Důkaz vlastnosti determinantů

Ondřej Ondryáš

2. listopadu 2019

Předpokládejme, že:

$$\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$$

Uvažujme, že matice A a B jsou horní trojúhelníkové:

$$A = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ 0 & x_{2,2} & x_{2,3} \\ 0 & 0 & x_{3,3} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} \\ 0 & y_{2,2} & y_{2,3} \\ 0 & 0 & y_{3,3} \end{pmatrix}$$

Jejich determinanty pak jsou jednoduše:

$$\det A = x_{1,1} \cdot x_{2,2} \cdot x_{3,3}$$
$$\det B = y_{1,1} \cdot y_{2,2} \cdot y_{3,3}$$

Součin těchto matic označme C:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} x_{1,1} \cdot y_{1,1} & x_{1,1} \cdot y_{1,2} + x_{1,2} \cdot y_{2,2} & x_{1,1} \cdot y_{1,3} + x_{1,2} \cdot y_{2,3} + x_{1,3} \cdot y_{33} \\ 0 & x_{2,2} \cdot y_{2,2} & x_{2,2} \cdot y_{2,3} + x_{2,3} \cdot y_{3,3} \\ 0 & 0 & x_{3,3} \cdot y_{3,3} \end{pmatrix}$$

Matice C je tedy opět horní trojúhelníková. Pro její determinant tak platí:

$$\det C = x_{1,1} \cdot y_{1,1} \cdot x_{2,2} \cdot y_{2,2} \cdot x_{3,3} \cdot y_{3,3} = \det A \cdot \det B$$

Aby mělo tvrzení obecnou platnost, musíme dokázat, že každou čtvercovou matici můžeme převést na horní trojúhelníkovou matici při zachování stejného determinantu a že součinem dvou čtvercových horních trojúhelníkových matic bude opět horní trojúhelníková matice s prvky $a_{i,i} \cdot b_{i,i}$ na hlavní diagonále.

Determinant matice se nezmění, když k jednomu z jejích řádků přičteme k-násobek jiného řádku. Úpravami matice tak můžeme vytvořit horní trojúhelníkovou matici se stejným determinantem. (Pokud by neexistovaly vhodné úpravy, aby a a $ea - bd$ nebyly nenulové, determinant můžeme považovat za nulový.)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e - \frac{bd}{a} & f - \frac{cd}{a} \\ 0 & h - \frac{bg}{a} & i - \frac{cg}{a} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e - \frac{bd}{a} & f - \frac{cd}{a} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a}(ia - cg - \frac{(fa-cd)(ha-bg)}{ea-bd}) \end{pmatrix}$$

Součinem čtvercových matic $A = (a_{i,j})_{n,n}$, $B = (b_{i,j})_{n,n}$ je matice $C = (c_{i,j})_{n,n}$, kde

$$c_{i,j} = a_{i,1} \cdot b_{1,j} + a_{i,2} \cdot b_{2,j} + \cdots + a_{i,n} \cdot b_{n,j} = \sum_{r=1}^{n} a_{i,r} \cdot b_{r,j}$$

V předpokladu násobíme pouze horní trojúhelníkové matice, pro které platí, že

$$i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

Všechny prvky $c_{i,j}$, kde $i > j$, pak budou nulové, protože v každém z prvků sumy bude buď $i > r$, nebo $r > j$, a jedná se tak také o horní trojúhelníkovou matici.

Pro prvky na hlavní diagonále $c_{i,i}$ platí:

$$c_{i,i} = \sum_{r=1}^{n} a_{i,r} \cdot b_{r,i}$$

Jediný nenulový prvek této sumy bude $a_{i,i} \cdot b_{i,i}$, protože pro všechny ostatní je buď $i > r$, nebo $r > j$, jeden z prvků je tak nulový. Hlavní diagonálu této matice pak budou tvořit právě prvky $a_{i,i} \cdot b_{i,i}$, a determinant tak můžeme psát jako

$$\det C = (a_{1,1} \cdot b_{1,1}) \cdot (a_{2,2} \cdot b_{2,2}) \cdot (\cdots) \cdot (a_{n,n} \cdot b_{n,n})$$

Jakékoliv dvě čtvercové matice stejného typu A, B tak můžeme převést na horní trojúhelníkové matice se stejným determinantem A', B', přičemž

$$\begin{aligned} \det A \cdot B = \det A' \cdot B' &= (a'_{1,1} \cdot b'_{1,1}) \cdot (a'_{2,2} \cdot b'_{2,2}) \cdot (\cdots) \cdot (a'_{n,n} \cdot b'_{n,n}) \\ &= (a'_{1,1} \cdot a'_{2,2} \cdot \cdots \cdot a'_{n,n}) \cdot (b'_{1,1} \cdot b'_{2,2} \cdot \cdots \cdot b'_{n,n}) = \det A' \cdot \det B' = \det A \cdot \det B \ \blacksquare \end{aligned}$$