Rasterisierung

vom Polygon zum Pixel

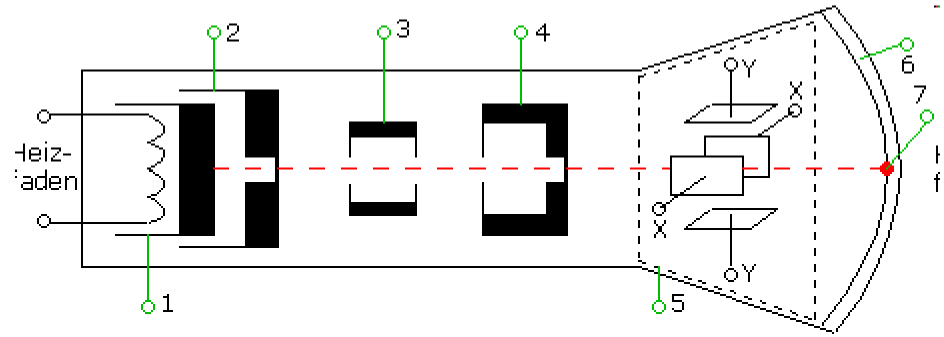
Inhalt

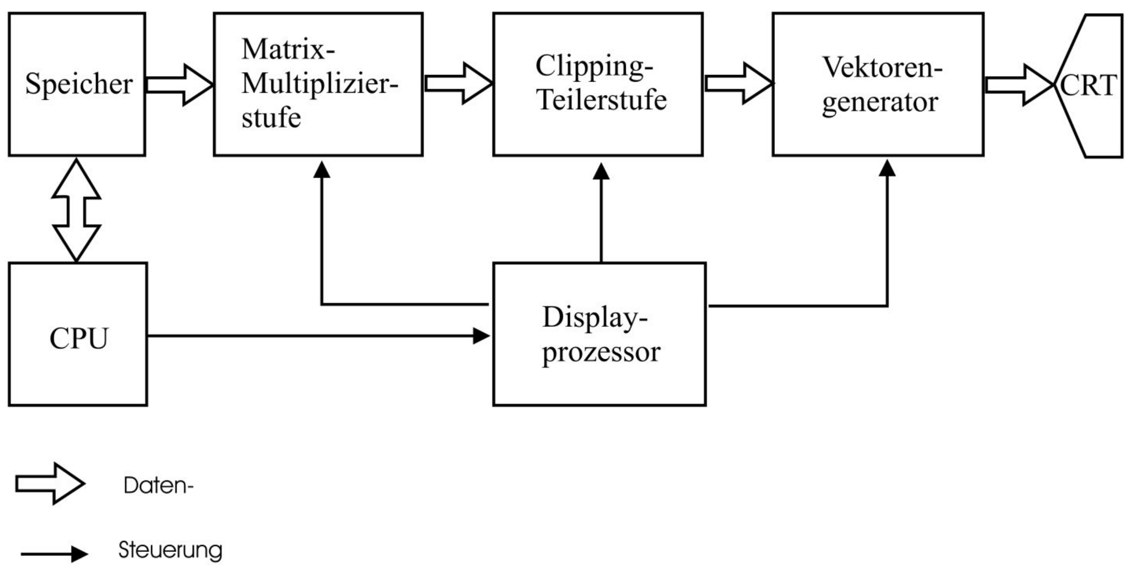
Computergraphik und Visualisierung

- Einführung
- Rasterisieren von Linien
- Füllalgorithmen
- Rasterisieren von Dreiecken
- Rasterisieren von Polygonen

EINFÜHRUNG

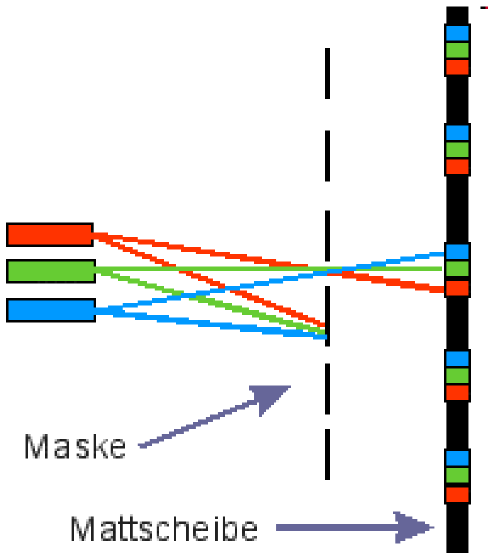
Einführung
Vektor-Displays





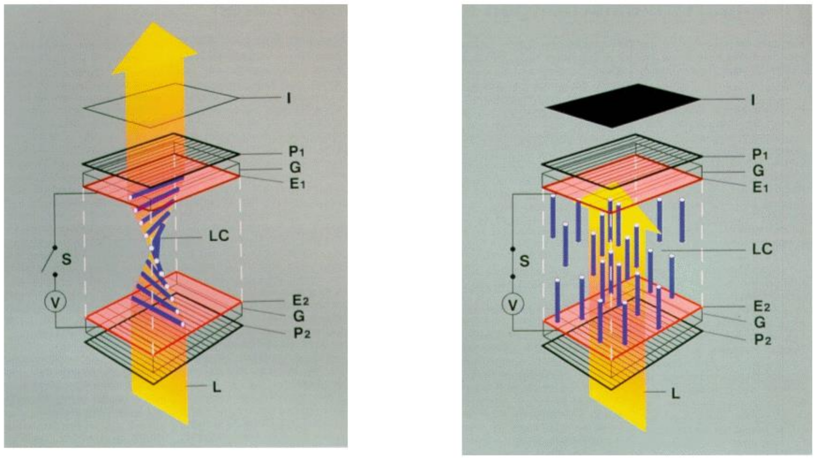
Einführung
Raster-Displays

Computergraphik
und Visualisierung



Twisted Nematic
Liquid Crystal Displays
(TN-LCDs)

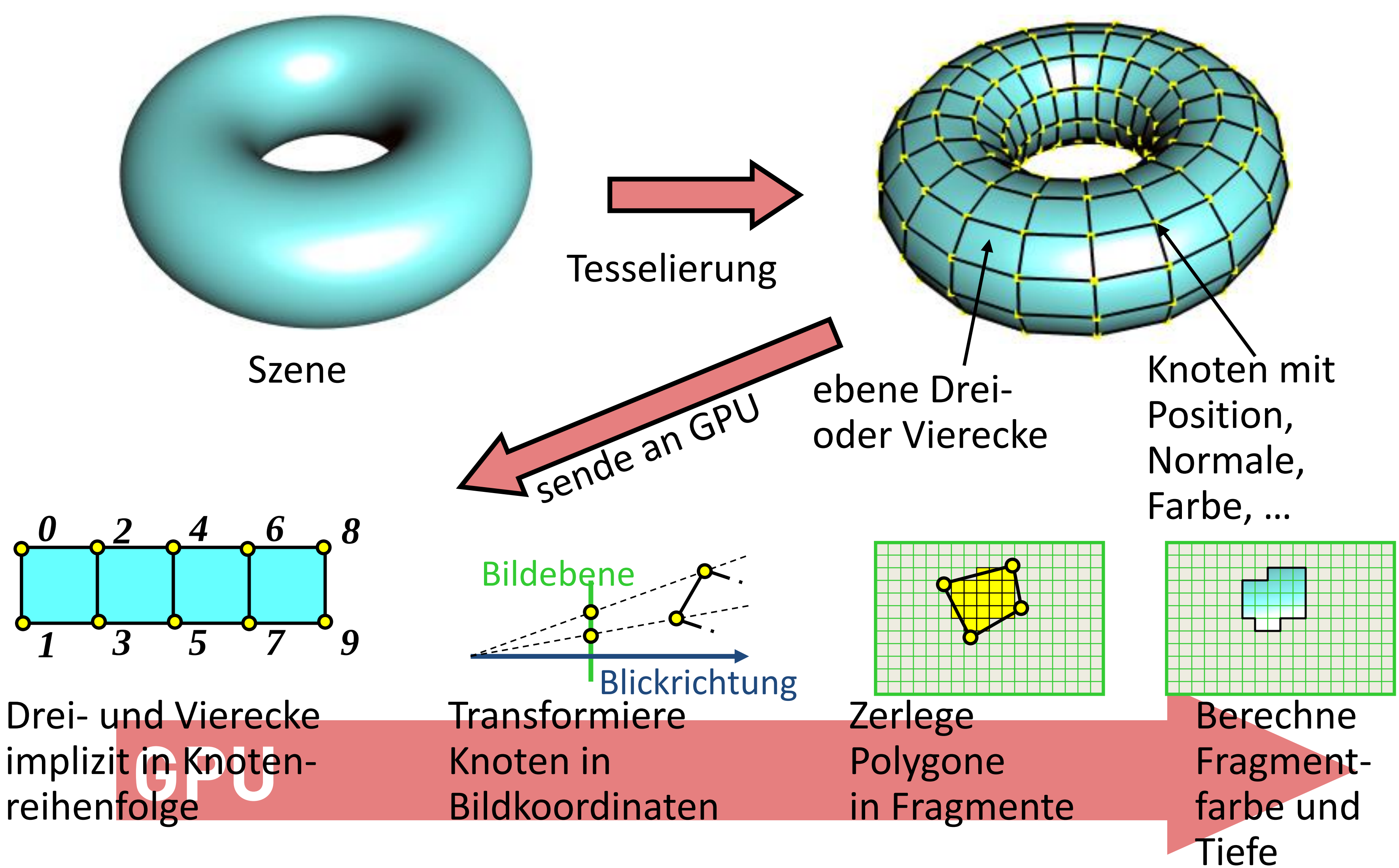
pro Pixel eine [Schadt-Helfrich-Zelle](#):



Pixelmatrix als active-matrix angesteuert,
z.B. mittels Thin-Film-Transistor (TFT)

Einführung
Übersicht zur Echtzeitgraphik

Computergraphik und Visualisierung



Einführung
Vergleich Vektor- vs Rasterdisplays

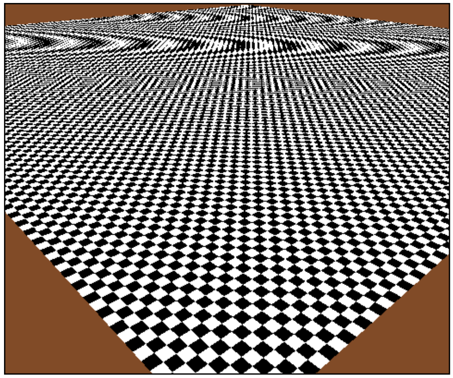
Computergraphik und Visualisierung

Vektordisplays

- ⊞ geringer Speicherbedarf für Strichzeichnungen
- ⊞ schnelles Umschalten für einfache Animation
- ⊟ Bildkomplexität begrenzt (Füllen ist z.B. aufwendig)
- Beispielgeräte
  - Vektorbildschirm
  - Plotter
  - Laser-Cutter

Rasterdisplays

- ⊞ hohe Parallelisierbarkeit
- ⊞ Bildkomplexität nur durch Auflösung beschränkt
- ⊞ unterschiedliche Displaytechnologien
- ⊟ Abtastprobleme
- Beispiele
  - Rasterdisplay
  - Drucker
  - Braille Display

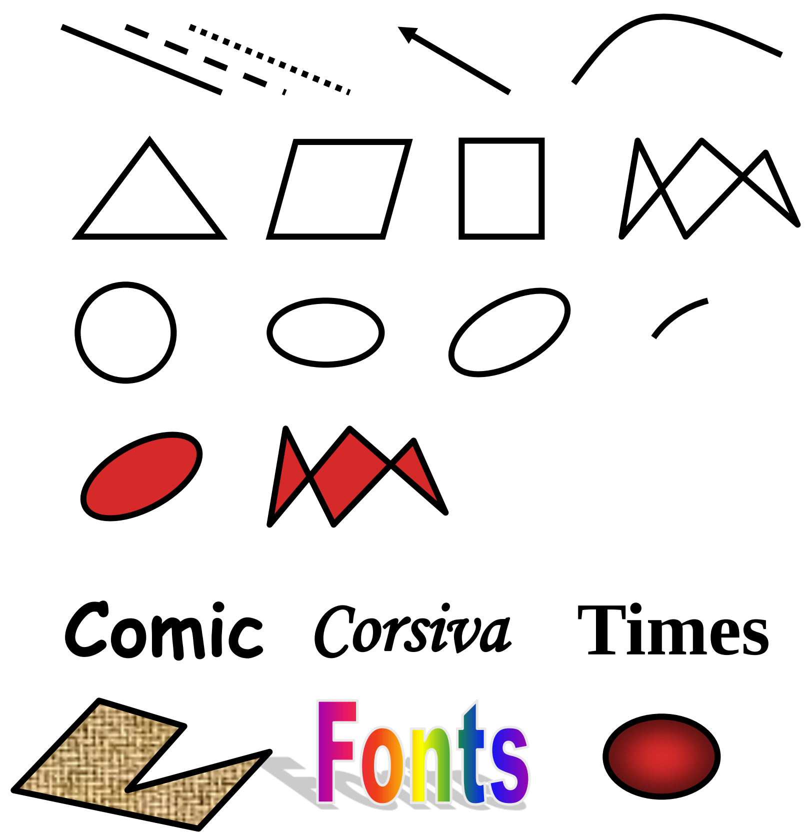


Beispiel für Aliasing

Einführung
Primitive zum Rasterisieren

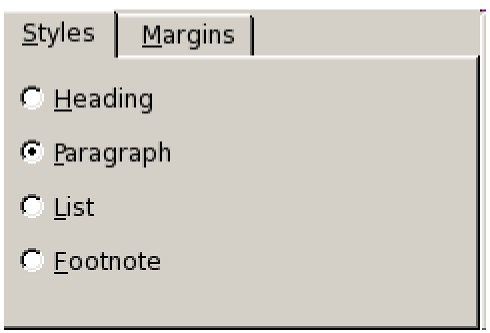
? Welche Primitive werden benötigt?

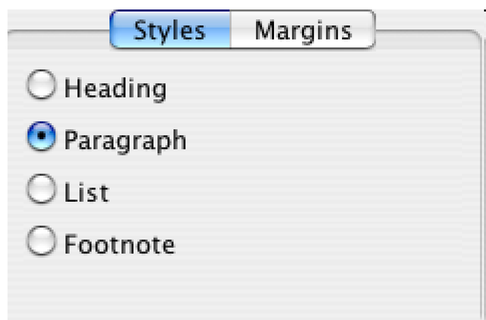
- Stilisierte Kurven ....
- Polygone ....
- Ellipsensegmente ......
- Füllalgorithmen ....
- Schriften ....
- Verläufe, Muster ....

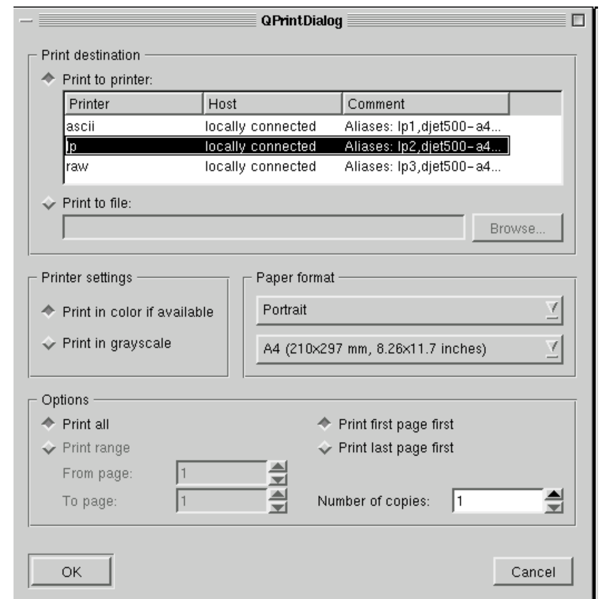


Plattformunabhängige Rastergraphik APIs

- Java AWT, Java 2D
- Qt, Gtk+, Fltk, … (C++)



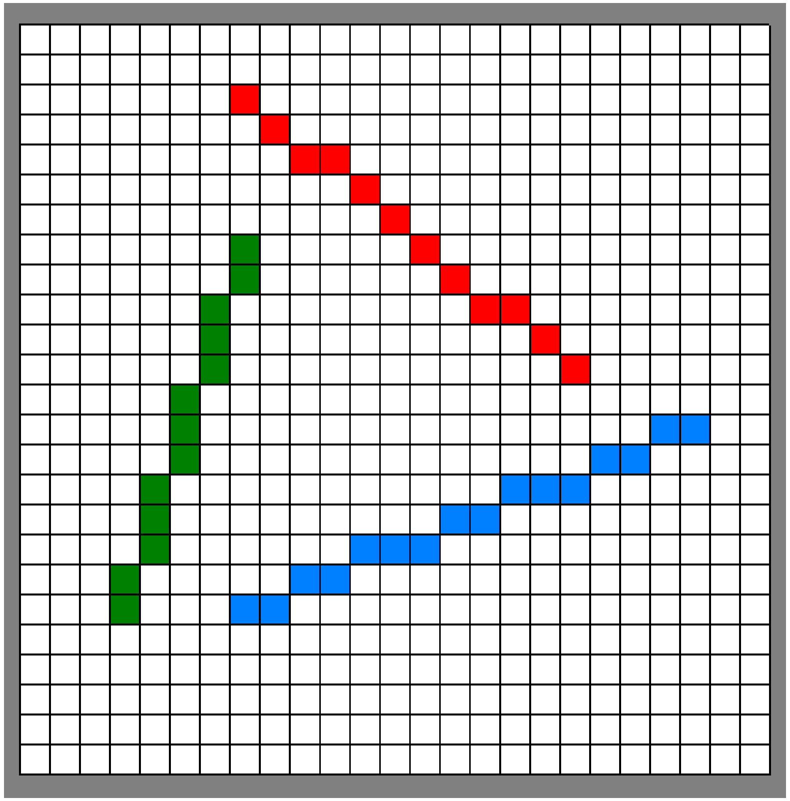




RASTERISIEREN VON LINIEN

Rasterisieren von Linien
Übersicht

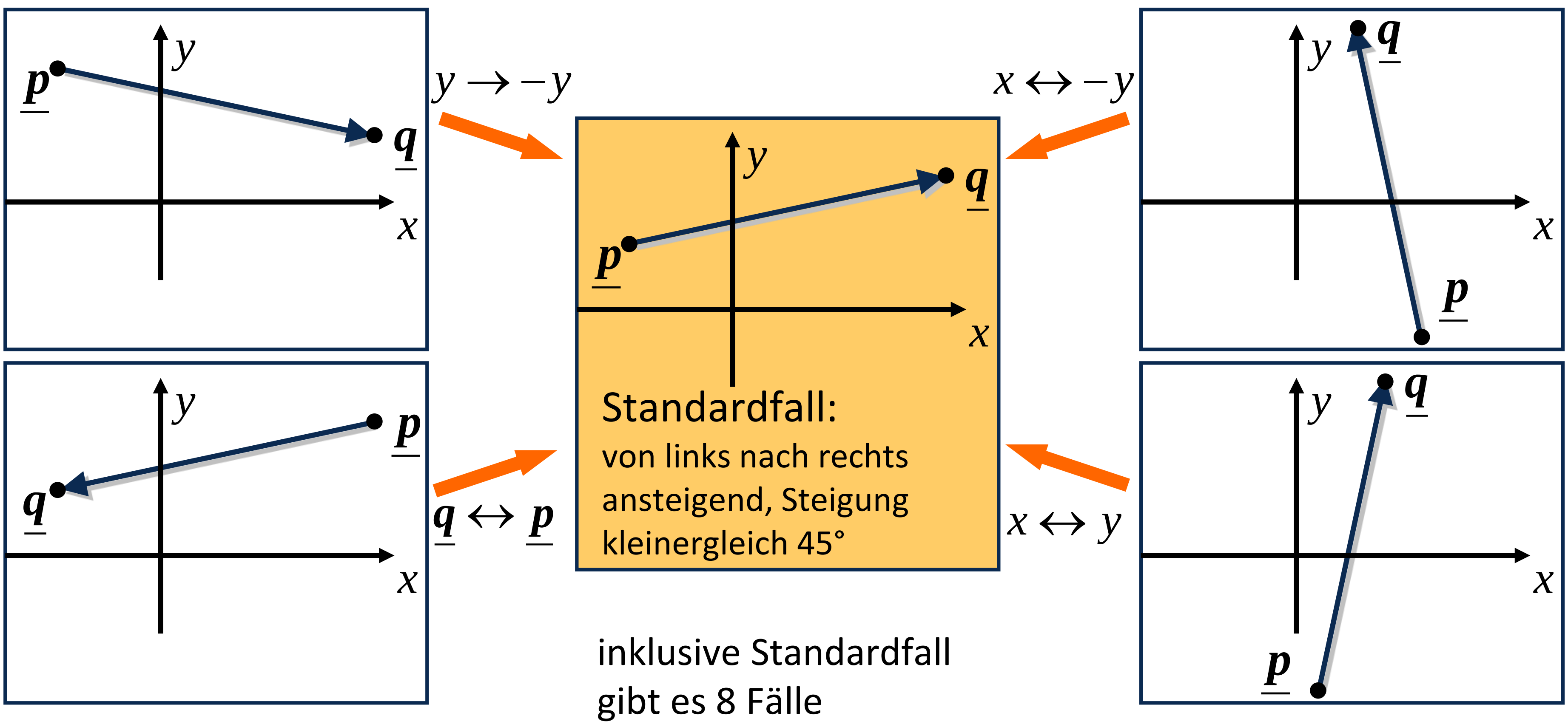
- gewünschte Eigenschaften für einen Linienrasteralgorithmus:
  - keine doppelte Dicke
  - einfache Implementierung
  - ganzzahlige Arithmetik
  - inkrementell
- Ansätze
  - DDA
  - Bresenham (1965)
  - Mittelpunkt (1967)



Rasterisieren von Linien
Ausnutzung von Symmetrien

Rückführung auf einen Standardfall

- vor dem Rastern transformieren wir die Eingabe auf den Standardfall:



Rasterisieren von Linien
Digital Differential Analyzer

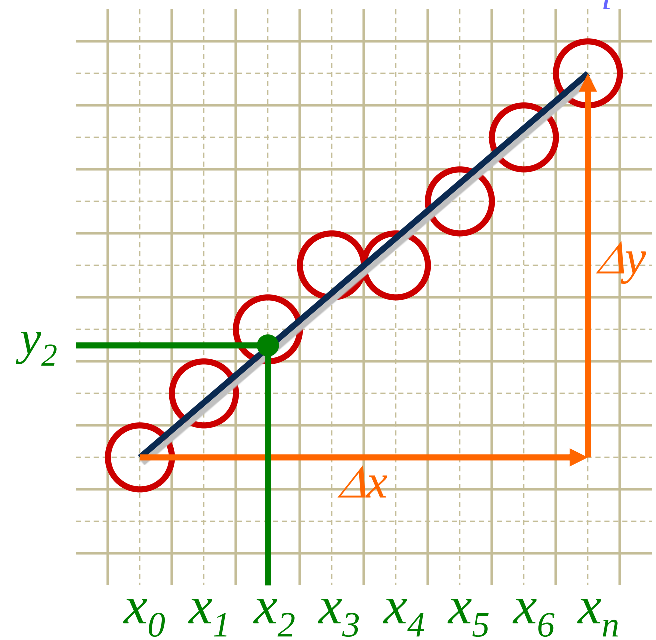
- Idee: Steigung m ist konstant
- es folgt: $y_i = y_0 + m(x_i - x_0)$
- Pseudo-Code (Inkrementell)

```
y = y0
m = (yn-y0)/(xn-x0)
for x from x0 to xn do
```

~~y = y0+m*(x-x0)~~

```
      setPixel(x,round(y))
      y += m
```

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$$

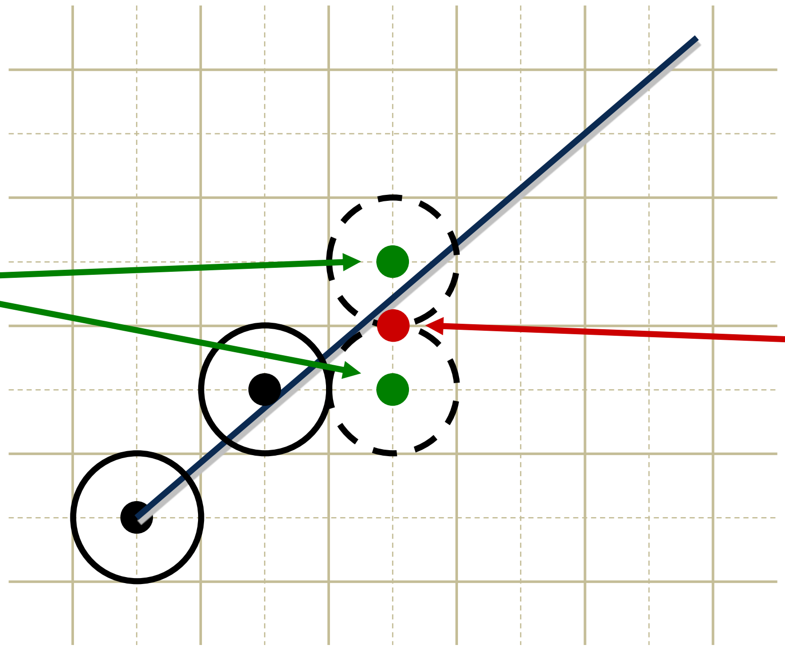


Bresenham / Mittelpunktsalgorithmus

- Idee: nutze Abstand zur Linie aus impliziter Darstellung als Entscheidungsvariable in inkrementellem Algorithmus

Bresenham

- Welcher Mittelpunkt ist näher ?



Mittelpunkts-algorithmus

- Auf welcher Seite liegt der Mittelpunkt ?

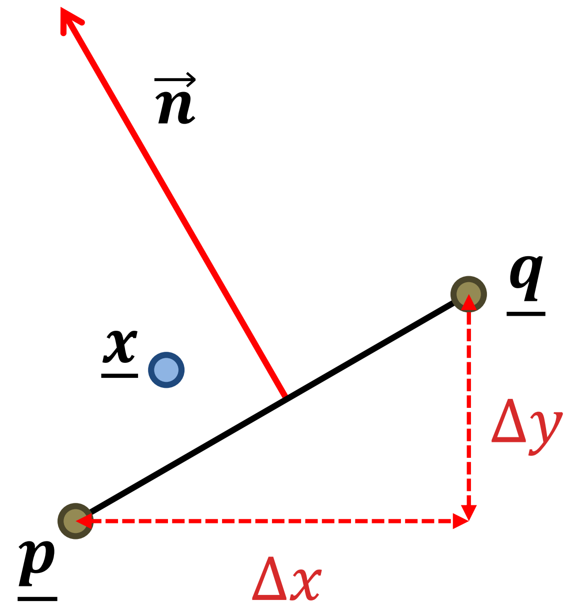
Rasterisieren von Linien
Abstandsberechnung

Abstand von Punkt zu Linie

- Für die Berechnung des Abstandes zu einer Linie wird der Normalenvektor benötigt.
- Dazu dreht man den Vektor von $\underline{\boldsymbol{p}}$ nach $\underline{\boldsymbol{q}}$ um 90 Grad nach.
- Der Abstand von $\underline{\boldsymbol{x}}$ zur Linie ist proportional zu

$$\mathrm{dist}(\underline{\boldsymbol{x}}) \propto \left\langle \underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{p}}, \vec{\boldsymbol{n}} \right\rangle$$

- Den euklidischen Abstand bekommt man, wenn man noch durch $\|\vec{\boldsymbol{n}}\|$ teilt.
- Für die Entscheidung welcher Punkt näher liegt, ist die Normierung nicht notwendig



$$\underline{\boldsymbol{q}} - \underline{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

$$\vec{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} -\Delta y \\ \Delta x \end{pmatrix}$$

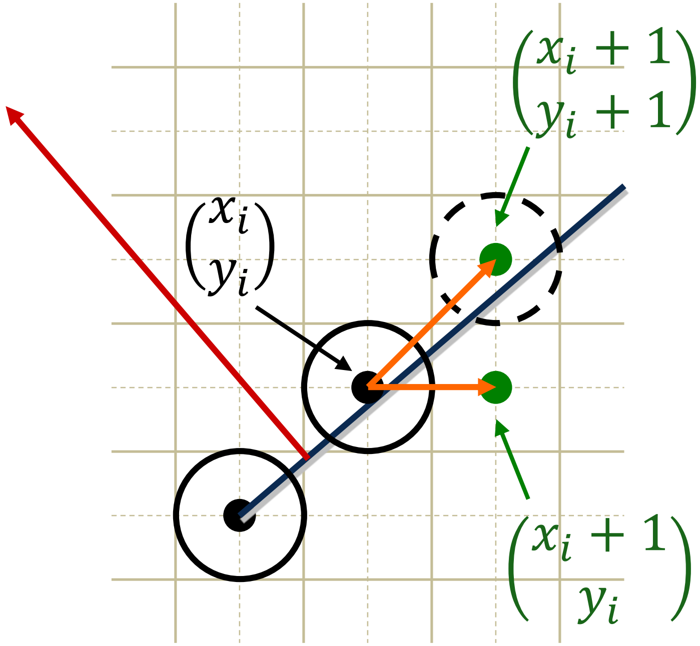
Rasterisieren von Linien
Inkrementeller Abstand

Computergraphik und Visualisierung

- Für einen inkrementellen Linienalgorithmus, kann der Abstand d_i zur Linie mitgeführt werden.
- Am Anfangspunkt (und Endpunkt) gilt:
  $d_0 = d_n = 0$
- Danach wandert man entweder nach rechts:
  $$d_{i+1}^{\mathrm{re}} = \left\langle \underline{\boldsymbol{x}}_i + \binom{1}{0} - \underline{\boldsymbol{p}}, \vec{\boldsymbol{n}} \right\rangle = d_i - \Delta y$$
- oder nach rechts oben
  $$d_{i+1}^{\mathrm{re-ob}} = \left\langle \underline{\boldsymbol{x}}_i + \binom{1}{1} - \underline{\boldsymbol{p}}, \vec{\boldsymbol{n}} \right\rangle = d_i - \Delta y + \Delta x$$

$$\mathrm{dist}(\underline{\boldsymbol{x}}) \propto \left\langle \underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{p}}, \vec{\boldsymbol{n}} \right\rangle$$

$$\vec{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} -\Delta y \\ \Delta x \end{pmatrix}$$

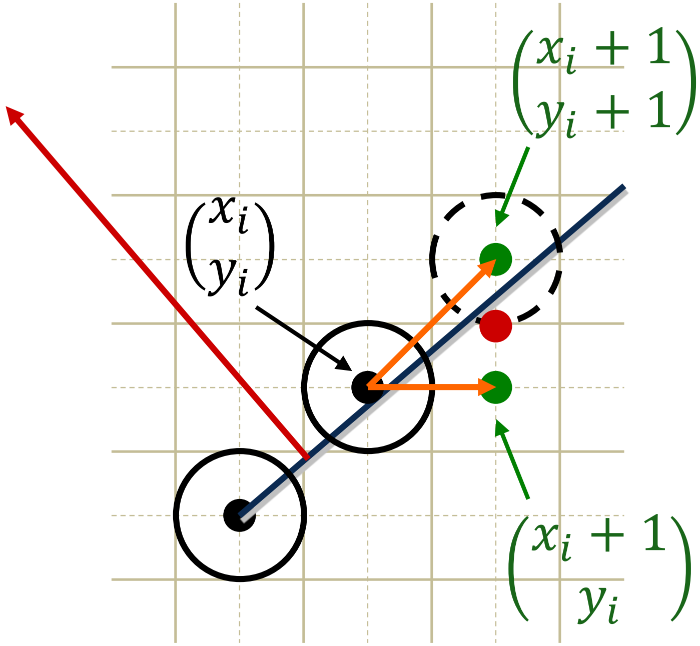


Rasterisieren von Linien
Entscheidungskriterium

Computergraphik und Visualisierung

- Wenn man immer richtig gegangen ist, gilt
$$d_{i+1}^{\mathrm{re}} \leq 0 < d_{i+1}^{\mathrm{re-ob}}$$
- Um zu entscheiden, ob man als nächstes nach rechts und nicht nach rechts-oben gehen soll, prüft man ob
$$-d_{i+1}^{\mathrm{re}} \leq d_{i+1}^{\mathrm{re-ob}}$$
$$\Leftrightarrow -(d_i - \Delta y) \leq d_i - \Delta y + \Delta x$$
$$\Leftrightarrow \boxed{2\Delta \mathrm{y} - \Delta x \leq 2d_i}$$
- Denselben Test erhält man, wenn man prüft, ob der Abstand des Mittelpunkts kleiner gleich 0 ist

$$d_{i+1}^{\mathrm{re}} = d_i - \Delta y$$
$$d_{i+1}^{\mathrm{re-ob}} = d_i - \Delta y + \Delta x$$



Rechenbeispiel

Computergraphik und Visualisierung

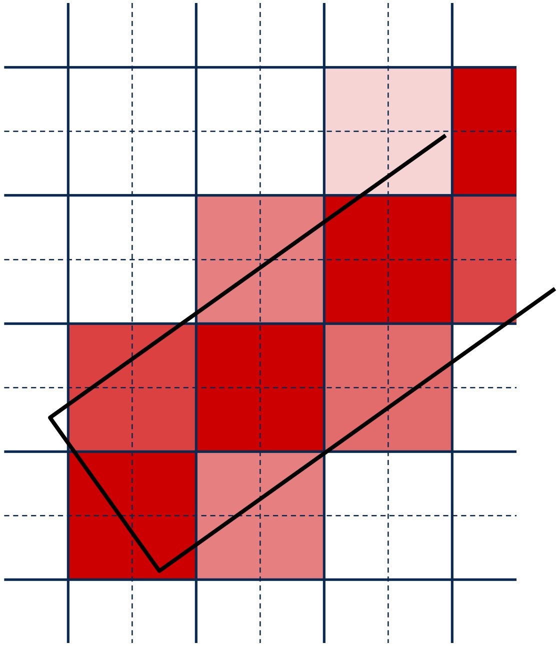
Inkrementelle Rasterisierung von Linien

```
[y, d]          = [ y0, 0 ]
[Δx,Δy]         = [(xn-x0), (yn-y0)]
[Δd^re,Δd^re-ob] = [-Δy, Δx-Δy]
c               = 2*Δy-Δx
for x from x0 to xn do
    setPixel(x, y)
    if c <= 2*d then
        d += Δd^re
    else
        y += 1; d += Δd^re-ob
```

Computergraphik und Visualisierung

Treppenstufenartefakte

- Treppenstufenartefakte entsteht durch Unterabtastung auf dem Pixelgitter
- Die Vermeidung von Treppenstufen nennt man Antialiasing von Linien
- Gemeinsam sind diesen Techniken die Idee, Linie als Balken zu interpretieren
  - Darstellung einer dickeren Linie in höherer Auflösung mit anschließender Filterung
  - Filterung während des Zeichnens
    - erfordert Transparenz
    - kann zu Fehlern führen wenn sich mehrere Linien kreuzen



Rasterisieren von Linien
Diskussion

Computergraphik und Visualisierung

- gekrümmte Linien
  - inkrementelle Algorithmen bei impliziter Definition (Kreis siehe Übung)
  - für Schriften werden NURBS eingesetzt. Diese können adaptiv in Polygone unterteilt werden.
- dicke Linien
  - wiederholen einer Maske / Brush
    - ineffizient aber einfach
  - Randberechnung und Füllalgorithmus
    - wird oft mit Hilfe einer impliziten Darstellung gelöst

FÜLLALGORITHMEN

Füllalgorithmen
Übersicht

Computergraphik und Visualisierung

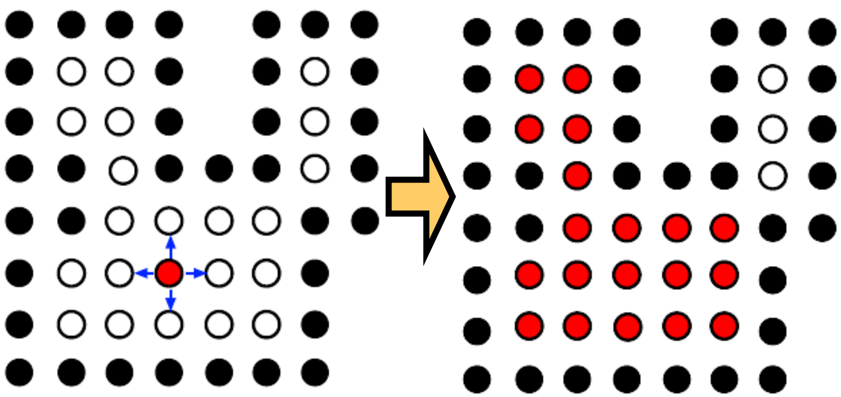
- Was muss gefüllt werden?
  - Primitive
    - Dreiecke
    - Polygone
    - Kreise
  - Bildbereiche gleicher oder ähnlicher Farbe
- Womit soll gefüllt werden?
  - Farbe
  - Muster
  - Farbverlauf
  - Struktur

Füllalgorithmen
Auf beliebigen Bildern

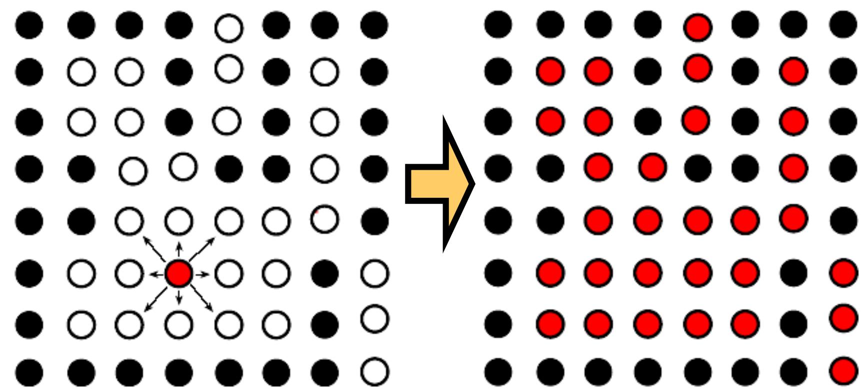
- Idee Füll-Tool: überschreibe die Farbe aller Pixel um einen *Saatpixel*, die eine *ähnliche* Farbe haben
- Wenn einfache Ähnlichkeitsmaß nicht ausreicht muss ein Segmentierungsalgorithmus verwendet werden (siehe Bildverarbeitung / Computer Vision)

Bei natürlichen Bildern reicht ein einfaches Ähnlichkeitsmaß nicht aus auch wenn man den Füllalgorithmus wie rechts wiederholt startet

- Welches sind die benachbarten Pixel?



4-er Nachbarschaft kann zu unvollständigem Füllen führen



8-er Nachbarschaft kann zu Auslaufen führen

Flood-Fill

- Pseudo-Code bei 4-er Nachbarschaft

```
void floodFill(x, y)
    if not toBeFilled(x, y) return
    setPixel(x,y,drawColor)
    floodFill(x-1,y)
    floodFill(x+1,y)
    floodFill(x,y-1)
    floodFill(x,y+1)
```

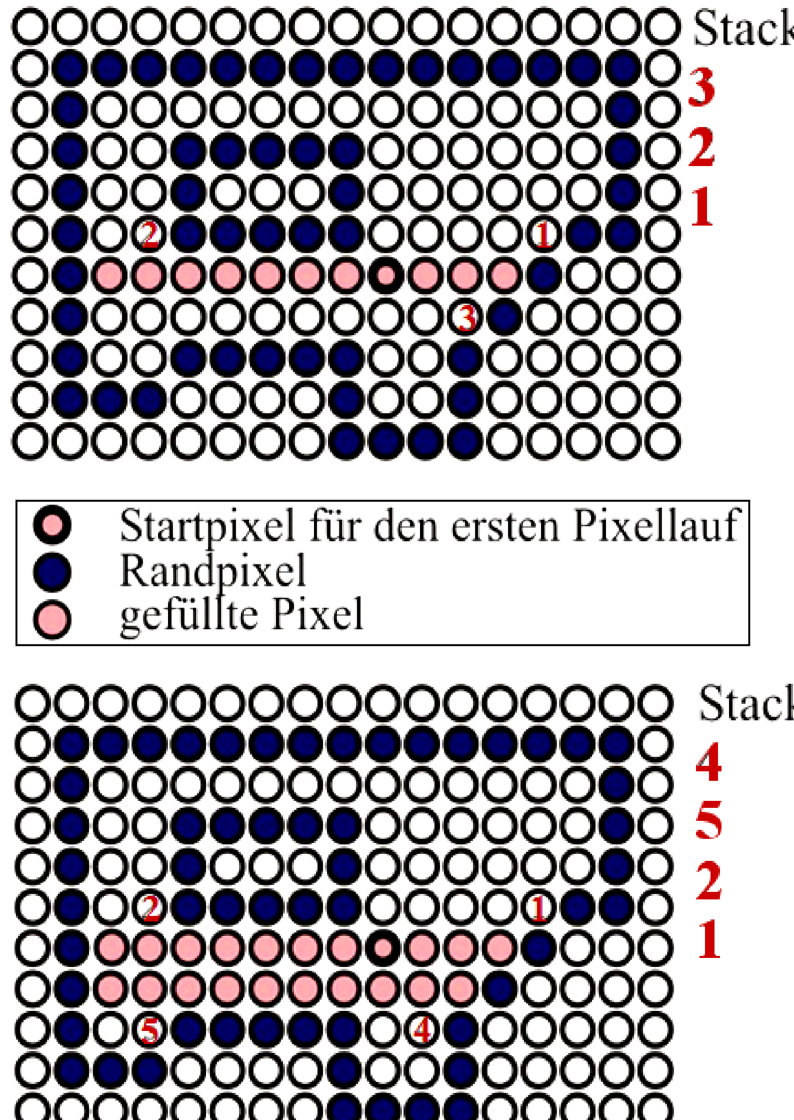
Füllalgorithmen
Rekursionsabbruch & Diskussion

- `toBeFilled(x,y)` prüft, ob
  - Pixelposition gültig ist,
  - FloodFill den Pixel nicht zuvor überschrieben hat,
  - Pixel-Farbe der Farbe des Saat-Pixel ähnelt
- Vorteile:
  - einfache Implementierung
  - sehr allgemein
- Nachteile:
  - hohe Rekursionstiefe führt zu Stapelüberlauf
  - Füllergebnis ist abhängig von Definition der Pixelnachbarschaft

Füllalgorithmen
Vermeidung hoher Rekursionstiefe

Pixellaufalgorithmus

- Füllfunktion bearbeitet um den aktuellen Punkt gleichzeitig alle benachbarten Pixel einer Zeile. Das ist ein Pixellauf.
- Suche und fülle dazu nach links und rechts alle zu füllenden Pixel
- Starte Rekursion für alle Pixel der darüber und darunterliegenden Zeile, an denen ein Pixellauf von rechts beginnt



Einschub
Graphisches Debuggen

Computergraphik und Visualisierung

- Typisch für die Entwicklung Graphischer Anwendung:
  - eine visuelle Darstellung kann extrem viel schneller verstanden werden als die intern gehaltenen Zahlenkolonnen
  - Fehler treten oft erst nach sehr vielen Iterationen auf
  - der Standarddebugger unterstützt keine Visualisierung während des Debuggens
- Deshalb müssen meist eigene Debug-Mechanismen geschaffen werden

Einschub Implementierung

- Konzept des graphischen Debuggens:
  - definiere Iterationszähler, die dem Algorithmus bekannt sind
  - erweitere Algorithmus so, dass abgebrochen wird, sobald der Iterationszähler abgelaufen ist, und dennoch die visuelle Ausgabe erzeugt wird
  - speichere Aufrufparameter für den Algorithmus und Zustand der veränderten Datenstrukturen vor dem Aufruf
  - starte den Algorithmus mit verschieden initialisiertem Iterationszähler
- Erweiterung
  - Stapel von Iterationszählern für geschachtelte Schleifen
  - Integration der Interaktion ins GUI

RASTERISIEREN VON DREIECKEN

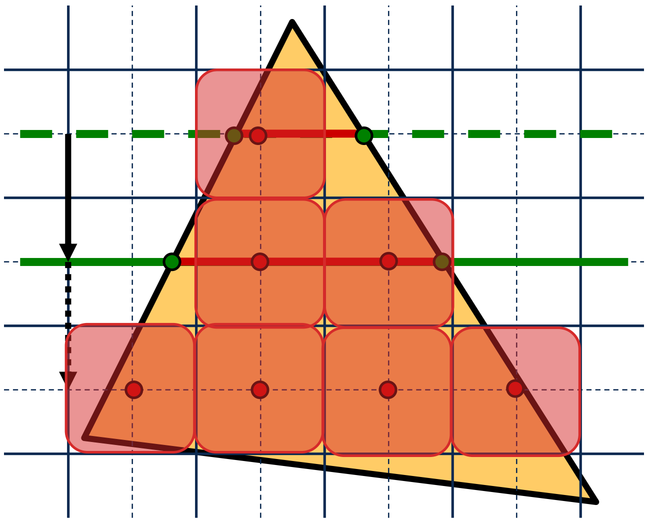
Rasterisieren von Dreiecken Mittels Punktinklusionstest

Computergraphik und Visualisierung

- Einfacher Brute-Force Algorithmus zum Füllen von Dreiecken
  - `B = BoundingBox(p0,p1,p2)`
  - `for each p in B`
  - `    sigma = barycentric(p,p0,p1,p2)`
  - `    if not outside(sigma) then`
  - `        setPixel(p,color(sigma))`
- kann inkrementell gemacht werden
- Iteration kann auch auf die überdeckten Pixel eingeschränkt werden

Rasterisieren von Dreiecken
Sweep Line Algorithmus

- Idee: Sweep-Line durchwandert alle vom Dreieck geschnittenen Pixelzeilen
- Beobachtung: da Dreieck konvex, ist der Schnitt ein Intervall

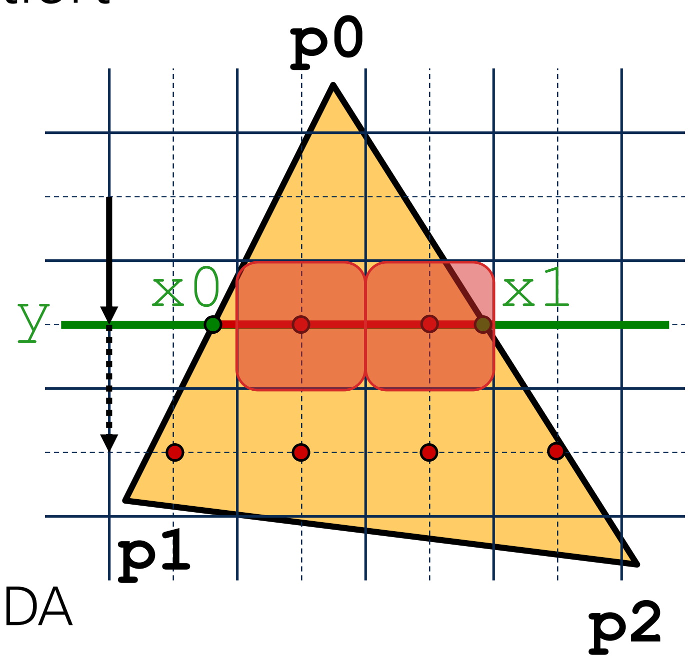


- Schnittintervall und baryz. Koord. werden von Zeile zu Zeile mitgeführt
- alle inneren Pixel werden auf die interpolierte Farbe gesetzt

Rasterisieren von Dreiecken
Sweep Line Algorithmus

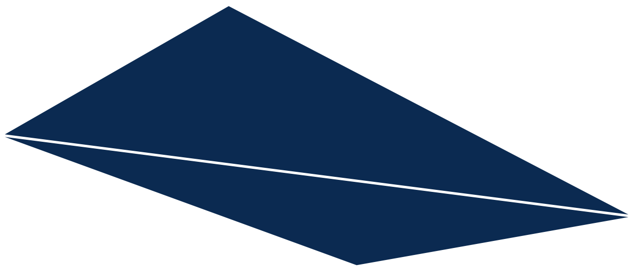
Computergraphik und Visualisierung

- Input: Punkte **`p0,p1,p2`** in Pixelkoordinaten
- sortiere Eckpunkte nach aufsteigender y-Koordinate, oBdA seien **`p0,p1,p2`** schon so sortiert
- `for all y =` **`p0`**`.y …` **`p1`**`.y`
  - compute `x0` on segment **`p0 p1`** with DDA
  - compute x1 on segment **`p0 p2`** with DDA
  - fill [ceil(min(`x0,x1`)),floor(max(`x0,x1`))]
- `for all y=`**`p1`**`.y …` **`p2`**`.y`
  - compute `x0` on segment **`p1 p2`** with DDA
  - compute `x1` on segment **`p0 p2`** with DDA
  - fill [ceil(min(`x0,x1`)),floor(max(`x0,x1`))]

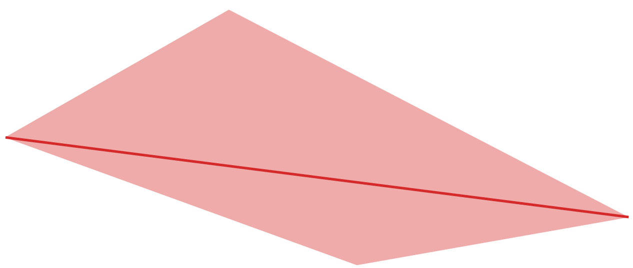


Wichtige Bedingung:

- Bei aneinander anliegenden Dreiecken soll jeder Pixel genau einmal gemalt werden, damit
  - keine Löcher entstehen



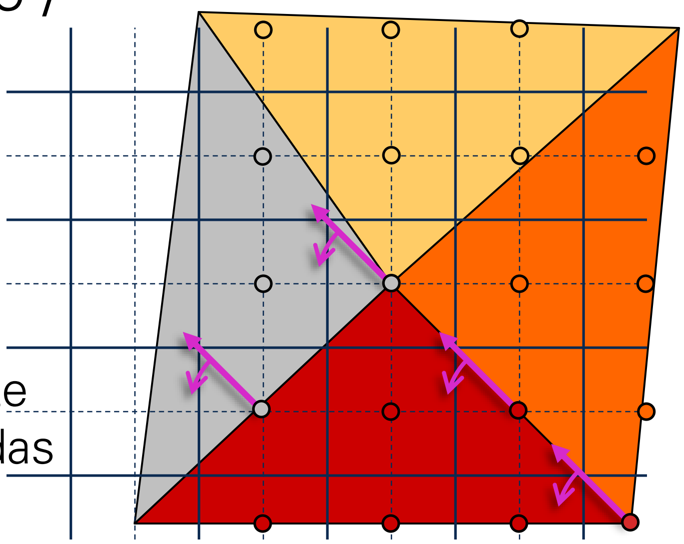
  - und bei Transparenz keine Pixel doppelt gezeichnet



Rasterisieren von Dreiecken jeden Pixel genau einmal malen

Computergraphik und Visualisierung

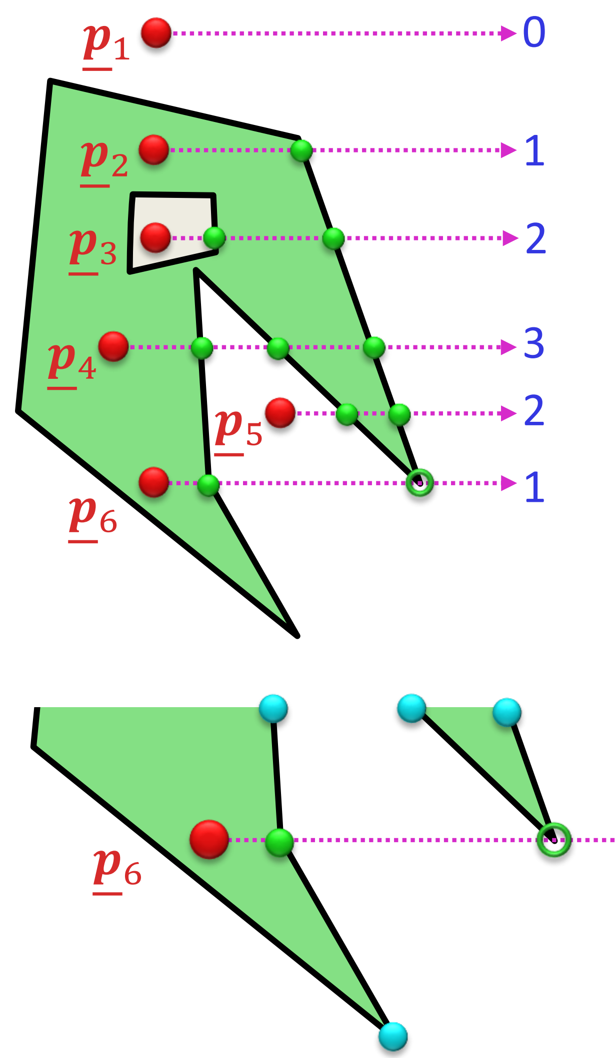
- Idee: zeichne Pixel, wenn Zentrum innerhalb des Dreiecks liegt
- Welchem Dreieck werden Pixel zugeordnet, die genau auf der Kante / Ecke liegen?
- Lösung:
  - definiere eine feste Richtungen
  - Pixel auf Kante oder Ecke
    - Wenn Richtung nicht entlang einer Kante zeigt, weise Pixel dem Dreieck zu, auf das die Richtung zeigt
    - Sonst weise Pixel dem Dreiecke zu, das gegen den Uhrzeigersinn an die Richtung angrenzt



RASTERISIEREN VON POLYGONEN

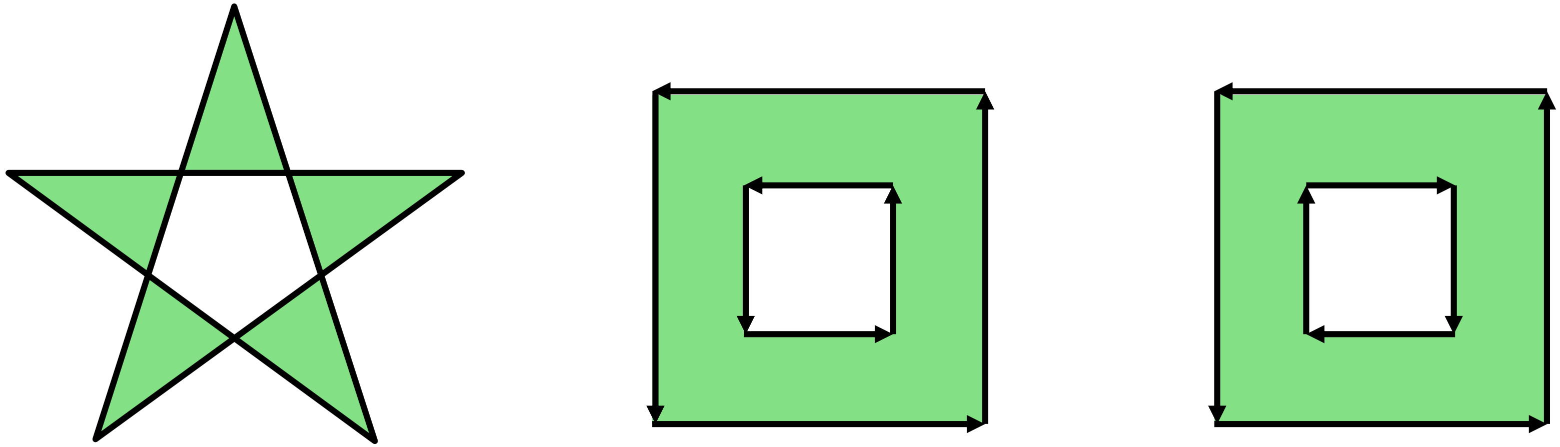
Rasterisieren von Polygonen
Füllbereich – Paritätsregel

- Bei einfachen Polygonen ist intuitiv klar, welches der zu füllende Bereich ist.
- Formal kann man für jeden Punkt $\underline{\boldsymbol{p}}_i$ einen Strahl in eine beliebige Richtung (hier x-Richtung) schießen und die Anzahl der Schnittpunkte mit Kanten zählen
- **<u>Paritätsregel:</u>** Bei einer <u>*geraden*</u> Anzahl ist der Punkt *außen* bei <u>*ungerader*</u> *innen*
- **Vorsicht** wenn der Strahl einen Eckpunk schneidet (siehe $\underline{\boldsymbol{p}}_6$): es liegt nur dann ein Schnitt vor, wenn die benachbarten Eckpunkte auf unterschiedlichen Seiten des Strahls liegen

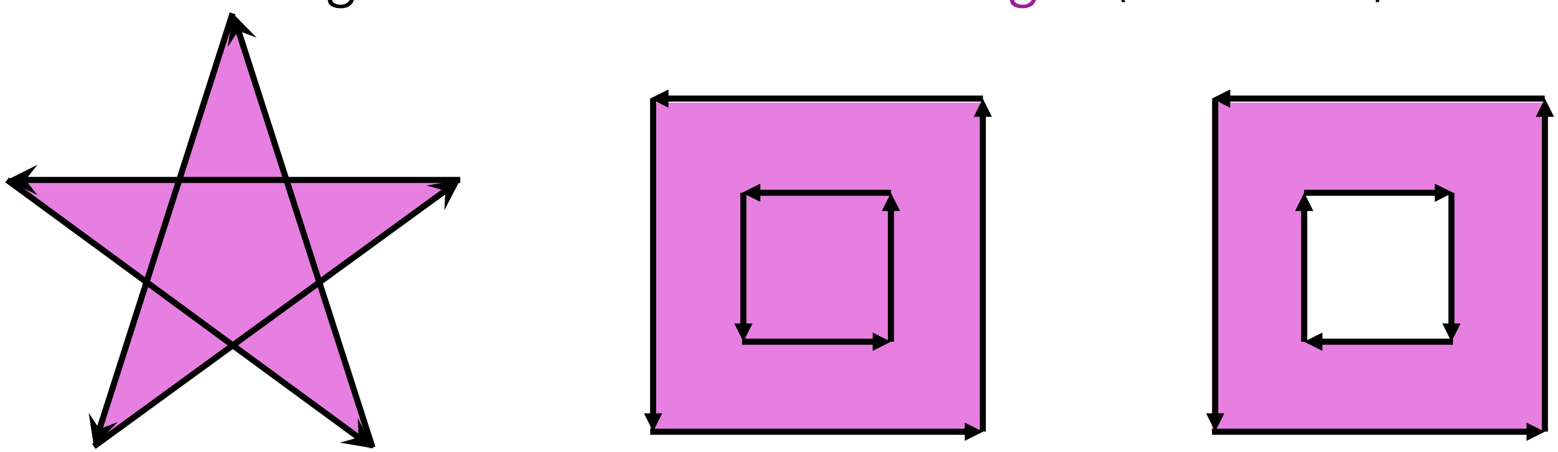


Rasterisieren von Polygonen
Füllbereich – Non-Zero Rule

Computergraphik und Visualisierung



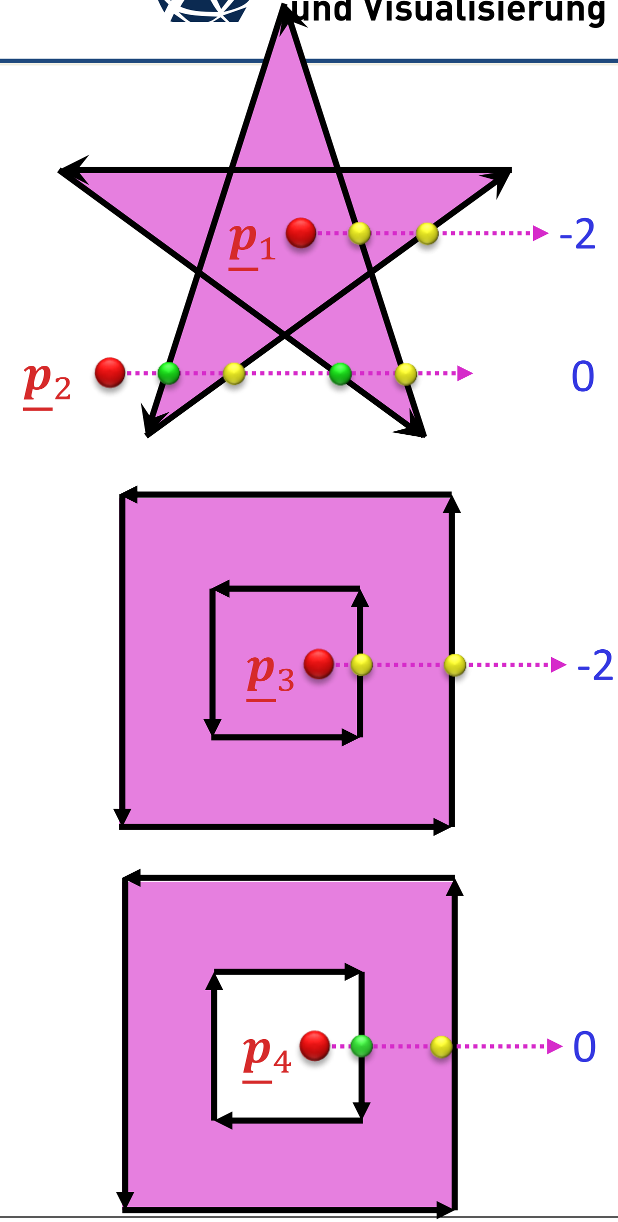
- auch bei allgemeinen Polygonen wird meist die Paritätsregel verwendet
- alternativ gibt es die Nicht-Null-Regel (non-zero):



Rasterisieren von Polygonen
Füllbereich – Non-Zero Rule

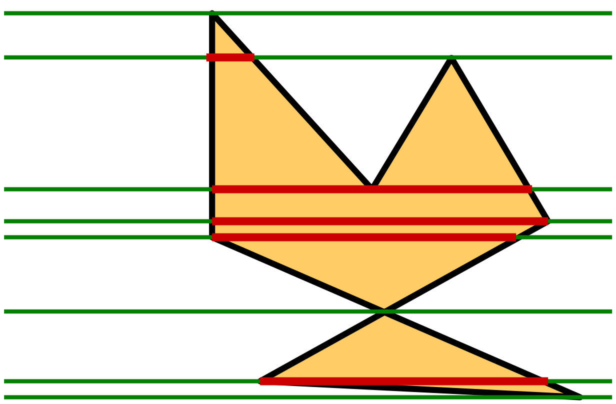
Computergraphik und Visualisierung

- Bei der Nicht-Null-Regel wird der Umlaufsinn der Konturen berücksichtigt.
- pro Strahlschnitt wird geprüft, ob die Kante in Strahlrichtung
  (a) von rechts nach links oder
  (b) von links nach rechts
  orientiert ist
- davon abhängig wird bei
  (a) runtergezählt und bei
  (b) hochgezählt
- **Nicht-Null-Regel:** abschließend werden Punkte als innen klassifiziert, wenn das Zählen ungleich 0 ergibt.



Rasterisieren von Polygonen
Polygonfüllen mittel Sweep-Line

- Effiziente Implementierung mit Sweep-Line Algorithmus
  - beginne beim höchsten Knoten
  - führe Liste aktiver Intervalle mit
  - betrachte Änderungen bei Knoten und Kantenschnitten
- Füllregel wird pro Zeile ausgewertet mit horizontalen unendlichen Strahlen.



RECHENBEISPIEL

Rechenbeispiel 1

- Berechne Normale aus gegebenen 2D Punkten

$$\underline{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \underline{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- 1. Schritt: Differenzvektor $\underline{\boldsymbol{q}} - \underline{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$

- 2. Schritt: 90° rotieren: $\vec{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} -\Delta y \\ \Delta x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}$

- optional normieren:

$$\|\vec{\boldsymbol{n}}\| = \sqrt{3^2 + 10^2} = \sqrt{109} \approx 10{,}44 \Rightarrow \hat{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\sqrt{109}} \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0{,}29 \\ 0{,}96 \end{pmatrix}$$

Rechenbeispiel 2 (Fortsetzung von 1)

Computergraphik und Visualisierung

- berechne vorzeichenbehafteten Abstand von Punkt $\underline{\boldsymbol{x}}$ von der Geraden durch $\underline{\boldsymbol{p}}$ und $\underline{\boldsymbol{q}}$: $dist(\underline{x}) \propto \left\langle \underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{p}}, \vec{\boldsymbol{n}} \right\rangle$

$$\underline{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \underline{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}; \underline{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \hat{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\sqrt{109}} \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

- 1. Schritt: Differenzvektor $\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$
- nicht normierte Variation:

$$dist(\underline{\boldsymbol{x}}) \propto \left\langle \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix} \right\rangle = -24 + 10 = -14$$

- normierter Abstand: $dist(\underline{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{\sqrt{109}} \cdot (-14) \approx -1{,}34$

zurück