

2008~2009 学年第一学期期末考试试卷

《数值计算方法与 Matlab》(A 卷 共三页)

(考试时间: 2008 年 12 月 30 日)

题号	一	二	三	成绩	核分人签字
得分					

5. 若用线性最小二乘法拟合数学模型 $y = \frac{t}{at+b}$, 其中 a, b 是待定参数, 那么如何将其线性化:

_____。

$y^{-1} = a + bt^{-1}$, 令 $u = y^{-1}, x = t^{-1}$, 用 $u = a + bx$ 来拟合

6. 利用三点 Gauss-Legendre 求积公式计算积分 $\int_1^2 x e^{-x} dx$ 的数值计算公式为

$$\frac{1}{2} \left[\frac{5}{9} \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{3}{2} \right) e^{-\frac{\sqrt{3}+3}{2}} + \frac{8}{9} \left(\frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}} \right) + \frac{5}{9} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{3}{2} \right) e^{-\frac{\sqrt{3}+3}{2}} \right].$$

7. 在科学与工程计算中, 常常使用分段低次插值, 这是为了避免_____。

一、填空题: (共 42 分, 每空 3 分) 按要求把正确的答案填在每题中的横线上方。

1. 在科学与工程计算中, 不可避免地要遇到各种误差中, 其中数值计算方法可以处理的误差是_____。舍入与截断误差

2. 已知函数 $y=f(x)$ 的三对数据 $(0,1), (-1, 5) (2, -1)$, 则二阶差商 $f[0, -1, 2]=$ _____, 过此三点的 Lagrange 插值多项式为_____。

3. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=2.5, 2.7$ 和 2.9 处的函数值分别为 12.1825, 14.8797 和 18.1741。若用三点数值微分公式计算, 则在 $x=2.7$ 处的函数一阶和二阶导数的近似值分别为_____和_____ (保留 5 位有效数字)。

4. 建立常微分方程初值问题 $y'(x)=f(x,y), y(x_0)=y_0$ 的计算格式有三种基本方法, 它们是_____ ; 改进 Euler 公式为_____ , 它是_____ 阶方法。

8. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则 $\text{cond}_{\infty}(A) =$ 3 (写出精确值)。当 b 有误差 $\delta b = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$

时, 其中 $0 < \varepsilon < 1$, 引起解向量 x 的误差 δx , 则 $\frac{\|\delta x\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}}$ 的上界为 3ε 。

二、解下列各题: (共 36 分, 每小题 9 分)

1. 确定下列求积公式中的待定参数, 使其代数精度尽量高, 并指出所确定的求积公式的代数精度。

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_0 f(-1) + A_1 f(x_1)$$

解: 分别取 $f(x)=1, x, x^2$ 代入上面的积分公式使之准确成立, (1分)

$$2 = A_0 + A_1$$

$$\text{得到: } 0 = -A_0 + A_1 x_1 \quad (3分)$$

$$\frac{2}{3} = A_0 + A_1 x_1^2$$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{1}{3}, A_0 = \frac{1}{2}, A_1 = \frac{3}{2}. \quad (3分)$$

将 $f(x)=x^3$ 代入上面的积分公式, 左边等于 0, 而右边等于 $-4/9$, 积分公式不准确成立, 所以代数精度为 2。 (3分)

2. 写出用 Gauss-Seidel 迭代法求解线性代数方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的迭代格式, 并判断它

的敛散性。

解: Gauss-Seidel 迭代格式的分量形式

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 1 - 2x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= 1 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= 1 - 2x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)} \end{aligned} \quad (5 \text{ 分})$$

其迭代矩阵为

$$B_{GS} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (7 \text{ 分})$$

其特征方程为

$$\det(\lambda I - B_{GS}) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - 2)^2 = 0$$

故特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 其谱半径 $\rho(B_{GS}) = 2$, 所以 Gauss-Seidel 迭代法发散。(9 分)

3. 已知函数 $f(x)$ 在 $x = 0, 1, 2, 3$ 处的数值分别为 1, 3, 5, 12。试用 3 次 Newton 插值公式计算 $f(0.5)$

和 $f(2.5)$ 的近似值。

解: 因为是等距节点 (步长 $h=1$), 所以先构造差分表如下:

x	f(x)	一阶差分	二阶差分	三阶差分
0	1			
1	3	2		
2	5	2	0	
3	12	7	5	5

由于 $x = 0.5$ 介于 0 与 1 之间 (在表头), 故取 $x_0 = 0$ 。此时 $t = (x - x_0)/h = 0.5$, 利用三次 Newton

前插公式有:

$$N_3(x_0 + th) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

$$\begin{aligned} f(0.5) &\approx N_3(0.5) = 1 + 0.5 \times 2 + \frac{1}{2} \times 0.5 \times (0.5 - 1) \times 0 + \frac{1}{6} \times 0.5 \times (0.5 - 1) \times (0.5 - 2) \times 5 \\ &= 2.3125 \end{aligned}$$

由于 $x = 2.5$ 介于 2 与 3 之间 (在表末), 故取 $x_3 = 0$ 。此时 $t = (x - x_3)/h = -0.5$, 利用三次 Newton

后插公式有:

$$N_3(x_3 + th) = f_3 + t\nabla f_3 + \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f_3 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\nabla^3 f_3$$

$$\begin{aligned} f(2.5) &\approx N_3(2.5) = 12 + (-0.5) \times 7 + \frac{(-0.5) \times (-0.5 + 1)}{2} \times 5 + \frac{(-0.5) \times (-0.5 + 1) \times (-0.5 + 2)}{3!} \times 5 \\ &= 12 - 3.5 - \frac{0.5 \times 0.5}{2} \times 5 - \frac{0.5 \times 0.5 \times 1.5}{6} \times 5 \\ &= 7.5625 \end{aligned}$$

4. 用 $n=4$ 的复化 Simpson 公式计算积分 $\int_1^9 \sqrt{x} dx$ 的近似值; 与真值比较它有几位有效数字。

解: 依题意将区间 $[1, 9]$ 四等分, $h=2$, 节点为 $x_k = x_0 + kh = 1 + 2k$, $k=0, 1, 2, 3, 4$ 。由复化

Simpson 公式, 得

$$S_4 = \frac{h}{6} \left[f(a) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right] \quad (4 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{3} \left[f(1) + 4 \sum_{k=0}^3 f(2k+2) + 2 \sum_{k=1}^3 f(2k+1) + f(9) \right]$$

$$= \frac{1}{18} \left[\sqrt{1} + 4(\sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{6}) + 2(\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}) + \sqrt{9} \right] \approx 17.332087 \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{其真值为 } \int_1^9 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^9 = \frac{2}{3} \left(9^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{52}{3} = 17.\bar{3}$$

$$\text{绝对误差满足: } |17.332087 - 17.\bar{3}| \leq 0.00125 = 0.125 \times 10^{-2} = 0.125 \times 10^{-24},$$

根据有效数字的定义, 知近似值有 4 位有效数字。

(9 分)

三、应用题：(共 22 分，每小题 11 分)

1. 已知离散数据如下：

x_k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_k	80.4	53.9	36.1	24.2	16.2

试用最小二乘法求出经验公式 $y = ae^{-bx}$ 中的 a, b 。(结果保留 3 位小数)

解：对 $y = ae^{-bx}$ 两边取自然对数，得 $\ln y = \ln a - bx$ 。令 $u = \ln y$, $a_0 = \ln a$ 和 $a_1 = -b$ ，则知原

问题等价于在空间 $\text{span}\{1, x\}$ 中求拟合函数 $u(x) = a_0 + a_1x$ 。(2 分)

x_k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
u_k	4.38701	3.98713	3.58629	3.18635	2.78501

此时 $n=1$, $m=4$, 权函数 $\omega(x) \equiv 1$, $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$ 。则拟合函数中的系数 a_0 和 a_1 满足正规方

程组：

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) \\ (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u, \varphi_0) \\ (u, \varphi_1) \end{pmatrix}. \quad (7 \text{ 分})$$

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{i=0}^4 1 = 5, \quad (\varphi_0, \varphi_1) = (\varphi_1, \varphi_0) = \sum_{i=0}^4 x_i = 1.5,$$

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \sum_{i=0}^4 x_i^2 = 0.55, \quad (u, \varphi_0) = \sum_{i=0}^4 u_i = 17.9318 \text{ 和 } (u, \varphi_1) = \sum_{i=0}^4 u_i x_i = 4.97906.$$

$$\text{故有} \begin{cases} 5a_0 + 1.5a_1 = 17.9318 \\ 1.5a_0 + 0.55a_1 = 4.97906 \end{cases} \quad (10 \text{ 分})$$

解得 $a_0 = 4.7878, a_1 = -4.0048$,

由此 $a = \exp(a_0) \approx 120.0370$, $b = -a_1 = 4.0048$,

所以最小二乘解为 $y = 120.037e^{-4.0048x}$ 。(11 分)

2. 隧道二极管电路的状态模型由下式给出：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0.5[-h(x_1) + x_2] \\ \dot{x}_2 &= 0.2[-x_1 - 1.5x_2 + 1.2] \end{aligned}$$

其中 $\dot{x}_k, k=1, 2$ 表示 x_k 对时间 t 的导数，该系统的右边项不显含时间 t ，称之为自治系统， $h(x_1)$ 是

一给定函数。初始条件取 $x_0 = [1, 0]$ 。写出用经典四阶 Runge-Kutta 方法解此初值问题的计算格式。

解：

记 $x_n = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{pmatrix}$ 为精确解 $x(t_n) = \begin{pmatrix} x_1(t_n) \\ x_2(t_n) \end{pmatrix}$ 的数值近似， t_n 为节点。设

$$K_j = \begin{pmatrix} k_{1,j} \\ k_{2,j} \end{pmatrix}, j=1, 2, 3, 4, \quad f(t, x) = \begin{bmatrix} 0.5(-h(x_1) + x_2) \\ 0.2(-x_1 - Rx_2 + u) \end{bmatrix}, \text{初值 } x_0 = x(0) = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix}. \quad (3 \text{ 分})$$

由标准四阶 Runge-Kutta 公式，得

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\delta t}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

$$\begin{pmatrix} x_{1,n+1} \\ x_{2,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{pmatrix} + \frac{\delta t}{6} \begin{pmatrix} k_{1,1} \\ k_{2,1} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} k_{1,2} \\ k_{2,2} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} k_{1,3} \\ k_{2,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{1,4} \\ k_{2,4} \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} k_{1,1} \\ k_{2,1} \end{pmatrix} = f(t_n, x_n) = \begin{bmatrix} 0.5(-h(x_{1,n}) + x_{2,n}) \\ 0.2(-x_{1,n} - Rx_{2,n} + 1.2) \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} k_{1,2} \\ k_{2,2} \end{pmatrix} = f\left(t_n + \frac{\delta t}{2}, x_n + \frac{\delta t}{2} K_1\right) = \begin{bmatrix} 0.5\left(-h\left(x_{1,n} + \frac{\delta t}{2} k_{1,1}\right) + x_{2,n} + \frac{\delta t}{2} k_{2,1}\right) \\ 0.2\left(-\left(x_{1,n} + \frac{\delta t}{2} k_{1,1}\right) - R\left(x_{2,n} + \frac{\delta t}{2} k_{2,1}\right) + u\right) \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} k_{1,3} \\ k_{2,3} \end{pmatrix} = f\left(t_n + \frac{\delta t}{2}, x_n + \frac{\delta t}{2} K_2\right) = \begin{bmatrix} 0.5\left(-h\left(x_{1,n} + \frac{\delta t}{2} k_{1,2}\right) + x_{2,n} + \frac{\delta t}{2} k_{2,2}\right) \\ 0.2\left(-\left(x_{1,n} + \frac{\delta t}{2} k_{1,2}\right) - R\left(x_{2,n} + \frac{\delta t}{2} k_{2,2}\right) + 1.2\right) \end{bmatrix},$$

$$K_4 = \begin{pmatrix} k_{1,4} \\ k_{2,4} \end{pmatrix} = f\left(t_n + \delta t, x_n + \delta t \cdot K_3\right) = \begin{bmatrix} 0.5\left(-h\left(x_{1,n} + \delta t \cdot k_{1,3}\right) + \left(x_{2,n} + \delta t \cdot k_{2,3}\right)\right) \\ 0.2\left(-\left(x_{1,n} + \delta t \cdot k_{1,3}\right) - R\left(x_{2,n} + \delta t \cdot k_{2,3}\right) + u\right) \end{bmatrix}.$$

学院_____专业_____班_____年级_____学号_____姓名_____共 页 第 页

$$x_{1,n+1} = x_{1,n} + \frac{\delta t}{6}(k_{1,1} + 2k_{1,2} + 2k_{1,3} + k_{1,4}),$$

$$x_{2,n+1} = x_{2,n} + \frac{\delta t}{6}(k_{2,1} + 2k_{2,2} + 2k_{2,3} + k_{2,4}),$$

$$k_{1,1} = 0.5(-h(x_{1,n}) + x_{2,n}), k_{2,1} = 0.2(-x_{1,n} - Rx_{2,n} + 1.2)$$

$$k_{1,2} = 0.5\left(-h\left(x_{1,n} + \frac{\delta t}{2}k_{1,1}\right) + x_{2,n} + \frac{\delta t}{2}k_{2,1}\right),$$

$$k_{2,2} = 0.2\left(-\left(x_{1,n} + \frac{\delta t}{2}k_{1,1}\right) - R\left(x_{2,n} + \frac{\delta t}{2}k_{2,1}\right) + 1.2\right),$$

$$k_{1,3} = 0.5\left(-h\left(x_{1,n} + \frac{\delta t}{2}k_{1,2}\right) + x_{2,n} + \frac{\delta t}{2}k_{2,2}\right),$$

$$k_{2,3} = 0.2\left(-\left(x_{1,n} + \frac{\delta t}{2}k_{1,2}\right) - R\left(x_{2,n} + \frac{\delta t}{2}k_{2,2}\right) + 1.2\right),$$

$$k_{1,4} = 0.5(-h(x_{1,n} + \delta t \cdot k_{1,3}) + (x_{2,n} + \delta t \cdot k_{2,3})),$$

$$k_{2,4} = 0.2(-(x_{1,n} + \delta t \cdot k_{1,3}) - R(x_{2,n} + \delta t \cdot k_{2,3}) + 1.2).$$

将初值 x_0 , $n=0$ 代入上面各式, 可依次计算出函数 x_1 和 x_2 的数值解 $x_{1,n}, x_{2,n}$, $n=1, 2, 3, \dots$ 。

(11 分)