Derivace:

$(e^x)' = e^x$

$a^{x\prime} = \ln(a) \cdot a^x$

$\ln x' = \frac{1}{x}$

$\log_a x' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$

$\sin x' = \cos x$

$\cos x' = -\sin x$

$\mathrm{tg}\, x' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\mathrm{cotg}\, x' = \frac{-1}{\sin^2 x}$

$\arcsin x' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arccos x' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\mathrm{arctg}\, x' = \frac{1}{x^2+1}$

Ez integrály:

$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

$\int \cos x \, dx = \sin x + c$

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg}\, x + c$

$\int e^x = e^x$

Per partes:

$\int u(x) \cdot v'(x) = u(x) v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, dx$

Substituce:

$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt = F(g(x)) + c$

Univerzální goniometrická:

$t = \mathrm{tg} \frac{x}{2}$ $\quad \sin \frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ $\quad \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

$\mathrm{arctg}\, t = \frac{x}{2}$ $\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$dx = \frac{2}{1+t^2}$

nebo x

Parciální zlomky: $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

$n < m$

2) jmenovatel na součin $\quad$ 3) $\frac{A_n}{(x-a)^k}$ nebo $\frac{A_n x + A_n}{ax^2+bx+c}$

Subst. ve fcích se sin a cos:

lichá v sinu $\Rightarrow t = \cos x$ $\quad$ lichá v cosinu $\Rightarrow t = \sin x$

sudé v sinu i cosinu $\Rightarrow t = \mathrm{tg}\, x$

Objem rotačního tělesa: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

Délka křivky: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$

Odmocniny:

různé odm. se stejným výrazem: výraz $= t^{NSN\, \mathrm{exp.}}$

$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt{x}} dx \quad \left| \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right|$

Kvadratický dvojčlen

$\sqrt{x^2-1} = x + t$ $\quad$ a umocnit obě strany

cosi:

$\int \sqrt{a^2-x^2} dx \quad \left| \begin{array}{l} x = a \cdot \sin t \\ dx = a \cdot \cos t \, dt \end{array} \right| \Rightarrow \int \cos^2 t = \frac{1}{2} \int \cos 2t + 1 = \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{2} t$

$\int \ln x \quad \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ v' = 1 \end{array} \right|$ $\qquad \int \frac{1}{x} \ln x \quad \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ v' = 1/x \end{array} \right|$

$\int f(x) \cdot f'(x) = \frac{[f(x)]^2}{2} + c$ $\qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + c$

$\int e^x \cdot \sin x \quad \left| \begin{array}{l} u = \sin x \\ v' = e^x \end{array} \right|$ $\qquad \int \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} \quad | t = \ln x |$

$\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \quad \left| \begin{array}{l} u = \ln(\dots) \\ v' = 1 \end{array} \right|$

$\int \frac{\ln(\mathrm{tg}\, x)}{\sin x \cos x} \quad \left| \begin{array}{l} t = \ln(\mathrm{tg}\, x) \\ dt = \frac{dx}{\sin x \cos x} \end{array} \right|$ $\qquad \int \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + c$

$\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{a - \sin^2 x}} \quad | t^2 = a - \sin^2 x |$

$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}} \quad | e^x + 1 = t^4 |$

$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln|\mathrm{tg} \frac{x}{2}|$

Random věci:

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

Rovnice tečny: $y - y_0 = k(x - x_0)$

Asymptoty:

$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ $\qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax]$

Taylorův pol.: $T_{(x)} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

chyba: $f(x) = T_n(x) + R_{n+1}^{(x)} \rightarrow \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ největší hodnota kterou $f^{(n+1)}$ nabývá na $(0,1)$

Limita: A je limitou f(x), když v bodě c

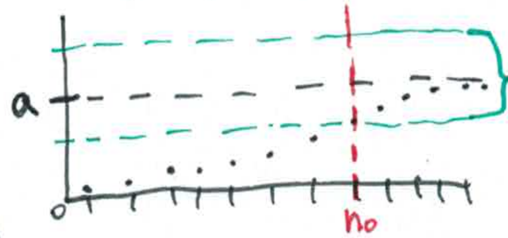
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

ε-okolí bodu a: $U(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ $U^*(a,\varepsilon) = U(a,\varepsilon) \setminus \{a\}$

Hromadný bod: a je hrom. bod množiny M, když v každém jeho U^* leží aspoň jeden bod z množiny M

$M \le a \Leftrightarrow \forall x \in M: x \le a$ – a je horní ohraničení M. $a \in M \Rightarrow$ a je největší prvek M.

Limita posloupnosti: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0: n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$



„ať zúžím pás ε kolem a jakkoliv, beztak do něj nakonec padnou všechny zbylé hodnoty"

Nevlastní lim. p.: $\lim a_n = \infty \Leftrightarrow \forall A \ \exists n_0: \forall n: n > n_0 \Rightarrow a_n > A$

Divergence: nemá lim. nebo má nevlastní lim.

konvergentní ⇒ ohraničená

monotónní $\wedge$ ohr. ⇒ konvergentní

Horní limita = horní ohraničení: $\limsup (a_n)$

Hromadný bod posl.: pro každé okolí $U(b)$?

Když $\lim(a_n) = \lim(b_n) = x \wedge \exists n_0: n > n_0 \Rightarrow a_n \le c_n \le b_n$, pak $\lim(c_n) = x$

$\lim a_n = 0$ a b_n je ohraničená $\Rightarrow \lim a_n \cdot b_n = 0$

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim |a_n| = \infty \wedge a_n \neq 0 \Rightarrow \lim \frac{1}{a_n} = 0$

Limita funkce: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \forall x \in U^*(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in U(A,\varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = A$

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

zprava $0 < x-a < \delta$

zleva: $0 < a-x < \delta$

funkce má v jednom bodě max. jednu limitu

$\lim_{x \to a} f(x) < \lim_{x \to a} g(x) \Rightarrow \exists U(a): \forall x \in U^*(a): f(x) < g(x)$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to a} f(x) = b \wedge \lim_{x \to a} g(x) = c \wedge \exists U(a): f(x) \le g(x) \Rightarrow b \le c$

$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \wedge g(x)$ je ohraničená $\Rightarrow \lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{x} = a$

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \wedge g(x)$ —||— $\Rightarrow \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \infty$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$

spojitá na $\langle a,b \rangle \Rightarrow$ ohraničená na $\langle a,b \rangle$

Weierstrass: spojitá na $\langle a,b \rangle$ – v nějakých bodech $\in \langle a,b \rangle$ nabývá svého minima a maxima