https://wseii-my.sharepoint.com/personal/kmolenda_wsei_edu_pl/Documents/Published/MatDyskr/Logika/Logika-wyklad-2017.pdf

Niektóre tautologie klasycznego rachunku zdań

- $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$ *(prawo podwójnego zaprzeczenia)*
- $\neg p \vee p$ *(prawo wyłączonego środka)*
- $p \Rightarrow (p \vee q)$, $(p \wedge q) \Rightarrow p$ *(prawa pochłaniania)*
- $(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$, $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ *(zamiana implikacji na alternatywę, i odwrotnie)*
- ...
- łączność (przemienność) koniunkcji / alternatywy,
- rozdzielność alternatywy względem koniunkcji (i odwrotnie).

Prawa de Morgana:

- $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
- $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

$\exists (x \in \mathbb{R}); \sim[x \neq 0 \Rightarrow x^2 - x \neq 0] \} p$

$\exists (x); [\sim q] \Leftrightarrow \sim \forall (x); [q]$ ← prawo de Morgana

$p \Leftrightarrow \sim \forall (x \in \mathbb{R}); [x \neq 0 \Rightarrow x^2 - x \neq 0] \Leftrightarrow$

prawo de Morgana

$\Leftrightarrow \sim \forall (x \neq 0); [x^2 - x \neq 0] \Leftrightarrow \exists (x \neq 0); \sim[x^2 - x \neq 0]$

$\Leftrightarrow \exists (x \neq 0); [\underset{x(x-1)=0}{x^2 - x = 0}] \Leftrightarrow \exists (x \neq 0); [x = 0 \vee \underset{x=1}{x - 1 = 0}]$ prawda

$\exists (x \in \mathbb{R}); (x^2 + 1 \geq 100)$

$p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$ prawo podwójnego zaprzeczenia

$\exists (x \in \mathbb{R}); (x^2 + 1 \geq 100) \Leftrightarrow \sim(\sim[\exists (x \in \mathbb{R}); (x^2 + 1 \geq 100)]) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim[(\forall x \in \mathbb{R}), (x^2 + 1 < 100)]$

$x = 12 \quad 145 < 100$

zdanie jest prawdziwe

$[\forall (x); (x < x + 1)] \Rightarrow (2 > 3)$

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$ zasada

$([\forall (x); (x < x + 1)] \Rightarrow (2 > 3)) \Leftrightarrow \sim[\forall (x); (x < x + 1)] \vee (2 > 3)$

$\Leftrightarrow [\exists (x); x \geq x + 1] \vee (2 > 3)$ prawo de Morgana

$0 \geq 1$

$0 \qquad 0$

zd. fałszywe

$$\sim\left[\underset{x \in X}{\forall} p(x)\right] \Leftrightarrow \underset{x \in X}{\exists} [\sim p(x)]$$

Nieprawda, że każdy student lubi matematykę. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Istnieje student, który nie lubi matematyki.

Wybrane tautologie rachunku predykatów (1)

Twierdzenie

-
  - $p(x) \Rightarrow (\exists_x \, p(x))$
  - $(\forall_x \, p(x)) \Rightarrow p(x)$
- *Negacja (Prawa de Morgana):*
  - $\neg(\forall_{x \in D_x} \, p(x)) \Leftrightarrow (\exists_{x \in D_x} \, \neg p(x))$
  - $\neg(\exists_{x \in D_x} \, p(x)) \Leftrightarrow (\forall_{x \in D_x} \, \neg p(x))$
  - *analogicznie dla predykatów wielu zmiennych*
- *Przemienność*
  - $\forall_x \forall_y \, p(x,y) \Leftrightarrow \forall_y \forall_x \, p(x,y)$
  - $\exists_x \exists_y \, p(x,y) \Leftrightarrow \exists_y \exists_x \, p(x,y)$
  - $\exists_x \forall_y \, p(x,y) \; \substack{\Rightarrow \\ \not\Leftarrow} \; \forall_y \exists_x \, p(x,y)$
- *Specjalizacja*
  - $\forall_x \, p(x) \; \substack{\Rightarrow \\ \not\Leftarrow} \; \exists_x \, p(x)$

Wybrane tautologie rachunku predykatów (2)

Twierdzenie

- *Prawa rozkładania kwantyfikatorów*
  - $\forall_x \, (p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow \{\forall_x \, p(x) \Rightarrow \forall_x \, q(x)\}$
  - $\forall_x \, (p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow \{\exists_x \, p(x) \Rightarrow \exists_x \, q(x)\}$
- *Rozdzielność kwantyfikatorów:*
  - $\forall_x \, (p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow \{\forall_x \, p(x) \wedge \forall_x \, q(x)\}$
  - $\forall_x \, (p(x) \vee q(x)) \; \substack{\not\Rightarrow \\ \Leftarrow} \; \{\forall_x \, p(x) \vee \forall_x \, q(x)\}$
  - $\exists_x \, (p(x) \wedge q(x)) \; \substack{\Rightarrow \\ \not\Leftarrow} \; \{\exists_x \, p(x) \wedge \exists_x \, q(x)\}$
  - $\exists_x \, (p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow \{\exists_x \, p(x) \vee \exists_x \, q(x)\}$
- *Znajdź przykłady potwierdzające $\not\Leftarrow$, $\not\Rightarrow$!*

Zaznacz formy zdaniowe które, zdania są tautologiami: [**Kwantyfikatory]**

Pytanie **1**
Nie udzielono odpowiedzi
Punkty: 1,00
Oflaguj pytanie

Zaznacz formy zdaniowe, które są tautologiami

Wybierz jedną lub więcej:

- a. $\neg(\forall_{x \in D_x} \, p(x)) \Leftrightarrow (\exists_{x \in D_x} \, \neg p(x))$ +
- b. Żadna z pozostałych odpowiedzi nie jest prawdziwa
- c. $\forall_x \, p(x) \Rightarrow \exists_x \, p(x)$ +
- d. $\forall_x \, (p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow \{\forall_x \, p(x) \wedge \forall_x \, q(x)\}$ +

Zaznacz formy zdaniowe, które są tautologiami

Wybierz jedną lub więcej:

- a. $\forall_x \, (p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow \{\exists_x \, p(x) \wedge \exists_x \, q(x)\}$ NIE
- b. $\exists_x \, p(x) \Rightarrow \forall_x \, p(x)$ NIE
- c. $\neg(\forall_{x \in D_x} \, p(x)) \Leftrightarrow (\forall_{x \in D_x} \, \neg p(x))$ NIE
- X d. Żadna z pozostałych odpowiedzi nie jest prawdziwa

WWW.MATEMATYKANAPLUS.COM.PL

$xRy \iff x/y \qquad x,y \in \mathbb{N}$

(x jest dzielnikiem y)

a) zwrotna

$\forall x \in \mathbb{N}\ (xRx) \quad x/x \quad$ TAK

b) symetryczna

$\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ (xRy \Rightarrow yRx) \iff x/y \Rightarrow y/x$

$x=15 \quad y=30 \quad 15/30 \Rightarrow 30/15$ NIE

przeciwsymetryczna TAK

c) przechodnia

$\forall x,y,z \in \mathbb{N}\ [(xRy \wedge yRz)] \Rightarrow xRz$

$x/y \iff \exists k \in \mathbb{N},\ y = k \cdot x$

$y/z \iff \exists d \in \mathbb{N},\ z = d \cdot y = \underbrace{d \cdot k}_{\in \mathbb{N}} \cdot x$

x/z

przechodnia

A={a,b,c,d}
to jak sprawdzić czy relacja R={(a,a), (a,d), (b,c), (c,b), (d,a)} jest przechodnia?
(b, c) o (c,b) == (b,b) a to nie nalezy do podanego zbioru−−> relacja nie jest przechodnia
Ab o bc = ac
(d,a) o (a,d)= (d,d) a to nie nalezy do podanego zbioru−−> relacja nie jest przechodnia
masz 2 kontrprzyklady
---
przechodniosc−−−> np masz pociagi relacji

Szczecin− Poznań i Poznań − Wroclaw i chcesz sprawdzic czy istnieje pociag relacji Szczecin− Wrocław

Zwrotna - każdy obiekt jest w relacji sam ze sobą np.
x jest w relacji z y jeśli obaj posługują się nickiem "divao" - jesteś w relacji sam ze sobą.

Przeciwzwrotna - żaden obiekt nie jest w relacji sam ze sobą np.
x jest w relacji z y jeśli obaj posługują się różnymi nickami - nie jesteś w relacji sam ze sobą.

Symetryczna - można zamienić miejscami x i y i nadal będą w relacji, np.
x jest w relacji z y jeśli obaj mają tyle samo lat - jesteś w relacji ze swoim rówieśnikiem.

Przeciwsymetryczna - jeśli zachodzi dla pary (x,y), to nie zachodzi dla pary (y,x), np.
x jest w relacji z y jeśli x jest starszy od y - jesteś w relacji ze swoim młodszym bratem, on nie jest w relacji z tobą.

Antysymetryczna - relacja, która nie może zachodzić dla (x,y) oraz (y,x) jednocześnie, np.
x jest w relacji z y jeśli x jest starszy od y - jesteś w relacji ze swoim młodszym bratem, on nie jest w relacji z tobą.

Przechodnia - jeśli zachodzi dla (x,y) oraz dla (y,z) to zachodzi dla (x,z), np.
x jest w relacji z y jeśli x jest starszy od y - x jest starszy od y, y jest starszy od z, zatem też x jest starszy od z.

ILOCZYN KARTEZJAŃSKI

Przykład – c.d.

Niech $X = \{1,2,3\}$.

$$X \times X = X^2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

Liczbę elementów zbioru A oznaczamy jako $|A|$ (albo $\overline{\overline{A}}$).

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$$

W zbiorze A = {a,b,c,d} określona jest relacja:

W zbiorze $A = \{a,b,c,d\}$ określona jest relacja $R = \{(a,c),(a,d),(b,b),(b,c),(c,c),(d,d)\}$ Zaznacz własności, które relacja ta spełnia:

Wybierz jedną lub więcej:

- a. przeciwzwrotność
- b. przechodniość
- c. nie spełnia żadnych z wymienionych własności
- d. antysymetria
- e. symetria
- f. zwrotność

a (nie bo są bb, cc i dd), **b** nie (dla ac i bc / cb nie ma ab), c tak , **d** (nie może być do jest bb cc dd), **e** – nie(nie ma ca, da, cb), **f** nie (nie ma aa)

W zbiorze $A = \{a,b,c,d\}$ określona jest relacja $R = \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)\}$ Zaznacz własności, które relacja ta spełnia:

Wybierz jedną lub więcej:

- a. zwrotność
- b. symetria
- c. przeciwzwrotność
- d. przechodniość
- e. antysymetria
- f. nie spełnia żadnych z wymienionych własności

A (nie ma aa bb cc dd), b (nie ma ba, ca, da, cb, db, cd), c TAK, d (dla ad i db nie ma ab), e TAK,

W zbiorze $A = \{a,b,c,d\}$ określona jest relacja $R = \{(a,a),(a,c),(a,d),(b,b),(b,c),(c,c),(d,d)\}$ Zaznacz własności, które relacja ta spełnia:

Wybierz jedną lub więcej:

- a. zwrotność
- b. nie spełnia żadnych z wymienionych własności
- c. symetria
- d. antysymetria
- e. przechodniość
- f. przeciwzwrotność

A tak; **b**-; **c**-(ac nie ma ca, ad nie ma da, bc nie ma cb);**d** tak; **e**-;**f**-

Definicje (własności relacji binarnej $\mathcal{R}$ określonej na zbiorze A)

- zwrotność: $\forall_{a\in A}\, a\mathcal{R}a$,
- przeciwzwrotność: $\forall_{a\in A} \neg a\mathcal{R}a$,
- symetria: $\forall_{a,b\in A}\, a\mathcal{R}b \Leftrightarrow b\mathcal{R}a$,
- antysymetia: $\forall_{a,b\in A}\, a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b$,
- przechodniość: $\forall_{a,b,c\in A}\, a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$.

Przykład

- Relacja $\leqslant$ (słaba nierówność) określona w zbiorze liczb, jest zwrotna, symetryczna, antysymetryczna i przechodnia.
- Relacja $<$ (silna nierówność), nie jest zwrotna, nie jest symetryczna, nie jest antysymetryczna, jest przechodnia,
- Relacja *bycia rodzeństwem* jest symetryczna i przechodnia
- Relacje jednocześnie będące *symetrycznymi* i *antysymetrycznymi* definiują równość w zbiorze.

Definicja: Relacja R między elementami zbiorów A1, A2, . . . , An, to dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego A1 × A2 × . . . An. Mówimy, że R ⊆ A1 × A2 × . . . An jest relacją n-argumentową (n-arną).

Definicja: Relacja binarna R ⊆ A1 × A2. Wtedy, zamiast zapisu (a1, a2) piszemy a1Ra2. Na przykład a1 < a2.

Definicja: Relacja binarna określona w zbiorze A: R ⊆ A2 .

Zbiory liczbowe

Liczby naturalne: $\mathbf{N}$
$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

Liczby całkowite: $\mathbf{C}$
$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$

Liczby wymierne: $\mathbf{W}$
Liczba jest wymierna, jeżeli możemy ją przedstawić w postaci ułamka $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi i $q \neq 0$.
Przykłady: $0, 5, -4, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, 4\frac{1}{5}$

Liczby niewymierne: $\mathbf{R}\setminus\mathbf{W}$
Przykłady: $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \pi, 1-\sqrt{7}$

Liczby rzeczywiste: $\mathbf{R}$
Liczby rzeczywiste to liczby wymierne i niewymierne.

Zadania + Rozwiązania

Zaznacz równania, które mają rozwiązanie w liczbach całkowitych. Odp a,c,d

Zaznacz równania, które mają rozwiązania w liczbach całkowitych.

Wybierz jedną lub więcej:
- a. $7x + 5y = 140$
- b. $4x + 6y = 45$
- c. $3x + 7y = 89$
- d. $4x + 8y = 48$
- e. Żadne z podanych równań nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych

11x + 16y = 268 równanie diofantyczne ax + by = c posiada rozwiązanie wtedy, gdy NWD(a, b) dzieli c, czyli NWD(a, b) | c. NWD (11, 16) = 1. 268 : 1 = 268, czyli 1 | 268, zatem równanie 11x + 16y = 268 ma rozwiązanie w zbiorze liczb całkowitych. **A** NWD(7,5) =1 140/1 +; **b** NWD (4, 6) 2 45/2-;**c** NWD (3,7) 89//1+, **d** NWD (4, 8) 4 48/4=12+

https://brainly.pl/zadanie/4620966
https://www.matemaks.pl/algorytm-euklidesa.html

Zaznacz równania, które mają rozwiązania w liczbach całkowitych.

Wybierz jedną lub więcej:

- a. $3x + 9y = 191$
- b. $4x + 6y = 9$
- c. $4x + 8y = 30$
- d. Żadne z podanych równań nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych
- e. $6x + 5y = 13$

Odp.: e

A nwd(3,9)3- ; b nwd(4,6)2- **;c** nwd(4,8)4; **e** nwd(6,5)1+

Zaznacz równania, które mają rozwiązania w liczbach całkowitych.

Wybierz jedną lub więcej:

- a. $6x + 9y = 31$
- b. Żadne z podanych równań nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych
- c. $3x + 9y = 191$
- d. $4x + 6y = 17$
- e. $4x + 8y = 30$

A nwd(6,9)3- ; **b +** **;c** nwd(3,9)3-; **d** nwd(4,6)2;- **e** nwd(4,8)4-

Zaznacz równania, które mają rozwiązania w liczbach całkowitych.

Wybierz jedną lub więcej:

- a. $7x + 5y = 11$
- b. $4x + 6y = 15$
- c. $3x + 7y = 191$
- d. Żadne z podanych równań nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych
- e. $4x + 8y = 46$

Zaznacz tautologie:

Zaznacz tautologie

Wybierz jedną lub więcej:

- a. $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$
- b. $[(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q$
- c. Żadne ze zdań nie jest tautologią
- d. $\neg(p \wedge \neg p)$
- e. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Spójniki logiczne

- spójnik i (oraz, AND) $p \wedge q$,
- spójnik lub (OR) $p \vee q$,
- zaprzeczenie (nie prawda, że) $\neg p$
- implikacja (z p wynika q) $p \Rightarrow q$
- równoważność (p jest równoważne q) $p \Leftrightarrow q$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

p	$\neg p$
0	1
1	0

Zaznacz tautologie

Wybierz jedną lub więcej:

- a. Żadne ze zdań nie jest tautologią
- b. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
- c. $p \vee \neg p$
- d. $p \Rightarrow [(\neg p) \vee q]$
- e. $[(p \vee q) \Rightarrow (p \vee \neg q)] \Rightarrow (\neg p \vee q)$

a-, b-, c+, d-, e-

Podaj, ile jest dzielników naturalnych liczby 10010

Podaj, ile jest dzielników naturalnych liczby 10010.

Odpowiedź: 32

32

http://www.math.edu.pl/narzedzia.php?opcja=liczba-dzielnikow

30030

Podaj, ile jest dzielników naturalnych liczby 30030.

Odpowiedź: 64

64

2310

Podaj, ile jest dzielników naturalnych liczby 2310.

Odpowiedź: 32

32

Stosując algorytm Euklidesa, oblicz największy wspólny dzielnik liczb 4620 oraz 1188

Stosując algorytm Euklidesa, oblicz największy wspólny dzielnik liczb 4620 oraz 1188.

Odpowiedź: 132

132

https://www.matemaks.pl/algorytm-euklidesa.html

2002 oraz 770

Stosując algorytm Euklidesa, oblicz największy wspólny dzielnik liczb 2002 oraz 770.

Odpowiedź: 154

154

2700 oraz 756

Stosując algorytm Euklidesa, oblicz największy wspólny dzielnik liczb 2700 oraz 756.

Odpowiedź: 108

108

Na I roku kierunku „Informatyka i ekonometria” jest 77

Na I roku kierunku "Informatyka i ekonometria" jest 77 studentów. *Analizę* zaliczyło 42 studentów, zaś *Analizę* oraz *Ekonomię* zaliczyło 20 studentów.
Ilu studentów zaliczyło *Ekonomię*?

Odpowiedź:

|A∪B|=|A|+|B|−|A∩B|. x+42-20=77; x=77-42+20; x=55

|A∪B|=|A|+|B|−|A∩B|. 77=42+b-20; 77+20-42=b

Na I roku kierunku „Informatyka i ekonometria” jest 79

Na I roku kierunku "Informatyka i ekonometria" jest 79 studentów. *Analizę* zaliczyło 42 studentów, zaś *Analizę* oraz *Ekonomię* zaliczyło 5 studentów.
Ilu studentów zaliczyło *Ekonomię*?

Odpowiedź:

X+42-5=77; x=77-42+5; x=40

Na I roku kierunku „Informatyka i ekonometria” jest 68%

Na I roku kierunku "Informatyka i ekonometria" *Analizę* zaliczyło 68% studentów, zaś *Analizę* oraz *Ekonomię* zaliczyło 27% studentów.
Jaki odsetek studentów zaliczył *Ekonomię*?

Odpowiedź:

|A∪B|=|A|+|B|−|A∩B|; 100=68+x-27; 100-68+27=x; 59 = 0,59

Na I roku kierunku „Informatyka i ekonometria” jest 86%

Na I roku kierunku "Informatyka i ekonometria" *Analizę* zaliczyło 86% studentów, zaś *Analizę* oraz *Ekonomię* zaliczyło 5% studentów.
Jaki odsetek studentów zaliczył *Ekonomię*?

Odpowiedź:

|A∪B|=|A|+|B|−|A∩B|; 100=86+x-5; 100-86+5=x; 19= 0,19

Na I roku kierunku „Informatyka i ekonometria” jest 89

Na I roku kierunku "Informatyka i ekonometria" jest 89 studentów. *Analizę* zaliczyło 47 studentów, zaś *Analizę* oraz *Ekonomię* zaliczyło 32 studentów. Ilu studentów zaliczyło *Ekonomię*?

Odpowiedź:

|A∪B|=|A|+|B|−|A∩B|; 89=47+x-32; 89-47+32=x x=74

https://wseii-my.sharepoint.com/personal/kmolenda_wsei_edu_pl/Documents/Published/MatDyskr/Kombinatoryka/Kombinatoryka-Notatki.pdf

Zadanie 1.3.1: W klasie liczącej 33 osoby 17 uczniów uczy się języka włoskiego, 17 uczniów uczy się języka hiszpańskiego i 15 uczniów uczy się języka portugalskiego. Wśród nich 7 uczniów uczy się dwóch języków: włoskiego i hiszpańskiego, 9 uczniów uczy się języka włoskiego i portugalskiego oraz 6 uczniów uczy się języka hiszpańskiego i portugalskiego. Wreszcie 2 uczniów uczy się tych trzech języków. Ilu uczniów nie uczy się żadnego z tych języków?

Rozwiązanie:
Oznaczmy literami W, H i P zbiory uczniów uczących się odpowiednio języka włoskiego, hiszpańskiego i portugalskiego. Wtedy dane zadania można zapisać następująco:

$$|W| = 17,\ |H| = 17,\ |P| = 15,$$
$$|W \cap H| = 7,\ |W \cap P| = 9,\ |H \cap P| = 6,$$
$$|W \cap H \cap P| = 2.$$

Z zasady włączeń i wyłączeń wynika, że

$$|W \cup H \cup P| = 17 + 17 + 15 - 7 - 9 - 6 + 2 = 29.$$

A zatem 4 uczniów nie uczy się żadnego z tych języków.

1. *Niech A, B będą zbiorami skończonymi, rozłącznymi ($A \cap B = \emptyset$).*

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

2. *Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ będą zbiorami skończonymi, parami rozłącznymi ($A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j, i, j \in \{1, \ldots, n\}$)*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

Fakt (Zasada włączania i wyłączania - dla 2 i 3 zbiorów)

- *Niech A, B będą zbiorami skończonymi.*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

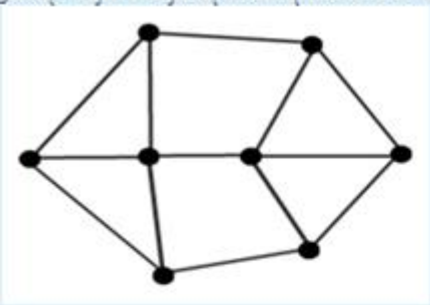
- *Niech A_1, A_2, A_3 będą zbiorami skończonymi*

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

https://wseii-my.sharepoint.com/personal/kmolenda_wsei_edu_pl/Documents/Published/MatDyskr/Kombinatoryka/Kombinatoryka-wyklad-2017.pdf

Jaką najmniejszą liczbą kolorów można pokolorować regiony grafu załączonego poniżej:

Jaką najmniejszą liczbą kolorów można pokolorować regiony grafu załączonego poniżej



ODP 2

Ustal co zwraca poniższa funkcja rekurencyjna dla wartości 6, 7, 8:

Ustal, co zwraca poniższa funkcja rekurencyjna dla wartości 6, 7, 8:

```
int fun(int n) {
if (n<2) return n;
if (n % 2 == 1) return fun(n-2);
else return fun(n-1);
};
```

Wybierz jedną odpowiedź:

- a. Funkcja jest stała i zwraca wartość 1
- b. Kolejno: 1 1 2
- c. funkcja zapętla się
- d. Funkcja jest stała i zwraca wartość 0
- e. Kolejno: 2 2 3

```
    static void Main(string[] args)
    {
        int fun(int n)
        {
            if (n < 2) return n;
            if (n % 2 == 1) return fun(n - 2);
            else return fun(n - 1);
        }
        Console.WriteLine(fun(6));
        Console.WriteLine(fun(7));
        Console.WriteLine(fun(8));

       }
```

ODP A

Ustal, co zwraca poniższa funkcja rekurencyjna dla wartości 6, 7, 8:

```
int fun(int n) {
if (n<2) return n;
if (n % 2 == 1) return fun(n/2)+1;
else return fun(n-1);
};
```

Wybierz jedną odpowiedź:

- a. Funkcja jest stała i zwraca wartość 2
- b. Funkcja jest stała i zwraca wartość 1
- c. Kolejno: 2 3 3
- d. Kolejno: 2 2 3
- e. funkcja zapętla się

ODP C 2 3 3

Ustal, co zwraca poniższa funkcja rekurencyjna dla wartości 6, 7, 8:

```
int fun(int n) {
  if (n<2) return n;
  if (n % 2 == 0) return fun(n-1)+1;
  else return fun(n-1);
};
```

Wybierz jedną odpowiedź:

- a. funkcja jest stała, zwraca wartość 4
- b. funkcja jest stała, zwraca wartość 3
- c. Kolejno: 3 4 4
- d. Kolejno: 4 4 5
- e. funkcja zapętla się

ODP C:3 4 4

Które z podanych napisów pasują do regex-a (notacja PCRE) [a-z]+[\.\?!]

Które z podanych napisów pasują do *regex*-a (notacja PCRE)

[a-z]+[\.\?!]

Wybierz jedną lub więcej:

- Jazda!
- koniec.
- pijesz?
- czerwony
- prof.?
- żadne z podanych nie pasują
- dalej!
- Do boju!

Jazda! koniec. Pijesz? Dalej! https://www.freeformatter.com/regex-tester.html + https://www.regextester.com/96926 - a.[bc]+

Które z podanych napisów pasują do *regex*-a (notacja PCRE)

a.[bc]+

Wybierz jedną lub więcej:

- asccbbbbcbcccc
- azc
- abc
- ac
- abbbbbbbb
- abcbcbcbc
- żadne z podanych nie pasują

Asccbbbbcbccccc, azc, abc, abbbbbbbb, abcbcbcbc

Oblicz, ile jest 3-elementowych podzbiorów zbioru 6-elementowego:

Oblicz, ile jest 3-elementowych podzbiorów zbioru 6-elementowego.

Odpowiedź:

(6/3) = 6!/(6-3)! * 3! = 3!*4*5*6/3!*3*2*1 = 20

zbiór 6-elementowy

podzbiór 3-elementowy

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{\cancel{3!}\cdot 4\cdot 5\cdot \cancel{6}}{\cancel{3!}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = 20 \qquad C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Oblicz, ile można utworzyć 4-elementowych multizbiorów(z powtórzeniami) ze zbioru A ={a,b,c}

Oblicz, ile można utworzyć 4-elementowych multizbiorów (zbiorów z powtórzeniami) ze zbioru $A = \{a, b, c\}$.

Odpowiedź:

$$\bar{C}_n^k = \binom{k+n-1}{k} = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$$

Obliczymy na ile sposobów można wybrać trzy gałki lodów spośród 8 smaków, przy czym wybór jest zupełnie dowolny, tzn. możemy np. wybrać trzy (lub dwie) gałki lodów tego samego smaku. Jak widać są to kombinacje trójelementowe z powtórzeniami w zbiorze 8-miu elementów, przy czym zakładamy, że kolejność wkładania gałek lodów do kubka nie ma znaczenia. Otrzymujemy:

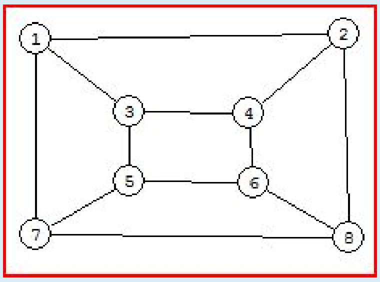
$$\bar{C}_8^3 = \binom{3+8-1}{3} = \frac{(3+8-1)!}{3!(8-1)!} = 120$$

$$\bar{C}_3^4 = \binom{4+3-1}{4} = \frac{(4+3-1)!}{4!*(3-1)!} = \frac{6!}{4!*2!} = \frac{\cancel{4!}*5*\cancel{6}^{3}}{\cancel{4!}*1*\cancel{2}} = 15$$

k =4, n=3

Ile wynosi liczba chromatyczna załączonego grafu

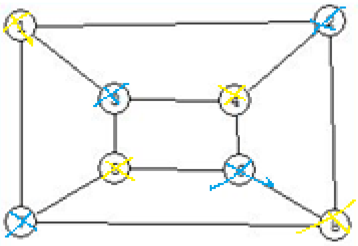
Ile wynosi liczba chromatyczna załączonego grafu



Odpowiedź: 2

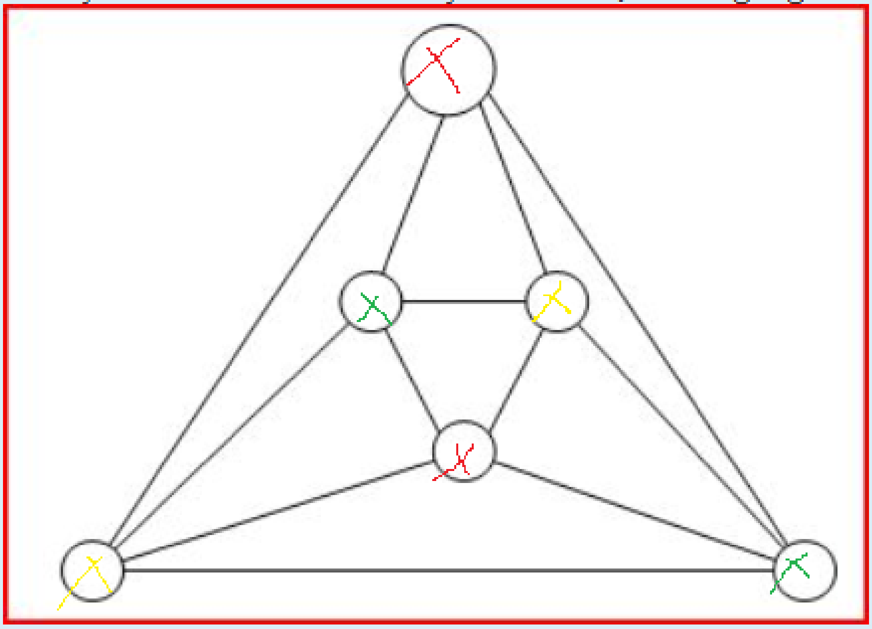
Najmniejszą liczbę kolorów potrzebną do pokolorowania wierzchołków grafu G tak, że każde dwa wierzchołki połączone krawędzią mają różne kolory, nazywamy **liczbą chromatyczną grafu** G i oznaczamy przez χ(G).

Twierdzenie Brooksa. Niech G = (V;E) będzie spójnym grafem o największym stopniu wierzchołka równym d. Jeżeli G jest grafem pełnym lub składa się z pojedynczego cyklu o nieparzystej liczbie krawędzi, to: χ(G) = d + 1. We wszystkich pozostałych przypadkach wystarcza χ(G) < d



2

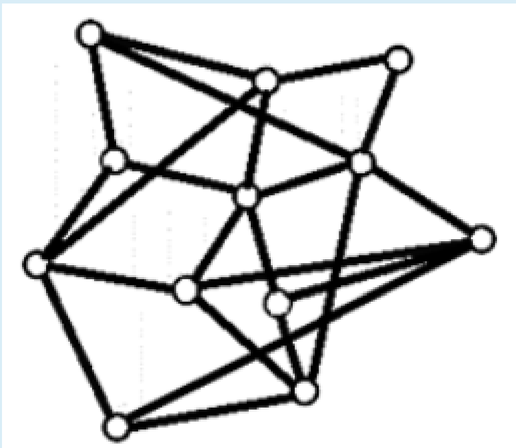
Ile wynosi liczba chromatyczna załączonego grafu



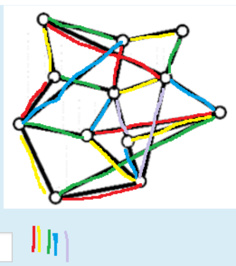
Odpowiedź: 3

Ile wynosi indeks chromatyczny załączonego grafu?

Ile wynosi indeks chromatyczny załączonego grafu?

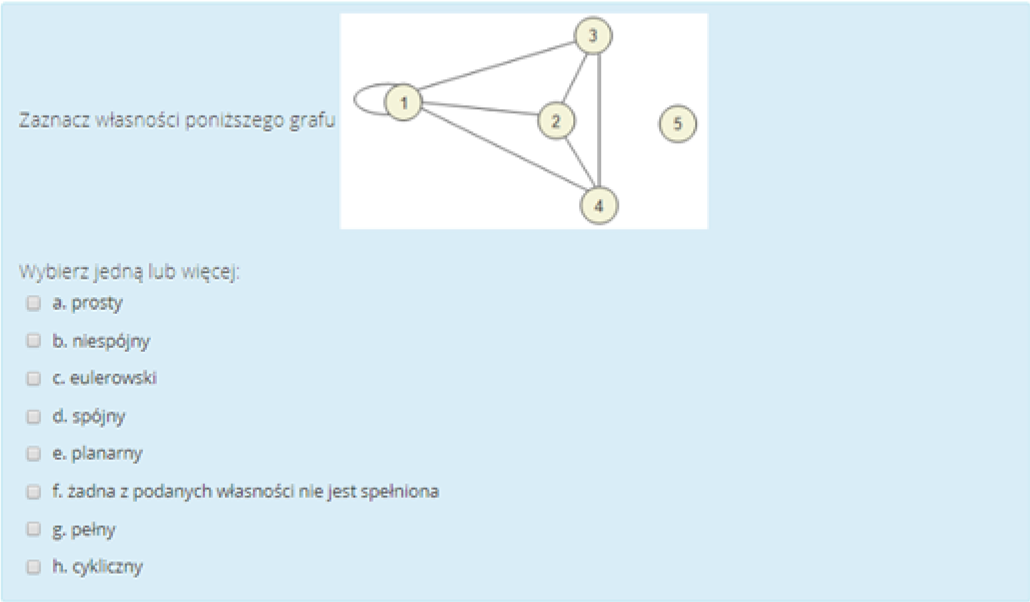


Odpowiedź: 5



Najmniejszą liczbę kolorów potrzebną do pokolorowania krawędzi grafu G tak, że żadne dwie krawędzie tego samego koloru nie mają wspólnego wierzchołka końcowego, **nazywamy indeksem chromatycznym grafu** G i oznaczamy ją przez κ(G). Twierdzenie Vizinga. Krawędzie grafu prostego, w którym największy stopień wierzchołka wynosi d, można pokolorować przy użyciu co najmniej d kolorów

Zaznacz własności poniższego grafu

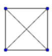


https://e.wsei.edu.pl/pluginfile.php/27755/mod_resource/content/2/TEORIA%20GRAF%C3%93W%20prezentacja.pdf

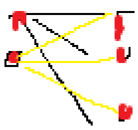
Graf prosty – graf bez krawędzi wielokrotnych i pętli; Trasa (szlak) – „linia", po której przedostajemy się z jednego wierzchołka do drugiego; Droga (ścieżka) – trasa, w której żaden wierzchołek nie występuje więcej niż raz;

Graf spójny – graf stanowiący jedną część, składający się z jednego kawałka (jeżeli dla dowolnej pary wierzchołków tego grafu istnieje w nim ścieżka je łącząca**)**nie ma wierzchołka izolowanego **Graf niespójny** – graf składający się z kilku części**; Graf eulerowski** – graf, w którym istnieją trasy przechodzące przez każdą krawędź dokładnie raz i kończące się w punkcie wejściowym trasy; **Graf planarny** – graf, który można narysować tak aby jego krawędzie nie przecinały się; Mówimy, że wierzchołki są sąsiednie, jeżeli istnieje krawędź łącząca je. Stosuje się też określenie, że wierzchołki są incydentne z tą krawędzią. Krawędzie są sąsiednie, jeżeli mają wspólny wierzchołek.

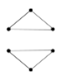
Graf pełny jest grafem prostym, w którym dla każdej pary węzłów istnieje krawędź je łącząca.



Graf dwudzielny – graf, którego zbiór wierzchołków można podzielić na dwa rozłączne zbiory tak, że krawędzie nie łączą wierzchołków tego samego zbioru. Równoważnie: graf, który nie zawiera cykli nieparzystej długości. Jeśli pomiędzy wszystkimi parami wierzchołków należących do różnych zbiorów istnieje krawędź, graf taki nazywamy pełnym grafem dwudzielnym lub kliką dwudzielną i oznaczamy Kn,m gdzie n i m oznaczają liczności zbiorów wierzchołków

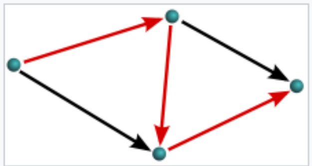


Graf regularny stopnia n to graf, w którym wszystkie wierzchołki są stopnia n czyli z każdego wierzchołka grafu regularnego



wychodzi n krawędzi. Graf regularny stopnia n określa się dla wygody mianem grafu n- regularnego.
Graf eulerowski, **graf Eulera** – rodzaj grafu rozpatrywany w teorii grafów. Graf eulerowski odznacza się tym, że da się w nim skonstruować cykl Eulera, czyli cykl, który przechodzi przez każdą jego krawędź dokładnie raz.
Graf półeulerowski zawiera w sobie ścieżkę, która pozwala przejść przez wszystkie jego krawędzie tylko raz. Ścieżka ta nazywana jest ścieżką Eulera.
Graf hamiltonowski – graf rozważany w teorii grafów zawierający ścieżkę (drogę) przechodzącą przez każdy wierzchołek **dokładnie jeden raz** zwaną ścieżką Hamiltona. W szczególności grafem hamiltonowskim jest graf zawierający cykl Hamiltona, tj. zamkniętą ścieżkę Hamiltona. W niektórych źródłach graf zawierający tylko ścieżkę Hamiltona nazywany jest grafem *półhamiltonowskim.* Aby lepiej zrozumieć właściwości grafu hamiltonowskiego można się posłużyć przykładem komiwojażera, który chce odwiedzić wszystkich swoich klientów, ale tylko raz (problem komiwojażera). Klienci, to wierzchołki grafu, a drogi między nimi są jego krawędziami. Jeżeli graf jest hamiltonowski, to

znaczy, że komiwojażer może obejść wszystkich klientów bez mijania drugi raz żadnego z nich i wrócić do punktu wyjścia.



Graf skierowany posiadający ścieżkę Hamiltona. Niebieskie kropki to wierzchołki grafu, strzałki to krawędzie grafu, a ścieżkę hamiltona oznaczono kolorem czerwonym.

Graf planarny – graf, który można narysować na płaszczyźnie (i każdej powierzchni genusu 0) tak, by krzywe obrazujące krawędzie grafu nie przecinały się ze sobą. Odwzorowanie grafu planarnego na płaszczyznę o tej własności nazywane jest jego rysunkiem płaskim. Graf planarny o zbiorze wierzchołków i krawędzi zdefiniowanym poprzez rysunek płaski nazywany jest grafem płaskim[Macierz incydencji – pokazuje czy wierzchołek i jest incydentny z krawędzią j. Jej elementami są liczby 0 i 1. Ma tyle wierszy ile wierzchołków i tyle kolumn ile krawędzi

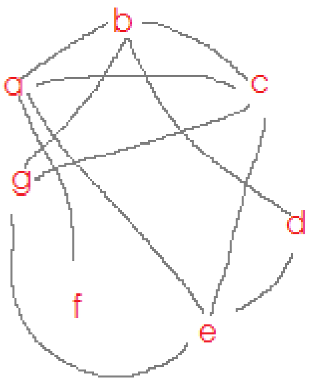
Dana jest macierz sąsiedztwa grafu nieskierowanego

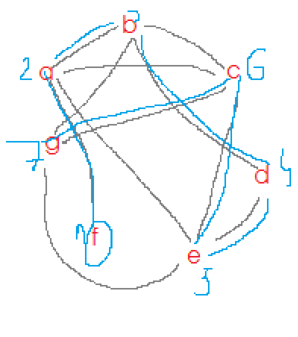
	a	b	c	d	e	f	g
a	0	1	1	0	1	1	0
b	1	0	1	1	0	0	1
c	1	1	0	0	1	0	1
d	0	1	0	0	1	0	0
e	1	0	1	1	0	0	1
f	1	0	0	0	0	0	0
g	0	1	1	0	1	0	0

Zaznacz, które z własności spełnia ten graf?

Wybierz jedną lub więcej:

- a. Jest regularny
- b. Żadna z odpowiedzi nie jest poprawna
- c. Jest póleulerowski
- d. Zawiera cykl Hamiltona
- e. Jest półhamiltonowski
- f. Jest spójny
- g. Zawiera cykl Eulera
- h. Jest planarny





E,f, d,

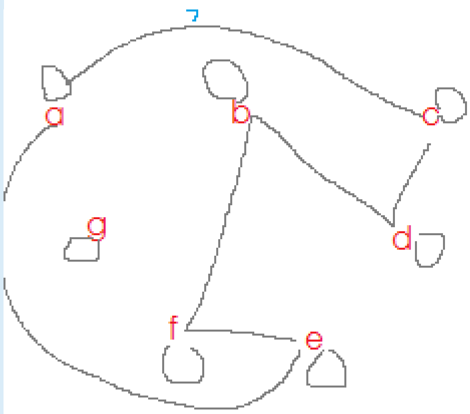
Dana jest macierz sąsiedztwa grafu nieskierowanego

	a	b	c	d	e	f	g
a	1	0	1	0	1	0	0
b	0	1	0	1	0	1	0
c	1	0	1	1	0	0	0
d	0	1	1	1	0	0	0
e	1	0	0	0	1	1	0
f	0	1	0	0	1	1	0
g	0	0	0	0	0	0	1

Zaznacz, które z własności spełnia ten graf?

Wybierz jedną lub więcej:

- a. Zawiera cykl Eulera
- b. Zawiera cykl Hamiltona
- c. Jest planarny
- d. Jest spójny
- e. Jest regularny
- f. Żadna z odpowiedzi nie jest poprawna
- g. Jest póleulerowski
- h. Jest półhamiltonowski



C,

Dana jest macierz sąsiedztwa grafu nieskierowanego

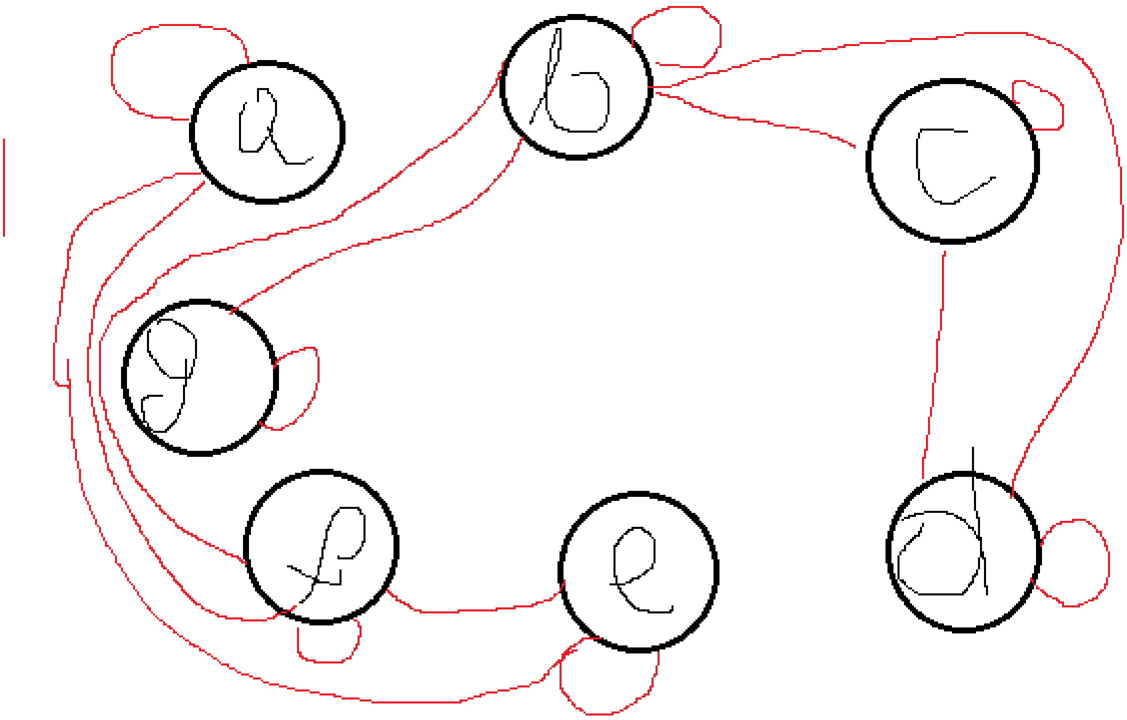
	a	b	c	d	e	f	g
a	1	0	0	0	1	1	0
b	0	1	1	1	0	1	1
c	0	1	1	1	0	0	0
d	0	1	1	1	0	0	0
e	1	0	0	0	1	1	0
f	1	1	0	0	1	1	0
g	0	1	0	0	0	0	1

Zaznacz, które z własności spełnia ten graf?

Wybierz jedną lub więcej:

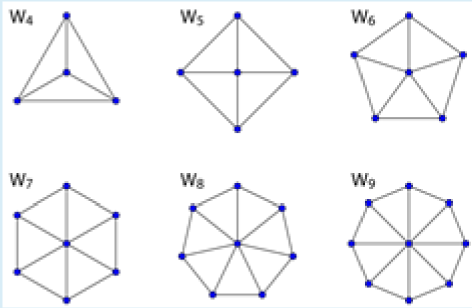
- a. Jest regularny
- b. Zawiera cykl Hamiltona
- c. Żadna z odpowiedzi nie jest poprawna
- d. Jest spójny
- e. Jest półhamiltonowski
- f. Jest póleulerowski
- g. Jest planarny
- h. Zawiera cykl Eulera

D,g,f,



Zaznacz grafy planarne

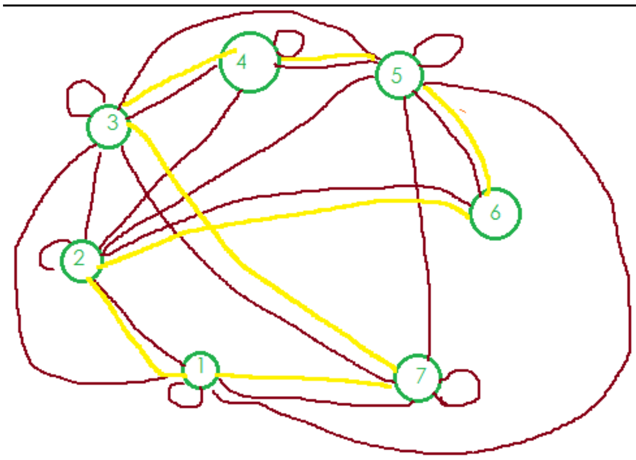
Zaznacz grafy planarne:



Wybierz jedną lub więcej:

- a. żaden z podanych grafów nie jest planarny
- b. K_6
- c. W_5 koła
- d. $K_{2,4}$ dwudzielne (2-planarne)
- e. C_5 cykliczny

e+,d+,b-,c+ ,a-



Dany jest graf nieskierowany G=(V, E) reprezentowany w postaci listy sąsiedztwa:

- V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 } - zbiór wierzchołków
- E = {
  1: {1, 2, 3, 5, 7}
  2: {1, 2, 3, 4, 5, 6}
  3: {1, 2, 3, 4, 5, 7}
  4: {2, 3, 4, 5}
  5: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
  7: {1, 3, 5, 6, 7}
  } - zbiór krawędzi w postaci listy sąsiedztwa

Zaznacz, które z własności spełnia ten graf?

Wybierz jedną lub więcej:

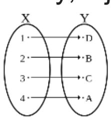
- a. Żadna z odpowiedzi nie jest poprawna
- b. Jest półhamiltonowski
- c. Jest regularny
- d. Zawiera cykl Eulera
- e. Jest póleulerowski
- f. Zawiera cykl Hamiltona
- g. Jest spójny
- h. Jest planarny

Oblicz, ile jest funkcji wzajemnie jednoznacznych f: A -> A, jeśli moc zbioru A wynosi 6

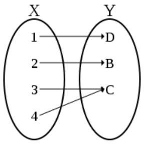
Oblicz, ile jest funkcji wzajemnie jednoznacznych $f : A \to A$, jeśli moc zbioru A wynosi 6.

Odpowiedź:

Funkcja wzajemnie jednoznaczna (bijekcja) – funkcja będąca jednocześnie funkcją różnowartościową i „na”. Innymi słowy, bijekcja to funkcja (relacja) taka, że każdemu elementowi obrazu odpowiada dokładnie jeden element dziedziny.



Funkcja „na” a. **surjekcja**[1] a. **suriekcja**[2][3] – funkcja przyjmująca jako swoje wartości wszystkie elementy przeciwdziedziny, tj. której obrazjest równy przeciwdziedzinie.



Moc zbioru A oznacza się symbolem |A| =6

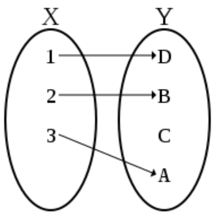
Różnowartościowych

Funkcja różnowartościowa (*iniekcja*[1], *injekcja, funkcja 1-1*) – funkcja, której każdy element przeciwdziedziny przyjmowany jest co najwyżej raz.

Oblicz, ile jest funkcji różnowartościowych $f: A \to B$, jeśli moc zbioru A wynosi 4, a moc zbioru B wynosi 6.

Odpowiedź:

|A|=4, |B|=6;



Język nad alfabetem T={0,1}

Język nad alfabetem T={0,1} będący zbiorem wszystkich niepustych łańcuchów zerojedynkowych w których każda para zer przedzielona jest co najmniej jedną jedynką, może być opisany następującym wyrażeniem regularnym (notacja teoretyczna):

Wybierz jedną lub więcej:

- (1+01*0)*
- 11+(0+1)1(0+1)+(0+1)1(0+1)*1(0+1)
- 1*+1*(011*)*01*
- (1+01*0)(1+01*0)*
- 11*+1*(011*)*01*
- żadne z podanych wyrażeń nie opisuje takiego języka

Następujące wyrażenie regularne (notacja teoretyczna):

0*+00*10(0+10)*

opisuje język nad alfabetem T={0, 1} będących zbiorem wszystkich łańcuchów zerojedynkowych, w których:

Wybierz jedną lub więcej:

- żadne z pozostałych stwierdzeń nie jest prawdziwe
- każda jedynka jest poprzedzona co najmniej jednym zerem i po każdej jedyncе występuje co najmniej jedno zero
- każde dwie jedynki przedzielone są przynajmniej jednym zerem
- występują co najmniej dwie jedynki
- drugim od początku i przedostatnim symbolem jest jedynka
- liczba jedynek jest parzysta