6 Ondřej Ondryáš (xondry02)

$f(x,y) = (xy+3)e^{x-4y}$

$A = [4,1]$ $\quad f(4,1) = (4+3)e^0 = 7 \Rightarrow$ tečný bod $A'[4;1;7]$

Tečná rovina α: $z - 7 = f'_x(4,1)(x-4) + f'_y(4,1)(y-1)$

$f'_x(x,y) = y \cdot e^{x-4y} + (xy+3)e^{x-4y} \cdot 1 = e^{x-4y} \cdot (xy+y+3) \Rightarrow f'_x(4,1) = e^0 \cdot (4+1+3) = 8$

$f'_y(x,y) = x \cdot e^{x-4y} + (xy+3)e^{x-4y} \cdot (-4) = e^{x-4y} \cdot (x - 4xy - 12) \Rightarrow f'_y(4,1) = e^0 \cdot (4 - 16 - 12) = -24$

α: $z - 7 = 8(x-4) - 24(y-1)$

α: $\underline{8x - 24y - z - 1 = 0}$

2 Všechny body, ve kterých je tečná rovina kolmá na osu $z \Rightarrow$ normálový vektor takové roviny musí být násobkem vektoru osy z: $[0;0;4] \Rightarrow$ rovnice takové roviny bude ve tvaru $0x + 0y + 4z + d = 0$

$\Rightarrow$ koeficienty před prom. x, y musí být nulové

$\Rightarrow$ z rovnice tečné roviny je koef. před $x = f'_x(x_0, y_0)$, koef. před $y = f'_y(x_0, y_0)$

$\Rightarrow e^{x-4y} \cdot (xy+y+3) = 0 \wedge e^{x-4y} \cdot (x - 4xy - 12) = 0$

$\Rightarrow$ součin je $=0$ když je jeden z činitelů $=0$, e^{x-4y} nikdy není $=0 \Rightarrow$ hledáme řešení soustavy $\begin{matrix} xy+y+3=0 \\ x-4xy-12=0 \end{matrix}$

$\Rightarrow x = \frac{12}{1-4y}$, $y\left(\frac{12}{1-4y} + 1\right) = -3 \Rightarrow \frac{12y}{1-4y} + y = -3 \Rightarrow 12y + y - 4y^2 = -3 + 12y \Rightarrow -4y^2 + y + 3 = 0$

$\Rightarrow y \in \{1; -\frac{3}{4}\} \Rightarrow$ řešením jsou body $\left[\frac{12}{1-4}; 1; \left(\frac{12}{-3} \cdot 1 + 3\right)e^{\frac{12}{-3} - 4 \cdot 1}\right]$ a $\left[\frac{12}{1+3}; -\frac{3}{4}; \left[\frac{12}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 3\right] \cdot e^{\frac{12}{4} + 3}\right]$

$\Rightarrow$ Tečná rovina je kolmá v bodech $\underline{[-4; 1; e^{-8}]}$ a $\underline{[3; -\frac{3}{4}; \frac{3}{4}e^6]}$