Ondřej Ondryáš 6 $\iiint_T (x+yz)\,dx\,dy\,dz$ $T=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3;\ 0\le 2\sqrt{x}\le y\le 4;\ y\le 2z\le 8\}$

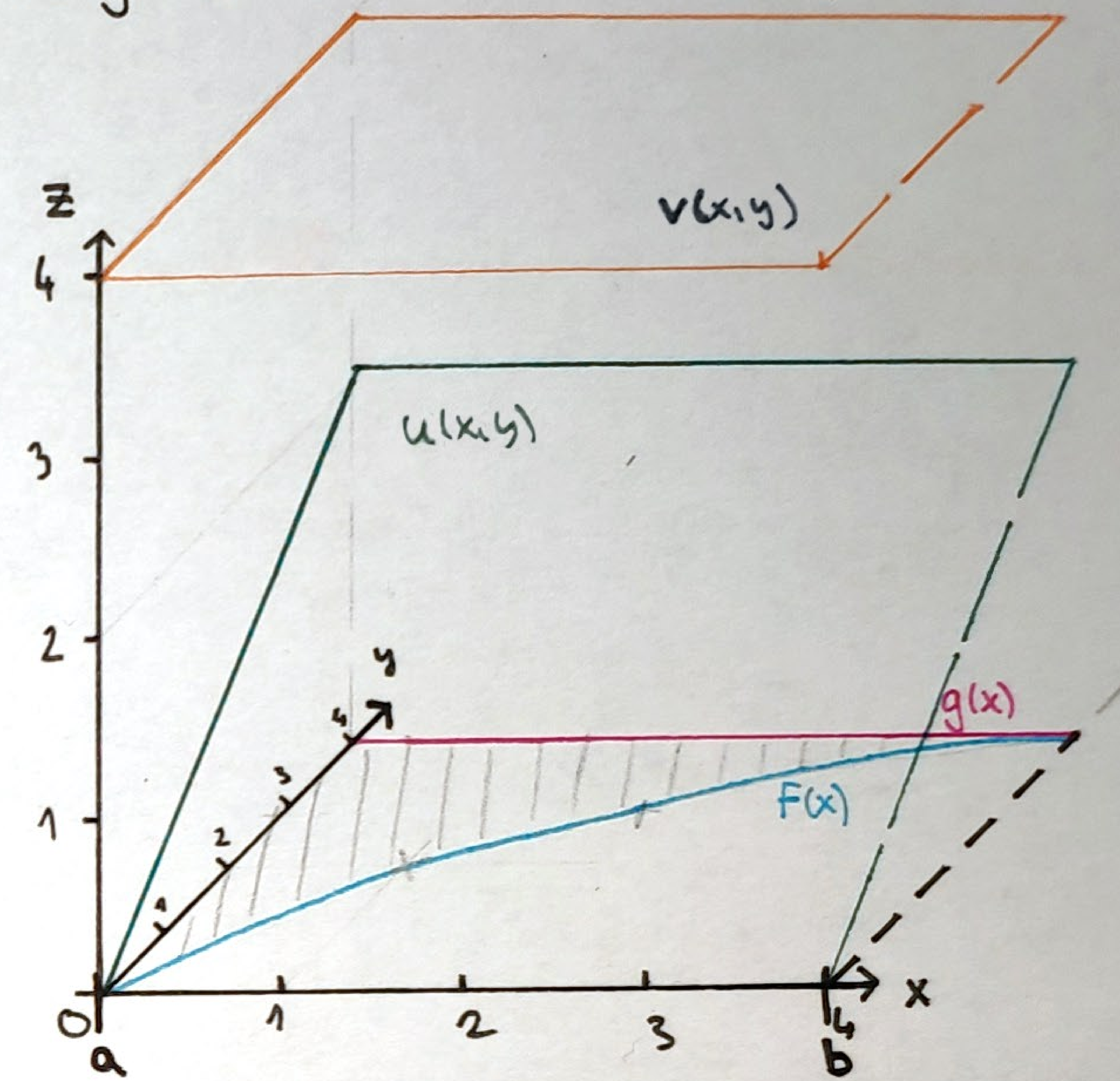
Pro použití Fubiniovy věty chceme vyjádřit množinu T pomocí rovnic ve tvaru $a\le x\le b$; $f(x)\le y\le g(x)$; $u(x,y)\le z\le v(x,y)$.

Ze zadaných rovnic vyplývá:

$0\le x\le 4$ $\quad$ ($2\sqrt{x}\le 4 \Rightarrow 4x\le 16 \Rightarrow x\le 4$, protože $\sqrt{x}$ je rostoucí a kladná)

$2\sqrt{x}\le y\le 4$

$\frac{1}{2}y\le z\le 4$



Znázorňovat těleso samotné je mimo mé geometrické schopnosti.

Můžeme tedy snadno převést integrál na trojný sobný:

$$\int_0^4\left(\int_{2\sqrt{x}}^4\left(\int_{\frac12 y}^4 (x+yz)\,dz\right)dy\right)dx = \int_0^4\int_{2\sqrt{x}}^4 \left[xz+\frac{y}{2}z^2\right]_{\frac12 y}^4 dy\,dx =$$

$$= \int_0^4\int_{2\sqrt{x}}^4\left(4x+8y-\frac12 xy-\frac{y^3}{8}\right)dy\,dx = \int_0^4\left[4xy+4y^2-\frac14 xy^2-\frac{1}{32}y^4\right]_{2\sqrt{x}}^4 dx$$

$$= \int_0^4\left(\cancel{16x}+64-4x-8-8x\sqrt{x}\cancel{-16x}+x^2+\frac12 x^2\right)dx = \int_0^4\left(\frac32 x^2-4x-8x^{\frac32}+56\right)dx =$$

$$= \left[\frac12 x^3-2x^2-\frac{16}{5}x^{5/2}+56x\right]_0^4 = 32-32-\frac{16}{5}\cdot 32+224 = \underline{\underline{121{,}6}}$$