[HSG Toán 12 TP.HCM / Đợt 2 / 2023 2024] Cho hàm số $y = x + \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ có đồ thị (C). Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng mà từ đó có thể kẻ đúng hai tiếp tuyến đến (C) sao cho đường thẳng nối hai tiếp điểm luôn đi qua điểm $I(1;1)$.

Bài giải

(Lời giải tham khảo: Trương Minh Kha)

Gọi: $M(a,b)$ là điểm thỏa yêu cầu bài toán và $N\left(x_0; x_0 + \dfrac{1}{x_0}\right)$ là tiếp điểm của phương trình tiếp tuyến (Δ_N) với đường cong (C). Do đó, hệ số góc của phương trình (Δ_N) có dạng:

$$(\Delta_N) : y'(x_0) = 1 - \frac{1}{x_0^2}$$

Nên phương trình tiếp tuyến (Δ_N) của (C) tại các tiếp điểm N có dạng:

$$y = \left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)(x - x_0) + x_0 + \frac{1}{x_0}$$

Thay điểm $M(a;b)$ vào đường thẳng (Δ), khi đó:

$$b = \left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)(a - x_0) + x_0 + \frac{1}{x_0}$$

Đơn giản và rút gọn phương trình trên, ta được phương trình bậc 2 theo ẩn x_0 như sau:

$$(b-a)x_0^2 - 2x_0 + a = 0 \qquad (1)$$

Để thỏa mãn từ điểm M vẽ được hai tiếp tuyến đến (C), ta cần để (1) có 2 nghiệm phân biệt dương, như thế ta cần phải thỏa đồng thời các điều kiện sau:

$$\begin{cases} \Delta' = 1 - a(b-a) > 0 \\ S = x_1 + x_2 = \dfrac{2}{b-a} > 0 \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{a}{b-a} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 - ab + 1 > 0 \\ b > a > 0 \end{cases}$$

Đồng thời, ta cũng gọi thêm $A\left(x_A; x_A + \dfrac{1}{x_A}\right)$ và $B\left(x_B; x_B + \dfrac{1}{x_B}\right)$ là hai nghiệm của (1).

Gọi (d) là đường thẳng nối hai điểm A và B, khi đó $\overrightarrow{AB}$ sẽ là vector chỉ phương của (d):

$$\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A; (x_B - x_A) + \left(\frac{1}{x_A} - \frac{1}{x_B}\right)\right) = \left(1; 1 - \frac{1}{x_A.x_B}\right)(x_B - x_A) = \left(1; \frac{2a-b}{a}\right)(x_B - x_A)$$

Khi đó (d) sẽ có 1 vector pháp tuyến là $\vec{n} = \left(\dfrac{2a-b}{a}; -1\right)$ $(*)$

Tiếp theo, để viết được phương trình đường thẳng (d) hoàn chỉnh, ta cần thêm dữ kiện về điểm đi qua của đường thẳng, do đó ta sẽ gọi thêm điểm $K(x_K, y_K)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB, khi đó tọa độ của K sẽ là:

$$\begin{cases} x_K = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1}{b-a} \\ y_K = \dfrac{x_A + x_B}{2} + \dfrac{x_A + x_B}{2x_A.x_B} = \dfrac{1}{b-a} + \dfrac{1}{a} \end{cases} \iff K\left(\frac{1}{b-a}; \frac{1}{b-a} + \frac{1}{a}\right) (**)$$

Từ dữ kiện $(*)$ và $(**)$, ta sẽ viết được phương trình đường thẳng (d) như sau:

$$(d) : \left(\frac{2a-b}{a}\right)\left(x - \frac{1}{b-a}\right) - \left(y - \frac{1}{b-a} - \frac{1}{a}\right) = 0$$

Vì (d) luôn đi qua điểm $I(1;1)$, nên ta thế tọa độ điểm I vào (d), khi ấy:

$$(d) : \left(\frac{2a-b}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b-a}\right) - \left(1 - \frac{1}{b-a} - \frac{1}{a}\right) = 0$$

Thu gọn phương trình và kết hợp với điều kiện trên, ta sẽ được mối liên hệ giữa a và b:

$$b = a + 2\left(0 < a < \frac{1}{2}\right)$$

Vậy tập hợp các điểm M là quỹ tích các điểm nằm trên đoạn thẳng $y = x + 2\left(0 < x < \dfrac{1}{2}\right)$.