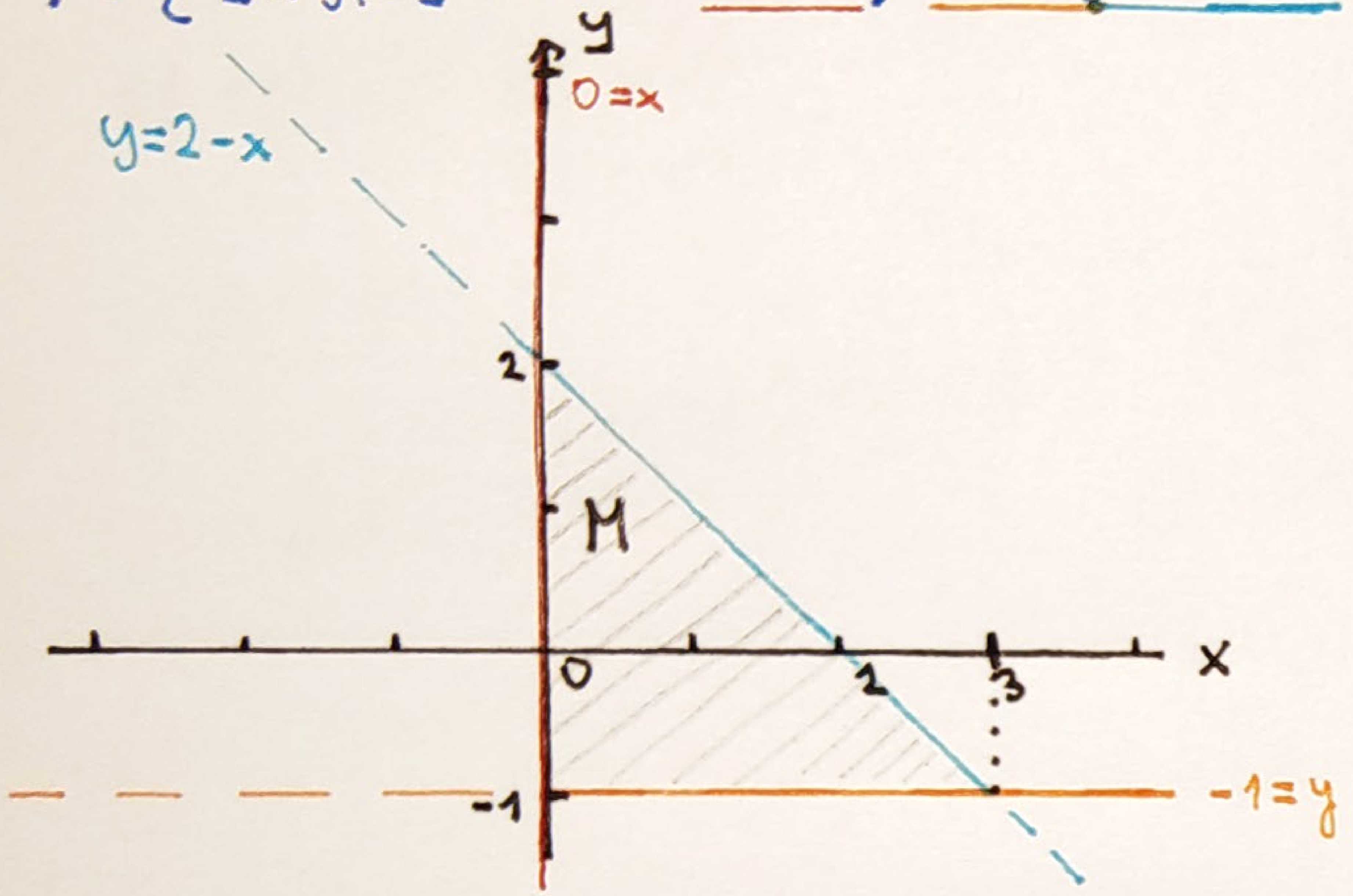
⑥ Ondřej Ondryáš

$T = \{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x ; -1 \leq y \leq 2-x ; 0 \leq z \leq x^2 + y + 2 \}$ ⟹ Počítáme integrál z fce $F(x,y) = x^2 + y + 2$ na oblasti M, která je ~~dána~~ ohraničena přímkami $x=0$, $y=-1$ a $y=2-x$. (Hodnota dvojného int. vyjadřuje objem mezi křivkou a rovinou xy, což je přesně to, co vyjadřuje soust. $0 \leq z \leq x^2+y+2$ pro libovolné x, y z dané oblasti.)



Hledaný objem tedy bude roven hodnotě zmíněného integrálu na elementární oblasti I, která je na ose x ohraničena body 0 a 3 (patrné z nákresu, $2-x=-1 \Rightarrow x=3$), na ose y zespod křivkou $c(x)=-1$ a shora křivkou $d(x)=2-x$.

$$V = \iint_M (x^2+y+2)\,dx\,dy = \int_0^3 \left(\int_{-1}^{2-x} (x^2+y+2)\,dy \right) dx = \int_0^3 \left[x^2y + \frac{1}{2}y^2 + 2y \right]_{-1}^{2-x} dx =$$

$$= \int_0^3 \left(x^2(2-x) + \frac{1}{2}(2-x)^2 + 2(2-x) - x^2(-1) - \frac{1}{2}(-1)^2 - 2(-1) \right) dx = \int_0^3 \left(2x^2 - x^3 + 2 - 2x + \frac{1}{2}x^2 + 4 - 2x + x^2 - \frac{1}{2} + 2 \right) dx =$$

$$= \int_0^3 \left(-x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 4x + \frac{15}{2} \right) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{6}x^3 - 2x^2 + \frac{15}{2}x \right]_0^3 = \left(-\frac{81}{4} + \frac{189}{6} - 18 + \frac{45}{2} \right) = 15\frac{3}{4} = \underline{\underline{15{,}75\ j^3}}$$

Výpočet by šel provést také s využitím elementární oblasti II, výsledný dvojnásobný integrál by měl podobu $\int_{-1}^{2} \left(\int_0^{2-y} (x^2+y+2)\,dx \right) dy$. S použitím výpočetního software bylo zjištěno, že jeho hodnota je opravdu také 15,75.