**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего**

**профессионального образования**

**«Казанский национальный исследовательский технический университет**

**им. А.Н. Туполева-КАИ»**

Институт компьютерных технологий и защиты информации

Кафедра Прикладной математики и Информатики имени Ю.В.Кожевникова

Лабораторная работа № 4

по дисциплине «Основы теории игр и исследования операций»

Вариант 3

**Выполнил**

студент группы 4411

Федотов А.Д.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Принял**

доцент каф ПМИ Кремлева Э.Ш.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Казань

2023

**«Решение матричной игры () среди смешанных стратегий»**

*Постановка задачи. Задача о шпионе и разведчике.* Разведчик выслеживает вражеского Шпиона. Для слежки Разведчик располагает подслушивающими устройствами 3-х видов. Коварный Шпион может проводить свои встречи на трех конспиративных квартирах с разной толщиной стен. Степень слышимости в условных единицах приведена в таблице. Определить оптимальный выбор устройства для Разведчика и квартиры для Шпиона.

Таблица 1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Шпион  Разведчик | Кв. №1 | Кв. №2 | Кв. №3 |
| Устр. №1 | 12 | 3 | 10 |
| Устр. №2 | 7 | 9 | 4 |
| Устр. №3 | 8 | 7 | 8 |

*Формирование оптимизационных задач.*

Введем обозначения. Пусть Разведчик будет обозначаться как игрок А, а Шпион – игрок B. Тогда Устр. №1, Устр. №2 и Устр. №3 есть A1, A2 и A3 соответственно. Аналогично заменим Кв. №1, Кв. №2 и Кв. №3 на B1, B2 и B3 соответственно.

Таблица 2.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Bj  Ai | B1 | B2 | B3 |
| А1 | 12 | 3 | 10 |
| А2 | 7 | 9 | 4 |
| А3 | 8 | 7 | 8 |

Сначала найдем оптимальную смешанную стратегию .

*Эквивалентная оптимизационная ЗЛП в общем виде.* Имеется парная конечная игра () с нулевой суммой и платежной матрицей без седловой точки. Игрок имеет стратегии , а игрок — стратегии . Необходимо найти решение игры в смешанных стратегиях. То есть оптимальную пару смешанных стратегий . Здесь и — вероятности применения стратегий и , которые удовлетворяют условиям . () соответствует выигрыш, равный цене игры .

Оптимальная смешанная стратегия должна обеспечить игроку выигрыш не меньший при любом поведении игрока , и выигрыш равный при его оптимальном поведении.

Допустим, игрок использует стратегию , а игрок — некоторую стратегию в чистом виде, или . В этом случае игрок имеет средний выигрыш:

.

Поскольку игрок отклонился от оптимальной стратегии , то это может привести лишь к увеличению среднего выигрыша игрока , следовательно, можно записать:

Отметим, что выражение (1) превращается в равенство в случае, если все стратегии Вj активны. Но так как мы не знаем заранее, все ли Вj активны, то в (1) ставится неравенство.

Цена игры есть гарантированный выигрыш игрока , естественно он будет стремиться максимизировать эту величину, то есть:

Таким образом, задача нахождения решения игры свелась к задаче линейного программирования (1)-(4), в которой необходимо найти вероятности удовлетворяющие ограничениям (1)-(3) и максимизирующие целевую функцию (4).

Преобразуем эту ЗЛП к более удобному виду. Для этого предположим, что . Если это условие не выполняется, то, прибавляя одну и ту же положительную величину к элементам платежной матрицы, всегда можно этого добиться. В этом случае цена игры .

Теперь, поделив левую и правую части каждого из неравенств (1)-(3) на величину и обозначив , преобразуем ЗЛП (1)-(4) к виду:

(5)

(6)

(7)

Таким образом, определение оптимальной смешанной стратегии свелась к ЗЛП (5)-(7).

*Формирование частной ЗЛП.*

Запишем условия (5)-(7) как

12*x*1+ 7*x*2+8*x*3 ≥ 1;

3*x*1+ 9*x*2+7*x*3 ≥ 1; (8)

10*x*1+ 4*x*2+8*x*3 ≥ 1;

*х*1≥0, *х*2≥0, *х*3≥0. (9)

*x*1+ *x*2 + *x*3 ⇒ min (10)

Требуется найти неотрицательные значения переменных *x*1, *x*2, *x*3*,*удовлетворяющие условиям (8)-(9) и обращающие в минимум линейную функцию (10).

*Решение задачи.* Когда задача (6)-(8) решена и найдены оптимальные значения , то с учетом введенного обозначения и вида целевой функции (10) найдем искомые вероятности и максимальный выигрыш игрока : , где .

Решая задачу (8)-(10) симплекс-методом при помощи программы Игры, получаем, что минимум целевой функции равен *Lmin*= .

Это значение достигается при *х*1 = 0; *х*2 = ; *х*3 =.

Следовательно, находим вероятности *p*1 , *p*2 , *p*3, с которыми игрок *А* должен применять свои стратегии *А*1 ,*А*2 *, А*3 , : *p*1= *x*1⋅, *p*2= *x*2⋅, *p*3= *x*3⋅ и цену игры:

= ≈ 7,3333

*p*1= *x*1⋅= 0;

*p*2= *x*2⋅= = ;

*p*3= *x*3⋅= = .

Таким образом оптимальная стратегия игрока *А* имеет вид:

*SА*\*=

В терминах поставленной задачи это означает, что разведчик не должен применять устройство №1 (пассивная стратегия), пользоваться устройством №2 с вероятностью 1/6, устройством №3 – с вероятностью 5/6. При этом вероятность выслеживания шпиона будет максимальна:

**Теперь найдём оптимальную стратегию *SB*\* противника.**

*Эквивалентная оптимизационная ЗЛП в общем виде.*

Пусть игрок использует оптимальную стратегию , а игрок — чистую стратегию . Игрок имеет средний выигрыш: .

Так как игрок отклонился от оптимальной смешанной стратегии, то его средний выигрыш может быть только меньше или равен цене игры .

Поэтому можно записать:

(11)

(12)

(13)

Игрок , выбирая свою оптимальную смешанную стратегию стремится уменьшить средний выигрыш игрока . Тогда целевая функция будет иметь вид:

(14)

Теперь преобразуем ЗЛП (11)-(13). Для этого разделим левые и правые части выражений (11)-(12) на величину и введем обозначим . Тогда ЗЛП (11)-(13) перепишется:

(15)

(16)

(17)

*Формирование частной ЗЛП.*

Условия (15)-(17) для поставленной задачи запишутся как:

12y1+ 3y2+10y3 ≤ 1;

7y1+ 9y2+4y3 ≤ 1; (18)

8y1+ 7y2+8y3 ≤ 1;

y1≥0, y2≥0, y3≥0. (19)

= y1+ y2 + y3 ⇒ max (20)

Требуется найти неотрицательные значения переменных y1, y2, y3*,*удовлетворяющие условиям (18)-(19) и обращающие в минимум линейную функцию (20).

*Решение задачи.*

Когда задача (18)-(20) решена, тогда из введенных обозначений следует

Решая задачу симплекс-методом при помощи программы Игры, получаем, что максимум целевой функции равен *Lmax*= . Это значение достигается при y1 = 0; y2= ; y3 = .

Следовательно, находим вероятности *q1, q2, q3*, с которыми игрок Bдолжен применять свои стратегии B1, B2 *,* B3 :

цена игры:

=

Тогда:

*q*1= y1⋅ *γ* \* = ;

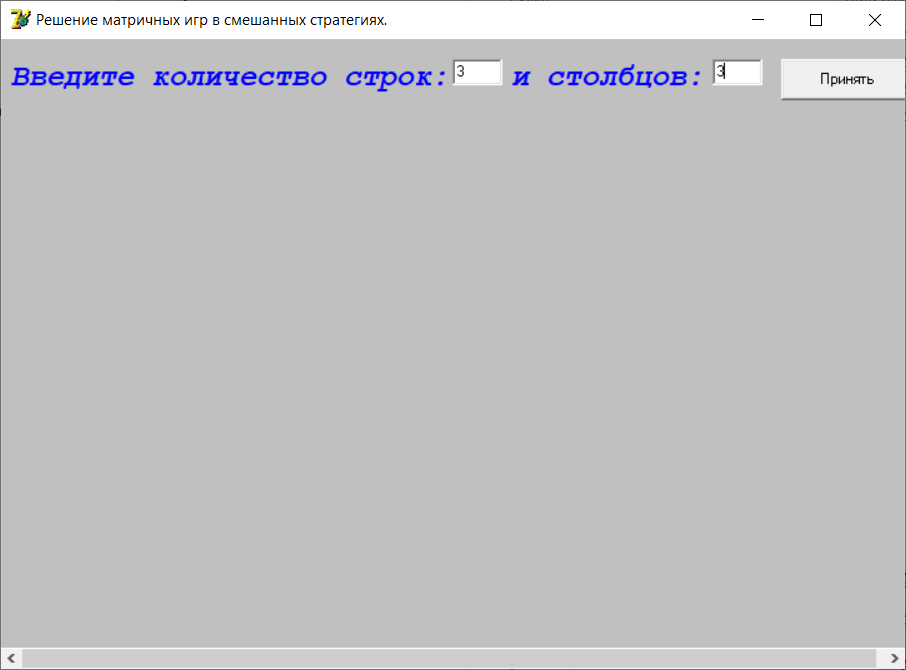
*q*2 = y2⋅*γ* \*=⋅=;

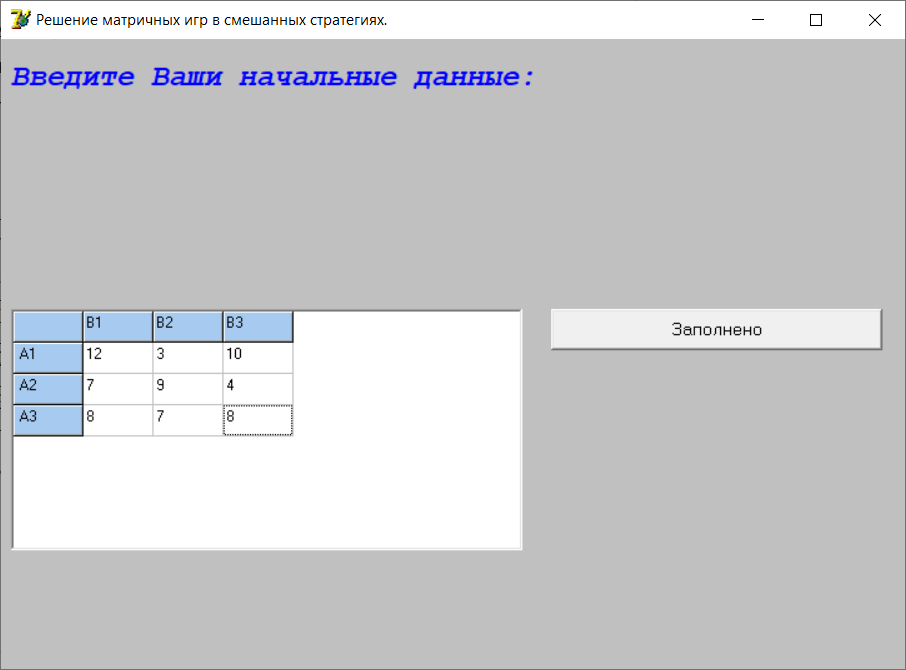
q3= y3⋅*γ* \* =⋅=.

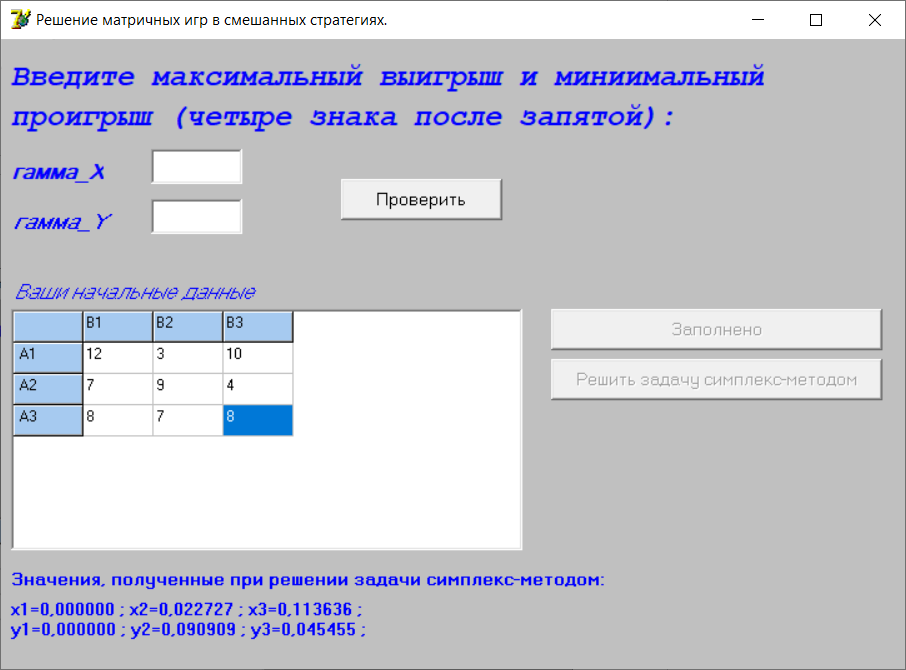
Таким образом оптимальная стратегия игрока B имеет вид:

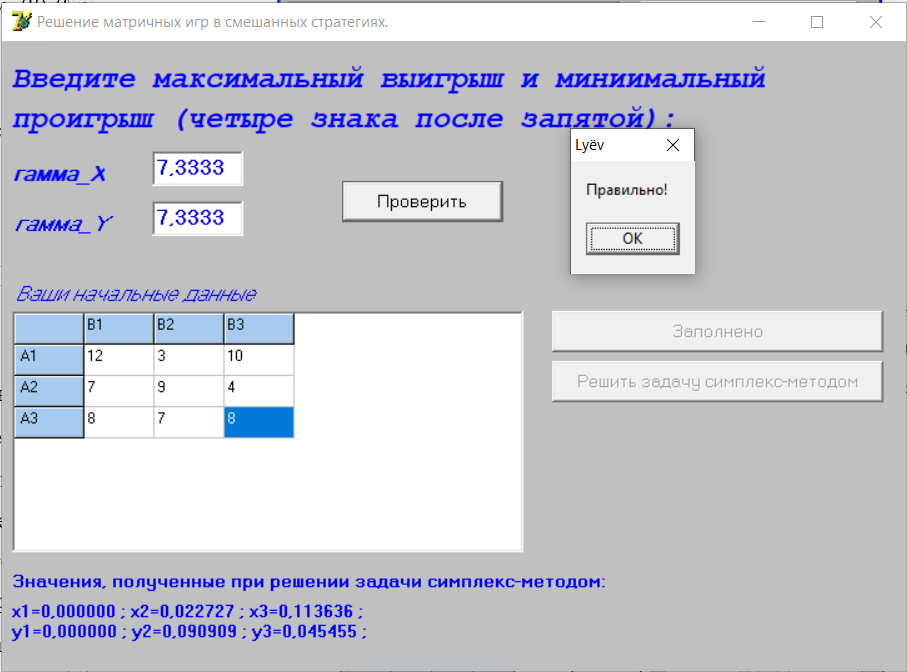
*SB*\*=

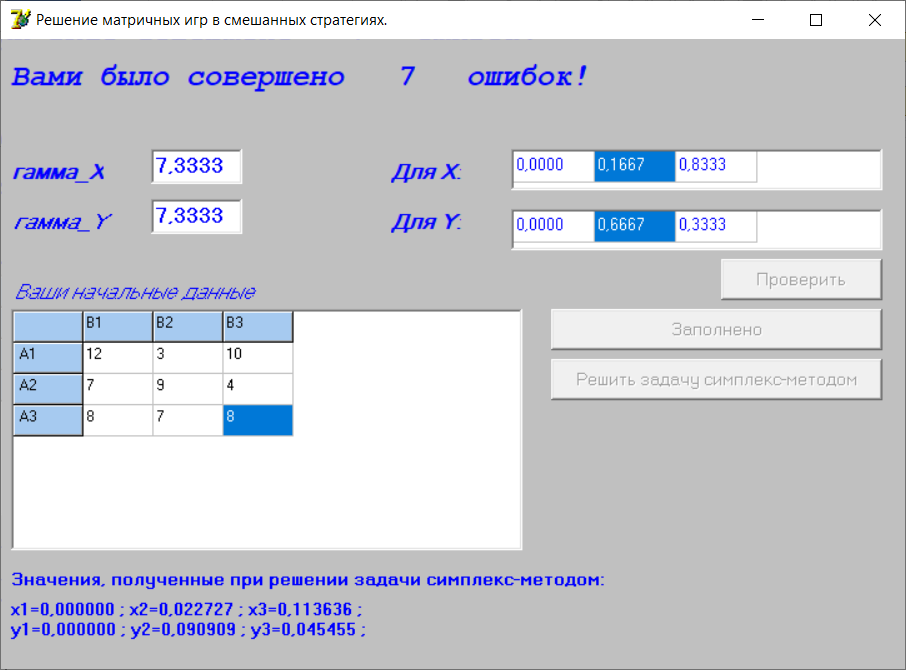
Отсюда следует, что оптимальная стратегия шпиона состоит в том, чтобы не пользоваться квартирой №1 (пассивная стратегия), использовать квартиру №2 с вероятностью 2/3, квартиру №3 – с вероятностью 1/3.









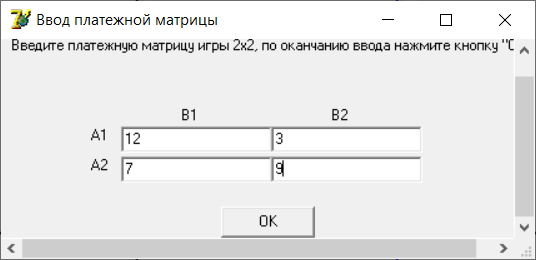


**«Решение игры (2x2) с помощью геометрической интерпретации»**

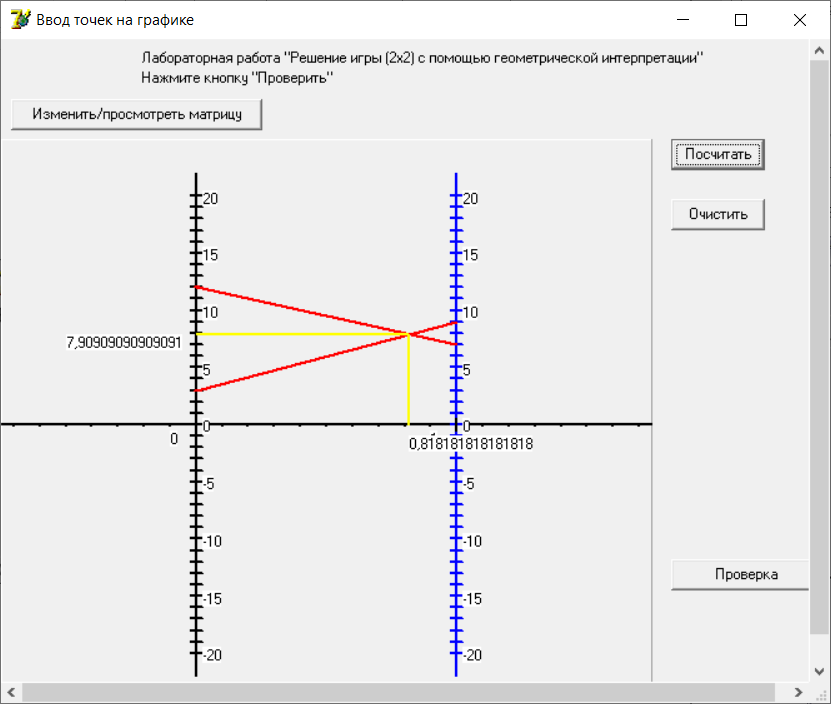
*Постановка задачи. Задача о шпионе и разведчике.* Разведчик выслеживает вражеского Шпиона. Для слежки Разведчик располагает подслушивающими устройствами 2-х видов. Коварный Шпион может проводить свои встречи на двух конспиративных квартирах с разной толщиной стен. Степень слышимости в условных единицах приведена в таблице. Определить оптимальный выбор устройства для Разведчика и квартиры для Шпиона.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Шпион  Разведчик | Кв. №1 | Кв. №2 |
| Устр. №1 | 12 | 3 |
| Устр. №2 | 7 | 9 |

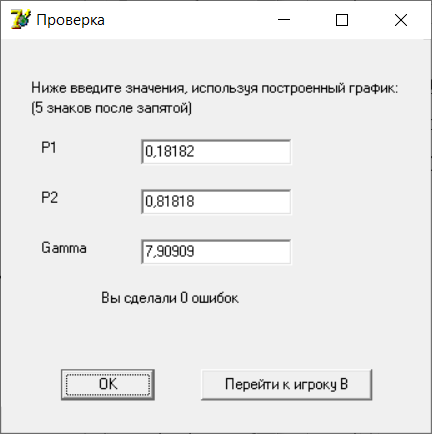
Шаг 1: вводим платежную матрицу.



Шаг 2: вводим первую точку первой прямой для игрока А, затем вторую точку первой прямой, первую точку второй прямой, вторую точку второй прямой. Нажимаем кнопку «Посчитать».

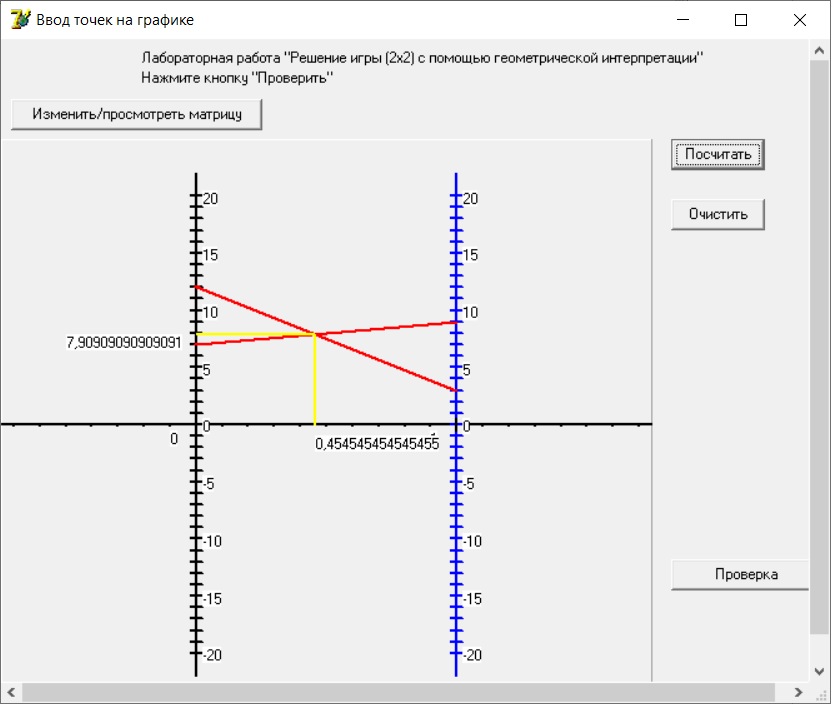


Шаг 3: по графику определяем вероятности P1, P2, значение Гамма, нажимаем кнопку проверка и вводим значения с точностью до 5 знаков после запятой, нажимаем кнопку ОК.

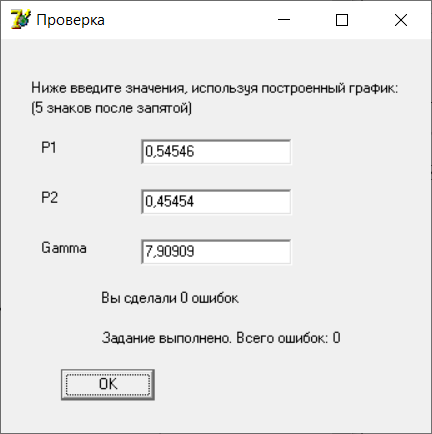


Шаг 4: так как все сделано верно, переходим к игроку В.

Шаг 5: вводим первую точку первой прямой для игрока В, затем вторую точку первой прямой, первую точку второй прямой, вторую точку второй прямой. Нажимаем кнопку «Посчитать».



Шаг 6: по графику определяем вероятности P1, P2, значение Гамма, нажимаем кнопку проверка и вводим значения с точностью до 5 знаков после запятой, нажимаем кнопку ОК.



Шаг 7: конец работы, результат работы выводится на экран (количество сделанных ошибок).

Вывод: в терминах поставленной задачи мы получили, что разведчик должен использовать первое устройство с вероятностью 0,18182, а второе – с вероятностью 0,81818. При этом вероятность выслеживания шпиона будет максимальна:

Шпион должен пользоваться первой квартирой с вероятностью 0,54546, а второй – с вероятностью 0,45454.