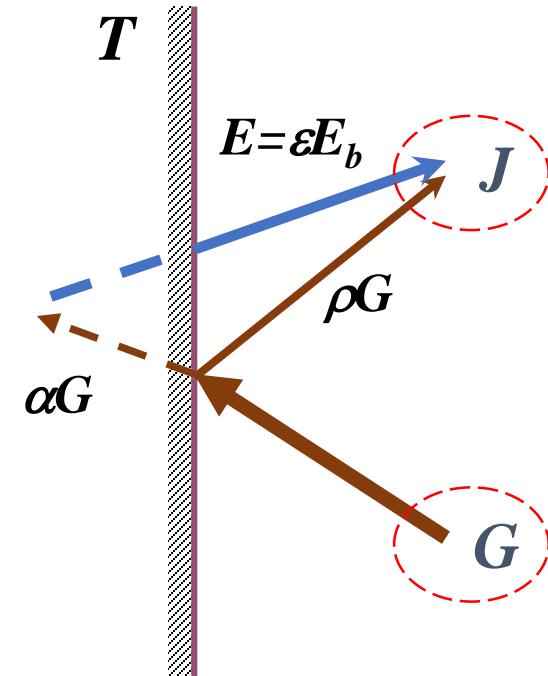


2 灰体间的辐射换热——有效辐射

① **投入辐射**：单位时间内投射到表面的单位面积上的总辐射能，记为 G 。

② **有效辐射**：单位时间内离开表面的单位面积上的总辐射能，记为 J 。

物体表面的有效辐射力包括物体表面**自身的辐射力**与其对投入辐射力的**反射部分**。



$$J = E + (1 - \alpha)G = \varepsilon E_b + (1 - \varepsilon)G \quad \text{W/m}^2$$



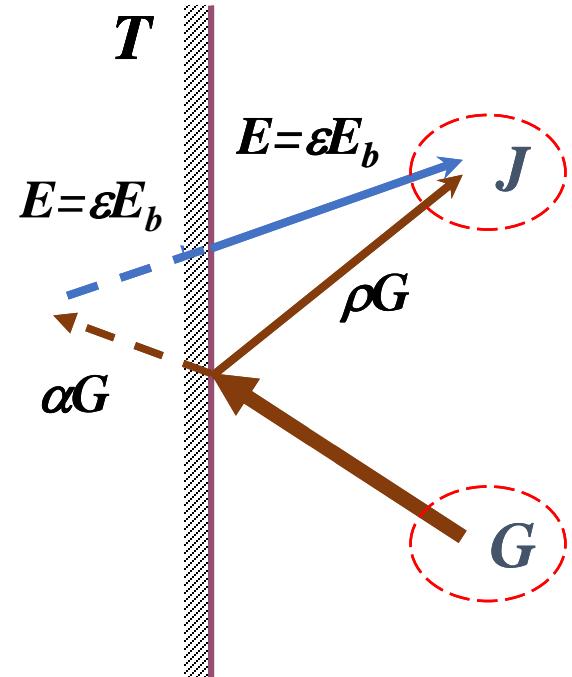
2 灰体间的辐射换热

表面与外界的辐射换热量 Q :

表面内部观察

$$\frac{Q}{A} = [E - \alpha G] = [J - G]$$

表面外部观察



消去 G 得到:
$$Q = \frac{E_b - J}{1 - \varepsilon} \quad \text{W}$$

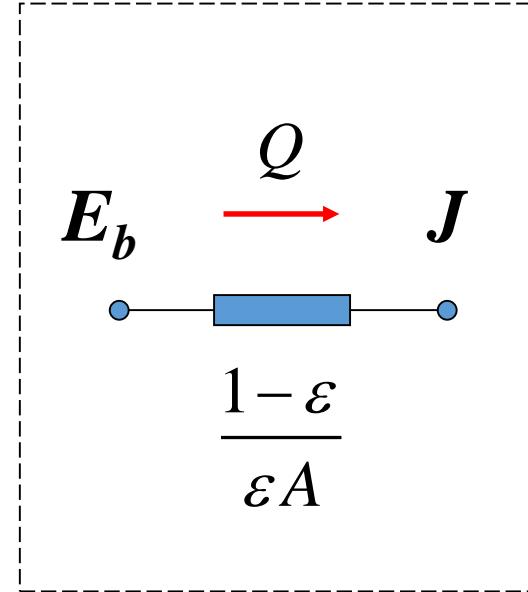
A : 表面面积



2 灰体间的辐射换热

表面热阻的定义：

$$Q = \frac{E_b - J}{\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon A}} \text{ W}$$



灰体的**表面热阻**：由**表面发射率**决定。

发射率（黑度）越大，则表面热阻越小。



2 灰体间的辐射换热

$$Q = \frac{E_b - J}{\varepsilon A}$$

➤ 如果物体表面为黑体表面

$$\varepsilon = 1$$

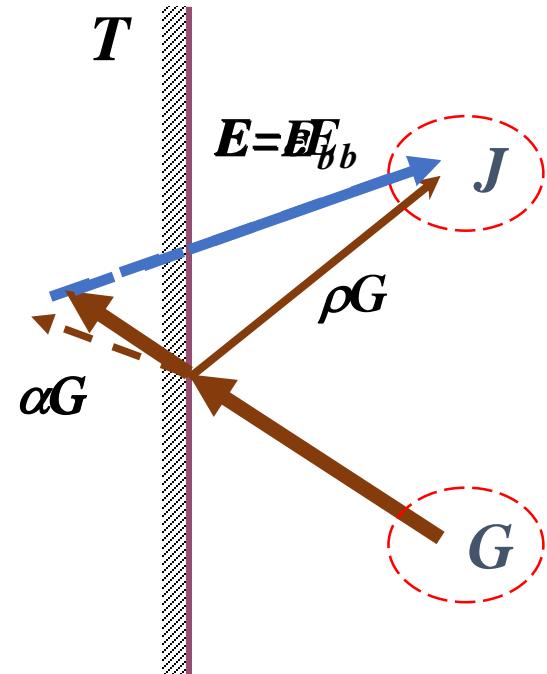


$$\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon A} = 0 \quad \leftarrow A \rightarrow \infty$$



近似为黑体

$$Q \neq 0, \quad J = E_b$$





2 灰体间的辐射换热

$$Q = \frac{E_b - J}{\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon A}}$$

➤ 如果物体表面为绝热表面

$$Q = 0$$

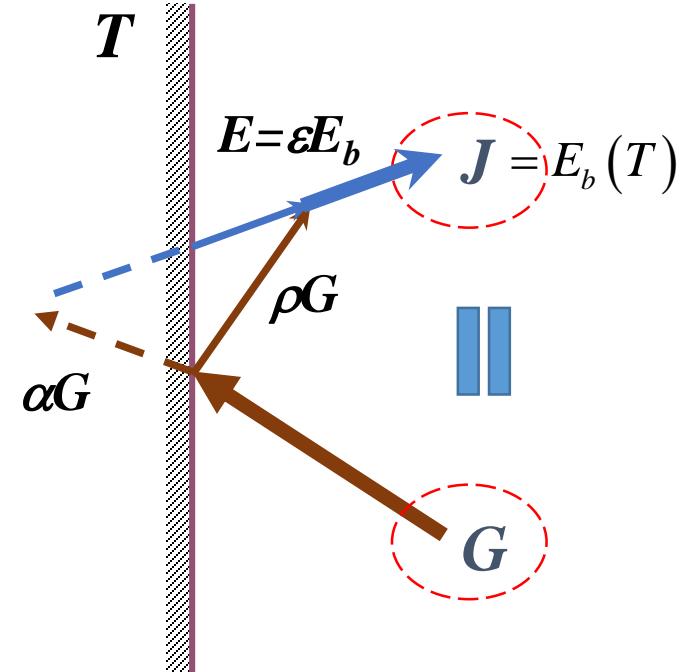


$$J = E_b$$



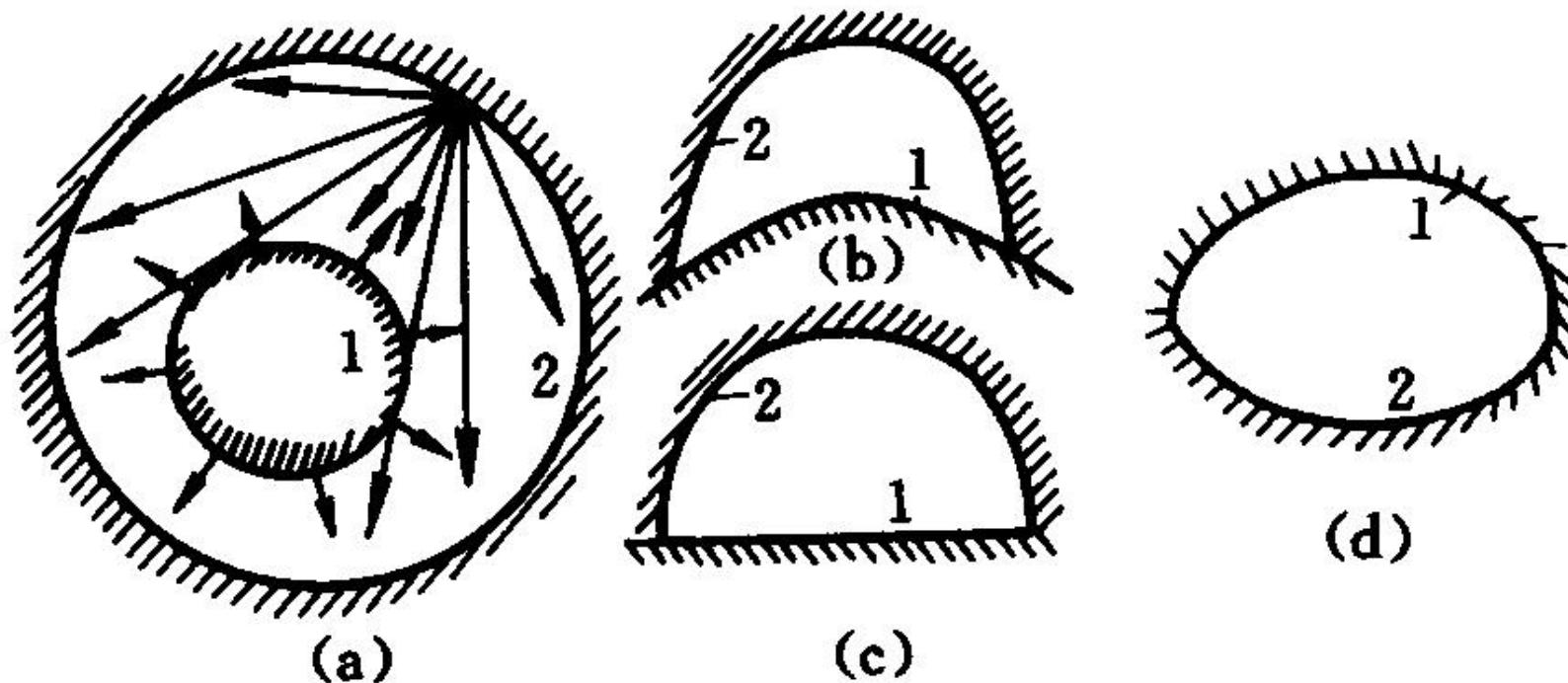
这种表面称之为**重辐射面**，它有两重性：

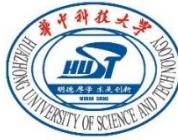
- 1) 从**温度**上看，可以将其视为黑体；
- 2) 从**能量**上看，可以将其当作反射率为1的表面，即白体。





3 组成封闭系统的两灰体间的辐射换热





3 组成封闭系统的两灰体间的辐射换热

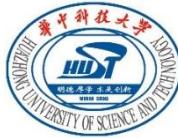
为什么要用封闭腔模型？

因为必须计及：

- 所研究表面向外发出的**所有能量**；
- 空间**各方向**投射到该表面的辐射能。

注意：

- 封闭腔表面可以是真实的，也可是虚构的；
- 封闭腔模型既适用于黑体，也适用于灰体。



3 组成封闭系统的两灰体间的辐射换热

表面1投射到表面2上的辐射能流为：

$$Q_{1 \rightarrow 2} = A_1 J_1 X_{1,2}$$

表面2投射到表面1上的辐射能流为：

$$Q_{2 \rightarrow 1} = A_2 J_2 X_{2,1}$$

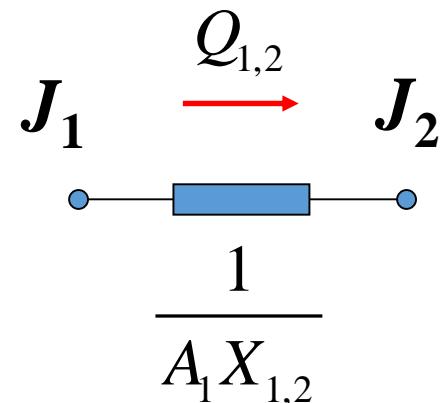
则两个表面之间净辐射换热量为：

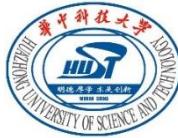
$$Q_{1,2} = A_1 J_1 X_{1,2} - A_2 J_2 X_{2,1}$$

由角系数的互换性有

$$A_1 X_{1,2} = A_2 X_{2,1}$$

$$Q_{1,2} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 X_{1,2}}} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_2 X_{2,1}}}$$





3 组成封闭系统的两灰体间的辐射换热

同时，对表面1和2分别有：

$$J_1 A_1 = A_1 E_{b1} - \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 \right) Q_{1,2} \quad J_2 A_2 = A_2 E_{b2} - \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) Q_{2,1}$$

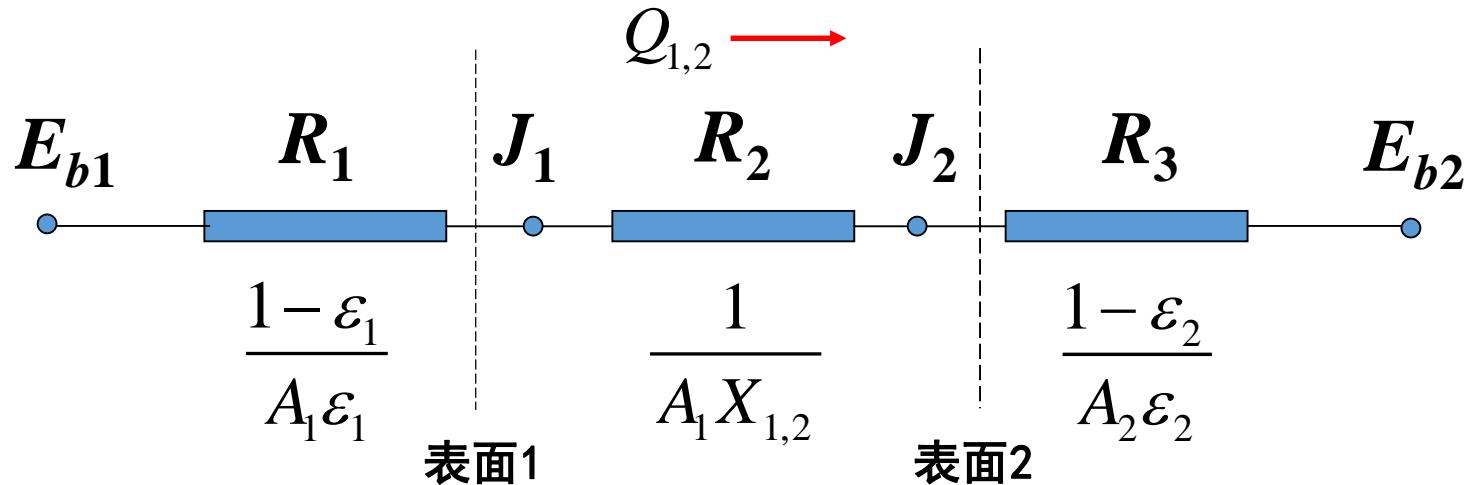
且对于封闭系统：

$$Q_{1,2} = -Q_{2,1}$$

由此可得：

$$Q_{12} = \frac{E_{b,1} - E_{b,2}}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 X_{1,2}} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}}$$

3 组成封闭系统的两灰体间的辐射换热—网络法



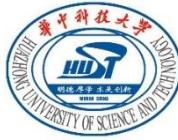
$$Q_{12} = \frac{E_{b,1} - E_{b,2}}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 X_{1,2}} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}}$$



$$Q_{1,2} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1-\varepsilon_1}{A_1\varepsilon_1}} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1X_{1,2}}} = \frac{J_2 - E_{b2}}{\frac{1-\varepsilon_2}{A_2\varepsilon_2}}$$

E_b : 可看作
源电势

J : 可看作
节点电势



3 组成封闭系统的两灰体间的辐射换热

代入 $E_b = \sigma_0 T^4$, 经整理后得到:

$$Q_{12} = \frac{\frac{E_{b,1} - E_{b,2}}{1 - \varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1 - \varepsilon_2}{A_1 X_{1,2}}}}{\frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}} = \frac{\sigma_0 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \varepsilon_1}{A_1 \varepsilon_1} + \frac{1}{A_1 X_{1,2}} + \frac{1 - \varepsilon_2}{A_2 \varepsilon_2}}$$

若以 A_1 作为计算面积:

$$Q_{12} = \frac{A_1 X_{1,2} (E_{b,1} - E_{b,2})}{X_{1,2} \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} + 1 + X_{2,1} \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2}} = \boxed{\varepsilon_s} A_1 X_{1,2} (E_{b,1} - E_{b,2})$$



系统发射率 (或系统黑度)

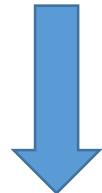


3 组成封闭系统的两灰体间的辐射换热

特例1：一个凸形漫灰表面被另一个漫灰表面包围下的两表面间的辐射换热。

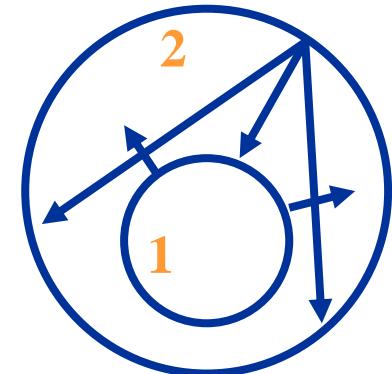
$$Q_{12} = \varepsilon_s A_1 X_{1,2} (E_{b,1} - E_{b,2})$$

$$\varepsilon_s = \left(X_{1,2} \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} + 1 + X_{2,1} \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \right)^{-1}$$



$$X_{1,2} = 1, \quad X_{2,1} = \frac{A_1}{A_2}$$

$$\varepsilon_s = \left[\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \right]^{-1}$$

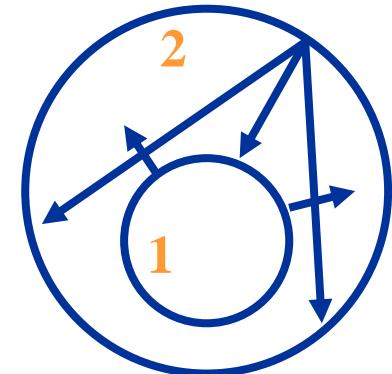




3 组成封闭系统的两灰体间的辐射换热

特例2：一个凸形漫灰表面被**大空间**漫灰表面包围下的两表面间的辐射换热。

大房间，环境

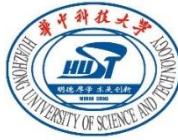


$$Q_{12} = \varepsilon_s A_1 X_{1,2} (E_{b,1} - E_{b,2})$$

$$\varepsilon_s = \left(X_{1,2} \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} + 1 + X_{2,1} \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \right)^{-1}$$

$$X_{1,2} = 1, \quad A_1 \ll A_2, \quad X_{2,1} = \frac{A_1}{A_2} \approx 0$$

$$\varepsilon_s = \varepsilon_1 \Rightarrow Q_{12} = \varepsilon_1 A_1 X_{1,2} (E_{b,1} - E_{b,2}) \rightarrow \boxed{\text{第一章的公式}}$$

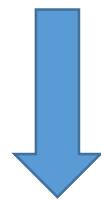


3 组成封闭系统的两灰体间的辐射换热

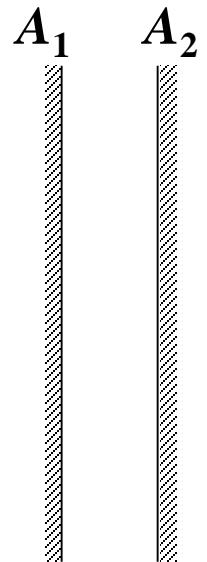
特例3：两个紧靠的平行表面之间的辐射换热。

$$Q_{12} = \varepsilon_s A_1 X_{1,2} (E_{b,1} - E_{b,2})$$

$$\varepsilon_s = \left(X_{1,2} \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} + 1 + X_{2,1} \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \right)^{-1}$$



$$X_{1,2} = 1, A_1 \approx A_2$$



$$\varepsilon_s = \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)^{-1} \Rightarrow Q_{12} = \frac{A_1 (E_{b1} - E_{b2})}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

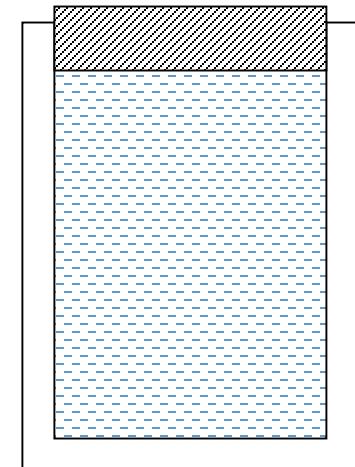


3 组成封闭系统的两灰体间的辐射换热—例题

例：液氧储存器为双壁镀银的夹层结构，外壁内表面温度 $t_{w1}=20^{\circ}\text{C}$ ，内壁外表面温度 $t_{w2}=-183^{\circ}\text{C}$ ，镀银壁的发射率 $\varepsilon=0.02$ 。试计算由于辐射换热每单位面积容器层的散热量。

解：因为容器夹层的间隙很小，可认为属于**两面积相等**的平行表面间的辐射换热问题：

$$\frac{Q}{A} = \frac{\sigma_0 \left[\left(\frac{T_{w1}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{w2}}{100} \right)^4 \right]}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$



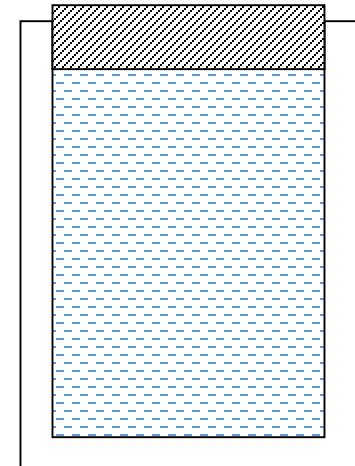


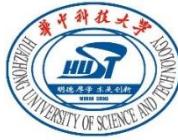
3 组成封闭系统的两灰体间的辐射换热—例题

$$\frac{Q}{A} = \frac{\sigma_0 \left[\left(\frac{T_{w1}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{w2}}{100} \right)^4 \right]}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} = \frac{5.67 \times [2.93^4 - 0.9^4]}{0.02 + 0.02 - 1} = 4.18 \text{ W/m}^2$$

讨论：镀银对降低辐射散热量作用很大。

比较一下：若取 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.8$ ，则将有 $Q/A = 276 \text{ W/m}^2$ ，增加66倍。





3 组成封闭系统的两灰体间的辐射换热—例题

若夹层中充满空气，且 $\delta=3\text{ mm}$, 分析导热和自然对流的影响。

$$q = \lambda \frac{\Delta t}{\delta} = \frac{0.016 \times 203}{0.03} = 1083 \text{ W/m}^2$$

尽管空气的热导率很低，导热量还远大于辐射散热量。

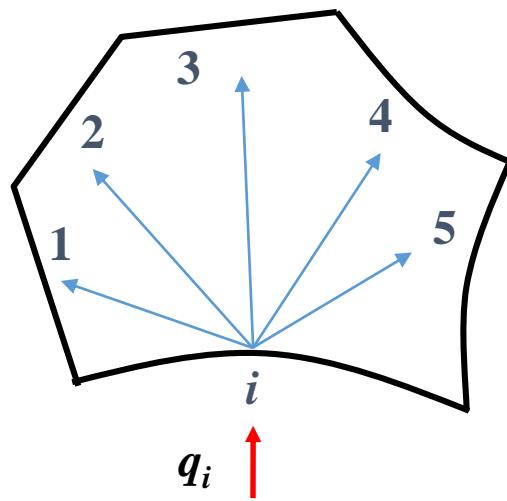
$$Gr_\delta = \frac{g \beta \Delta t \delta^3}{\nu^2} = \frac{9.8 \times 203 \times 3^3 \times 10^{-9}}{191 \times 33.6^2 \times 10^{-12}} = 250.4$$

自然对流可以忽略。

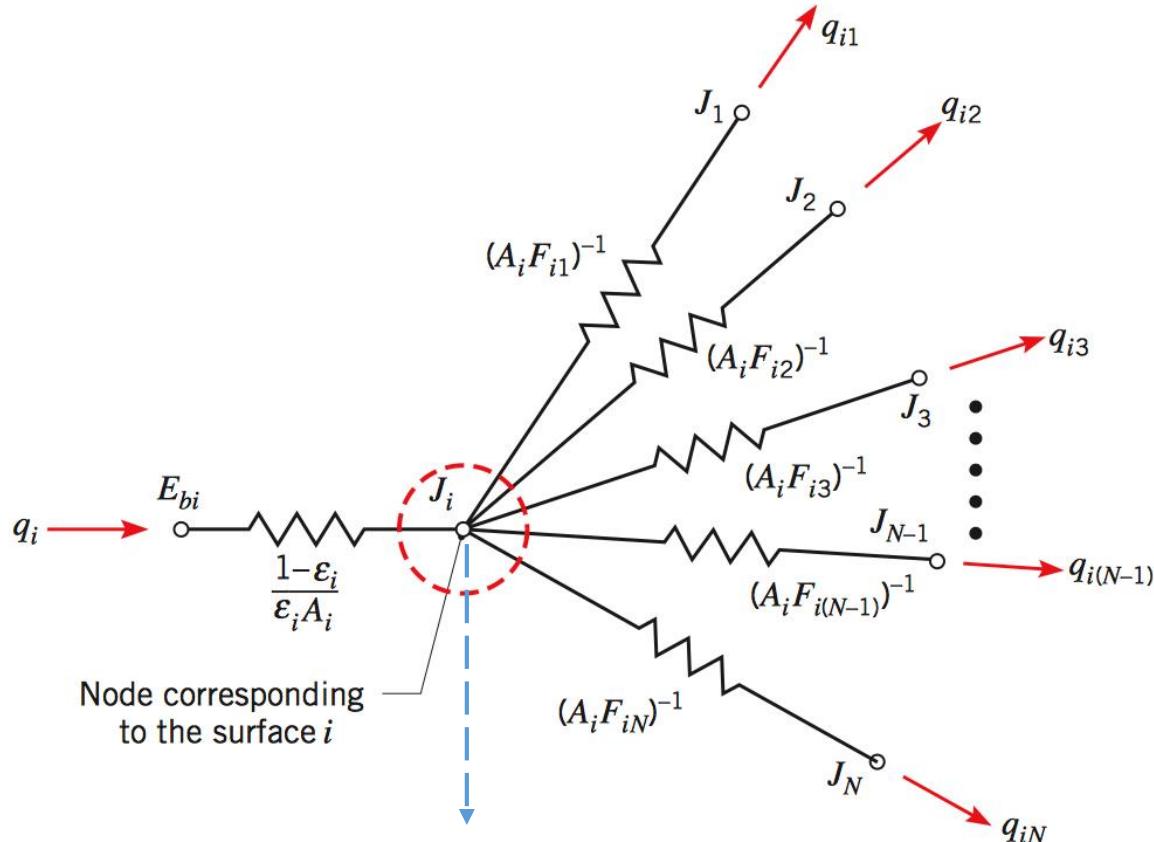
4 组成封闭系统的灰表面之间的辐射换热



$$q_i = q_{i1} + q_{i2} + q_{i3} + q_{i4} + q_{i5}$$



i 表面的净辐射
换热量 (q_i)



$$\frac{E_{bi} - J_i}{1 - \varepsilon_i} + \sum_{j=1}^N \frac{J_j - J_i}{A_i X_{ij}} = 0$$

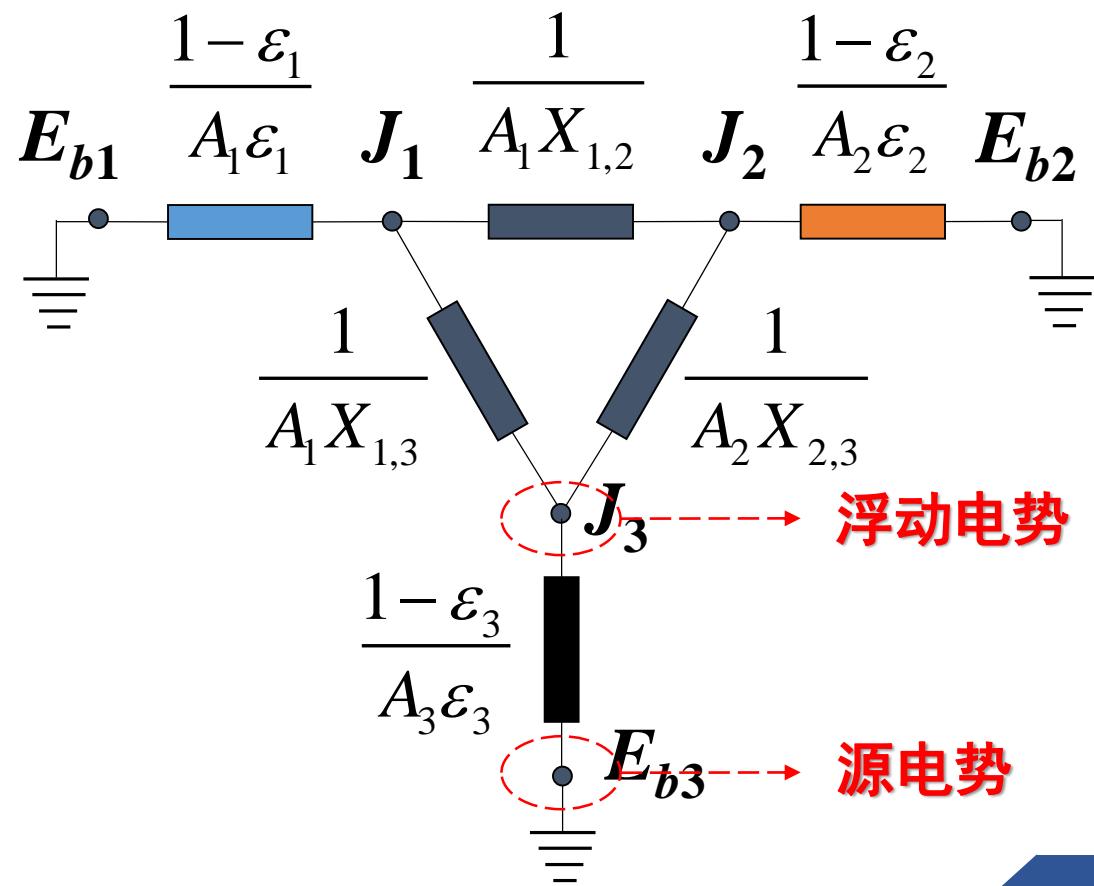
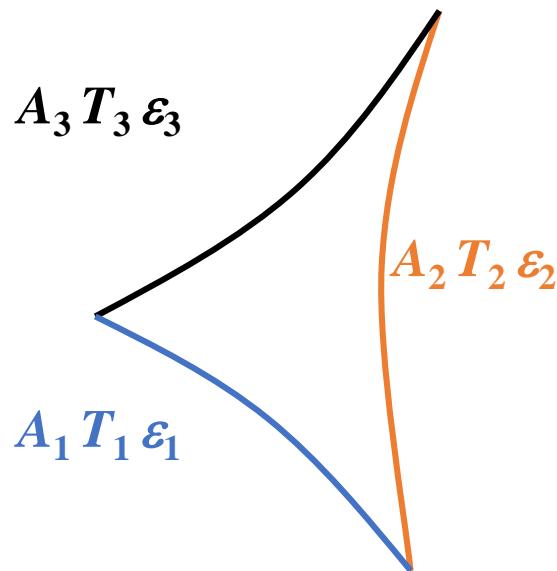
i 与 j 表面的辐射
换热量 (q_{ij})



4 组成封闭系统的灰表面之间的辐射换热

★ 辐射计算网络法—网络图

Step3:





4 组成封闭系统的灰表面之间的辐射换热

★ 辐射计算网络法—节点方程

对 J_1 节点：

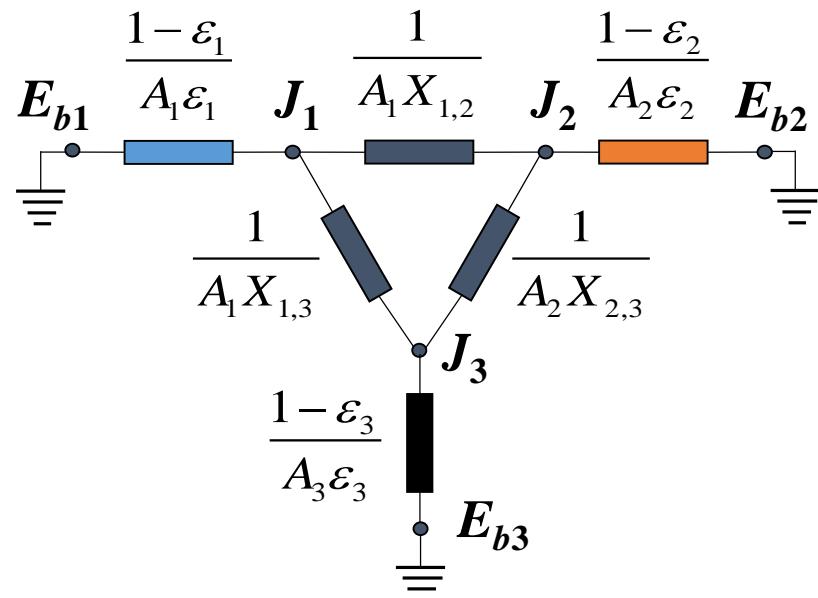
$$\frac{E_{b1} - J_1}{1 - \varepsilon_1} + \frac{J_2 - J_1}{\frac{1}{A_1 X_{1,2}}} + \frac{J_3 - J_1}{\frac{1}{A_1 X_{1,3}}} = 0$$

对 J_2 节点：

$$\frac{E_{b2} - J_2}{1 - \varepsilon_2} + \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 X_{1,2}}} + \frac{J_3 - J_2}{\frac{1}{A_2 X_{2,3}}} = 0$$

对 J_3 节点：

$$\frac{E_{b3} - J_3}{1 - \varepsilon_3} + \frac{J_1 - J_3}{\frac{1}{A_1 X_{1,3}}} + \frac{J_2 - J_3}{\frac{1}{A_2 X_{2,3}}} = 0$$



求 J_1 、 J_2 、 J_3

4 组成封闭系统的灰表面之间的辐射换热

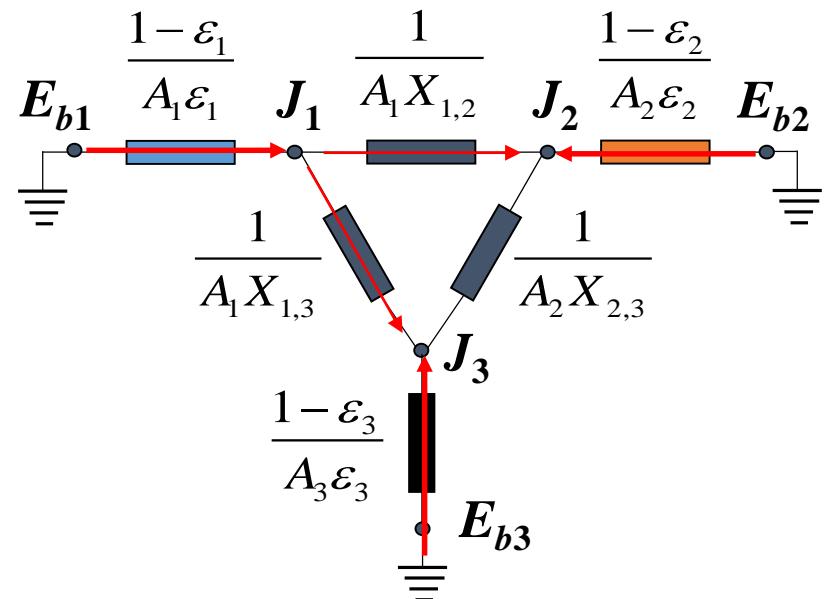
★ 辐射计算网络法—计算换热量

各个面的净辐射换热量：

$$Q_i = \frac{E_{bi} - J_i}{1 - \varepsilon_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

i 、 j 两个面之间的辐射换热量：

$$Q_{ij} = \frac{J_j - J_i}{\frac{1}{A_i X_{ij}}}$$



Note: 正负号表示节点处热流的方向

4 组成封闭系统的灰表面之间的辐射换热

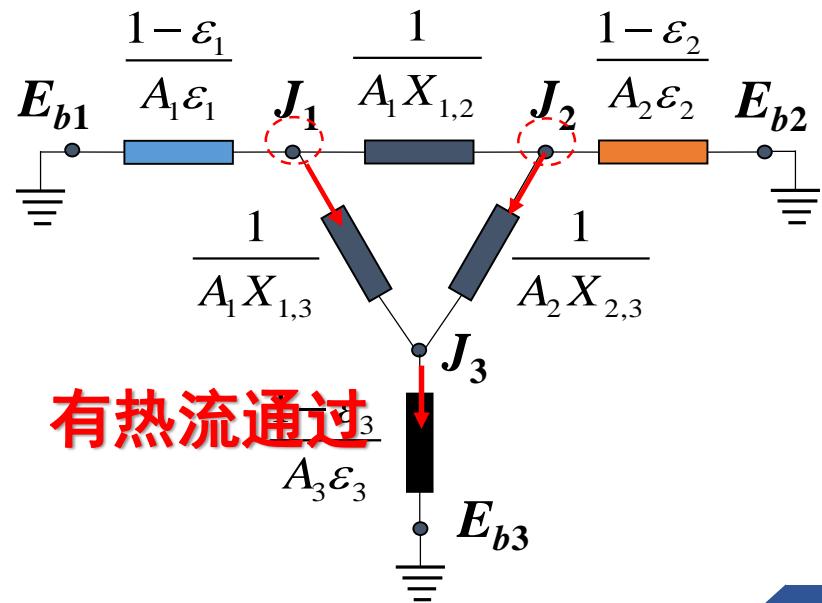
★ 辐射计算网络法—两个重要的特例

A. 有一个表面为黑体。设表面3为黑体。此时其表面热阻 $(1-\varepsilon_3)/(\varepsilon_3 A_3)=0$ ，从而有 $J_3 = E_{b3}$ ，这样网络图就可以简化，代数方程简化为二元方程组。

实际中面积很大的表面

$$\frac{E_{b1} - J_1}{1 - \varepsilon_1} + \frac{J_2 - J_1}{\frac{1}{A_1 X_{1,2}}} + \frac{E_{b3} - J_1}{\frac{1}{A_1 X_{1,3}}} = 0$$

$$\frac{E_{b2} - J_2}{1 - \varepsilon_2} + \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 X_{1,2}}} + \frac{E_{b3} - J_2}{\frac{1}{A_2 X_{2,3}}} = 0$$

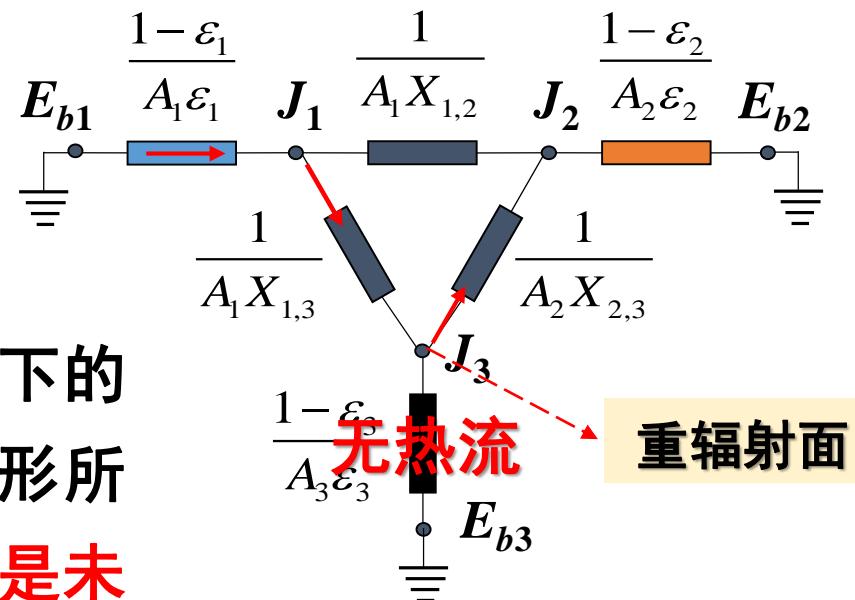


4 组成封闭系统的灰表面之间的辐射换热

★ 辐射计算网络法—两个重要的特例

B. 有一个表面绝热，即净辐射换热量为零。设表面3绝热。则有：

$$Q_3 = \frac{E_{b3} - J_3}{\frac{1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_3 A_3}} = 0 \Rightarrow E_{b3} = J_3$$



该表面的有效辐射等于某一温度下的黑体辐射。与表面3为黑体的情形所不同的是，此时绝热表面的温度是未知的，要由其它两个表面决定。



4 组成封闭系统的灰表面之间的辐射换热

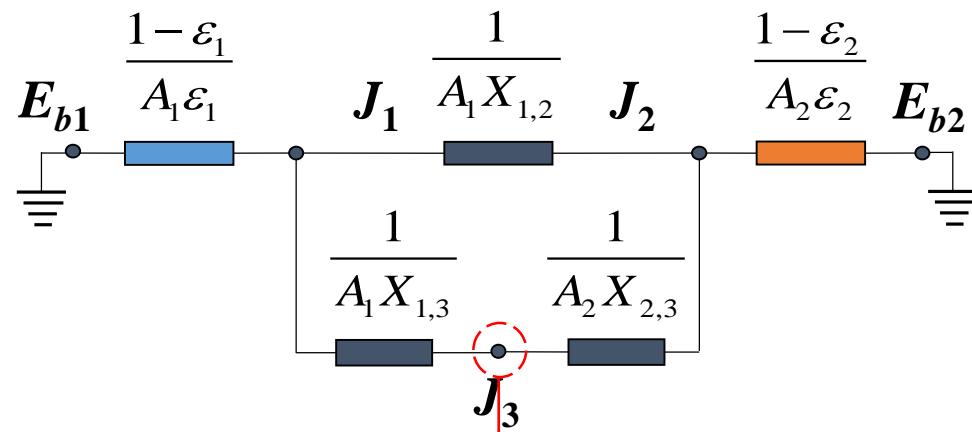
★ 辐射计算网络法—两个重要的特例

B. 有一个表面绝热，即净辐射换热量为零。设表面3绝热。

另一种表示方法：

此时两个表面间的辐射换热量可以方便地计算出来：

$$Q_{12} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\sum R_t}$$



由源电势变成了浮动电势

$$\sum R_t = \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2} + R_{eq}$$

且 $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{A_1 X_{1,2}} + \frac{1}{A_1 X_{1,3}} + \frac{1}{A_2 X_{2,3}}$

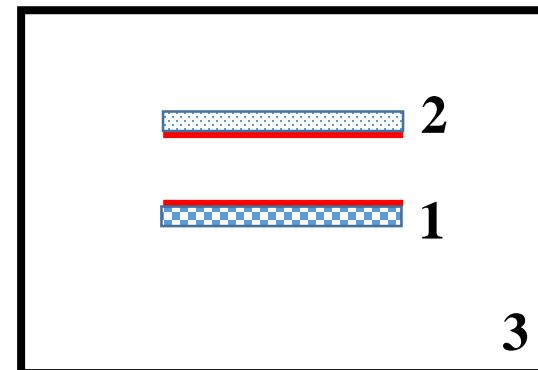


4 组成封闭系统的灰表面之间的辐射换热—例题

例：两块尺寸为 $1\text{m} \times 2\text{m}$ 、间距为 1m 的平行平板置于室温 $t_3=27^\circ\text{C}$ 的大厂房内。平板背面不参与换热。已知两板的温度和发射率分别为 $t_1=827^\circ\text{C}$, $t_2=327^\circ\text{C}$ 和 $\varepsilon_1=0.2$, $\varepsilon_2=0.5$, 计算每个板的净辐射散热量及厂房壁所得到的辐射热量。

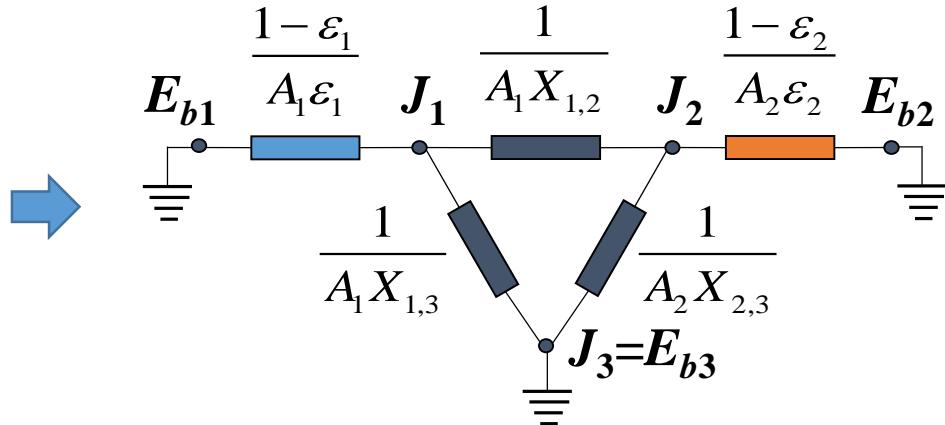
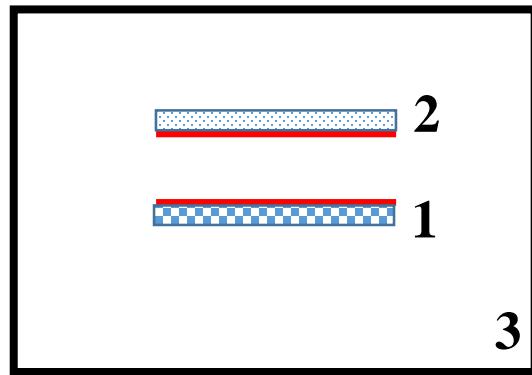
解：本题是3个灰表面间的辐射换热问题。 A_3 很大 $\rightarrow \frac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3 A_3} = 0$ ，可看作黑体。

因此， $J_3 = E_{b3}$ 是个已知量。



4 组成封闭系统的灰表面之间的辐射换热—例题

① 辐射网络图



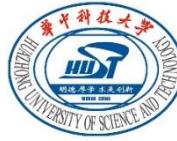
② 计算所有空间热阻和表面热阻

空间热阻 → 求角系数 $X_{1,2}$, $X_{1,3}$, $X_{2,3}$

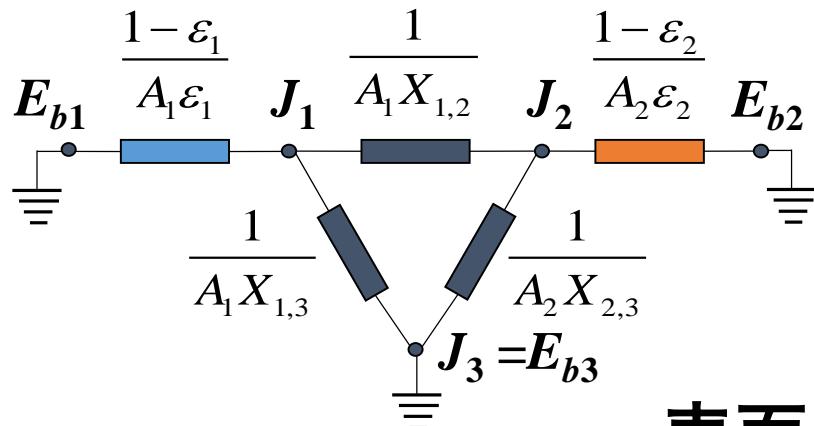
由给定的几何特性 $X/D=2$, $Y/D=1$, 由图7-4查出:

$$X_{1,2} = X_{2,1} = 0.285$$

$$X_{1,3} = 1 - X_{1,2} = X_{2,3} = 1 - 0.285 = 0.715$$



4 组成封闭系统的灰表面之间的辐射换热—例题



空间热阻：

$$\frac{1}{A_1 X_{1,2}} = \frac{1}{2m^2 \times 0.285} = 1.75m^{-2}$$

$$\frac{1}{A_1 X_{1,3}} = \frac{1}{2m^2 \times 0.715} = 0.699m^{-2}$$

$$\frac{1}{A_2 X_{2,3}} = \frac{1}{2m^2 \times 0.715} = 0.699m^{-2}$$

表面热阻：

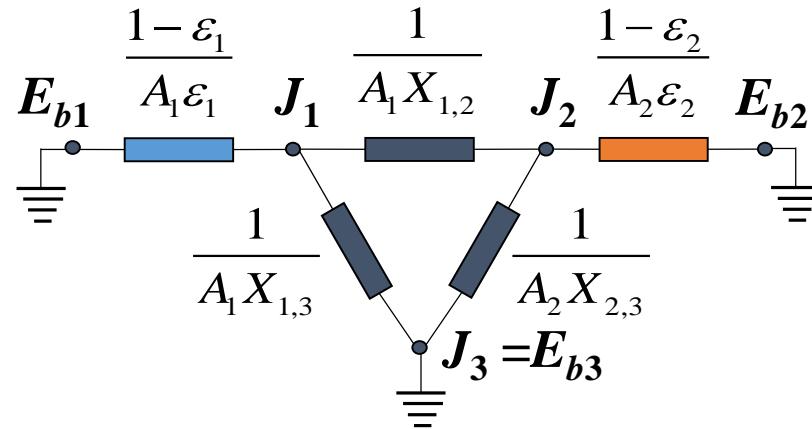
$$\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} = \frac{1 - 0.2}{0.2 \times 2m^2} = 2.0m^{-2}$$

$$\frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2} = \frac{1 - 0.5}{0.5 \times 2m^2} = 0.5m^{-2}$$



4 组成封闭系统的灰表面之间的辐射换热—例题

③ 列节点方程，求 J_1 、 J_2 节点电势



对 J_1 节点：

$$\frac{E_{b1} - J_1}{2} + \frac{J_2 - J_1}{1.75} + \frac{E_{b3} - J_1}{0.699} = 0$$

对 J_2 节点：

$$\frac{J_1 - J_2}{1.75} + \frac{E_{b3} - J_2}{0.699} + \frac{E_{b2} - J_2}{0.5} = 0$$



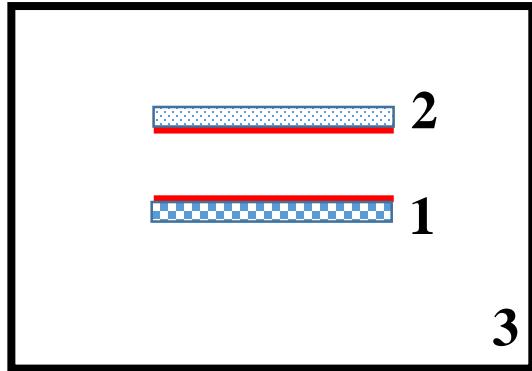
$$\begin{aligned} J_1 &= 18.33 \text{ kW/m}^2 \\ J_2 &= 6.437 \text{ kW/m}^2 \end{aligned}$$

其中：

$$E_{bi} = \sigma_0 T_i^4, \quad i = 1, 2, 3$$

4 组成封闭系统的灰表面之间的辐射换热——例题

④ 辐射换热量

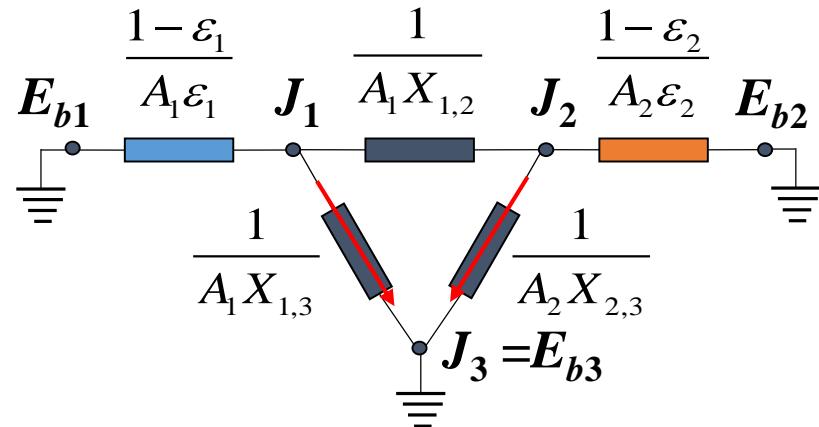


板1的净辐射换热量：

$$Q_1 = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1}} = 32.34 \text{ kW}$$

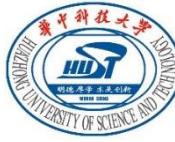
板3的净辐射换热量：

$$Q_3 = \frac{E_{b3} - J_1}{0.699} + \frac{E_{b3} - J_2}{0.699} = - \left(\frac{E_{b1} - J_1}{2} + \frac{E_{b2} - J_2}{0.5} \right) = -(Q_1 + Q_2) = -34.16 \text{ kW}$$



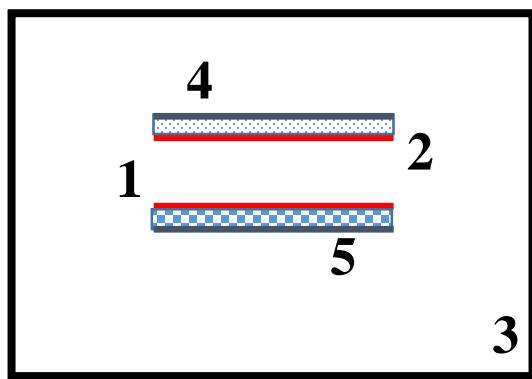
板2的净辐射换热量：

$$Q_2 = \frac{E_{b2} - J_2}{\frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}} = 1.822 \text{ kW}$$



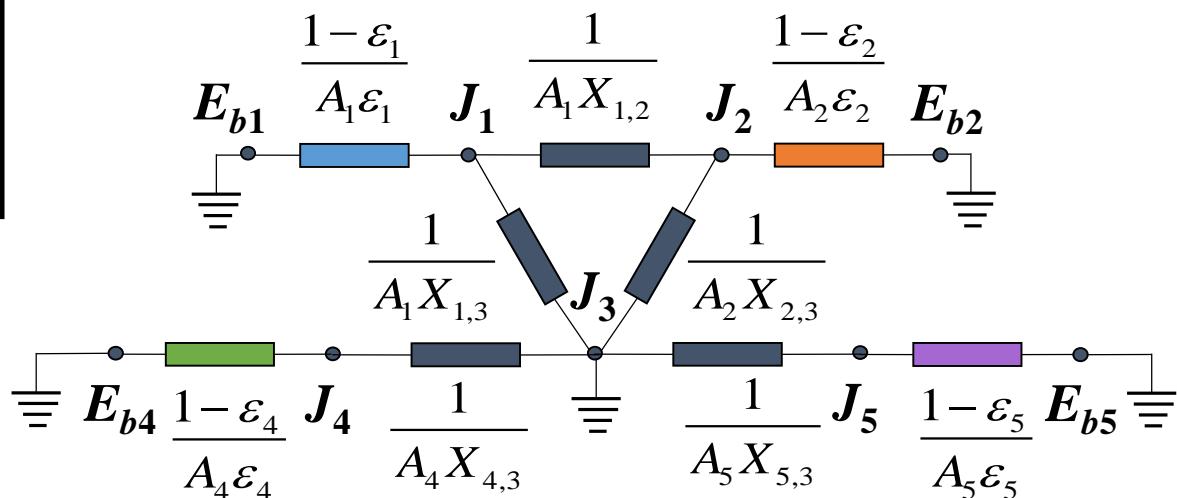
4 组成封闭系统的灰表面之间的辐射换热—例题

若平板1、2的背面为表面4、5，也参与辐射换热，辐射网络图应该怎么画？



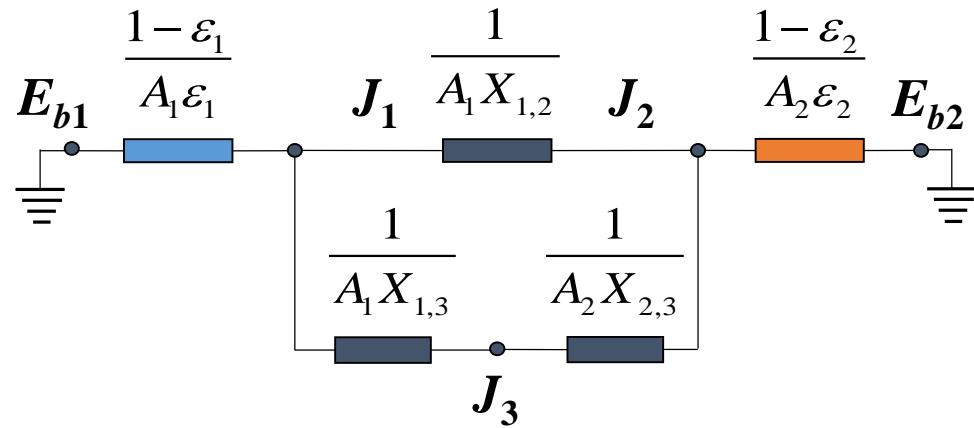
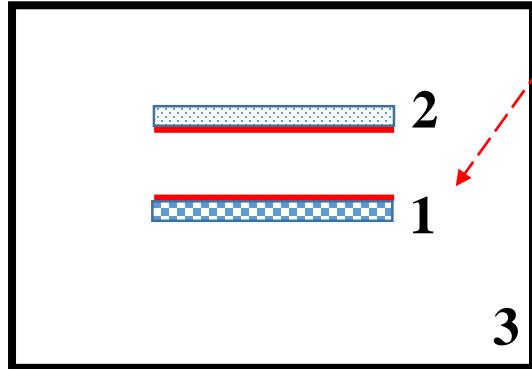
Remind

$$X_{4,5} = X_{4,1} = X_{4,2} = X_{5,1} = X_{5,2} = 0$$



4 组成封闭系统的灰表面之间的辐射换热—例题

例：在上例中若大房间的壁面为重辐射表面，在其它条件不变时，计算温度较高表面的净辐射散热量。



- 解：①画出辐射网络图如图
②计算混联电路部分的等效电阻及总热阻

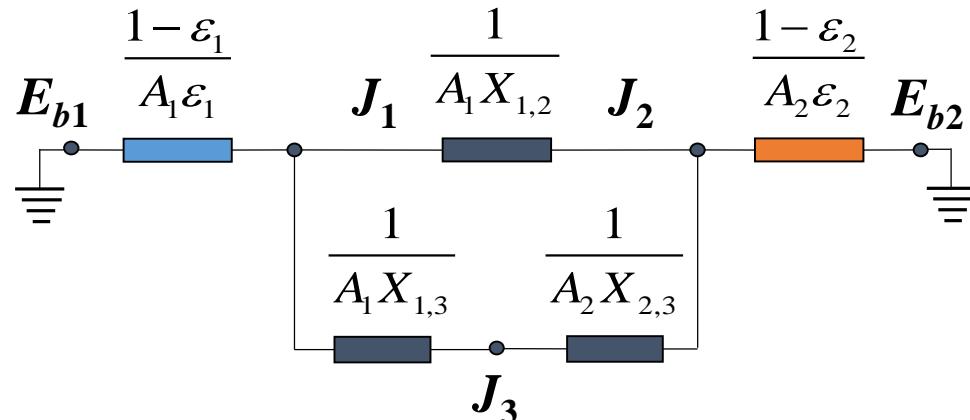
4 组成封闭系统的灰表面之间的辐射换热—例题

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_{1,2}} + \frac{1}{R_{1,3} + R_{2,3}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{1.75\text{m}^{-2}} + \frac{1}{0.7\text{m}^{-2} + 0.7\text{m}^{-2}} \right)^{-1} = 0.78\text{m}^{-2}$$

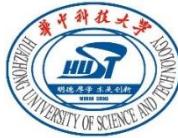
$$\Sigma R = R_1 + R_{eq} + R_2 = (2 + 0.78 + 0.5)\text{m}^{-2} = 3.28\text{m}^{-2}$$

③计算净辐射换热量

$$Q_1 = Q_{1,2} = -Q_{2,1} = -Q_2 \\ = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\Sigma R} = 23.06\text{kW}$$



正负号说明：表面1失去热量，表面2获得辐射能量，与表面3为黑体时情况不大相同。



5 辐射换热的控制—强化与削弱

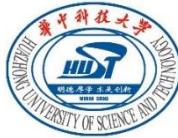
① 辐射换热的强化

辐射换热中有表面热阻和空间热阻。所以，若要强化辐射换热，可

- 增大表面发射率（采用粗糙表面）
- 增大角系数（改变表面间的相对位置）

$$Q_i = \frac{E_{bi} - J_i}{1 - \varepsilon_i} A_i \varepsilon_i$$

$$Q_{ij} = \frac{J_j - J_i}{A_i X_{ij}}$$



5 辐射换热的控制—强化与削弱

② 辐射换热的削弱

与强化辐射换热相反，辐射换热的弱化可通过增加热阻的方式实现，例如：

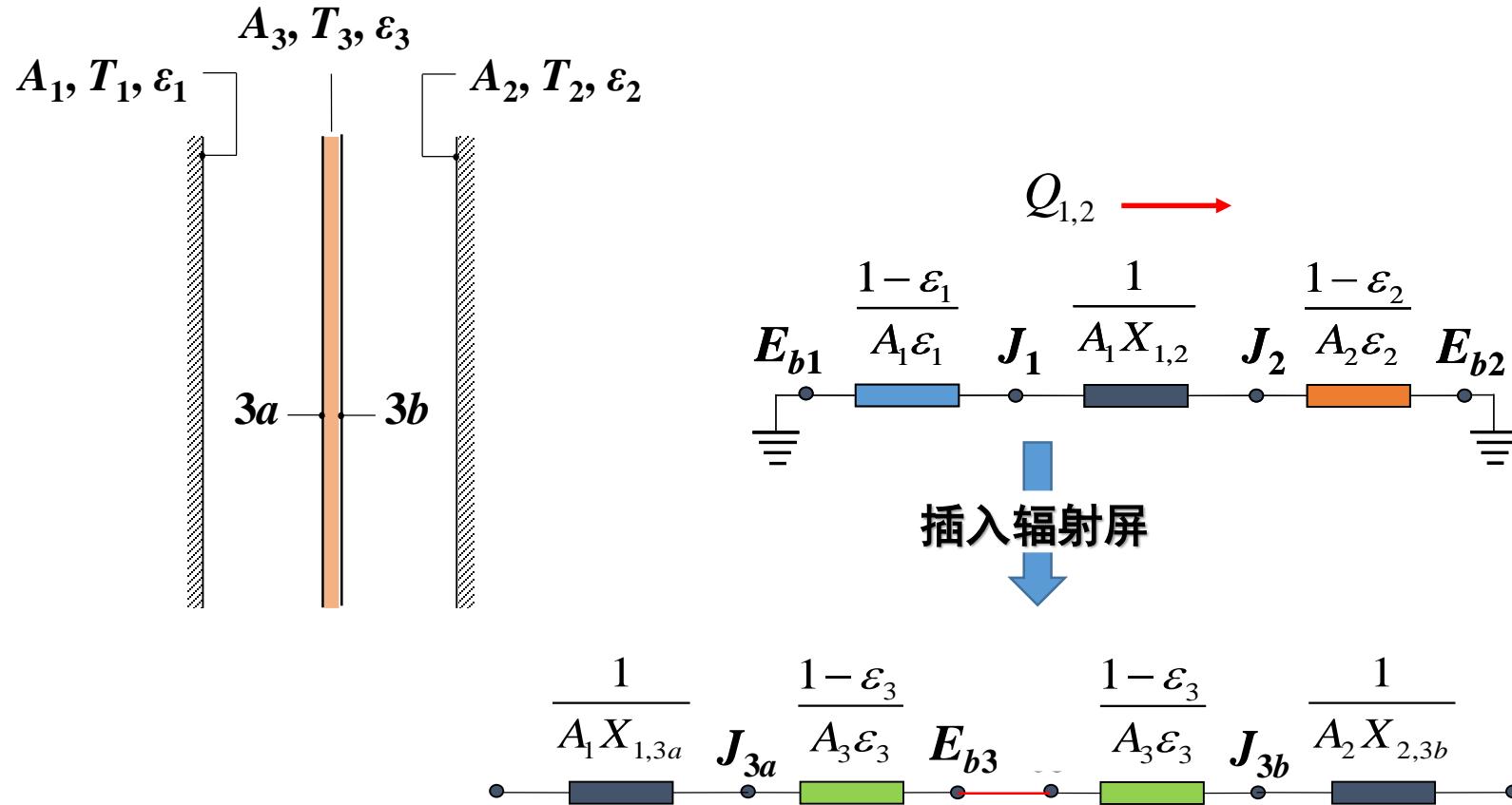
- 减小表面发射率（抛光，镀银）
- 增加空间热阻 辐射屏 → 同时增加了表面热阻

$$Q_i = \frac{E_{bi} - J_i}{\frac{1 - \varepsilon_i}{A_i \varepsilon_i}}$$

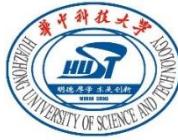
$$Q_{ij} = \frac{J_j - J_i}{\frac{1}{A_i X_{ij}}}$$

5 辐射换热的控制—强化与削弱

② 辐射换热的削弱：辐射屏（Radiation Shield）

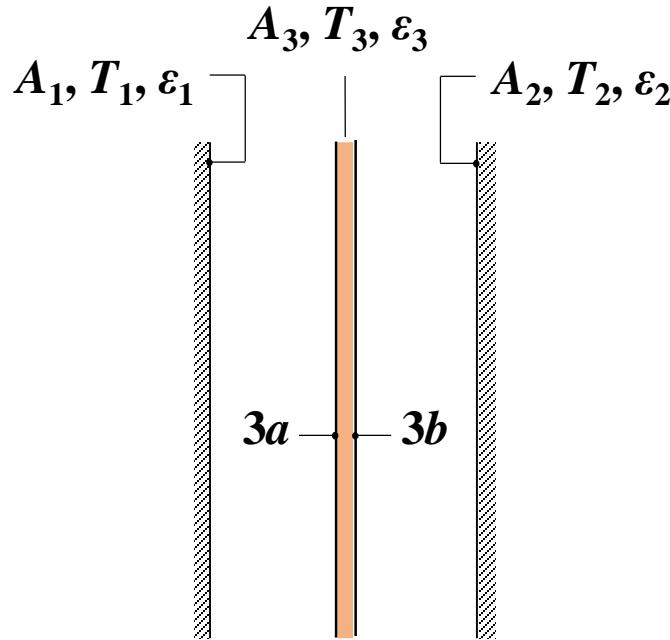


增加了两个表面辐射热阻，一个空间辐射热阻。



5 辐射换热的控制—强化与削弱

② 辐射换热的削弱：辐射屏（Radiation Shield）



➤ 没有辐射屏时：

$$Q_{12} = \frac{\sigma_0 A (T_1^4 - T_2^4)}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1}$$

➤ 加辐射屏后：

$$Q_{1,3a} = \frac{\sigma_0 A (T_1^4 - T_3^4)}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_3 - 1} = \frac{\sigma_0 A (T_3^4 - T_2^4)}{1/\varepsilon_3 + 1/\varepsilon_2 - 1} = -Q_{2,3b}$$

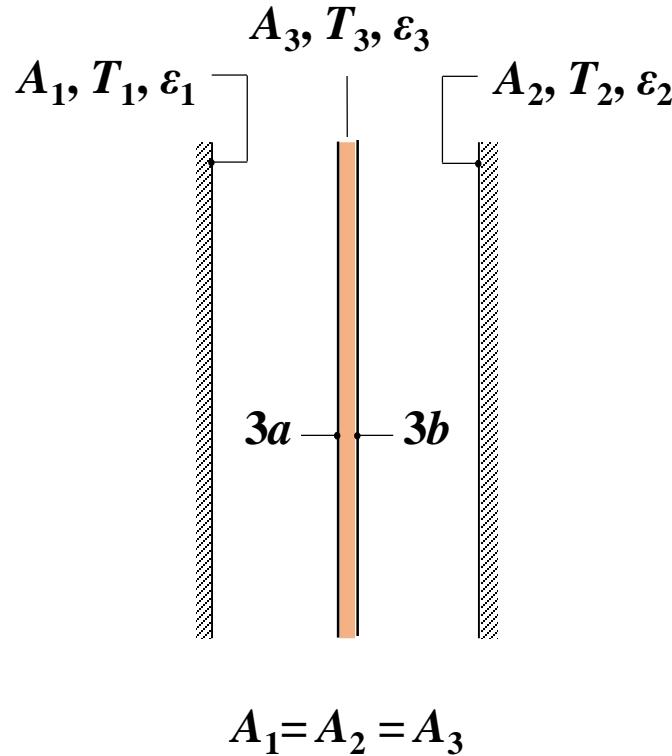
$$A_1 = A_2 = A_3$$

➤ 利用分式的和分比性质，可得： $Q'_{12} = \frac{\sigma_0 A (T_1^4 - T_2^4)}{1/\varepsilon_1 + 2/\varepsilon_3 + 1/\varepsilon_2 - 2}$



5 辐射换热的控制—强化与削弱

② 辐射换热的削弱：辐射屏（Radiation Shield）



$$Q_{12} = \frac{\sigma_0 A (T_1^4 - T_2^4)}{1/\varepsilon_1 + 2/\varepsilon_3 + 1/\varepsilon_2 - 2}$$

当 $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ 时：

$$Q'_{12} = \frac{\sigma_0 A (T_1^4 - T_2^4)}{2(1/\varepsilon + 1/\varepsilon - 1)} = \frac{1}{2} Q_{12}$$

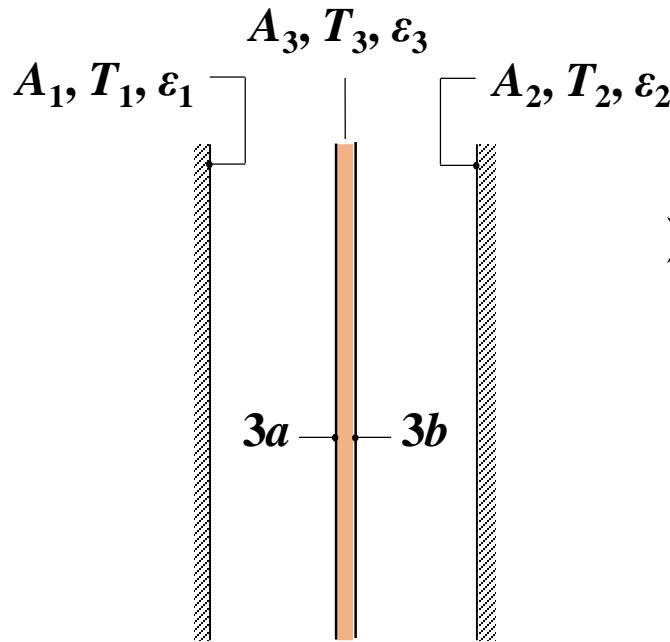
在两灰体表面间插入与灰体**黑度相等的薄板**，其辐射换热减少一半。

思考：插入N块辐射屏，结果如何？



5 辐射换热的控制—强化与削弱

② 辐射换热的削弱：辐射屏（Radiation Shield）



能削弱辐射传热的原因？

- 若 $T_1 > T_2$ ，对2板而言，原本接收的是来自1板的辐射，加入辐射屏后，接收来自3板的辐射，而3板温度必定小于1板，温度经历了多次降落，这样受射体获得的热量就减少了。

实际工程中，为了有效削弱辐射换热，往往采用黑度较低的金属薄板作为遮热板。



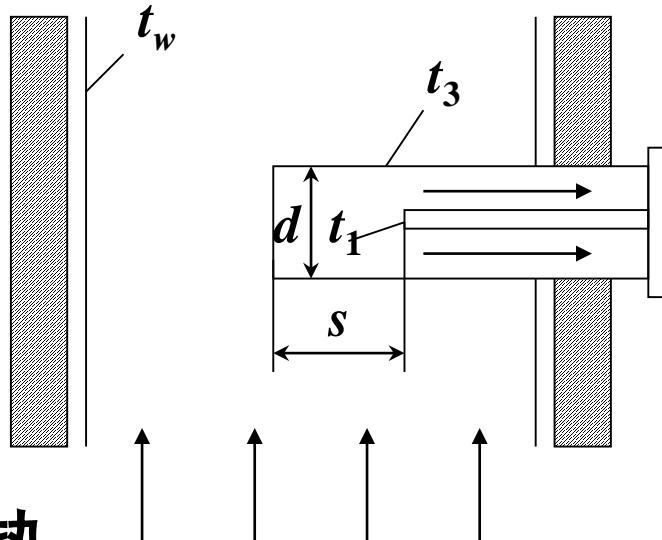
作业：

**7-1, 7-3, 7-11, 7-13 , 7-14,
7-15, 7-16, 7-18**

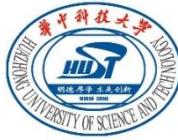


Supplement—遮热罩抽气式热电偶

传热分析：



1. 气流与热电偶间以对流方式换热；
2. 热电偶与冷壁面间以辐射方式换热；
3. 热接点通过热偶丝向外导热；
4. 热电势反映的是热平衡时热电偶接点的温度。

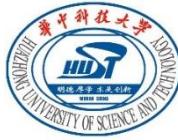


Supplement—遮热罩抽气式热电偶

热偶直接放入气流的测温误差分析

- 热电偶接点通过辐射方式传给水冷壁的热量越大，误差越大；
- 气流与热电偶接点间的对流传热系数越小，传热温差越大，误差越大。

减小测量误差需要减小热偶接点与水冷壁间的辐射换热，强化气流与热偶接点的对流换热。



Supplement—遮热罩抽气式热电偶

若 $t_w = 600 \text{ } ^\circ\text{C}$, $h = 58.2 \text{ W/m}^2\text{K}$, 热偶接点的发射率 $\varepsilon = 0.3$, 测量值为 $t = 792 \text{ } ^\circ\text{C}$, 求气体的实际温度?

热偶接点的热平衡关系

$$h(t_g - t) = \varepsilon\sigma(T^4 - T_w^4)$$

$$t_g = t + \frac{\varepsilon\sigma}{h}(T^4 - T_w^4) = 792 + \frac{0.3 \times 5.67}{58.2} (10.65^4 - 8.73^4) = 998.2$$



Supplement—遮热罩抽气式热电偶

采用单层遮热罩抽气式热电偶，作用有两个：

1. 减小辐射换热；2. 强化对流换热

热偶接点的热平衡方程

$$2h(t_g - t_1) = \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_w^4)$$

$$h(t_g - \textcolor{red}{t}) = \varepsilon \sigma (\textcolor{red}{T}^4 - T_1^4)$$

t_1 为遮热罩的温度，2表示遮热罩两面换热，且均认为是大包小的辐射问题。如果需要进一步提高测温准确度，可采用多层遮热罩或减小遮热罩的发射率。



Supplement—解释结霜现象

在深秋晴朗无风的夜晚，草地会结霜，可气象台的天气预报却说清晨最低温度为2°C，试分析这种现象（假设草地与地面之间绝热）。

答：草地对地面可近似为绝热。所以草地接受空气对流换热热量等于它对太空的辐射。由于

$$h(T_{air} - T_{grass}) = \sigma \varepsilon_{grass} (T_{grass}^4 - T_{sky}^4)$$

所以 T_{grass} 小于 T_{air} ，大于 T_{sky} 。

- 晴天，草地直接向天空热辐射，辐射热量增加， T_{grass} 与 T_{air} 差值增大，结霜。
- 无风， h 减小， T_{grass} 与 T_{air} 差值增大，结霜。