Relace

$D(R)$: $a \in D(R) \Leftrightarrow \exists b: aRb$

$H(R)$: $b \in H(R) \Leftrightarrow \exists a: aRb$

Doplňková: $\overline{R} = A^2 \setminus R$

Inverzní: $R^{-1} = \{[a,b]; [b,a] \in R\}$

$R \circ S = \{[a,c]; \exists b: [a,b] \in S \wedge [b,c] \in R\}$

$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ $\quad (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

Speciálky:

R na A: $\forall a \in A: aRa$

S na A: $\forall a,b \in A: aRb \Rightarrow bRa$

T na A: $\forall a,b,c \in A: aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

AS na A: $\forall a,b \in A: aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$

1 může být na diagonále, jinak nikde osově 1-1

IR na A: $\forall a \in A: a\overline{R}a$ $(\neg aRa)$

Souvislá: $\forall a,b \in A: a \neq b \Rightarrow aRb \vee bRa$

Trichotomická: $\forall a,b \in A: a=b \vee aRb \vee bRa$

Sym. uzávěr: $\overleftrightarrow{R}$ $\quad$ Tranz. uz.: R^+

Ekvivalence:

RST, $a \in A$, $\overline{a} = \{x \in A; xRa\}$,

$S = \{\overline{a}, a \in A\} = A/R$, faktorová množina

Uspořádání

Částečné: R, AS, T $\quad$ Kvazi: R, T $\quad$ Dobré: každá podmn. má nejmenší prv.

Úplné/lineární: každé dva prvky množiny jsou porovnatelné

Minimální prvek: $a \in M$, $\forall b \in M: b \preceq a \Rightarrow a \preceq b$ $\quad a = b$

Maximální: $a \preceq b \Rightarrow b \preceq a$ $\quad a = b$ $\quad$ ŽÁDNÝ PRVEK NENÍ NAD/POD

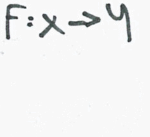
Nejmenší: $\forall b \in M: \underline{a} \preceq b$ $\quad$ VŠECHNY PRVKY JSOU VĚTŠÍ/MENŠÍ

Největší: $\forall b \in M: b \preceq \underline{a}$

Pokrývá:  $\neg \exists z: y \preceq z \preceq x$

$\vee$ SUPREMUM: nejmenší horní závora

Dolní závora: pro podmn. $A \subseteq M$: prvek $x \in M$: $\forall y \in A: x \preceq y$



$\wedge$ INFIMUM: největší dolní závora

Zobrazení

$[a,b] \in R \wedge [a,c] \in R \Rightarrow b = c$

Obraz množ.: $F(M) = \{b; \exists a \in M: f(a) = b\}$

Úplný vzor množ.: $f^{-1}(M) = \{a; \exists b \in M: f(a) = b\}$

INJEKCE = prosté: $\forall a,b \in D(f): a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

SURJEKCE = zobrazení NA: použije se všechno z Y,

$F: X \to Y \Rightarrow \forall y \in Y: \exists x \in X: f(x) = y$ | má to vzor

$\Rightarrow H(f) = Y$

ZOBR. DO: použije všechno z X: $D(f) = X$

ZOBR. NA: „bez Z", $D(f) = X \wedge H(f) = Y$

BIJEKCE: injekce, A na B, surjekce

každý prvek z Y má právě jeden vzor z X

Ekvivalentní množiny: $\exists$ bijekce $A \Leftrightarrow B \Rightarrow A \sim B$

relace $\sim$: $a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$, $\sim$ je ekv. na A,

$A/\sim = H(f)$

Operace

zobrazení $A \times A$ do A

(komutativní, asociativní) VIM

neutrální prvek: $e: \forall a \in A: a \circ e = e \circ a = a$

inverz: $a, a' \in A: a \circ a' = a' \circ a = e$

Binární operace na A má nejvíce 1 neutr. pr.

(důkaz sporem)

op. je asociativní $\wedge \exists e \Rightarrow$ každý prvek má maximálně 1 inverzní prvek

Algebry s jednou operací

GRUPOID: uzavřená

POLOGRUPA: uzavřená + asociativní

MONOID: uzavřená + asoc. + $\exists e$

GRUPA: uzav. + asoc. + $\exists e$ + každý prvek má inverz

si! v řádku grupy každý prvek max. 1x $\Leftrightarrow$ zákon o krácení součtu

Lagrangeova v.: Počet prvků podgrupy je dělitelem počtu prvků grupy.

$(H, \circ)$ je podgrupou $(G, \circ) \Leftrightarrow \forall a,b \in H: a \circ b^{-1} \in H$

$(H, \circ)$ je NORMÁLNÍ podg. $(G, \circ) \Leftrightarrow \forall a \in G: \forall b \in H: a \circ b \circ a^{-1} \in H$ $\quad$ Levý rozklad = pravý rozkl.

(G) je kom. $\Rightarrow (H)$ je norm.

Morfismy

$h: A \to B$, $(A, *)$, $(B, \circ)$ jsou grupy:

$h(a * b) = h(a) \circ h(b)$ pro $\forall a,b \in A$

MONOMORF.: injektivní (každé b má max. jedno a)

EPIMORF.: surjektivní (všechno z B)

IZOMORF.: bijektivní (všechno se něčem přiřadí, jsou si moc podobné)

ENDOMORF: $A \to A$

AUTOMORF.: bijektivní $A \Leftrightarrow A$

Kongruence:

$(X, \circ)$, R je ekvivalence na X

$[a,b] \in R \wedge [c,d] \in R \Rightarrow [a \circ c, b \circ d] \in R$

výsledek operace leží v relaci, když vstupy leží v relaci

rozklad $\mathbb{Z}$ na zb. třídy po dělení m:

$a \equiv b \pmod m$ – dvě čísla jsou ekv. mod m, když mají stejný zbytek po dělení m

je kongr. k $+, -, \cdot$ $\quad a \equiv b \wedge c \equiv d \Rightarrow a + c \equiv b + d$

$(G, \circ)$, R je kongr. na G, e je neutr. pr.

$(H, \circ)$, $H = \{x; x \in G \wedge [x,e] \in R\}$ je normální podgr.

?

Svazy

množina je svazově uspořádaná, když pro každou dvouprvkovou mn. obsahuje supremum i infimum

$\wedge$: průsek $\quad$ $\vee$: spojení

$x \vee x = x \wedge x = x$ $\quad$ idempotence

$x \vee y = y \vee x$; $x \wedge y = y \wedge x$ $\quad$ komut.

asoc.

$x \wedge (x \vee y) = x$, $\quad x \vee (x \wedge y) = x$

$(X, \vee_X, \wedge_X)$, $(Y, \vee_Y, \wedge_Y)$ je podsvaz, když

$x \vee_Y y = x \vee_X y$ = supremum(x,y)

$x \wedge_Y y = x \wedge_X y$ = infimum(x,y)

$F: X \to Y$, $F(x \vee_X y) = f(x) \vee_Y f(y) \Rightarrow$ izomorf.

MODULÁRNÍ: $x \le z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$

DISTRIBUT.: $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (y \vee z)$

KOMPLEMENT.: $\exists$ nejmenší p. 0, největší 1
a ke každému x $\exists \bar{x}$: $x \wedge \bar{x} = 0 \wedge x \vee \bar{x} = 1$

N_5:  M_5: 

modulární $\Leftrightarrow$ neobsahuje podsvaz izomorf. s N_5

distr. $\Leftrightarrow$ neobsahuje M_5 ani N_5

algebra Booleova svazu: pokryjí 0 $\quad (X, \oplus, \otimes, ', 0, 1)$ — $\vee\ \wedge\ \neg$

distr. $\Rightarrow \forall_x\ \exists$ maximálně 1 komplement !

$\neg$ mod. $\Rightarrow \neg$ distr.