(6) Ondřej Ondryáš $y' = \frac{4x}{(x-2)\cdot y}$, $y(3) = -2$

Jde o obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu v explicitním tvaru, která je navíc se separovanými proměnnými.

$$y' = \frac{4x}{x-2} \cdot \frac{1}{y} \qquad x \neq -2,\ y \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{x-2} \cdot \frac{1}{y}$$

$$dy = \frac{4x}{x-2} \cdot \frac{1}{y}\, dx$$

$$y \cdot dy = \frac{4x}{x-2}\, dx$$

$$\int y\, dy = 4\int \frac{x}{x-2}\, dx$$

Řešení integrálů:

$$\int y\, dy = \frac{1}{2} y^2 + c_1 \qquad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{x}{x-2}\, dx = \int \frac{x-2+2}{x-2}\, dx = \int \frac{x-2}{x-2}\, dx + \int \frac{2}{x-2}\, dx = \int 1\, dx + 2\int \frac{1}{x-2}\, dx =$$

$$= x + 2\ln|x-2| + c_2 \qquad c_2 \in \mathbb{R},\ x \neq 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} y^2 = 4(x + 2\ln|x-2|) + c_3$$

$$y^2 = 8(x + 2\ln|x-2|) + c_{(3)}$$

(implicitní řešení)

$$y = \pm\sqrt{8(x+2\ln|x-2|) + c}$$

$$y = \pm 2\sqrt{2x + 4\ln|x-2| + c} \qquad c \in \mathbb{R},\ x \neq -2$$

Partikulární řešení pro $y(3) = -2$:

$$(-2)^2 = 8(3 + 2\ln|3-2|) + c$$

$$4 = 24 + \cancel{2\ln 1} + c$$

$$4 = 24 + c$$

$$c = -20$$

$$y^2 = 8(x + 2\ln|x-2|) - 20$$

$$y = \pm\sqrt{8x + 16\ln|x-2| - 20}$$

podle počáteční podmínky musí platit $-2 = \pm\sqrt{24 + \cancel{16\ln 1} - 20}$

$$-2 = \pm\sqrt{4}$$

je tedy zjevné, že musíme uvažovat pouze zápornou větev, hledaným partikulárním řešením tedy je:

$$y = -\sqrt{8x + 16\ln|x-2| - 20}$$