

天津大学《数值计算方法与 Matlab》

2012-2013 学年第二学期考试试卷及答案 A 卷

一、填空题：（共 42 分，每空 3 分）按要求把正确的答案填在每题中的横线上方。

1. 误差的来源主要有：观测误差、舍入误差、截断误差、模型误差（至少三种）。

2. 用求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 5x_2 = -2 \end{cases}$ 的 SOR 法迭代格式

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} + \frac{\omega}{2} [3 - 2x_1^{(k)} - x_2^{(k)}] \\ x_2^{(k+1)} &= x_2^{(k)} + \frac{\omega}{5} [-2 - x_1^{(k+1)} - 5x_2^{(k)}] \end{aligned}$$

要保证此迭代格式收敛，则松弛因子 ω 满足 $0 < \omega < 2$ 。

3. 设 $f(x) = x^5 + 3x^3 + 5$ ，则 $f[2^0, 2^1, \dots, 2^5] = 1$ ， $f[2^0, 2^1, \dots, 2^6] = 0$ 。

4. 三种基本方法是：数值微分法、Taylor 展开法、数值积分法；Runge-Kutta 法的基本思想是：利用 $f(x,y)$ 在某些点处函数值的线性组合构造差分方程，从而避免了高阶导数的计算。一个

二阶 Runge-Kutta 法的公式 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))]$ 或

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (k_1 + k_2), \quad k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1)$$

5. 在三次 Hermite 的插值条件为： $H(x_k) = y_k, H'(x_k) = m_k, (k = 1, 2)$ 。

6. $f'(1.2) = -0.2170$ ， $f''(1.2) = 0.3000$ （保留 4 位小数）。

7. 具有 $2n+1$ 次代数精度；相应的求积节点称为 Gauss 点；计算积分 $\int_1^2 \cos(x^2) dx$ 的三点

Gauss-Legendre 公式为
$$\frac{1}{2} \left[\frac{5}{9} \cos \left(\left(\frac{3 - \sqrt{0.6}}{2} \right)^2 \right) + \frac{8}{9} \cos \left(\frac{9}{4} \right) + \frac{5}{9} \cos \left(\left(\frac{3 + \sqrt{0.6}}{2} \right)^2 \right) \right]$$

二、解下列各题：（共 36 分，每小题 9 分）

1. 同 A 卷

2. 设 $y = \sin x$ 的函数数据表如下：

x_k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y_k	0.099 83	0.198 67	0.295 52	0.389 42	0.479 43	0.564 64

利用适当三阶的牛顿插值公式计算 $\sin(0.58)$ 的近似值（保留 5 位小数）并利用余项公式估

计误差。

解：首先构造差分表如下：

x_k	f_k	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0.1	0.099 83	0.098 84	- 0.001 99	- 0.000 96
0.2	0.198 67	0.096 85	- 0.002 95	- 0.000 94
0.3	0.295 52	0.093 90	- 0.003 89	- 0.000 91
0.4	0.389 42	0.090 01	- 0.004 80	
0.5	0.479 43	0.085 21		
0.6	0.564 64			

(3 分)

因 0.58 位于表末，故取 $x_n = x_5 = 0.6$ ，此时 $t = -0.2$ ， $h=0.1$ 。利用三次 Newton 后插公式有：

$$\begin{aligned}
 \sin 0.58 &\approx N_3(0.5 + th) = f_5 + t\nabla f_5 + \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f_5 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\nabla^3 f_5 \\
 &= 0.56464 + (-0.2) \times 0.08521 + \frac{(-0.2) \times (-0.2+1)}{2} \times (-0.00480) \\
 &\quad + \frac{(-0.2) \times (-0.2+1) \times (-0.2+2)}{3!} \times (-0.00091) \\
 &= 0.54802
 \end{aligned}$$

(7 分)。

由三次 Newton 后插公式的余项误差估计式

$$\begin{aligned}
 |R_3(0.58)| &\leq \left| \frac{(-0.2) \times (-0.2+1) \times (-0.2+2) \times (-0.2+3)}{4!} \times (0.1)^4 \times \sin(0.6) \right| \\
 &\leq 1.91 \times 10^{-6}
 \end{aligned}$$

(9 分)

3. 同 A 卷第 2 题

4. 同 A 卷

三、应用题：（共 22 分，每小题 11 分）

1. 同 A 卷第 2 题

2. 同 A 卷第 1 题