Aufgabenkomplex Modellierung

HA 1. Nennen Sie jeweils zwei Vorteile der parametrischen und der impliziten Darstellung geometrischer Objekte.

(HA) 2. Geben Sie eine Formel an, wie man den Flächeninhalt eines Dreiecks berechnen kann, dessen dreidimensionalen Eckpunkte $\underline{p}_1$, $\underline{p}_2$, $\underline{p}_3$ in vektorieller Darstellung gegeben sind. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten…

a) $\underline{p}_1 = (0,0,0)^T$, $\underline{p}_2 = (1,0,0)^T$, $\underline{p}_3 = (0,1,0)^T$, Lösung: A=0.5

b) $\underline{p}_1 = (2,-5,8)^T$, $\underline{p}_2 = (5,-5,8)^T$, $\underline{p}_3 = (2,-1,8)^T$, Lösung: A=6

c) $\underline{p}_1 = (2,5,-2)^T$, $\underline{p}_2 = (3,7,0)^T$, $\underline{p}_3 = (5,9,3)^T$, Lösung: A=1.5

d) $\underline{p}_1 = (-3,4,-10)^T$, $\underline{p}_2 = (5,4,-10)^T$, $\underline{p}_3 = (-3,8,-7)^T$, Lösung: A=20

HA 3. Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$

a) $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = (3,0,4)^T$, $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = (-3,0,-4)^T$, Lösung: 180°

b) $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = (0.6, 0.8)^T$, $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = (0.8, -0.6)^T$, Lösung: 90°

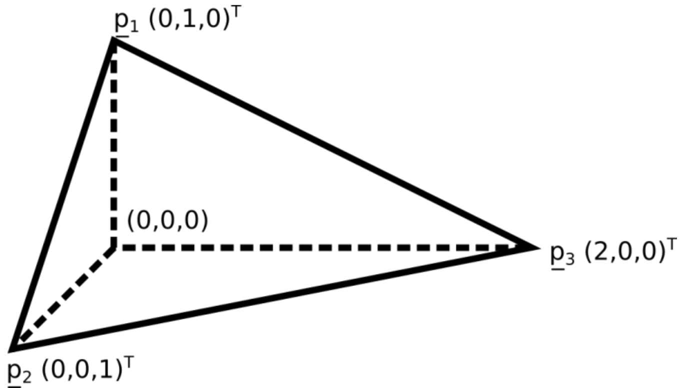
c) $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = (1,2,2)^T$, $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = (1,4,8)^T$, Lösung: ~22,2°

4. Nennen Sie die mathematischen Eigenschaften, die ein Tupel erfüllen muss, um als gültige baryzentrische Koordinaten für einen Punkt innerhalb eines Dreieckes (Rand eingeschlossen) zu gelten.

5. Welche der folgenden Tupel beschreiben gültige baryzentrische Koordinaten eines Punktes innerhalb eines Dreieckes (Rand eingeschlossen) und welche nicht?

$t_1 = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -1.5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t_2 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix}$, $t_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, $t_5 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$, $t_6 = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 1 \\ 1.25 \end{pmatrix}$, Lösung: t_2, t_4

6. Der Koordinatenursprung bildet mit den folgenden Punkten $\underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{p}_3$ einen Tetraeder.

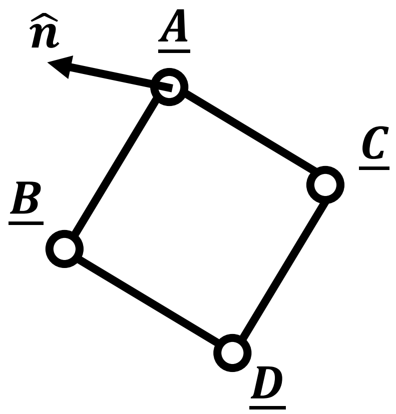


a) Berechnen Sie mit Hilfe des Spatprodukts das Volumen des Tetraeders! Lösung: $1/3$

b) Die Normale $\hat{n} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$ bildet mit dem Fußpunkt $\underline{p}_1$ eine Ebene. Berechnen Sie den Projektionspunkt des Koordinatenursprungs auf diese Ebene! Lösung: $\frac{1}{9}(2,4,4)^T$

c) Geben Sie die Hessesche Normalform der in (b) beschriebenen Ebene an! Setzen Sie alle Kenngrößen der Ebene ein (gegebenenfalls ausrechnen)! Lösung: $E\colon \langle \frac{1}{3}(1,2,2)^T, \vec{x} \rangle = \frac{2}{3}$

7. Von dem planaren Quadrat $(\underline{\boldsymbol{A}},\underline{\boldsymbol{B}},\underline{\boldsymbol{C}},\underline{\boldsymbol{D}})$ sind die beiden Punkte $\underline{\boldsymbol{A}} = (0,0,0)^T$ und $\underline{\boldsymbol{C}} = (2,1,2)^T$ sowie die Facetten-Normale $\vec{n} = (-1,0,1)^T$ (nicht normiert!) gegeben.



a) Berechnen Sie die Seitenlänge des Quadrates. Lösung: $l = 3$

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Kreuzprodukts die Koordinaten des Punktes $\underline{\boldsymbol{B}}$. Lösung: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-4,1)^T$

(HA) 8. Bestimmen Sie die Flächennormale der parametrischen Fläche $s(u,v)$ bei (u_0,v_0) und normieren Sie diese!

$$s(u,v) = \begin{pmatrix} v \\ uv - u^2 - v \\ \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 - v \end{pmatrix}, u_0 = 1, v_0 = 1$$

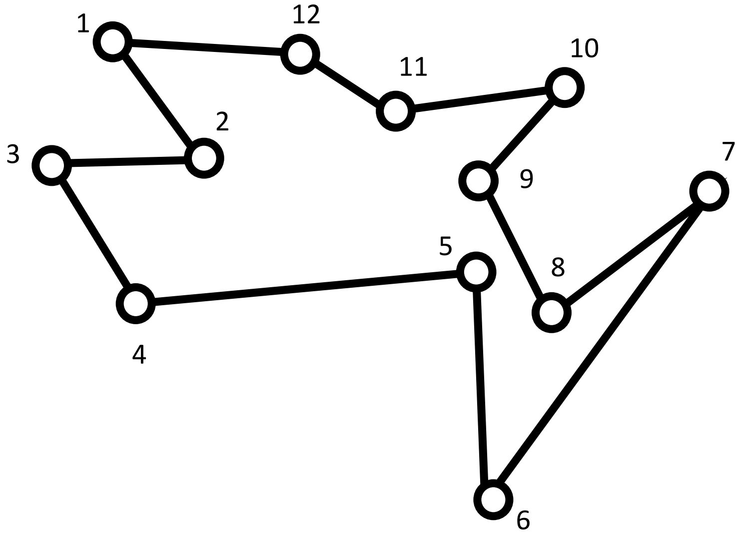
Lösung: $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T$

9. Die Funktion $f(x,y,z) = (\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 + 2\mathrm{xy} + 4\mathrm{xz} - 9)$ beschreibt mit ihren Nullstellen eine Oberfläche. Berechnen sie die Normale an dem Oberflächenpunkt $(2,1,0)^T$. Vergessen sie nicht, den Vektor am Ende zu normieren. Lösung: $\frac{1}{2\sqrt{34}}(6,6,8)^T$

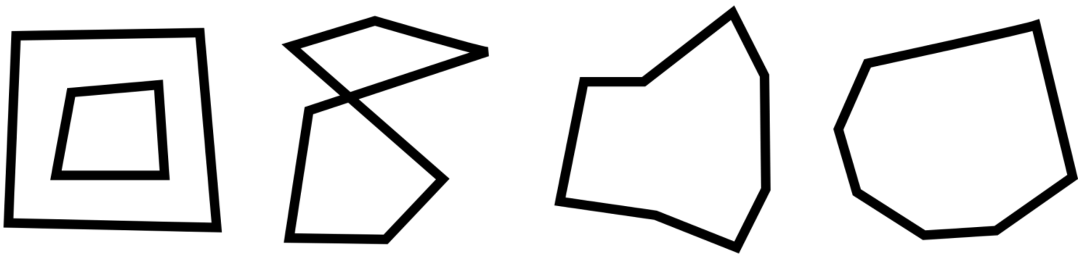
HA 10. Die Funktionen $f(x,y)$ und $g(x,y)$ beschreiben implizite Kurven, die jeweils eine Fläche umschließen. Geben Sie die Funktion an, die ...

a) ... das Komplement zu der durch $f(x,y)$ gegebenen Flächen beschreibt
b) ... die Vereinigung der beiden Flächen beschreibt
c) ... die Schnittmenge der beiden Flächen beschreibt
d) ... die Differenz der beiden Flächen beschreibt

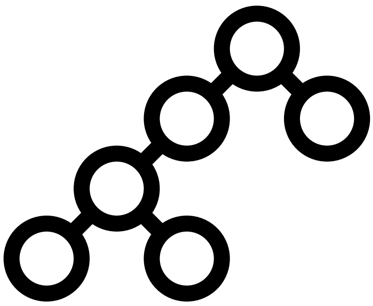
11. Kreuzen Sie in folgendem Polygon alle **konkaven** Polygonknoten an. Markieren Sie **eine konvexe** Polygonecke, bei der es sich um **kein** Ohr im Sinne des Ear-Cutting-Algorithmus handelt!



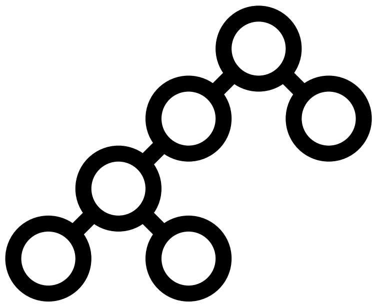
(HA) 12. Ordnen Sie jedem der folgenden Polygone alle zutreffenden Eigenschaften von **konvex**, **konkav**, **einfach**, **einfach mit Loch** und **allgemein** zu!



HA 13. Schreiben Sie in die Knoten der folgenden Baum-Darstellungen die Ziffern 1 bis 6 analog zur Reihenfolge mit denen die Knoten bei einer Breiten- bzw. Tiefensuche besucht werden.

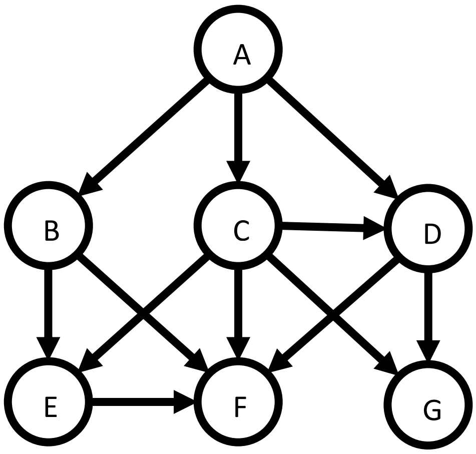


Tiefensuche



Breitensuche

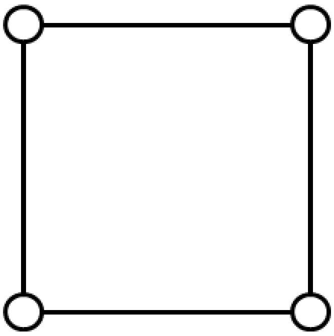
HA 14. Interpretieren Sie den folgenden Graphen als Szenegraphen! Wie viele Instanzen des Szenenelements **F** kommen in der definierten Szene vor? (Lösung: 6)



a) Welche der Eigenschaften treffen auf den gezeigten Szenegraphen zu? **gerichtet, zyklisch, Baum**

b) Nennen Sie 4 verschiedene Typen von Knoten, die in einem Szenegraphen vorkommen können.

(HA) 15.



a) Skizzieren Sie einen Fall, bei dem die Erzeugung von Liniensegmenten beim Marching-Squares-Algorithmus mehrdeutig ist. Beschriften Sie dazu in der Skizze die Eckknoten der Gitterzelle mit „+" und „–", um anzuzeigen, ob die implizite Funktion zu einem positiven oder negativen Wert evaluiert. Skizzieren Sie weiterhin die unterschiedlichen Möglichkeiten, Liniensegmente zu erzeugen, mit unterschiedliche Farben oder indem Sie die Linien unterschiedlich stricheln.

b) **Beschreiben Sie die in der Vorlesung vorgestellte Möglichkeit, die Mehrdeutigkeit aufzulösen**