Lineární algebra
2019/2020

Domácí úloha

2. skupina

David Mihola | xmihol00
Ondřej Ondryáš | xondry02
David Chocholatý | xchoch08
František Nečas | xnecas27
Lukáš Foltyn | xfolty17

Příklad 1

Na množině reálných čísel řešte soustavu rovnic s parametrem a.

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 - a \\ x + ay + z &= 0 \\ x + y + az &= 0 \end{aligned}$$

Soustavu rovnic upravíme pomocí Gaussovy eliminace.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1-a \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \begin{array}{l} III \\ II - III \\ I - aIII \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a^2+a-2 & a-1 \end{array}\right) \begin{array}{l} I \\ II \\ -III - II \end{array}$$

Eliminovanou soustavu vyřešíme.

$$\begin{aligned} (a^2 + a - 2)z &= a - 1 \\ z &= \frac{a-1}{(a+2)(a-1)} = \frac{1}{a+2} \end{aligned} \qquad \text{pro } a \notin \{1, -2\}$$

$$\begin{aligned} (a-1)y + \frac{1-a}{a+2} &= 0 \\ y &= -\frac{1-a}{(a+2)(a-1)} = \frac{1}{a+2} \end{aligned} \qquad \text{pro } a \neq -2$$

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{a+2} + \frac{a}{a+2} &= 0 \\ x &= -\frac{a+1}{a+2} \end{aligned}$$

Dále vyřešíme případy, ve kterých výsledek nelze kvůli dělení nulou spočítat obecně pomocí eliminace, tedy $a = 1$ a $a = -2$.

Pro $a = 1$

$$
\begin{aligned}
(1^2 + 1 - 2)z &= 1 - 1 \\
0z &= 0 \\
z &= t && t \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0y + 0z &= 0 \\
y &= s && s \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 0 \\
x &= -t - s
\end{aligned}
$$

Pro $a = -2$

$$
\begin{aligned}
(4 - 2 - 2)z &= -3 \\
0z &= -3 \\
0 &\neq -3
\end{aligned}
$$

Pro $a = -2$ neexistuje žádné řešení.

Výsledky můžeme shrnout následovně:

a	$\{[x, y, z]\}$
-2	$\emptyset$
1	$\{[-t - s, s, t] \vert t, s \in \mathbb{R}\}$
$\mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$	$\{[\frac{a+1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}]\}$

Příklad 2

Určete jenom na základě vlastností determinantů:

$$\begin{vmatrix} z & u & v \\ v+u & v+z & z+u \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Můžeme využívat pouze operací vycházejících z vlastností determinantu, jako jsou operace sčítání a odčítání řádků či sloupců, prohození řádků se změnou znaménka determinantu, násobení konstantou apod.

1. Nejprve odečteme druhý sloupec od prvního i třetího sloupce,
2. první řádek přičteme k druhému řádku,
3. odečteme $(u + v + z)$-násobek třetího řádku od druhého. Tuto operaci můžeme klidně provést, neboť víme, že ať bude součet $(u+v+z)$ jakýkoliv, nedojde ke změně výsledného determinantu, protože:
   (a) $(u + v + z) = 0$ ... v determinantu se vyskytuje nulový řádek – determinant je roven 0,
   (b) $(u + v + z) \neq 0$ ... provedeme operaci a opět vznikne stejný nulový řádek – determinant je roven 0.

$$\begin{array}{ccc} + & -1 & \\ & -1 & + \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} z & u & v \\ v+u & v+z & z+u \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z-u & u & v-u \\ u-z & v+z & u-v \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow + \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} z-u & u & v-u \\ 0 & u+v+z & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow + \\ -(u+v+z) \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} z-u & u & v-u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Druhý řádek determinantu je nulový. Můžeme s jistotou tvrdit, že ať zvolíme libovolná x, y, z, výsledek determinantu bude vždy roven nule.

Příklad 3

Nechť $M = [a, b] \in \mathbb{R}^2; 3 \mid (a + 2b)$. Zjistěte, jestli M je podprostor $V_2(\mathbb{R})$. Svou odpověď zdůvodněte.

---

1. Podprostor M nesmí být prázdný. Ověříme, že $M \neq \emptyset$. V M se tedy musí nacházet minimálně $\overline{0}$. V tom případě by platilo následující:

   $$[a, b] = [0, 0] \Rightarrow 3 \mid (0 + 2 \cdot 0) \equiv 3 \mid 0$$

   Platí. $\overline{0} \in M$. M není prázdný.

2. Náleží-li M dva vektory $\overline{u}$ a $\overline{v}$, musí M náležet i jejich součet.

   $$\overline{u}, \overline{v} \in M \Rightarrow \overline{u} + \overline{v} \in M$$

   $\overline{u} = [u_1; u_2]$ a $\overline{v} = [v_1; v_2]$ a jistě víme, že:

   $$3 \mid (u_1 + 2u_2) \text{ a } 3 \mid (v_1 + 2v_2)$$

   Součet vektorů je roven:

   $$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1; u_2 + v_2]$$

   Aby $\vec{u} + \vec{v}$ bylo z M, muselo by platit:

   $$3 \mid (u_1 + v_1) + 2(u_2 + v_2)$$

   A protože platí:

   $$3 \mid (u_1 + 2u_2) + (v_1 + 2v_2)$$

   Což můžeme upravit na:

   $$3 \mid (u_1 + v_1) + 2(u_2 + v_2)$$

   Víme tedy, že:

   $$\overline{u} + \overline{v} \in M.$$

   Platí.

3. Jestliže $\overline{u} \in M$ a zároveň existuje $\alpha \in \mathbb{R}$, potom platí: $\alpha \cdot \overline{u} \in M$:

   $\alpha \cdot \overline{u} = [\alpha \cdot u_1; \alpha \cdot u_2]$
   $3 \mid \alpha \cdot u_1 + \alpha \cdot 2 \cdot u_2$
   $3 \mid \alpha \cdot (u_1 + 2u_2)$
   Zvolíme-li ale například $\alpha = 0,5$ a $\vec{u} = [1; 1]$, dostaneme:
   $\alpha \cdot \overline{u} = [0,5; 0,5]$ ale $3 \nmid (0,5 + 2 \cdot 0,5)$

   Neplatí. $\alpha \cdot \overline{u} \notin M \Rightarrow$ Nejedná se o podprostor $V_2(\mathbb{R})$.

Příklad 4

Vektorový podprostor $L \subseteq V_4(\mathbb{R})$ je generován vektory

$$\overline{a}_1 = [1, -1, 2, -2], \overline{a}_2 = [1, 1, -2, 3], \overline{a}_3 = [-1, -1, 7, -8].$$

Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi L.

---

1. Začneme hledat ortogonální báze $\overline{b}_1$, $\overline{b}_2$ a $\overline{b}_3$ vektorů $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ a $\overline{a}_3$:

$$\begin{aligned}
\overline{b}_1 &= \overline{a}_1 = [1; -1; 2; -2] \\
\overline{b}_2 &= \overline{a}_2 + \beta_{21} \cdot \overline{a}_1 \\
\overline{b}_3 &= \overline{a}_3 + \beta_{32} \cdot \overline{a}_2 + \beta_{31} \cdot \overline{a}_1
\end{aligned}$$

2. Vypočteme a dosadíme β_{21}, β_{32} a β_{31} podle vzorečku:

$$\beta_{xy} = -\frac{\overline{a}_x \cdot \overline{b}_y}{\overline{b}_y \cdot \overline{b}_y}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{21} &= -\frac{\overline{a}_2 \cdot \overline{b}_1}{\overline{b}_1 \cdot \overline{b}_1} = -\frac{[1, 1, -2, 3] \cdot [1; -1; 2; -2]}{[1; -1; 2; -2] \cdot [1; -1; 2; -2]} = \frac{10}{10} = 1 \\
\overline{b}_2 &= \overline{a}_2 + \beta_{21} \cdot \overline{a}_1 = [1, 1, -2, 3] + 1 \cdot [1; -1; 2; -2] = [2; 0; 0; 1] \\
\beta_{32} &= -\frac{\overline{a}_3 \cdot \overline{b}_2}{\overline{b}_2 \cdot \overline{b}_2} = -\frac{[-1, -1, 7, -8] \cdot [2; 0; 0; 1]}{[2; 0; 0; 1] \cdot [2; 0; 0; 1]} = -\frac{30}{10} = -3 \\
\beta_{31} &= -\frac{\overline{a}_3 \cdot \overline{b}_1}{\overline{b}_1 \cdot \overline{b}_1} = -\frac{[-1, -1, 7, -8] \cdot [1; -1; 2; -2]}{[1; -1; 2; -2] \cdot [1; -1; 2; -2]} = \frac{10}{5} = 2 \\
\overline{b}_3 &= \overline{a}_3 + \beta_{32} \cdot \overline{a}_2 + \beta_{31} \cdot \overline{a}_1 = [-1, -1, 7, -8] - 3 \cdot [1, 1, -2, 3] + 2 \cdot [1, -1, 2, -2] = [0; 2; 1; 0]
\end{aligned}$$

3. Ověříme správnost vypočítaných výsledků pomocí vlastností ortogonálních bází – jsou na sebe navzájem kolmé:

$$\begin{aligned}
\overline{b}_2 \perp \overline{b}_1 \Rightarrow \overline{b}_2 \cdot \overline{b}_1 = 0 \Leftrightarrow [2; 0; 0; 1] \cdot [1; -1; 2; -2] = 0 \text{ ... platí} \\
\overline{b}_3 \perp \overline{b}_2 \Rightarrow \overline{b}_3 \cdot \overline{b}_2 = 0 \Leftrightarrow [0; 2; 1; 0] \cdot [2; 0; 0; 1] = 0 \text{ ... platí} \\
\overline{b}_3 \perp \overline{b}_1 \Rightarrow \overline{b}_3 \cdot \overline{b}_1 = 0 \Leftrightarrow [0; 2; 1; 0] \cdot [1; -1; 2; -2] = 0 \text{ ... platí}
\end{aligned}$$

4. Dopočítáme ortonormální báze podle vzorečku:

$$\overline{h}_x = \frac{\overline{b}_x}{||\overline{b}_x||}$$

$$\overline{h}_1 = \frac{\overline{b}_1}{||\overline{b}_1||} = \frac{[1;-1;2;-2]}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{[1;-1;2;-2]}{\sqrt{10}} = \left[\frac{\sqrt{10}}{10};-\frac{\sqrt{10}}{10};\frac{\sqrt{10}}{5};-\frac{\sqrt{10}}{5}\right]$$
$$\overline{h}_2 = \frac{\overline{b}_2}{||\overline{b}_2||} = \frac{[2;0;0;1]}{\sqrt{2^2+0^2+0^2+1^2}} = \frac{[1;-1;2;-2]}{\sqrt{5}} = \left[\frac{2\sqrt{5}}{5};0;0;\frac{\sqrt{5}}{5}\right]$$
$$\overline{h}_3 = \frac{\overline{b}_3}{||\overline{b}_3||} = \frac{[0;2;1;0]}{\sqrt{0^2+2^2+1^2+0^2}} = \frac{[1;-1;2;-2]}{\sqrt{5}} = \left[0;\frac{2\sqrt{5}}{5};\frac{\sqrt{5}}{5};0\right]$$

5. Opět můžeme ověřit správnost vypočítaných výsledků pomocí vlastností ortonormálních bází – jsou na sebe navzájem kolmé:

$$\overline{h}_2 \perp \overline{h}_1 \Rightarrow \overline{h}_2 \cdot \overline{h}_1 = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{2\sqrt{5}}{5};0;0;\frac{\sqrt{5}}{5}\right] \cdot \left[\frac{\sqrt{10}}{10};-\frac{\sqrt{10}}{10};\frac{\sqrt{10}}{5};-\frac{\sqrt{10}}{5}\right] = 0 \text{ ... platí}$$
$$\overline{h}_3 \perp \overline{h}_2 \Rightarrow \overline{h}_3 \cdot \overline{h}_2 = 0 \Leftrightarrow \left[0;\frac{2\sqrt{5}}{5};\frac{\sqrt{5}}{5};0\right] \cdot \left[\frac{2\sqrt{5}}{5};0;0;\frac{\sqrt{5}}{5}\right] = 0 \text{ ... platí}$$
$$\overline{h}_3 \perp \overline{h}_1 \Rightarrow \overline{h}_3 \cdot \overline{h}_1 = 0 \Leftrightarrow \left[0;\frac{2\sqrt{5}}{5};\frac{\sqrt{5}}{5};0\right] \cdot \left[\frac{\sqrt{10}}{10};-\frac{\sqrt{10}}{10};\frac{\sqrt{10}}{5};-\frac{\sqrt{10}}{5}\right] = 0 \text{ ... platí}$$

Nalezli jsme ortonormální báze podprostoru L.

Příklad 5

Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} x - 3y + 100z &= 123 \\ 200x - 3y + \quad 2z &= 765 \\ x - 500y + \quad 2z &= 987 \end{aligned}$$

Řešení soustavy najděte s přesností $\epsilon = 0.01$ Gauss-Seidelovou metodou, vyjděte z bodu $(3.5; -2; 1)$. Je-li to potřeba, soustavu nejprve upravte tak, aby byla zaručena konvergence.

Konvergenci zaručíme výměnou řádků matice tak, aby byla ostře řádkově dominantní:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 100 \\ 200 & -3 & 2 \\ 1 & -500 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123 \\ 765 \\ 987 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 200 & -3 & 2 \\ 1 & -500 & 2 \\ 1 & -3 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 765 \\ 987 \\ 123 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{765 + 3y_k - 2z_k}{200} \\ y_{k+1} &= \frac{987 - 1x_{k+1} - 2z_k}{-500} \\ z_{k+1} &= \frac{123 - 1x_{k+1} + 3y_{k+1}}{100} \end{aligned}$$

$$x_0 = 3.5, y_0 = -2, z_0 = 1$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{765 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1}{200} = 3{,}785 & \Delta x &= 0{,}285 \\ y_1 &= \frac{987 - 1 \cdot 3{,}785 - 2 \cdot 1}{-500} = -1{,}96243 & \Delta y &= 0{,}03757 \\ z_1 &= \frac{123 - 1 \cdot 3{,}785 - 3 \cdot 1{,}96243}{100} = 1{,}1332771 & \Delta z &= 0{,}1332771 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{765 - 3 \cdot 1{,}96243 - 2 \cdot 1{,}1332771}{200} = 3{,}784230779 \ (\approx 3{,}7842) & \Delta x &\approx 0{,}00077 \\ y_2 &= \frac{987 - 1 \cdot 3{,}784230779 - 2 \cdot 1{,}1332771}{-500} = -1{,}961898430042 \ (\approx -1{,}9619) & \Delta y &\approx 0{,}00053 \\ z_2 &= \frac{123 - 1 \cdot 3{,}784230779 - 3 \cdot 1{,}961898430042}{100} = 1{,}13330073930874 \ (\approx 1{,}1333) & \Delta z &\approx 0{,}00002 \end{aligned}$$

Řešení $[x_2, y_2, z_2]$ již splňuje zadanou podmínku $\epsilon = 0, 01$.

```
static Vector GaussSeidel(Matrix system, Vector values, decimal
   accuracy = 0.01m, Vector startingValues = null,
    int maxCycles = 128, char startChar = 'x')
{
    int a = values.Rows;
    if (a != system.Rows) return null;

    // TODO: convergence
    int i = 0;

    Vector temp = startingValues ?? new Vector(system.Columns);
    if (temp.Rows != system.Columns) return null;

    while (i < maxCycles)
    {
        Vector prev = new Vector(temp);
        bool accurateEnough = true;

        for (int v = 0; v < temp.Rows; v++)
        {
            temp[v] = values[v];
            var line = "";

            line += $"{(char) (startChar + v)}_{{{i + 1}}} &=
               \\frac{{{temp[v]}";

            for (int c = 0; c < system.Columns; c++)
            {
                if (c == v) continue;
                var val = system[v, c] * temp[c];
                temp[v] -= val;

                line += $"{(val > 0 ? "-" :
                   "+")}{Math.Abs(system[v,
                   c])}\\cdot{Math.Abs(temp[c])}";
            }

            temp[v] /= system[v, v];

            line +=
                $"}}{{{system[v, v]}}} = {temp[v]}
                   \\tag*{{$\\Delta {(char) (startChar + v)} =
                   {Math.Abs(prev[v] - temp[v])}$}}\\\\\n";

            if(v == temp.Rows - 1) line += "\\\\\n";
            Console.Write(line.Replace(".", "{,}"));

            if (Math.Abs(prev[v] - temp[v]) > accuracy)
            {
                accurateEnough = false;
```

```
            }
        }

        if (accurateEnough) break;
        i++;
    }

    if (i == maxCycles) return null;
    return temp;
}
```