VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

IEL – protokol k projektu

Ondřej Ondryáš
xondry02

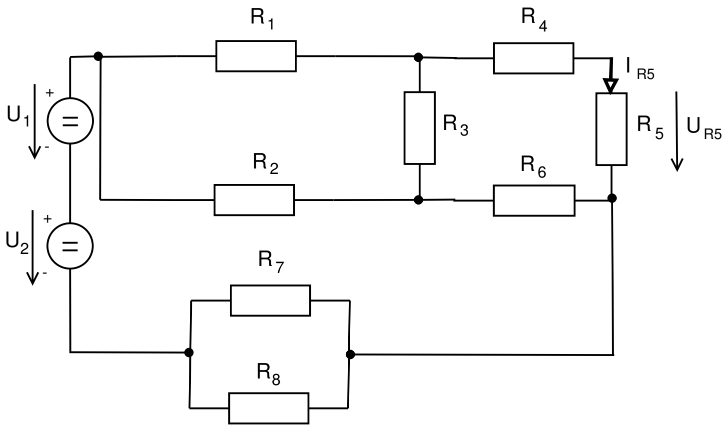
15. prosince 2019

Obsah

Příklad 1

Stanovte napětí U_{R5} a proud I_{R5}. Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
C	100	80	450	810	190	220	220	720	260	180



Metoda zjednodušování spočívá v nahrazování odporových sítí uvnitř obvodu *ekvivalentními odpory*, které se z hlediska zbytku obvodu chovají stejně – mají stejný odpor. Postupným zjednodušováním se tak dostaneme do stavu, kdy jsou všechny odpory v obvodu reprezentovány jedním ekvivalentním odporem R_{ekv}. Pomocí něj vypočítáme celkový proud v obvodu, na základě kterého pak zpětně dopočítáváme napětí a proudy na jednotlivých prvcích.

V zadaném obvodu můžeme ihned zjednodušit rezistory R_7 a R_8 na ekvivalentní odpor R_{78}, jehož hodnotu vypočítáme pomocí vztahu o odporu v paralelním zapojení:

$$R_{78} = \frac{R_7 R_8}{R_7 + R_8} \tag{1}$$

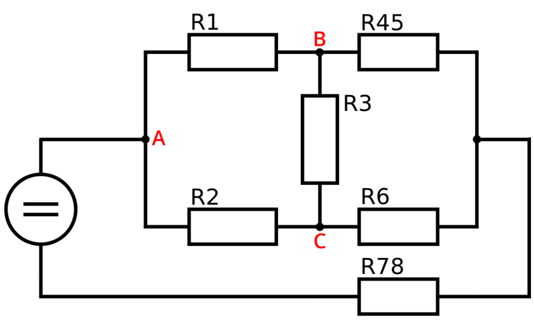
Podobně můžeme ihned zjednodušit také rezistory R_4 a R_5, které jsou zapojené v sérii, proto:

$$R_{45} = R_4 + R_5$$

Zdroje napětí U_1 a U_2 jsou zapojeny v sérii přímo za sebou, proto je můžeme zjednodušit na jeden zdroj o napětí

$$U_{12} = U_1 + U_2$$

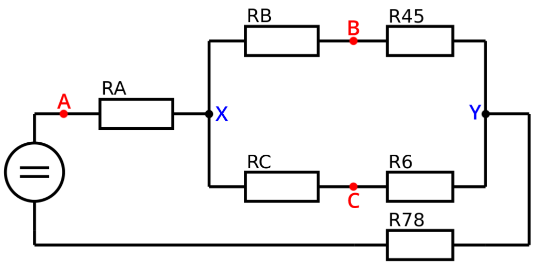
Výsledný obvod můžeme znázornit:



Obrázek 1: Obvod se zjednodušenými $R_4, R_5, R_7, R_8, U_1, U_2$.

Ve vzniklém obvodu tvoří soustava rezistorů R_1, R_2 a R_3 trojúhelník, který pro zjednodušení výpočtů převedeme na hvězdu (obdobně by se dalo počítat také s rezistory R_3, R_{45} a R_6). Hvězdu budou tvořit tři rezistory R_A, R_B, R_C, jejichž hodnoty budou nastaveny tak, aby odpor mezi uzly A, B a C, ve kterých je hvězda připojena do obvodu, odpovídal odporu mezi těmito uzly v původním obvodu. Obvod s hvězdou znázorňuje obr. 2. Pro vzniklé rezistory platí vztahy:

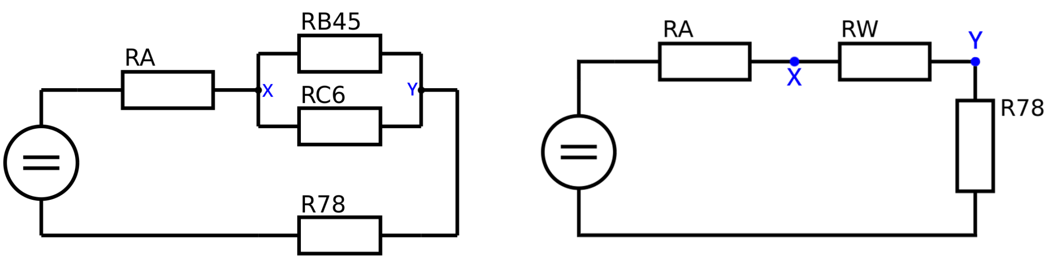
$$R_A = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3},\ R_B = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3},\ R_C = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{2}$$



Obrázek 2: Obvod s trojúhelníkem rezistorů převedeným na hvězdu. Odpor mezi uzly A, B, C vyznačenými červenou barvou odpovídá odporu mezi těmito uzly ve schématu na obrázku 1.

Obdobnými kroky zjednodušíme část obvodu mezi uzly X a Y. Rezistory zapojené v sérii R_B a R_{45} můžeme nahradit rezistorem R_{B45} s odporem $R_{B45} = R_B + R_{45}$, podobně pak zjednodušíme R_C a R_6, jak ukazuje levá část obrázku 3. Mezi uzly X a Y jsou nyní dva rezistory zapojené paralelně, které můžeme zjednodušit na odpor R_W pomocí vztahu ekvivalentního s (1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_W} &= \frac{1}{R_{B45}} + \frac{1}{R_{C6}} = \frac{1}{R_B + R_{45}} + \frac{1}{R_C + R_6} \\ R_W &= \frac{(R_B + R_{45})(R_C + R_6)}{R_B + R_{45} + R_C + R_6} = \frac{(R_B + R_4 + R_5)(R_C + R_6)}{R_B + R_C + R_4 + R_5 + R_6} \end{aligned} \tag{3}$$



Obrázek 3: Další kroky zjednodušování.

Nyní v obvodu zůstaly pouze tři odpory v sérii, celkový ekvivalentní odpor R_{ekv} je tak jejich součtem:

$$R_{ekv} = R_A + R_W + R_{78} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} + \frac{(R_B + R_4 + R_5)(R_C + R_6)}{R_B + R_C + R_4 + R_5 + R_6} + \frac{R_7 R_8}{R_7 + R_8}$$

Aby nebyl výsledný výraz příliš komplikovaný, pomocné odpory R_B, R_C a R_W si nyní podle vztahů

(2) a (3) spočítáme:

$$R_B = \frac{450 \cdot 190}{450 + 810 + 190} = \frac{1710}{29}\ \Omega \approx 58{,}9655\,\Omega$$
$$R_C = \frac{810 \cdot 190}{450 + 810 + 190} = \frac{3078}{29}\ \Omega \approx 106{,}1379\,\Omega$$
$$R_W = \frac{(\frac{1710}{29} + 220 + 220)(\frac{3078}{29} + 720)}{\frac{1710}{29} + \frac{3078}{29} + 220 + 220 + 720} = \frac{86\,668\,065}{278\,603}\ \Omega \approx 311{,}080\,87\,\Omega$$

Dosadíme do zjištěného vztahu:

$$R_{ekv} = \frac{450 \cdot 810}{450 + 810 + 190} + \frac{86\,668\,065}{278\,603} + \frac{260 \cdot 180}{260 + 180}$$

$$\mathbf{R_{ekv}} \approx 668{,}8238\,\Omega$$

S pomocí zjištěného ekvivalentního odporu celé odporové sítě R_{ekv} a ekvivalentního napětí v obvodu U_{12} můžeme použitím Ohmova zákona spočítat celkový proud v obvodu:

$$I = \frac{U_{12}}{R_{ekv}} = \frac{180}{668{,}8238} \approx 0{,}269\,13\,\mathrm{A}$$

Nyní opět pomocí Ohmova zákona a základních znalostí o chování proudu a napětí při větvení obvodu zpětně spočítáme napětí a proud na zjednodušených ekvivalentních odporech a poté uvnitř částí obvodu, které byly zjednodušeny. Hledanými hodnotami jsou napětí a proud na rezistoru R_5. R_5 je v počátku součástí náhradního odporu R_W. Napětí na tomto odporu (mezi uzly X a Y) je stejné jako napětí na R_{B45}, protože R_W odpovídá dvěma paralelně zapojeným rezistorům, v tomto případě se napětí nedělí. Podle tohoto napětí spočítáme proud procházející náhradním odporem R_{B45}, a tedy i hledaný R_5, protože R_{B45} odpovídá odporům zapojeným v sérii, kdy se proud nedělí. Podle proudu I_{R_5} pak v závěru spočítáme napětí U_{R_5}.

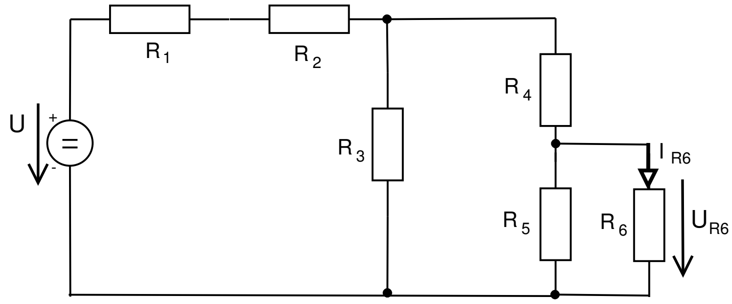
$$U_{R_{B45}} = U_{R_W} = IR_W = \frac{U_{12}}{R_{ekv}} \cdot R_W$$
$$I_{R_5} = I_{R_{B45}} = \frac{U_{R_{B45}}}{R_{B45}} = \frac{U_{R_{B45}}}{R_B + R_{45}} = \frac{U_{12}R_W}{R_{ekv}(R_B + R_4 + R_5)} = \frac{180 \cdot 311{,}080\,87}{668{,}8238 \cdot (58{,}9655 + 220 + 220)}$$
$$\mathbf{I_{R_5}} \approx 0{,}167\,789\,\mathrm{A}$$

$$U_{R_5} = I_{R_5} R_5 \approx 0{,}167\,789 \cdot 220$$
$$\mathbf{U_{R_5}} \approx 36{,}913\,58\,\mathrm{V}$$

Příklad 2

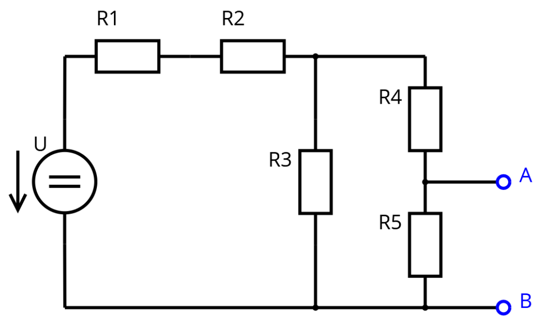
Stanovte napětí U_{R6} a proud I_{R6}. Použijte metodu Théveninovy věty.

sk.	U [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]
E	250	150	335	625	245	600	150



Principem Théveninova teorému je, že složitý obvod nahradíme obvodem náhradního skutečného zdroje napětí (tedy ideálním zdrojem napětí a odporem představujícím jeho vnitřní odpor), ke kterému je připojena zátěž. Poté je triviální spočítat napětí na této zátěži a proud jí procházející.

V tomto případě je zátěží rezistor R_6. Cílem postupu je získat náhradní napětí U_x a náhradní odpor R_x podle obrázku 4. Překreslíme obvod bez zátěže:



Obrázek 4: Obvod bez zátěže, která je nahrazena svorkami A, B.

Náhradní odpor R_x vypočítáme tak, že jediný napěťový zdroj původního obvodu nahradíme zkratem a spočítáme odpor mezi svorkami A a B. Na obrázku 5 je zakreslen stav po nahrazení zdroje, na obrázku 6 je pak vzniklá odporová síť překreslena, aby bylo zřejmé, jakým způsobem je možné její celkový odpor vypočítat.

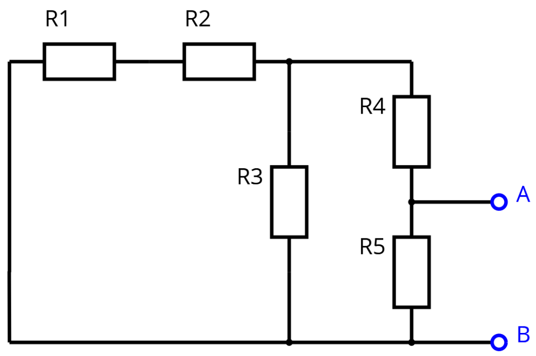
Odpor mezi svorkami vypočítáme postupným zjednodušováním sítě:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_{1234}} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_4 + \dfrac{R_{12}R_3}{R_{12}+R_3}} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_4 + \dfrac{(R_1+R_2)R_3}{R_1+R_2+R_3}}$$

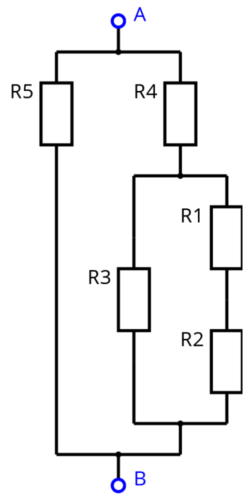
$$R_x = \frac{1}{\dfrac{1}{600} + \dfrac{1}{245 + \frac{(150+335)\cdot 625}{150+335+625}}}$$

$$\mathbf{R_x} \approx 278{,}0211\,\Omega$$

Napětí náhradního zdroje U_x spočítáme jako napětí mezi svorkami A, B v obvodu bez zátěže, jde o tzv. *napětí naprázdno*. Z obrázku 4 je zřejmé, že napětí mezi svorkami se bude rovnat napětí



Obrázek 5: Obvod po nahrazení napěťového zdroje zkratem.



Obrázek 6: Překreslený obvod z obrázku 5.

na rezistoru R_5. (Z logiky věci, při pohledu na zadání je vidět, že R_5 a R_6 jsou dva paralelně spojené rezistory, na kterých se dělí proud, ale napětí je stejné.) Spočítáme U_{R_5} ($= U_x$) opět metodou zjednodušování. Popisované veličiny jsou naznačeny v obrázku 7.

$$I_a = \frac{U}{R_{ekv}}$$

$$R_{ekv} = R_1 + R_2 + \frac{R_3(R_4 + R_5)}{R_3 + R_4 + R_5}$$

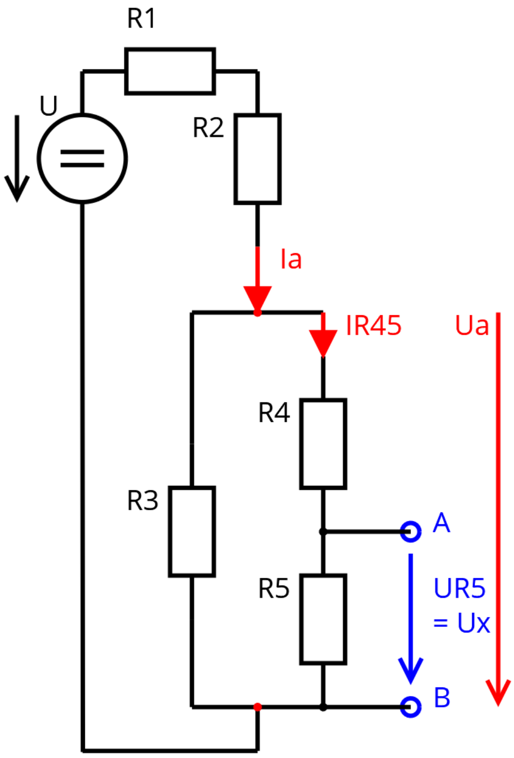
$$U_a = U - I_a(R_1 + R_2)$$

$$U_{R_5} = I_{R_{45}} R_5 = \frac{U_a}{R_{45}} R_5 = U_a \frac{R_5}{R_4 + R_5} = \left[U - \frac{U}{R_{ekv}}(R_1 + R_2)\right] \frac{R_5}{R_4 + R_5}$$

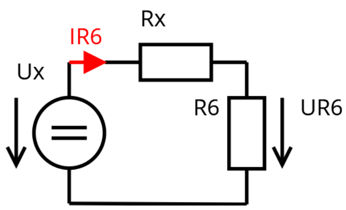
$$U_{R_5} = U \frac{R_3 R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4 + R_5) + R_3(R_4 + R_5)}$$

$$\mathbf{U_x} = \mathbf{U_{R_5}} \approx 75{,}5394\,\mathrm{V}$$

Zjistili jsme, že náhradní skutečný zdroj bude mít napětí $U_x = 75{,}5394\,\mathrm{V}$ a vnitřní odpor $R_x = 278{,}0211\,\Omega$. Pro původní obvod tak můžeme vytvořit ekvivalentní obvod, jaký je uveden na obrázku 8. Snadno pak spočítáme napětí U_{R_6} na zátěži a proud I_{R_6} jí procházející.



Obrázek 7: Hledané proudy a napětí pro zjištění napětí naprázdno.



Obrázek 8: Ekvivalentní obvod.

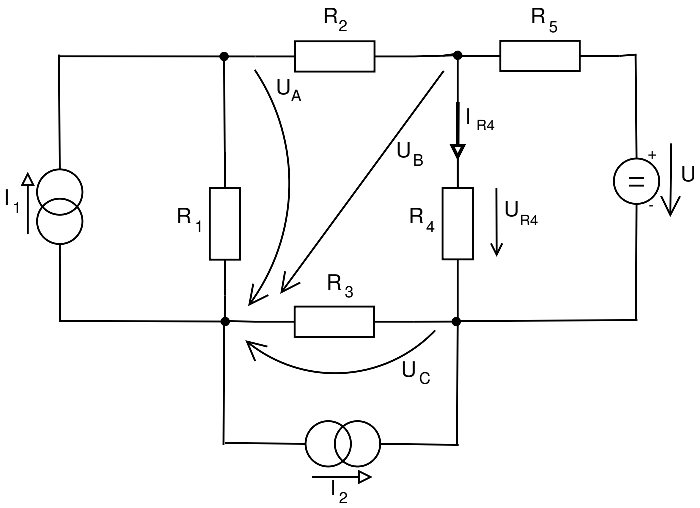
$$I_{R_6} = \frac{U_x}{R_x + R_6}$$
$$I_{R_6} = \frac{75{,}5394}{278{,}0211 + 150}$$
$$\mathbf{I_{R_6}} \approx 0{,}176\,485\,\mathrm{A} = 176{,}485\,\mathrm{mA}$$

$$U_{R_6} = I_{R_6} R_6$$
$$U_{R_6} = \frac{75{,}5394 \cdot 150}{278{,}0211 + 150}$$
$$\mathbf{U_{R_6}} \approx 26{,}4728\,\mathrm{V}$$

Příklad 3

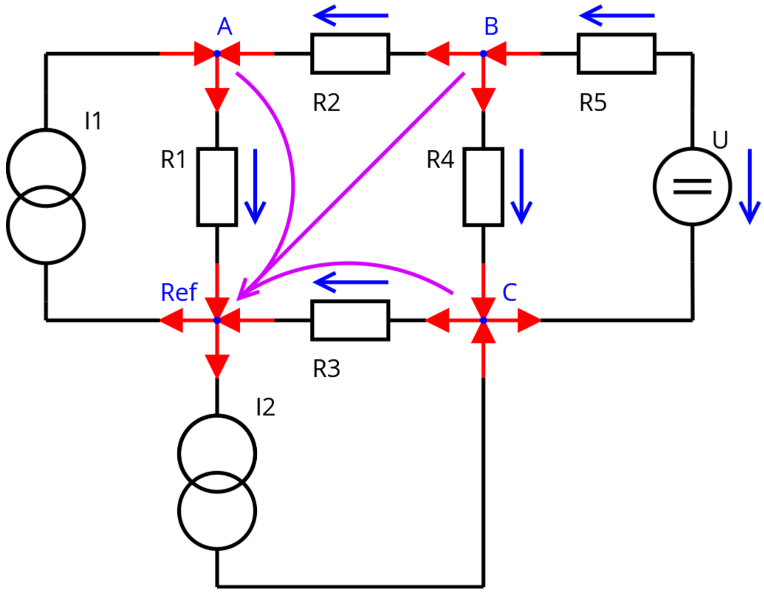
Stanovte napětí U_{R4} a proud I_{R4}. Použijte metodu uzlových napětí (U_A, U_B, U_C).

sk.	U [V]	I_1 [A]	I_2 [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
H	130	0.95	0.50	47	39	58	28	25



Metoda uzlových napětí využívá prvního Kirchhoffova zákona, který říká, že *součet proudů vstupujících do uzlu se rovná součtu proudů z uzlu vystupujících*. V obvodu se libovolnému uzlu přiřadí nulový elektrický potenciál, poté se označí napětí mezi tímto zvoleným *referenčním uzlem* a všemi zbývajícími uzly, pro všechny uzly kromě referenčního se sestaví odpovídající rovnice podle prvního Kirchhoffova zákona, do které se dosadí proudy vyjádřené pomocí neznámých napětí mezi uzly a referenčním uzlem.

V zadaném obvodu máme označena uzlová napětí U_A, U_B, U_C, referenčním uzlem tak je uzel *Ref*, jak je naznačeno na obrázku 9. Na obrázku jsou také zaznačeny všechny proudy a napětí. Jejich orientace jsou zvoleny „pocitově“, v případě, že by neodpovídaly skutečnému směru proudu v daném bodě, při výpočtech by pouze vyšly záporně. Důležité je používat směry všude stejně.



Obrázek 9: Obvod s pojmenovanými uzly a zaznačenými směry proudů a napětí.

Pro jednotlivé uzly můžeme nyní sestavit rovnice[1]:

$$\begin{aligned} A &: I_1 + I_{R_2} - I_{R_1} = 0 \\ B &: I_{R_5} - I_{R_2} - I_{R_4} = 0 \\ C &: I_{R_4} - I_2 - I_{R_3} - I_{R_5} = 0 \end{aligned}$$

Soustavu můžeme zapsat pomocí rozšířené matice, kde proměnnými jsou $I_{R_{1..5}}$, na pravou stranu přesuneme známé konstanty I_1 a I_2:

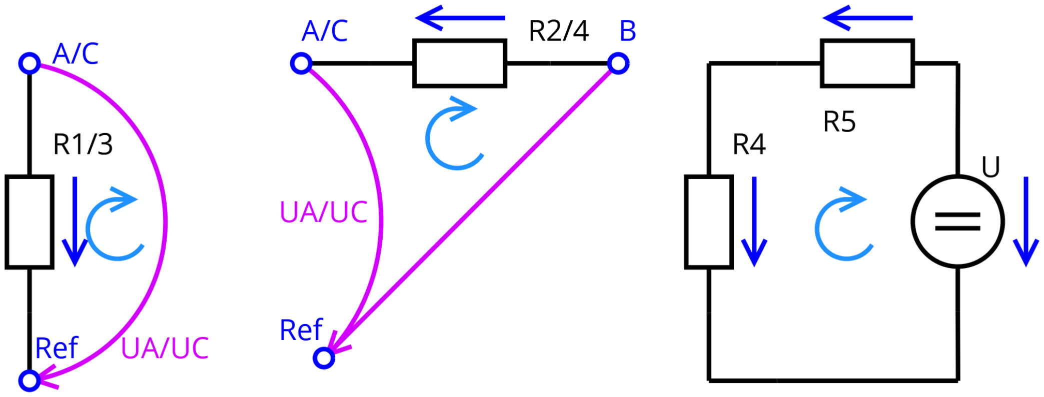
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -I_1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -I_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & I_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & I_2 \end{array}\right) \tag{4}$$

Vznikla soustava tří rovnic o pěti neznámých. Nyní musíme jednotlivé proudy vyjádřit pomocí uzlových napětí U_A, U_B a U_C, měli bychom tak dostat soustavu tří rovnic se třemi neznámými, kterou můžeme vyřešit.

Proudy vyjádříme pomocí uzlových napětí, která přísluší daným odporům. Obvod si rozdělíme na pomyslné *náhradní obvody* pro jednotlivé proudy, jak je naznačeno na obrázku 10. V těchto náhradních obvodech pak s využitím Ohmova zákona a druhého Kirchhoffova zákona vyjádříme jednotlivé proudy:

$$\begin{gathered} -U_{R_1} + U_A = 0 \\ -I_{R_1} R_1 = -U_A \\ \mathbf{I_{R_1}} = \frac{\mathbf{U_A}}{\mathbf{R_1}} \\[2ex] -U_{R_2} + U_B - U_A = 0 \\ -I_{R_2} R_2 = -U_B + U_A \\ \mathbf{I_{R_2}} = \frac{\mathbf{U_B} - \mathbf{U_A}}{\mathbf{R_2}} \\[2ex] -U_{R_3} + U_C = 0 \\ -I_{R_3} R_3 = -U_C \\ \mathbf{I_{R_3}} = \frac{\mathbf{U_C}}{\mathbf{R_3}} \\[2ex] -U_{R_4} - U_C + U_B = 0 \\ -I_{R_4} R_4 = -U_B + U_C \\ \mathbf{I_{R_4}} = \frac{\mathbf{U_B} - \mathbf{U_C}}{\mathbf{R_4}} \\[2ex] U - I_{R_4} R_4 - I_{R_5} R_5 = 0 \\ U - (U_B - U_C) - I_{R_5} R_5 = 0 \\ \mathbf{I_{R_5}} = \frac{\mathbf{U} - \mathbf{U_B} + \mathbf{U_C}}{\mathbf{R_5}} \end{gathered} \tag{5}$$

[1] Není nutné sestavovat rovnici pro referenční uzel. Kdybychom to udělali, při eliminaci matice této soustavy by vznikl nulový řádek, tato rovnice tak pro řešení soustavy nemá žádný vliv.



Obrázek 10: Náhradní obvody pro jednotlivé proudy se smyčkami odpovídajícími vyjádření v (5). Obvody pro R_1 a R_3, resp. pro R_2 a R_4 jsou prakticky totožné, proto jsou schematicky zaznačeny najednou.

Vyjádřené proudy nyní dosadíme do rovnic vytvořených podle matice (4) a výrazy upravíme do podoby rovnice pro neznámé U_A, U_B, U_C:

$$\frac{U_A}{R_1} - \frac{U_B - U_A}{R_2} = I_1$$
$$U_A R_2 - U_B R_1 + U_A R_1 = I_1 R_1 R_2$$
$$(R_1 + R_2)U_A - R_1 U_B = I_1 R_1 R_2$$

$$\frac{U_B - U_A}{R_2} + \frac{U_C}{R_3} = I_2$$
$$-R_3 U_A + R_3 U_B + R_2 U_C = I_2 R_2 R_3$$

$$\frac{U_C}{R_3} + \frac{U_C - U_B}{R_4} + \frac{U - U_B + U_C}{R_5} = I_2$$
$$U_C R_4 R_5 + (U_C - U_B) R_3 R_5 + (U - U_B + U_C) R_3 R_4 = I_2 R_3 R_4 R_5$$
$$(-R_3 R_5 - R_3 R_4) U_B + (R_4 R_5 + R_3 R_5 + R_3 R_4) U_C = I_2 R_3 R_4 R_5 - U R_3 R_4$$

Pro přehlednost můžeme zapsat do matice pro neznámé U_A, U_B, U_C:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} R_1 + R_2 & -R_1 & 0 & I_1 R_1 R_2 \\ -R_3 & R_3 & R_2 & I_2 R_2 R_3 \\ 0 & -R_3(R_4 + R_5) & R_3(R_4 + R_5) + R_4 R_5 & I_2 R_3 R_4 R_5 - U R_3 R_4 \end{array}\right)$$

Nyní už můžeme dosadit hodnoty ze zadání a spočítat jednotlivá uzlová napětí:

$$\begin{pmatrix} 86 & -47 & 0 \\ -58 & 58 & 39 \\ 0 & -3074 & 3774 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1741{,}35 \\ 1131 \\ -190\ 820 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 60{,}504 \\ 73{,}6595 \\ 9{,}4354 \end{bmatrix}$$

Hledané hodnoty I_{R_4} a U_{R_4} nyní spočítáme velmi jednoduše dosazením do příslušné rovnice z (5):

$$I_{R_4} = \frac{U_B - U_C}{R_4}$$
$$I_{R_4} = \frac{73{,}6595 - 9{,}4354}{28}$$
$$\mathbf{I_{R_4}} = 2{,}2937\,\mathrm{A}$$

$$U_{R_4} = R_4 I_{R_4} = \frac{U_B - U_C}{R_4} R_4 = U_B - U_C$$
$$U_{R_4} = 73{,}6595 - 9{,}4354$$
$$\mathbf{U_{R_4}} = 64{,}2241\,\mathrm{V}$$

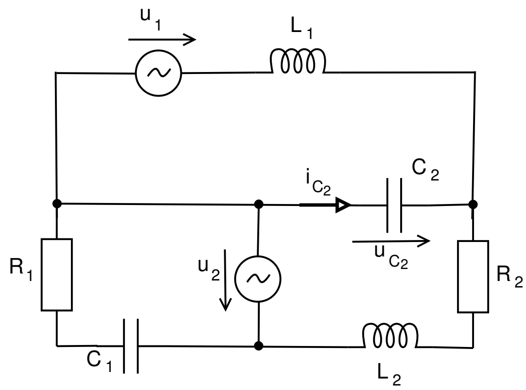
Obdobně bychom mohli snadno spočítat napětí a proud na jakémkoliv dalším rezistoru.

Příklad 4

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi f t)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi f t)$.
Ve vztahu pro napětí $u_{C_2} = U_{C_2} \cdot \sin(2\pi f t + \varphi_{C_2})$ určete $|U_{C_2}|$ a φ_{C_2}. Použijte metodu smyčkových proudů.

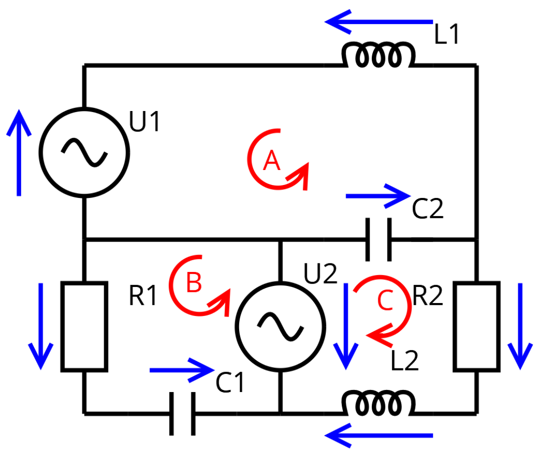
Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [µF]	C_2 [µF]	f [Hz]
C	35	45	10	13	220	70	230	85	75



Při použití metody smyčkových proudů je využito druhého Kirchhoffova zákona, který říká, že *součet úbytků napětí na spotřebičích se v uzavřené části obvodu, smyčce, rovná součtu napětí zdrojů v této smyčce.* Při jejím výpočtu hledáme hodnoty fiktivních proudů, které obíhají uvnitř jednotlivých elementárních smyček. Pro každou smyčku pak sestavíme rovnici podle druhého Kirchhoffova zákona, přičemž jednotlivá napětí vyjádříme pomocí zavedeného fiktivního proudu smyčky. Ze soustavy těchto rovnic zjistíme fiktivní smyčkové proudy, pomocí kterých vypočítáme napětí na jednotlivých spotřebičích.

Obvod ze zadání rozdělíme na tři smyčky A, B, C, jak je naznačeno na obrázku 11. Orientace smyček je zvolena zcela náhodně. Předpokládejme, že smyčkou A prochází proud I_A, podobně ve zbylých dvou



Obrázek 11: Obvod se zaznačenými smyčkami a směry napětí ve speciálním časovém okamžiku $t = \frac{\pi}{2\omega}$.

smyčkách. Pro jednotlivé smyčky můžeme zapsat rovnice podle druhého Kirchhoffova zákona:

$$\begin{aligned}
A\colon\ & U_{C_2} + U_{L_1} - U_1 = 0 \\
& (I_C + I_A)Z_{C_2} + I_A Z_{L_1} - U_1 = 0 \\
& (Z_{L_1} + Z_{C_2})I_A + Z_{C_2} I_C = U_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B\colon\ & U_{R_1} + U_{C_1} - U_2 = 0 \\
& I_B Z_{R_1} + I_B Z_{C_1} - U_2 = 0 \\
& (Z_{R_1} + Z_{C_1})I_B = U_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C\colon\ & U_{R_2} + U_{L_2} - U_2 + U_{C_2} = 0 \\
& I_C Z_{R_2} + I_C Z_{L_2} - U_2 + (I_C + I_A)Z_{C_2} = 0 \\
& Z_{C_2} I_A + (Z_{R_2} + Z_{C_2} + Z_{L_2})I_C = U_2
\end{aligned}$$

Vzniklé rovnice pak můžeme zapsat do matice s proměnnými I_A, I_B, I_C:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
Z_{L_1} + Z_{C_2} & 0 & Z_{C_2} & U_1 \\
0 & Z_{C_1} + Z_{R_1} & 0 & U_2 \\
Z_{C_2} & 0 & Z_{R_2} + Z_{C_2} + Z_{L_2} & U_2
\end{array}\right)$$

Nyní vypočítáme úhlovou frekvenci a impedance jednotlivých komponent, ty pak dosadíme do zjištěné matice:

$$\begin{aligned}
\omega &= 2\pi f = 150\pi \\
Z_{R_1} &= R_1 = 10\,\Omega \\
Z_{R_2} &= R_2 = 13\,\Omega \\
Z_{L_1} &= j\omega L_1 = 33\pi j \\
Z_{L_2} &= j\omega L_2 = \frac{21}{2}\pi j \\
Z_{C_1} &= -\frac{j}{\omega C_1} = -\frac{2000}{69\pi} j \approx -9{,}2264j \\
Z_{C_2} &= -\frac{j}{\omega C_2} = -\frac{4000}{51\pi} j \approx -24{,}9655j
\end{aligned}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c}
\left(33\pi - \frac{4000}{51\pi}\right) j & 0 & -\frac{4000}{51\pi} j & 35 \\
0 & 10 - \frac{2000}{69\pi} j & 0 & 45 \\
-\frac{4000}{51\pi} j & 0 & 13 - \left(\frac{4000}{51\pi} + \frac{21}{2}\pi\right) j & 45
\end{array}\right)$$

$$\approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
78{,}7071j & 0 & -24{,}9655j & 35 \\
0 & 10 - 9{,}2264j & 0 & 45 \\
-24{,}9655j & 0 & 13 - 57{,}9522j & 45
\end{array}\right)$$

Hledáme hodnotu U_{C_2}, pro kterou platí $U_{C_2} = Z_{C_2}(I_A + I_C)$, vypočítáme proto I_A a I_C s použitím

Cramerova pravidla, determinanty matice třetího řádu vypočítáme Sarrusovým pravidlem.

$$|A| = 78{,}7071j \cdot (10 - 9{,}2264j) \cdot (13 - 57{,}9522j) - (-24{,}9655j) \cdot (10 - 9{,}2264j) \cdot (-24{,}9655j)$$
$$\approx (61\,285{,}6393 - 37\,602{,}5858j)$$

$$I_A = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 35 & 0 & -24{,}9655j \\ 45 & 10 - 9{,}2264j & 0 \\ 45 & 0 & 13 - 57{,}9522j \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}[35 \cdot (10 - 9{,}2264j) \cdot (13 - 57{,}9522j) -$$
$$(-24{,}9655j) \cdot (10 - 9{,}2264j) \cdot 45] \approx \frac{-3798{,}7802 - 13\,246{,}807j}{61\,285{,}6393 - 37\,602{,}5858j} \approx (0{,}051\,32 - 0{,}184\,66\mathrm{j})\,\mathrm{A}$$

$$I_C = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 78{,}7071j & 0 & 35 \\ 0 & 10 - 9{,}2264j & 45 \\ -24{,}9655j & 0 & 45 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}[(78{,}7071j) \cdot (10 - 9{,}2264j) \cdot 45 -$$
$$35 \cdot (10 - 9{,}2264j) \cdot (-24{,}9655j)] \approx \frac{40\,740{,}2026 + 44\,156{,}12j}{61\,285{,}6393 - 37\,602{,}5858j} \approx (0{,}161\,78 + 0{,}819\,76\mathrm{j})\,\mathrm{A}$$

$$U_{C_2} = (-24{,}9655\mathrm{j}) \cdot (0{,}051\,32 - 0{,}184\,66\mathrm{j} + 0{,}161\,78 + 0{,}819\,76\mathrm{j})$$
$$U_{C_2} = (15{,}8556 - 5{,}3206\mathrm{j})\,\mathrm{V}$$
$$|U_{C_2}| = \sqrt{Re(U_{C_2})^2 + Im(U_{C_2})^2} = \sqrt{15{,}8556^2 + 5{,}3206^2}$$
$$|\mathbf{U_{C_2}}| = 16{,}7245\,\mathrm{V}$$

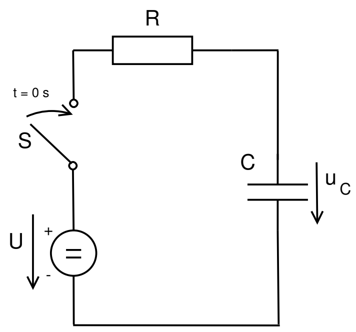
$$\varphi_{\mathbf{C_2}} = arctg\left(\frac{Im(U_{C_2})}{Re(U_{C_2})}\right) = arctg\left(\frac{-5{,}3206}{15{,}8556}\right) = -arctg\left(\frac{5{,}3206}{15{,}8556}\right) \approx -0{,}323\,76\,\mathrm{rad}$$

Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0[\mathrm{s}]$ sepne spínač S. Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $u_C = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U [V]	C [F]	R [Ω]	$u_C(0)$ [V]
E	40	30	40	11



Za předpokladu, že je spínač a napěťový zdroj ideální, dojde při sepnutí v čase $t = 0\,\mathrm{s}$ ke skokovému vzrůstu napětí u_a (viz obrázek 12) z 0 V na 40 V. Celým sériovým obvodem prochází stejný proud $i(t)$, pro napětí na rezistoru tak platí:

$$u_R = Ri(t) = 40i(t)$$

Z druhého Kirchhoffova zákona pak u_a platí:

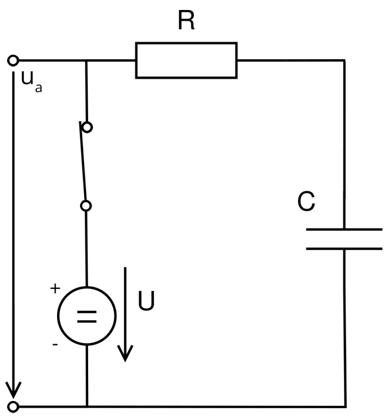
$$u_R(t) + u_C(t) - u_1(t) = 0$$

Protože u_a je od okamžiku $t = 0$ drženo na svorkovém napětí zdroje, můžeme tak zapsat:

$$u_R(t) + u_C(t) = U$$

Pro proud procházející kondenzátorem, a tedy celým obvodem, platí:

$$i_C(t) = i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = Cu'_C(t) = 30u'_C(t)$$



Obrázek 12: Situace po sepnutí spínače s vyznačeným napětím u_a.

Počáteční podmínkou je ze zadání $u_C(0) = 11$. Ze zjištěných vztahů můžeme vytvořit diferenciální rovnici 1. řádu:

$$40 \cdot 30u'_C(t) + u_C(t) = 40 \tag{6}$$

Očekávané řešení takovéto rovnice má tvar:

$$u_C(t) = f(t)e^{\lambda t}$$

Sestavíme charakteristickou rovnici, ze které zjistíme konstantu λ:

$$40 \cdot 30\lambda + 1 = 0$$
$$\lambda = -\frac{1}{1200}$$

Očekávaným řešením tak je

$$u_C(t) = f(t)e^{\left(\frac{-t}{1200}\right)} \tag{7}$$

jeho derivací pak je

$$u'_C(t) = f'(t)e^{\frac{-t}{1200}} - \frac{1}{1200}f(t)e^{\frac{-t}{1200}} = \frac{1200f'(t)e^{\frac{-t}{1200}} - f(t)e^{\frac{-t}{1200}}}{1200} \tag{8}$$

Pro zjištění neznámé funkce $f(t)$ dosadíme (7) a (8) do zadání (6):

$$1200\frac{1200f'(t)e^{\frac{-t}{1200}} - f(t)e^{\frac{-t}{1200}}}{1200} + f(t)e^{\frac{-t}{1200}} = 40$$
$$1200f'(t)e^{\frac{-t}{1200}} - f(t)e^{\frac{-t}{1200}} + f(t)e^{\frac{-t}{1200}} = 40$$
$$1200f'(t)e^{\frac{-t}{1200}} = 40$$
$$f'(t) = \frac{1}{30}e^{\left(\frac{t}{1200}\right)}$$

Zintegrováním obou stran zjistíme předpis funkce $f(t)$:

$$\int f'(t) = \int \frac{1}{30}e^{\frac{t}{1200}}$$
$$f(t) + c_1 = \frac{1}{30}\int e^{\frac{t}{1200}}$$
$$f(t) + c_1 = \frac{1}{30}(1200e^{\frac{t}{1200}} + c_2)$$
$$f(t) = 40e^{\frac{t}{1200}} + c$$

Zjištěnou funkci $f(t)$ dosadíme do očekávaného řešení (7):

$$u_C(t) = \left(40e^{\left(\frac{t}{1200}\right)} + c\right) \cdot e^{\left(\frac{-t}{1200}\right)}$$
$$u_C(t) = 40 + c \cdot e^{\left(\frac{-t}{1200}\right)}$$

Pro zjištění konkrétního řešení dosadíme do zjištěného vztahu počáteční podmínku $u_C(0) = 11$:

$$u_C(0) = 40 + c \cdot e^0 = 11$$
$$40 + c = 11$$
$$c = -29$$

Konkrétním řešením pro zadané hodnoty tak získáváme rovnici

$$\mathbf{u_C(t) = 40 - 29 \cdot e^{\left(\frac{-t}{1200}\right)}}$$

Posledním krokem jsou kontrolní zkoušky. První zkontrolujeme, jestli platí počáteční podmínka:

$$u_C(0) = 40 - 29 \cdot e^{\left(\frac{0}{1200}\right)} = 40 - 29 \cdot e^0 = 40 - 29 = 11$$

Podmínka platí. Dále zkontrolujeme, jestli zjištěná funkce odpovídá rovnici ze zadání (6):

$$1200(40 - 29e^{\frac{-t}{1200}})' + 40 - 29e^{\frac{-t}{1200}} = 40$$
$$1200(\frac{29}{1200}e^{\frac{-t}{1200}}) + 40 - 29e^{\frac{-t}{1200}} = 40$$
$$29e^{\frac{-t}{1200}} + 40 - 29e^{\frac{-t}{1200}} = 40$$
$$40 = 40$$
$$L = P$$

Strany se rovnají, nalezená rovnice tak platí.

Shrnutí výsledků

Příklad	**Skupina**	**Výsledky**	
1	C	$U_{R5} = 36{,}9136\,\mathrm{V}$	$I_{R5} = 0{,}1678\,\mathrm{A}$
2	E	$U_{R6} = 26{,}4728\,\mathrm{V}$	$I_{R6} = 0{,}1765\,\mathrm{A}$
3	H	$U_{R4} = 64{,}2241\,\mathrm{V}$	$I_{R4} = 2{,}2937\,\mathrm{A}$
4	C	$\lvert U_{C_2}\rvert = 16{,}7245\,\mathrm{V}$	$\varphi_{C_2} = -0{,}3238\,\mathrm{rad}$
5	E	$u_C(t) = 40 - 29 \cdot e^{-t/1200}$	