⑥ Ondřej Ondráš   Lok. extrémy fce. $f(x,y) = xy^2 + \frac{4}{x} - \frac{9}{y}$

1) Stacionární body

$f_x'(x,y) = y^2 - 4\frac{1}{x^2}$

$f_y'(x,y) = 2xy + 9\frac{1}{y^2}$

→ Hledejme body, kde $f_x'(x,y) = f_y'(x,y) = 0$:

$$y^2 - 4\frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{4}{x^2} \Rightarrow y = \pm\frac{2}{x}$$

$$2xy + 9\frac{1}{y^2} = 0$$

$y = \left|\sqrt{\frac{4}{x^2}}\right|$

Nesmíme zapomenout na druhou větev fce.

$2\cdot x\cdot\left(\frac{2}{x}\right) + 9\cdot\frac{x^2}{4} = 0 \Rightarrow 16 + 9x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{16}{9}$, není v $\mathbb{R}$ řešení.

$2\cdot x\cdot\left(-\frac{2}{x}\right) + 9\frac{x^2}{4} = 0 \Rightarrow -16 + 9x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow x = \pm\frac{4}{3}$ – Ke každému x by se zdánlivě dala najít dvě odpovídající y, jak zjistit, která kombinace je správná? $2xy + 9\frac{1}{y^2} = 0$ → vždy je kladné, aby vyšla nula, musí být tedy člen $2xy$ záporný => x a y musí mít opačná znaménka => $x = \frac{4}{3} \to y = -\frac{2}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{2}$; $x = -\frac{4}{3} \Rightarrow y = +\frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}$.

Stacionárními body jsou body $\left[\frac{4}{3}; -\frac{3}{2}\right]_A$ a $\left[-\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right]_B$.

2) Extrémy: sestavíme Hessovu matici:

$f_{xx}''(x,y) = 8\frac{1}{x^3}$

$f_{yy}''(x,y) = 2x - 18\frac{1}{y^3}$

$f_{xy}''(x,y) = 2y$

$$H = \begin{pmatrix} 8/x^3 & 2y \\ 2y & 2x - 18\frac{1}{y^3} \end{pmatrix} \qquad \det H = \frac{8}{x^3}\cdot\left(2x - 18\frac{1}{y^3}\right) - 4y^2 = \frac{16}{x^2} - \frac{144}{x^3y^3} - 4y^2$$

Dosadíme do $\det H$ stac. body: A: $\frac{16}{\frac{16}{9}} - \frac{144}{\frac{64}{\cancel{27}}\cdot\frac{-\cancel{27}}{8}} - 4\cdot\frac{9}{4} = 9 + 18 - 9 = 18$ => větší než 0 => bod A je lok. extrém

B: $\frac{16}{\frac{16}{9}} - \frac{144}{\frac{-64}{27}\cdot\frac{27}{8}} - 4\cdot\frac{9}{4}$ výraz je stejný => bod B je taky extrém

Je to lok. min. nebo max.? A: $f_{xx}''\left(\frac{4}{3}, -\frac{3}{2}\right) = 8\cdot\frac{1}{\frac{64}{27}}$ což je > 0 => **Bod A** $\left[\frac{4}{3}; -\frac{3}{2}\right]$ je lokální minimum. (s hodnotou 12)

B: $f_{xx}''\left(-\frac{4}{3}, -\frac{3}{2}\right) = 8\cdot\frac{1}{-\frac{64}{27}}$, což je < 0 => **Bod B** $\left[-\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right]$ je lokální maximum. (s hodnotou −12)

$\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{4} + 3 + \frac{18}{3} = 3 + 3 + 6 = 12$