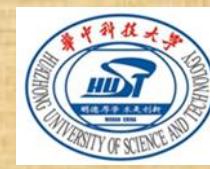


平面力系平衡问题的分析方法



例3.3 梁ACB如图。梁上起重小车重 $W=50\text{kN}$, 吊重 $P=10\text{kN}$, 求A、B处的约束力。

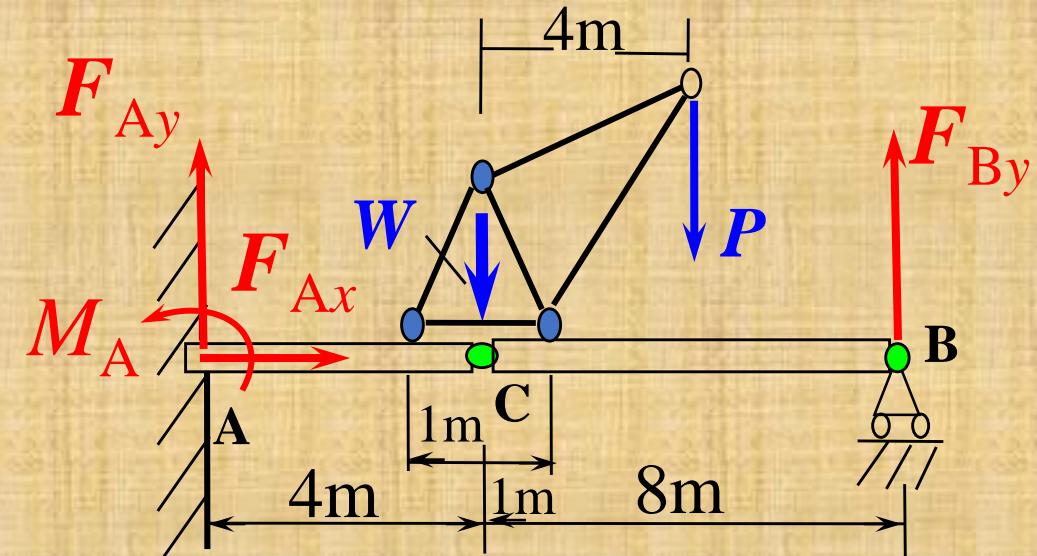
解: 1)取系统整体为研究对象, 画受力图。

列平衡方程:

$$\sum F_x = F_{Ax} = 0 \quad \text{---(1)}$$

$$\sum F_y = F_{Ay} + F_{By} - P - W = 0 \quad \text{---(2)}$$

$$\sum M_A(F) = M_A + 12F_{By} - 4W - 8P = 0 \quad \text{---(3)}$$



讨论: 由(1)知, $F_{Ax}=0$ 。

剩余两个方程中含3个未知约束反力, 不足以求解。

平面力系平衡问题的分析方法

2) 小车为研究对象, 列平衡方程:

$$\begin{aligned}\Sigma M_D(F) &= 2F_E - W - 5P = 0 \\ \Rightarrow F_E &= (50+50)/2 = 50\text{kN}\end{aligned}$$

$$\Sigma F_y = F_D + F_E - W - P = 0 \Rightarrow F_D = 10\text{kN}$$

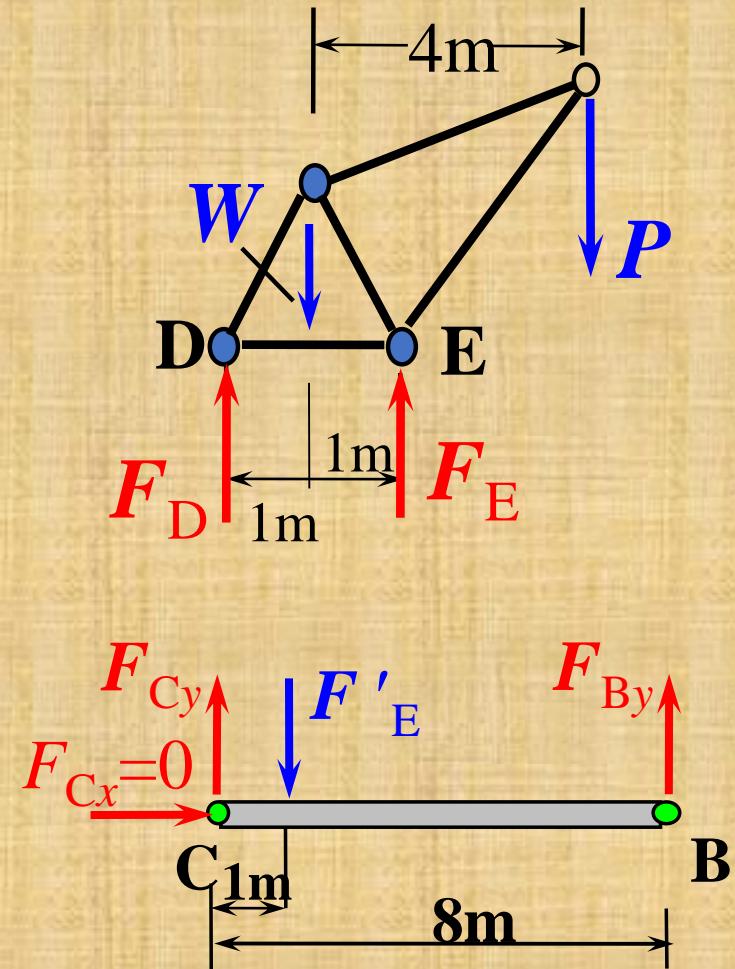
3) 取BC梁为研究对象, 有:

$$\begin{aligned}\Sigma M_C(F) &= 8F_{By} - F_E = 0 \\ \Rightarrow F_{By} &= F_E/8 = 6.25\text{kN}\end{aligned}$$

将 F_{By} 代入(2)、(3)式, 求得:

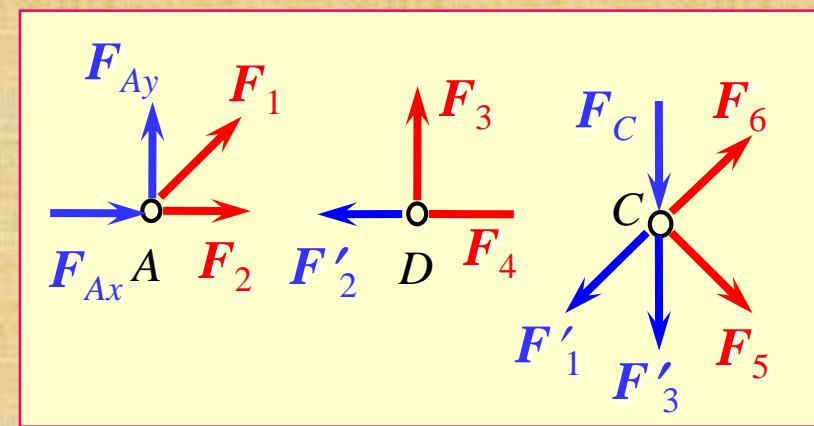
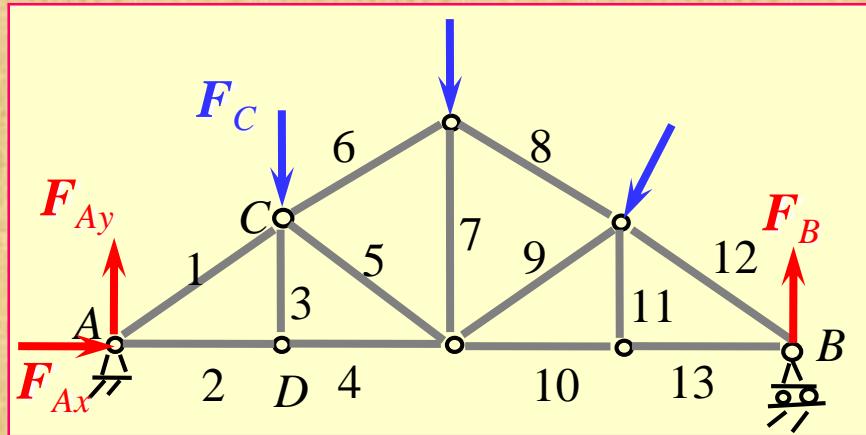
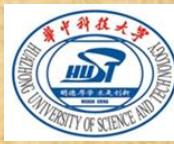
$$F_{Ay} = P + W - F_{By} = 53.75 \text{ kN}$$

$$M_A = 4W + 8P - 12F_{By} = 205 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



有时需要综合研究整体及部分的平衡, 联立求解。

3.3.1 节点法

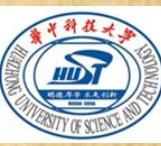


用节点法求平面桁架中杆内力的步骤为：

- 1) 研究整体，求约束反力。
- 2) 选取节点，画受力图。假定杆内力为拉力。
- 3) 从含已知力且只有二杆受力未知的节点开始，逐一列平衡方程求解。若求得的结果为负，则是压力。

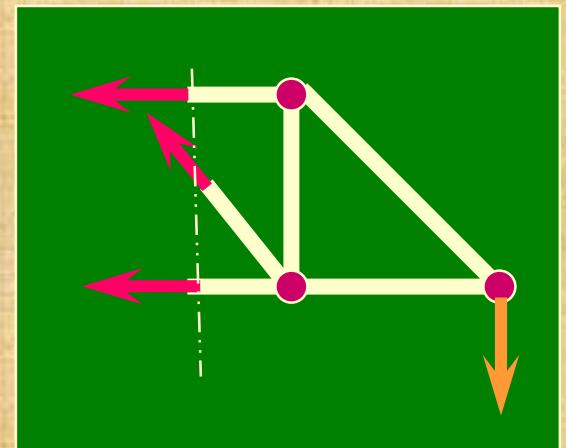
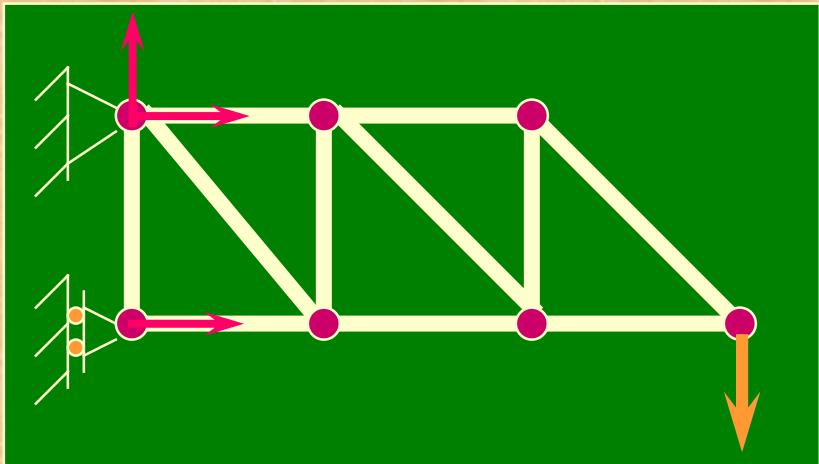
求反力 F_{Ax} 、 F_{Ay} \Rightarrow 由 A 节点平衡求 F_1 、 F_2
 \Rightarrow 由 D 节点求 F_3 、 F_4 \Rightarrow 由 C 节点求 F_5 、 $F_6 \dots$

3.3.2 截面法



截面法分析方法：

- 1) 研究整体，求约束反力。
- 2) 任取一截面，截取部分桁架
作为研究对象，画受力图。
杆内力假定为拉力。
- 3) 列平衡方程求解。
因为作用在研究对象上的是
平面一般力系，可以求解3个未知量。



3.3 平面桁架

例3.11 求图示桁架中各杆内力。

解: 1) 由整体求得:

$$F_{Ax}=0; F_{Ay}=F_E/3; F_B=2F_E/3$$

2) 截取上部研究, 受力如图。

$$\sum F_x=0$$

$$\Rightarrow F_2=0$$

$$\sum M_D(F)=-F_E(2a/3)-F_3a=0 \Rightarrow F_3=-2F_E/3$$

$$\sum F_y=-F_E-F_3-F_1=0$$

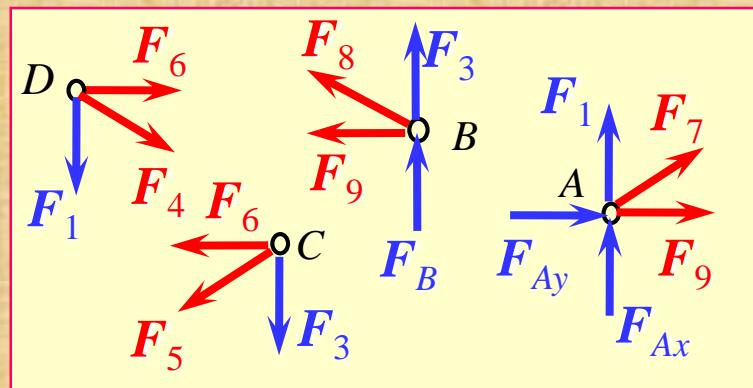
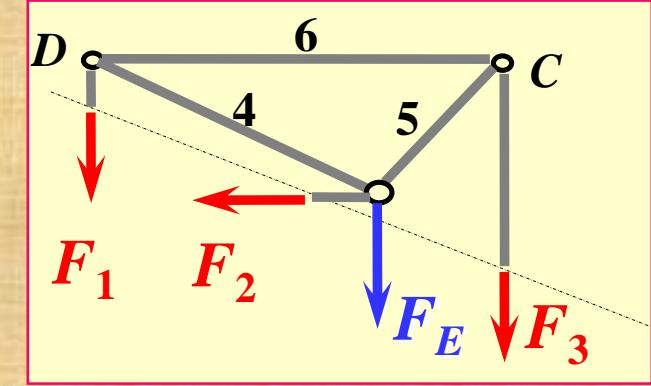
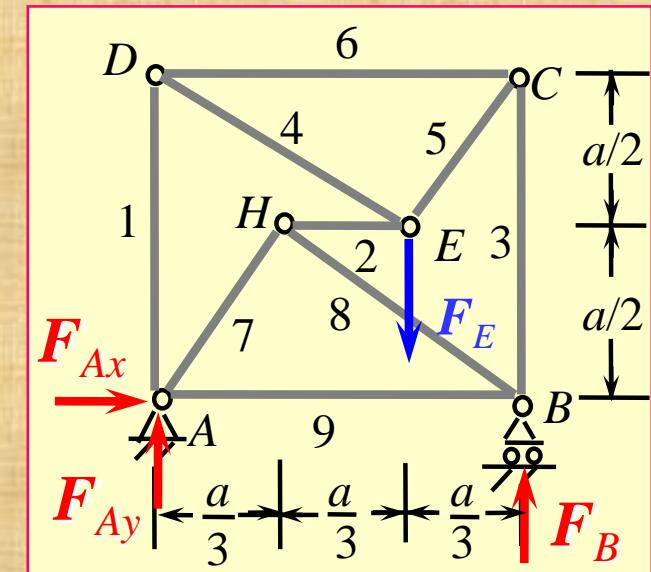
$$\Rightarrow F_1=-F_E/3$$

3) 研究节点D, 可求得 F_4 、 F_6 ;

4) 研究节点C, 可求得 F_5 、 F_6 ;

5) 研究节点B, 可求得 F_8 、 F_9 ;

6) 研究节点A, 可求得 F_7 、 F_9 ;



4.3 内力、截面法

若外力在同一平面内, 截面内力只有3个分量, 即:

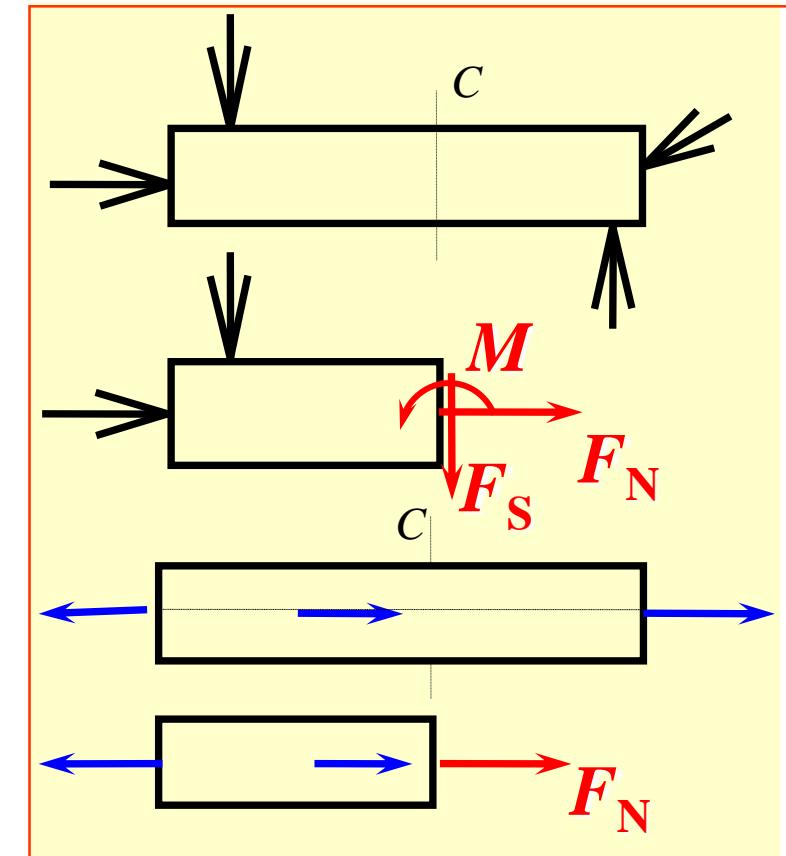
轴力 F_N 作用于截面法向。

剪力 F_S 作用于截面切向。

弯矩 M 使物体发生弯曲。

若外力在轴线上, 内力只有轴力。

内力的符号规定:

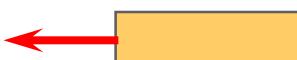


内力 右截面正向

F_N



左截面正向

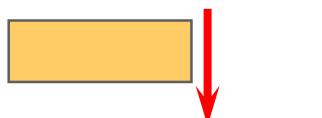


微段变形 (正)



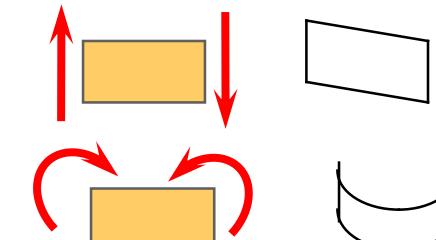
受拉伸

F_S



顺时针错动

M



向上凹

4.3 内力、截面法

例2 求图中1、2、3截面内力。

解：1) 求约束反力：由整体有

$$F_{Bx} = F/2; \quad F_{Ay} = F; \quad F_{Ax} = -F/2$$

由铰链C: $F_{AC} = \sqrt{2}F$; $F_{CD} = -F$

2) 求各截面内力：

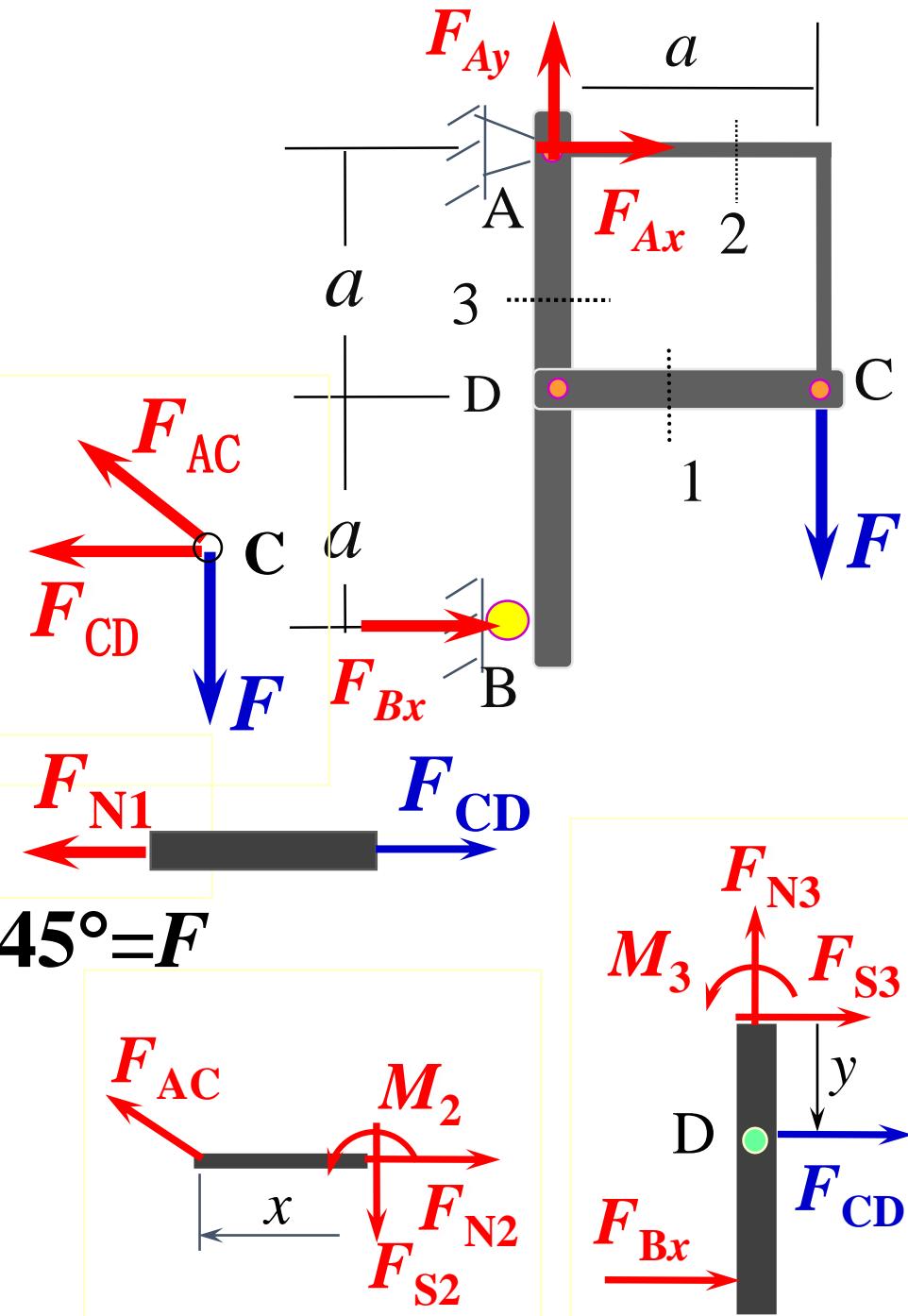
截面1: $F_{N1} = F_{CD} = -F$

截面2: $F_{N2} = F_{AC} \cos 45^\circ = F$; $F_{S2} = F_{AC} \sin 45^\circ = F$

$$M_2 = F_{AC} \cos 45^\circ \cdot x = F \cdot x$$

截面3: $F_{N3} = 0$; $F_{S3} = -F_{Bx} - F_{CD} = F/2$;

$$M_3 = -F_{Bx}(a+y) - F_{CD}y = F(y-a)/2$$



4.5 杆的轴向拉伸和压缩

$\sigma = E \varepsilon$ 是材料的一种应力—应变关系模型，
称为线性弹性应力—应变（物理）关系模型。

$\sigma = F_N / A$ ，单位面积上的内力，称为应力(平均应力)。

单位用帕斯卡(Pa)， $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ ； $1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa}$ ； $1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa}$ 。

$\varepsilon = \Delta L / L$ ，是单位长度的变形，称为应变(平均应变)。
应变是无量纲的量。

E 是 σ - ε 直线的斜率，应力量纲。与材料有关。

因为卸载后变形可以恢复，故 E 称为弹性模量。

轴向拉压杆的应力 σ 、应变 ε 和变形 ΔL 可表达为：

$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

$$\Delta L = \varepsilon L = \frac{\sigma}{E} L = \frac{F_N L}{EA}$$

EA 是抗拉刚度，
反映材料抵抗拉
压变形的能力。

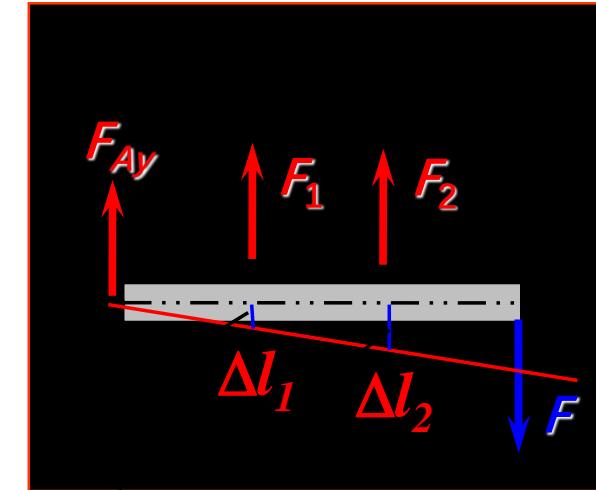
例4.10 刚性梁AB如图。杆1、2的截面积和弹性模量分别为 A_1 、 A_2 ； E_1 、 E_2 。求各杆内力。

解：1) 力的平衡： 平衡方程为：

$$\sum M_A(F) = F_1a + 2F_2a - 3Fa = 0$$

$$\sum F_y = F_{Ay} + F_1 + F_2 - F = 0$$

3个未知力，2个方程，一次静不定。



2) 力与变形间的物理关系：

$$\Delta l_1 = F_1 // E_1 A_1 ; \quad \Delta l_2 = F_2 // E_2 A_2$$

3) 变形几何协调条件： 变形后应有：

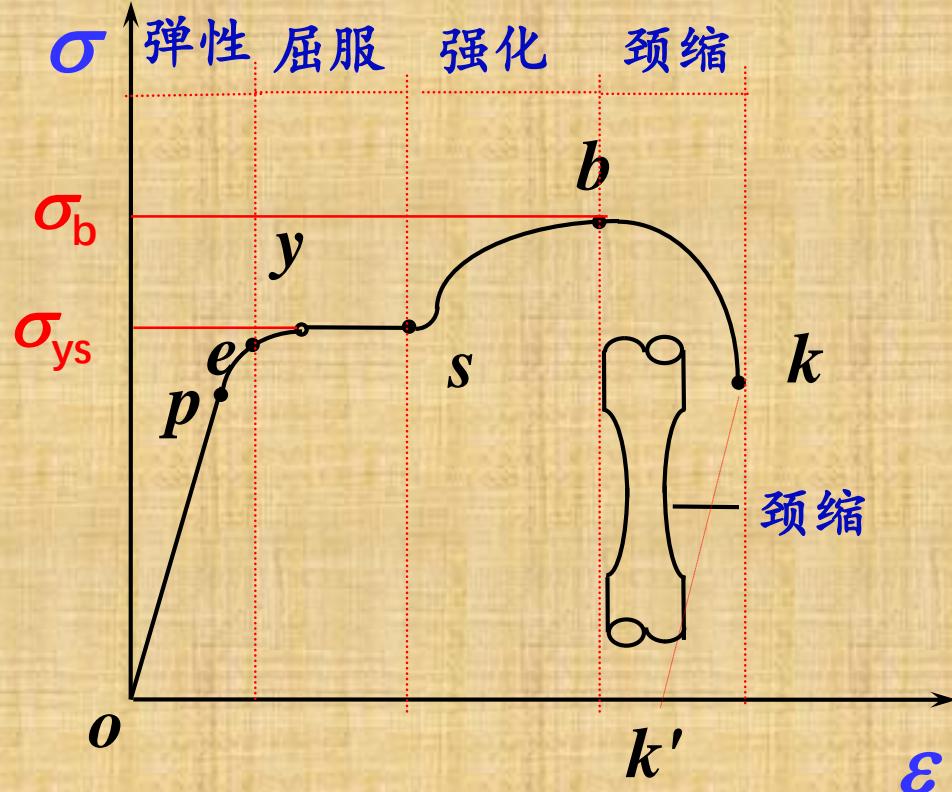
$$\Delta l_2 = 2\Delta l_1 ; \quad \text{即 } F_2 // E_2 A_2 = 2F_1 // E_1 A_1 .$$

解得：

求出内力后，应力、变形和位移显然不难求得。

小结

低碳钢拉伸 σ - ε 曲线

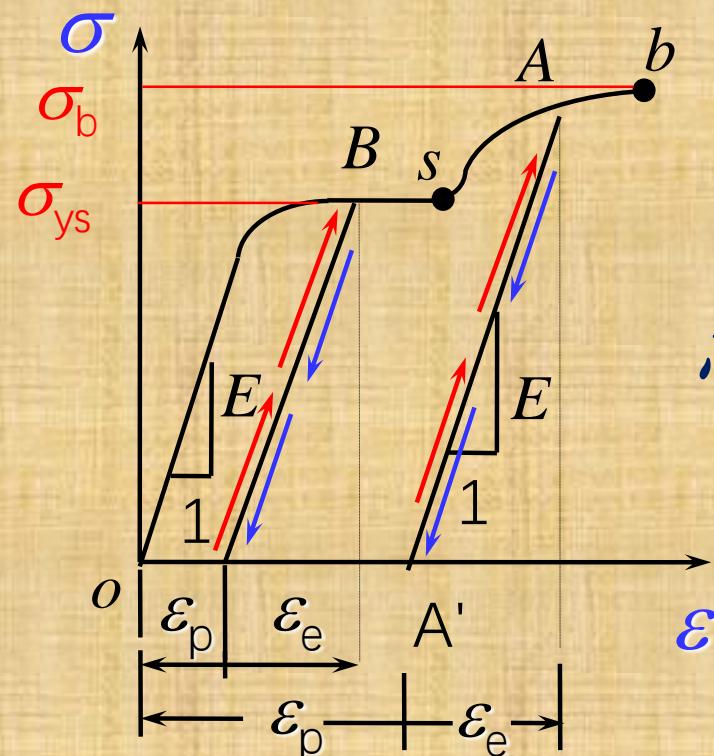


材料的力学性能指标为：

弹性: E ;

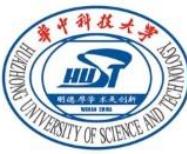
强度: σ_s or $\sigma_{0.2}$; σ_b ;

延性指标: δ , ψ 。



弹性应变和塑性应变

总应变 ε 为: $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$



延性材料：压缩与拉伸有基本相同的 E 、 σ_{ys} 。

脆性材料：拉、压缩性能常有较大的区别。

一般：抗压极限强度 $\sigma_{bc} \gg$ 抗拉极限强度 σ_{bt} 。

泊松效应：材料沿加载方向伸长/缩短的同时，在垂直于加载方向发生的缩短/伸长现象。

泊松比 μ ： $\mu = -\varepsilon_2/\varepsilon_1$ 。 ($\varepsilon_1 = \sigma/E$ ； $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\mu \varepsilon_1$)

体积变化率为： $\Delta V/V_0 = (1-2\mu)\varepsilon$ 弹性体积变化很小

真应力、应变与工程应力、应变的关系：

$$\sigma = F/A = S(1+e) \quad \varepsilon = \ln(1+e) \quad \text{小变形时可不加区别}$$

由 σ - ε 曲线定义若干重要的

材料性能和指标：

- 比例极限 σ_p : $\sigma = E\varepsilon$

σ - ε 关系是线性、弹性的。

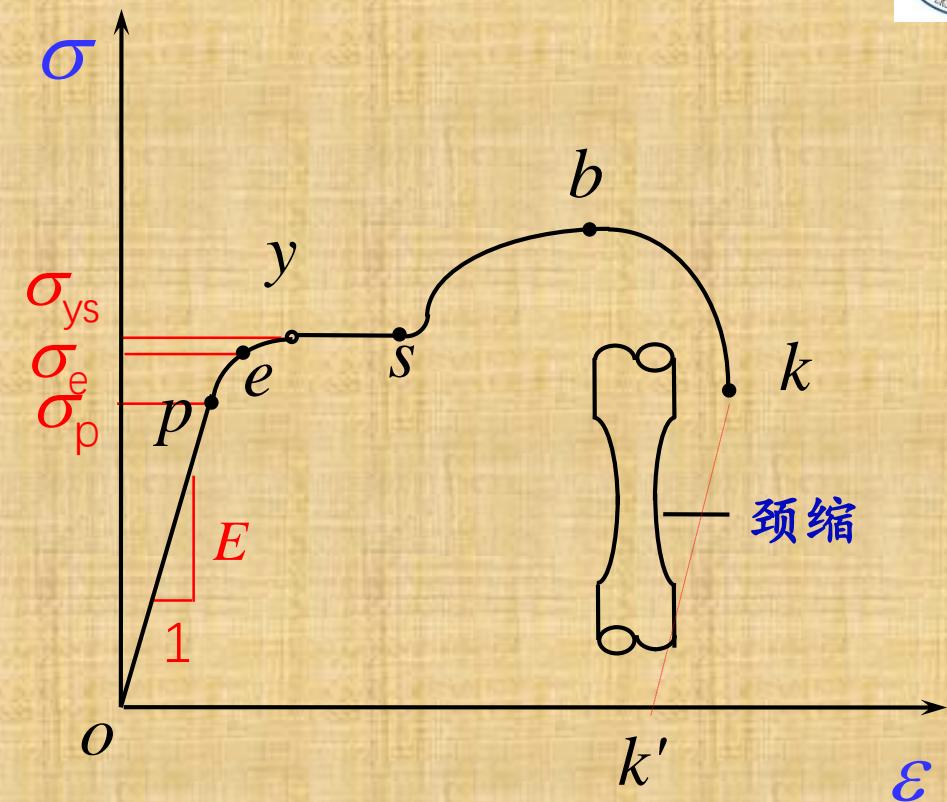
- 弹性模量 (Elastic Modulus)

$E = \sigma/\varepsilon$: op 段直线的斜率, 反映材料抵抗弹性变形的能力。

- 弹性极限 σ_e : pe 段为非线性。 σ_e 与 σ_p 数值相近。

- 屈服极限或屈服强度(yield strength) σ_{ys} :

材料是否出现塑性变形的重要强度指标。



● 弹性应变和塑性应变

屈服后卸载，卸载线斜率为 E 。

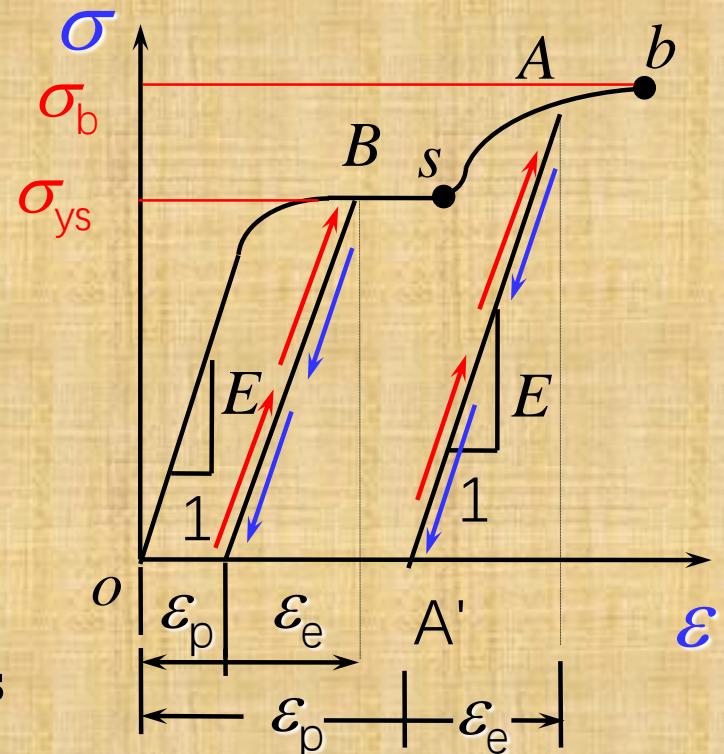
残余的塑性应变为 ε_p ；恢复的弹性应变为 ε_e ，则有： $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$ 。

总应变 ε 是弹性应变与塑性应变之和。

● 应变硬化：强化阶段卸载，可使屈服极限 σ_{ys} 提高，塑性变形减小。（如预应力钢筋等）

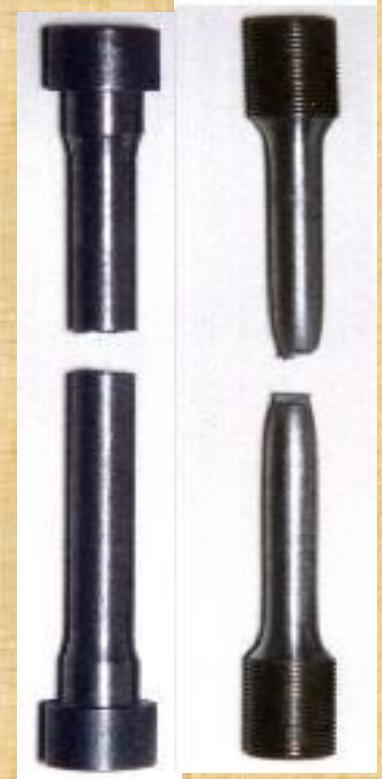
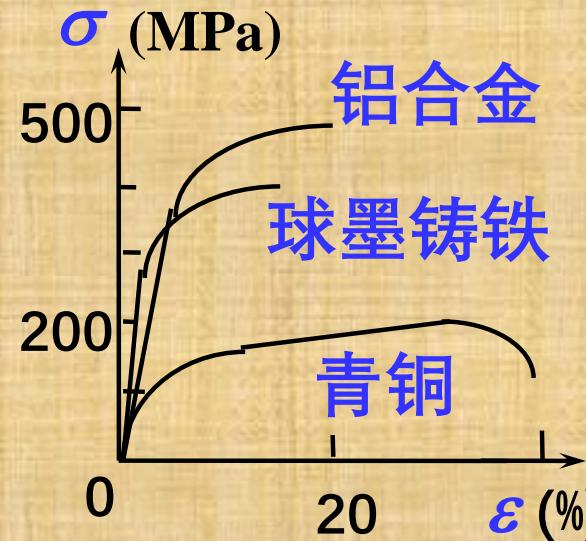
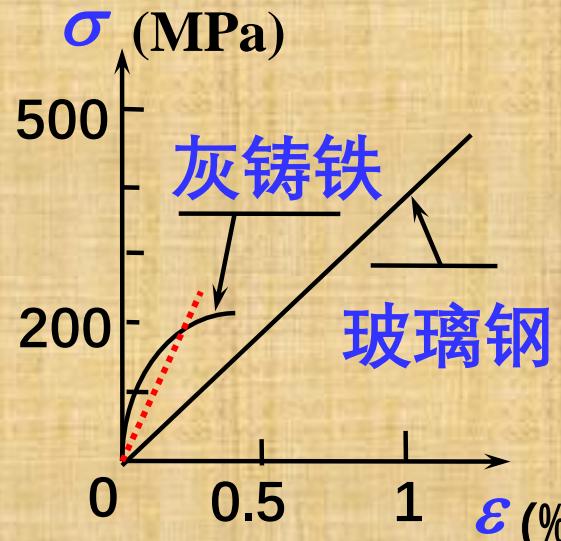
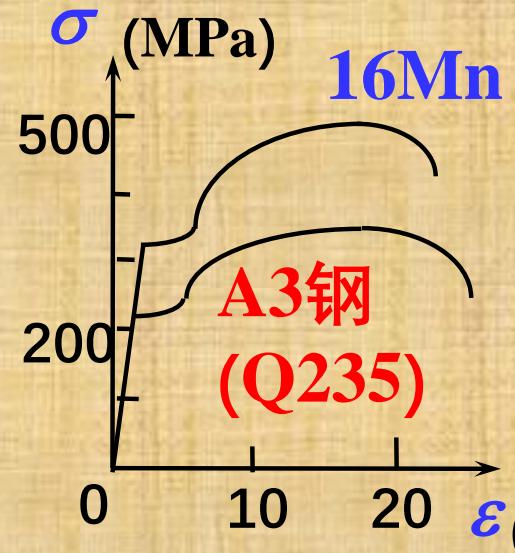
● 极限强度 (ultimate strength) σ_b ：

反映材料是否破坏的重要强度指标。



5.3 不同材料拉伸压缩时的机械性能

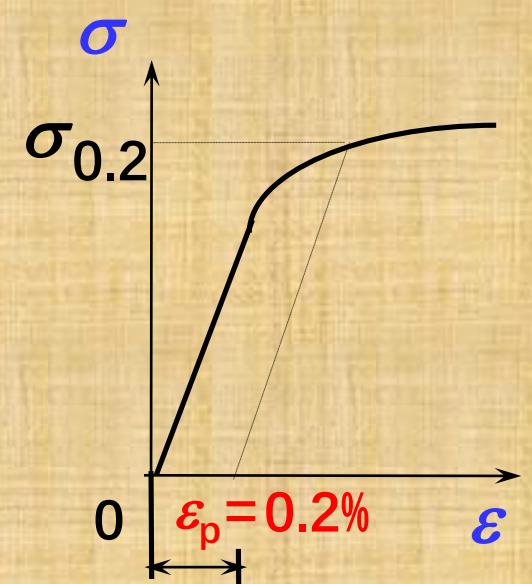
1) 不同材料的拉伸 σ — ε 曲线



● 脆性材料无 σ_{ys} ，无颈缩，强度指标 σ_b 。

● 延性材料可以没有屈服平台，名义屈服强度 $\sigma_{0.2}$ 为产生0.2%塑性应变时的应力。

● 弹性阶段 σ — ε 间也可有非线性关系。



2) 压缩时的机械性能

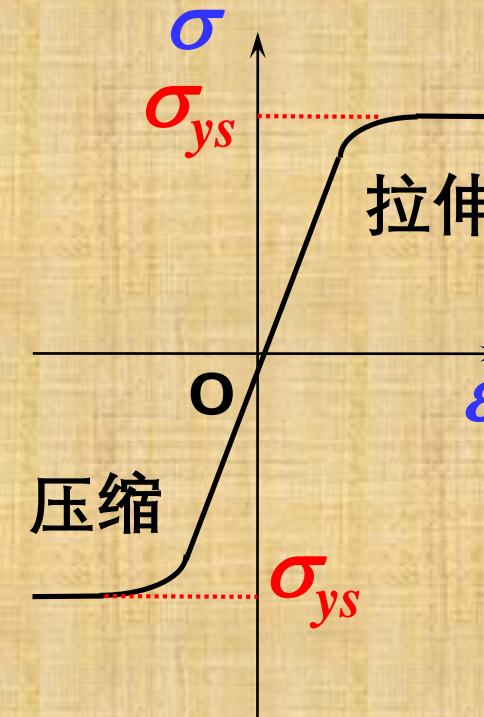
● 延性材料：

压缩与拉伸的 σ - ε 曲线
关于原点对称。

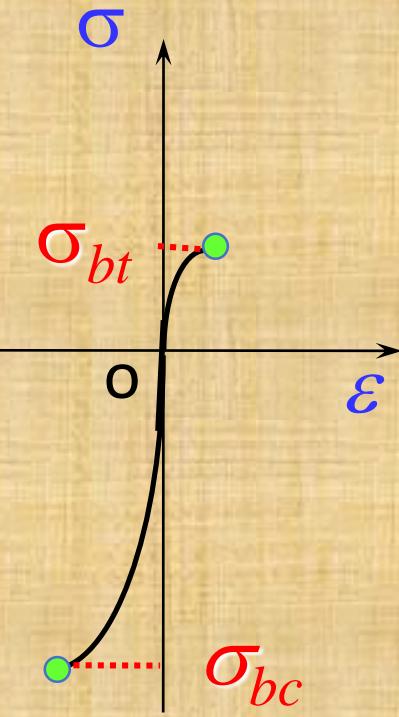
有基本相同的 E 、 σ_{ys} 。
材料愈压愈扁，往往测
不出抗压极限强度。

● 脆性材料：

拉、压缩机械性能常常有较大的区别，
抗压极限强度 $\sigma_{bc} \gg$ 抗拉极限强度 σ_{bt} 。
如铸铁、混凝土、石料等。



(a) 低碳钢



(b) 铸铁

小结：

1) 强度条件

拉压强度条件

$$\sigma = F_N/A \leq [\sigma] = \begin{cases} \sigma_{ys}/n & \text{延性材料} \\ \sigma_b/n & \text{脆性材料} \end{cases}$$

剪切强度条件

$$\tau = F_Q/A_\tau \leq [\tau] = \tau_b/n_\tau \quad A_\tau \text{ 为剪切面面积}$$

挤压强度条件

$$\sigma_j = F_j/A_j \leq [\sigma_j] \quad A_j \text{ 为计算挤压面积}$$

剪断条件

工件、连接件

$$\tau = F_Q/A > \tau_b$$

强度条件是一种破坏判据。判据的左端是工作状态下的控制参量（如应力），由分析计算给出；右端则应是该参量的临界值，由实验确定。

功率、转速与传递的扭矩之关系：

力矩的功A可表示为力矩 M 与其转过的角度 α 之积，功率 N_p 是单位时间所做的功，故有：

$$N_p = A/t = M\alpha/t; \alpha/t \text{ 是每秒转过的角度 (弧度) }.$$

设轴的转速为每分钟n转，则每秒转过的角度为 $2\pi n/60$ ，即有：

$$N_p = M\alpha/t = M \times 2\pi n/60 \text{ 或 } M = 60N_p/2\pi n$$

功率常常用千瓦(kW)或马力表示，注意到：

$$1\text{ kW} = 1000\text{ Nm/s}, \quad 1\text{ 马力} = 736\text{ Nm/s},$$

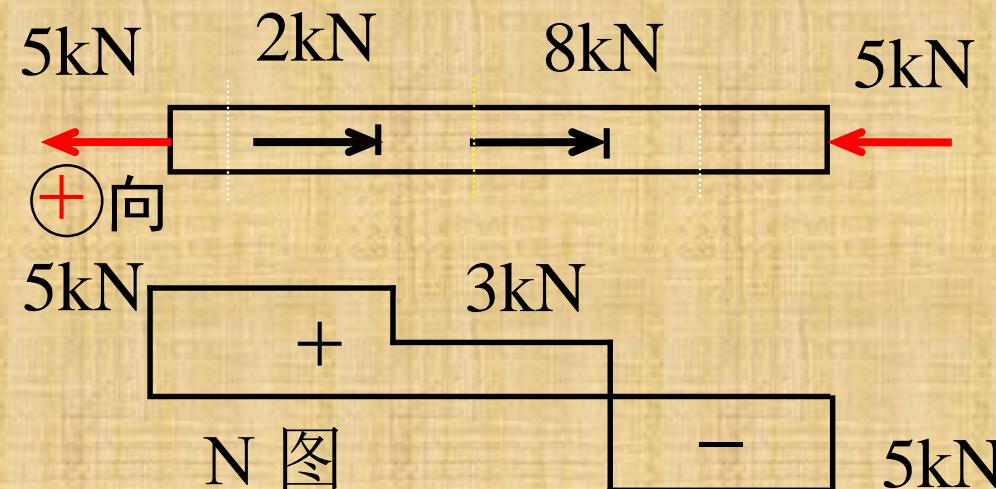
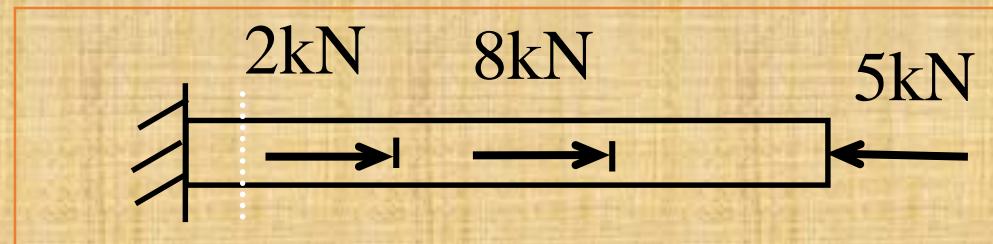
则功率、转速与传递的扭矩之关系为：

$$M (\text{kN.m}) = 9.55N_p (\text{千瓦})/n (\text{转/分})$$

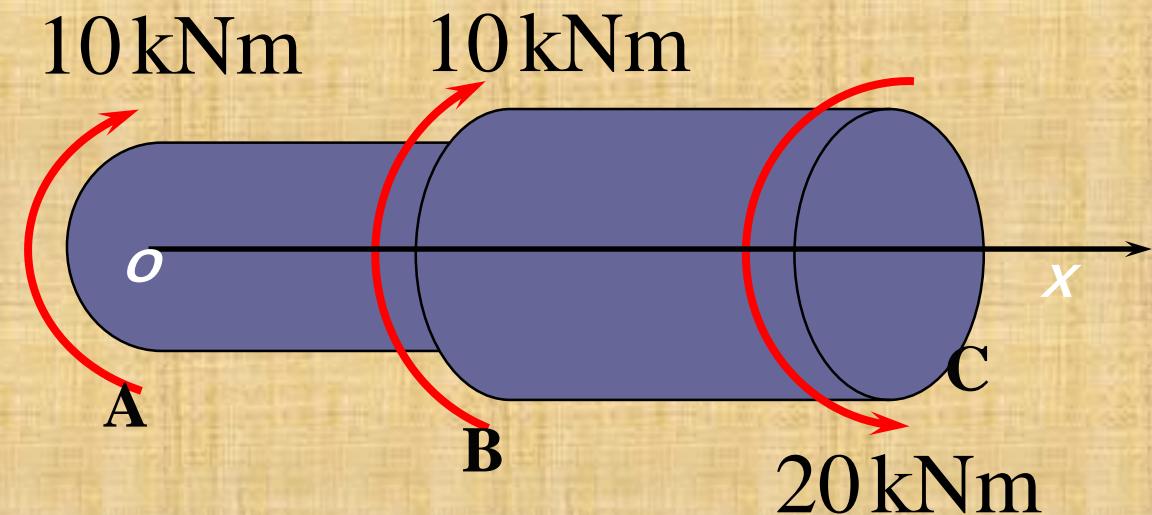
$$M (\text{kN.m}) = 7.02N_p (\text{马力})/n (\text{转/分})$$

扭矩图的简捷画法：

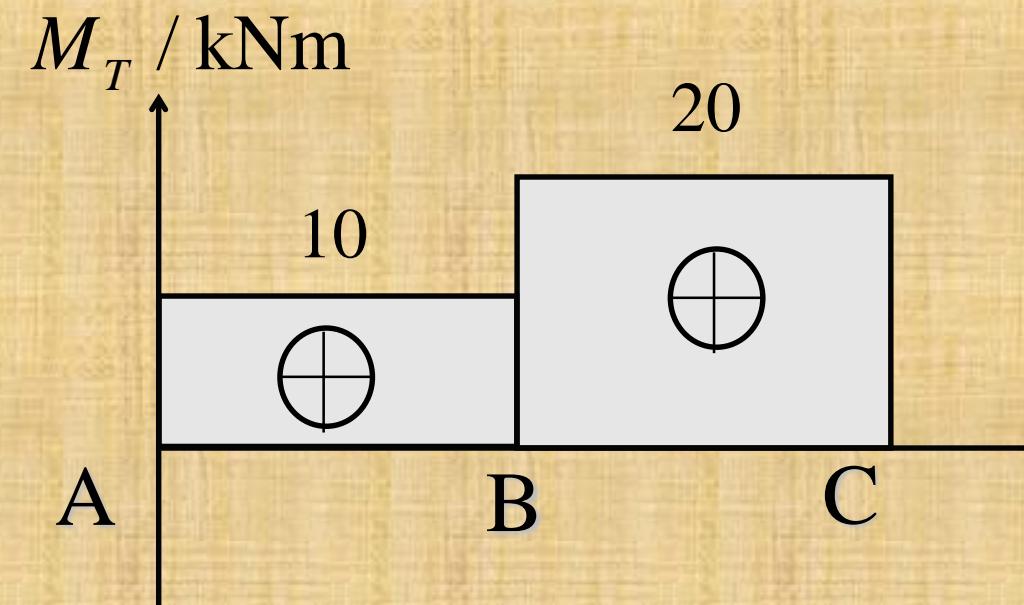
F_N 图 (轴力)



M_T 图



按右手法确定



在左端取参考正向，按载荷大小画水平线；遇集中载荷作用则内力相应增减；至右端回到零。

$$\gamma = r d\varphi / dx$$

$d\varphi / dx$ 称为单位扭转角。

在线性弹性范围内，剪切虎克定律为：

$$\tau = G\gamma$$

G 是 τ - γ 曲线的斜率，如图，称为剪切弹性模量。单位 GPa

半径为 ρ 处的切应力则为：

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dx}$$

圆轴扭转时无正应力

$$G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA = M_T$$

$$I_P = \int_A \rho^2 dA$$

最后得到：

$$\tau_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_T \rho}{I_P}$$

τ_{\max} 在圆轴表面处，且 ---(4)

$$\tau_{\max} = M_T r / I_P = M_T / W_T$$

称为抗扭截面模量。

单位扭转角

$$d\varphi / dx = T / GI_P$$

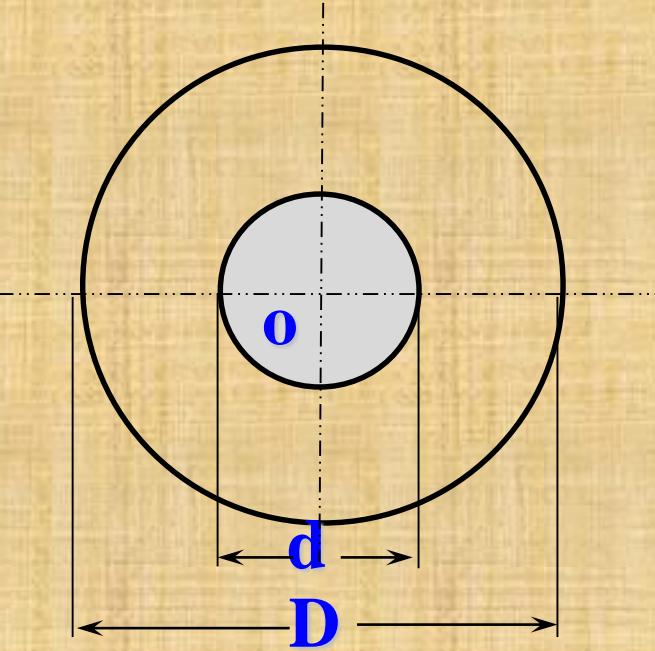
$$\varphi_{AB} = TL / GI_P$$

GI_p 称为抗扭刚度，反映轴抵抗变形的能力

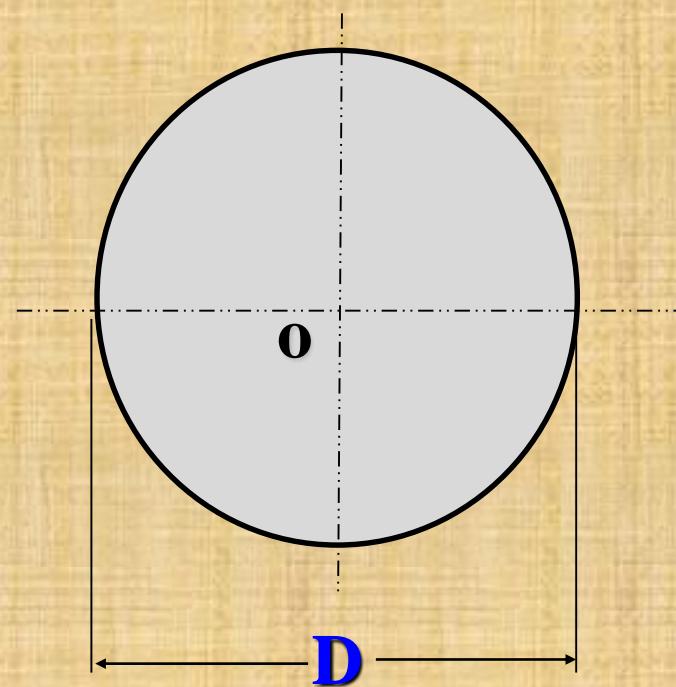
强度条件： $\tau_{\max} = T / W_T \leq [\tau]$

刚度条件： $\theta_{\max} = \frac{T}{GI_p} \times \frac{180^0}{\pi} \leq [\theta]$

空心圆轴



实心圆轴



极惯性矩: $I_P = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$

抗扭截面模量: $W_T = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$

$$\alpha = d/D = 0$$



$$I_P = \frac{\pi D^4}{32}$$

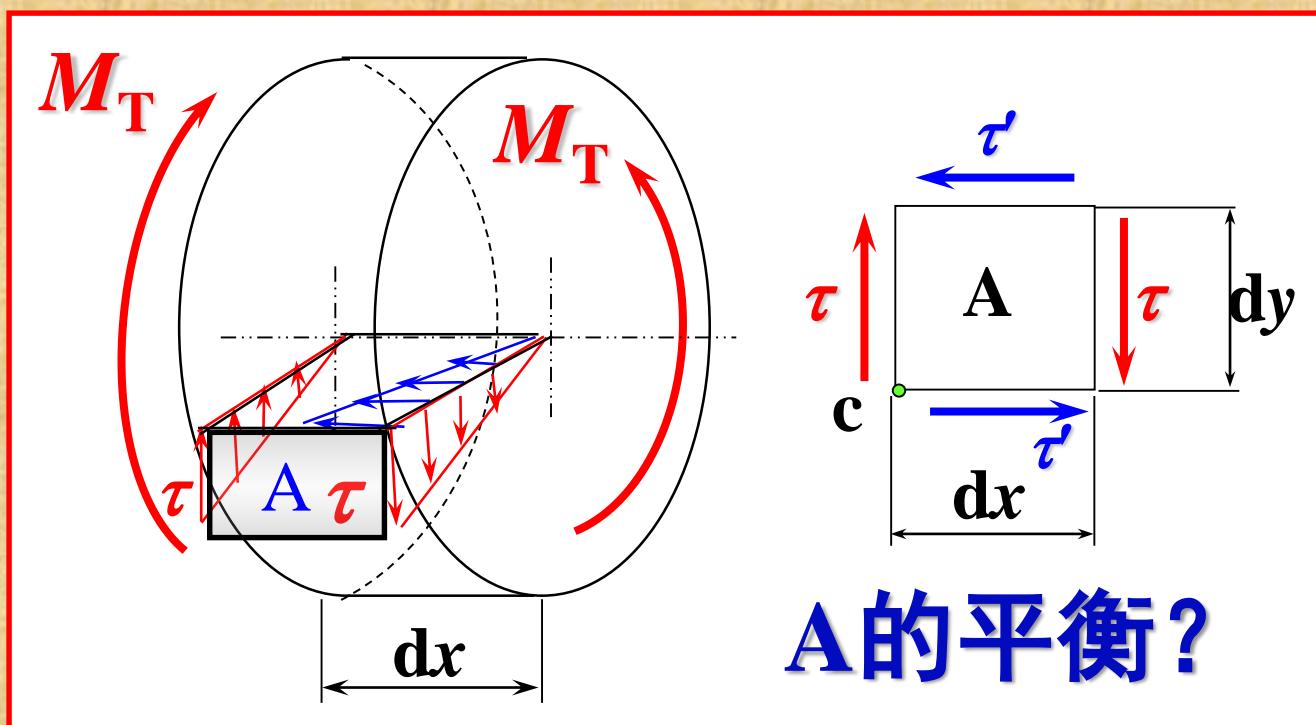
$$W_T = \frac{\pi D^3}{16}$$

4) 扭转圆轴任一点的应力状态

研究两横截面相距 dx 的任一 A 处单位厚度微元，左右二边为横截面，上下二边为过轴线的径向面。

切应力互等定理：

物体内任一点处二相互垂直的截面上，切应力总是同时存在的，它们大小相等，方向是共同指向或背离二截面的交线。



$$\sum M_C(F) = \tau' dx dy - \tau dy dx = 0 \Rightarrow \tau = \tau'$$

例2. 空心圆轴如图, 已知 $M_A=150\text{Nm}$, $M_B=50\text{Nm}$, $M_C=100\text{Nm}$, 材料 $G=80\text{GPa}$, 试求 (1) 轴内的最大切应力; (2) C截面相对A截面的扭转角。

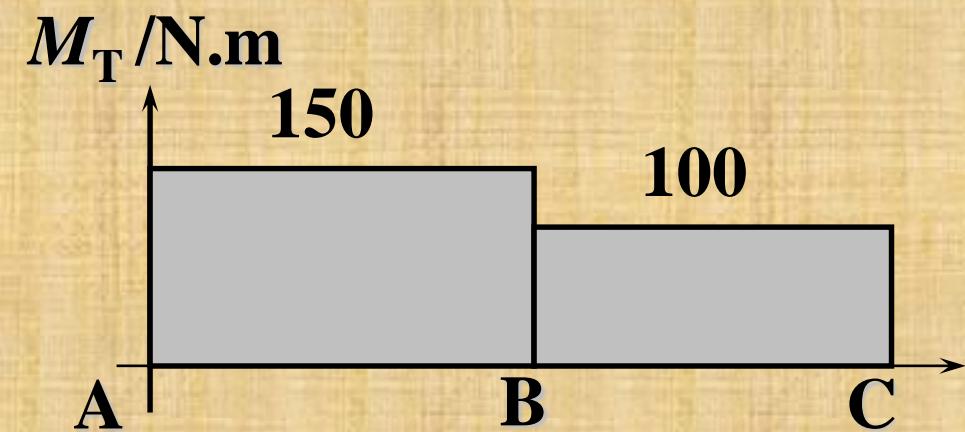
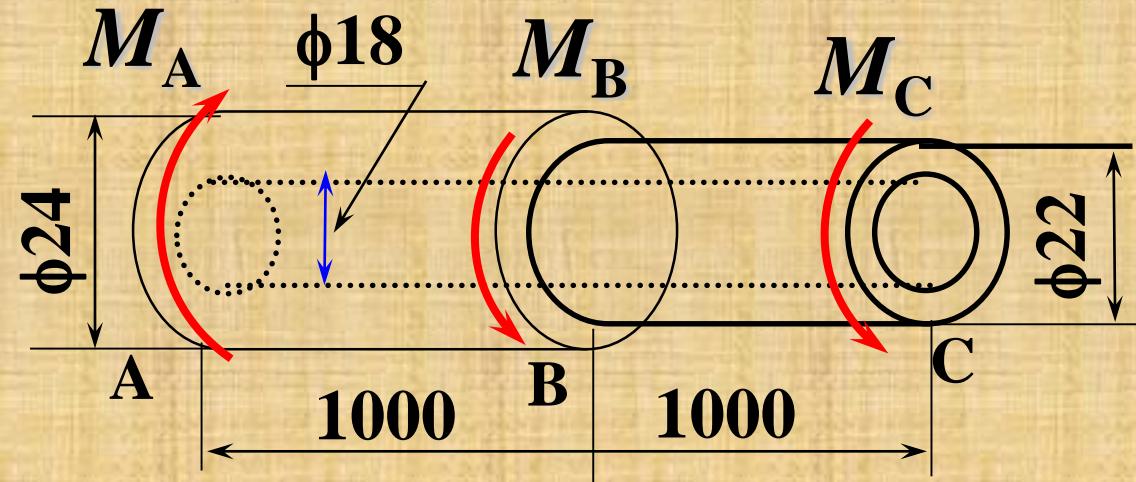
解: 1) 画扭矩图。

2) 计算各段应力:

AB段: N-mm-MPa单位制

$$\tau_{\max 1} = \frac{M_{T1}}{W_{T1}} = \frac{M_{T1}}{\pi D_1^3 / 16 \times [1 - (d / D_1)^4]}$$

$$= \frac{150 \times 10^3 \times 16}{24^3 \pi [1 - (18 / 24)^4]} \text{ MPa} \text{ 单位制} = 80.8 \text{ MPa}$$



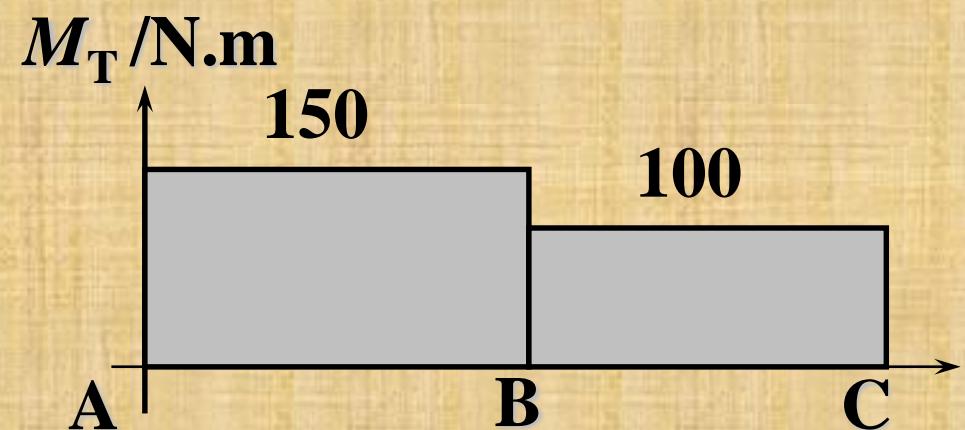
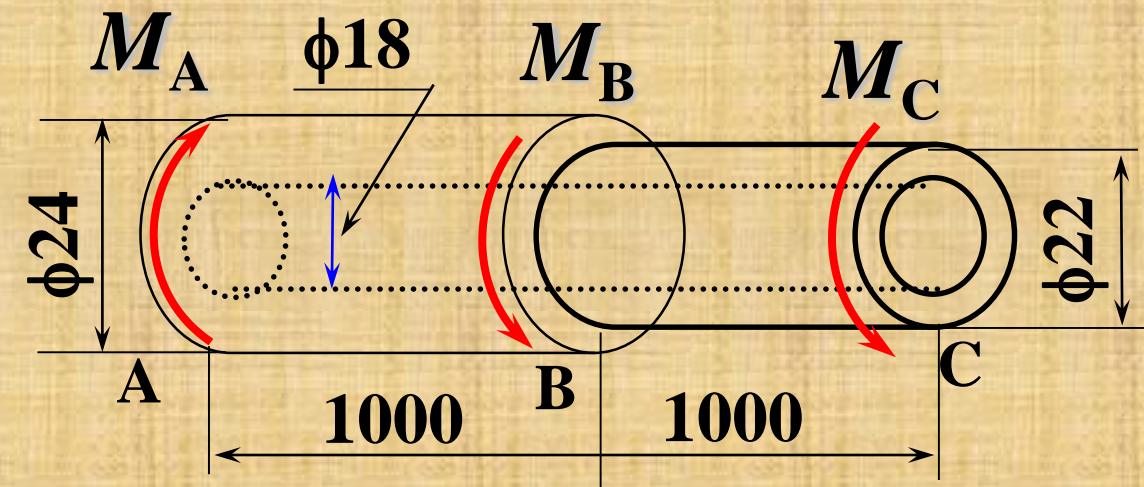
BC段: N-mm-MPa单位制

$$\tau_{\max 2} = \frac{M_{T2}}{W_{T2}} = \frac{M_{T2}}{\frac{\pi D_2^3}{16} \left[1 - \left(\frac{d}{D_2} \right)^4 \right]} = \frac{100 \times 10^3 \times 16}{22^3 \pi [1 - (18/22)^4]} = 86.7 \text{ MPa}$$

故 $\tau_{\max} = 86.7 \text{ MPa}$

3) 计算扭转角 φ_{AC}

$$\varphi_{AC} = \frac{M_{TAB} l_{AB}}{GI_{PAB}} + \frac{M_{TBC} l_{BC}}{GI_{PBC}} = 0.183 \text{ rad}$$



例6 两端固定的圆截面杆AB，在C截面处受外力偶 M_c 作用，试求两固定端的支反力偶矩。

解：静力平衡方程：

$$M_c = M_A + M_B \quad \text{---(1)}$$

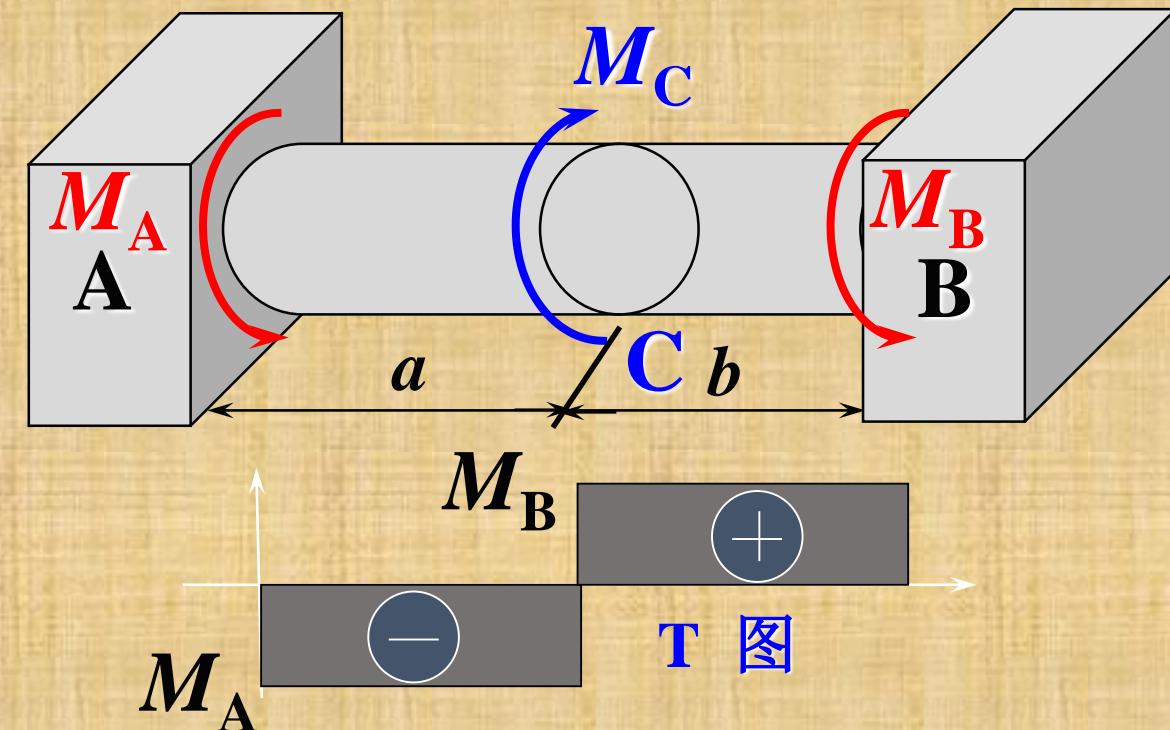
几何方程：

$$\varphi_{AB} = \varphi_{AC} + \varphi_{CB} = 0 \quad \text{---(2)}$$

物理方程(力—变形关系)

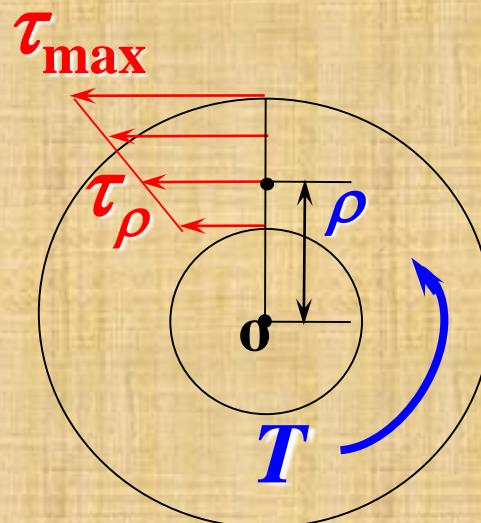
$$\varphi_{AC} = -M_A a / GI_P; \quad \varphi_{CB} = M_B b / GI_P \quad \text{---(3)}$$

(3)代入(2)，再与(1)
联立求解，得：



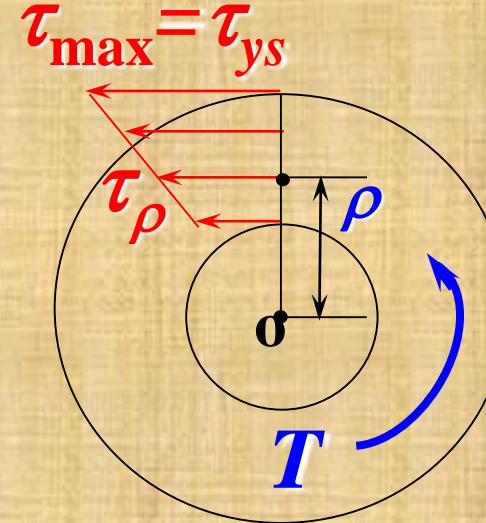
$$M_A = \frac{M_c b}{a + b} \quad M_B = \frac{M_c a}{a + b}$$

理想弹塑性扭转



$T < T_s$
弹性阶段

线弹性材料模型

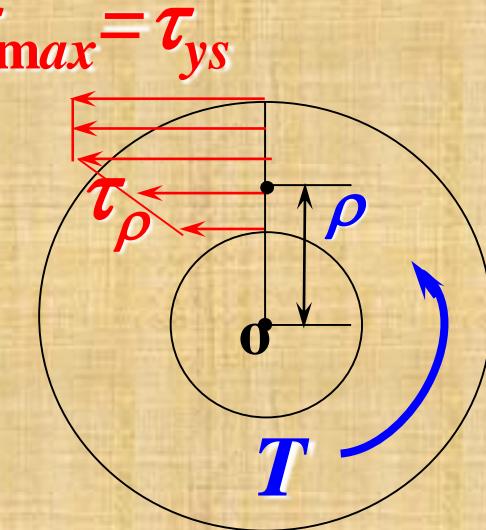


$$T=T_s$$

开始屈服

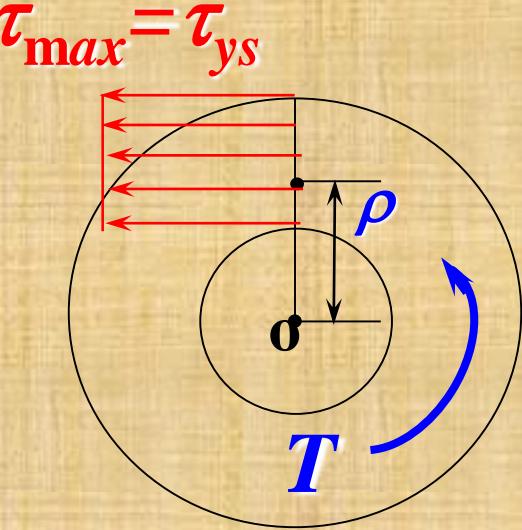
屈服扭矩：

$$T_s = \pi D^3 (1 - \alpha^4) \tau_{ys} / 16$$



$T_U > T > T_S$
弹塑性阶段

理想弹性模型



$$T=T_U$$

极限扭矩：

$$T_U = \frac{\pi D^3 (1 - \alpha^3)}{12} \tau_{ys}$$

讨论3：作图示外伸梁的 F_S 、 M 图。
梁的平衡微分方程：

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{dF_S(x)}{dx} = q(x)$$

解：1. 求支座反力

$$\sum M_A = 2q + 6 \times 30 - 60 - 4F_B = 0$$

$$F_B = 35 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 2q + F_A + F_B - 30 = 0$$

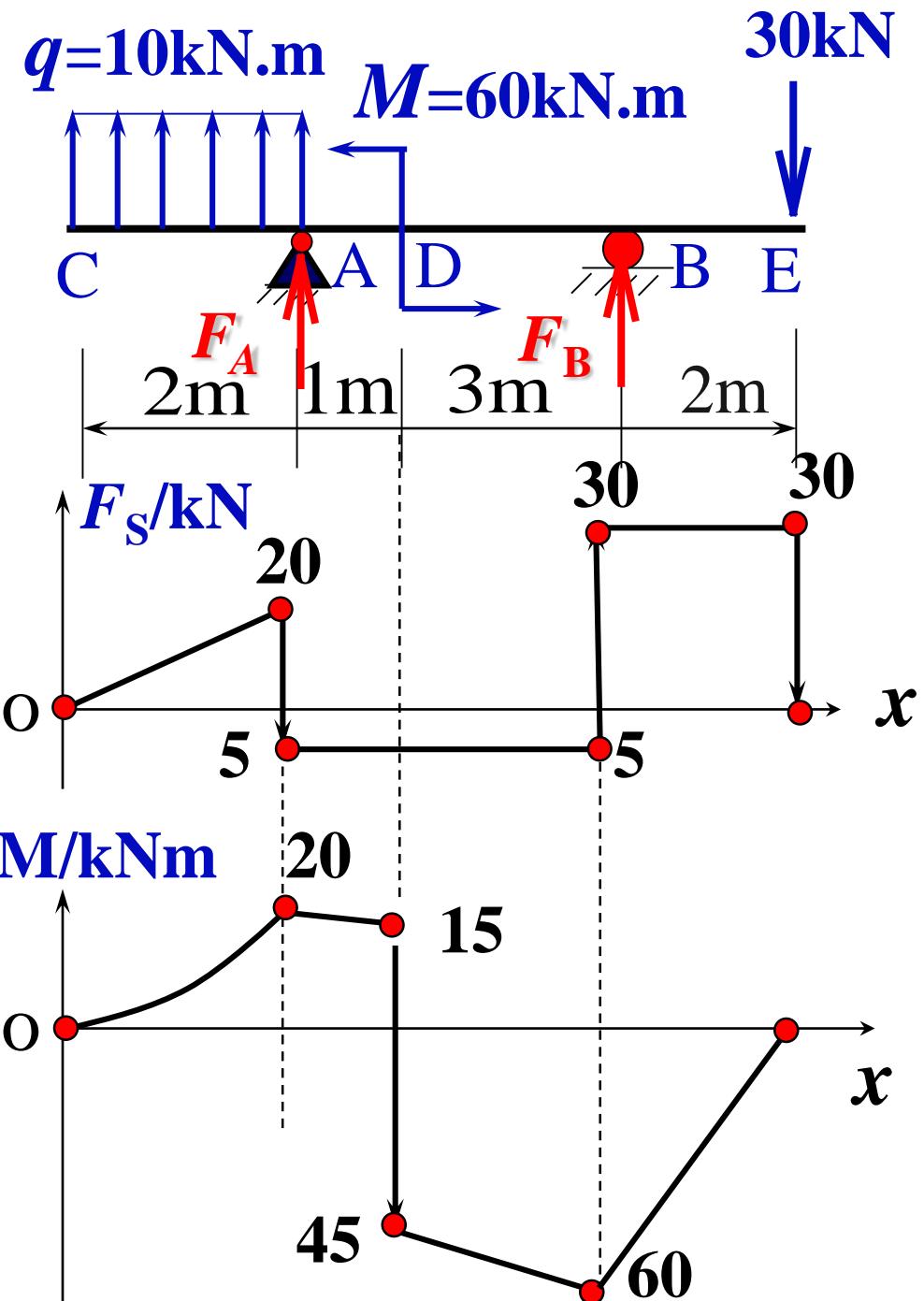
$$F_A = -25 \text{ kN}$$

2) 画 F_S 、 M 图

从左起，计算控制点的 F_S 、 M 值。

由微分关系判断线形。

3) 检查图形是否封闭。



横截面上任一点处线应变 ε 的大小与该点到中性层的距离 y 成正比。 $\varepsilon = -y/\rho$

线弹性应力-应变关系：

$$\sigma = E\varepsilon = -Ey/\rho \quad \text{胡克定理}$$

$$\sum F_x = 0, \text{ 即: } \int_A \sigma dA = -\frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0;$$

E 、 ρ 均不为零，后一积分是截面对 z 轴的静矩 S_z ， $S_z = 0$ ，表示中性轴 z 过截面形心(垂直于 y)。

$$\sum M_z = 0, \int_A y \sigma dA - M = 0; \text{ 即: } \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M$$

令: $I_z = \int_A y^2 dA$ 则有: $1/\rho = M/EI_z$

I_z 为截面对 z 轴的惯性矩，取决于截面几何。

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I_z} = \frac{M}{W_z}$$

$W_z = I_z / y_{\max}$ ，是抗弯截面模量。

变形几何关系: $\varepsilon = -y/\rho$

物理关系: $\sigma = -E\varepsilon = -Ey/\rho$

静力平衡条件:

$$\int_A y dA = 0 \quad \text{中性轴 } z \text{ 过截面形心}$$

$$1/\rho = M/EI_z \quad \text{梁的曲率}$$

I_z --截面对 z 轴的惯性矩。

EI --截面抗弯刚度。

结论: $\sigma = -My/I_z$

中性轴上, $\sigma = 0$, 截面上、下缘, $|\sigma| = \sigma_{\max}$ 。

平面图形的几何性质

截面对 z 轴的惯性矩 I_z 的计算: $I_z = \int_A y^2 dA$

矩形截面: 取微面积如图 $dA = b dy$

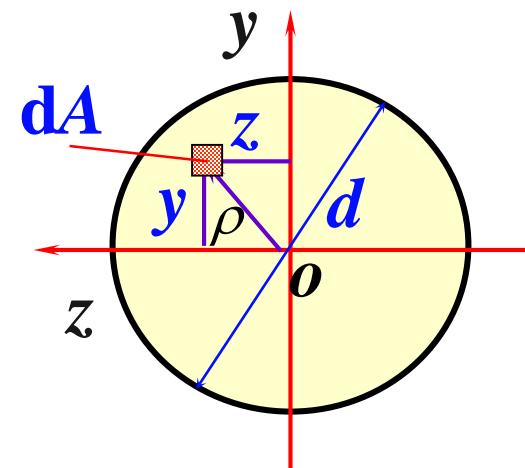
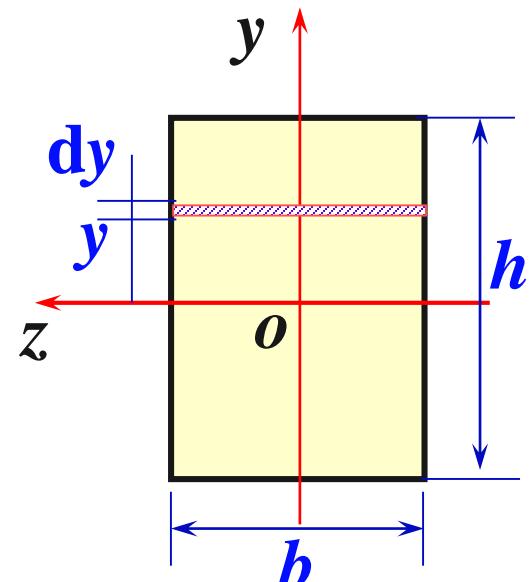
$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}$$

圆形截面: 取微面积如图。

$$I_P = \int_A \rho^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA = I_z + I_y$$

由对称性
知:

$$I_y = I_z = I_P/2 = \frac{\pi d^4}{64}$$



例9.9 空心矩形截面梁的横截面尺寸 $H=120\text{mm}$, $B=60\text{mm}$, $h=80\text{mm}$, $b=30\text{mm}$, 若 $[\sigma]=120\text{MPa}$, 试校核梁的强度。

解: 1) 作 F_S 、 M 图。

固定端弯矩最大,

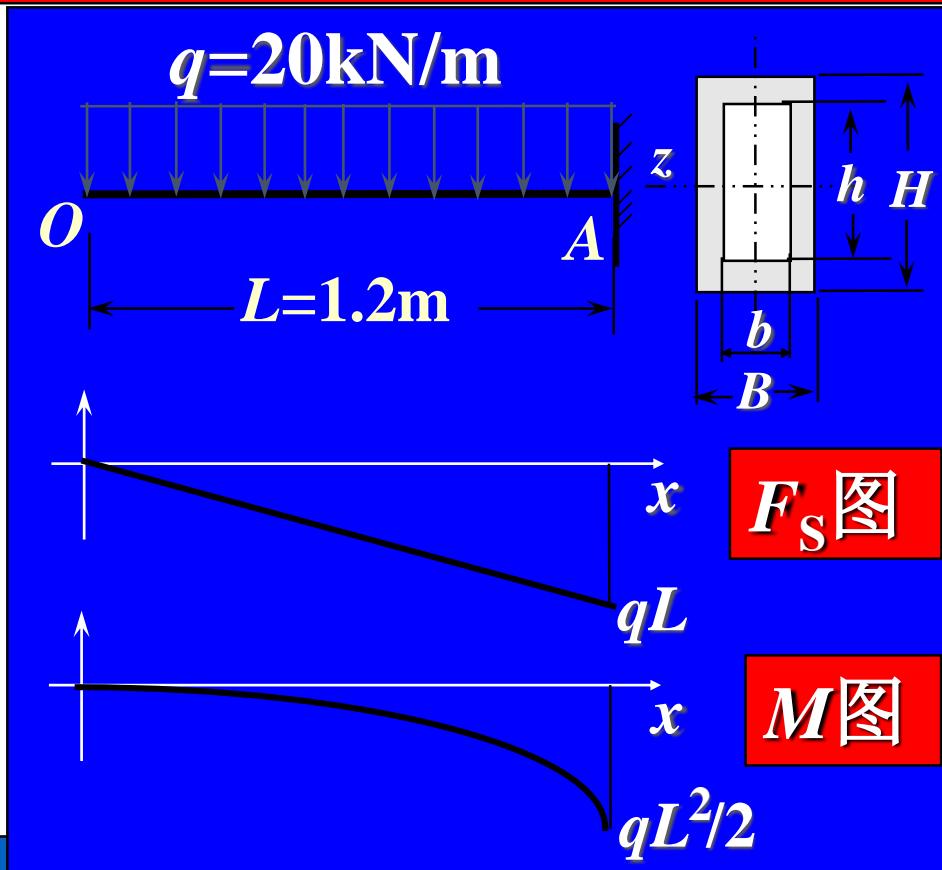
$$M_{\max} = qL^2/2 = 14.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

2) 抗弯截面模量 W_z

$$W_z = H^2[B - b(h/H)^3]/6 \\ = 1.227 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

3) 强度校核:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{14.4 \times 10^3}{1.227 \times 10^{-4}} = 117 \text{ MPa} < [\sigma] = 120 \text{ MPa} \quad \text{强度足够。}$$



5) 矩形截面梁的弯曲切应力

分析

- 截面上 τ 与 F_s 平行，指向相同。
- $h > b$ 时，截面上 y 相同处 τ 相同。
- $y = \pm h/2$ 处， $\tau = 0$ 。

取图示部分研究其在 x 方向的平衡：

$$F_1 = \int_{A_1} \sigma dA = \int_{A_1} \frac{My}{I_z} dA = \frac{MS_z}{I_z}$$

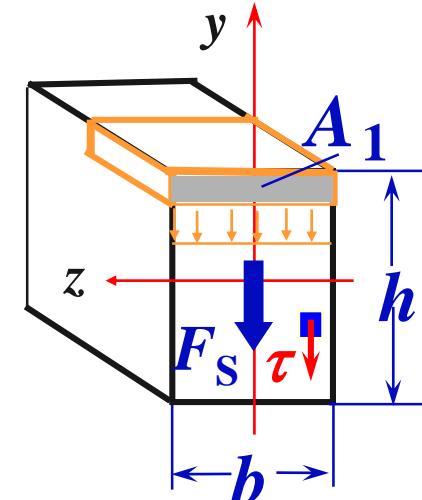
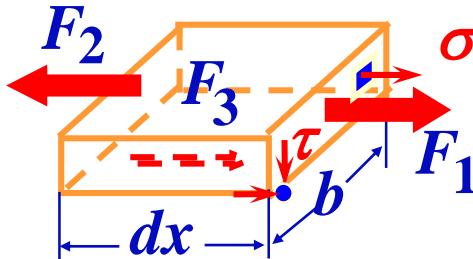
$$F_2 = \int_{A_1} \sigma dA = \int_{A_1} \frac{(M - dM)y}{I_z} dA = \frac{(M - dM)S_z}{I_z}$$

$$F_3 = \tau b dx$$

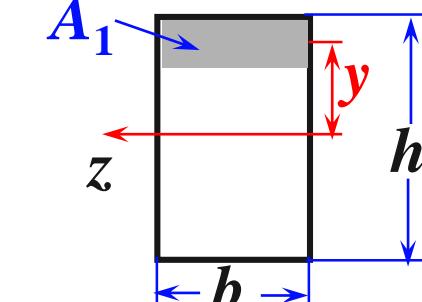
有： $\sum F_x = F_1 - F_2 + F_3 = 0$ $\rightarrow \tau = \frac{S_z}{I_z b} \cdot \frac{dM}{dx} = \frac{F_s S_z}{I_z b}$

对于矩形截面，有： $S_z = \int_{A_1} y dA = \int_y^{h/2} b y dy = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$

$$\tau = \frac{F_s}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$



S_z 是面积 A_1 对中性轴 z 的静矩。



结论

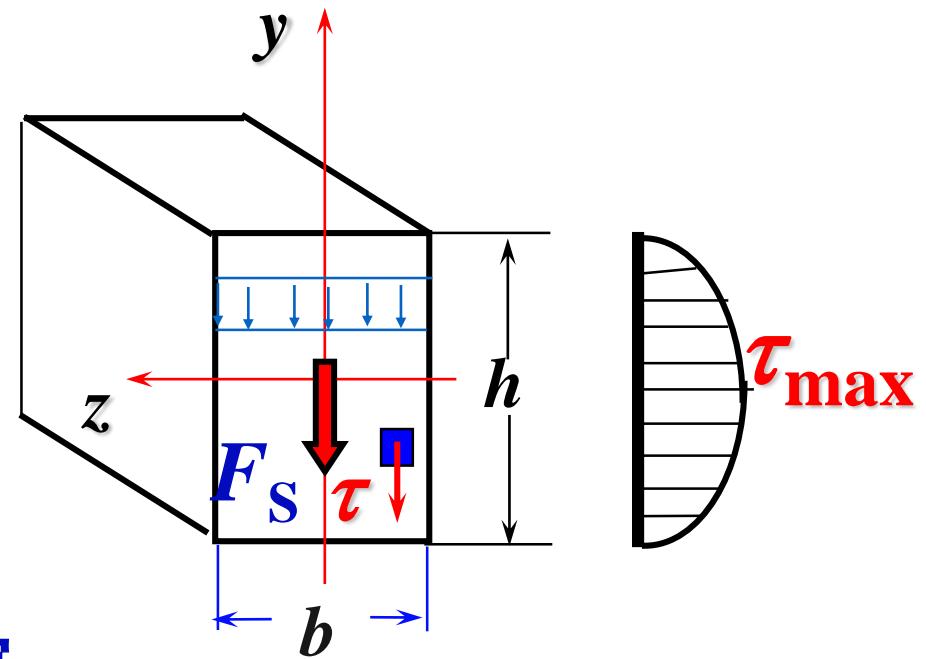
横力弯曲梁中有切应力。

- 截面上 τ 与 F_S 平行，指向相同。
- $h > b$ 时，截面上 y 相同处 τ 相同。
- $y = \pm h/2$ 处， $\tau = 0$ 。
- 纵向面上的剪应力 τ' 由切应力互等定理确定。

矩形截面梁的弯曲切应力为：

$$\tau = \frac{F_S}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

τ 是 y 的函数，呈抛物线分布，最大切应力在中性轴处且等于平均切应力的1.5倍。



中性轴处， $y=0, I_z = bh^3/12,$

$$\tau_{\max} = \frac{F_S h^2}{8I_z} = \frac{3F_S}{2bh} = 1.5\tau_m$$

切应力强度条件： $\tau_{\max} \leq [\tau]$

讨论3：铸铁T形截面梁如图，若 $[\sigma]_{\text{压}}/[\sigma]_{\text{拉}}=2$ ，试求其所能承受的最大正负弯矩之比。

解：1) 求形心位置

$$8a^2y_c = 2a \times 4a^2 - 0.5a \times 4a^2$$

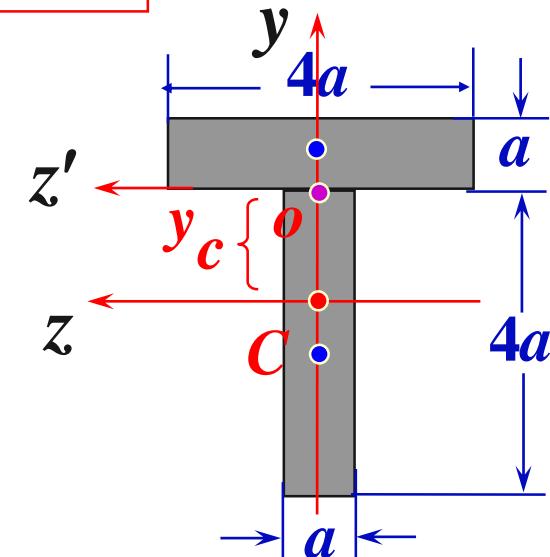
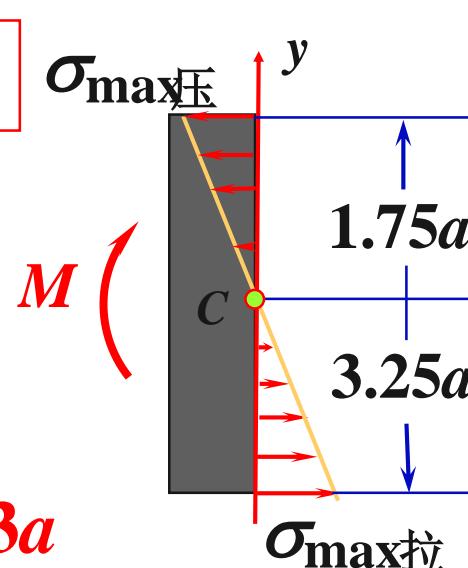
$$y_c = 3a/4$$

中性轴在哪？

2) $M>0$ 时： 截面应力分布？

$$\sigma_{\text{max拉}} = 3.25aM/I_z$$

$$\sigma_{\text{max压}} = 1.75aM/I_z$$



► 强度条件： $M^+ \leq [\sigma]_{\text{拉}} I_z / 3.25a = 4[\sigma]_{\text{拉}} I_z / 13a$

$M<0$ 时： 截面应力分布？

$$\sigma_{\text{max拉}} = 1.75aM/I_z$$

$$\sigma_{\text{max压}} = 3.25aM/I_z$$

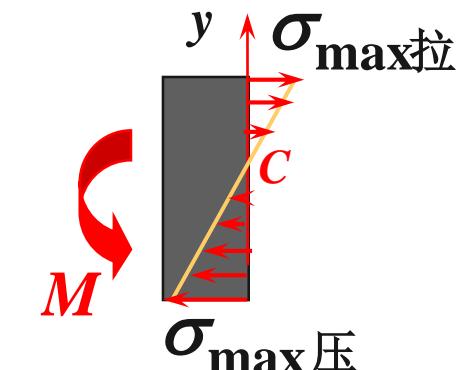
强度条件：

$$M^- \leq [\sigma]_{\text{压}} I_z / 3.25a = 8[\sigma]_{\text{拉}} I_z / 13a$$

$$\blacktriangleright M^- \leq [\sigma]_{\text{拉}} I_z / 1.75a = 4[\sigma]_{\text{拉}} I_z / 7a$$

$$\frac{M^+}{M^-} = \frac{7}{13}$$

对于拉压力学性能不同的材料，应注意按使用要求设计截面。



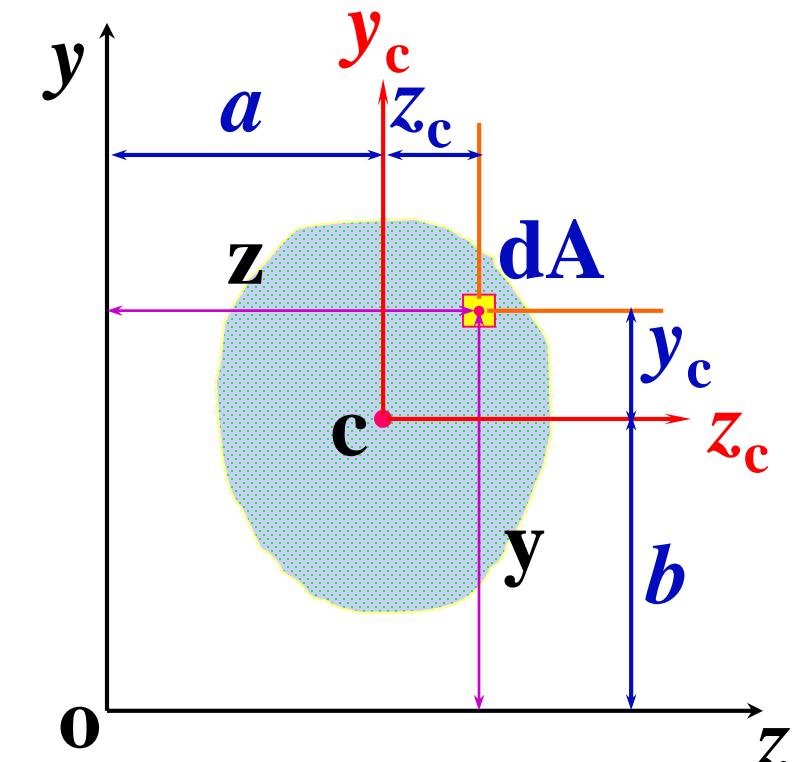
平行移轴公式

同一截面图形对于平行的两对坐标轴的惯性矩或惯性积并不相同。当其中一对轴是图形的形心轴时，它们之间有比较简单的关系。

$$\begin{aligned} I_y &= \int_A z^2 dA = \int_A (z_c + a)^2 dA \\ &= \int_A z_c^2 dA + 2a \int_A z_c dA + a^2 \int_A dA \\ &= I_{y_c} + S_{y_c} \cdot 2a + a^2 A = I_{y_c} + a^2 A \end{aligned}$$

同理: $I_z = I_{z_c} + b^2 A$ 平行移轴公式

$$I_{yz} = I_{y_c z_c} + abA$$



任意形状的截面对任一轴的惯性矩或惯性积等于该截面对与该轴平行的形心轴之惯性矩加上该截面面积与二轴间距离平方成正比。

例：求对T字型形心轴 y_c 和 z_c 的惯性矩

解：1. 取参考轴 z

2. 求形心 $y_c = \frac{\sum A_i y_i}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2}$

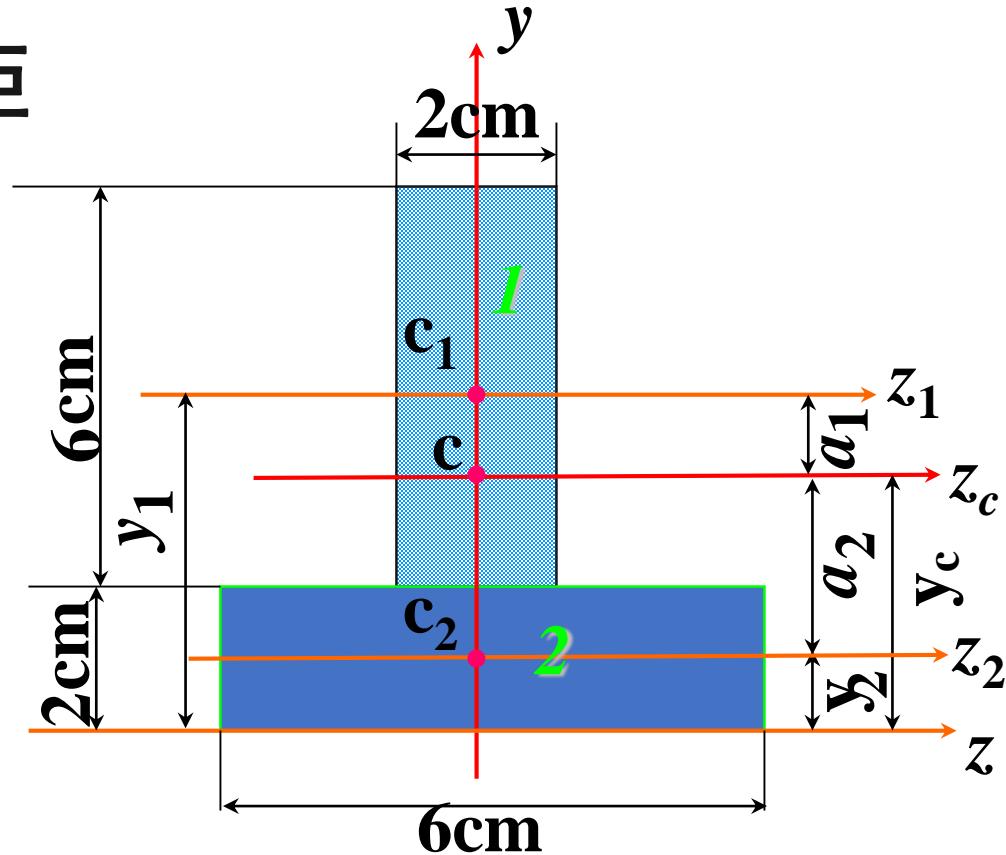
$$= \frac{2 \times 6 \times 5 + 6 \times 2 \times 1}{2 \times 6 + 6 \times 2} = 3 \text{ cm}$$

则 $a_1=2\text{cm}$, $a_2=2\text{cm}$ 。

3. 求对形心轴的惯性矩

$$I_{y_C} = \left(\frac{6 \times 2^3}{12} \right) + \left(\frac{2 \times 6^3}{12} \right) = 4 + 36 = 40 \text{ cm}^4$$

$$I_{Z_C} = \left(\frac{2 \times 6^3}{12} + 12 \times 2^2 \right) + \left(\frac{6 \times 2^3}{12} + 12 \times 2^2 \right) = 84 + 52 = 136 \text{ cm}^4$$



$$I_{Z_{C1}} = \left(I_{Z_1} + a_1^2 A_1 \right)$$

$$I_{Z_{C2}} = \left(I_{Z_2} + a_2^2 A_2 \right)$$

挠曲线微分方程: $EI_z y''(x) = M(x)$

转角方程: $EI_z \theta = EI_z y'(x) = \int M(x)dx + C_1$

挠度方程: $EI_z y = \iint M(x)dx dx + C_1 x + C_2$

静定梁总有2个变形约束边界条件, 确定积分常数。

$M(x)$ 不同时, 需分段积分。分段处必须保证左右挠度、转角连续, 可确定增加的常数。

梁的弯曲变形是客观存在的, 总有唯一解。

铰链:

固定端

$$x=0, y=0$$

$$x=L, y=0$$

自由端

$$x=L, y=0$$

$$x=L, \theta=0$$

无约束

q 为零处, F_s 取极值; F_s 为零处, M 取极值;

M 为零处, θ 取极值; θ 为零处, y 取极值;

线性叠加方法

讨论7: 试给出图示简支梁的挠曲线方程和转角方程, 并求确定梁的最大挠度和最大转角。

解: 1. 求支反力: $F_A=Fb/L$; $F_B=Fa/L$

2. 列弯矩方程:

$$AC \text{段: } 0 \leq x \leq a \quad M_1(x) = F_A x = Fbx/L$$

$$CB \text{段: } a \leq x \leq L \quad M_2(x) = Fbx/L - F(x-a)$$

3. 写挠曲线微分方程并积分:

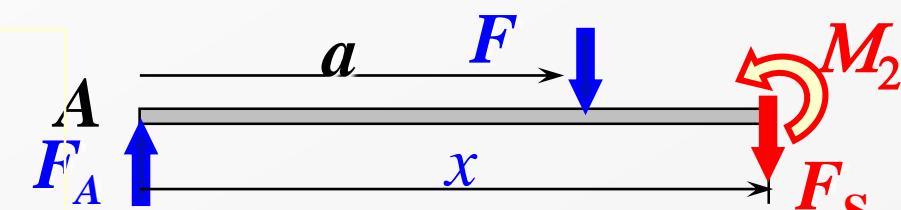
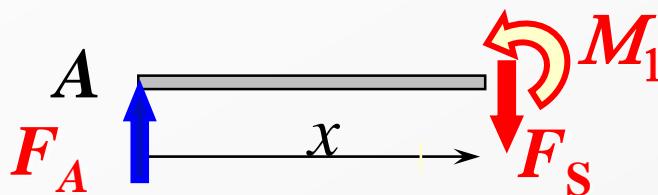
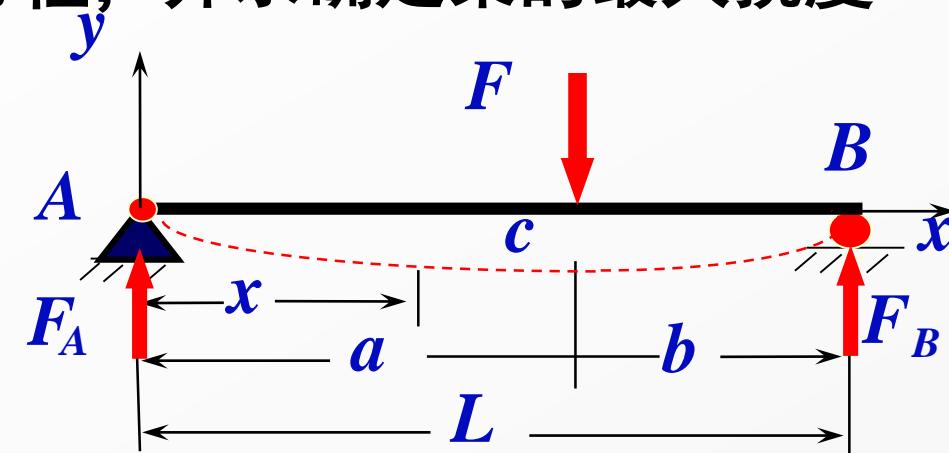
$$AC \text{段: } 0 \leq x \leq a$$

$$M_1(x) = Fbx/L$$

$$EI_z y_1'' = Fbx/L$$

$$\text{转角} \quad EI_z \theta_1 = \frac{Fbx^2}{2L} + C_1$$

$$\text{挠度} \quad EI_z y_1 = \frac{Fbx^3}{6L} + C_1 x + C_2$$



边界条件 连续条件:

$$x=0, \quad y_1=0 \quad x=a, \quad \theta_1=\theta_2$$

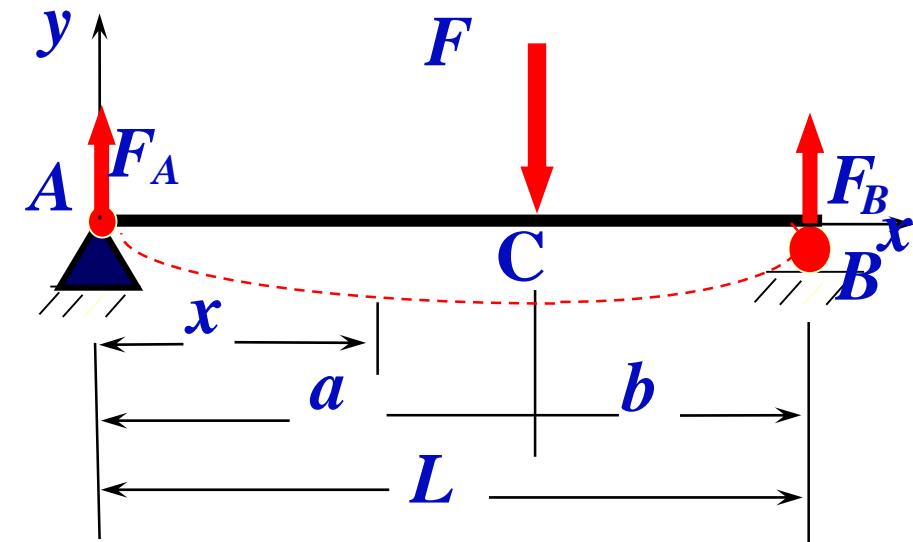
$$x=L, \quad y_2=0 \quad x=a, \quad y_1=y_2$$

讨论7：试给出图示简支梁的挠曲线方程和转角方程，并求确定梁的最大挠度和最大转角。

求最大转角：

转角

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = \frac{Fb}{6EI_z} (3x^2 + b^2 - L^2) \quad 0 \leq x \leq a \\ \theta_2 = \frac{Fb}{6EI_z} \left[3x^2 - \frac{3L(x-a)^2}{b} + (b^2 - L^2) \right] \quad a \leq x \leq L \end{array} \right.$$



θ 取极值的条件是： $d\theta/dx = M(x)/EI_z = 0$ ，二端 $M(x)=0$

$$x=0 \text{处: } |\theta_A| = \frac{Fb (L^2 - b^2)}{6EI_z L} = \frac{Fab (L + b)}{6EI_z L}$$

$$x=L \text{处: } \theta_B = \frac{Fb [3L^2 - 3Lb - (L^2 - b^2)]}{6EI_z L} = \frac{Fab (L + a)}{6EI_z L}$$

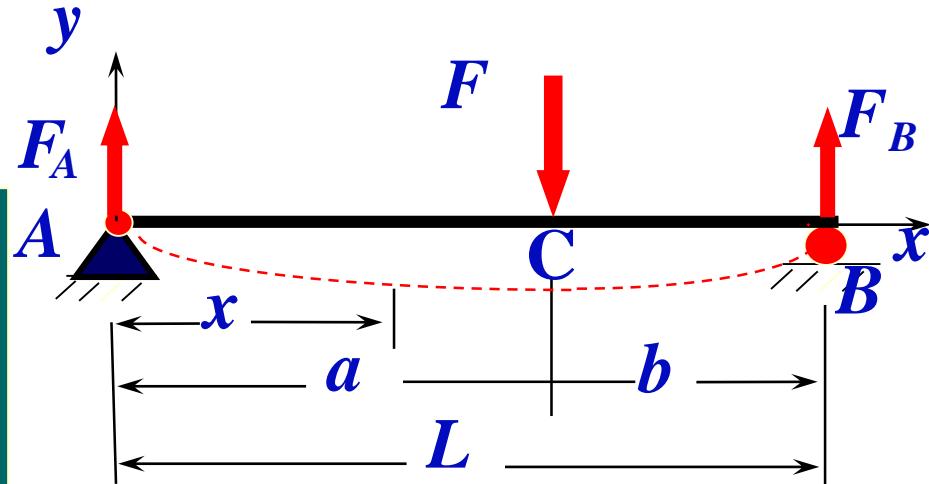
若 $a > b$ ，则 $\theta_{\max} = \theta_B > |\theta_A|$ ，B处转角值最大。

讨论7：试给出图示简支梁的挠曲线方程和转角方程，并求确定梁的最大挠度和最大转角。

求最大挠度: ($a > b$)

转角

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta_1 = \frac{Fb}{6EI_z} (3x^2 + b^2 - L^2) & 0 \leq x \leq a \\ \theta_2 = \frac{Fb}{6EI_z} \left[3x^2 - \frac{3L(x-a)^2}{b} + (b^2 - L^2) \right] & a \leq x \leq L \end{array} \right.$$



$x=0$ 处: $\theta_A = -\frac{Fab(L+b)}{6EI_z L}$ $x=L$ 处: $\theta_B = \frac{Fab(L+a)}{6EI_z L}$ 何处转角为零?

令 $\theta_1=0$, 解得: $x_1 = \sqrt{(L^2 - b^2) / 3}$ 是否在 $0 \leq x_1 \leq a$ 内? ✓

令 $\theta_2=0$, 得到的解将不在 $[a, L]$ 内。 可证 $L^2 - b^2 < 3a^2$

挠度

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_1 = \frac{Fbx}{6EI_z} (x^2 + b^2 - L^2) & 0 \leq x \leq a \\ y_2 = \frac{Fbx}{6EI_z} \left[(x^2 + b^2 - L^2) - \frac{(x-a)^3 L}{bx} \right] & a \leq x \leq L \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} y_{\max} &= \frac{Fb}{6EI_z} \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}} \left(\frac{L^2 - b^2}{3} + b^2 - L^2 \right) \\ &= -\frac{Fb\sqrt{(L^2 - b^2)^3}}{9\sqrt{3}EI_z} \end{aligned}$$

汇总：

转角

$$x=0 \text{ 处: } \theta_A = -\frac{Fab(L+b)}{6EI_z L}$$

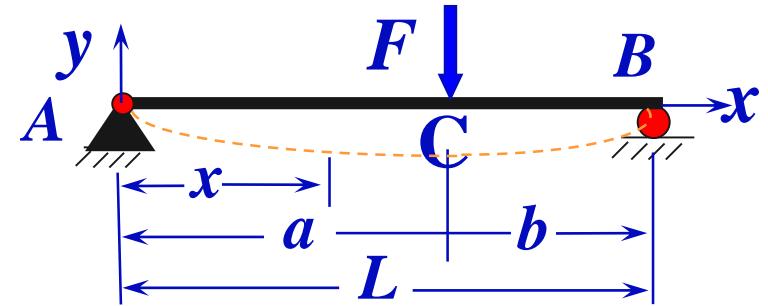
$$x=L \text{ 处: } \theta_B = \frac{Fab(L+a)}{6EI_z L}$$

$$\text{挠度最大处: } x_1 = (L^2 - b^2)/3$$

最大挠度值:

$$y_{\max} = \frac{Fb}{9\sqrt{3}LEI_z} (L^2 - b^2)^3$$

变形与载荷间是线性关系!



讨论:

若 $a=b=L/2$, 则:

$$\text{转角: } \theta_B = \theta_A = \frac{FL^2}{16EI_z}$$

$$\text{挠度最大处: } x_1 = L/2$$

最大挠度值:

$$y_{\max} = \frac{FL^3}{48EI_z}$$

9.4.4 梁的刚度条件

除保证梁的强度条件外，还可能要求变形不能超过允许的限度。即需满足梁的刚度条件：

$$; \quad |y|_{\max} \leq [y] \quad | \theta |_{\max} \leq [\theta]$$

$[y]$ 、 $[\theta]$ 分别为构件的许用挠度和许用转角。

一般主要是控制挠度。

讨论：如何提高梁的强度和刚度

截面设计应尽可能使材料远离中性轴 z 。

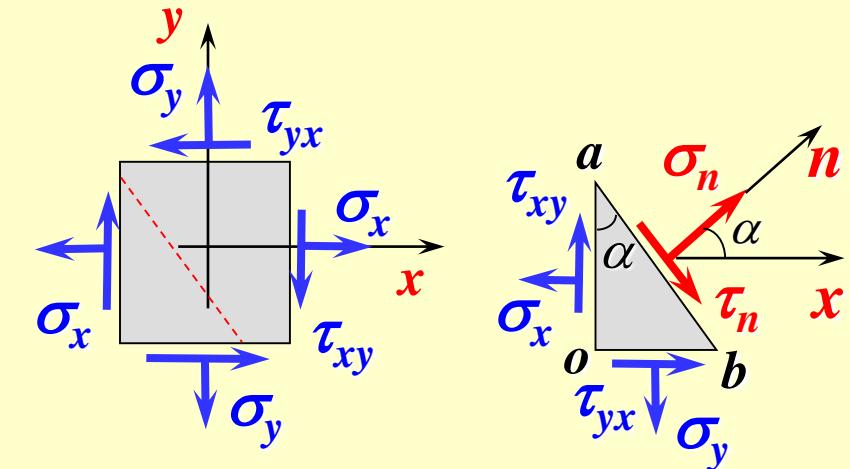
10.1 应力状态

10.1.1 平面应力状态

最一般状态: σ_x 、 σ_y 、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 。

问题: 任意斜横截面上的应力 σ_n 、 τ_n ?

思路: 研究力的平衡。设单元体厚度为1, 有



一般情况

$$\sum F_x = \sigma_n \overline{ab} \cos \alpha + \tau_n \overline{ab} \sin \alpha - \sigma_x \overline{ab} \cos \alpha + \tau_{yx} \overline{ab} \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_y = \sigma_n \overline{ab} \sin \alpha - \tau_n \overline{ab} \cos \alpha - \sigma_y \overline{ab} \sin \alpha + \tau_{xy} \overline{ab} \cos \alpha = 0$$

平面应力状态下的一般公式:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad \text{---(10-1)}$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad \text{---(10-2)}$$

σ_n 、 τ_n 是 α 角的函数,
 α 角是 x 轴与斜截面正法向 n 的夹角, 从 x 轴
到 n 轴逆时针转动时,
 α 为正。

平面应力状态

任一
截面
应力

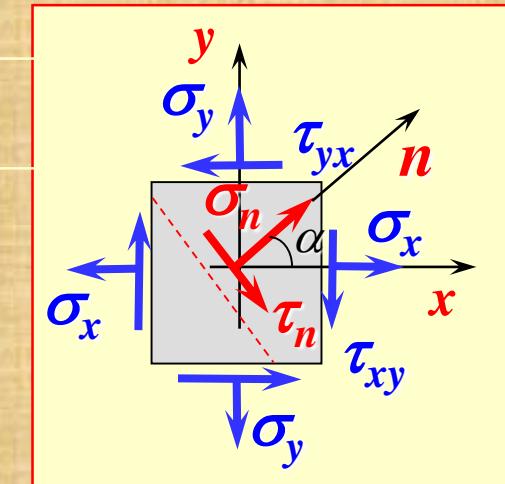
$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (10-1)$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (10-2)$$

主
应
力及
方
向

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2} \quad (10-5)$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (10-4)$$



主应力作用面上 $\tau=0$, 是主平面; 主平面相互垂直。

一点的应力状态可由三个主应力描述。

对于平面应力状态, 第三个主应力 $\sigma_z=0$ 。

极值切
应力

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{array} \right\} = \pm \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2} \quad (10-7)$$

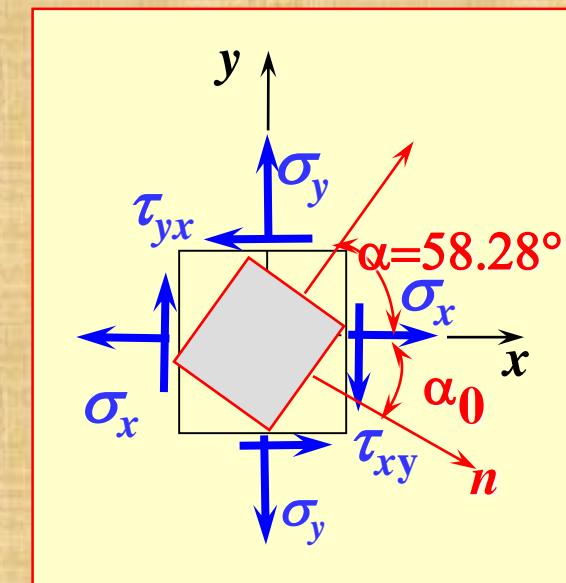
与主平面相差45°。

例1 已知某点的应力状态为: $\sigma_x=30\text{MPa}$, $\sigma_y=10\text{MPa}$, $\tau_{xy}=20\text{MPa}$ 。
求 1) 主应力及主平面方向; 2) 最大、最小切应力。

解: 1) 主应力与主方向

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{30+10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{30-10}{2}\right)^2 + 20^2} = \left\{ \begin{array}{l} 42.36\text{MPa} \\ -2.36\text{MPa} \end{array} \right.$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2 \times 20}{30-10} = -2 \rightarrow 2\alpha_0 = -63.43^\circ, \alpha_0 = -31.72^\circ$$



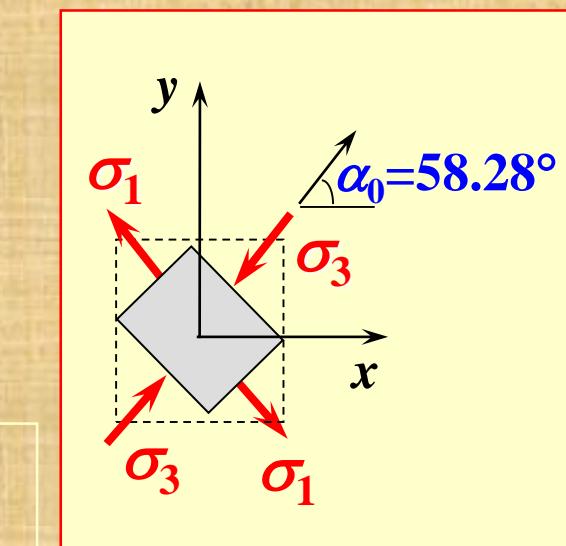
三个主应力按大小排列。
用主应力表示应力状态, 简洁、清晰。

$$-2.36\text{MPa} = \sigma_{\min} \quad \sigma_3 \quad \sigma_1$$

$$\alpha = 148.28^\circ \text{ 时有: } \sigma_n = \sigma_{\max} = 42.36\text{MPa}$$

在平行xy的前后面上, 无应力作用, σ 、 τ 均为零。

故此面上还有第三个主应力 $\sigma_z=0$ 。 σ_2



平面应力状态

3) 最大、最小切应力

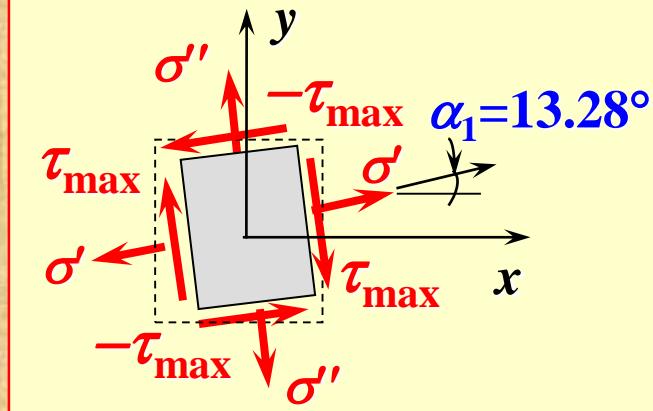
$$\left. \begin{array}{l} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{array} \right\} = \pm \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \sqrt{\left[\frac{(30-10)}{2}\right]^2 + 20^2} = \pm 22.36 \text{ MPa}$$

作用平面方向角: $\alpha_1 = \alpha_0 + \pi/4 = 13.28^\circ$ $\alpha_0 = -31.72^\circ$

$$\alpha = 13.28^\circ \text{ 时, } \tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 26.56^\circ + \tau_{xy} \cos 26.56^\circ = 22.36 \text{ MPa}$$

注意还有

$$\sigma' = \frac{30+10}{2} + \frac{30-10}{2} \cos 26.56^\circ - 20 \times \sin 26.56^\circ = 20 \text{ MPa}$$



$$\begin{aligned} \alpha &= 103.28^\circ \text{ 时:} \\ \tau &= -22.36 \text{ MPa} \\ \sigma' &= 20 \text{ MPa} \end{aligned}$$

结果讨论 (已知 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy})

任一截面应力--- (10-1) 、 (10-2)

主应力及其方位--- (10-5) 、 (10-4)

主应力作用面上 $\tau=0$, 是主平面; 主平面相互垂直。

一点的应力状态可由三个主应力描述, 对于平面应力状态, 第三个主应力 $\sigma_z=0$ 。

极值切应力 --- (10-7),
作用面与主平面相差 45° 。

极值切应力作用面相互垂直, 切应力互等。注意:
极值切应力作用面上一般 $\sigma \neq 0$ 。

讨论一、应力状态的第一不变量

由
$$\begin{cases} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{cases} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2}$$

显然有: $\sigma_{\max} + \sigma_{\min} = \sigma_x + \sigma_y$

即过某点任意两相互垂直平面上正应力之和不变。

在三向应力状态下, 同样可以得到:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const}$$

J_1 --- 称为表示一点应力状态的第一不变量, 即过某点任意三个相互垂直平面上的正应力之和是不变的。

讨论二、主应力与极值切应力

平面应力状态 $\sigma_z = 0$ 假定 $\sigma_{\min} < 0$

有: $\sigma_1 - \sigma_3 = 2\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2}$

由
$$\begin{cases} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{cases} = \pm \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2}$$

显然有:
$$\begin{cases} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{cases} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

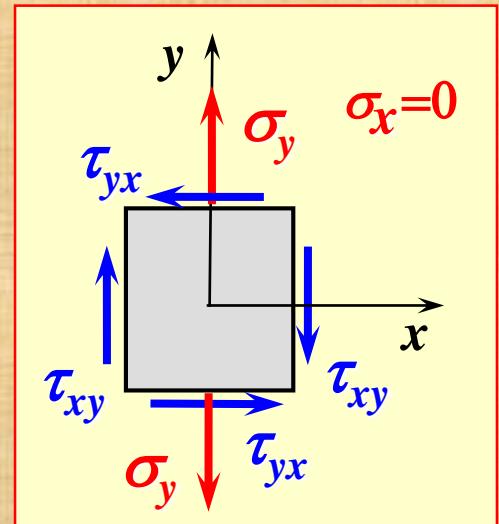
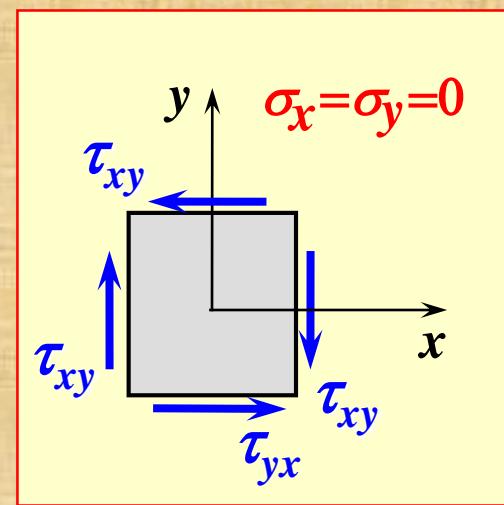
σ_1, σ_3 平面内,
 τ_{\max} 等于二主应力之差的 $1/2$ 。

同样: 平面应力状态 $\sigma_z = 0$

若 $\sigma_{\min} < 0$: $|\tau|_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$

若 $\sigma_{\min} \geq 0$: $|\tau|_{\max} = (\sigma_1 - 0)/2 = \sigma_1/2$

讨论三、极值切应力作用面上 σ 是否为零？



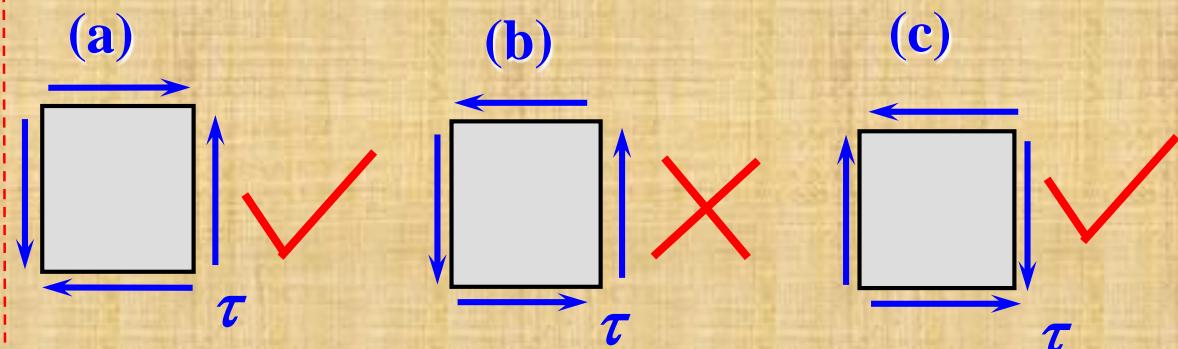
若极限切应力作用面上 σ 均为零 \rightarrow 纯剪

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{array} \right\} = \pm \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \tau_{xy}$$

若 $\sigma_x \neq 0$ 或 $\sigma_y \neq 0$ ，
则 xy 平面上的 τ_{xy} 不是极值切应力。

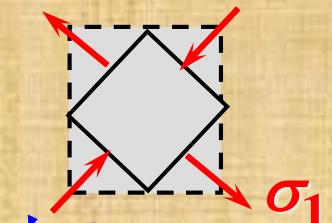
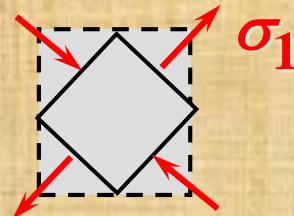
除纯剪情况外，极值切应力平面上正应力不为零，且必有 $\sigma_x = \sigma_y$ 。

讨论：图中表示的纯切应力状态是否正确？如果正确，单元体应力状态用主应力如何表示？



τ 是极限切应力，主平面？

与极限切应力面成 45° 。



σ_1 在哪个面上？
二主应力之和？

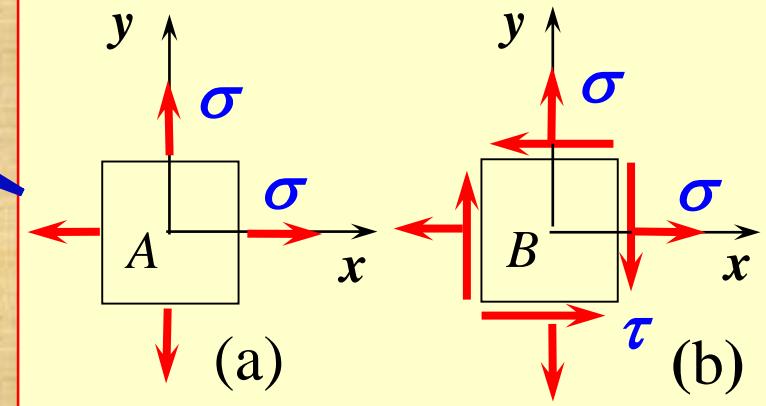
$$\begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_3 &= \sigma_x + \sigma_y = 0 & \sigma_1 &= -\sigma_3 \\ (\sigma_1 - \sigma_3)/2 &= \tau \rightarrow \sigma_1 & & \end{aligned}$$

例：写出图示二应力状态沿x方向的正应变 ε_x 、最大正应变 ε_1 及应变能。

$$(a): \varepsilon_x = \sigma_x/E - \mu\sigma_y/E = (1-\mu)\sigma/E$$

$$\varepsilon_1 = \sigma_1/E - \mu\sigma_2/E = (1-\mu)\sigma/E$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$$

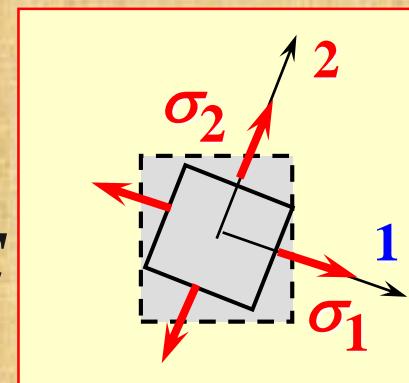


体积改变能密度： $v_V = \frac{(1-2\mu)}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{2(1-2\mu)}{3} \sigma^2$

畸变能密度： $v_d = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1+\mu}{3E} \sigma^2$

$$(b): \left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma \pm \tau \quad \begin{array}{l} \text{设 } 0 < \tau < \sigma; \text{ 则 } \sigma_1 = \sigma + \tau; \\ \sigma_2 = \sigma - \tau; \quad \sigma_3 = 0 \end{array}$$

$$\varepsilon_x = \sigma_x/E - \mu\sigma_y/E = (1-\mu)\sigma/E \quad \varepsilon_1 = \sigma_1/E - \mu\sigma_2/E = (1-\mu)\sigma/E + (1+\mu)\tau/E$$



体积改变能密度： $v_V = \frac{(1-2\mu)}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{2(1-2\mu)}{3} \sigma^2$

畸变能密度： $v_d = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma^2 + 2\tau^2)$

10.2.1 脆性材料的破坏强度理论

一、最大拉应力理论（第一强度理论）

假说：不论材料处于何种应力状态，脆性材料的破坏只取决于其最大拉应力 σ_1 。

→ **破坏判据** $\sigma_1 = \sigma_b$

实验验证：正确性条件: $|\sigma_3| \leq \sigma_1$

考虑安全储备, 给出:

强度条件: $\sigma_1 \leq [\sigma] = \sigma_b/n$

二、最大拉应变理论（第二强度理论）

假说：脆性材料破坏取决于其最大拉应变 ε_1 。

→ **破坏判据** $\varepsilon_1 = \varepsilon_u$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_u = \sigma_b / E$$

→ **破坏判据** $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_b$

实验验证 $\sigma_1 < 0$ 或 $|\sigma_3| > \sigma_1$ 时更好一些。

考虑安全储备, 给出:

强度条件: $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] = \sigma_b/n$

10.2.2 延性材料的屈服强度理论

一、最大切应力理论(第三强度理论)

思考：延性材料屈服 \rightarrow 材料滑移切应力的贡献

假说：延性材料屈服取决于其最大切应力 τ_{\max}

\rightarrow 屈服判据 $\tau_{\max} = \tau_s$

$$\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$$

$$\sigma_1 = \sigma_{ys}; \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

$$\tau_s = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = \sigma_{ys}/2$$

\rightarrow 屈服判据 $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$

(Tresca条件, 1864, 法)

实验验证：

很好地预测了塑性材料屈服。

强度条件： $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] = \sigma / n$

二、形状改变比能理论(第四强度理论)

思考：Tresca条件与 σ_2 无关？

假说： \rightarrow 滑移改变形状 \rightarrow 能量？

延性材料屈服取决于其畸变能密度 ν_d

$$\nu_d = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

\rightarrow 屈服判据 $\nu_d = \nu_{dcr}$

$$\sigma_1 = \sigma_{ys}; \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad \nu_{dcr} = \frac{2(1+\mu)\sigma_{ys}^2}{6E}$$

\rightarrow 屈服判据 Mises条件, 1913, 德

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{ys}^2$$

10.2.2 延性材料的屈服强度理论

二、形状改变比能理论(第四强度理论)

→屈服判据

即Mises条件:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{ys}^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_s$$

实验验证:

对延性金属屈服，预测比最大切应力理论的预测更好，但二者相差不大。

强度条件:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma] = \sigma_s / n$$

强度理论汇总:

强度条件的一般形式:
工作应力 \leq 许用应力

相当
应力

$$\sigma_r \leq [\sigma]$$

脆性破坏

$$[\sigma] = \sigma_b / n$$

塑性屈服

$$[\sigma] = \sigma_s / n$$

破坏

σ_1 理论

$$\sigma_{r1} = \sigma_1$$

常用

ε_1 理论

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$|\sigma_3| > \sigma_1, \sigma_1 < 0$$

屈服

τ_{max} 理论

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

常用

ν_d 理论

$$\sigma_{r4} = \{ [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] / 2 \}^{1/2}$$

例2 低碳工字钢梁截面尺寸 $H=200\text{mm}$, $h=180\text{mm}$, $B=100\text{mm}$, $a=92\text{mm}$, $[\sigma]=200\text{MPa}$ 。若截面受 $M=30\text{kN}\cdot\text{m}$, $F_S=100\text{kN}$ 作用, 试校核其强度。

解: 1) 截面弯曲正应力: $\sigma=M\cdot y/I_z$

$$I_z=(BH^3-ah^3)/12=2.195 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$y=H/2$ 处: $\sigma_{H/2}=\sigma_{\max}=M\cdot y_{\max}/I_z=30000\times 0.1/2.195\times 10^{-5}$
 $=137 \text{ (MPa)}$

$y=h/2$ 处: $\sigma_{h/2}=30000\times 0.09/2.195\times 10^{-5}=123 \text{ (MPa)}$

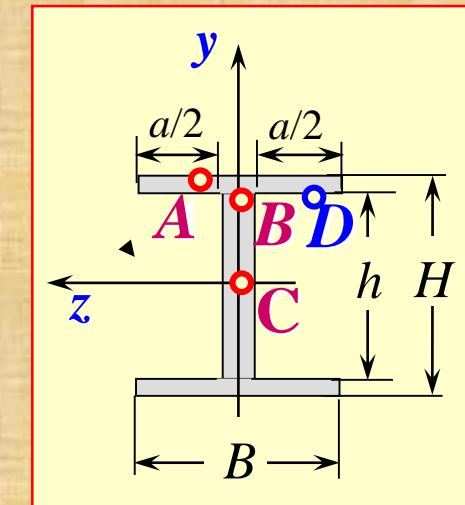
$y=0$ 处: $\sigma=0$

2) 截面切应力: $\tau=F_S\cdot S_z/I_z b$

$y=0$ 处: $S_z=12.74 \times 10^{-5} \text{ m}^3$; $b=0.008$

$$\tau_0=\tau_{\max}=F_S\cdot S_z/I_z(B-a)$$

$$=100\times 10^3 \times 12.74/(2.195\times 0.008)=72.5 \text{ (MPa)}$$



$y=h/2$ 处: $S_z=9.5\times 10^{-5} \text{ m}^3$; $b=0.008$;
 $\tau_{h/2}^-=-54 \text{ (MPa)}$

$y=h/2$ 处: $S_z=9.5\times 10^{-5} \text{ m}^3$; $b=0.1$;
 $\tau_{h/2}^+=4.3 \text{ (MPa)}$

$y=H/2$ 处: $S_z=0$; $\tau_{H/2}=0$

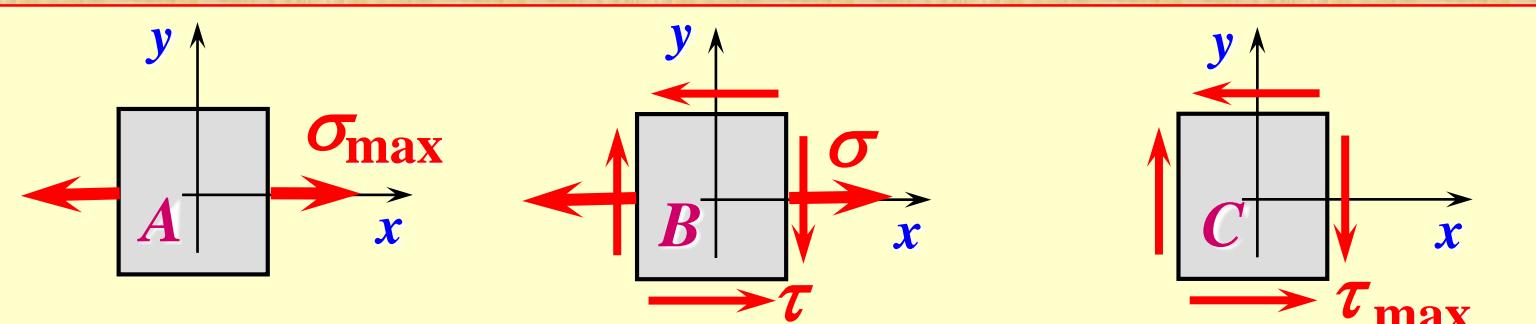
腹板

翼缘

3) 强度校核 低碳钢 \rightarrow 延性屈服 \rightarrow 第三强度理论

截面各可能危险点应力状态:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$



用主
应力
表示

讨论:

A处: 与梁弯曲正应力强度条件一致;

C处: 与梁弯曲切应力强度条件一致;

B处: 正、切应力同时存在, 也可能是危险点。

$$A \text{点: } \sigma_{\max} = 137 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$= 137 < [\sigma] = 200$$

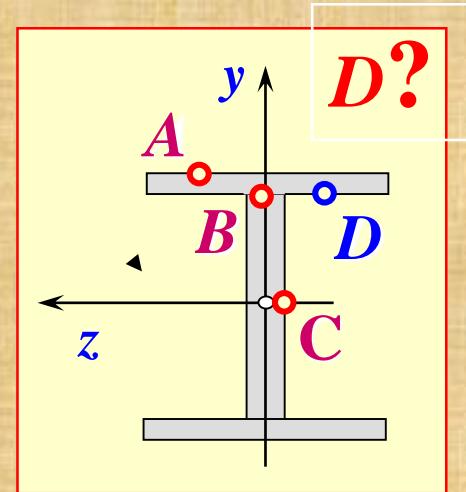
$$B \text{点: } \sigma = 123 \quad \tau = 54$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = (\sigma^2 + 4\tau^2)^{1/2} \\ = 164 < [\sigma] = 200$$

$$C \text{点: } \tau_{\max} = 72.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$= 145 < [\sigma] = 200 \text{ MPa}$$



如何分析组合变形强度问题？

讨论3：矩形截面梁宽 $b=40\text{mm}$ ，高 $h=60\text{mm}$ ， $L=0.5\text{m}$ 。已知 $[\sigma]=120\text{MPa}$ ，试校核其强度。

解：1) 求约束力。平衡方程：

解得： $F_C = 10\text{kN}$; $F_{Ax} = 8.66\text{kN}$; $F_{Ay} = 5\text{kN}$

2) 作梁的内力图

3) 危险截面点在距A为 L 处上端。

危险点压应力：

$$|\sigma|_{\max} = \frac{F_N}{A} + \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{8.66 \times 10^3}{40 \times 60} + \frac{6 \times 2.5 \times 10^6}{40 \times 60^2} = 107.8 < [\sigma] = 120\text{MPa}$$

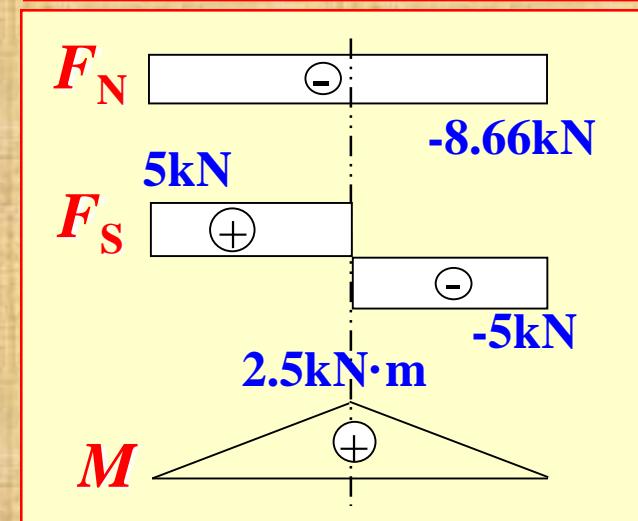
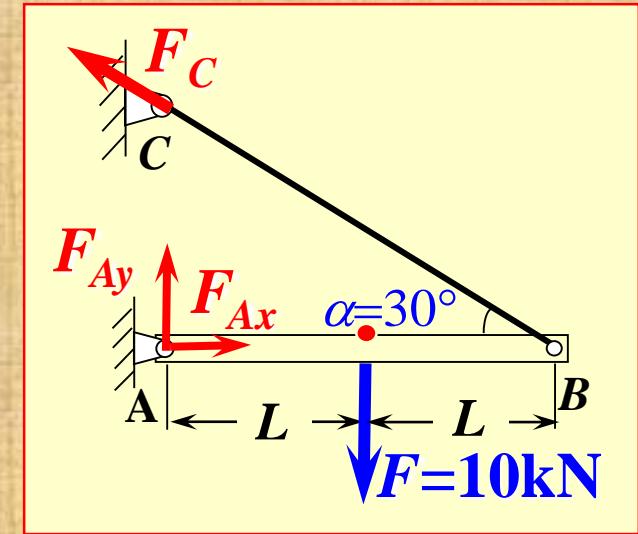
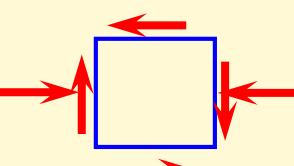
梁轴线上切应力最大：

$$\tau_{\max} = 3F_S / 2bh = 3 \times 5 \times 10^3 / (2 \times 40 \times 60) = 3.12\text{MPa}$$

该处： $\sigma_{\text{弯}} = 0$; $\sigma_{\text{压}} = 8660 / 2400 = 3.6\text{MPa}$ 。

应力小一个量级，强度足够。

应力状态



讨论4：正方形截面立柱，边长为 $2a$ ，开槽截面为边长 $a \times 2a$ 的矩形。
求开与未开槽截面最大应力值之比。

解：1) 未开槽部分横截面应力：

$$\sigma = F_N / A = F / 4a^2 \quad (\text{压应力})$$

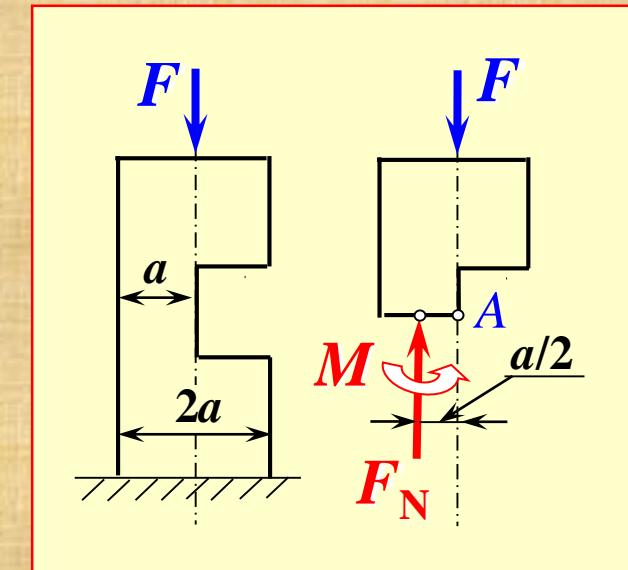
2) 开槽部分横截面应力：

截取研究对象，求截面内力。

$$F_N = F; \quad M = Fa/2$$

压弯组合变形且A处压应力最大。

由叠加法有： $\sigma_{\max \text{开槽}} = \sigma_{\text{压}} + \sigma_{\text{弯}} = \frac{F}{2a^2} + \frac{Fa/2}{2a \times a^2/6} = \frac{2F}{a^2}$



3) 最大应力值之比为： $\lambda = \frac{2F/a^2}{F/4a^2} = 8$

讨论5 立柱在A (y, z)处受力F作用, 求柱中最大应力。

解: 截面法求内力:

$$F_N = F$$

轴向压缩;

$$M_y = Fz$$

在xz平面内弯曲;

$$M_z = Fy$$

在xy平面内弯曲。

最大应力
在何处?

最大压应力: 绿点处

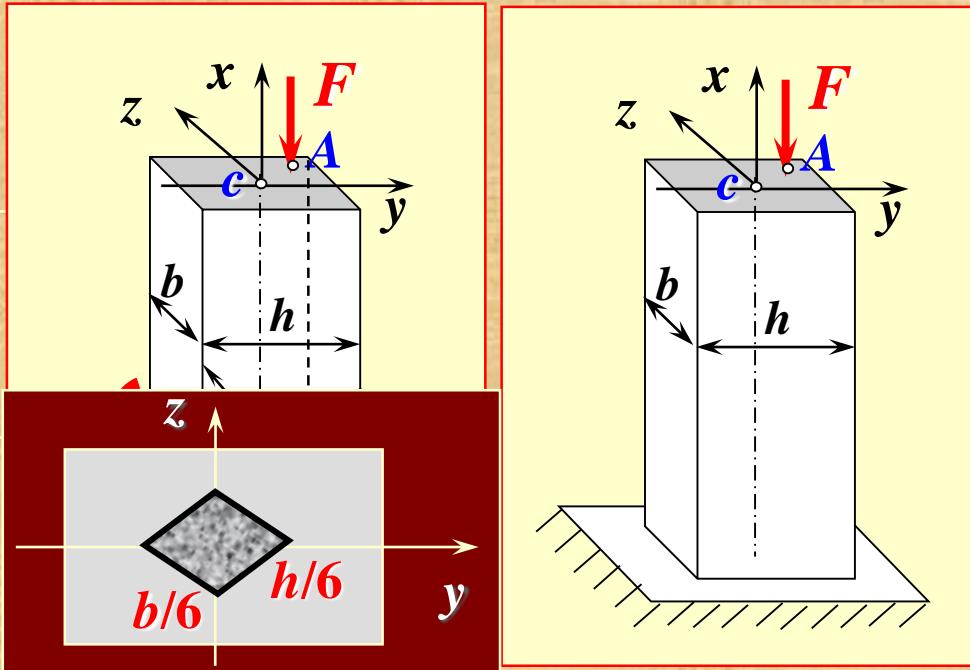
$$\sigma_{\max \text{压}} = \frac{F_N}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{F}{bh} + \frac{6Fy}{bh^2} + \frac{6Fz}{hb^2}$$

最大拉应力: 截面最大拉应力应为零, 即:

$$\sigma_{\max \text{拉}} = -\frac{F_N}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = -\frac{F}{bh} + \frac{6Fy}{bh^2} + \frac{6Fz}{hb^2} = 0$$

若不允许受拉(混凝土立柱), A的极限位置?

得到: $6F \cdot yb + 6F \cdot zh - F \cdot bh = 0 \rightarrow by + hz = bh/6$



截面核心: 偏心压缩载荷作用在截面核心内, 则截面上无拉应力。

这是yz平面内的直线方程:

$y=0$ 时, $z=h/6$; $z=0$ 时, $y=b/6$;

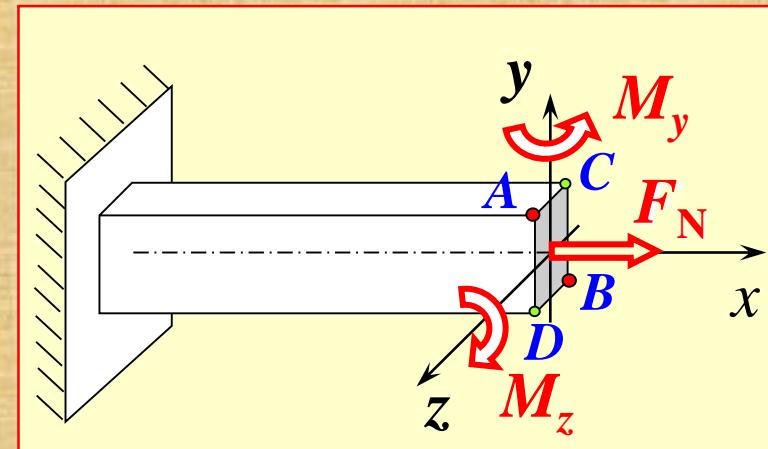
总结 拉(压)弯组合变形

内力 F_N → 沿 x 轴的拉或压 → $\sigma = F_N/A$ 应力

弯矩 M_z → xy 面内的弯曲 → $\sigma' = M_z y/I_z$

弯矩 M_y → xz 面内的弯曲 → $\sigma'' = M_y z/I_y$

截面正应力: $\sigma = \sigma' + \sigma'' + \sigma''' = F_N/A + M_z y/I_z + M_y z/I_y$



σ 是截面坐标 (y, z) 的函数, 何处应力最大(危险点): F_N 作用下, 各处应力相同; M_z 作用下, AC 受拉, BD 受压; M_y 作用下, AD 受拉, BC 受压;

A处: $\sigma_{\max \text{拉}} = F_N/A + M_z y_{\max}/I_z + M_y z_{\max}/I_y$

B处: $\sigma_{\max \text{压}} = F_N/A - M_z y_{\max}/I_z - M_y z_{\max}/I_y$

截面上只有沿 x 方向的正应力, 是单向应力状态。强度条件为:

$$\sigma_{\max \text{拉}} \leq [\sigma]_{\text{拉}}; \quad \sigma_{\max \text{压}} \leq [\sigma]_{\text{压}}$$

讨论6 传动轴AB直径 $d=40\text{mm}$, $AC=CD=DB=200\text{mm}$, C轮直径 $d_1=160\text{mm}$, D轮直径 $d_2=80\text{mm}$, $\alpha=20^\circ$, 已知力 $F_1=2\text{kN}$, $[\sigma]=120\text{MPa}$, 试校核轴的强度。

解: 1) 受力分析, 有平衡方程:

$$\sum F_x = F_{Ax} = 0$$

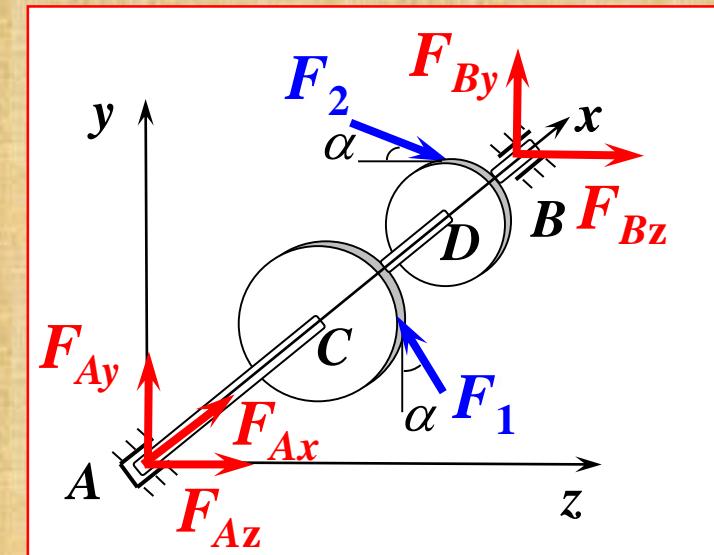
$$\begin{aligned} \sum M_x = F_2 \cos \alpha \cdot d_2/2 - F_1 \cos \alpha \cdot d_1/2 &= 0 \\ \Rightarrow F_2 &= 4\text{kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_z = F_1 \cos \alpha \cdot AC - F_2 \sin \alpha \cdot AD + F_{By} \cdot AB &= 0 \\ \Rightarrow F_{By} &= 0.286\text{kN} \end{aligned}$$

$$\sum M_y = F_1 \sin \alpha \cdot AC - F_2 \cos \alpha \cdot AD - F_{Bz} \cdot AB = 0 \Rightarrow F_{Bz} = -2.28\text{kN}$$

$$\sum F_y = F_{Ay} + F_1 \cos \alpha - F_2 \sin \alpha + F_{By} = 0 \Rightarrow F_{Ay} = -0.8\text{kN}$$

$$\sum F_z = F_{Az} - F_1 \sin \alpha + F_2 \cos \alpha + F_{Bz} = 0 \Rightarrow F_{Az} = -0.8\text{kN}$$



2) 求轴的内力，画内力图

绕x轴的扭转: CD 段扭矩 $T = F_1 \cos \alpha \cdot d_1 / 2 = 0.15 \text{ kN}\cdot\text{m}$

xy 面内弯曲: 无分布载荷, 弯矩是各段线性的, 且:

$$M_{zC} = F_{Ay} \cdot AC = -0.16 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{zD} = F_{By} \cdot DB = 0.0572 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

xz 面内弯曲:

$$M_{yC} = F_{Az} \cdot AC = -0.16 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{yD} = F_{Bz} \cdot DB = -0.456 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

3) 危险截面: 可能是 C 或者 D 。再考查合成弯矩。

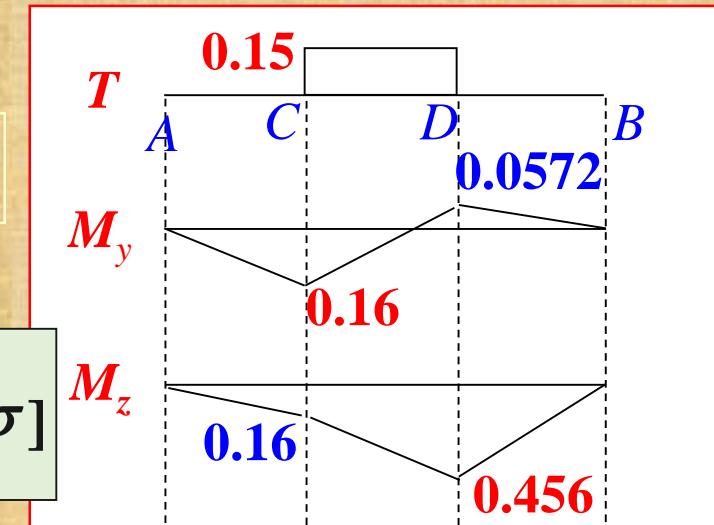
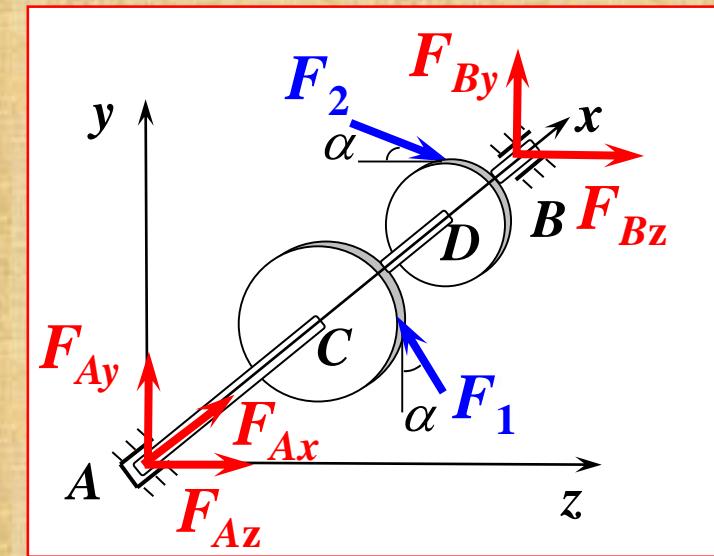
由 $M = \sqrt{M_x^2 + M_z^2}$ 有 $M_C = \sqrt{0.16^2 + 0.16^2} = 0.226 \text{ kN}\cdot\text{m}$

$$\sigma_{r4} = \frac{1}{W} \sqrt{M^2 + 0.75 T^2} = \frac{32 \times 10^3}{\pi \times 0.04^3} \sqrt{0.46^2 + 0.75 \times 0.15^2} = 76 \text{ MPa} \leq [\sigma]$$

D 处是危险截面, 且 $T=0.15 \text{ kN}\cdot\text{m}$; $M=0.46 \text{ kN}\cdot\text{m}$

4) 强度校核:

$$\sigma_{r3} = \frac{1}{W} \sqrt{M^2 + T^2} = \frac{32 \times 10^3}{\pi \times 0.04^3} \sqrt{0.46^2 + 0.15^2} = 77 \text{ MPa} \leq [\sigma]$$



强度足够!

如何分析组合变形强度问题？

讨论7：斜齿轮直径 $D=400\text{mm}$ ，空心轴外径 $d=40\text{mm}$ ， $\alpha=0.5$ 。齿面上受 $F_y=1\text{kN}$ 、 $F_z=2.4\text{kN}$ 及平行于轴线的力 $F_x=0.8\text{kN}$ 作用。 $[\sigma]=120\text{MPa}$ 。试校核轴的强度。

解：1) 求支反力：

$$\Sigma F_x = F_{Ax} = -F_x = -0.8\text{kN}$$

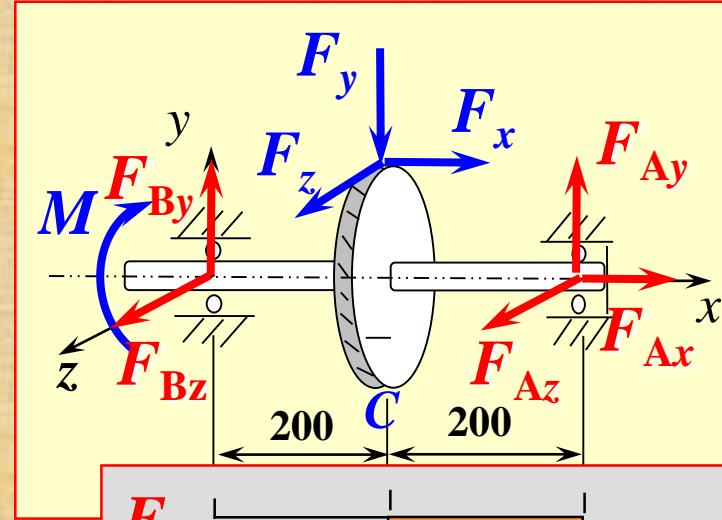
$$\Sigma M_x = F_z D/2 - M = 0 \Rightarrow M = 0.48\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\Sigma M_z = 0.4F_{Ay} - 0.2F_x - 0.2F_y = 0 \Rightarrow F_{Ay} = 0.9\text{kN}$$

$$\Sigma M_y = -0.4F_{Az} - 0.2F_z = 0 \Rightarrow F_{Az} = -1.2\text{kN}$$

还有： $F_{By} = 0.1\text{kN}$ ； $F_{Bz} = -1.2\text{kN}$

2) 画内力图：



3) 危险点应力：(压弯扭) 危险点：轴C截面外圆周上。

合成弯矩： $M = \sqrt{0.18^2 + 0.24^2} = 0.3$

$$\sigma_{\text{弯}} = \frac{M}{W} = \frac{32 \times 300}{\pi d^3 (1 - \alpha^4)} = 50.9\text{MPa}$$

$$\sigma_{\text{压}} = \frac{F_N}{A} = \frac{4 \times 800}{\pi d^2 (1 - \alpha^2)} = 0.85\text{MPa}$$

$$\sigma = \sigma_{\text{弯}} + \sigma_{\text{压}} = 51.75\text{MPa}$$

$$\tau = \frac{T}{W_T} = \frac{16 \times 480}{\pi d^3 (1 - \alpha^4)} = 40.7\text{MPa}$$

3) 强度校核：

$$\sigma_{\text{r3}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{51.75^2 + 4 \times 40.7^2} = 96.46 \leq [\sigma]$$

11.2 两端铰支细长压杆的临界载荷

欧拉公式的适用性限制：

弹性小变形---小挠度的压杆弹性稳定问题。

杆为均匀直杆，无初始曲率。

压力作用线与杆轴线完全重合，无偏心。

实验表明对小偏心、小初曲率基本适用。

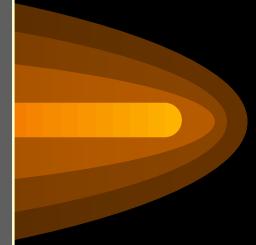
二端铰支压杆稳定临
界载荷的欧拉公式：

$$F_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{---(11-1)}$$

F_{cr} 与杆长 l^2 成反比，杆长的影响很大；

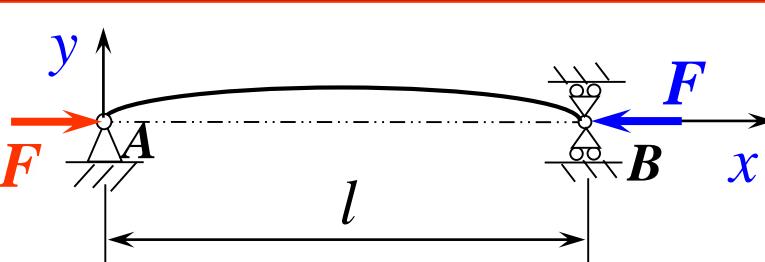
与杆的抗弯刚度 EI 成正比，细杆 EI 小，更易发生屈曲失稳。

细长压杆易失稳！



不同支承条件下压杆的临界载荷

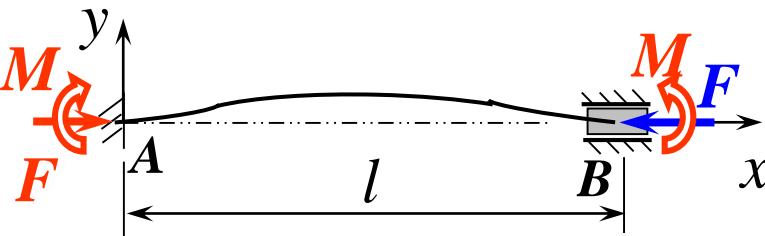
两端铰支



$$M(x) = -Fy$$

$$F_{\text{cr}} = \pi^2 EI / l^2$$

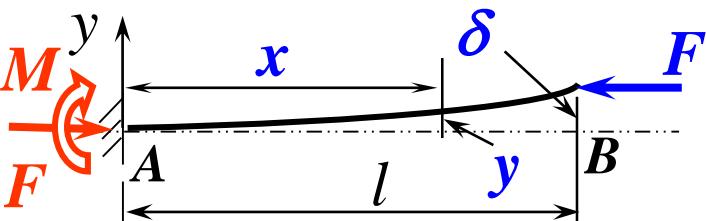
两端固定



$$M(x) = M - Fy$$

$$F_{\text{cr}} = \pi^2 EI / (0.5l)^2$$

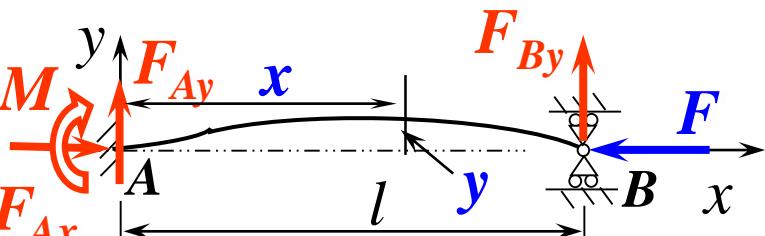
一端固定
一端自由



$$M(x) = F(\delta - y)$$

$$F_{\text{cr}} = \pi^2 EI / (2l)^2$$

一端固定
一端铰支



$$M = F_{Bx}(l - x) - Fy$$

$$F_{\text{cr}} = \pi^2 EI / (0.7l)^2$$

例3 矩形截面木杆 $b=0.12\text{m}$, $h=0.2\text{m}$, $l=8\text{m}$ 。弹性模量 $E=10\text{GPa}$, 求图示两种放置时杆的临界载荷。

解: 1) 杆在 yz 平面屈曲失稳 $I=I_x$

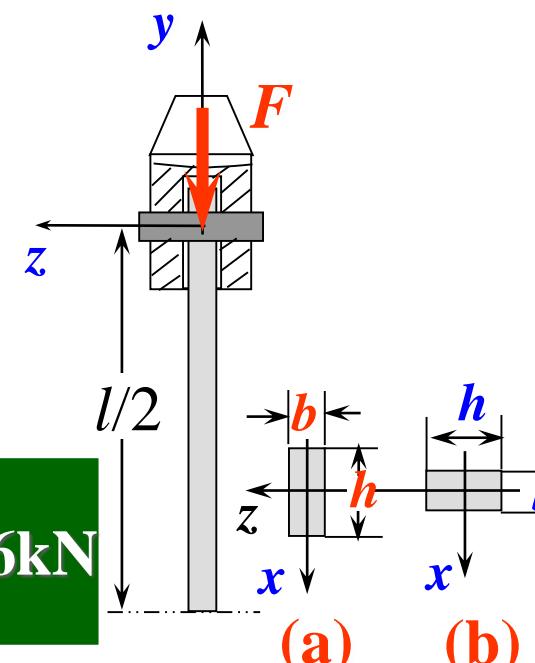
杆端相对于接头不能转动, 可视为两端固定支承, $\mu=0.5$ 。

情况(a): $I_x=hb^3/12$

$$F_{\text{cra1}} = \frac{\pi^2 EI_x}{(0.5l)^2} = \frac{\pi^2 \times 10 \times 10^9 \times 0.2 \times 0.12^3}{12 \times (0.5 \times 8)^2} = 177.6\text{kN}$$

情况(b): $I_x=bh^3/12$

$$F_{\text{crb1}} = \frac{\pi^2 EI_x}{(0.5l)^2} = \frac{\pi^2 \times 10 \times 10^9 \times 0.12 \times 0.2^3}{12 \times (0.5 \times 8)^2} = 493.5\text{kN}$$



例3 矩形截面木杆 $b=0.12\text{m}$, $h=0.2\text{m}$, $l=8\text{m}$ 。弹性模量 $E=10\text{GPa}$, 求图示两种放置时杆的临界载荷。

解: 2) 杆在 xy 平面屈曲失稳 $I=I_z$

杆可相对于接头中的销钉转动, 是两端铰链支承, $\mu=1$ 。

情况(a): $I_z=bh^3/12$

$$F_{\text{cra}2} = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2} = \frac{\pi^2 \times 10 \times 10^9 \times 0.12 \times 0.2^3}{12 \times 8^2} = 123.4\text{kN}$$

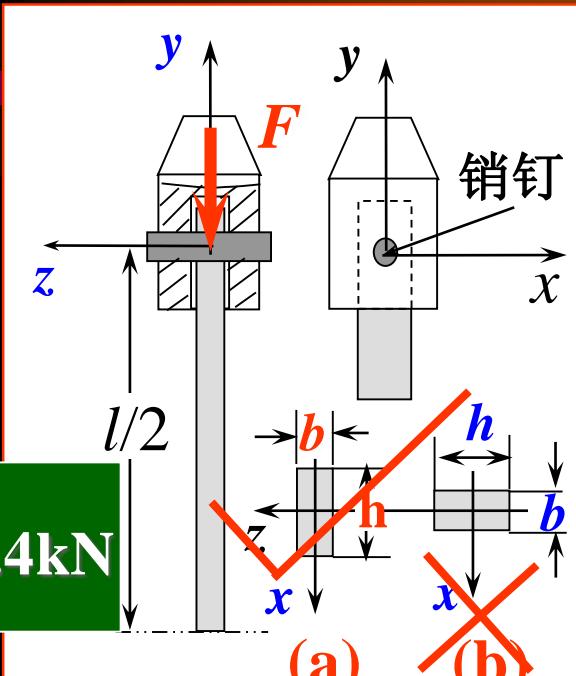
情况(b): $I_z=hb^3/12$

$$F_{\text{crb}2} = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2} = \frac{\pi^2 \times 10 \times 10^9 \times 0.2 \times 0.12^3}{12 \times 8^2} = 44.4\text{kN}$$

支承弱, EI 小
(b) 放置不合理

$$F_{\text{crb}2}/F_{\text{crb}1} = 44.4/493.5 = 9\%$$

$$F_{\text{cra}2}/F_{\text{cra}1} = 123.4/177.6 = 70\%$$



● $\lambda = \mu l/i$, 称为杆的柔度或细长比。

$i^2 = I/A$ ---截面的惯性半径。由 λ 可将杆分类。

● 临界应力总图

$$\sigma_{\text{cr}} = \pi^2 E / \lambda^2 \quad \lambda \geq \lambda_p$$

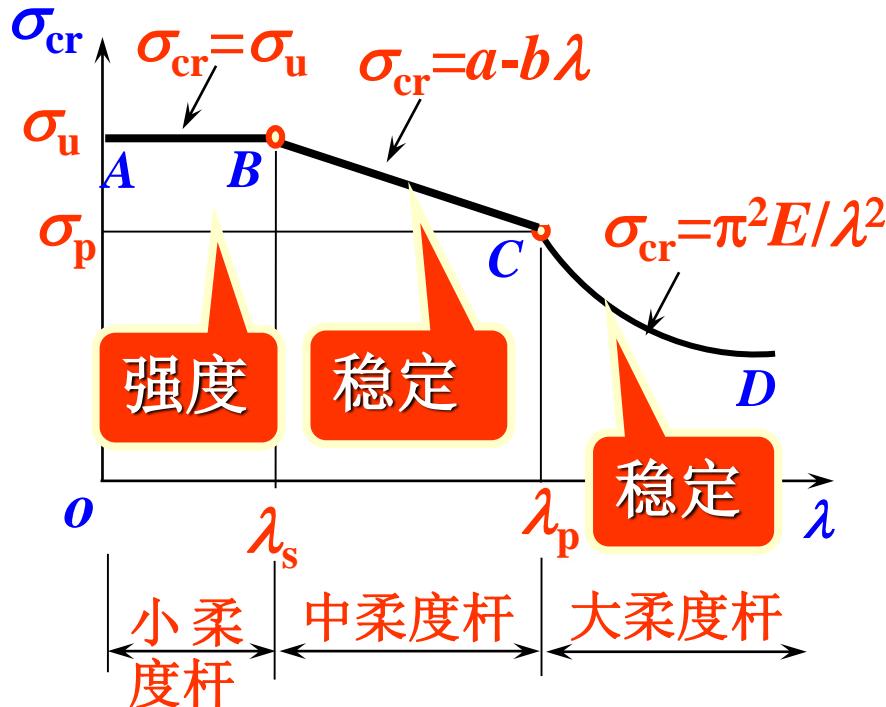
$$\sigma_{\text{cr}} = a - b\lambda \quad \lambda_s \leq \lambda \leq \lambda_p$$

$$\sigma_{\text{cr}} = \sigma_u \quad \lambda \leq \lambda_s$$

注意 $\lambda_p = (\pi^2 E / \sigma_p)^{1/2}$

$$\lambda_s = (a - \sigma_u) / b$$

压杆由 σ_{cr} 的大小也可分类。



例5：低碳钢压杆直径 $d=40\text{mm}$, 两端铰支。 $\sigma_s = 242\text{MPa}$, $E=200\text{GPa}$, 求杆长为 $L=1.5$ 、 0.8 、 0.5m 时的临界应力和临界载荷。

解：1) 查表确定 λ_p 、 λ_s

查表, 对低碳钢有: $\lambda_p=100$, $\lambda_s=60$, $a=310$, $b=1.14$

2) 计算杆的柔度 λ : $\lambda=\mu L/i$ 两端铰支压杆: $\mu=1$;

惯性半径: $i=(I/A)^{1/2}=[(\pi d^4/64)/(\pi d^2/4)]^{1/2}=d/4=10\text{mm}$

杆1的柔度为: $\lambda_1=\mu L_1/i=1500/10=150$

大柔度杆

杆2的柔度为: $\lambda_2=\mu L_2/i=800/10=80$

中柔度杆

杆3的柔度为: $\lambda_3=\mu L_3/i=500/10=50$

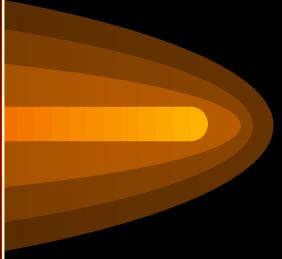
小柔度杆

3) 判定压杆的类型, 计算临界应力和临界载荷:

$L_1=1.5\text{m}$, $\lambda_1=150>\lambda_p=100$, 大柔度杆由欧拉公式:

$$\sigma_{\text{cr1}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{200 \times 10^3 \pi^2}{150^2} = 87.73 \text{ MPa}$$

$$F_{\text{cr1}} = \sigma_{\text{cr1}} A = 87.73 \times 40^2 \pi / 4 = 110244 \text{ (N)} = 110 \text{ (kN)}$$



$L_2=0.8\text{m}$, $\lambda_s=60<\lambda_2=80<\lambda_p=100$, 中柔度杆, 有:

$$\sigma_{\text{cr2}} = a - b \lambda = 310 - 1.14 \times 80 = 218.8 \text{ MPa}$$

$$F_{\text{cr2}} = \sigma_{\text{cr2}} A = 218.8 \times 40^2 \pi / 4 = 274952 \text{ N} = 275 \text{ kN}$$

$L_3=0.5\text{m}$, $\lambda_3=50<\lambda_s=60$,

$$\sigma_{\text{cr3}} = \sigma_{\text{ys}} = 242 \text{ MPa}$$

$$F_{\text{cr3}} = \sigma_{\text{cr3}} A = 242 \times 40^2 \pi / 4 = 304106 \text{ N} = 304 \text{ kN}$$

压杆的长度对临界
载荷有显著影响!



例6 矩形截面木杆 $b=0.12\text{m}$, $h=0.2\text{m}$ 。 $\sigma_b=25\text{ MPa}$, $E=9.5\text{GPa}$ 。若 $F=120$ 、 240kN , 试求杆的临界长度。

解: 1)由材料性能确定 λ_p 、 λ_s :

查表11-1, 有:

$$a=28.7, \quad b=0.19, \quad \lambda_p=110$$

$$\lambda_s=(a-\sigma_b)/b=(28.7-25)/0.19=19.5$$

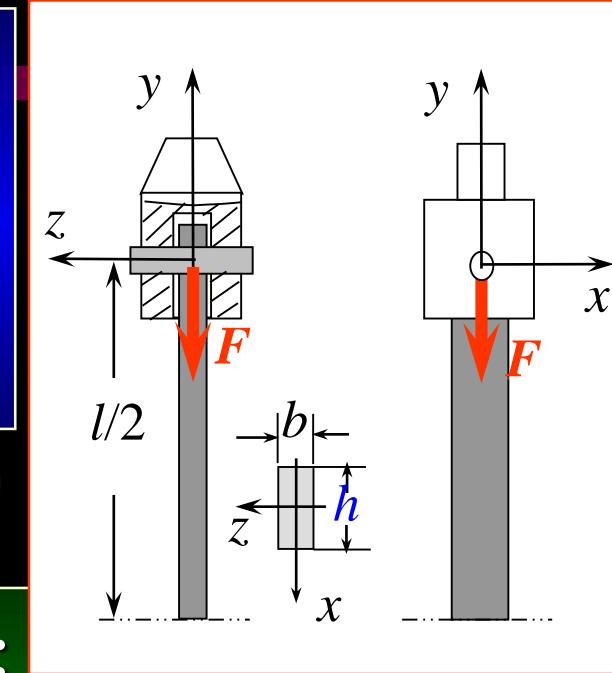
→ 计算柔度: $\lambda=\mu l/i$ (l 待求) ?

2) 由控制压杆分类的柔度计算 σ_{cr} :

$\lambda_p=110$ 时, 有:

$$\sigma_{crp}=a-b\lambda_p=28.7-0.19\times 110=7.8\text{ MPa}$$

$$\lambda_s=19.5\text{时, 有: } \sigma_{crs}=a-b\lambda_s=28.7-0.19\times 19.5=25\text{ MPa}$$



利用临界
应力总图

已知杆几何, 由柔度分类;
已知载荷(应力)可由应力分类。

$$\sigma_p = 7.8 \text{ MPa}; \sigma_u = 25 \text{ MPa}$$

本题: $A = bh = 24000 \text{ mm}^2$

$F_1 = 120000 \text{ N}$ 时,

$$\sigma_1 = F/A = 5 \text{ MPa} < \sigma_p$$

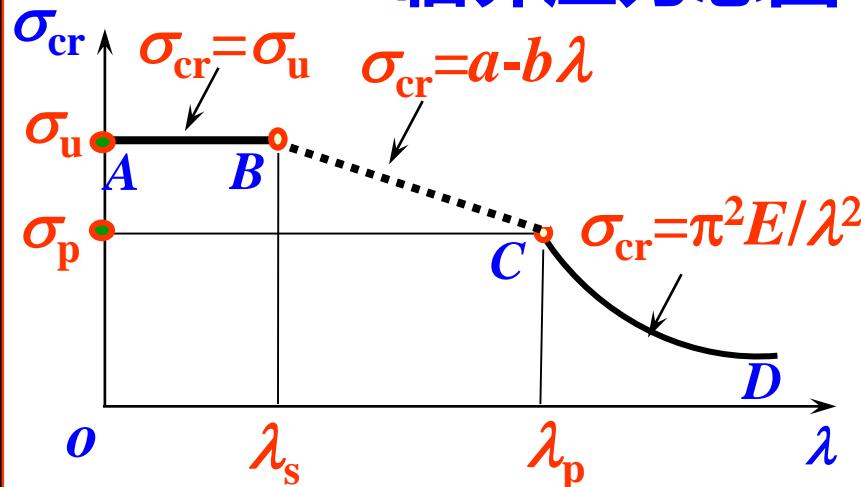
大柔度杆

$F_2 = 240000 \text{ N}$ 时,

$$\sigma_2 = F/A = 10 \text{ MPa}$$

$\sigma_p < \sigma_2 < \sigma_u$ 中柔度杆

临界应力总图



$\lambda \geq \lambda_p$ 或 $\sigma \leq \sigma_p$, 大柔度杆

$\sigma_p \leq \sigma \leq \sigma_u$, 中柔度杆

$\lambda \leq \lambda_s$ 或 $\sigma \geq \sigma_u$, 小柔度杆

3) 计算临界杆长:

A. $F_1=120\text{kN}$, 按大柔度杆计算

$$\text{柔度 } \lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{cr1}}}} = \sqrt{\frac{9500\pi^2}{5}} = 137$$

杆在yz平面失稳时,

$$I_x = hb^3/12; \quad \mu = 0.5 \text{ (两端固定)}$$

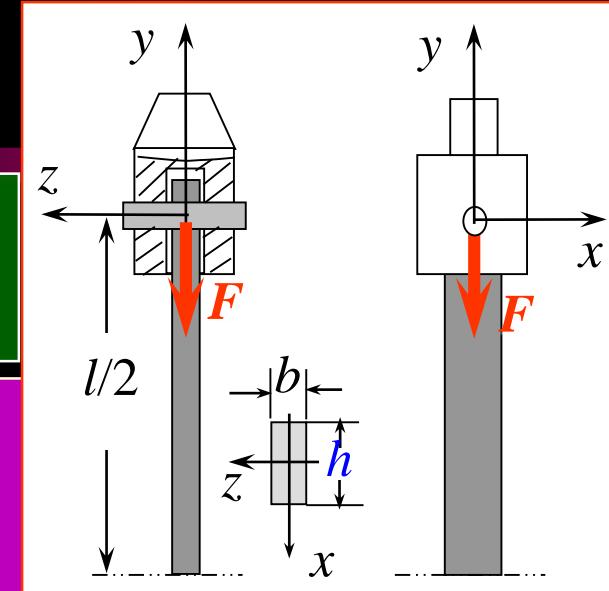
$$L_{11} = \lambda_1 i / \mu = \lambda_1 (I/A)^{1/2} / \mu = 137 \times (b^2/12)^{1/2} / 0.5 = 9.49 \text{ m}$$

杆在xy平面失稳时, $I_z = bh^3/12; \quad \mu = 1 \text{ (两端铰支)}$

$$L_{12} = \lambda_1 (I/A)^{1/2} / \mu = 137 \times (h^2/12)^{1/2} / 1 = 7.9 \text{ m}$$

临界长度为: $L_1 = \min\{L_{11}, L_{12}\} = 7.9 \text{ m}$

$$b=0.12\text{m}, h=0.2\text{m}$$



例9 硬铝合金圆截面压杆长 $L=1\text{m}$, 两端铰支, 受压力 $F=12\text{kN}$ 作用。已知 $\sigma_s=320\text{MPa}$, $E=70\text{GPa}$, 若规定的许用稳定安全因数为 $n_{st}=5$, 试设计其直径 d 。

解: 1) 确定 λ_p 、 λ_s

查表有: $a=372$, $b=2.14$, $\lambda_p=50$

$$\lambda_s = (a - \sigma_s)/b = (372 - 320)/2.14 = 24.3$$

杆是大柔度杆否?

2) 由稳定性条件计算临界载荷

$$F_{cr} \geq F \cdot n_{st} = 12 \times 5 = 60 \text{ kN}$$

3) 假设为大柔度杆, 由欧拉公式设计杆直径, 有:

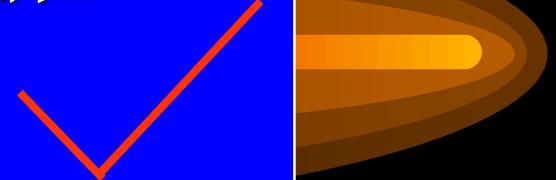
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 70 \times 10^3 \times (\pi d^4 / 64)}{(1 \times 1000)^2} = 60000$$

解得: $d=36.47\text{mm}$; 设计可取 $d=38\text{mm}$ 。

讨论一：本题按大柔度杆设计($d=38$)是否合适？

计算杆的柔度，检验按欧拉公式设计的正确性。

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 1000}{38/4} = 105.26 > \lambda_p = 50$$



讨论二：本题按大柔度杆设计的最大直径？

由 $\lambda = \mu l / i = 4 \mu l / d \geq \lambda_p$ ，有：

$$d \leq 4 \mu l / \lambda_p = 4 \times 1 \times 1000 / 50 = 80 \text{ mm}$$

讨论三：本题按中柔度杆设计的直径范围？

由 $\lambda_s \leq \lambda \leq \lambda_p$ ，有：

$$d \geq 4 \mu l / \lambda_p = 4 \times 1 \times 1000 / 50 = 80 \text{ mm}$$

$$d \leq 4 \mu l / \lambda_s = 4 \times 1 \times 1000 / 24.3 = 165 \text{ mm}$$