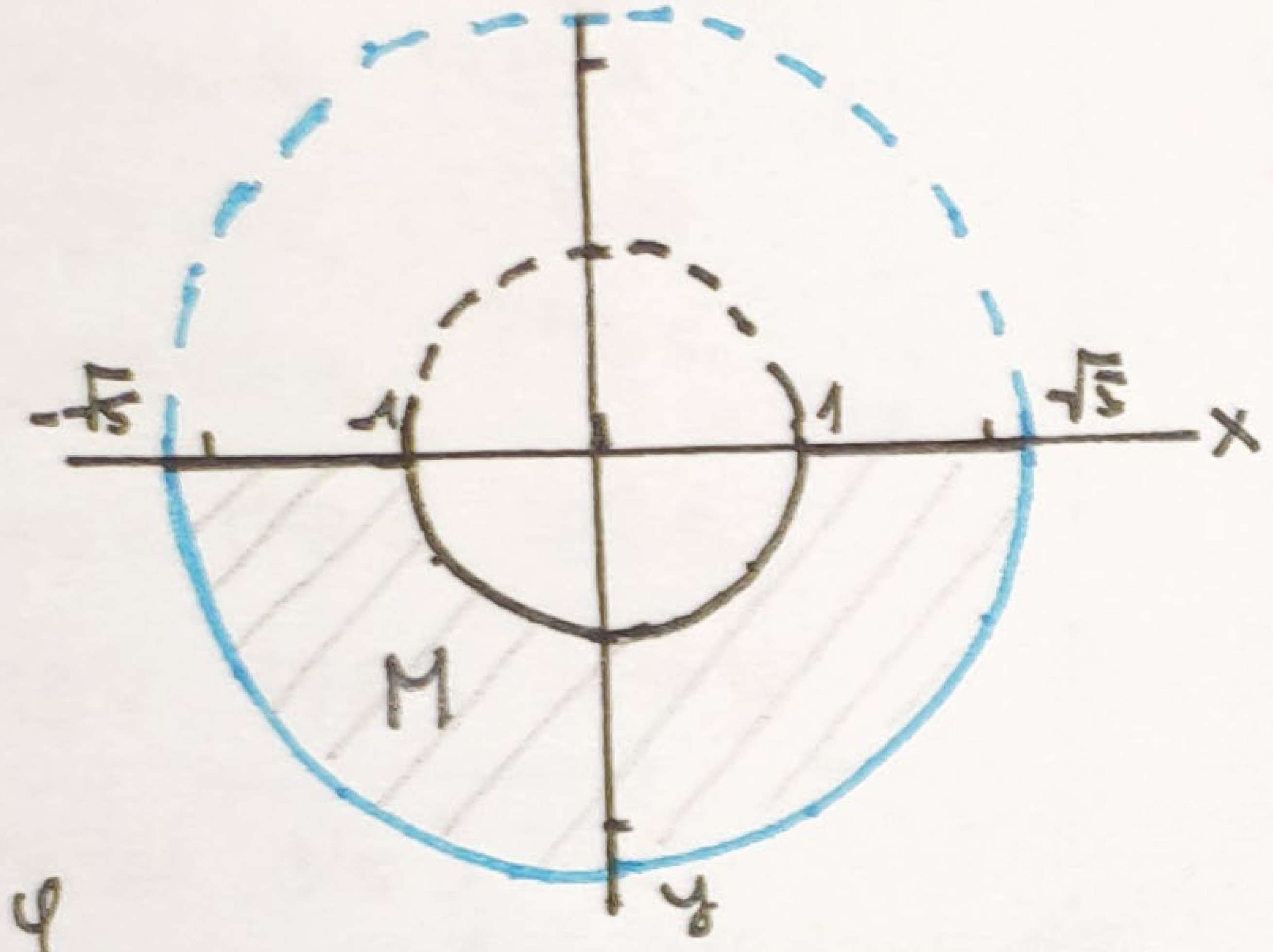
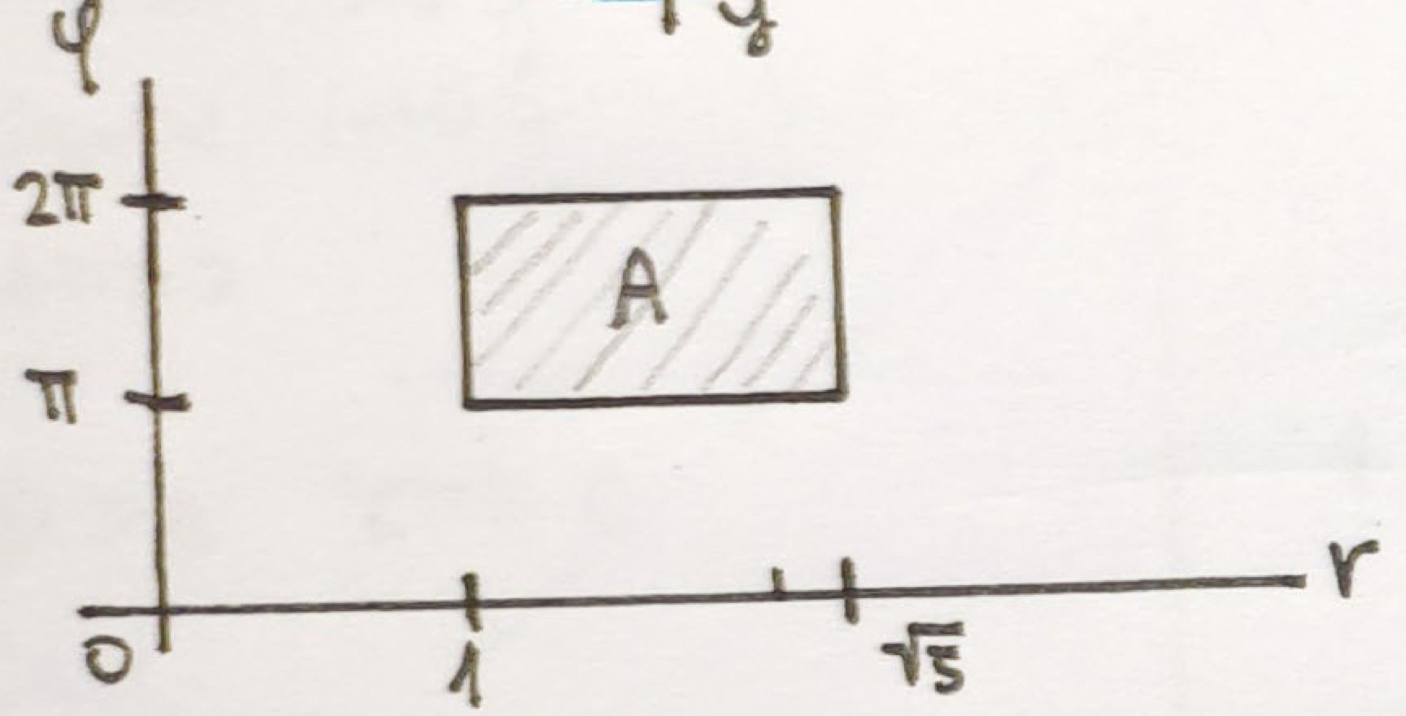
⑥ Ondřej Ondryáš

$$\iint_M \frac{y}{x^2+y^2+9}\,dx\,dy, \quad M = \{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 5,\ y \le 0\}$$

Hledáme hodnotu integrálu na oblasti znázorněné na obrázku:



Tuto oblast můžeme transformovat do polárních souřadnic. Zjevně se pohybujeme mezi dvěma kružnicemi s $r_1 = 1$ a $r_2 = \sqrt{5}$, a to mezi úhly π a 2π. Po transformaci se tak budeme pohybovat na obdélníkové elementární oblasti znázorněné na dalším obrázku:



Můžeme tedy psát:

$$\iint_M \frac{y}{x^2+y^2+9}\,dx\,dy = \iint_A \frac{r\cdot\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + 9}\, r\,dr\,d\varphi = \iint_A \frac{r^2\sin\varphi}{r^2\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1}+9}\ \frac{\frac{1}{r^2}}{\frac{1}{r^2}}\ dr\,d\varphi$$

$$= \iint_A \sin\varphi\cdot\frac{1}{1+\frac{9}{r^2}}\,dr\,d\varphi \overset{\text{Fub. věta}}{=} \int_\pi^{2\pi}\left(\int_1^{\sqrt{5}} \sin\varphi\cdot\frac{1}{1+\frac{9}{r^2}}\,dr\right)d\varphi \overset{\text{Fce. je separovatelná}}{=} \int_\pi^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi\cdot\int_1^{\sqrt{5}}\frac{1}{1+\frac{9}{r^2}}\,dr$$

Vzniklé dva integrály vyřešíme zvlášť:

$$\int_\pi^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi = \left[-\cos\varphi\right]_\pi^{2\pi} = \left(-1-(-(-1))\right) = \underline{-2}$$

Při substituci u určitých int. preferuji způsob bez přepočítávání mezí, tj. s dosazením původního výrazu do subst. proměnné až ve zintegrované fci.

$$\int_1^{\sqrt{5}}\frac{1}{1+\frac{9}{r^2}}\,dr = \int_1^{\sqrt{5}}\frac{r^2}{r^2+9}\,dr = \int_1^{\sqrt{5}}\frac{r^2+9-9}{r^2+9}\,dr = \int_1^{\sqrt{5}}\left(\frac{r^2+9}{r^2+9} - \frac{\cancel{9}}{\cancel{9}\cdot\left(\frac{r^2}{9}+1\right)}\right)dr = \int_1^{\sqrt{5}}1\,dr - \int_1^{\sqrt{5}}\frac{1}{\frac{r^2}{9}+1}\,dr$$

$$\left|\begin{array}{l} t = \frac{r}{3} \\ dt = \frac{1}{3}\,dr \\ dr = 3\,dt \end{array}\right|$$

$$= \left[r\right]_1^{\sqrt{5}} - 3\int_?^?\frac{1}{t^2+1}\,dt = (\sqrt{5}-1) - 3\left[\operatorname{arctg} t\right]_?^? = \sqrt{5}-1-3\left[\operatorname{arctg}\frac{r}{3}\right]_1^{\sqrt{5}} = \underline{\sqrt{5}-1-3\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{3} - \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}$$

Zpět do původního:

$$\iint_M \frac{y}{x^2+y^2+9}\,dx\,dy = (-2)\cdot\left(\sqrt{5}-1-3\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{3}+3\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{6\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{3} - 6\operatorname{arctg}\frac{1}{3} - 2\sqrt{5}+2}} \doteq -0{,}5595$$