Міністерство освіти і науки України
Національний університет “Львівська політехніка”
Інститут комп’ютерних наук та інформаційних технологій
Кафедра обчислювальної математики і програмування

Розрахунково-графічна робота №2
Дисципліна “Вища математика частина 2”
Варіант-22

Виконав:
студент групи КН-108
Пагута В.О.

Прийняв:
Доцент кафедри ОМП
Пахолок Б.Б.

Львів 2021

Ряди

$\boxed{1.22}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+8^n}{24^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n}{24^n}+\frac{8^n}{24^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8^n}+\frac{1}{3^n}\right)$

Ряд є збіжний, бо $q = 1/8 < 1$ і $q = 1/3 < 1$
Знайдемо суму даного ряду.
Відомо, що для $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \Rightarrow S = \frac{1}{1-q}$

Тоді $S = \frac{1}{1-1/8} + \frac{1}{1-1/3} = \frac{8}{7} + \frac{3}{2} = \frac{16+21}{14} = 37/14$

$\boxed{2.22}$ $\sum_{n=1}^{\infty} (3n-1)\cdot \sin\frac{\pi}{4^n}$; $a_n = (3n-1)\cdot\sin\frac{\pi}{4^n}$;

$a_{n+1} = (3n+2)\sin\frac{\pi}{4^{n+1}}$; $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)\sin \pi/4^n}{(3n+2)\sin \pi/4^{n+1}} =$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{n(3-1/n)\cdot\sin\pi/4^n\cdot\pi/4^{n+1}}{n(3+2/n)\cdot\sin\pi/4^{n+1}\cdot\pi/4^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3-1/n)\sin\pi/4^n}{(3+2/n)\cdot\pi/4^n\cdot 4} = 4>1$

Отже, ряд розбіжний

$\boxed{3.22}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$; $a_n = \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n(3+1/n)} = \frac{1}{3} < 1$

Отже, ряд збіжний

$\boxed{4.22}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+n}{n^2-2n+9}$; $\int_1^{\infty}\frac{3+n}{n^2-2n+9}\,dn =$ $\left| \begin{array}{l} d(n^2-2n+9) = \\ = 2n-2 \end{array}\right.$

$= \lim_{b\to\infty}\left[\int_1^b \frac{1}{2}\frac{2n-2}{n^2-2n+9}\,dn + 2\int_1^b\frac{dn}{n^2-2n+9}\right] =$

$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\int_1^b\frac{d(n^2-2n+9)}{n^2-2n+9} + 2\int_1^b\frac{dn}{(n-1)^2+8}\right] =$

$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\cdot\ln(n^2-2n+9)\Big|_1^b + \frac{2}{2\sqrt{2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{n-1}{2\sqrt{2}}\Big|_1^b\right] =$

$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(b^2-2b+9) - \frac{1}{2}\ln(1-2+9) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{b-1}{2\sqrt{2}} -\right.$

$\left.- \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg} 0\right] = \infty - \frac{1}{2}\ln 8 + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\infty}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg} 0 = \infty$

ряд. розбіжний.

$\boxed{5.22}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2n-1}$; $\sin\frac{\pi}{2n-1} \sim \frac{\pi}{2n-1} < \frac{1}{n}$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ є гармонійний ряд, що є розбіжний,
тому і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2n-1}$ також є розбіжний

$\boxed{6.22}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(2n)!}$; Використаємо ознаку Даламбера

$a_n = \frac{(n+1)!}{(2n)!}$; $a_{n+1} = \frac{(n+2)!}{(2n+2)!}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)! \cdot 2n!}{(2n+2)!(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+1)! \cdot (2n)!}{(2n+2)(2n+1)\cdot(2n)!\,(n+1)!} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{(2n+2)(2n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(1+2/n)}{n^2(2+2/n)(2+1/n)} = \frac{1}{\infty} = 0$

Отже, ряд є збіжним.

$\boxed{7.22}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3}{\ln(n+1)}$; Дослідимо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\ln(n+1)}$ за ознакою порівняння: $\frac{3}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n}$;

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ є гармонійний ряд, що є розбіжний,
тоді і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\ln(n+1)}$ є також розбіжний. Але виконується умова Лейбніця для знакочережних рядів:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{\ln(n+1)} = \frac{3}{\infty} = 0$

2) $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$, тому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{3}{\ln(n+1)}$ є умовно збіжний ряд.

$\boxed{8.22}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{n^2+1}$; Перевіримо необхідну умову збіжності ряду: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2(1+1/n^2)} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{1+1/n^2} = \infty$. Тому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{n^2+1}$
є розбіжний ряд, бо необхідна умова не виконується, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

ІЗ – 15.2

$\boxed{1.22}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{\sqrt{n}}$; Дослідимо ряд за ознакою Даламб.

$a_n = \frac{3^n x^n}{\sqrt{n}}$; $a_{n+1} = \frac{3^{n+1} \cdot x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n+1} \cdot x^{n+1} \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} \cdot 3^n \cdot x^n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{3 \cdot 3^n \cdot x \cdot x^n \sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{1+1/n} \cdot 3^n \cdot x^n} \right| = 3|x|$

$3 \cdot |x| < 1 \Rightarrow -1 < 3x < 1 \Rightarrow -1/3 < x < 1/3$

Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу:

$x = 1/3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; Дослідимо за допомогою інтегральної ознаки Коші:

$\int_1^{\infty} \frac{dn}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{b\to\infty} 2\sqrt{n} \Big|_1^b = 2 \lim\limits_{b\to\infty} (\sqrt{b} - \sqrt{1}) = 2(\infty - 1) = \infty$.

Ряд розбіжний, точка не входить в інтервал.

$x = -1/3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; Виконується умова Лейбніца для знакочережних рядів: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0$; $a_1 > a_2 > \ldots > a$

тоді ряд умовно збіжний, і точка входить в інтервал;

Отже, інтервал збіжності $x \in [-1/3; 1/3)$

$\boxed{2.22}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$; Дослідимо за ознакою Даламбера

$a_n = \frac{n!}{x^n}$; $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{x^{n+1}}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)! \, x^n}{x^{n+1} \cdot n!} \right| =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1) \cdot n! \, x^n}{|x| \cdot x^n \cdot n!} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(n+1)}{|x|} = \frac{\infty}{|x|} = \infty$.

Ряд розбіжний при будь-яких x.

$\boxed{3.22}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$; Дослідимо за ознакою Даламбера.

$a_n = \frac{(x+3)^n}{n^2}$; $a_{n+1} = \frac{(x+3)^{n+1}}{(n+1)^2}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{(x+3)^{n+1} \cdot n^2}{(n+1)^2 \cdot (x+3)^n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x+3|(x+3)^n \cdot n^2}{n^2(1+1/n)^2(x+3)^n} =$

$= |x+3| < 1$; $-1 < x+3 < 1$; $-4 < x < -2$

Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу

$\underline{x=-2}$ $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3-2)^n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ -ряд збіжний, бо степінь в знаменнику $p=2>1$. Точка входить в інтервал.

$\underline{x=-4}$ $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ - абсолютно збіжний ряд. Точка також входить в інтервал.

Отже, інтервал збіжності $x \in [-4; -2]$

$\boxed{4.22}$ $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$; $x_0 = 2$

1) Розклад в ряд Маклорена: $f(x) = f(0) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

$f(0) = \sin 0 = 0$; $f'(x) = \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi x}{4}$; $f'(0) = \frac{\pi}{4}$

$f''(x) = -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sin \frac{\pi x}{4}$; $f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \cos \frac{\pi x}{4}$; $f'''(0) = -\left(\frac{\pi}{4}\right)^3$

$f^{IV}(x) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \sin \frac{\pi x}{4}$; $f^{IV}(0) = 0$ ...

$f(x) = 0 + \frac{\pi}{4} \frac{x}{1!} + \frac{0 \cdot x^2}{2!} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \frac{x^3}{3!} + \frac{0 \cdot x^4}{4!} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1} \cdot \pi^n}{4^n \cdot n!}$

Область збіжності ряду $x \in (-\infty; +\infty)$

2) Розклад в ряд Тейлора

$f(2) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$; $f'(2) = 0$; $f''(2) = -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$

$f'''(2) = 0$; $f^{IV}(2) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^4$; ...

Отже:

$f(x) = 1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \frac{(x-2)^2}{2!} + \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \frac{(x-2)^4}{4!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \frac{(x-2)^n}{n!}$

Область збіжності ряду $x \in (-\infty; +\infty)$

$\boxed{5.22}$ $\sqrt{e} = e^{1/2}$; $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$

$e^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2} + \frac{1}{2^3 \cdot 6} + \frac{1}{2^4 \cdot 24} + \frac{1}{2^5 \cdot 120} = 1 + 0,5 + 0,125 +$
$+ 0,002 \approx 1,627$

$\boxed{6.22}$ $\int_0^1 \cos \sqrt[3]{x}\, dx$; Використаємо відомий розклад:
$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots$; $t = \sqrt[3]{x}$, тоді:
$\cos \sqrt[3]{x} = 1 - \frac{\sqrt[3]{x}^2}{2!} + \frac{\sqrt[3]{x}^4}{4!} - \frac{x^2}{6!} + \dots$; Обчислимо інтеграл:
$\int_0^1 \left(1 - \frac{x^{2/3}}{2} + \frac{x^{4/3}}{24} - \frac{x^2}{720} + \dots\right) dx = \left(x - \frac{x^{5/3}}{2 \cdot 5} \cdot 3 + \frac{x^{7/3}}{7 \cdot 24} \cdot 3 -\right.$
$\left. - \frac{x^3}{3 \cdot 720}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{3}{10} + \frac{3}{168} - \frac{1}{2160} \approx 1 - 0,3 + 0,018 +$
$+ 0,001 \approx 0,717$

$\boxed{7.22}$ $y' = 2x^2 - xy$; $y(0) = 0$
Нехай: $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots$
Тоді: $y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots$
Знайдемо a_0 з вхідних даних:

$y(0) = a_0 = 0$

Підставимо y та y' в початкове рівняння:
$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = 2x^2 - x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)$
x^0: $a_1 = 0$; x^1: $2a_2 = -a_0$; $a_2 = 0$
x^2: $3a_3 = 2 - a_1$; $\underline{a_3 = 2/3}$
x^3: $4a_4 = -a_2$; $a_4 = 0$
x^4: $5a_5 = -a_3$; $\underline{a_5 = -2/15}$
x^5: $6a_6 = -a_4$; $a_6 = 0$
x^6: $7a_7 = -a_5$; $a_7 = 2/105$
Отже, розв'язок диф. рівняння:

$$y(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{15}x^5 + \frac{2}{105}x^7 + \dots$$

$\boxed{8.22}$ $y' = x \cdot y + x^2 + e^{-x}$; $y(0) = 0$; $k = 3$
Степеневий ряд Тейлора:
$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$
$y'(0) = 0 + 0 + e^0 = 1$
$y'' = y + x \cdot y' + 2x - e^{-x}$; $y''(0) = 0 - e^0 = -1$
$y''' = y' + y' + xy'' + 2 + e^{-x}$; $y'''(0) = 2 + 2 + 1 = 5$

Отже:
$f(x) = 0 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^3}{3!} + \dots$

$\boxed{1.22}$ $f(x) = \begin{cases} 6x-2 & ; \ -\pi \le x \le 0 \\ 0 & ; \ 0 \le x \le \pi \end{cases}$

Знайдемо коефіцієнт a_0:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(6x-2)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{6x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{-\pi}^{0} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-3\pi^2 - 2\pi\right) = -3\pi - 2$$

Знаходимо решту коефіцієнтів Фур'є:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 6x-2 \\ du &= 6\,dx \\ dv &= \cos nx\,dx \\ v &= +\frac{1}{n}\sin nx \end{aligned}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(6x-2)\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(6x-2)\frac{1}{n}\cdot\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{6}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{6}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{6}{\pi n^2}\cdot\left(\cos 0 - \cos(-\pi n)\right) = 6\,\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} dv &= \sin nx\,dx \\ v &= -\frac{1}{n}\cos nx \end{aligned}}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(6x-2)\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-(6x-2)\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{6}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[2\frac{1}{n}\cos 0 + (-6\pi-2)\frac{1}{n}\cos(-\pi n) + \frac{6}{n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(2 - (6\pi+2)(-1)^n\right).$$

Отже, розклад в ряд Фур'є буде:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos nx + b_n\cdot\sin nx\right) =$$

$$= \frac{-3\pi-2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[6\,\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx + \frac{2-(6\pi+2)(-1)^n}{\pi n}\sin nx\right].$$

$\boxed{2.22}$ $f(x)=x^2+1$; $x\in[0;\pi]$. 1) Розкладемо парним рядом. (Рис.1.)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\cos nx \quad ; \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2+1)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}+\pi\right) = \frac{2\pi^2}{3}+\frac{2}{3}.$$

(продовж) $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\cos nx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2+1)\cos nx\,dx =$

$= \left(u=x^2+1\ ;\ du=2x\,dx\ ;\ dv=\cos nx\,dx\ ;\ v=\frac{1}{n}\sin nx\right)$

$= \frac{2}{\pi}\left[(x^2+1)\frac{1}{n}\underbrace{\sin nx\Big|_0^{\pi}}_{0} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\cdot\sin nx\,dx\right]$

$= \left(u=x\ ;\ du=dx\ ;\ dv=\sin nx\,dx\ ;\ v=-\frac{1}{n}\cos nx\right)$

$= -\frac{4}{n\cdot\pi}\left[x\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right] = \frac{-4}{\pi n}\left(-\frac{\pi}{n}\cos\pi n +\right.$

$\left.+0\cdot\frac{1}{n}\cos 0 + \frac{1}{n^2}\underbrace{\sin nx}_{0}\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{+4}{n^2}(-1)^n.$

Отже: $f(x) = \frac{\pi^2}{3}+\frac{1}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos nx.$

2) Розкладемо непарним рядом. (Рис. 2.)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot\sin nx \quad ; \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx =$$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2+1)\sin nx\,dx = \left(\begin{array}{ll} u=x^2+1 ; & dv=\sin nx\,dx \\ du=2x\,dx ; & v=-1/n\cos nx\end{array}\right)$

$= \frac{2}{\pi}\left[(x^2+1)\left(-\frac{1}{n}\right)\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\cdot\cos nx\,dx\right] =$

$= \left(u=x\ ;\ du=dx\ ;\ dv=\cos nx\,dx\ ;\ v=\frac{1}{n}\sin nx\right)$

$= \frac{2}{\pi}\left((\pi^2+1)\left(-\frac{1}{n}\right)\cos\pi n + \frac{1}{n}\cos 0 + \frac{2}{n}\left(x\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} -\right.\right.$

$\left.\left.-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right)\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{(\pi^2+1)}{n}(-1)^n + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^3}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right) =$

$= \frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n(\pi^2+1) + \frac{2}{n^2}(-1)^n - \frac{2}{n^2}\right)$;

Отже: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\left(1-\frac{2}{n^2} - (-1)^n\left(\pi^2+1-\frac{2}{n^2}\right)\right)\sin nx$

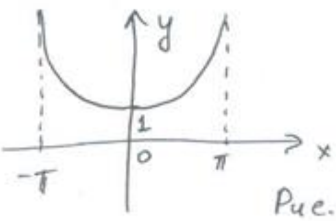


Рис.1.

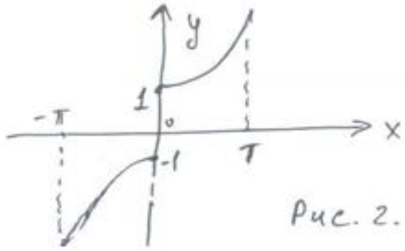


Рис. 2.

$\boxed{3.22}$ $f(x) = 2x+2$; $-1 < x < 3$; $l=2$.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3}(2x+2)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-1}^{3} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(9-1+6-2(-1)\right) = \frac{16}{2} = 8.$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3}(2x+2)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx =$$

$$= \boxed{u = 2x+2;\ du = 2\,dx;\ dv = \cos\frac{n\pi x}{2}dx;\ v = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(2x+2)\frac{2}{\pi n}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-1}^{3} - \frac{4}{\pi n}\int_{-1}^{3}\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\pi n}\cdot 8\cdot\sin\frac{3\pi n}{2} - 0 + \frac{8}{(\pi n)^2}\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_{-1}^{3}\right] =$$

$$= \frac{8}{\pi n}(-1)^n + \frac{4}{(\pi n)^2}\left(\cos\frac{3\pi n}{2} - \cos\left(-\frac{\pi n}{2}\right)\right) = \frac{8}{\pi n}(-1)^n + \frac{4}{(\pi n)^2}\cdot(0)$$

$$\pm \frac{8}{\pi n}(-1)^n.$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3}(2x+2)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

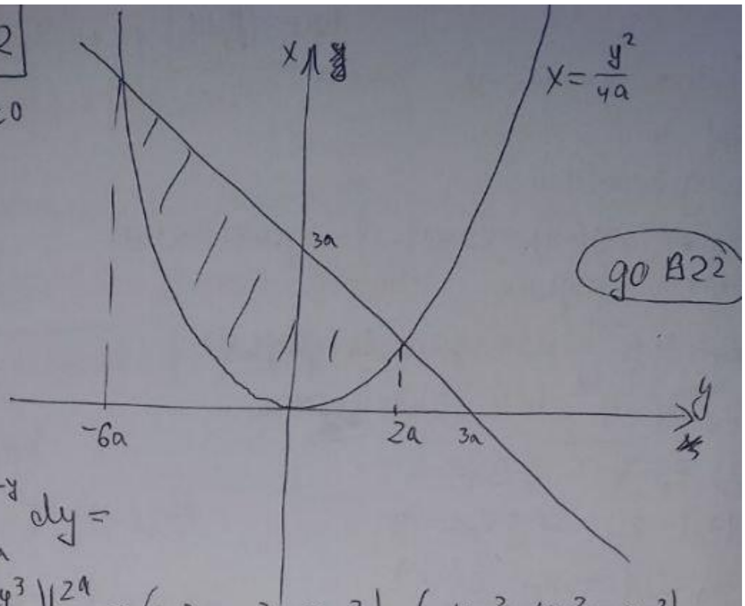
$$\boxed{dv = \sin\frac{n\pi x}{2}dx;\ v = -\frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi x}{2}} = \frac{1}{2}\left[-(2x+2)\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_{-1}^{3} +\right.$$

$$\left. + \frac{4}{\pi n}\int_{-1}^{3}\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{8\cdot 2}{\pi n}\cdot\underbrace{\cos\frac{3\pi n}{2}}_{0} + 0 + \frac{8}{(\pi n)^2}\sin\frac{\pi n x}{2}\Big|_{-1}^{3}\right] =$$

$$= \frac{4}{(\pi n)^2}\left(\sin\frac{3\pi n}{2} - \sin\left(-\frac{\pi n}{2}\right)\right) = \frac{4}{(\pi n)^2}\left((-1)^n - (-1)^n\right) = 0.$$

Ответ: $f(x) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 8}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}.$

РГР B22



B-22 $y^2=4ax;\ x+y=3a,\ y\geq 0$

$x=\frac{y^2}{4a};\ x=3a-y$

$\frac{y^2}{4a}=3a-y;\ y^2+4ay-12a^2=0$

$D=16a^2+48a^2=64a^2$

$y_1=\frac{-4a-8a}{2}=-6a$

$y_2=\frac{-4a+8a}{2}=2a$

$S=\iint_S dxdy=\int_{-6a}^{2a}dy\int_{y^2/4a}^{3a-y}dx=\int_{-6a}^{2a}x\Big|_{y^2/4a}^{3a-y}dy=$

$=\int_{-6a}^{2a}\left(3a-y-\frac{y^2}{4a}\right)dy=\left(3ay-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{12a}\right)\Big|_{-6a}^{2a}=\left(6a^2-2a^2-\frac{3}{3}a^2\right)-\left(-18a^2-18a^2+3a^2\right)=$

$=4a^2-\frac{2}{3}a^2+33a^2=36\frac{1}{3}a^2$

V22 $\iiint_V \sin(x+y)\sin z\,dxdydz=\int_0^{\pi/2}dx\int_0^{\pi/2}dy\int_{x-y}^{x+y}\sin(x+y)\sin z\,dz=$

$=-\int_0^{\pi/2}dx\int_0^{\pi/2}\sin(x+y)\cos z\Big|_{x-y}^{(x+y)}dy=-\int_0^{\pi/2}dx\int_0^{\pi/2}\left(\sin(x+y)\cos(x+y)+\sin(x+y)\cos(x-y)\right)dy=$

$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}dx\int_0^{\pi/2}\left(\sin(2x+2y)+\sin 2x+\sin 2y\right)dy=+\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\left(\cos(2x+2y)-\right.$

$\left.-2y\sin 2x+\cos 2y\right)\Big|_0^{\pi/2}dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\left(\cos(\pi+2x)-\pi\sin 2x-1-\cos 2x-(-1)\right)dx$

$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\left(-\cos 2x+\pi\sin 2x-\cos 2x\right)dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\left(\pi\sin 2x-2\cos 2x\right)dx=$

$=\frac{1}{4}\left(-\frac{\pi}{2}\cos 2x-\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{4}$

K22 $y=1-\ln\cos x;\ y'=+\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg}x$

$l=\int_l ds=\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}\,dx=\int_0^{\pi/4}\sqrt{\frac{1}{\cos^2x}}\,dx=\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x}=$

$=\int_0^{\pi/4}\frac{\cos x\,dx}{\cos^2x}=\int_0^{\pi/4}\frac{d(\sin x)}{1-\sin^2x}=\left|w=\sin x\right|=\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{dw}{1-w^2}=-\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{dw}{w^2-1}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{w-1}{w+1}\right|\Big|_0^{\sqrt{2}/2}=$

$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}\right|+\frac{1}{2}\ln 1=-\frac{1}{2}\ln\frac{-\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+2}=\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{2}+2)^2}{4-2}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}(2+4\sqrt{2}+4)\right)=$

$=\frac{1}{2}\ln(3+4\sqrt{2})$

РГР | В22

Р2В2 $\int\limits_L x\,dx + (x+y)\,dy + (x+y+2)\,dz = \left| \begin{array}{l} x = a\sin t \\ y = a\cos t \\ z = a(\sin t + \cos t) \end{array} \right. \quad t \in [0; 2\pi]$

$= \int\limits_0^{2\pi} \big(a\sin t\, a\cos t + a(\sin t + \cos t)(-a)\sin t + 2a(\sin t + \cos t)\cdot a(\cos t - \sin t)\big)\,dt$

$= \int\limits_0^{2\pi} \big(a^2 \sin t\cos t - a^2\sin^2 t - a^2 \cos t \sin t + 2a(\cos^2 t - \sin^2 t)\big)\,dt$

$= \int\limits_0^{2\pi} a^2(2\cos^2 t - 3\sin^2 t)\,dt = a^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(1 + \cos 2t - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos 2t\right) dt = a^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\cos 2t\right) dt =$

$= a^2 \left(-\frac{t}{2} + \frac{5}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = a^2(-\pi) = -\pi a^2$

(1) $u = x^3 + \sqrt{y^2+z^2} \quad \vec{l}\,(0; -1; -1) \quad M(1; -3; 4)$

$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M = 3x^2\Big|_M = 3; \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M = \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\Big|_M = \frac{-3}{5} = -0{,}6$

$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M = \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\Big|_M = \frac{4}{5} = 0{,}8 \quad ; \quad |\vec{l}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\Big|_M = \overrightarrow{\text{grad}\, u}\Big|_M \cdot \vec{l} \cdot \frac{1}{|\vec{l}|} = (3; -0{,}6; 0{,}8)\cdot(0; -1; -1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = (0{,}6 - 0{,}8)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-\sqrt{2}}{10}$

(2) $\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_M = \frac{3}{\sqrt{2}}x^2\Big|_M = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}; \quad \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_M = -\frac{3y^2}{\sqrt{2}}\Big|_M = -\frac{6}{\sqrt{2}} = -3\sqrt{2}$

$\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_M = -\frac{24 y^2}{\sqrt{3}} = -\frac{24\cdot 3}{4\sqrt{3}} = -6\sqrt{3} \quad ; \quad \vec{a} = \overrightarrow{\text{grad}\, v}\Big|_M = (3\sqrt{2}; -3\sqrt{2}; -6\sqrt{3})$

$u = x^2 y^{-2} z^{-3} \quad M\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M = 2x y^{-2} z^{-3}\Big|_M = 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{6}}{9}$

$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M = -2x^2 y^{-3} z^{-3}\Big|_M = -2\cdot 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{8}{3\sqrt{3}} = -\frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = -\frac{8\sqrt{6}}{9}$

$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M = -3x^2 y^{-2} z^{-4}\Big|_M = -3\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{9} = -\frac{16}{3}$

$\vec{b} = \overrightarrow{\text{grad}\, u}\Big|_M = \left(\frac{8\sqrt{6}}{9}; -\frac{8\sqrt{6}}{9}; -\frac{16}{3}\right)$

$|\vec{a}| = \sqrt{18 + 18 + 108} = 12; \quad |\vec{b}| = \sqrt{\frac{128}{27} + \frac{128}{27} + \frac{256}{9}} = \sqrt{\frac{1024}{27}} = \frac{32}{3\sqrt{3}}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{8\sqrt{6}}{9}\cdot 3\sqrt{2} + \frac{8\sqrt{6}}{9} 3\sqrt{2} - \frac{16}{3} 6\sqrt{3} = \frac{48\sqrt{3}}{9} - \frac{96\sqrt{3}}{3} = -\frac{240\sqrt{3}}{9} = -\frac{80\sqrt{3}}{3}$

$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = -\frac{80\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{32} = \frac{5}{8}; \quad \alpha = \arccos\frac{5}{8}$

РГР | В22

③ $\Pi = \iint\limits_S x\,dy\,dz - y\,dx\,dz + 6z\,dx\,dy =$

$= \left| \begin{matrix} z = 2 - 2x - 4y \\ z'_x = -2; \ z'_y = -4 \end{matrix} \right| =$

$= \iint\limits_D (x \cdot 2 - y \cdot 4 + 6(2 - 2x - 4y))\,dx\,dy =$

$= \iint\limits_D (\underline{2x} - 4y + 12 - \underline{12x} - 24y)\,dx\,dy =$

$= \iint\limits_D (-10x - 28y + 12)\,dx\,dy =$

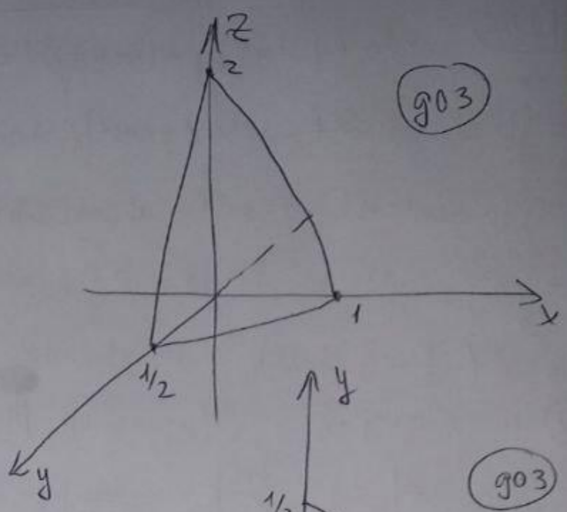
$= \int_0^{1/2} dy \int_0^{1-2y} (12 - 10x - 28y)\,dx =$

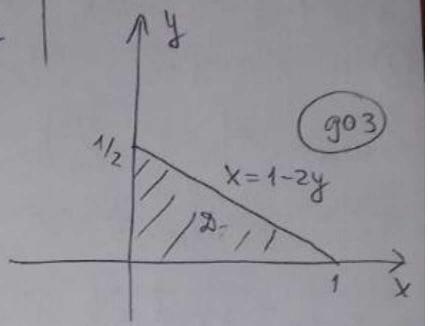
$= \int_0^{1/2} (12x - 5x^2 - 28xy)\Big|_0^{1-2y} dy =$

$= \int_0^{1/2} (12(1-2y) - 5(1 - 4y + 4y^2) - 28y(1 - 2y))\,dy =$

$= \int_0^{1/2} (12 - \underline{24y} - 5 + \underline{20y} - \underline{20y^2} - \underline{28y} + \underline{48y^2})\,dy = \int_0^{1/2} (28y^2 - 32y + 7)\,dy =$

$= \left(\frac{28}{3} y^3 - 16y + 7y\right)\Big|_0^{1/2} = \frac{7}{6} - 8 + 7 = \frac{1}{6}$



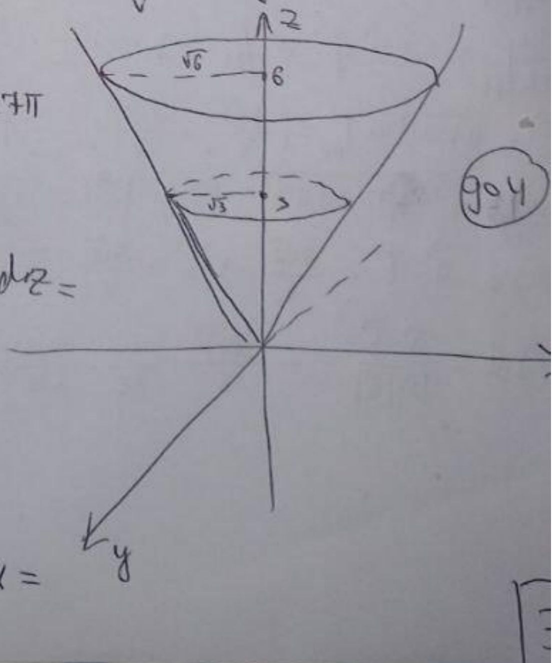


④ $\Pi = \iint\limits_S (\sin z + 2x)\,dy\,dz + (\sin x - 3y)\,dx\,dz + (\sin y + 2z)\,dx\,dy =$

$= \left|$ За формулою Остроградського $\right| = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial}{\partial x}(\sin z + 2x) + \frac{\partial}{\partial y}(\sin x - 3y) + \frac{\partial}{\partial z}(\sin y + 2z)\right) dx\,dy\,dz = \iiint\limits_V (2 - 3 + 2)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz =$

$= V$ (зрізаного конуса) $= V_1 - V_2 =$

$= \pi r_1^2 h_1 - \pi r_2^2 h_2 = \pi \cdot 6 \cdot 6 - \pi \cdot 3 \cdot 3 = 36\pi - 9\pi = 27\pi$



⑤ $\Pi = \iint\limits_S 17x\,dy\,dz + 7y\,dx\,dz + 11z\,dx\,dy =$

$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial}{\partial x}(17x) + \frac{\partial}{\partial y}(7y) + \frac{\partial}{\partial z}(11z)\right) dx\,dy\,dz =$

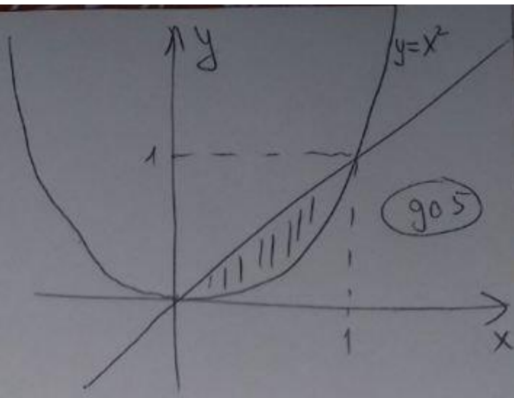
$= 35 \iiint\limits_V dx\,dy\,dz = 35 \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz =$

$= 35 \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (2x^2 + 2y^2 - x^2 - y^2)\,dy =$

$= 35 \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x^2 + y^2)\,dy = 35 \int_0^1 \left(\frac{y^3}{3} + x^2 y\right)\Big|_{x^2}^{x} dx =$

⑤ (прод)

РГР|B22



$$=35\int_0^1\left(\frac{x^2}{3}+x^3-\frac{x^6}{3}-x^4\right)dx=$$

$$=35\int_0^1\left(\frac{4}{3}x^3-\frac{x^6}{3}-x^4\right)dx=35\left(\frac{x^4}{3}-\frac{x^7}{21}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=$$

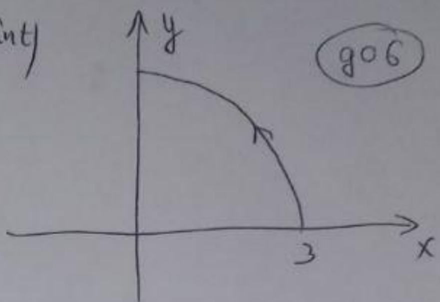
$$=35\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{21}-\frac{1}{5}\right)=\frac{35}{3}-\frac{5}{3}-7=3$$

⑥ $$A=\int x^2dy=\left|\begin{matrix}x=3\cos t\\ y=3\sin t\end{matrix}\right|t\in(0;\tfrac{\pi}{2})\Big|=$$

$$=\int_0^{\pi/2}9\cos^2t\,3\cos t\,dt=27\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2t)\,d(\sin t)=|w=\sin t|$$

$$=27\int_0^1(1-w^2)dw=27\left(w-\frac{w^3}{3}\right)\Big|_0^1=27\left(1-\frac{1}{3}\right)=$$

$$=27\cdot\frac{2}{3}=18.$$



⑦ $$U_y=\int(-x^2y^3)\,dx+dy\cdot3+y\,dz=\left|\begin{matrix}x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=5\end{matrix}\right|=$$

$$=\int_0^{2\pi}(+\cos^2t\sin^3t\sin t+3\cos t+\sin t\cdot0)\,dt=\int_0^{2\pi}(\cos^2t\sin^4t)\,dt+3\sin t\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1+\cos2t)(1-\cos2t)^2dt=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos^22t)(1-\cos2t)dt=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos2t-\cos^22t+\cos^32t)dt=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos^22t)\,dt=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\sin^22t\,dt=$$

$$=\frac{1}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos4t)dt=\frac{1}{16}\left(t-\frac{1}{4}\sin4t\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{2\pi}{16}=\frac{\pi}{8}$$