复变函数与数理方程知识与方法

T^TT

2024 年 9 月 19 日

目录

1 复变函数 **2**

1.1 复数与复变函数 2

1.1.1 复数的定义与运算 2

1.1.2 复变函数与解析函数 3

1.1.3 复变函数的导数 4

*1.1.4 复变函数的多值性 6

2 积分变换 **7**

3 数理方程 **8**

4 特殊函数 **9**

1 复变函数

1.1 复数与复变函数

1.1.1 复数的定义与运算

定义 1.1. 设 $z=x+\mathrm{i}y$，其中 x 和 y 是实数，i 是虚数单位，满足 $\mathrm{i}^2=-1$，则称 z 为**复数**，x 为**实部**，y 为**虚部**，记作 $z=\mathfrak{Re}\,z+\mathrm{i}\,\mathfrak{Im}\,z$。

定义 1.2. 改用极坐标 ρ 和 φ 表示复数 z，即可得到复数 z 的**三角式** $z=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$ 或**指数式** $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$。其中 $\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ 为复数 z 的**模**，$\varphi=\operatorname{Arg}z$ 为复数 z 的**幅角**。

约定：以 $\arg z$ 表示复数 z 的幅角中满足 $0\leq\operatorname{Arg}z<2\pi$ 的一个特定值，称为 z 的**幅角主值**。

定义 1.3. 复数 $z=x+\mathrm{i}y=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 的**共轭**定义为 $z^*=x-\mathrm{i}y=\rho(\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi)=\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$。

复数的运算规则与实数类似，即满足交换律、结合律、分配律等基本运算法则。乘、除、乘方、开方运算使用三角式或指数式更为方便：

重要定理 1.1.1. 复数三角式或指数式的乘、除、乘方、开方运算

设复数 $z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1)=\rho_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$ 和 $z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2)=\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$，则有：

$$\begin{aligned}
&z_1z_2=\rho_1\rho_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big)=\rho_1\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)},\\
&\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big)=\frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)},\\
&z_1^n=\rho_1^n\big(\cos n\varphi_1+\mathrm{i}\sin n\varphi_1\big)=\rho_1^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi_1},\\
&\sqrt[n]{z_1}=\sqrt[n]{\rho_1}\left(\cos\frac{\varphi_1+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi_1+2k\pi}{n}\right)=\sqrt[n]{\rho_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi_1+2k\pi}{n}},\qquad k=0,1,2,\cdots,n-1
\end{aligned}$$

注 1.1. 幅角运算

（1）复数 z 的幅角 φ 不能唯一确定，其可以加减 $2k\pi$，即 $\varphi+2k\pi$ 也是复数 z 的幅角，其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。因此，根式 $\sqrt[n]{z}$ 的幅角也就可以加减 $\dfrac{2\pi}{n}$ 的整数倍，从而 $\sqrt[n]{z}$ 有 n 个值。

（2）一般地，$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2$，但 $\operatorname{Arg}z^2=\operatorname{Arg}z+\operatorname{Arg}z\neq2\operatorname{Arg}z$。

例题 1.1.2. 将实值坐标平面上的直线方程 $ax+by+c=0$ 表示为复数形式。

解. 令直线上 $z=x+\mathrm{i}y$，则有 $x=\mathfrak{Re}\,z=\dfrac{z+z^*}{2}$，$y=\mathfrak{Im}\,z=\dfrac{z-z^*}{2\mathrm{i}}$，因此有

$$a\frac{z+z^*}{2}+b\frac{z-z^*}{2\mathrm{i}}+c=0\quad\Rightarrow\quad(a-\mathrm{i}b)z+(a+\mathrm{i}b)z^*+2\mathrm{i}c=0$$

即

$$B^*z+Bz^*+C=0$$

其中 $B\in\mathbb{C}$，$C\in\mathbb{R}$。Ⓢ

1.1.2 复变函数与解析函数

重要定义 1.4. 复变函数、解析函数

在复平面上存在一个点集 E，若对于每一个 $z \in E$，都按照一定规律有一个或多个复数 w 与之对应，则称这种对应关系为从 E 到复数集 $\mathbb{C}$ 的**复变函数**，记作 $w = f(z)$。其中，z 称为 w 的**宗量**，E 称为 f 的**定义域**。

若函数的定义域 E 是一个**区域**：

- E 是全由**内点**组成的点集；
- E 具有**连通性**，即对于任意两点 z_1 和 z_2，连接 z_1 和 z_2 的折线段也存在于 E 中；

并且在区域上每一点都**解析**（定义 1.6），则称复变函数 f 为**解析函数**。

典型的复变函数有：

- **多项式**：$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$；
- **有理分式**：$f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$，其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 为多项式函数；
- **根式**：$f(z) = \sqrt[n]{z-a}$；
- 部分**初等函数**：
  - **指数函数**：$f(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$；
  - **三角函数**：$\sin z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$，$\cos z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$，
    这里 $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ 仍成立，但 $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 \geq 1$；
  - **双曲函数**：$\sinh z = \dfrac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}$，$\cosh z = \dfrac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}$；
  - **对数函数**：$\ln z = \ln\left(|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Arg} z}\right) = \ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z$；
  - **幂函数**：$z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln z}$。

例题 1.1.3. 在**反演**变换 $w = \dfrac{1}{z}$（$z \neq 0$）中，z 平面上的下面曲线各映射为 w 平面上的什么曲线？

（1）$|z| = 2$；（2）$\mathfrak{Re}\, z = 1$。

解. 设 $z = x + \mathrm{i}y$，$w = u + \mathrm{i}v$，则

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+\mathrm{i}y} = \frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{x}{x^2+y^2},\ v = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

（1）$x^2 + y^2 = 4$，则 $u = \dfrac{x}{4}$，$v = -\dfrac{y}{4}$，即 $u^2 + v^2 = \dfrac{1}{16}$，为 w 平面上的圆心在原点、半径为 $\dfrac{1}{4}$ 的圆，复平面上的表示为 $|w| = \dfrac{1}{2}$。

（2）$x = 1$，则 $u = \dfrac{1}{1+y^2}$，$v = -\dfrac{y}{1+y^2}$，即 $u^2 + v^2 = \dfrac{1+y^2}{(1+y^2)^2} = \dfrac{1}{1+y^2} = u$，为 w 平面上的圆心在 $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$、半径为 $\dfrac{1}{2}$ 的圆，复平面上的表示为 $\left|w - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$。 Ⓢ

1.1.3 复变函数的导数

重要定义 1.5. 复变函数的导数

设函数 $w=f(z)$ 是在区域 B 上定义的单值函数，若在 B 内对于任意一点 z，存在极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \tag{1.1}$$

且其值与 $\Delta z\to 0$ 的方式无关，则称函数 $w=f(z)$ 在 z 处**可导**，称该极限为函数 $f(z)$ 在点 z 处的**导数**，记作 $f'(z)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$。

形式上看，复变函数和实变函数导数的定义相同，因此在某些方面具有一致性。然而，**它们具有本质的区别，因为实变函数只需要沿实轴逼近极限，而复变函数则需要在全方向逼近极限。**

下面给出函数可导的必要条件：

重要定理 1.1.4. Cauchy-Riemann 条件

记复变函数 $w=f(z)$ 中，$\mathfrak{Re}\,w=u$，$\mathfrak{Im}\,w=v$，$\mathfrak{Re}\,z=x$，$\mathfrak{Im}\,z=y$，$|z|=\rho$，$\arg z=\varphi$，则函数可导的必要条件是各偏导数存在且满足 **Cauchy-Riemann 方程**：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},\end{cases} \quad\text{或}\quad \begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi},\\[2mm] \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}=-\dfrac{\partial v}{\partial \rho}\end{cases} \tag{1.2}$$

例题 1.1.5. 设有函数 $f(z)=\sqrt{|\mathfrak{Im}\,z^2|}$，求其在复平面原点的可导性。

解. 设 $z=x+\mathrm{i}y$，知 $u=\mathfrak{Re}\,f(z)=\sqrt{|2xy|}$，$v=\mathfrak{Im}\,f(z)=0$。则在 $(0,\ 0)$ 点有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,\ 0)-u(0,\ 0)}{\Delta x}=0=\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0,\ \Delta y)-u(0,\ 0)}{\Delta y}=0=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

因此满足 Cauchy-Riemann 方程。然而，从定义看，由于 $\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\dfrac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\dfrac{\sqrt{|2\Delta x\Delta y|}}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}$，因此

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta x=\Delta y}}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\frac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}},\qquad \lim_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=0$$

这说明函数在原点不可导。**其原因是：函数 $u(x,\ y)$ 在 $(0,\ 0)$ 点不可微。** Ⓢ

重要定理 1.1.6. 单值复变函数可导的充要条件

单值函数 $f(z)=u(x,\ y)+\mathrm{i}v(x,\ y)$ 可导，当且仅当 $u(x,\ y)$ 和 $v(x,\ y)$ 可微，并且各偏导数满足定理 1.1.4 的 Cauchy-Riemann 条件。

重要定义 1.6. 解析

若函数 $f(z)$ 在点 z_0 及其邻域上处处可导，则称 $f(z)$ 在点 z_0 处**解析**。
若函数 $f(z)$ 在区域 B 上的每一点都解析，则称 $f(z)$ 在区域 B 上**解析**，此时称 $f(z)$ 为**解析函数**。

注 1.2. 解析函数实部与虚部的关系

解析函数的实部和虚部不是独立的，知道了其中之一，例如实部 u，根据 Cauchy-Riemann 条件就可以唯一地（相差一个常数）确定虚部 v，这是因为

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y = -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$

从而有

$$v = \int \mathrm{d}v = -\int \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \int \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y + C$$

定理 1.1.7. 若函数 $f(z) = u(x,\ y) + \mathrm{i}v(x,\ y)$ 在区域 B 上解析，则
（1）$u = \Re f(z)$，$v = \Im f(z)$ 均为 B 上的**调和函数**：

- u，v 在区域 B 上均有二阶连续偏导数；
- u，v 均满足**拉普拉斯方程**，即 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$，$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$；

（2）$u(x,\ y) = C_1$，$v(x,\ y) = C_2$（C_1，C_2 为任意实数）是 B 上的两组**正交曲线簇**。

例题 1.1.8. 已知解析函数 $f(z) = u(x,\ y) + \mathrm{i}v(x,\ y)$ 的虚部 $v = \sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}$，求其实部 u 和函数 f。

解. 改用极坐标 $x = \rho\cos\varphi$，$y = \rho\sin\varphi$，则有

$$v = \sqrt{-\rho\cos\varphi + \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}} = \sqrt{-\rho\cos\varphi + \rho} = \sqrt{2\rho}\sin\frac{\varphi}{2}$$

则可求出 $\dfrac{\partial v}{\partial \rho} = \dfrac{1}{\sqrt{2\rho}}\sin\dfrac{\varphi}{2}$，$\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} = \sqrt{\dfrac{\rho}{2}}\cos\dfrac{\varphi}{2}$。因此有

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sqrt{2\rho}}\cos\frac{\varphi}{2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\rho\frac{\partial v}{\partial \rho} = -\sqrt{\frac{\rho}{2}}\sin\frac{\varphi}{2}$$

得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u &= \frac{\partial u}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\rho}}\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\rho - \sqrt{\frac{\rho}{2}}\sin\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi \\ &= \cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\sqrt{2\rho} - \sqrt{2\rho}\,\mathrm{d}\cos\frac{\varphi}{2} = \mathrm{d}\left(\sqrt{2\rho}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\end{aligned}$$

因此

$$u = \sqrt{2\rho}\cos\frac{\varphi}{2} + C = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + C$$

从而得到函数 f 为

$$f(z) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + \mathrm{i}\sqrt{2\rho}\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + \mathrm{i}\sqrt{y + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Ⓢ

---

*1.1.4 复变函数的多值性

重要定义 1.7. 多值函数

若函数 $w = f(z)$ 的定义域 E 中，对于某些 z，存在多个值 w 与之对应，则称 $w = f(z)$ 为**多值函数**。多值函数在每个宗量 z 处都有多个值，一般认为 $f(z)$ 表示 z 处的全部值的集合。

若定义在上面点集 E 上的单值函数 $w_n = f_n(z) \in f(z)$（$\forall z \in E$），则称 $f_n(z)$ 为 $f(z)$ 的一个**单值分支**。

例题 1.1.9. 设有函数 $w = \sqrt{z}$，其中 $|z| = \rho$，$\arg z = \varphi$。

由 $\sqrt{z} = \sqrt{\rho e^{\mathrm{i}\operatorname{Arg} z}} = \sqrt{\rho}e^{\mathrm{i}\operatorname{Arg} z/2} = \sqrt{\rho}e^{\mathrm{i}(\varphi+2k\pi)/2} = \sqrt{\rho}e^{\mathrm{i}(\varphi/2+k\pi)}$（$k \in \mathbb{Z}$），知 $\sqrt{z}$ 有两个值：

$$\begin{cases} k = 0: \quad w_1 = \sqrt{\rho}e^{\mathrm{i}\varphi/2}, \\ k = 1: \quad w_2 = \sqrt{\rho}e^{\mathrm{i}(\varphi/2+\pi)} = -\sqrt{\rho}e^{\mathrm{i}\varphi/2} \end{cases}$$

因此，$w = \sqrt{z}$ 有两个单值分支。

设 z 从某一点 z_0 出发（对应地 w 从分支 w_1 上的 $w_0 = \sqrt{|z_0|}e^{\mathrm{i}\arg z_0/2}$ 出发），沿着闭合曲线 C 回到 z_0。

---

2 积分变换

3 数理方程

4 特殊函数