



UNIVERSIDAD
NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Transformada de Fourier Cuántica (QFT)

Integrantes:

Yonathan Berith Jaramillo Ramírez. 419004640

Profesor: Salvador Elías Venegas Andraca

Ayudantes: Héctor Miguel Mejía Díaz

Malinalli Wong Rueda

8 Dec, 2024

Computación Cuántica I

Proyecto Final: Análisis de EEG en Tiempo Real utilizando la Transformada de Fourier Cuántica (QFT)

Contents

1	Introducción	3
1.1	Variables de EEG que se comunmente se analizan	3
1.2	Frecuencias cerebrales y su significado	3
1.3	Características derivadas de los datos EEG	3
1.4	Desafíos actuales en el análisis EEG	4
1.5	Ejemplos de aplicaciones relevantes	4
1.6	Limitaciones de los métodos clásicos	5
2	El problema a resolver del proyecto final	5
2.1	Subproblemas identificados:	5
3	El algoritmo cuántico que lo resuelve: Transformada de Fourier Cuántica (QFT)	6
3.1	Generación de datos simulados	6
3.2	Uso de la QFT para analizar las frecuencias	6
3.3	Metodología de análisis	7
3.4	Limitaciones y desafíos	7
4	Comparación con la FFT clásica	7
4.1	Fórmula de la FFT clásica	7
4.2	Complejidades computacionales	8
4.3	Ventajas y desventajas	8

1 Introducción

El análisis de señales cerebrales mediante electroencefalografía (EEG) es una herramienta fundamental en neurociencia, con aplicaciones que van desde el diagnóstico médico hasta interfaces cerebro-computadora. Sin embargo, procesar estos datos en tiempo real implica grandes desafíos computacionales, especialmente cuando se busca identificar patrones de frecuencia en señales complejas. En este proyecto, exploramos cómo la **Transformada de Fourier Cuántica (QFT)** puede ofrecer mejoras significativas sobre métodos clásicos como la **Transformada Rápida de Fourier (FFT)**.

1.1 Variables de EEG que se comunmente se analizan

El análisis de datos EEG se basa en identificar las frecuencias dominantes y otras características relevantes de las señales eléctricas cerebrales registradas mediante electrodos. Estas señales son esenciales para comprender la actividad cerebral, diagnosticar trastornos y desarrollar aplicaciones como interfaces cerebro-computadora (BCI).

1.2 Frecuencias cerebrales y su significado

Las señales EEG se dividen en bandas de frecuencia, cada una asociada con un estado o proceso cerebral:

- **Delta (0.5–4 Hz):** Relacionada con el sueño profundo, regeneración celular y estados de relajación profunda.
- **Theta (4–8 Hz):** Asociada a estados meditativos, procesos de aprendizaje y acceso a la memoria.
- **Alpha (8–13 Hz):** Vinculada a estados de relajación y atención calmada, con ojos cerrados.
- **Beta (13–30 Hz):** Relacionada con la atención activa, resolución de problemas y ansiedad.
- **Gamma (> 30 Hz):** Asociada a funciones cognitivas superiores, integración sensorial y percepción consciente.

1.3 Características derivadas de los datos EEG

Además de las bandas de frecuencia, el análisis EEG incluye variables adicionales que enriquecen la comprensión de los datos:

- **Densidad Espectral de Potencia (PSD):** Mide la potencia en bandas específicas para evaluar estados cerebrales. Por ejemplo, el *ratio* Theta/Beta se utiliza en el diagnóstico de TDAH.
- **Conectividad Funcional:**
 - **Coherencia:** Evalúa la sincronización entre regiones cerebrales.
 - **Valores de Bloqueo de Fase (PLV):** Analiza las relaciones de fase entre señales EEG.
- **Potenciales Evocados (ERPs):** Respuestas EEG a eventos específicos, como el **P300**, utilizado en interfaces cerebro-computadora y estudios de atención.
- **Índices de Asimetría:** Evaluaciones como la actividad frontal izquierda/reducida, útil para el diagnóstico de depresión.
- **Complejidad y Entropía:** Características no lineales como entropía de permutación, útiles para evaluar la irregularidad y dinámica cerebral.
- **Espacialización:** Localización de fuentes cerebrales mediante análisis de dipolos o técnicas como ICA.

1.4 Desafíos actuales en el análisis EEG

- **Volumen de datos:** Los dispositivos EEG modernos con múltiples electrodos generan grandes cantidades de datos que deben procesarse rápidamente.
- **Análisis en tiempo real:** En aplicaciones como monitoreo de convulsiones o control de dispositivos mediante BCI, la latencia debe ser mínima.
- **Ruido:** Las señales EEG son propensas a interferencias externas, lo que dificulta la extracción de características relevantes.

1.5 Ejemplos de aplicaciones relevantes

- **Diagnóstico médico:** Identificación de epilepsia, Alzheimer y trastornos del sueño.
- **Interfaces cerebro-computadora (BCI):** Control de dispositivos como prótesis robóticas o sistemas de comunicación mediante ondas cerebrales.
- **Inteligencia Organoide:** Investigación científica con organoides para entender mejor los principios de la inteligencia y la conciencia.

- **Detectores de estrés y emociones:** Monitoreo en tiempo real del estado emocional basado en patrones EEG.
- **Análisis farmacológico:** Evaluación de los efectos de medicamentos en la actividad cerebral.
- **Monitoreo de sueño:** Identificación de ciclos y trastornos del sueño.
- **Neurorehabilitación:** Uso de BCI para apoyar la recuperación motora tras un accidente cerebrovascular.

1.6 Limitaciones de los métodos clásicos

Los métodos clásicos, como la Transformada Rápida de Fourier (FFT), son ampliamente utilizados para analizar frecuencias en datos EEG. Sin embargo, presentan limitaciones:

- **Complejidad computacional:** La FFT tiene una complejidad de $O(N \log N)$, lo que puede ser insuficiente para señales de alta densidad en tiempo real.
- **Falta de escalabilidad:** Procesar múltiples canales de EEG simultáneamente puede ser prohibitivo en sistemas clásicos.
- **Latencia:** Los métodos clásicos pueden introducir retrasos significativos, afectando la eficacia en aplicaciones críticas como BCIs.

2 El problema a resolver del proyecto final

El objetivo principal de este proyecto es analizar datos EEG simulados en tiempo real para identificar las frecuencias dominantes en bandas específicas (Alpha: 8–13 Hz y Beta: 13–30 Hz). Estos datos representarán señales cerebrales que podrían estar relacionadas con estados cognitivos como relajación o concentración.

2.1 Subproblemas identificados:

- Generar datos que simulen señales EEG realistas, combinando frecuencias en las bandas de Alpha y Beta con ruido aleatorio.
- Procesar estos datos utilizando la Transformada Rápida de Fourier (FFT) para identificar las frecuencias dominantes.
- Implementar la Transformada de Fourier Cuántica (QFT) y comparar su desempeño con la FFT en términos de:

- Precisión para identificar las frecuencias generadas.
- Tiempo de ejecución.

Al resolver este problema, se demostrará cómo la QFT puede superar a la FFT clásica en aplicaciones futuras, como análisis EEG en tiempo real para interfaces cerebro-computadora o diagnósticos neurológicos.

3 El algoritmo cuántico que lo resuelve: Transformada de Fourier Cuántica (QFT)

La **Transformada de Fourier Cuántica (QFT)** es una implementación cuántica de la Transformada de Fourier Discreta (DFT), diseñada para calcular eficientemente la representación en frecuencia de una señal.

3.1 Generación de datos simulados

En este proyecto, generaremos señales simuladas que representen datos EEG. Estas señales se crearán con las siguientes características:

- Combinación de dos frecuencias principales: una en la banda Alpha (10 Hz) y otra en la banda Beta (20 Hz).
- Ruido aleatorio agregado para simular condiciones realistas de medición.
- Duración de 1 segundo, muestreada a 1000 Hz.

La fórmula para generar la señal es:

$$\text{Señal}(t) = \sin(2\pi f_{\text{Alpha}}t) + 0.5 \sin(2\pi f_{\text{Beta}}t) + \text{Ruido}(t)$$

donde $f_{\text{Alpha}} = 10$ Hz y $f_{\text{Beta}} = 20$ Hz.

3.2 Uso de la QFT para analizar las frecuencias

La QFT será utilizada para identificar las frecuencias presentes en la señal generada. Compararemos los resultados con la FFT clásica para evaluar la precisión y el tiempo de ejecución.

La implementación de la QFT en un sistema cuántico involucra:

- Estados cuánticos que representan las amplitudes de las muestras de la señal.
- Aplicación de compuertas Hadamard (H) y rotaciones controladas (R_k) para transformar las amplitudes en su representación en frecuencia.

- Interpretación de los resultados mediante medición cuántica, que proporciona las frecuencias dominantes con una probabilidad proporcional a su amplitud.

La fórmula matemática de la QFT para un estado cuántico $|x\rangle$ representado por n qubits es:

$$\text{QFT}(|x\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi i \cdot x \cdot k / 2^n} |k\rangle$$

3.3 Metodología de análisis

El análisis se realizará en tres etapas:

- **Simulación de datos:** Generar señales utilizando Python con la fórmula mencionada.
- **Análisis con FFT:** Aplicar la FFT clásica para identificar las frecuencias Alpha y Beta.
- **Análisis con QFT:** Implementar la QFT en Qiskit y medir su precisión para identificar las frecuencias.

Los resultados se evaluarán en función de:

- Precisión: Identificación correcta de las frecuencias generadas.
- Tiempo de ejecución: Comparación del tiempo necesario para procesar la señal con ambos algoritmos.

3.4 Limitaciones y desafíos

- **Hardware cuántico:** La simulación de la QFT se realizará en un simulador, lo que puede limitar la representación del rendimiento real en hardware cuántico.
- **Ruido en la señal:** El ruido agregado podría dificultar la identificación de frecuencias específicas, lo que probará la robustez de los algoritmos.

4 Comparación con la FFT clásica

4.1 Fórmula de la FFT clásica

La FFT, como optimización de la DFT, calcula la siguiente transformación:

$$\text{DFT}(X[k]) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-2\pi i k n / N}$$

4.2 Complejidades computacionales

- **FFT clásica:** $O(N \log N)$.
- **QFT cuántica:** $O(\log^2 N)$.

4.3 Ventajas y desventajas

Aspecto	FFT clásica	QFT cuántica
Velocidad	$O(N \log N)$	$O(\log^2 N)$, mejora exponencial para señales grandes.
Requerimientos	Computadora clásica	Hardware cuántico avanzado.
Escalabilidad	Limitada para EEG multi-canal de alta resolución.	Altamente escalable.
Precisión	Alta, resultados deterministas.	Resultados probabilísticos, requiere múltiples ejecuciones.
Costo energético	Relativamente bajo.	Alto, depende del hardware cuántico.

Table 1: Comparativa entre FFT y QFT