Vektorový prostor:

$\bar{u}+\bar{v} \in V$, $\bar{u},\bar{v} \in V$

$\alpha \cdot \bar{u} \in V$, $\bar{u} \in V$, $\alpha \in F$

prostor $V(F)$, pole F:

$(F,+)$ je Abelova gr.

$(F \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova gr.

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ - distr.

$V \times V \xrightarrow{+} V$, $F \times V \xrightarrow{\cdot} V$

$\alpha \cdot (\bar{u}+\bar{v}) = \alpha \cdot \bar{u} + \alpha \cdot \bar{v}$

$(\alpha+\beta) \cdot \bar{u} = \alpha \cdot \bar{u} + \beta \cdot \bar{u}$

$\alpha \cdot (\beta \cdot \bar{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \bar{u}$

$1 \cdot \bar{u} = \bar{u}$, $0 \cdot \bar{u} = \bar{0}$

$\alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}$, $-1 \cdot \bar{u} = -\bar{u}$

$\alpha \cdot \bar{u} = \bar{0} \Rightarrow \alpha = 0 \vee \bar{u} = \bar{0}$

Lineární závislost:

$\alpha_1 \cdot \bar{u}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{u}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \bar{u}_n = \bar{0}$

$\wedge\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$

$\Rightarrow$ jsou nezávislé

$\Rightarrow$ jediná možnost, jak komb. získat $\bar{0}$, je vynásobit všechny 0.

Pivoty:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 8 \\ \boxed{0} & 5 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

u_1 u_2 u_4

RREF:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$u_3 = 3u_1 + 4u_2$

$u_5 = 3u_1 + 5u_2 + 4u_4$

Hodnost matice:

počet nenulových ř./sl. po elim.

řádk. = sloupcová

Soustava $A\bar{x} = \bar{b}$ má aspoň jedno řešení, když

$h(A|b) = h(A)$

$\Rightarrow$ vektor $\bar{b}$ je lin. komb. sloupců

Součet a průnik podp.:

$V_1, V_2 \subseteq V$

$V_1 + V_2 = \{\bar{w};\ \bar{w} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2;\ v_1 \in V_1 \wedge v_2 \in V_2\}$

$V_1 \cap V_2 = \{\bar{w};\ w \in V_1 \wedge w \in V_2\}$

$\dim(V_1+V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$
$= \dim V_1 + \dim V_2$

Standardní skalární součin:

$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$

$\|\bar{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{\bar{u} \cdot \bar{u}}$

$\Rightarrow \|\bar{u}\|^2 = \bar{u} \cdot \bar{u}$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cdot \cos\varphi$ (z kosin. věty)

$\Rightarrow \bar{u} \cdot \bar{v} > 0 \rightarrow$ ostrý úhel

$\bar{u} \cdot \bar{v} = 0 \rightarrow \bar{u} \perp \bar{v}$

Skalární součin obecně:

$\bar{u} \cdot \bar{u} > 0$ pro $\bar{u} \neq \bar{0}$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$

$(\alpha \cdot \bar{u}) \cdot \bar{v} = \alpha \cdot (\bar{u} \cdot \bar{v})$

$\bar{u} \cdot (\bar{v}+\bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$

$\bar{0} \cdot \bar{u} = (0 \cdot \bar{u}) \cdot \bar{u} = 0 \cdot (\bar{u} \cdot \bar{u}) = 0$

Smíšený součin:

$(\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}))$

$=$ V rovnoběžnostěnu

Vektorový součin:

$$\bar{u} \times \bar{v} = \left[\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right]$$

$\bar{u} \times \bar{v} = -\bar{v} \times \bar{u}$

$\|\bar{u} \times \bar{v}\| = \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cdot \sin\varphi$

$\|\bar{u} \times \bar{v}\|$ je S rovnoběžníku v $\mathbb{R}^3$

Ortogonální průmět:

$\bar{u} \in V$, $L \subseteq V$, průmět $\bar{u}$ do L:

$\bar{v} \in L \wedge (\bar{u}-\bar{v}) \perp L$

$L = \langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \rangle$, $\bar{v} = \alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \dots + \alpha_n \cdot \bar{a}_n$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \bar{a}_1\bar{a}_1 & \bar{a}_2\bar{a}_1 & \cdots & \bar{a}_n\bar{a}_1 & \bar{u}\cdot\bar{a}_1 \\ \bar{a}_1\bar{a}_2 & \bar{a}_2\bar{a}_2 & \cdots & \bar{a}_n\bar{a}_2 & \bar{u}\cdot\bar{a}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{a}_1\bar{a}_n & \bar{a}_2\bar{a}_n & \cdots & \bar{a}_n\bar{a}_n & \bar{u}\cdot\bar{a}_n \end{array}\right)$$

Ortogon. báze

všechny vektory na sebe kolmé

při projekci do ní platí

$\alpha_i = \dfrac{\bar{u} \cdot \bar{a}_i}{\bar{a}_i \cdot \bar{a}_i}$, což je i průmět do přímky $\bar{a}_i$

Gram-Schmidt

pro bázi $[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n]$

$\bar{b}_1 = \bar{a}_1$

$\bar{b}_2 = \bar{a}_2 + \beta_{21} \cdot \bar{b}_1$

$\bar{b}_3 = \bar{a}_3 + \beta_{31} \cdot \bar{b}_1 + \beta_{32} \cdot \bar{b}_2$

$\bar{b}_n = \bar{a}_n + \beta_{n1} \cdot \bar{b}_1 + \dots + \beta_{n(n-1)} \bar{b}_{n-1}$

$\beta_{21} = -\dfrac{\bar{a}_2 \bar{b}_1}{\bar{b}_1 \bar{b}_1}$, $\beta_{nm} = -\dfrac{\bar{a}_n \cdot \bar{b}_m}{\bar{b}_m \cdot \bar{b}_m}$

Souřadnice v bázi

$\bar{v} = v_1^A \cdot \bar{a}_1 + \dots + v_n^A \cdot \bar{a}_n$

$= (\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \dots\ \bar{a}_n) \cdot \begin{bmatrix} v_1^A \\ v_2^A \\ \vdots \\ v_n^A \end{bmatrix} = A \cdot [\bar{v}]_A$

$\left(\begin{array}{cc|c} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \begin{matrix} v_1^E \\ v_2^E \end{matrix} \end{array}\right) \rightarrow$ souřadnice v B

Matice přechodu:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & [\bar{a}_1]_B & [\bar{a}_2]_B \\ 0 & 1 & & \end{array}\right)$$

B A

$C_{(B,A)}$ je matice př. od B k A

$\Rightarrow$ vyjadřuje A v bázi B

$C_{(B,A)} = B^{-1} \times A = C_{(A,B)}^{-1}$

$[\bar{v}]_B = C_{(B,A)} \times [\bar{v}]_A$

Transformace:

$f(\alpha \cdot \bar{u}) = \alpha \cdot f(\bar{u})$

$f(\bar{u}+\bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v})$

$f(\bar{0}) = \bar{0}$ $f(\bar{v})$: $V \rightarrow W$

Jádro a obraz

Ker f: co se zobrazí na $\bar{0}$ Ker f $= \{\bar{0}\} \Leftrightarrow$ INJEKTIVNÍ

$= \{\bar{v} \in V;\ f(\bar{v}) = \bar{0}\}$ Im f $= V \Leftrightarrow$ SURJEKTIVNÍ

Im f: obor hodnot, pro která $\bar{w} \in W$ existuje vzor

$= \{\bar{w} \in W;\ \exists \bar{v} \in V:\ f(\bar{v}) = \bar{w}\}$

$\dim(\text{Ker} f) + \dim(\text{Im} f) = \dim V$

báze Im f jsou nezávislé vektory z matice zobrazení

Matice zobrazení vzhledem k bázím V, W:

$$[\bar{w}]_W = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nm} \end{pmatrix} \times [\bar{v}]_V$$

sloupce jsou souřadnice $f(\bar{a}_i)$ v bázi W

$\bar{a}_i$ bázové vektory V

změna bází: $f: V \rightarrow W$, původní báze V, W,

nové báze V', W'

$F' = C_{(W',W)} \cdot F \cdot C_{(V,V')}$ $[f(\bar{v})]_W = F \times [\bar{v}]_V$

Lineární zobr. je dáno obrazy libovolné báze.

$f(\bar{x}_1) = \bar{v}_1$, $f(\bar{x}_2) = \bar{v}_2$, tak v bázi $A = [\bar{x}_1, \bar{x}_2]$

je maticí z. $F = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 \end{pmatrix}$, ve std. b. $F_E = F \times A^{-1}$

nebo: $\left(\begin{array}{c|c} -\bar{x}_1- & -\bar{v}_1- \\ -\bar{x}_2- & -\bar{v}_2- \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \bar{v}_1 \\ 0 & 1 & \bar{v}_2 \end{array}\right)$ v E

Eliminace s část. výběrem:

pro eliminaci použít násobky toho řádku, který má v daném sloupci číslo s NEJVĚTŠÍ abs. hodnotou

$$\begin{pmatrix} -1 & 7.5 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ -10 & -5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -10 & -5 & 8 \\ & \sim & \\ & & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -10 & -5 & 8 \\ 0 & -3 & 0.4 \\ 0 & 8 & 0.8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sim \\ 0 & 8 & \dots \\ 0 & -3 & \dots \end{pmatrix}$$

LU-rozklad:

eliminace s postupným zapisováním operací do matice L, U je výsledná horní ∇ matice

$A \sim U \Leftrightarrow E_m \times E_{m-1} \times \dots \times E_1 \times A = U \Rightarrow A = E_1^{-1} \times \dots E_m^{-1}$

$PA = LU$, P slouží pro výměny řádků = permutační m.

$A\bar{x} = \bar{b} \Rightarrow LU\bar{x} = \bar{b} \Rightarrow L \cdot \bar{y} = \bar{b} \wedge \bar{y} = U\bar{x}$

$\Rightarrow U\bar{x} = \bar{y}$

Diagonální dominance

v každém řádku je abs. hodnota prvku na diagonále větší než součet abs. hodnot ostatních prvků

Symetrická pozitivně definitní matice:

pro každý nenulový sloupcový vektor $\bar{x}$ platí

$\bar{x}^T \times A \times \bar{x} > 0 \Leftrightarrow$ hlavní rohové minory kladné

Zajištění konvergence: Gauss-Seidela:

vynásobit transponovanou: $A^T \times A \times \bar{x} = A^T \times \bar{b}$

Významné lin. transformace:

Souměrnost v $\mathbb{R}^2$:

x: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

x=y: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Souměrnost v $\mathbb{R}^3$:

xy: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ xz: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

yz: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

středová s.: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ scale: $\begin{pmatrix} *k & 0 \\ 0 & *k \end{pmatrix}$

rotace: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = R$

v $\mathbb{R}^3$: okolo x: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{R} \\ 0 & & \end{pmatrix}$

okolo y: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$

okolo z: $\begin{pmatrix} R & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

V homogen. souř.:

transkce: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vlastní čísla a vektory:

$A \times \bar{v} = \lambda \bar{v}$ - pro některé vektory platí, že obraz v transf. A leží ve stejné přímce jako vzor

$(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

charakter. polynom: $\det(A - \lambda I)$

první zjistím λ, pak ty vektory

L matice soustavy pro vektory vždy singulární!

- vl. č. je právě n pro matici n×n → včetně $\lambda \in \mathbb{C}$ a násobných vl. č.
- pokud má λ násobnost $k > 1$ a neexistuje k němu k nezávislých vektorů, je defektní
- vektory příslušné různým vl. č. jsou nezávislé
- singulární matice má $\lambda = 0$

$\lambda(A^n) = \lambda^n$

$\lambda(A + a \cdot I) = \lambda + a$

$\lambda(a \cdot A) = a\lambda$?

$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$

Diagonální tvar:

$P^{-1} \times A \times P = D \Rightarrow A = P \times D \times P^{-1}$

P je matice s vl. vektory na sloupcích

D je diag. matice s vlast. čísly

→ matice transformace A v bázi vl. vektorů

Podobné matice:

$\exists$ regulární matice P taková, že

$A = P \times B \times P^{-1} \Rightarrow$ A, B reprezent. stejné zobrazení v jiné bázi

$\Rightarrow$ mají stejná vl. čísla

$\nLeftarrow$

Vl. čísla symetrických matic:

- všechna $\in \mathbb{R}$
- vl. vektory pro různá λ jsou na sebe $\perp$
- nikdy není defektní

$Q^{-1} = Q^T$

Diagonalizovatelnost.

existuje podobná matice, která je diagonální

$\Leftrightarrow$ matice má n lin. nezávislých vl. vektorů

$\Rightarrow$ má n různých vlastních čísel

Ortogonální:

- její sloupce jsou jednotkové navzájem kolmé vektory

$|\det Q| = 1$, $Q^{-1} = Q^T$, zachovávají skalár. součin

$|A| = |A^T|$

$|A^{-1}| = |A|^{-1}$ $(= \delta)$

$|a A| = a^n \cdot A$

$|A^n| = |A|^n$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{adj}(A)$

$\delta = \partial^n |\operatorname{adj}(A)|$

$A = (\operatorname{adj}(A) \cdot \delta)^{-1}$