

复变函数与数理方程知识与方法

T^TT

2024 年 10 月 3 日

目录

1 复变函数	2	1.2.2 Cauchy 积分公式	7
1.1 复数与复变函数	2	1.3 Taylor 级数和 Laurent 级数	8
1.1.1 复数的定义与运算	2	1.3.1 复数项级数	8
1.1.2 复变函数与解析函数	3	1.3.2 Taylor 级数	11
1.1.3 复变函数的导数	4	2 积分变换	13
*1.1.4 复变函数的多值性	6	3 数理方程	14
1.2 复变函数积分	6	4 特殊函数	15
1.2.1 Cauchy 积分定理	6		

1 复变函数

1.1 复数与复变函数

1.1.1 复数的定义与运算

定义 1.1. 设 $z = x + iy$, 其中 x 和 y 是实数, i 是虚数单位, 满足 $i^2 = -1$, 则称 z 为复数, x 为实部, y 为虚部, 记作 $z = \Re z + i \Im z$ 。

定义 1.2. 改用极坐标 ρ 和 φ 表示复数 z , 即可得到复数 z 的三角式 $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ 或指数式 $z = \rho e^{i\varphi}$ 。其中 $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为复数 z 的模, $\varphi = \operatorname{Arg} z$ 为复数 z 的幅角。

约定: 以 $\arg z$ 表示复数 z 的幅角中满足 $0 \leq \operatorname{Arg} z < 2\pi$ 的一个特定值, 称为 z 的幅角主值。

定义 1.3. 复数 $z = x + iy = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}$ 的共轭定义为 $z^* = x - iy = \rho(\cos \varphi - i \sin \varphi) = \rho e^{-i\varphi}$ 。

复数的运算规则与实数类似, 即满足交换律、结合律、分配律等基本运算法则。乘、除、乘方、开方运算使用三角式或指数式更为方便:

重要定理 1.1.1. 复数三角式或指数式的乘、除、乘方、开方运算

设复数 $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ 和 $z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \rho_2 e^{i\varphi_2}$, 则有:

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

$$z_1^n = \rho_1^n (\cos n\varphi_1 + i \sin n\varphi_1) = \rho_1^n e^{in\varphi_1},$$

$$\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{\rho_1} \left(\cos \frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n} \right) = \sqrt[n]{\rho_1} e^{i \frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

注 1.1. 幅角运算

(1) 复数 z 的幅角 φ 不能唯一确定, 其可以加减 $2k\pi$, 即 $\varphi + 2k\pi$ 也是复数 z 的幅角, 其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。因此, 根式 $\sqrt[n]{z}$ 的幅角也就可以加减 $\frac{2\pi}{n}$ 的整数倍, 从而 $\sqrt[n]{z}$ 有 n 个值。

(2) 一般地, $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$, 但 $\operatorname{Arg} z^2 = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} z \neq 2 \operatorname{Arg} z$ 。

例题 1.1.2. 将实值坐标平面上的直线方程 $ax + by + c = 0$ 表示为复数形式。

解. 令直线上 $z = x + iy$, 则有 $x = \Re z = \frac{z + z^*}{2}$, $y = \Im z = \frac{z - z^*}{2i}$, 因此有

$$a \frac{z + z^*}{2} + b \frac{z - z^*}{2i} + c = 0 \Rightarrow (a - ib)z + (a + ib)z^* + 2ic = 0$$

即

$$B^* z + B z^* + C = 0$$

其中 $B \in \mathbb{C}$, $C \in \mathbb{R}$ 。

⑤

1.1.2 复变函数与解析函数

重要定义 1.4. 复变函数、解析函数

在复平面上存在一个点集 E , 若对于每一个 $z \in E$, 都按照一定规律有一个或多个复数 w 与之对应, 则称这种对应关系为从 E 到复数集 \mathbb{C} 的**复变函数**, 记作 $w = f(z)$ 。其中, z 称为 w 的**宗量**, E 称为 f 的**定义域**。

若函数的定义域 E 是一个**区域**:

- E 是全由**内点**组成的点集;
- E 具有**连通性**, 即对于任意两点 z_1 和 z_2 , 连接 z_1 和 z_2 的折线段也存在于 E 中;

并且在区域上每一点都**解析** (定义 1.6), 则称复变函数 f 为**解析函数**。

典型的复变函数有:

- **多项式**: $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$;
- **有理分式**: $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, 其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 为多项式函数;
- **根式**: $f(z) = \sqrt[n]{z-a}$;
- **部分初等函数**:
 - **指数函数**: $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$;
 - **三角函数**: $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$,
这里 $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ 仍成立, 但 $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 \geq 1$;
 - **双曲函数**: $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$;
 - **对数函数**: $\ln z = \ln(|z|e^{i \operatorname{Arg} z}) = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$;
 - **幂函数**: $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$ 。

例题 1.1.3. 在**反演**变换 $w = \frac{1}{z}$ ($z \neq 0$) 中, z 平面上的下面曲线各映射为 w 平面上的什么曲线?
(1) $|z| = 2$; (2) $\Re z = 1$ 。

解. 设 $z = x + iy$, $w = u + iv$, 则

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \Rightarrow u = \frac{x}{x^2 + y^2}, v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

(1) $x^2 + y^2 = 4$, 则 $u = \frac{x}{4}$, $v = -\frac{y}{4}$, 即 $u^2 + v^2 = \frac{1}{16}$, 为 w 平面上的圆心在原点、半径为 $\frac{1}{4}$ 的圆, 复平面上的表示为 $|w| = \frac{1}{2}$ 。

(2) $x = 1$, 则 $u = \frac{1}{1 + y^2}$, $v = -\frac{y}{1 + y^2}$, 即 $u^2 + v^2 = \frac{1 + y^2}{(1 + y^2)^2} = \frac{1}{1 + y^2} = u$, 为 w 平面上的圆心在 $(\frac{1}{2}, 0)$ 、半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆, 复平面上的表示为 $|w - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ 。⑤

1.1.3 复变函数的导数

重要定义 1.5. 复变函数的导数

设函数 $w = f(z)$ 是在区域 B 上定义的单值函数, 若在 B 内对于任意一点 z , 存在极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (1.1)$$

且其值与 $\Delta z \rightarrow 0$ 的方式无关, 则称函数 $w = f(z)$ 在 z 处**可导**, 称该极限为函数 $f(z)$ 在点 z 处的**导数**, 记作 $f'(z)$ 或 $\frac{dw}{dz}$ 。

形式上看, 复变函数和实变函数导数的定义相同, 因此在某些方面具有一致性。然而, 它们具有本质的区别, 因为实变函数只需要沿实轴逼近极限, 而复变函数则需要在全方向逼近极限。

下面给出函数可导的必要条件:

重要定理 1.1.4. Cauchy-Riemann 条件

记复变函数 $w = f(z)$ 中, $\Re w = u$, $\Im w = v$, $\Re z = x$, $\Im z = y$, $|z| = \rho$, $\arg z = \varphi$, 则函数可导的必要条件是各偏导数存在且满足 **Cauchy-Riemann 方程**:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho} \end{cases} \quad (1.2)$$

例题 1.1.5. 设有函数 $f(z) = \sqrt{\Im z^2}$, 求其在复平面原点的可导性。

解. 设 $z = x + iy$, 知 $u = \Re f(z) = \sqrt{|2xy|}$, $v = \Im f(z) = 0$ 。则在 $(0, 0)$ 点有

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(\Delta x, 0) - u(0, 0)}{\Delta x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(0, \Delta y) - u(0, 0)}{\Delta y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

因此满足 Cauchy-Riemann 方程。然而, 从定义看, 由于 $\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \frac{\sqrt{|2\Delta x \Delta y|}}{\Delta x + i\Delta y}$, 因此

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0^+ \\ \Delta x = \Delta y}} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{\sqrt{2}}{1+i}, \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0^+ \\ \Delta y = 0}} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = 0$$

这说明函数在原点不可导。其原因是: 函数 $u(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不可微。

⑤

重要定理 1.1.6. 单值复变函数可导的充要条件

单值函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 可导, 当且仅当 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 可微, 并且各偏导数满足定理 1.1.4 的 Cauchy-Riemann 条件。

重要定义 1.6. 解析

若函数 $f(z)$ 在点 z_0 及其邻域上处处可导, 则称 $f(z)$ 在点 z_0 处**解析**。

若函数 $f(z)$ 在区域 B 上的每一点都解析, 则称 $f(z)$ 在区域 B 上**解析**, 此时称 $f(z)$ 为**解析函数**。

注 1.2. 解析函数实部与虚部的关系

解析函数的实部和虚部不是独立的, 知道了其中之一, 例如实部 u , 根据 Cauchy-Riemann 条件就可以唯一地 (相差一个常数) 确定虚部 v , 这是因为

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

从而有

$$v = \int dv = -\int \frac{\partial u}{\partial y} dx + \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + C$$

定理 1.1.7. 若函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 B 上解析, 则

(1) $u = \Re f(z)$, $v = \Im f(z)$ 均为 B 上的**调和函数**:

- u, v 在区域 B 上均有二阶连续偏导数;
- u, v 均满足**拉普拉斯方程**, 即 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$;

(2) $u(x, y) = C_1$, $v(x, y) = C_2$ (C_1, C_2 为任意实数) 是 B 上的两组**正交曲线簇**。

例题 1.1.8. 已知解析函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 的虚部 $v = \sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}$, 求其实部 u 和函数 f 。

解. 改用极坐标 $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, 则有

$$v = \sqrt{-\rho \cos \varphi + \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi}} = \sqrt{-\rho \cos \varphi + \rho} = \sqrt{2\rho} \sin \frac{\varphi}{2}$$

则可求出 $\frac{\partial v}{\partial \rho} = \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \sin \frac{\varphi}{2}$, $\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \sqrt{\frac{\rho}{2}} \cos \frac{\varphi}{2}$ 。因此有

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\sqrt{\frac{\rho}{2}} \sin \frac{\varphi}{2}$$

得到

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \cos \frac{\varphi}{2} d\rho - \sqrt{\frac{\rho}{2}} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi \\ &= \cos \frac{\varphi}{2} d\sqrt{2\rho} - \sqrt{2\rho} d\cos \frac{\varphi}{2} = d\left(\sqrt{2\rho} \cos \frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

因此

$$u = \sqrt{2\rho} \cos \frac{\varphi}{2} + C = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + C$$

从而得到函数 f 为

$$f(z) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + i\sqrt{2\rho} \sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + i\sqrt{y + \sqrt{x^2 + y^2}} \quad \textcircled{S}$$

*1.1.4 复变函数的多值性

重要定义 1.7. 多值函数

若函数 $w = f(z)$ 的定义域 E 中, 对于某些 z , 存在多个值 w 与之对应, 则称 $w = f(z)$ 为**多值函数**。多值函数在每个宗量 z 处都有多个值, 一般认为 $f(z)$ 表示 z 处的全部值的集合。

若定义在上面点集 E 上的单值函数 $w_n = f_n(z) \in f(z) (\forall z \in E)$, 则称 $f_n(z)$ 为 $f(z)$ 的一个**单值分支**。

例题 1.1.9. 设有函数 $w = \sqrt{z}$, 其中 $|z| = \rho, \arg z = \varphi$ 。

由 $\sqrt{z} = \sqrt{\rho e^{i \operatorname{Arg} z}} = \sqrt{\rho} e^{i \operatorname{Arg} z / 2} = \sqrt{\rho} e^{i(\varphi + 2k\pi) / 2} = \sqrt{\rho} e^{i(\varphi / 2 + k\pi)} (k \in \mathbb{Z})$, 知 \sqrt{z} 有两个值:

$$\begin{cases} k=0: & w_1 = \sqrt{\rho} e^{i\varphi/2}, \\ k=1: & w_2 = \sqrt{\rho} e^{i(\varphi/2+\pi)} = -\sqrt{\rho} e^{i\varphi/2} \end{cases}$$

因此, $w = \sqrt{z}$ 有两个单值分支。

设 z 从某一点 z_0 出发 (对应地 w 从分支 w_1 上的 $w_0 = \sqrt{|z_0|} e^{i \arg z_0 / 2}$ 出发), 沿着闭合曲线 C 回到 z_0 。

1.2 复变函数积分

1.2.1 Cauchy 积分定理

重要定理 1.2.1. 单连通区域 Cauchy 定理

设函数 $f(z)$ 在闭单连通区域 \bar{B} 上解析, 则沿 \bar{B} 上任意分段光滑闭合曲线 ℓ , 有

$$\oint_{\ell} f(z) dz = 0 \quad (1.3)$$

定理 1.2.2. 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 B 上解析, 且在 \bar{B} 上连续, 则沿 \bar{B} 上任意分段光滑闭合曲线 ℓ , 有

$$\oint_{\ell} f(z) dz = 0 \quad (1.4)$$

例题 1.2.3. 计算积分 $I = \oint_{\ell} (z - \alpha)^n dz$ (α 为常数, n 为整数)。

解. (1) 若回路 ℓ 不包围点 α , 则被积函数在 ℓ 所围区域上解析, 故积分 $I = 0$ 。

(2) 若回路 ℓ 包围点 α , 则当 $n \geq 0$ 时, 被积函数在 ℓ 所围区域上解析, 故积分 $I = 0$;

当 $n \leq -1$ 时, 被积函数在 ℓ 所围区域上有一个奇点 α 。由定义, 存在以 α 为中心、 R 为半径的圆周 γ 在 ℓ 所围区域内, 因此在圆周 γ 上有 $z - \alpha = R e^{i\varphi}$, 以及

$$I = \oint_{\ell} (z - \alpha)^n dz = \oint_{\gamma} R^n e^{in\varphi} d(\alpha + R e^{i\varphi}) = i R^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases} \quad \textcircled{S}$$

1.2.2 Cauchy 积分公式

重要定理 1.2.4. 单连通区域 Cauchy 积分公式

设函数 $f(z)$ 在闭单连通区域 \bar{B} 上解析, ℓ 为 \bar{B} 的边界线, 若点 α 在 ℓ 内部, 则有

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz \quad (1.5)$$

证明. 由例 1.2.3 可知, $\oint_{\ell} \frac{dz}{z - \alpha} = 2\pi i$, 因此有

$$f(\alpha) = f(\alpha) \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} \frac{dz}{z - \alpha} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} \frac{f(\alpha)}{z - \alpha} dz$$

于是只需证明 $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} dz = 0$.

由于 α 是区域 B 上一点, 因此存在以 α 为圆心、任意小 ε 为半径的小圆 $C_{\varepsilon} \subset B$. 由 Cauchy 定理, 有

$$\left| \oint_{\ell} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} dz \right| = \left| \oint_{C_{\varepsilon}} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} dz \right|$$

我们有估计

$$\left| \oint_{C_{\varepsilon}} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} dz \right| \leq \frac{\max_{z \in C_{\varepsilon}} |f(z) - f(\alpha)|}{\varepsilon} \cdot 2\pi\varepsilon = 2\pi \max_{z \in C_{\varepsilon}} |f(z) - f(\alpha)|$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 即 $C_{\varepsilon} \rightarrow \{\alpha\}$, 由于 $f(z)$ 连续, 即 $f(z) \rightarrow f(\alpha)$, $\max_{z \in C_{\varepsilon}} |f(z) - f(\alpha)| \rightarrow 0$, 因此有

$$\left| \oint_{\ell} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} dz \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \oint_{C_{\varepsilon}} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} dz \right| = 0 \Rightarrow \oint_{\ell} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} dz = 0$$

故定理得证. □

通常将 Cauchy 积分公式写为

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

若 $f(z)$ 在 ℓ 所围区域上存在奇点, 则需考虑挖去奇点后的复连通区域. 在复连通区域上, $f(z)$ 解析, 显然 Cauchy 积分公式仍然成立, 只要将 ℓ 理解为所有边界线并都取正向即可.

例题 1.2.5. 考虑围线 $C_R: |z| = R$, 讨论不同 R 下的积分

$$I = \oint_{C_R} \frac{1}{z^3(z+1)(z-1)} dz$$

解. 注意到被积函数在 $z = 0$, $z = -1$, $z = 1$ 处都有奇点.

(1) 当 $0 < R < 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} I_R &= \oint_{C_R} \frac{1}{(z+1)(z-1)} dz = \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{(z+1)(z-1)} \right) \Big|_{z=0} = \frac{\pi i}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) \Big|_{z=0} \\ &= \frac{\pi i}{2} \left(\frac{2}{(z-1)^3} - \frac{2}{(z+1)^3} \right) \Big|_{z=0} = -2\pi i \end{aligned}$$

(2) 当 $R > 1$ 时, 在 C_R 内作三个小圆 $C_{R-1}: |z+1| = R-1$, $C_{R_0}: |z| = R_0$, $C_{R_1}: |z-1| = R_1$, 其中

$R_{-1} + 1 < R$, $R_1 + 1 < R$, $R_0 + R_1 < 1$, $R_0 + R_{-1} < 1$, 则有

$$\begin{aligned} I_R &= \left(\oint_{C_{R_{-1}}} + \oint_{C_{R_0}} + \oint_{C_{R_1}} \right) \frac{1}{(z+1)(z-1)z^3} dz \\ &= \oint_{C_{R_{-1}}} \frac{z^3(z-1)}{z+1} dz + \oint_{C_{R_0}} \frac{(z+1)(z-1)}{z^3} dz + \oint_{C_{R_1}} \frac{z^3(z+1)}{z-1} dz \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{(-1)^3(-1-1)} - 1 + \frac{1}{1(1+1)} \right) = 0 \end{aligned}$$

(3) 当 $R = 0$ 时, 积分不存在。

⑤

例题 1.2.6. 代数学基本定理 证明在 z 平面上的 n 次多项式 $p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ ($a_n \neq 0$) 至少有一个零点。

证明. 用反证法。若 $p_n(z)$ 无零点, 则有 $\frac{1}{p_n(z)}$ 在整个复平面上解析。由于

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} p_n(z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right) = \infty$$

因此

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{p_n(z)} = 0$$

由 Liouville 定理, $\frac{1}{p_n(z)}$ 为常数, 即 $p_n(z)$ 为常数, 与 $a_n \neq 0$ 矛盾。因此, $p_n(z)$ 至少有一个零点。 \square

1.3 Taylor 级数和 Laurent 级数

1.3.1 复数项级数

重要定义 1.8. 复数项级数

设有复数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 + z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

其中 $z_n = a_n + ib_n$, a_n 和 b_n 为实数。若级数通项的实部 a_n 和虚部 b_n 的级数分别收敛, 则称级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ **收敛**, 并定义其和为

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

定理 1.3.1. Cauchy 收敛准则 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ 收敛, 当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得当

$n > N$ 时, 对任意 $p \in \mathbb{N}^*$, 有

$$\left| \sum_{n=1}^{n+p} z_n \right| < \varepsilon$$

定义 1.9. 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ 收敛, 且级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ 也收敛, 则称级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ **绝对收敛**。

绝对收敛的级数必然收敛, 且求和的先后次序可以任意改变。

定理 1.3.2. 设有两个级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$, 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ 分别绝对收敛于 A 、 B , 则其逐项相乘的级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} z_n w_k$ 绝对收敛于 AB 。

重要定义 1.10. 函数项级数

设有函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z) = w_0(z) + w_1(z) + w_2(z) + \cdots + w_n(z) + \cdots$$

若对某个区域 B 或某根曲线 ℓ 上的每一点 z , 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 在区域 B 或沿曲线 ℓ **收敛**。

定理 1.3.3. Cauchy 收敛准则 函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 在区域 B 或沿曲线 ℓ 上收敛, 当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N(z)$ 使得当 $n > N(z)$ 时, 对任意 $p \in \mathbb{N}^*$, 有

$$\left| \sum_{n=1}^{n+p} w_n(z) \right| < \varepsilon$$

若选取的 $N(z)$ 与点 z 无关, 则称级数 $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 在区域 B 或沿曲线 ℓ 上 **一致收敛**。

定理 1.3.4. (1) 若在区域 B 或曲线 ℓ 上一致收敛的级数 $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 每一项都是 B 或 ℓ 上的连续函数, 则级数的和函数 $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 也是 B 或 ℓ 上的连续函数。

(2) 若在曲线 ℓ 上一致收敛的级数 $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 每一项都是 ℓ 上的连续函数, 则级数可以沿 ℓ 逐项积分, 即

$$\int_{\ell} \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\zeta) d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\ell} w_n(\zeta) d\zeta$$

(3) 若在闭区域 \bar{B} 上一致收敛的级数 $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 每一项都是 \bar{B} 上的解析函数, 则级数的和函数 $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 也是 \bar{B} 上的解析函数, 且级数可以逐项求导, 即

$$\frac{d^n}{dz^n} \sum_{n=0}^{\infty} w_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{dz^n} w_n(z)$$

其中各阶导数 $\frac{d^n}{dz^n} w_n(z)$ 也在 \bar{B} 上一致收敛。

定义 1.11. 若函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 在区域 B 或沿曲线 ℓ 上所有点 z 处都满足通项 $|w_n(z)| \leq M_n$, 而正常数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 在区域 B 或沿曲线 ℓ 上**绝对且一致收敛**。

重要定义 1.12. 幂级数

设有函数项级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_k(z-z_0)^k + \cdots$$

其中 a_k 为常数, z_0 为常数, 这样的级数称为以 z_0 为中心的**幂级数**。

定理 1.3.5. 幂级数的绝对收敛条件 对幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, 若存在正数 $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$, 则 $|z-z_0| < R$ 时 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ 绝对收敛, 而 $|z-z_0| > R$ 时级数发散。

注 1.3. 收敛半径

幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ 的**收敛半径** R 可定义为

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \quad \text{或} \quad R = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

圆 $|z-z_0| = R$ 称为幂级数的**收敛圆**。

幂级数在收敛圆的内部绝对且一致收敛, 进而在收敛圆内单值解析, 于是可以逐项积分、逐项微分, 且逐项积分、微分不改变收敛半径。

例题 1.3.6. 讨论幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} z^k \cos ik$ 的收敛半径。

解. 幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} z^k \cos ik$ 的系数为 $a_k = \cos ik = \frac{e^k + e^{-k}}{2}$, 因此收敛半径为

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{2}}{\sqrt[k]{e^k + e^{-k}}}$$

注意到 $k \rightarrow \infty$ 时, $e < \sqrt[k]{e^k + e^{-k}} < \sqrt[k]{2e^k} = \sqrt[k]{2}e \rightarrow e$, 因此收敛半径为 $R = \frac{1}{e}$ 。

⑤

1.3.2 Taylor 级数

重要定理 1.3.7. 解析函数的 Taylor 展开

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 为圆心的圆盘 $C_R: |z - z_0| < R$ 上解析, 那么在圆盘 C_R 内任意点 z , 函数 $f(z)$ 可展开为幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (1.6)$$

C_{R_0} 为以 z_0 为圆心、包含点 z 的圆周。

证明. 根据 Cauchy 积分公式, 有 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, 可先将 $\frac{1}{\zeta - z}$ 展开为幂级数, 即

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

这里由于 ζ 在以 z_0 为圆心、包含点 z 的圆周 C_{R_0} 上, 容易知道满足 $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$ 。代入 Cauchy 积分公式, 得到

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \end{aligned}$$

从而可证。 □

例题 1.3.8. 考虑函数 $f(z) = \ln z$ 在点 $z_0 = 1$ 附近的 Taylor 展开。

解. 多值函数 $\ln z$ 的支点为 $z = 0, \infty$, 因此在 $z_0 = 1$ 附近的 Taylor 展开的圆盘应该避开这两个支点。取 $R = 1$, 则在圆盘 C_1 内有

$f(z) = \ln z$	$f(1) = \ln 1 = 2\pi ni$
$f^{(1)}(z) = \frac{1}{z}$	$f^{(1)}(1) = 1$
$f^{(2)}(z) = -\frac{1}{z^2}$	$f^{(2)}(1) = -1$
\vdots	\vdots
$f^{(k)}(z) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{z^k}$	$f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1} (k-1)!$

因此在圆盘 C_1 内有

$$\ln z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{n!} (z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$$

⑤



2 积分变换



3 数理方程



4 特殊函数

