

Chuyên đề: Khảo sát hàm số

Khối lớp: 12

Môn: Toán

Họ và tên _____

Ngày nhận đề: _____

A. Bài toán về hàm số

1. Đơn điệu

Câu 1: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (1 - m)^2 x^3 + (m - 1)x^2 + x + 4$ đồng biến trên \mathbb{R}

Câu 2: Có bao nhiêu số nguyên m để $y = |x^4 - 2x^3 + mx + 6 - m|$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Câu 3: Cho hàm số $f'(x) = x(x - 1)(x + 1)$. Khi đó hàm số $f(\sin x)$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ B. $(-\infty; -10)$ C. $(2; 4)$ D. $\left(\frac{8}{5}; 3\right)$

Câu 4: Tập hợp tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \left(\frac{3}{4}\right)^{x^3 - 3x^2 + 9(5-m)x + 11}$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là:

- A. $(-\infty; 2)$ B. $(-\infty; 5)$ C. $(-\infty; 5]$ D. $(-\infty; 2]$

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên khoảng $(1; 4)$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-
$f'(x)$	$-\infty$		4	0
				$-\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để $g(x) = e^{mx - x^2} \cdot f(x)$ đồng biến trên $(1; 4)$?

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m + 1)x^2 + (m^2 + 2m)x - 5$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2024; 2024]$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; 5)$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0
$f(x)$	$-\infty$		3		2	
				1		0
						$+\infty$

Tìm khoảng đồng biến của hàm số $y = [f(x)]^3 - 3[f(x)]^2$

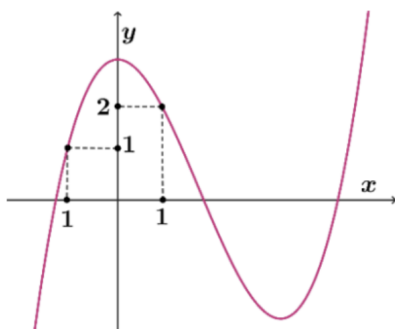
Câu 8: Tìm m để $f(x) = (m^3 - 2m^2 - 3m)x^6 + (m + 1)x^3 + (m - 1)x^2 + mx$ đồng biến trên \mathbb{R}

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + mx + 2024$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2024; 2024]$ để hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị của m để hàm số $y = mx^9 + (m^2 - 3m + 2)x^6 + (2m^3 - m^2 - m)x^4 + m$ đồng biến trên \mathbb{R}

Câu 11*: Cho $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ có $f(0) = 2f'(0)$ và $f(x) \geq 2f'(x)$ với mọi $x \geq -1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $a \in (14; 2024]$ để hàm số đồng biến trên \mathbb{R}

Câu 12:** Cho hàm số $y = f(x)$ có hàm liên tục trên \mathbb{R} và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2024; 2024]$ để hàm số $y = f(1 - 4x) - 8mx^2 + (8m + 4)x + 1$ nghịch biến trên $(0; \frac{\pi}{2})$



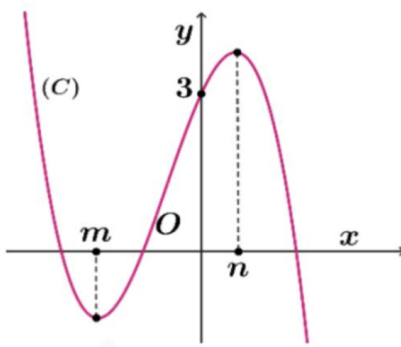
2. Cực trị

Câu 1: Hãy tìm giá trị của tham số m để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 2mx + 3m - 1}{x - 1}$ đi qua điểm $A(3; 4)$?

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + mx - \frac{4}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-1; 8)$?

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x - 2)^2(x^2 - x)$, $x \in \mathbb{R}$. Tìm S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right)$ có đúng 5 điểm cực trị.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $(a \neq 0)$; $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên dưới, biết rằng $m > -e$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f'[3x - f(x)]$ là:



A. 3

B. 7

C. 10

D. 6

Câu 5: Cho hàm đa thức bậc bốn, biết đồ thị $y = f'(x)$ có hai điểm cực trị là $A(0;1)$ và $B(2;5)$. Điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - x$ là:

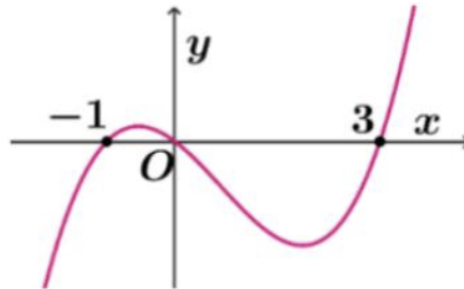
- A. $x = 0$ B. $x = 1$ C. $x = 2$ D. $x = -1$

Câu 6: Cho hàm số $y = 4x^3 + mx^2 - 3x$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số đạt cực trị tại x_1 và x_2 thỏa mãn $3x_1 + x_2 = 1$

Câu 7: Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ với $m \in \mathbb{R}$. Giá trị của m thuộc tập hợp nào sau đây để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $(d) : x + 8y - 74 = 0$

Câu 8*: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (9 - m^2)x + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 1 điểm cực tiểu?

Câu 9*: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = f\left(\left|x + \frac{m}{x}\right|\right)$ có đúng 6 điểm cực trị.



Câu 10:** Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $g(x) = |f(|x^3 + 3x| + m - 9)|$ có ít nhất 7 điểm cực trị

Câu 11*:** Cho hàm số $f(x) = x^4 + mx^2 - 8x$ (m là tham số thực). Số giá trị nguyên của m để hàm số $y = |f(x^3 - 3x^2 + 2)|$ có đúng 9 điểm cực trị

3. Giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất

Câu 1: Cho hàm số $y = |x + m|$. Tìm m để giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $[-2;2]$ bằng 22.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho $\max_{[1;3]} |f(x)| = 2 \min_{[1;3]} |f(x)|$

Câu 3: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực $m \in [-50;50]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |x^2 - (6 + m)x + 1|$ trên khoảng $(1; +\infty)$ bằng 0?

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(2 - x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(2x - 1) + 2x^2 - 4x$ trên đoạn $\left[\frac{-1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ bằng

- A. $f(-1)$ B. $f(-2) + \frac{5}{2}$ C. $f(2) - \frac{3}{2}$ D. $f(0) - \frac{3}{2}$

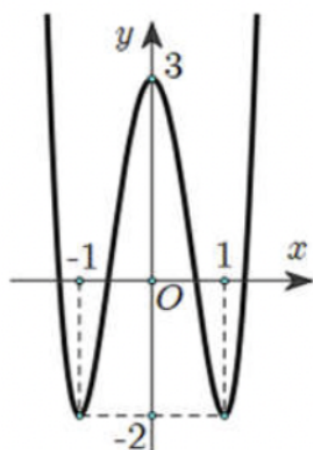
Câu 5: Cho $y = \frac{x+m}{x+1}$, ($m \in \mathbb{R}$) thỏa mãn. Định m để $\max_{[1;2]} f(x) + \min_{[1;2]} f(x) = \frac{16}{3}$

Câu 6*: Cho hàm số $f(x) = \frac{2\sqrt{x+1}+m}{\sqrt{x+1}+1}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để hàm số có giá trị lớn nhất trên $[-1;8]$ nhỏ hơn 3. Số phần tử của S là

Câu 7*: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x|x+m|$ trên đoạn $[-1;2]$ không vượt quá 3?

Câu 8:** Biết giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |2x^3 - 12x^2 + 9x + m + 8| + 9x$ (với m là tham số) trên đoạn $[0;5]$ bằng 78. Tổng các giá trị của m là?

Câu 9*: Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y = ||2f(x) - 6| + f(x) + 3 - m|$ có tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[-1;1]$ bằng 3. Tổng các phần tử của S bằng:



A. 14

B. 24

C. 11

D. 17

Câu 10*: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-4;4]$ để hàm số $g(x) = f(|x^3| + |x|) + f(m)$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\frac{11}{2}$

x	-4	-3	-1	0	2	4
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0
$f(x)$	-4	4	2	3	-3	1

A. 9

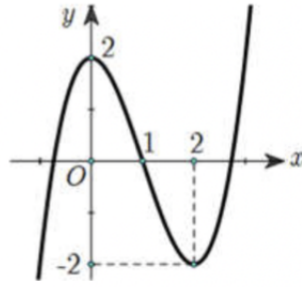
B. 4

C. 6

D. 7

4. Tiệm cận

Câu 1: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị $g(x) = \frac{x^2 - x}{[f(x)]^2 - 2f(x)}$ là:



Câu 2: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x}}{x^2 - 3x + 2}$ là:

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{mx + 1}{x + 3n + 1}$. Đồ thị hàm số nhận trục tung và trục hoành làm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng. Khi đó $m + n$ bằng

Câu 4: Giá trị m nào dưới đây làm cho đồ thị hàm số $y = \frac{4mx + 3m}{x - 2}$ có đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2020?

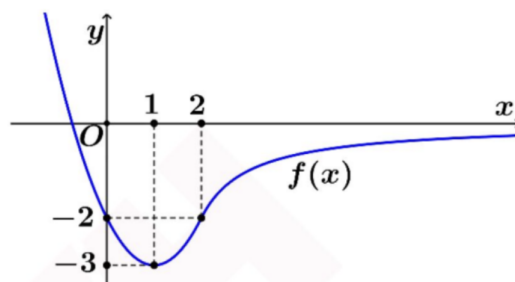
Câu 5*: Tìm tọa độ điểm M có hoành độ dương thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C) đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 6*: Cho hàm số $y = \frac{(2x-1)\sqrt{mx^2-3}}{1-5x}$. Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận xiên có hệ số góc bằng $-\frac{2}{5}$. Xác định phương trình tiệm cận xiên đó

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$ có bảng biến thiên như hình bên. Tổng số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2^{f(x)}}{f(x) - 1}$ là:

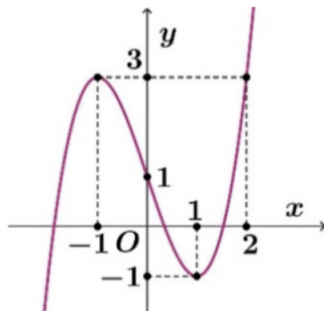
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y		$-\infty$	1	$-\infty$	2

Câu 8:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình vẽ (đồ thị hàm số nhận đường $y = 0$ làm tiệm cận ngang). Số giá trị nguyên m để đồ thị hàm số $y = \frac{22}{22\sqrt{-f(x)} + m}$ có đúng 3 đường tiệm cận

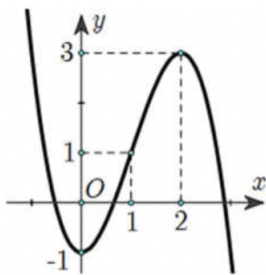


5. Tương giao hàm số

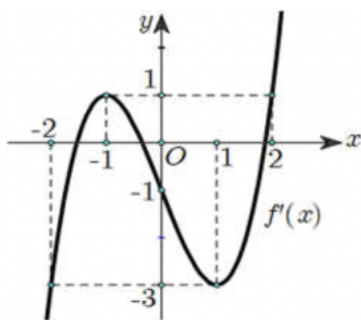
Câu 1: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới. Số nghiệm phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 1$ là:



Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x)|f'(x)| - 2f'(x) = 0$

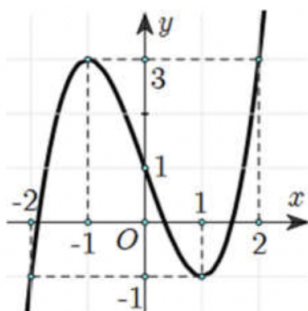


Câu 3: Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(e^x + 1) - x - m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt

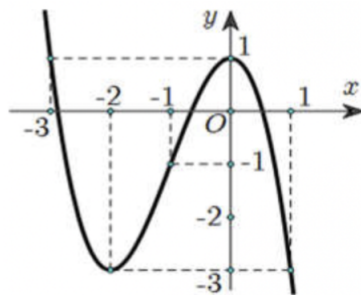


- A. $m > f(2)$ B. $m > f(2) - 1$ C. $m < f(1) - \ln 2$ D. $m > f(1) + \ln 2$

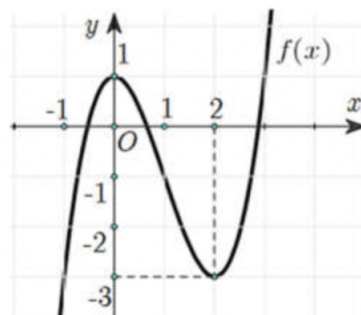
Câu 4: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(\sin x)) = m$ có đúng 2 nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$



Câu 5: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $[f(x)]^2 + (m - 1)f(x) = 0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt?



Câu 6: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Phương trình $\frac{f(f(x)) + 1}{f(x) - 1} = 1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm



Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f((f(x))^2) - 4 = 0$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			4		-1		4	
	$-\infty$							$-\infty$

Câu 8:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$	-1	$0,25$	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		3		$+\infty$	
		2		1		

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$2.6^{f(x)} + (f^2(x) - 1).9^{f(x)} - 3.4^{f(x)}.m \geq (2m^2 + 2m).2^{f(x)}$$

Câu 9:** Cho hàm số $f(x) = x^4 - 32x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-4; 1)$ của phương trình $f(x^2 + 4x + 5) = m$ bằng -8 .

6. Phương trình tiếp tuyến (Mức độ: "khó" đến "rất khó" đến "trang trí")

Câu 1*: Cho hai hàm số $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2}}$ và $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là tiếp tuyến của mỗi đồ thị hàm số $f(x), g(x)$ đã cho tại giao điểm của chúng. Hỏi góc giữa hai tiếp tuyến trên bằng bao nhiêu?

Câu 2:** Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2$ có đồ thị (C) . Gọi $M(m; f(m))$ là điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $MA = 3MB$. Tìm tất cả các giá trị m .

Câu 3:** Trong mặt phẳng Oxy , có bao nhiêu điểm mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ sao cho tiếp tuyến này vuông góc với nhau?

Câu 4*: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có đồ thị là (C) và $I(-1; 1)$. Tiếp tuyến Δ của (C) cắt hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (C) lần lượt tại $A; B$ sao cho chu vi tam giác IAB đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó chu vi nhỏ nhất của tam giác IAB

Câu 5:** Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + mx + 1$. Gọi S là tổng tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại ba điểm phân biệt $A(0; 1), B, C$ sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại B, C vuông góc với nhau. Giá trị của S bằng

Câu 6*:** Một tiếp tuyến của đường cong $y^2 - x^2 = 1$ cắt hai đường thẳng $y = x, y = -x$ tại A và B . Tính diện tích tam giác OAB .

Câu 7*: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho tổng hệ số góc của các tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại các điểm A, B, C bằng 3.

Câu 8*:** Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - mx$ và $g(x) = \frac{x-m}{x-1}$, tham số $m \neq 1$, có đồ thị $(C_1), (C_2)$. Biết rằng tồn tại đúng 2 số $x_0 \in (2; 3)$ sao cho nếu gọi d_1, d_2 là tiếp tuyến tại các điểm có hoành độ x_0 thuộc $(C_1), (C_2)$ và d_1, d_2 cắt nhau tại A , còn d_1, d_2 cắt trục Ox ở B, C thì $AB = AC$. Tìm tất cả các giá trị m .

Câu 9:** Cho hàm số $y = (x^2 - 1)^2$ có đồ thị (C) . Xét điểm M di chuyển trên (C) và có hoành độ $m \in (-1; 1)$. Tiếp tuyến của (C) ở M cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt và khác M . Tìm giá trị lớn nhất của tung độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

Câu 10:** Cho các hàm số $y = f(x), y = f[f(x)], y = f(\sqrt{x^2 + 24})$ có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2), (C_3)$. Đường thẳng $x = 1$ cắt $(C_1), (C_2), (C_3)$ lần lượt tại các điểm M, N, P . Biết phương trình tiếp tuyến của (C_1) tại M và của (C_2) tại N lần lượt tại $y = 2x + 3$ và $y = 202(10x + 1)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C_3) tại P .

Câu 11*:** Cho hàm số $y = x + \frac{1}{x} (x > 0)$ có đồ thị (C) . Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho đường thẳng nối hai tiếp điểm luôn đi qua điểm $I(1; 1)$