Ondřej Ondryáš

⑥ $y' = -\frac{2y}{x} + 5x^2$ $\quad y(2) = 8$ $\quad$ hodnoty v $x \in \{4, 6, 8\}$

A) hodnota v bodě 2 z poč. podm.: 8

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \overbrace{f(x_i, y_i)}^{k_i} \qquad h = 2$$

i	x_i	y_i	k_i
0	2	8	$-\frac{2\cdot 8}{2} + 5\cdot 2^2 = 12$
1	4	$8 + 2\cdot 12 = 32$	$-\frac{2\cdot 32}{4} + 5\cdot 4^2 = 64$
2	6	$32 + 2\cdot 64 = 160$	$-\frac{2\cdot 160}{6} + 5\cdot 6^2 = 126{,}\overline{6}$
3	8	$160 + 2\cdot 126{,}\overline{6} = 413{,}\overline{3}$	-

$f(4) \cong 32$

$f(6) \cong 160$

$f(8) \cong 413{,}\overline{3}$

B) převedeme na tvar $y' + f(x)\cdot y = g(x)$:

$$y' + \frac{2}{x}\cdot y = 5x^2$$

najdeme řešení odpovídající homog. rovnice:

$$y' + \frac{2}{x}\cdot y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}\cdot y = 0$$

$$dy + \frac{2dx}{x}\cdot y = 0$$

$$\frac{2dx}{x} = -\frac{dy}{y}$$

$$2\int \frac{1}{x}\,dx = -1\int \frac{1}{y}\,dy$$

$$2\ln|x| = -\ln|y| + c_1$$

$$\ln|y| = -2\ln|x| + c_1 = \ln|x|^{-2} + \ln e^{c_1} = \ln\left(\frac{1}{x^2}\cdot e^{c_1}\right)$$

$$\Rightarrow y = \pm\frac{1}{x^2}\cdot e^{c_1}$$

$$y = \frac{1}{x^2}\cdot c_2$$

$y_p =$

konstantu nahradíme funkcí x:

$y = \frac{1}{x^2} \cdot c(x)$ $\qquad$ $y' = -\frac{2}{x^3} \cdot C(x) + \frac{1}{x^2} \cdot c'(x)$

dosadíme do původní rovnice:

$$-\frac{2}{x^3} \cdot c(x) + \frac{1}{x^2} \cdot c'(x) = \frac{-2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot c(x)}{x} + 5x^2$$

$$\cancel{-\frac{2}{x^3} \cdot c(x)} + \frac{1}{x^2} \cdot c'(x) = \cancel{-\frac{2}{x^3} \cdot c(x)} + 5x^2$$

$$c'(x) = 5x^4$$

$$c(x) = \int 5x^4 = x^5 + c_3$$

$$y = \frac{1}{x^2} \cdot (x^5 + c_3) = x^3 + c_3 \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\underline{y = x^3 + \frac{k}{x^2} \quad k \in \mathbb{R}}$$

dosadíme poč. podmínku pro nalezení part. řešení:

$$8 = 2^3 + k \cdot \frac{1}{2^2} \Rightarrow \frac{1}{4}k = 0 \Rightarrow k = 0$$

Hledaným partik. řešením je $\underline{\underline{y = x^3}}$.

Vidíme tedy, že $F(4) = 64$, $F(6) = 216$, $F(8) = 512$, chyby oproti odhadnutému numerickému řešení jsou $|e(4)| = 32$, $|e(6)| = 56$, $|e(8)| \doteq 98{,}7$.

Tyto chyby jsou velké – způsobeno to je zvoleným krokem h, který je příliš vysoký. Přeji pěkný zbytek dne.