Otázka a hypotéza

Kolik prvočísel naleznete v nekonečné posloupnosti čísel 10001, 100010001, 1000100010001, . . . ?

Mezi několika prvními členy posloupnosti, kterou označme jako a_k, žádná prvočísla nenajdeme:

$$\begin{aligned} a_1 &= 10001 &&= 73^1 \cdot 137^1 \\ a_2 &= 100010001 &&= 3^1 \cdot 7^1 \cdot 13^1 \cdot 37^1 \cdot 9901^1 \\ a_3 &= 1000100010001 &&= 17^1 \cdot 73^1 \cdot 137^1 \cdot 5882353^1 \\ a_4 &= \ldots &&= 14^1 \cdot 271^1 \cdot 3541^1 \cdot \ldots \end{aligned}$$

Předpokládejme, že v posloupnosti a_k žádná prvočísla nejsou. Nyní se to pokusme dokázat.

Důkaz

Povšimněme si, jakým způsobem jsou čísla posloupnosti tvořena. Každé číslo a_{k+1} je v podstatě číslo a_k posunuté v desítkovém zápisu o čtyři místa doleva s přičtenou jedničkou:

$$a_1 = 10001 = 10000 + 1 = 10^4 + 1$$
$$a_2 = 100010001 = (a_1 \cdot 10^4) + 1 = (10^4 + 1) \cdot 10^4 + 1 = 10^8 + 10^4 + 1$$
$$a_3 = (a_2 \cdot 10^4) + 1 = (10^8 + 10^4 + 1) \cdot 10^4 + 1$$

Posloupnost tedy můžeme zapsat rekurentně:

$$a_{k+1} = (a_k \cdot 10^4) + 1 \tag{1}$$

Můžeme ji také zapsat sumou (v celém následujícím textu předpokládejme, že $k \in \mathbb{N},\ k \geq 1$):

$$a_k = 1 + \sum_{n=1}^{k} 10^{4n} = 1 + 10^4 + 10^8 + \ldots + 10^{4k}$$

Tedy:

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k = (10^{4(k+1)} + \ \ 10^{4k} + \ldots + 10^4 + 1) \\ - (10^{4k} + \ldots + 10^4 + 1) = 10^{4(k+1)} \end{aligned} \tag{2}$$

A z (1) také:

$$a_{k+1} - a_k = (a_k \cdot 10^4) + 1 - a_k = (10^4 - 1) \cdot a_k + 1 \tag{3}$$

Z (2) a (3) tedy:

$$10^{4(k+1)} = (10^4 - 1) \cdot a_k + 1$$
$$a_k = \frac{10^{4(k+1)} - 1}{10^4 - 1} = \frac{(10^{2k+2})^2 - 1}{(10^2 + 1)(10^2 - 1)} = \frac{(10^{2k+2} + 1)(10^{2k+2} - 1)}{(10^2 + 1)(10^2 - 1)}$$
$$a_k = \frac{(10^{2k+2} + 1)(10^{2k+2} - 1)}{101 \cdot 99} \tag{4}$$

Dále můžeme ukázat, že 99 vždy dělí číslo $(10^{2k+2} - 1)$.

Důkaz. Provedeme matematickou indukcí. Dokazujeme:

$$\forall k \geq 1 : 99 \,|\, (10^{2k+2} - 1)$$

Pro $k = 1$ platí tvrzení triviálně: $10^4 - 1 = 9999$, to po dělení 99 dává 101 beze zbytku.

Mějme tedy indukční předpoklad $V(n)$:

$$V(n) \colon 99 \,|\, (10^{2n+2} - 1) \tag{5}$$

Chceme ukázat, že $V(n) \to V(n+1)$:

$$V(n+1) \colon 99 \,|\, (10^{2(n+1)+2} - 1) \Leftrightarrow 99 \,|\, (10^{2n+4} - 1) \Leftrightarrow 99 \,|\, (10^2 \cdot 10^{2n+2} - 1) \tag{6}$$

Využijeme k tomu následující větu o kongruencích:

Věta 1.

$$a \equiv b \pmod{m} \wedge c \equiv d \pmod{m} \to a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$$

Podle věty 1 a I. P. (5) platí:

$$\begin{aligned} 10^{2n+2} &\equiv 1 \pmod{99} \\ \text{triviálně: } 10^2 &\equiv 1 \pmod{99} \\ 10^2 \cdot 10^{2n+2} &\equiv 1 \cdot 1 \pmod{99} \end{aligned} \tag{7}$$

(7) je ale ekvivalentní s dokazovaným tvrzením (6), toto tvrzení tedy platí a důkaz je proveden. □

Nyní je dokázáno, že součin v čitateli (4) je vždy dělitelný číslem 99, a protože je a_k vždy celé číslo, musí být tento součin dělitelný i prvočíslem 101. Označme podíl $\frac{10^{2k+2}-1}{99}$ za q:

$$a_k = \frac{(10^{2k+2} + 1)q}{101}$$

Pokud by q bylo prvočíslo nebo číslo složené, které ve svém prvočíselném rozkladu neobsahuje 101, pak $101 \,|\, (10^{2k+2} + 1)$, a protože $10^{2k+2} + 1$ je pro každé $k \geq 1$ větší než 101, platí, že $\frac{10^{2k+2}+1}{101} = g$, kde $g > 1$, a potom $a_k = gq$, čili by a_k bylo číslem složeným.

Pro případ $q = 101$:

$$\begin{aligned} \frac{10^{2k+2} - 1}{99} &= 101 \\ 10^{2k+2} - 1 &= 9999 \\ 10^{2k+2} &= 10000 \\ k &= 1 \end{aligned}$$

Můžeme přímo ukázat, že a_1 není prvočíslo, protože $a_1 = 10001 = 73^1 \cdot 137^1$.

Pokud q obsahuje ve svém prvočíselném rozkladu číslo 101 a $q \neq 101$, pak můžeme provést dělení beze zbytku, označit $\frac{q}{101} = q'$, zjevně $q' > 1$, a tedy $a_k = q'(10^{2k+2} - 1)$, což je číslo složené.

Ukázali jsme tedy, že a_k je vždy číslem složeným, potvrdili jsme tak hypotézu. ■