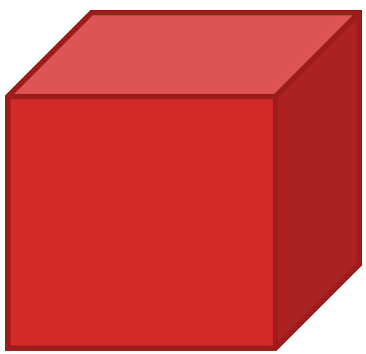
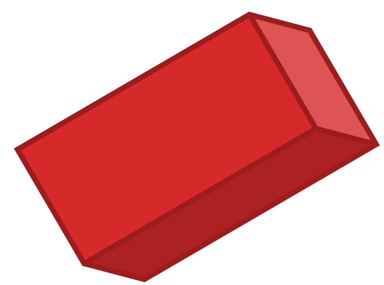
Transformationen



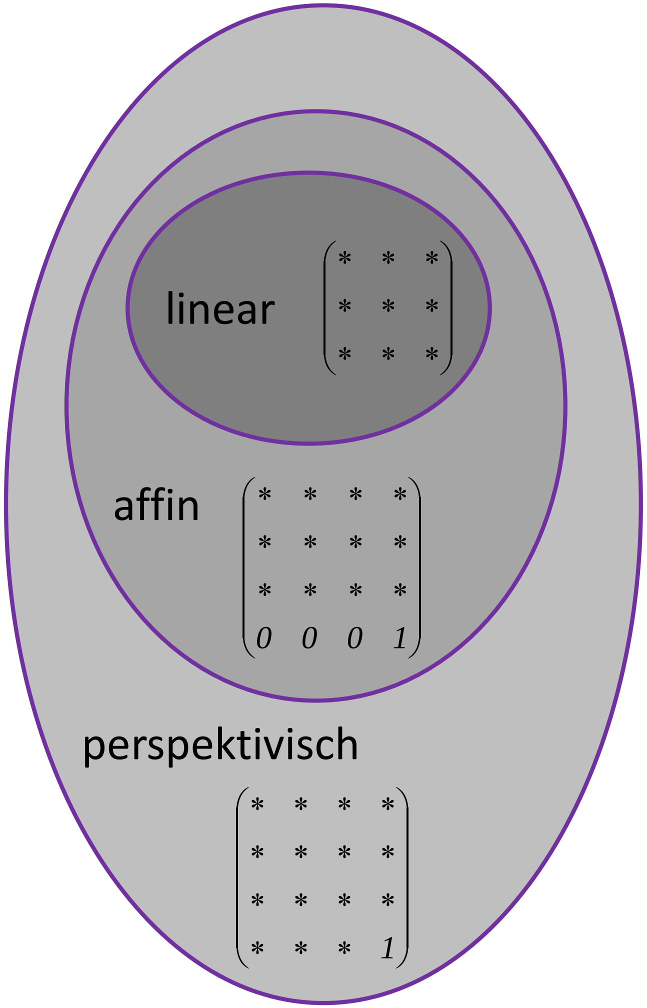
$$\mathbf{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbf{R}^3$$

$$\underline{\boldsymbol{q}} = f(\underline{\boldsymbol{p}})$$



Inhalt

- Lineare Transformationen
- Systemtransformationen
- Affine Transformationen
- Ansichtstransformationen
- Homogene Darstellung
- Perspektivische Transformationen
- Fluchtpunkte
- Vergleich



matrices

- operations on matrices include multiplication with scalar

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

- sum auf two matrices of same dimension

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

- product of two matrices with matching dimensions

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad \cdots \quad a_{im}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1c} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1c} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{i1} & \cdots & \boxed{p_{ij}} & \cdots & p_{ic} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{r1} & \cdots & p_{rj} & \cdots & p_{rc} \end{pmatrix}$$

- Matrix multiplication is composed of scalar products:

$$\boxed{p_{ij}} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{im}b_{mj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{a}}_{1.} \\ \vec{\boldsymbol{a}}_{2.} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{b}}_{.1} & \vec{\boldsymbol{b}}_{.2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{a}}_{1.} \cdot \vec{\boldsymbol{b}}_{.1} & \vec{\boldsymbol{a}}_{1.} \cdot \vec{\boldsymbol{b}}_{.2} \\ \vec{\boldsymbol{a}}_{2.} \cdot \vec{\boldsymbol{b}}_{.1} & \vec{\boldsymbol{a}}_{2.} \cdot \vec{\boldsymbol{b}}_{.2} \end{pmatrix}$$

Matrixinvertierung

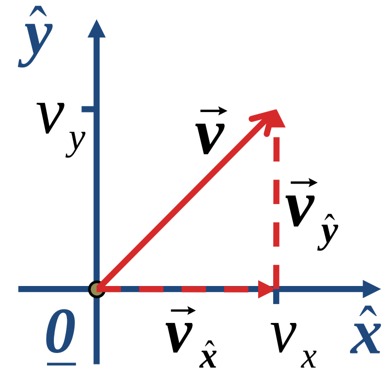
- Einheitsmatrix $\boldsymbol{I}$: $\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Inverse: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$
- Berechnung: über Gauß-Jordan Algorithmus oder Adjunkte
- Matrixinversion in 3D mit Vektorprodukten
  - geg.: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{a}}_1^T \\ \vec{\boldsymbol{a}}_2^T \\ \vec{\boldsymbol{a}}_3^T \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{3\times 3}$
  - ges.: $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{b}}_1 & \vec{\boldsymbol{b}}_2 & \vec{\boldsymbol{b}}_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{3\times 3} : \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{1}$, d.h. $\langle \vec{\boldsymbol{a}}_i, \vec{\boldsymbol{b}}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ldots i=j \\ 0 \ldots \text{sonst} \end{cases}$
  - somit $\vec{\boldsymbol{b}}_i \perp \vec{\boldsymbol{a}}_{j\neq i} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{b}}_i = \frac{\vec{\boldsymbol{a}}_j \times \vec{\boldsymbol{a}}_k}{[\vec{\boldsymbol{a}}_i, \vec{\boldsymbol{a}}_j, \vec{\boldsymbol{a}}_k]}$ mit $\{i, j, k\} \in \{\{1,2,3\}, \{2,3,1\}, \{3,1,2\}\}$

LINEARE TRANSFORMATIONEN

Lineare Transformationen
Koordinatendarstellung

Computergraphik und Visualisierung

- Ein Koordinatensystem ist durch einen Ursprung $\underline{0}$ und Vektoren $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$ gegeben, die die Koordinatenachsen aufspannen.
- Ein beliebiger Vektor $\vec{\mathbf{v}}$ kann in Komponenten $\vec{\mathbf{v}}_{\hat{x}}, \vec{\mathbf{v}}_{\hat{y}}$ entlang der Koordinatenachsen zerlegt werden, woraus sich seine komponentenweise Darstellung ergibt.
- Die Vektoren der Koordinatenachsen bilden eine Basis, die man orthonormal nennt, wenn die Vektoren Länge eins haben und senkrecht aufeinander stehen.

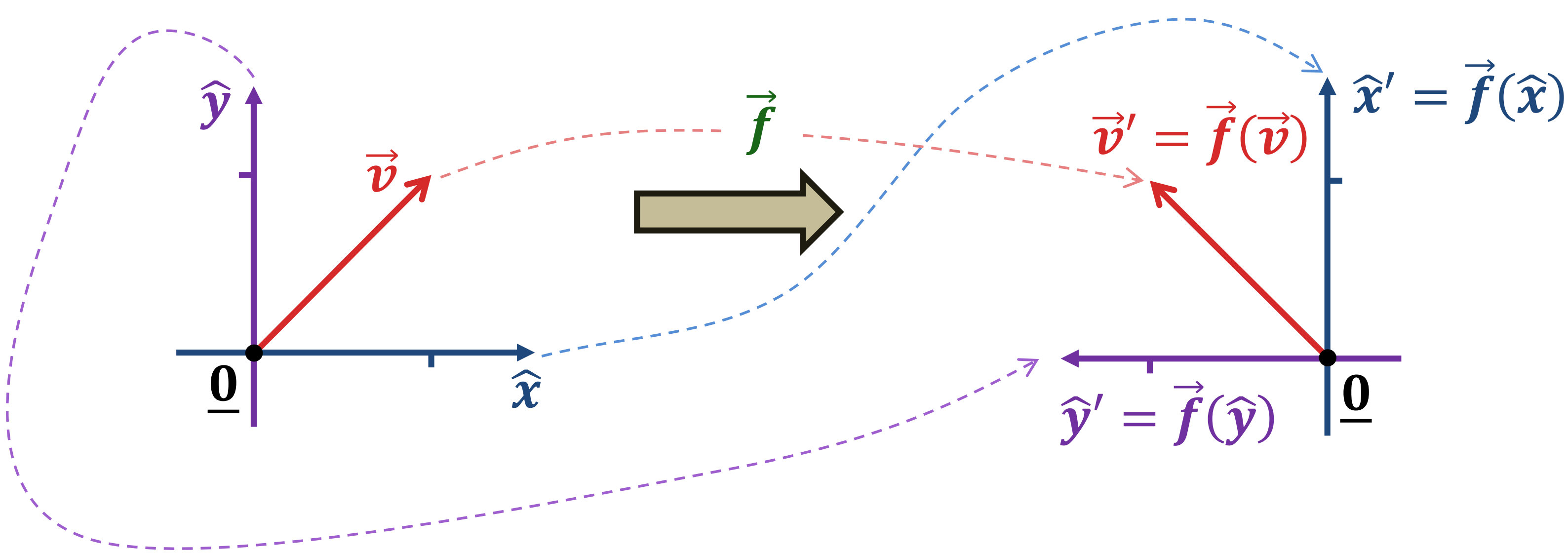


$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}} &= \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \\
&= v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} \\
&= \vec{\mathbf{v}}_{\hat{x}} + \vec{\mathbf{v}}_{\hat{y}} \\
&= \langle \vec{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{x}} \rangle \hat{\mathbf{x}} + \langle \vec{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle \hat{\mathbf{y}}
\end{aligned}
$$

Lineare Transformationen
Definition

- Die einfachste Art der Transformationen wird durch eine lineare Abbildung repräsentiert, die Linearkombinationen erhält, d.h.

$$\vec{f}\left(a\vec{u}+b\vec{v}\right)=a\vec{f}\left(\vec{u}\right)+b\vec{f}\left(\vec{v}\right)$$



- Bei einer linearen Transformation bleibt der Ursprung erhalten.

Lineare Transformationen
Matrixdarstellung

Computergraphik und Visualisierung

- Jede lineare Abbildung kann als Matrix dargestellt werden und ein Vektor wird durch Matrix-Vektor-Multiplikation transformiert

$$\forall \text{ lineare } \vec{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n : \exists \mathbf{M} \in \mathbf{R}^{n \times n} : \forall \vec{\mathbf{v}} \in \mathbf{R}^n : \vec{f}(\vec{\mathbf{v}}) = \mathbf{M}\vec{\mathbf{v}}$$

- in den Spalten von $\mathbf{M}$ stehen die Bilder der Basisvektoren

$$\mathbf{R}^{2\times 2} : \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}' & \vec{\mathbf{y}}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}(\hat{\mathbf{x}}) & \vec{f}(\vec{\mathbf{y}}) \end{pmatrix}$$

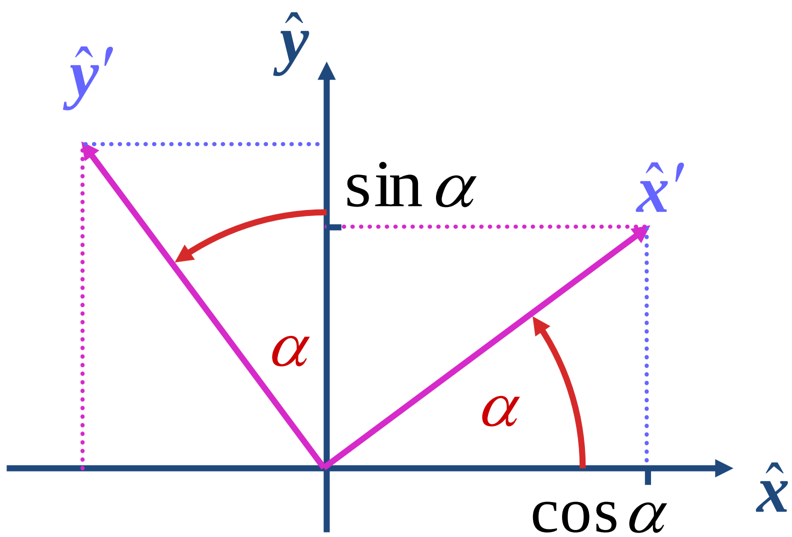
- dies folgt zum Bsp. für x durch Multiplikation von $\mathbf{M}$ mit $\hat{\mathbf{x}}$

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\mathbf{x}}' = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{21} \end{pmatrix} = M_{11}\hat{\mathbf{x}} + M_{21}\hat{\mathbf{y}}$$

Lineare Transformationen
Aufstellen einer speziellen Matrix

Computergraphik und Visualisierung

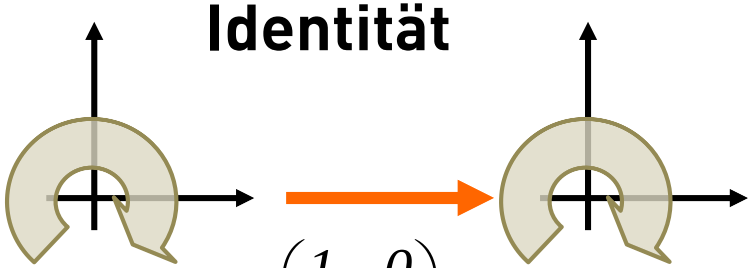
- Beim Entwurf einer speziellen Transformation muss man sich somit nur überlegen, wie die Basisvektoren abgebildet werden
- Bsp.: Rotation um den Winkel α gegen den Urzeigersinn



$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Lineare Transformationen
Spiegelungen

Identität

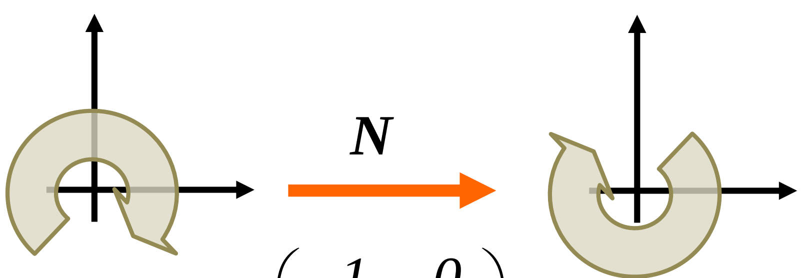


$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I^{-1} = I$$

- Im 2D entspricht die Punktspiegelung einer Rotation um 180 Grad
- Achsenspiegelungen wie Punktspiegelung im 3D kehren nicht symmetrische Objekte in sich um. Flächeninhalt / Volumen wird dabei negiert

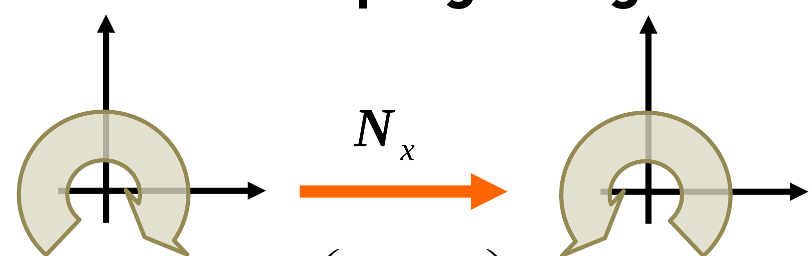
Punktspiegelung



$$N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$N^{-1} = N$$

Achsenspiegelung

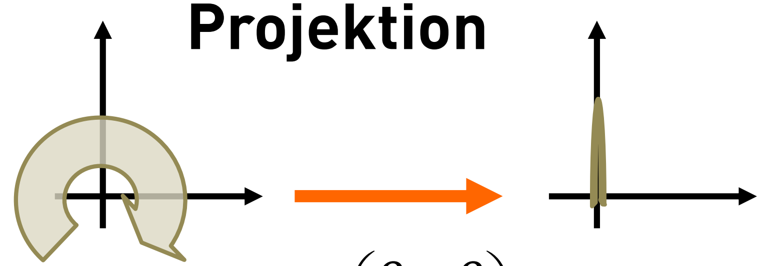


$$N_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

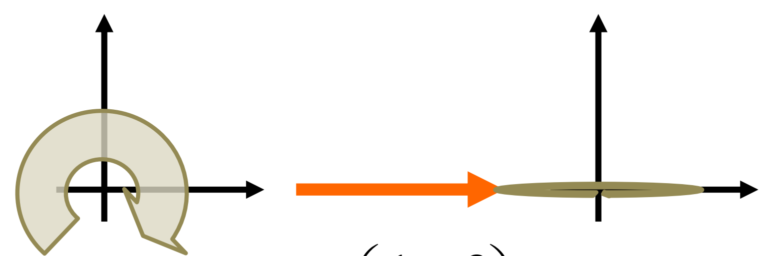
$$N_x^{-1} = N_x$$

- Projektionen werden verwendet, um auf die Bildebene zu projizieren. Dabei wird die Komponente in Projektionsrichtung einfach weggelassen (auf 0 gesetzt)
- Projektionen sind nicht umkehrbar

Projektion



$$\boldsymbol{\Pi}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

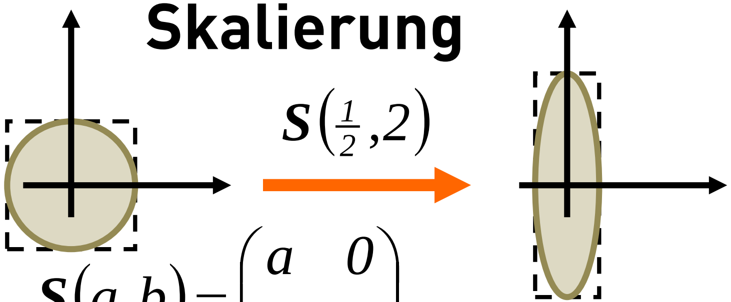


$$\boldsymbol{\Pi}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lineare Transformationen
Skalierung, Scherung und Rotation

Computergraphik und Visualisierung

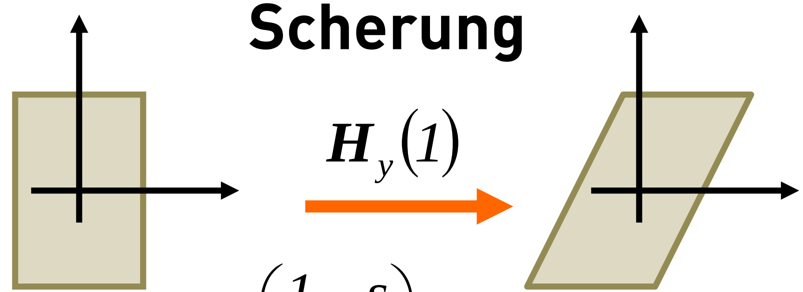
Skalierung



$$S(a,b)=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$S(a,b)^{-1}=S\left(\tfrac{1}{a},\tfrac{1}{b}\right)$$

Scherung



$$H_y(s)=\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

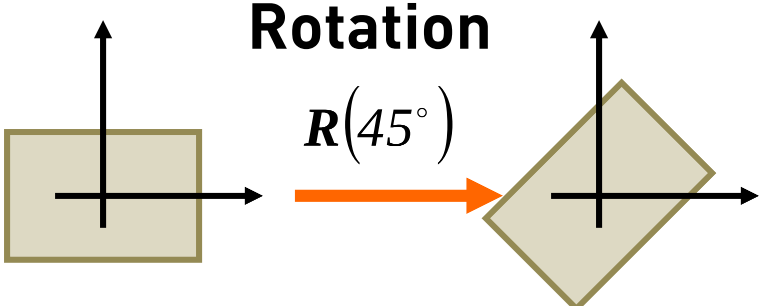
$$H_y(s)^{-1}=H_y(-s)$$

$$H_x(s_y,s_z)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_y & 1 & 0 \\ s_z & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_y(s_x,s_z)=\begin{pmatrix} 1 & s_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & s_z & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_z(s_x,s_y)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & s_x \\ 0 & 1 & s_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation



$$R(\alpha)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

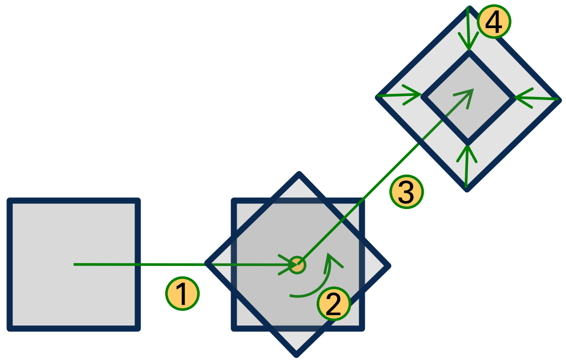
$$R(\alpha)^{-1}=R(\alpha)^T=R(-\alpha)$$

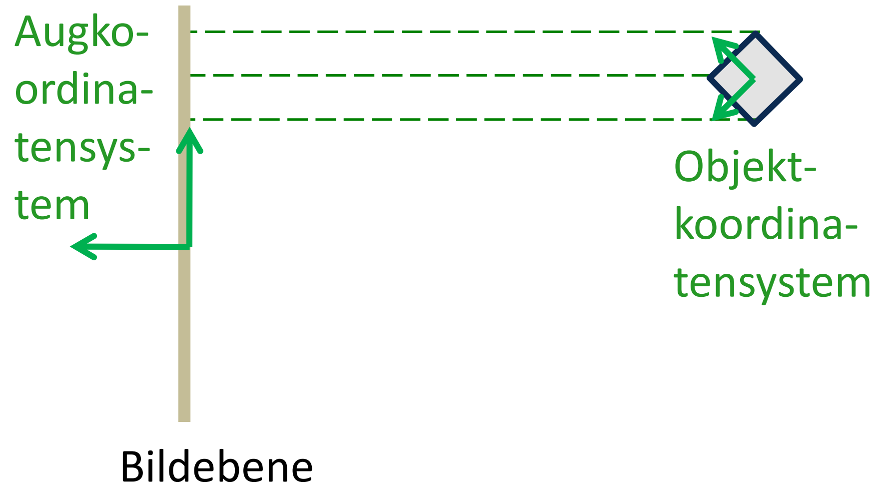
$$R_x(\alpha)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$R_y(\alpha)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$R_z(\alpha)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SYSTEMTRANSFORMATIONEN





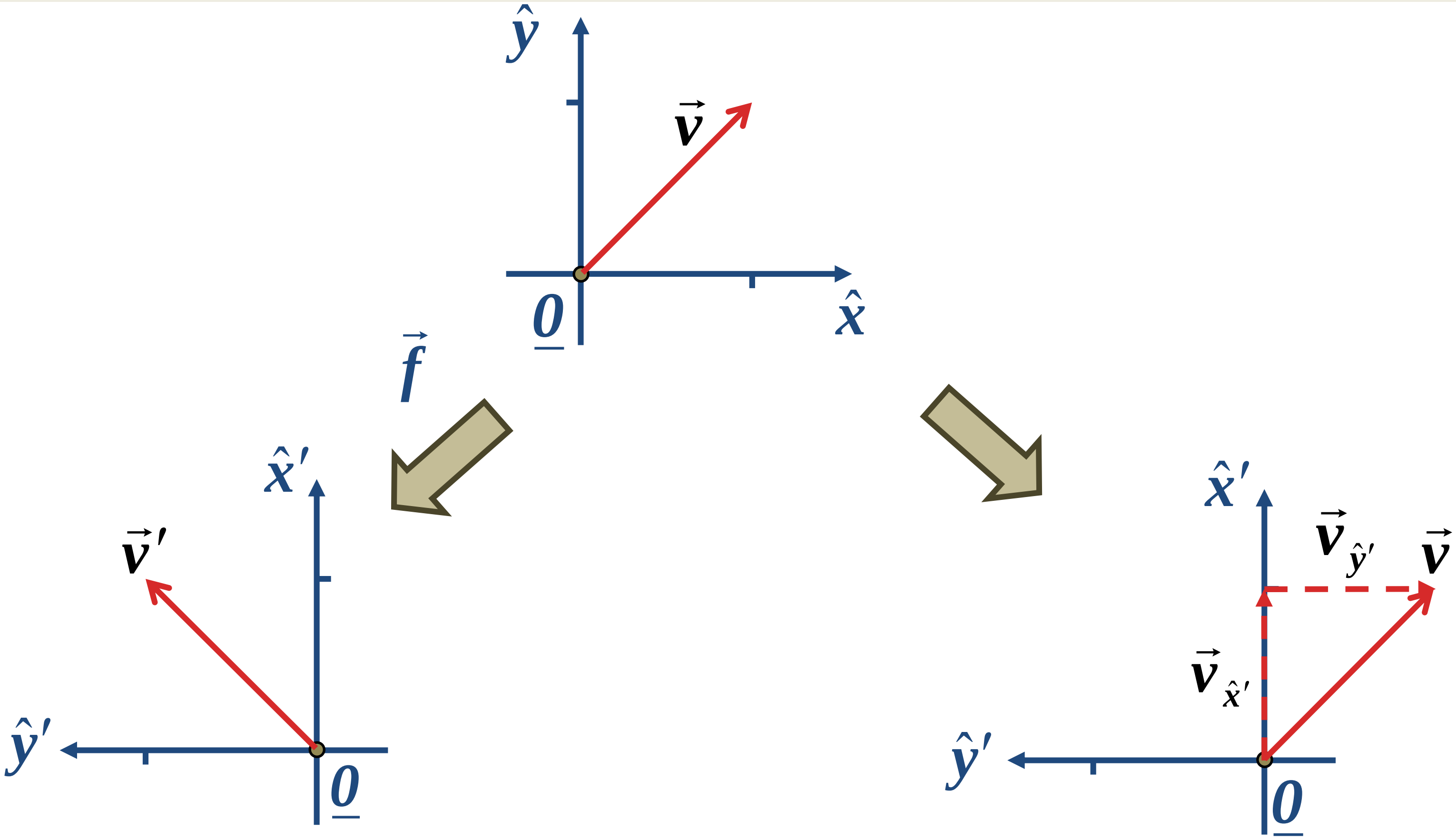
Modelltransformation (bisher)

- Positionierung von Objekten in einer Szene
- Beispiel
  - Translation
  - Rotation
  - Skalierung

Systemtransformation

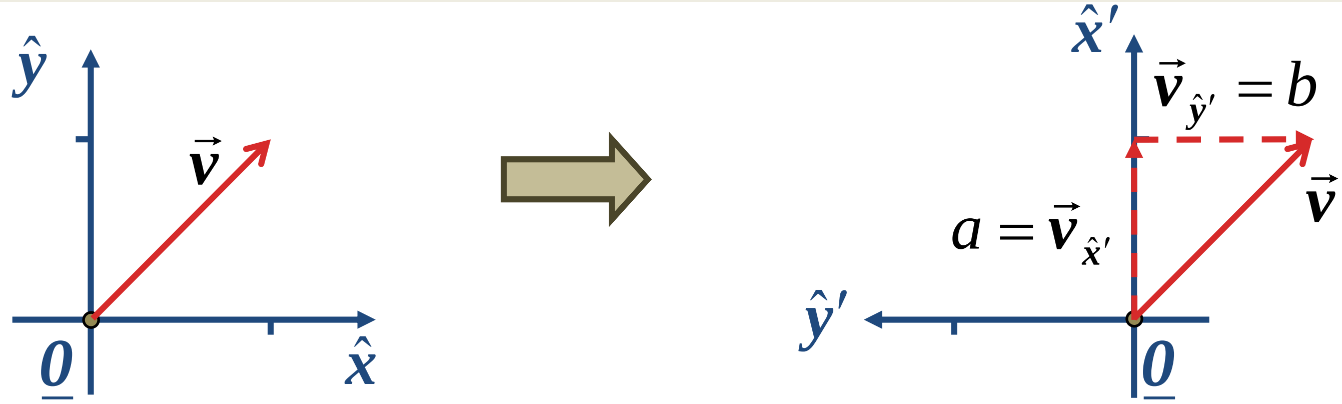
- Umrechnung der Koordinaten in ein anderes Koordinatensystem z.B. zur Projektion von Geometrie in die Bildebene

Systemtransformationen
Definition



- Modelltransformation transformiert $\vec{v}$ so zu $\vec{v}'$, dass $\hat{x}, \hat{y}$ auf $\hat{x}', \hat{y}'$ abgebildet werden
- Systemtransformation berechnet die Koordinatendarstellung von $\vec{v}$ in $\hat{x}', \hat{y}'$

Systemtransformationen
Zusammenhang zur Modelltransformation



$$\vec{v} = a\hat{\mathbf{x}}' + b\hat{\mathbf{y}}' = \begin{pmatrix}\hat{\mathbf{x}}' & \hat{\mathbf{y}}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{\mathbf{x}}' & \hat{\mathbf{y}}'\end{pmatrix}^{-1}\vec{v}$$

- Die Systemtransformation ergibt sich durch Invertieren der Matrix mit den transformierten Basisvektoren in den Spalten
- D.h. Modell- und Systemtransformationen sind zueinander inverse Transformationen

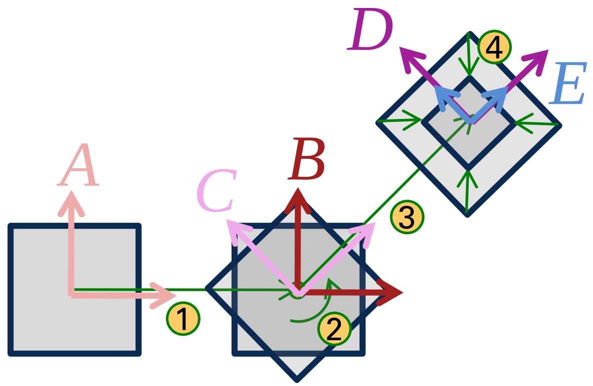
Systemtransformationen
Erweiterung der Notation

Computergraphik und Visualisierung

- Vektor als Element des Vektorraumes $\vec{\mathbf{v}}$
- Vektor in Komponentendarstellung des Koordinatensystems A $\vec{\mathbf{v}}_A$
- Matrixnotation mit 2 Interpretationen: $\mathbf{M}_A^B$
  1. Systemtransformation von Koordinatensystem B ins Koordinatensystem A
  2. Modelltransformation im System A mit Abbildung der Basis A auf B
- Einsatz
  - Systemtransformationsgleichung $\vec{\mathbf{v}}_A = \mathbf{M}_A^B \vec{\mathbf{v}}_B$
  - Modelltransformationsgleichung $\vec{\mathbf{v}}'_A = \mathbf{M}_A^B \vec{\mathbf{v}}_A$
  - Umkehrtransformation $\mathbf{M}_B^A = \left(\mathbf{M}_A^B\right)^{-1}$
  - Verkettung $\mathbf{M}_A^C = \mathbf{M}_A^B \mathbf{M}_B^C$

Systemtransformationen Verkettung

- Bei der Verkettung von Modelltransformationen über Matrixmultiplikation bietet es sich an, die zweite Transformation relativ zu den Bildbasisvektoren der ersten Transformation zu spezifizieren
- Dazu multipliziert man die zweite Transformationsmatrix von rechts an die erste.
- Die so erhaltene Gesamttransformation ist gleichzeitig die Systemtransformation, die vom letzten Koordinatensystem ins Anfangskoordinatensystem transformiert



$$A \xrightarrow{\tilde{\boldsymbol{T}}_A^B} B \xrightarrow{\tilde{\boldsymbol{R}}_B^C} C \xrightarrow{\tilde{\boldsymbol{T}}_C^D} D \xrightarrow{\tilde{\boldsymbol{S}}_D^E} E$$

1 2 3 4

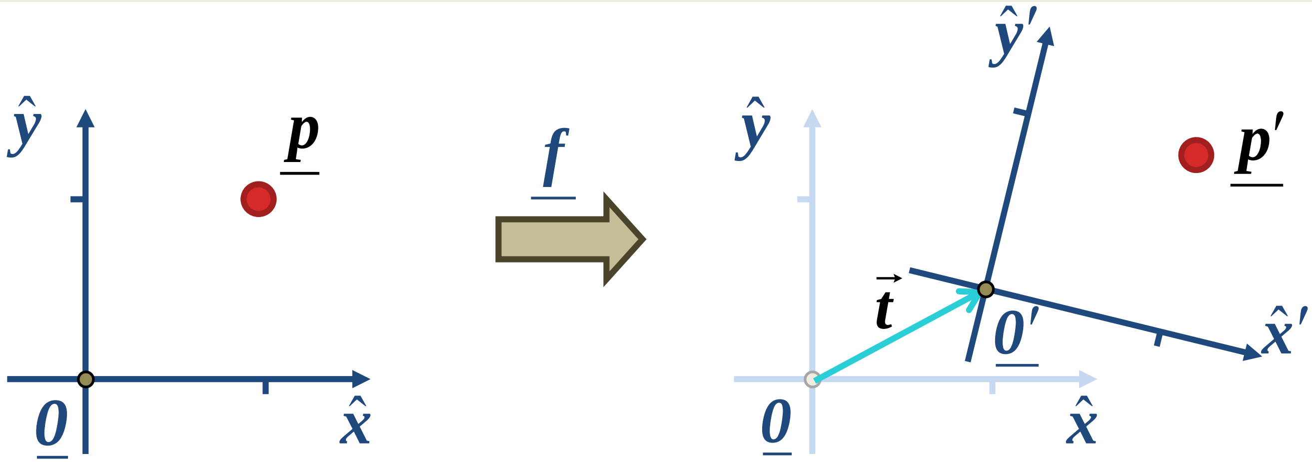
Abfolge der Transformationen zwischen Koordinatensystemen A bis E

$$\tilde{\boldsymbol{M}}_A^E = \tilde{\boldsymbol{T}}_A^B \tilde{\boldsymbol{R}}_B^C \tilde{\boldsymbol{T}}_C^D \tilde{\boldsymbol{S}}_D^E$$

Gesamttransformation

AFFINE TRANSFORMATIONEN

Affine Transformationen
Integration von Translationen



- Bei Punkten sind zusätzlich zu linearen Transformationen auch Verschiebungen (Translationen) notwendig.
- Affine Abbildungen erweitern lineare Abbildungen um Translationen, indem zusätzlich der Ursprung des Koordinatensystems verschoben wird.
- Mit der Menge aller n-dimensionalen Punkte $\underline{\boldsymbol{A}}^n$ gilt:

$$\forall \text{ affine } \underline{f} : \boldsymbol{A}^n \rightarrow \boldsymbol{A}^n : \exists \boldsymbol{M} \in \boldsymbol{R}^{n \times n}, \vec{t} \in \boldsymbol{R}^n : \forall \underline{p} \in \boldsymbol{A}^n : \underline{f}(\underline{p}) = \boldsymbol{M}\,\underline{p} + \vec{t}$$

Affine Transformationen
Homogene Darstellung

Computergraphik und Visualisierung

- Die Transformationsvorschrift einer affinen Transformation kann durch Erweiterung der Komponentendarstellung des Punktes wieder mit einer Matrix-Vektor-Multiplikation geschrieben werden
- Die neue Komponente wird *w*-Komponente genannt
- Differenzvektoren werden nicht transliert und erhalten eine Null als *w*-Komponente:

$$\vec{v} = \underline{p} - \underline{q}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}'} = \underline{p}' - \underline{q}' = M\underline{p} + \vec{t} - \left(M\underline{q} + \vec{t}\right) = M\left(\underline{p} - \underline{q}\right) \boxed{= M\vec{v}}$$

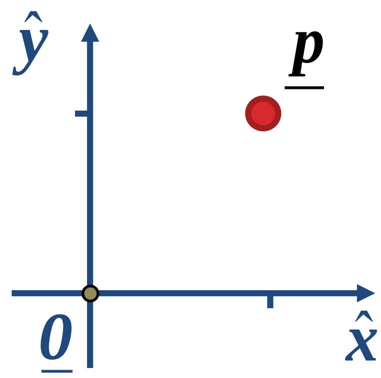
$$\underline{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$\left\{M, \vec{t}\right\} \Rightarrow \tilde{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & t_x \\ M_{21} & M_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{p}' = M\underline{p} + \vec{t} \Rightarrow \boxed{\tilde{p}' = \tilde{M}\tilde{p}}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \boxed{0} \end{pmatrix}$$

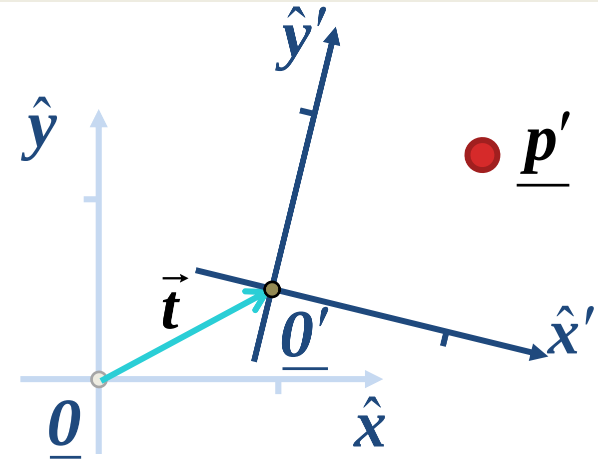
Affine Transformationen
Homogene Darstellung interpretiert



$$\xrightarrow{\vec{f}}$$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & t_x \\ M_{21} & M_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{x}' & \tilde{y}' & \tilde{0}' \end{array}$$



- Auch in der homogenen Darstellung können die Spalten der Transformationsmatrix als Bilder der Basis interpretiert werden – jeweils in homogener Darstellung als Vektor bei w=0 oder Punkt bei w=1
- Die w-Spalte ist das Bild des Ursprungs (Punkt) der zur Basis des linearen Falls hinzukommt.

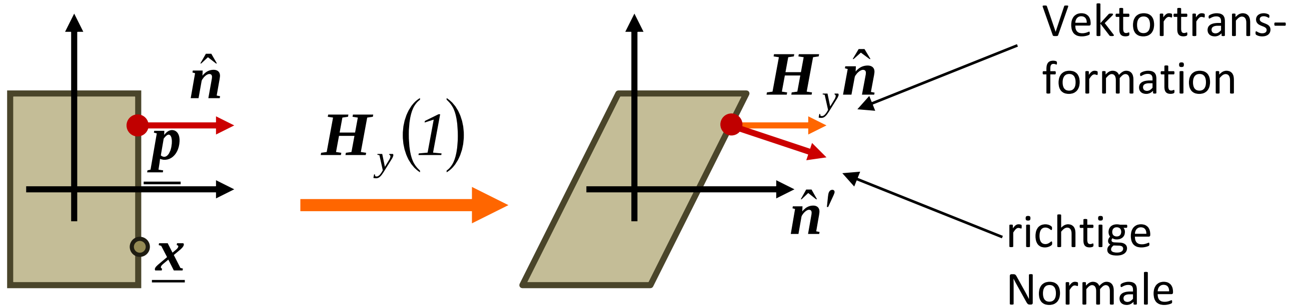
Affine Transformationen
Definition

- Nimmt man lineare Transformationen und Translationen zusammen, so ergeben sich die affinen Transformationen
- In der homogenen Darstellung kann man sie auf Punkte ($w=1$) wie Vektoren ($w=0$) anwenden. Dabei werden stets Punkte auf Punkte und Vektoren auf Vektoren abgebildet.
- Affine Transformationen erhalten Linearkombinationen, bei denen sich die Gewichte zu eins summieren; diese werden Affinkombinationen genannt:

$$\underline{f}\Big(\underbrace{(1-\lambda)\underline{p}+\lambda\underline{q}}_{\text{Affinkombination}}\Big) \underset{\uparrow\ \text{affine Invarianz}}{=} (1-\lambda)\underline{f}\left(\underline{p}\right)+\lambda\,\underline{f}\left(\underline{q}\right)$$

→ Bei Kurven mit affin invarianter Basis kann die Kurve über die Kontrollpunkte transformiert werden

Affine Transformationen
Transformation von Normalen



- Affine Transformation erhalten nicht die Winkel zwischen Vektoren. Damit transformierte Normalenvektoren nach der Transformation immer noch senkrecht auf der Fläche stehen müssen sie mit der inverstransponierten Transformationsmatrix multipliziert werden:

$$\vec{n}' = \left(M^{-1}\right)^T \hat{n}$$

- Die so transformierte Normale steht wieder senkrecht zur Fläche, was aus der Betrachtung eines Differenzvektors in der Fläche folgt:

$$\vec{v} = \underline{x} - \underline{p} \text{ mit } \vec{v} \perp \hat{n}, \text{ d.h. } \langle \vec{v}, \hat{n} \rangle = 0$$

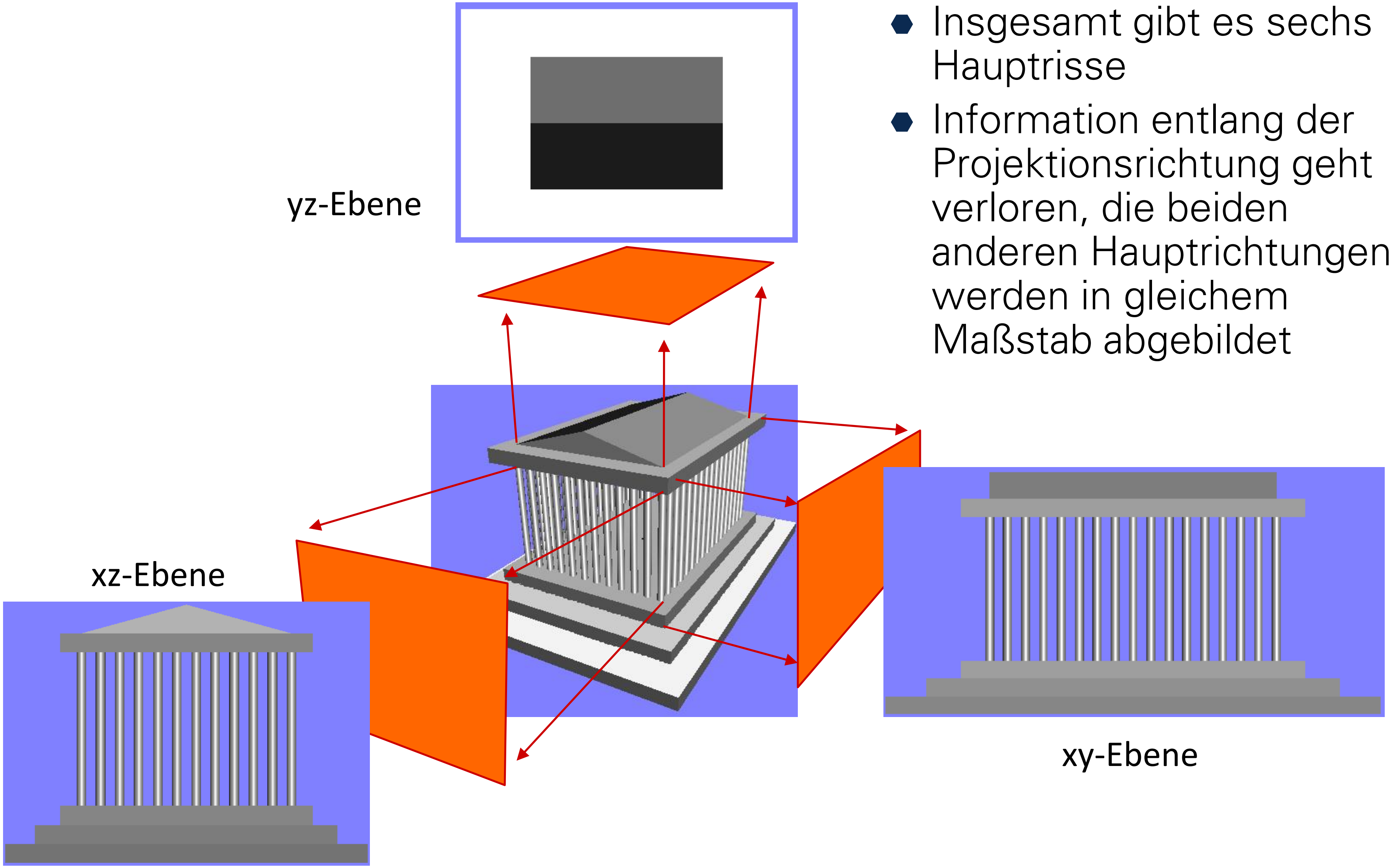
$$\vec{v}' = M\vec{v} \Rightarrow \langle \vec{v}', \hat{n}' \rangle = (M\vec{v})^T \left(M^{-1}\right)^T \hat{n} = \vec{v}^T M^T \left(M^{-1}\right)^T \hat{n} = \vec{v}^T \hat{n} = \langle \vec{v}, \hat{n} \rangle = 0$$

- Die transformierte Normale muss abschließend normiert werden

ANSICHTSTRANSFORMATIONEN

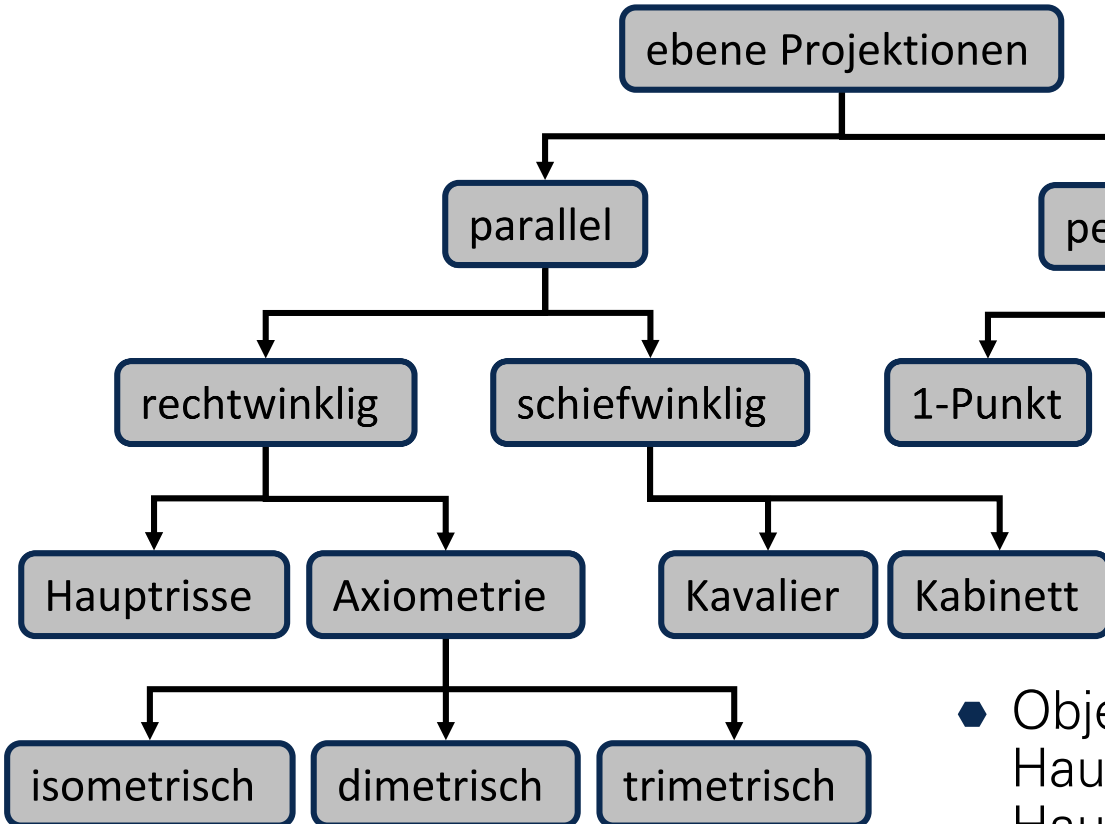
Ansichtstransformationen Parallelprojektion

Computergraphik und Visualisierung

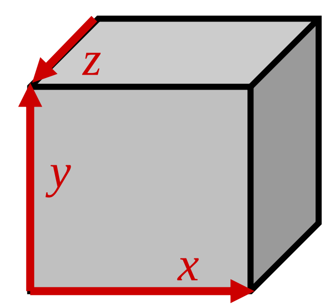


- Insgesamt gibt es sechs Hauptrisse
- Information entlang der Projektionsrichtung geht verloren, die beiden anderen Hauptrichtungen werden in gleichem Maßstab abgebildet

Ansichtstransformationen
Übersicht Klassischer Projektionen

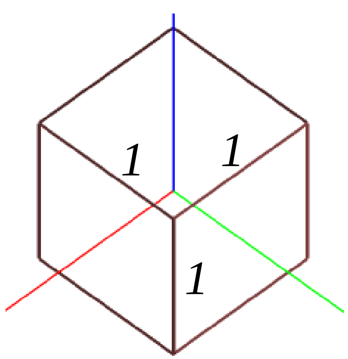


- Objekt hat drei orthogonale Hauptrichtungen (z.B. Quader, Haus, Auto, …)
- Koordinatensystem wird an Hauptrichtungen ausgerichtet

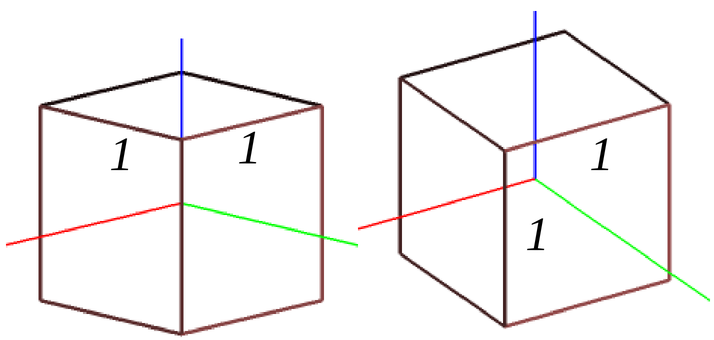


Ansichtstransformationen
Rechtwinklige Projektion

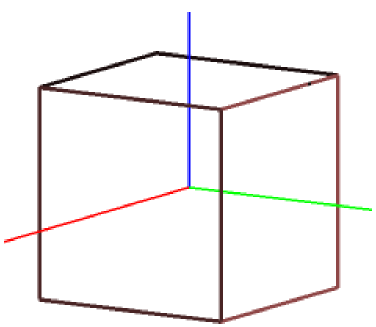
- Projiziert man nicht entlang einer der Hauptrichtungen, so unterscheidet man
  - isometrisch Projektion … wenn alle Hauptachsen im selben Verhältnis abgebildet werden
  - dimetrische Projektion … wenn zwei Hauptachsen im selben Verhältnis abgebildet werden
  - trimetrische Projektion … wenn alle Hauptachsen in unterschiedlichem Verhältnis abgebildet werden



isometrisch

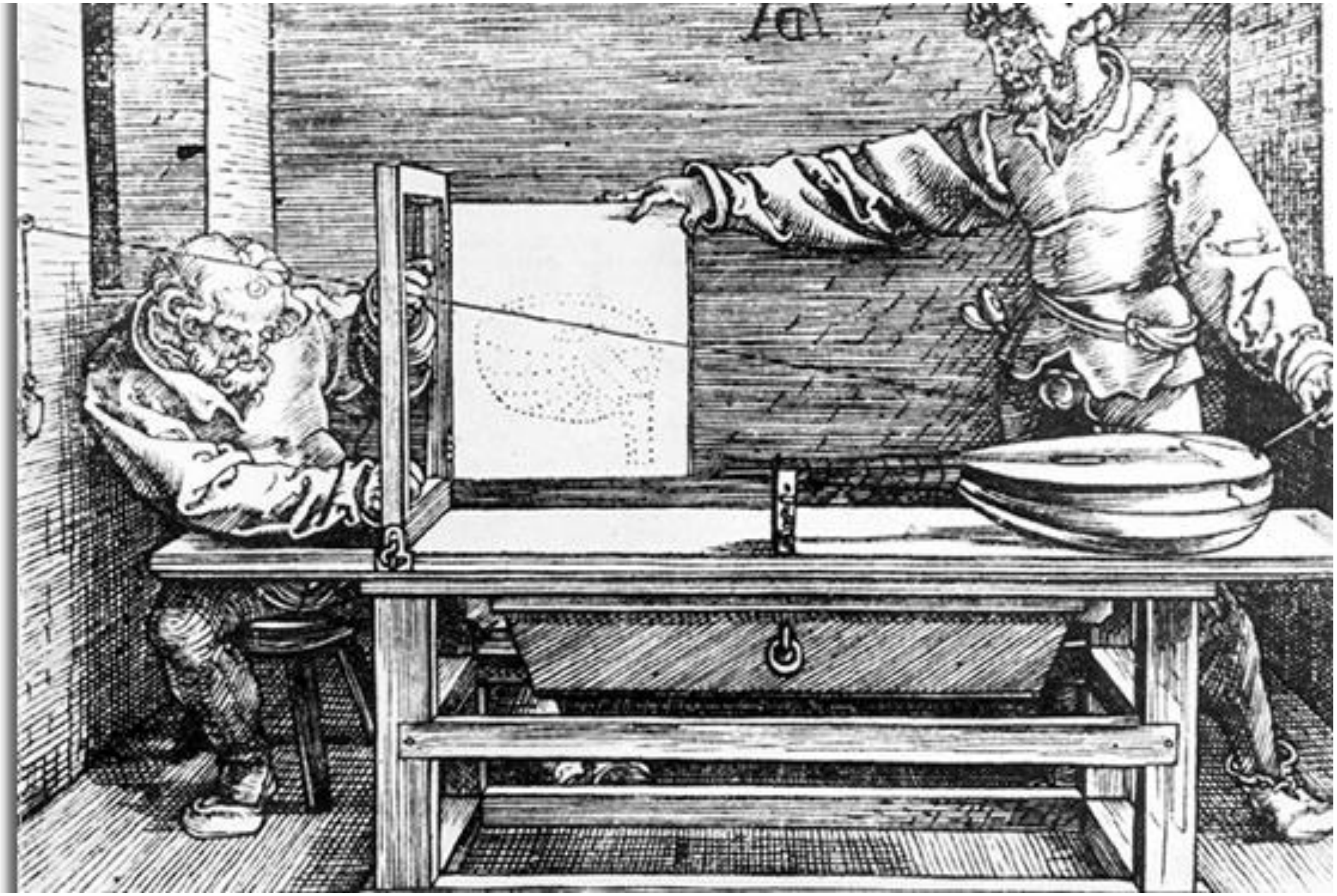


dimetrisch



trimetrisch

Ansichtstransformationen
Perspektivische Projektion



Albrecht Dürer, Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheyt, in Linien, Ebenen unnd gantzen corporen/Viertes Buch, 1525

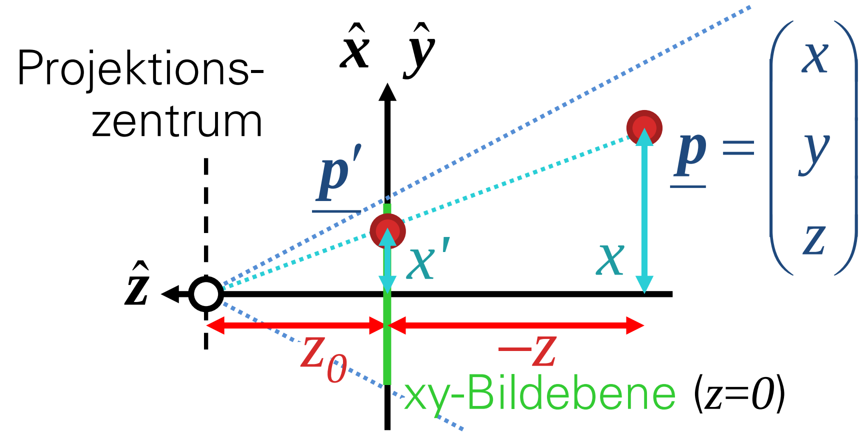
Ansichtstransformationen
Perspektivische Projektion

Computergraphik
und Visualisierung

- Um Punkte entlang von Strahlen durch den Augpunkt auf die Bildebene zu projizieren, benötigt man rationale Transformationen der Form (im folgenden 1D):

$$x' = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

- Auch diese können mit Hilfe der homogenen Matrizen-schreibweise repräsentiert werden
- Dazu wird die w-Komponente als Nenner interpretiert, der den x,y und z-Komponenten gemein ist



$$x' = \frac{z_0 x}{z_0 - z} \qquad y' = \frac{z_0 y}{z_0 - z} \qquad z' = 0$$

$$\begin{bmatrix} z_0 x \\ z_0 y \\ 0 \\ z_0 - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

HOMOGENE DARSTELLUNG

Homogene Darstellung Rationale Zahlen im 1D

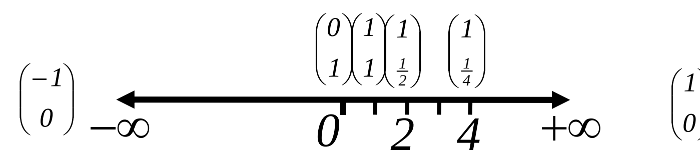
- Die Homogene Darstellung kann auch verwendet werden, um Quotienten zu repräsentieren. In der x-Komponente wird der Zähler und in der w-Komponente der Nenner gespeichert.
- Der Wert eines Bruchs ändert sich nicht, wenn man Zähler & Nenner mit einer Zahl $\neq 0$ multipliziert.
- Deshalb werden alle homogene Vektoren, die sich nur durch einen skalaren Faktor unterscheiden identifizieren ($\approx$)
- Im 1D repräsentieren alle homogenen Vektoren mit einer 0 in der w-Komponente unendlich – es ist jedoch $-\infty$ und $+\infty$ zu identifizieren
- (0,0), d.h. 0 durch 0, ist kein gültiger homogener Vektor

$$q = \frac{x}{w} \Rightarrow \tilde{q} = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}$$

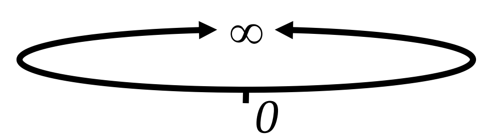
Repräsentation eines Bruchs

$$\forall \lambda \neq 0 : q = \frac{x}{w} = \frac{\lambda \cdot x}{\lambda \cdot w} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \approx \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}$$

homogene Vektoren kann man mit Skalar multiplizieren



reale Zahlen



homogene Zahlen

Homogene Darstellung Rationale Funktionen im 1D

Computergraphik und Visualisierung

- Rationale Funktionen können mit homogenen Matrizen dargestellt werden. Wieder werden skalare Vielfache identifiziert.
- Die Anwendung einer rationalen Funktion auf einen homogenen Vektor ergibt sich wieder durch Matrix-Vektor-Multiplikation
- Die Verkettung von zwei rationalen Abbildungen ergibt sich durch Matrix-Matrix-Multiplikation

$$f(q) = \frac{aq+b}{cq+d} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \approx \lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Repräsentation rationaler Funktionen

$$\frac{aq+b}{cq+d} \Rightarrow \begin{pmatrix} ax/w+b \\ cx/w+d \end{pmatrix} \approx$$

$$\begin{pmatrix} ax+bw \\ cx+dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}$$

Anwendung auf einen homogenen Vektor

$$f_1(q) = \frac{a_1 q + b_1}{c_1 q + d_1} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \; f_2(q) = \frac{a_2 q + b_2}{c_2 q + d_2} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

$$f_1\left(f_2(q)\right) = \frac{a_1 \frac{a_2 q + b_2}{c_2 q + d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2 q + b_2}{c_2 q + d_2} + d_1} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

Verkettung von rationalen Funktionen

PERSPEKTIVISCHE TRANSFORMATIONEN

Perspektivische Transformationen Zweidimensional

Computergraphik und Visualisierung

- Erweitert man rationale Funktionen auf 2 oder 3 Dimensionen, wird nur eine w-Komponente für einen gemeinsamen Nenner hinzugefügt
- Mit der homogenen Matrix-Darstellung können nun lineare, affine und perspektivische Transformation repräsentiert werden
- Homogene Vektoren mit 0 in der w-Komponente sind keine Differenzvektoren mehr, sondern Punkte, die in der Richtung des Vektors ins Unendliche geschoben sind.
- Perspektivische Transformation von Punkten:

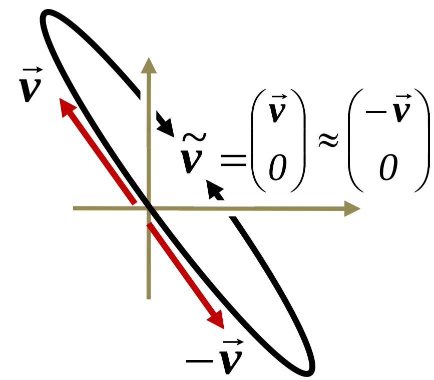
Lineare Transformationen

$$\tilde{\boldsymbol{M}} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & t_x \\ M_{21} & M_{22} & t_y \\ p_x & p_y & 1 \end{pmatrix}$$

Translationen

Perspektivische Transformationen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$$



homogene Vektoren mit w=0 sind entlang ±Richtung in xy-Komponente unendlich weit entfernte Punkte

$$\underline{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{p}}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} = \tilde{\boldsymbol{M}}\tilde{\boldsymbol{p}} \Rightarrow \underline{\boldsymbol{p}}' = \begin{pmatrix} x'/w' \\ y'/w' \end{pmatrix}$$

1. Homogenisierung
2. Transformation
3. w-Clip

Perspektivische Transformationen Dreidimensional

- Die perspektivische Projektion auf die Bildebene kann als Verkettung einer (umkehrbaren) perspektivischen Abbildung gefolgt von einer Projektion entlang der z-Richtung interpretiert werden
- Zur Definition der perspektivischen Abbildung nutzt man direkt den Matrixeintrag p_z in Spalte z und Zeile w. Ohne Perspektive ist dieser Eintrag 0, wohingegen z_0 unendlich wird.
- Entsprechend werden $\tilde{\boldsymbol{P}}_x$ und $\tilde{\boldsymbol{P}}_y$ definiert

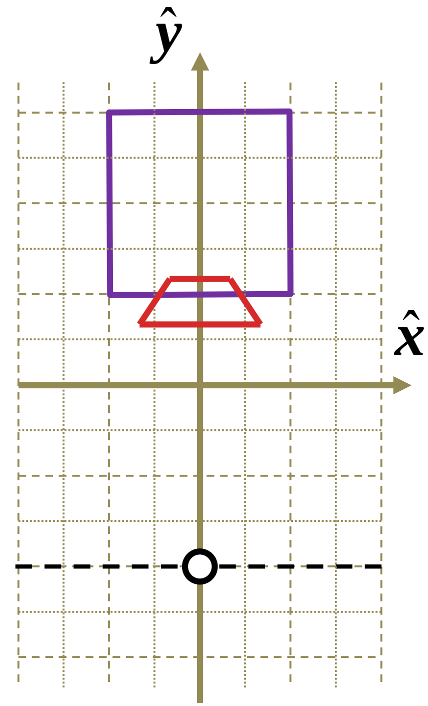
$$\begin{bmatrix} z_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & z_0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{z_0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{\Pi}}_z} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{z_0} & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{P}}_z(p_z)}$$

$$\text{mit } p_z = \frac{-1}{z_0}$$

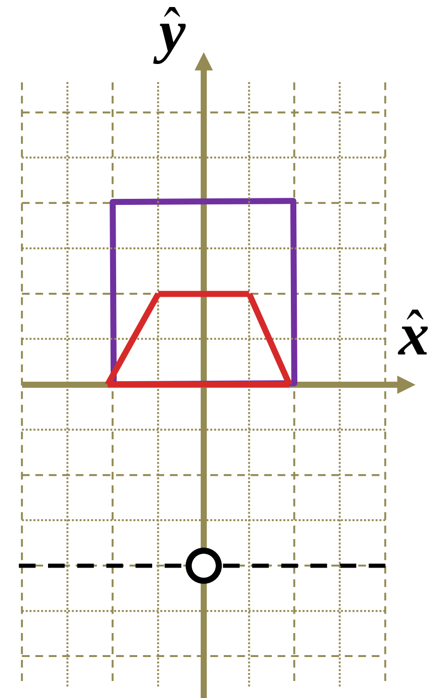
Perspektivische Transformationen
Graphische Illustration im 2D – 1

- Die Wirkung einer perspektivischen Transformation $\tilde{\boldsymbol{P}}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ kann man untersuchen, wenn man eine Referenzgeometrie abbildet – in den Beispielen wird das lila Quadrat auf das rote Viereck abgebildet
- Bei anschließender Projektion auf die Bildebene entsteht das Bild einer perspektivischen Projektion
- Punkte auf der x-Achse bleiben an der selben Stelle und heißen Fixpunkte



$(1 \quad 3)^T \rightarrow \left(\frac{2}{5} \quad \frac{6}{5}\right)^T$

$(1 \quad 1)^T \rightarrow \left(\frac{2}{3} \quad \frac{2}{3}\right)^T$



$(1 \quad 2)^T \rightarrow \left(\frac{1}{2} \quad 1\right)^T$

$(1 \quad 0)^T \rightarrow (1 \quad 0)^T$

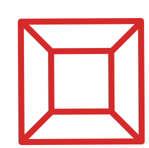
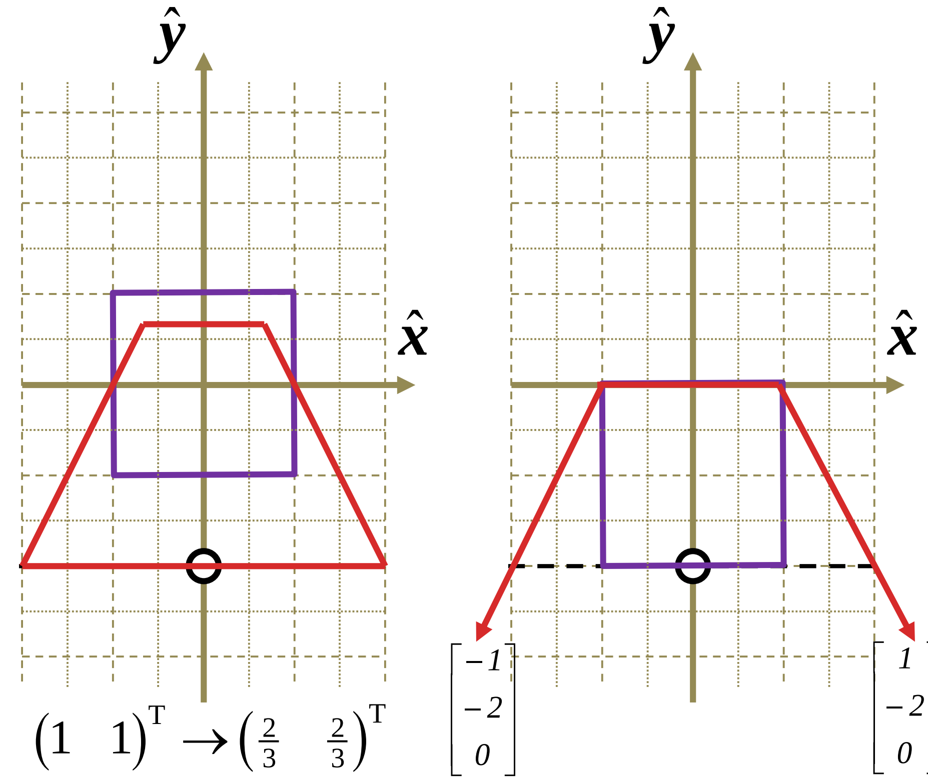


Bild nach Projektion eines Würfels in 3D:

Perspektivische Transformationen
Graphische Illustration im 2D – 2

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

- Punkte, die zwischen Auge und x-Achse liegen werden nach außen und unten geschoben
- Punkte auf der zur x-Achse parallelen Gerade durch den Augpunkt werden auf Punkte im Unendlichen abgebildet



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

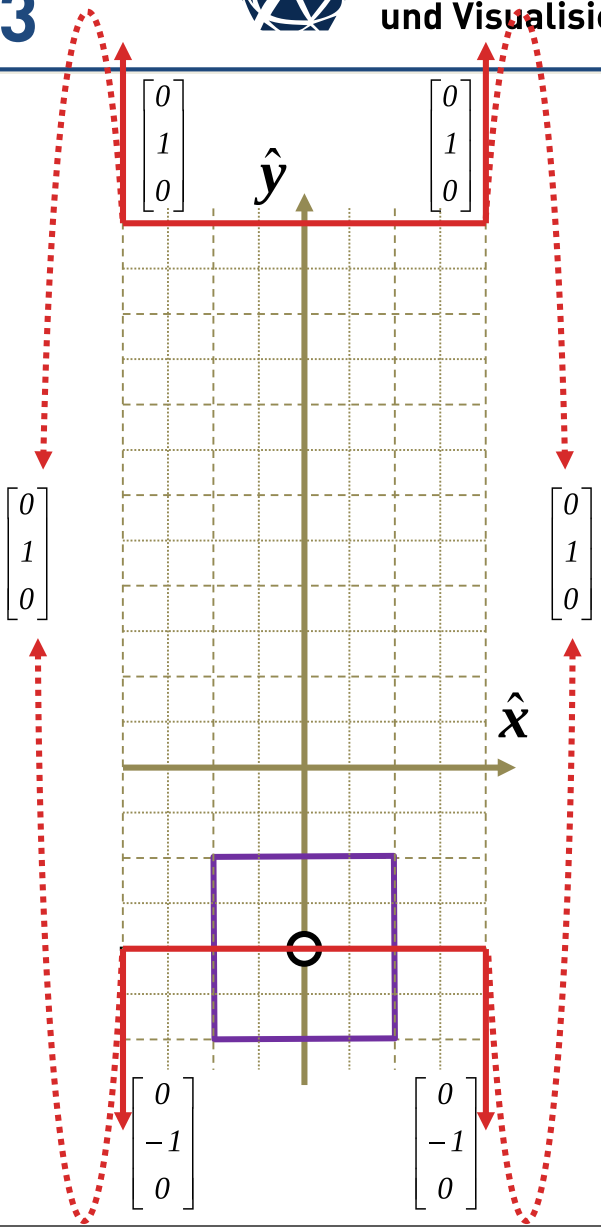
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Perspektivische Transformationen Graphische Illustration im 2D – 3

Computergraphik und Visualisierung

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

- Geraden werden zwar stets auf Geraden abgebildet; Strecken können jedoch auseinander gerissen werden, wenn ein Endpunkt vor und der andere hinter dem Auge liegt
- Um zu vermeiden, dass nach der perspektivischen Abbildung Objekte von hinter dem Auge vor das Auge gebracht werden, kann vorher an der near-clipping Ebene geclippt werden.



- Eine Ebene in Hesse 'scher Normalform kann mit Hilfe von homogenen Vektoren durch ein Skalarprodukt definiert werden
- D.h. die Ebene kann mit einem homogenen Vektor repräsentiert werden, der die Komponenten des Normalenvektors und den Abstand zum Ursprung enthält
- Ähnlich wie im affinen Fall kann man zeigen, dass sich die homogene Ebenendarstellung mit der Inverstransponierten transformiert:

$$n_x x + n_y y + n_z z + d = 0$$

$$\tilde{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ d \end{pmatrix} \quad \tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{n}}^T \tilde{\boldsymbol{x}} = 0$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}' = \tilde{\boldsymbol{M}}\tilde{\boldsymbol{x}}, \quad \tilde{\boldsymbol{n}}' = \left(\tilde{\boldsymbol{M}}^{-1}\right)^T \tilde{\boldsymbol{n}}$$

$$\Rightarrow \tilde{\boldsymbol{n}}'^T \tilde{\boldsymbol{x}}' = \tilde{\boldsymbol{n}}^T \tilde{\boldsymbol{M}}^{-1} \tilde{\boldsymbol{M}} \tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{n}}^T \tilde{\boldsymbol{x}}$$

$$\left.\begin{matrix} \hat{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} \\ d \end{matrix}\right\} \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{n}}' = \begin{pmatrix} n'_x \\ n'_y \\ d' \end{pmatrix} = \left(\tilde{\boldsymbol{M}}^{-1}\right)^T \tilde{\boldsymbol{n}} \Rightarrow \left(\begin{matrix} \hat{\boldsymbol{n}}' = \begin{pmatrix} n'_x / l \\ n'_y / l \end{pmatrix}, l = \sqrt{n'^2_x + n'^2_y} \\ d' = d / l \end{matrix} \right.$$

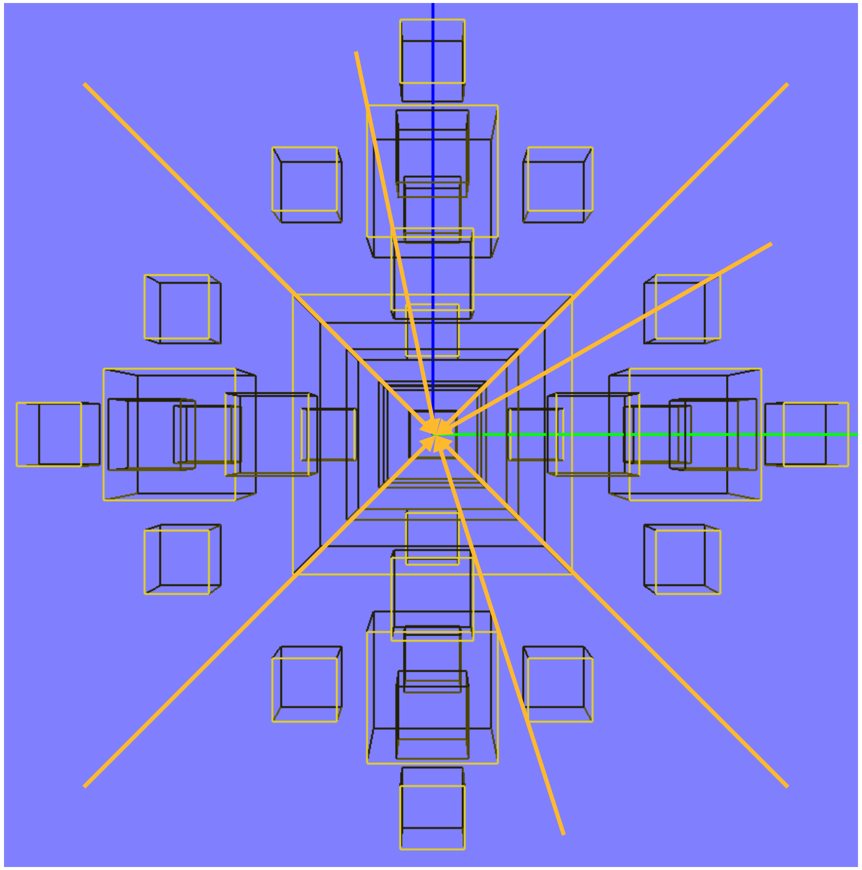
Perspektivische Transformation von Ebenen (nicht im OpenGL-Standard)

FLUCHTPUNKTE

Fluchtpunkte
Definition

Computergraphik und Visualisierung

- Nach einer perspektivischen Abbildung können sich zuvor parallele Linien in einem Punkt schneiden.
- Ist dies der Fall nennt man den Schnittpunkt Fluchtpunkt.
- Jede Raumrichtung kann einen unterschiedlichen Fluchtpunkt haben.
- Man spricht in der klassischen Projektion von 1-, 2- oder 3-Punktperspektive, wenn es für 1, 2 oder 3 Hauptrichtungen einen so genannten Hauptfluchtpunkt gibt



Zentralperspektive: alle Linien, die parallel zur Tiefenrichtung sind, schneiden sich im Bildmittelpunkt. Die Linien parallel zu den anderen Hauptrichtungen bleiben parallel.

Fluchtpunkte Berechnung

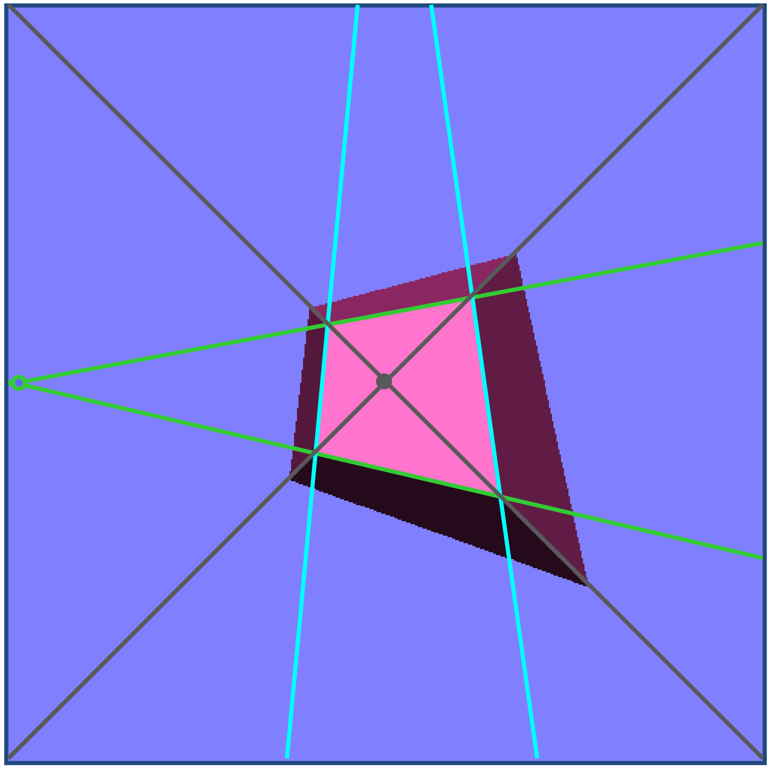
- Für eine gegebene Richtung $\vec{\mathbf{v}}$ kann man den Fluchtpunkt $\underline{f}_{\vec{v}}$ einfach mit Hilfe der Abbildungsmatrix $\tilde{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{p}})$ berechnen:

$$\tilde{f}_{\vec{v}} = \tilde{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{p}})\tilde{v} \text{ mit } \tilde{v} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{v}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Beispiel x-Hauptfluchtpunkt:

$$\tilde{f}_{\hat{x}}\left(\tilde{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{p}})\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p_x & p_y & p_z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ p_x \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{f}_{\hat{x}}\left(\tilde{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{p}})\right) = \begin{pmatrix} 1/p_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



3-Punktperspektive: x- und z-Hauptrichtungen haben einen Fluchtpunkt im Bild, der y-Fluchtpunkt liegt oberhalb des Bildes.

- ➡ In den Spalten einer homogenen Matrix stehen die homogenen Fluchtpunkte der Hauptachsen und das homogene Bild des Ursprungs

VERGLEICH

Vergleich Transformationsformeln

Computergraphik und Visualisierung

Linear	Affin	Perspektivisch
repräsentierbare Elemente		
• Vektoren • Ortsvektoren	• Punkte • Vektoren	• Punkte (evtl. im unendlichen) • Ebenen
Darstellung der Abbildung		
• Matrix	• homogene Matrix	• homogene Matrix
Unterstützte Transformationen		
• Skalierung, Spiegelung, Projektion, Rotation, Scherung	• Zusätzlich Translation	• zusätzlich perspektivische Transformation
Transformationsformel für Raumelemente bzw. Vektoren		
$\vec{v}' = M\vec{v}$	$\begin{pmatrix} p' \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{M} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \vec{v}' \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{M} \begin{pmatrix} \vec{v} \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} w' \cdot p' \\ w' \end{pmatrix} = \tilde{M} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$
Transformationsformel Normalen / Ebenen		
$\vec{n}' = \left(M^{-1}\right)^T \hat{n}$	$\begin{pmatrix} \vec{n}' \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\tilde{M}^{-1}\right)^T \begin{pmatrix} \hat{n} \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \vec{n}' \\ d' \end{pmatrix} = \left(\tilde{M}^{-1}\right)^T \begin{pmatrix} \hat{n} \\ d \end{pmatrix}$

Vergleich Erhaltungsgrößen

Computergraphik und Visualisierung

	Rotation	Scherung	linear	Translation	affin	perspektiv
Längen	✓			✓		
Winkel	✓			✓		
Flächen	✓	✓		✓		
Längenverhältnisse und affine Koordinaten	✓	✓	✓	✓	✓	
Reihenfolge von Punkten auf Geraden	✓	✓	✓	✓	✓	
Verhältnisse von Verhältnissen	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Geraden, Ebenen	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Geradensegmente	✓	✓	✓	✓	✓	

$$M^{-1} = M^T$$

$$\det M = \pm 1$$