Vektorový prostor:

$\bar{u}+\bar{v} \in V$, $\bar{u},\bar{v} \in V$

$\alpha\cdot\bar{u} \in V$, $\bar{u} \in V$, $\alpha \in F$

prostor V(F), pole F:

(F,+) je Abelova gr.

$(F\setminus\{0\},\cdot)$ je Abelova gr.

$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ - distr.

$V\times V \xrightarrow{+} V$, $F\times V \to V$

$\alpha\cdot(\bar{u}+\bar{v}) = \alpha\cdot\bar{u} + \alpha\cdot\bar{v}$

$(\alpha+\beta)\cdot\bar{u} = \alpha\cdot\bar{u} + \beta\cdot\bar{u}$

$\alpha\cdot(\beta\cdot\bar{u}) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\bar{u}$

$1\cdot\bar{u} = \bar{u}$, $0\cdot\bar{u} = \bar{0}$

$\alpha\cdot\bar{0} = \bar{0}$, $-1\cdot\bar{u} = -\bar{u}$

$\alpha\cdot\bar{u} = \bar{0} \Rightarrow \alpha = 0 \vee \bar{u} = \bar{0}$

Lineární závislost:

$\alpha_1\cdot\bar{u}_1 + \alpha_2\cdot\bar{u}_2 + \dots + \alpha_n\cdot\bar{u}_n = \bar{0}$

$\wedge$ $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n = 0$

=> jsou nezávislé

=> jediná možnost, jak komb. získat $\bar{0}$, je vynásobit všechny 0.

Pivoty:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

u_1 u_2 u_4

RREF:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$u_3 = 3u_1 + 4u_2$

$u_5 = 3u_1 + 5u_2 + 4u_4$

Hodnost matice:

počet nenulových ř./sl. po elim.

řádk. = sloupcová

soustava $A\bar{x}=\bar{b}$ má aspoň jedno řešení, když $h(A|b) = h(A)$

Součet a průnik podp.:

$V_1, V_2 \subseteq V$

$V_1+V_2 = \{\bar{w};\ \bar{w} = \bar{v}_1+\bar{v}_2;\ v_1 \in V_1 \wedge v_2 \in V_2\}$

$V_1 \cap V_2 = \{\bar{w};\ w \in V_1 \wedge w \in V_2\}$

$\dim(V_1+V_2) + \dim(V_1\cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

Standardní skalární součin:

$\bar{u}\cdot\bar{v} = u_1v_1 + u_2v_2$

$\|\bar{u}\| = \sqrt{u_1^2+u_2^2} = \sqrt{\bar{u}\cdot\bar{u}}$

$\Rightarrow \|\bar{u}\|^2 = \bar{u}\cdot\bar{u}$

$\bar{u}\cdot\bar{v} = \|\bar{u}\|\cdot\|\bar{v}\|\cdot\cos\varphi$ (z kosin. věty)

$\Rightarrow \bar{u}\bar{v} > 0 \to$ ostrý úhel

$\bar{u}\cdot\bar{v} = 0 \to \bar{u}\perp\bar{v}$

Skalární součin obecně:

$\bar{u}\cdot\bar{u} > 0$ pro $\bar{u}\neq\bar{0}$

$\bar{u}\cdot\bar{v} = \bar{v}\cdot\bar{u}$

$(\alpha\cdot\bar{u})\cdot\bar{v} = \alpha\cdot(\bar{u}\cdot\bar{v})$

$\bar{u}\cdot(\bar{v}+\bar{w}) = \bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{u}\cdot\bar{w}$

$\bar{0}\cdot\bar{u} = (0\cdot\bar{u})\cdot\bar{u} = 0\cdot(\bar{u}\cdot\bar{u}) = 0$

Smíšený součin:

$(\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{w}))$

$= V$ rovnoběžnostěnu

Vektorový součin:

$\bar{u}\times\bar{v} = \left[\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right]$

$\bar{u}\times\bar{v} = -\bar{v}\times\bar{u}$

$\|\bar{u}\times\bar{v}\| = \|\bar{u}\|\cdot\|\bar{v}\|\cdot\sin\varphi$

$\|\bar{u}\times\bar{v}\|$ je S rovnoběžníku v $\mathbb{R}^3$

Ortogonální průmět:

$u \in V$, $L \subseteq V$, průmět $\bar{u}$ do L:

$v \in L \wedge (\bar{u}-\bar{v}) \perp L$

$L = \langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \rangle$, $\bar{v} = \alpha_1\cdot\bar{a}_1 + \dots + \alpha_n\cdot\bar{a}_n$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \bar{a}_1\bar{a}_1 & \bar{a}_2\bar{a}_1 & \cdots & \bar{a}_n\bar{a}_1 & \bar{u}\cdot\bar{a}_1 \\ \bar{a}_1\bar{a}_2 & \bar{a}_2\bar{a}_2 & \cdots & \bar{a}_n\bar{a}_2 & \bar{u}\cdot\bar{a}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{a}_1\bar{a}_n & \bar{a}_2\bar{a}_n & \cdots & \bar{a}_n\bar{a}_n & \bar{u}\cdot\bar{a}_n \end{array}\right)$$

Ortogon. báze

všechny vektory na sebe kolmé

při projekci do ní platí

$\alpha_i = \frac{\bar{u}\cdot\bar{a}_i}{\bar{a}_i\cdot\bar{a}_i}$, což je i průmět do přímky $\bar{a}_i$

Gram-Schmidt

pro bázi $[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n]$

$\bar{b}_1 = \bar{a}_1$

$\bar{b}_2 = \bar{a}_2 + \beta_{21}\cdot\bar{b}_1$

$\bar{b}_3 = \bar{a}_3 + \beta_{31}\cdot\bar{b}_1 + \beta_{32}\cdot\bar{b}_2$

$\bar{b}_n = \bar{a}_n + \beta_{n1}\cdot\bar{b}_1 + \dots + \beta_{n(n-1)}\bar{b}_{n-1}$

$\beta_{21} = -\frac{\bar{a}_2\bar{b}_1}{\bar{b}_1\bar{b}_1}$ $\beta_{nm} = -\frac{\bar{a}_n\cdot\bar{b}_m}{\bar{b}_m\cdot\bar{b}_m}$

Souřadnice v bázi

$\bar{v} = v_1^A\cdot\bar{a}_1 + \dots + v_n^A\cdot\bar{a}_n$

$= (\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \cdots\ \bar{a}_n)\cdot\begin{bmatrix} v_1^A \\ v_2^A \\ \vdots \\ v_n^A \end{bmatrix} = A\cdot[\bar{v}]_A$

$\left(\begin{array}{cc|c} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & v_1^E \\ & & v_2^E \end{array}\right) \to$ souřadnice v B

Matice přechodu:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & [\bar{a}_1]_B & [\bar{a}_2]_B \\ 0 & 1 & & \end{array}\right)$$

B A

$C_{(B,A)}$ je matice př. od B k A

=> vyjadřuje A v bázi B

$C_{(B,A)} = B^{-1}\times A = C_{(A,B)}^{-1}$

$[\bar{v}]_B = C_{(B,A)}\times[\bar{v}]_A$

Transformace:

$F(\alpha\cdot\bar{u}) = \alpha\cdot F(\bar{u})$

$F(\bar{u}+\bar{v}) = F(\bar{u}) + F(\bar{v})$

$F(\bar{0}) = \bar{0}$ $F(\bar{v}): V \to W$

Jádro a obraz

Ker f: co se zobrazí na $\bar{0}$ $\mathrm{Ker}\,f = \{\bar{0}\} \Leftrightarrow$ INJEKTIVNÍ

$= \{\bar{v}\in V;\ f(\bar{v}) = \bar{0}\}$ $\mathrm{Im}\,f = V \Leftrightarrow$ SURJEKTIVNÍ

Im f: obor hodnot, pro která $\bar{w}\in W$ existuje vzor

$= \{\bar{w}\in W;\ \exists\bar{v}\in V:\ f(\bar{v}) = \bar{w}\}$

$\dim(\mathrm{Ker}\,f) + \dim(\mathrm{Im}\,f) = \dim V$

báze Im f jsou nezávislé vektory z matice zobrazení

Matice zobrazení vzhledem k bázím V, W:

$[\bar{w}]_W = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nm} \end{pmatrix} \times [\bar{v}]_V$

sloupce jsou souřadnice $f(\bar{a}_i)$ v bázi W

$\bar{a}_i$ bázový vektory V

změna bází: $F: V \to W$, původní báze V, W, nové báze V′, W′

$F' = C_{(W',W)}\cdot F\cdot C_{(V,V')}$ $[F(\bar{v})]_W = F\times[\bar{v}]_V$

Lineární zobr. je dáno obrazy libovolné báze.

$f(\bar{x}_1) = \bar{v}_1$, $f(\bar{x}_2) = \bar{v}_2$, tak v bázi $A = [\bar{x}_1, \bar{x}_2]$

je maticí z. $F\begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 \end{pmatrix}$, ve std. b. $F_E = F\times A^{-1}$

nebo: $\left(\begin{array}{c|c} -\bar{x}_1- & -\bar{v}_1- \\ -\bar{x}_2- & -\bar{v}_2- \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & v_1 & \\ 0 & 1 & & v_2 \end{array}\right)$

v E

Eliminace s část. výběrem:

pro eliminaci použít násobky toho řádku, který má v daném sloupci číslo s NEJVĚTŠÍ abs. hodnotou

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ -10 & -5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -10 & -5 & 8 \\ & \sim & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -10 & -5 & 8 \\ 0 & -3 & 0{,}4 \\ 0 & 8 & 0{,}8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

LU-rozklad:

eliminace s postupným zapisováním opačných operací do matice L, U je výsledná horní ∇ matice

$A \sim U \Leftrightarrow E_m\times E_{m-1}\times\dots\times E_1\times A = U \Rightarrow A = \underbrace{E_1^{-1}\times\dots E_m^{-1}}_{L}$

$PA = LU$, P slouží pro výměny řádků = permutační m.

$A\bar{x} = \bar{b} \Rightarrow LU\bar{x} = \bar{b} \Rightarrow L\cdot\bar{y} = \bar{b} \wedge \bar{y} = U\bar{x}$

$\Rightarrow U\bar{x} = \bar{y}$

iagonální dominance

v každém řádku je abs. hodnota prvku
a diagonále větší než součet abs. hodnot
statních prvků

ymetrická pozitivně definitní matice:

o každý nenulový sloupcový vektor $\bar{x}$ platí

$\bar{x}^T \times A \times \bar{x} > 0 \Leftrightarrow$ hlavní rohové minory kladné

ajištění konvergence: Gauss-Seidela:

ynásobit transponovanou: $A^T \times A \times \bar{x} = A^T \times \bar{b}$

ýznamné lin. transformace:

oumérnost v $\mathbb{R}^2$:

x: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

x=y: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

oumérnost v $\mathbb{R}^3$:

xy: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ xz: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

yz: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

středová s.: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

=> scale: $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

otace: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = R$

v $\mathbb{R}^3$: okolo x: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{R} \\ 0 & & \end{pmatrix}$

okolo y: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$

okolo z: $\begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{R} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

V homogen. souř.:

translace: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vlastní čísla a vektory:

$A \times \bar{v} = \lambda \bar{v}$ - pro některé vektory platí, že obraz v transf. A leží ve stejné přímce jako vzor

$(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

charakter. polynom: $\det(A - \lambda I)$

první zjistím λ, pak ty vektory

L matice soustavy pro vektory vždy singulární!

- vl.č. je právě **n** pro matici n×n
  => včetně $\lambda \in \mathbb{C}$ a násobných vl.č.
- pokud má λ násobnost $k > 1$ a neexistuje k němu k nezávislých vektorů, je defektní
- vektory příslušné různým vl.č. jsou nezávislé
- singulární matice má $\lambda = 0$

$\lambda(A^n) = \lambda^n$

$\lambda(A + \alpha \cdot I) = \lambda + \alpha$

$\lambda(\alpha \cdot A) = \alpha\lambda$?

$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$

Diagonální tvar:

$P^{-1} \times A \times P = D \Rightarrow A = P \times D \times P^{-1}$

P je matice s vl. vektory na sloupcích

D je diag. matice s vlast. čísly

-> matice transformace A v bázi vl. vektorů

Podobné matice:

$\exists$ regulární matice P taková, že $A = P \times B \times P^{-1} \Rightarrow A, B$ reprezent. stejné zobrazení v jiné bázi

=> mají stejná vl. čísla

$\not\Leftarrow$

Vl. čísla symetrických matic:

- všechna $\in \mathbb{R}$
- vl. vektory pro různá λ jsou na sebe $\perp$
- nikdy není defektní

$Q^{-1} = Q^T$

Diagonalizovatelnost:

existuje podobná matice, která je diagonální

$\Leftrightarrow$ matice má **n** lin. nezávislých vl. vektorů

=> má n různých vlastních čísel

Ortogonální:

- její sloupce jsou jednotkové navzájem kolmé vektory

$|\det Q| = 1$, $Q^{-1} = Q^T$, zachovávají skalár. součin

$|A| = |A^T|$

$|A^{-1}| = |A|^{-1}$ $(= \delta)$

$|\alpha A| = \alpha^n \cdot A$

$|A^n| = |A|^n$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{adj}(A)$

$\delta = \delta^n |\mathrm{adj}(A)|$

$A = (\mathrm{adj}(A) \cdot \delta)^{-1}$