复变函数与数理方程知识与方法

$T^T T$

2024 年 9 月 27 日

目录

1 复变函数

1.1 复数与复变函数

1.1.1 复数的定义与运算

定义 1.1. 设 $z = x + \mathrm{i}y$，其中 x 和 y 是实数，i 是虚数单位，满足 $\mathrm{i}^2 = -1$，则称 z 为**复数**，x 为**实部**，y 为**虚部**，记作 $z = \mathfrak{Re}\, z + \mathrm{i}\, \mathfrak{Im}\, z$。

定义 1.2. 改用极坐标 ρ 和 φ 表示复数 z，即可得到复数 z 的**三角式** $z = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ 或**指数式** $z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$。其中 $\rho = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ 为复数 z 的**模**，$\varphi = \operatorname{Arg} z$ 为复数 z 的**幅角**。

约定：以 $\arg z$ 表示复数 z 的幅角中满足 $0 \le \operatorname{Arg} z < 2\pi$ 的一个特定值，称为 z 的**幅角主值**。

定义 1.3. 复数 $z = x+\mathrm{i}y = \rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi) = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 的**共轭**定义为 $z^* = x-\mathrm{i}y = \rho(\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi) = \rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$。

复数的运算规则与实数类似，即满足交换律、结合律、分配律等基本运算法则。乘、除、乘方、开方运算使用三角式或指数式更为方便：

重要定理 1.1.1. 复数三角式或指数式的乘、除、乘方、开方运算

设复数 $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1) = \rho_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$ 和 $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) = \rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$，则有：

$$z_1z_2 = \rho_1\rho_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big) = \rho_1\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big) = \frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)},$$

$$z_1^n = \rho_1^n\big(\cos n\varphi_1 + \mathrm{i}\sin n\varphi_1\big) = \rho_1^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi_1},$$

$$\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{\rho_1}\left(\cos\frac{\varphi_1+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi_1+2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{\rho_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi_1+2k\pi}{n}}, \qquad k = 0,1,2,\cdots,n-1$$

注 1.1. 幅角运算

（1）复数 z 的幅角 φ 不能唯一确定，其可以加减 $2k\pi$，即 $\varphi + 2k\pi$ 也是复数 z 的幅角，其中 $k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$。因此，根式 $\sqrt[n]{z}$ 的幅角也就可以加减 $\dfrac{2\pi}{n}$ 的整数倍，从而 $\sqrt[n]{z}$ 有 n 个值。

（2）一般地，$\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$，但 $\operatorname{Arg} z^2 = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} z \ne 2\operatorname{Arg} z$。

例题 1.1.2. 将实值坐标平面上的直线方程 $ax + by + c = 0$ 表示为复数形式。

解. 令直线上 $z = x + \mathrm{i}y$，则有 $x = \mathfrak{Re}\, z = \dfrac{z+z^*}{2}$，$y = \mathfrak{Im}\, z = \dfrac{z-z^*}{2\mathrm{i}}$，因此有

$$a\frac{z+z^*}{2} + b\frac{z-z^*}{2\mathrm{i}} + c = 0 \quad \Rightarrow \quad (a-\mathrm{i}b)z + (a+\mathrm{i}b)z^* + 2\mathrm{i}c = 0$$

即

$$B^*z + Bz^* + C = 0$$

其中 $B \in \mathbb{C}$，$C \in \mathbb{R}$。 Ⓢ

1.1.2 复变函数与解析函数

重要定义 1.4. 复变函数、解析函数

在复平面上存在一个点集 E，若对于每一个 $z \in E$，都按照一定规律有一个或多个复数 w 与之对应，则称这种对应关系为从 E 到复数集 $\mathbb{C}$ 的**复变函数**，记作 $w = f(z)$。其中，z 称为 w 的**宗量**，E 称为 f 的**定义域**。

若函数的定义域 E 是一个**区域**：

- E 是全由**内点**组成的点集；
- E 具有**连通性**，即对于任意两点 z_1 和 z_2，连接 z_1 和 z_2 的折线段也存在于 E 中；

并且在区域上每一点都**解析**（定义 1.6），则称复变函数 f 为**解析函数**。

典型的复变函数有：

- **多项式**：$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$；
- **有理分式**：$f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$，其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 为多项式函数；
- **根式**：$f(z) = \sqrt[n]{z-a}$；
- 部分**初等函数**：
  - **指数函数**：$f(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$；
  - **三角函数**：$\sin z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$，$\cos z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$，
    这里 $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ 仍成立，但 $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 \geq 1$；
  - **双曲函数**：$\sinh z = \dfrac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}$，$\cosh z = \dfrac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}$；
  - **对数函数**：$\ln z = \ln\left(|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Arg} z}\right) = \ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z$；
  - **幂函数**：$z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln z}$。

例题 1.1.3. 在**反演**变换 $w = \dfrac{1}{z}$（$z \neq 0$）中，z 平面上的下面曲线各映射为 w 平面上的什么曲线？

（1）$|z| = 2$；（2）$\mathfrak{Re}\, z = 1$。

解. 设 $z = x + \mathrm{i}y$，$w = u + \mathrm{i}v$，则

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+\mathrm{i}y} = \frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{x}{x^2+y^2},\ v = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

（1）$x^2+y^2 = 4$，则 $u = \dfrac{x}{4}$，$v = -\dfrac{y}{4}$，即 $u^2+v^2 = \dfrac{1}{16}$，为 w 平面上的圆心在原点、半径为 $\dfrac{1}{4}$ 的圆，复平面上的表示为 $|w| = \dfrac{1}{2}$。

（2）$x = 1$，则 $u = \dfrac{1}{1+y^2}$，$v = -\dfrac{y}{1+y^2}$，即 $u^2+v^2 = \dfrac{1+y^2}{(1+y^2)^2} = \dfrac{1}{1+y^2} = u$，为 w 平面上的圆心在 $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$、半径为 $\dfrac{1}{2}$ 的圆，复平面上的表示为 $\left|w - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$。 Ⓢ

1.1.3 复变函数的导数

重要定义 1.5. 复变函数的导数

设函数 $w=f(z)$ 是在区域 B 上定义的单值函数，若在 B 内对于任意一点 z，存在极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \tag{1.1}$$

且其值与 $\Delta z\to 0$ 的方式无关，则称函数 $w=f(z)$ 在 z 处**可导**，称该极限为函数 $f(z)$ 在点 z 处的**导数**，记作 $f'(z)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$。

形式上看，复变函数和实变函数导数的定义相同，因此在某些方面具有一致性。然而，**它们具有本质的区别，因为实变函数只需要沿实轴逼近极限，而复变函数则需要在全方向逼近极限。**

下面给出函数可导的必要条件：

重要定理 1.1.4. Cauchy-Riemann 条件

记复变函数 $w=f(z)$ 中，$\mathfrak{Re}\,w=u$，$\mathfrak{Im}\,w=v$，$\mathfrak{Re}\,z=x$，$\mathfrak{Im}\,z=y$，$|z|=\rho$，$\arg z=\varphi$，则函数可导的必要条件是各偏导数存在且满足 Cauchy-Riemann 方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi},\\[2mm] \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}=-\dfrac{\partial v}{\partial \rho}\end{cases} \tag{1.2}$$

例题 1.1.5. 设有函数 $f(z)=\sqrt{|\mathfrak{Im}\,z^2|}$，求其在复平面原点的可导性。

解. 设 $z=x+\mathrm{i}y$，知 $u=\mathfrak{Re}\,f(z)=\sqrt{|2xy|}$，$v=\mathfrak{Im}\,f(z)=0$。则在 $(0,\ 0)$ 点有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,\ 0)-u(0,\ 0)}{\Delta x}=0=\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0,\ \Delta y)-u(0,\ 0)}{\Delta y}=0=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

因此满足 Cauchy-Riemann 方程。然而，从定义看，由于 $\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\dfrac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\dfrac{\sqrt{|2\Delta x\Delta y|}}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}$，因此

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0+\\ \Delta x=\Delta y}}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\frac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}},\qquad \lim_{\substack{\Delta x\to 0+\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=0$$

这说明函数在原点不可导。**其原因是：函数 $u(x,\ y)$ 在 $(0,\ 0)$ 点不可微。** Ⓢ

重要定理 1.1.6. 单值复变函数可导的充要条件

单值函数 $f(z)=u(x,\ y)+\mathrm{i}v(x,\ y)$ 可导，当且仅当 $u(x,\ y)$ 和 $v(x,\ y)$ 可微，并且各偏导数满足定理 1.1.4 的 Cauchy-Riemann 条件。

重要定义 1.6. 解析

若函数 $f(z)$ 在点 z_0 及其邻域上处处可导，则称 $f(z)$ 在点 z_0 处**解析**。
若函数 $f(z)$ 在区域 B 上的每一点都解析，则称 $f(z)$ 在区域 B 上**解析**，此时称 $f(z)$ 为**解析函数**。

注 1.2. 解析函数实部与虚部的关系

解析函数的实部和虚部不是独立的，知道了其中之一，例如实部 u，根据 Cauchy-Riemann 条件就可以唯一地（相差一个常数）确定虚部 v，这是因为

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}y = -\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y$$

从而有

$$v = \int \mathrm{d}v = -\int \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y + C$$

定理 1.1.7. 若函数 $f(z) = u(x,\ y) + \mathrm{i}v(x,\ y)$ 在区域 B 上解析，则
（1）$u = \mathfrak{Re}\, f(z)$，$v = \mathfrak{Im}\, f(z)$ 均为 B 上的**调和函数**：

- u，v 在区域 B 上均有二阶连续偏导数；
- u，v 均满足**拉普拉斯方程**，即 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$，$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$；

（2）$u(x,\ y) = C_1$，$v(x,\ y) = C_2$（C_1，C_2 为任意实数）是 B 上的两组**正交曲线簇**。

例题 1.1.8. 已知解析函数 $f(z) = u(x,\ y) + \mathrm{i}v(x,\ y)$ 的虚部 $v = \sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}$，求其实部 u 和函数 f。

解. 改用极坐标 $x = \rho\cos\varphi$，$y = \rho\sin\varphi$，则有

$$v = \sqrt{-\rho\cos\varphi + \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}} = \sqrt{-\rho\cos\varphi + \rho} = \sqrt{2\rho}\sin\frac{\varphi}{2}$$

则可求出 $\dfrac{\partial v}{\partial \rho} = \dfrac{1}{\sqrt{2\rho}}\sin\dfrac{\varphi}{2}$，$\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} = \sqrt{\dfrac{\rho}{2}}\cos\dfrac{\varphi}{2}$。因此有

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sqrt{2\rho}}\cos\frac{\varphi}{2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\rho\frac{\partial v}{\partial \rho} = -\sqrt{\frac{\rho}{2}}\sin\frac{\varphi}{2}$$

得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u &= \frac{\partial u}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\rho}}\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\rho - \sqrt{\frac{\rho}{2}}\sin\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\sqrt{2\rho} - \sqrt{2\rho}\,\mathrm{d}\cos\frac{\varphi}{2} = \mathrm{d}\left(\sqrt{2\rho}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\end{aligned}$$

因此

$$u = \sqrt{2\rho}\cos\frac{\varphi}{2} + C = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + C$$

从而得到函数 f 为

$$f(z) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + \mathrm{i}\sqrt{2\rho}\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + \mathrm{i}\sqrt{y + \sqrt{x^2 + y^2}}$$ Ⓢ

---

*1.1.4 复变函数的多值性

重要定义 1.7. 多值函数

若函数 $w=f(z)$ 的定义域 E 中，对于某些 z，存在多个值 w 与之对应，则称 $w=f(z)$ 为**多值函数**。多值函数在每个宗量 z 处都有多个值，一般认为 $f(z)$ 表示 z 处的全部值的集合。

若定义在上面点集 E 上的单值函数 $w_n=f_n(z)\in f(z)$（$\forall z\in E$），则称 $f_n(z)$ 为 $f(z)$ 的一个**单值分支**。

例题 1.1.9. 设有函数 $w=\sqrt{z}$，其中 $|z|=\rho$，$\arg z=\varphi$。

由 $\sqrt{z}=\sqrt{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z}}=\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z/2}=\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+2k\pi)/2}=\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi/2+k\pi)}$（$k\in\mathbb{Z}$），知 $\sqrt{z}$ 有两个值：

$$\begin{cases} k=0: & w_1=\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2}, \\ k=1: & w_2=\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi/2+\pi)}=-\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2} \end{cases}$$

因此，$w=\sqrt{z}$ 有两个单值分支。

设 z 从某一点 z_0 出发（对应地 w 从分支 w_1 上的 $w_0=\sqrt{|z_0|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z_0/2}$ 出发），沿着闭合曲线 C 回到 z_0。

1.2 复变函数积分

1.2.1 Cauchy 积分定理

重要定理 1.2.1. 单连通区域 Cauchy 定理

设函数 $f(z)$ 在闭单连通区域 $\overline{B}$ 上解析，则沿 $\overline{B}$ 上任意分段光滑闭合曲线 ℓ，有

$$\oint_\ell f(z)\,\mathrm{d}z=0 \tag{1.3}$$

定理 1.2.2. 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 B 上解析，且在 $\overline{B}$ 上连续，则沿 $\overline{B}$ 上任意分段光滑闭合曲线 ℓ，有

$$\oint_\ell f(z)\,\mathrm{d}z=0 \tag{1.4}$$

例题 1.2.3. 计算积分 $I=\oint_\ell (z-\alpha)^n\,\mathrm{d}z$（$\alpha$ 为常数，n 为整数）。

解.（1）若回路 ℓ 不包围点 α，则被积函数在 ℓ 所围区域上解析，故积分 $I=0$。

（2）若回路 ℓ 包围点 α，则当 $n\geq 0$ 时，被积函数在 ℓ 所围区域上解析，故积分 $I=0$；

当 $n\leq -1$ 时，被积函数在 ℓ 所围区域上有一个奇点 α。由定义，存在以 α 为中心、R 为半径的圆周 γ 在 ℓ 所围区域内，因此在圆周 γ 上有 $z-\alpha=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，以及

$$I=\oint_\ell (z-\alpha)^n\,\mathrm{d}z=\oint_\gamma R^n\mathrm{e}^{in\varphi}\,\mathrm{d}(\alpha+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})=\mathrm{i}R^{n+1}\oint_0^{2\pi}\mathrm{e}^{in\varphi}\,\mathrm{d}\varphi=\begin{cases}0, & n\neq -1, \\ 2\pi\mathrm{i}, & n=-1\end{cases}$$

Ⓢ

1.2.2 Cauchy 积分公式

重要定理 1.2.4. 单连通区域 Cauchy 积分公式

设函数 $f(z)$ 在闭单连通区域 $\overline{B}$ 上解析，ℓ 为 $\overline{B}$ 的边界线，若点 α 在 ℓ 内部，则有

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{\ell}\frac{f(z)}{z-\alpha}\,\mathrm{d}z \tag{1.5}$$

证明. 由例 1.2.3 可知，$\displaystyle\oint_{\ell}\frac{\mathrm{d}z}{z-\alpha}=2\pi\mathrm{i}$，因此有

$$f(\alpha)=f(\alpha)\cdot\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\ell}\frac{\mathrm{d}z}{z-\alpha}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\ell}\frac{f(\alpha)}{z-\alpha}\,\mathrm{d}z$$

于是只需证明 $\displaystyle\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\ell}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\,\mathrm{d}z=0$。
由于 α 是区域 B 上一点，因此存在以 α 为圆心、任意小 ε 为半径的小圆 $C_\varepsilon\subset B$。由 Cauchy 定理，有

$$\left|\oint_{\ell}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\,\mathrm{d}z\right|=\left|\oint_{C_\varepsilon}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\,\mathrm{d}z\right|$$

我们有估计

$$\left|\oint_{C_\varepsilon}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\,\mathrm{d}z\right|\le\frac{\max\limits_{z\in C_\varepsilon}|f(z)-f(\alpha)|}{\varepsilon}2\pi\varepsilon=2\pi\max_{z\in C_\varepsilon}|f(z)-f(\alpha)|$$

令 $\varepsilon\to0$，即 $C_\varepsilon\to\{\alpha\}$，由于 $f(z)$ 连续，即 $f(z)\to f(\alpha)$，$\max\limits_{z\in C_\varepsilon}|f(z)-f(\alpha)|\to0$，因此有

$$\left|\oint_{\ell}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\,\mathrm{d}z\right|=\lim_{\varepsilon\to0}\left|\oint_{C_\varepsilon}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\,\mathrm{d}z\right|=0\quad\Rightarrow\quad\oint_{\ell}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\,\mathrm{d}z=0$$

故定理得证。 □

通常将 Cauchy 积分公式写为

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\ell}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$$

若 $f(z)$ 在 ℓ 所围区域上存在奇点，则需考虑挖去奇点后的复连通区域。在复连通区域上，$f(z)$ 解析，显然 Cauchy 积分公式仍然成立，只要将 ℓ 理解为所有边界线并都取正向即可。

例题 1.2.5. 考虑围线 $C_R\colon|z|=R$，讨论不同 R 下的积分

$$I=\oint_{C_R}\frac{1}{z^3(z+1)(z-1)}\,\mathrm{d}z$$

解. 注意到被积函数在 $z=0$，$z=-1$，$z=1$ 处都有奇点。
（1）当 $0<R<1$ 时，有

$$\begin{aligned}I_R&=\oint_{C_R}\frac{\frac{1}{(z+1)(z-1)}}{z^3}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(\frac{1}{(z+1)(z-1)}\right)\bigg|_{z=0}=\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)\bigg|_{z=0}\\&=\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\left(\frac{2}{(z-1)^3}-\frac{2}{(z+1)^3}\right)\bigg|_{z=0}=-2\pi\mathrm{i}\end{aligned}$$

（2）当 $R>1$ 时，在 C_R 内作三个小圆 $C_{R_{-1}}\colon|z+1|=R_{-1}$，$C_{R_0}\colon|z|=R_0$，$C_{R_1}\colon|z-1|=R_1$，其中

$R_{-1}+1<R$，$R_1+1<R$，$R_0+R_1<1$，$R_0+R_{-1}<1$，则有

$$\begin{aligned} I_R &= \left(\oint_{C_{R_{-1}}} + \oint_{C_{R_0}} + \oint_{C_{R_1}}\right) \frac{1}{(z+1)(z-1)z^3}\,\mathrm{d}z \\ &= \oint_{C_{R_{-1}}} \frac{\frac{1}{z^3(z-1)}}{z+1}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_{R_0}} \frac{\frac{1}{(z+1)(z-1)}}{z^3}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_{R_1}} \frac{\frac{1}{z^3(z+1)}}{z-1}\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{(-1)^3(-1-1)} - 1 + \frac{1}{1(1+1)}\right) = 0 \end{aligned}$$

（3）当 $R=0$ 时，积分不存在。 Ⓢ

例题 1.2.6. 代数学基本定理 证明在 z 平面上的 n 次多项式 $p_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$（$a_n\neq 0$）至少有一个零点。

证明. 用反证法。若 $p_n(z)$ 无零点，则有 $\dfrac{1}{p_n(z)}$ 在整个复平面上解析。由于

$$\lim_{|z|\to\infty} p_n(z) = \lim_{|z|\to\infty} z^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right) = \infty$$

因此

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{p_n(z)} = 0$$

由 Liouville 定理，$\dfrac{1}{p_n(z)}$ 为常数，即 $p_n(z)$ 为常数，与 $a_n\neq 0$ 矛盾。因此，$p_n(z)$ 至少有一个零点。 □

1.3 Taylor 级数和 Laurent 级数

1.3.1 复数项级数

重要定义 1.8. 复数项级数

设有复数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 + z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

其中 $z_n = a_n + \mathrm{i}b_n$，$a_n$ 和 b_n 为实数。若级数通项的实部 a_n 和虚部 b_n 的级数分别收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ **收敛**，并定义其和为

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

定理 1.3.1. Cauchy 收敛准则 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 收敛，当且仅当对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当

$n > N$ 时，对任意 $p \in \mathbb{N}^*$，有

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} z_n\right| < \varepsilon$$

定义 1.9. 如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 收敛，且级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n|$ 也收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ **绝对收敛**。

绝对收敛的级数必然收敛，且求和的先后次序可以任意改变。

定理 1.3.2. 设有两个级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n$，若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n$ 分别绝对收敛于 A、B，则其逐项相乘的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_n w_k$ 绝对收敛于 AB。

重要定义 1.10. 函数项级数

设有函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z) = w_0(z) + w_1(z) + w_2(z) + \cdots + w_n(z) + \cdots$$

若对某个区域 B 或某根曲线 ℓ 上的每一点 z，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 在区域 B 或沿曲线 ℓ **收敛**。

定理 1.3.3. Cauchy 收敛准则 函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 在区域 B 或沿曲线 ℓ 上收敛，当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N(z)$ 使得当 $n > N(z)$ 时，对任意 $p \in \mathbb{N}^*$，有

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} w_n(z)\right| < \varepsilon$$

若选取的 $N(z)$ 与点 z 无关，则称级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 在区域 B 或沿曲线 ℓ 上**一致收敛**。

定理 1.3.4. （1）若在区域 B 或曲线 ℓ 上一致收敛的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 每一项都是 B 或 ℓ 上的连续函数，则级数的和函数 $w(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 也是 B 或 ℓ 上的连续函数。

（2）若在曲线 ℓ 上一致收敛的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 每一项都是 ℓ 上的连续函数，则级数可以沿 ℓ 逐项积分，即

$$\int_\ell \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\ell w_n(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

（3）若在闭区域 $\overline{B}$ 上一致收敛的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 每一项都是 $\overline{B}$ 上的解析函数，则级数的和函数 $w(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 也是 $\overline{B}$ 上的解析函数，且级数可以逐项求导，即

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \sum_{n=0}^{\infty} w_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} w_n(z)$$

其中各阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} w_n(z)$ 也在 $\overline{B}$ 上一致收敛。

定义 1.11. 若函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 在区域 B 或沿曲线 ℓ 上所有点 z 处都满足通项 $|w_n(z)| \leq M_n$，而正常数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 在区域 B 或沿曲线 ℓ 上**绝对且一致收敛**。

重要定义 1.12. 幂级数

设有函数项级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_k(z-z_0)^k + \cdots$$

其中 a_k 为常数，z_0 为常数，这样的级数称为以 z_0 为中心的**幂级数**。

定理 1.3.5. 幂级数的绝对收敛条件 对幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$，若存在正数 $R = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$，则 $|z-z_0| < R$ 时 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ 绝对收敛，而 $|z-z_0| > R$ 时级数发散。

注 1.3. 收敛半径

幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ 的**收敛半径** R 可定义为

$$R = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \qquad \text{或} \qquad R = \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

圆 $|z-z_0| = R$ 称为幂级数的**收敛圆**。

幂级数在收敛圆的内部绝对且一致收敛，进而在收敛圆内单值解析，于是可以逐项积分、逐项微分，且逐项积分、微分不改变收敛半径。

例题 1.3.6. 讨论幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} z^k \cos \mathrm{i}k$ 的收敛半径。

解. 幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} z^k \cos \mathrm{i}k$ 的系数为 $a_k = \cos \mathrm{i}k = \frac{\mathrm{e}^k + \mathrm{e}^{-k}}{2}$，因此收敛半径为

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{2}}{\sqrt[k]{\mathrm{e}^k + \mathrm{e}^{-k}}}$$

注意到 $k \to \infty$ 时，$\mathrm{e} < \sqrt[k]{\mathrm{e}^k + \mathrm{e}^{-k}} < \sqrt[k]{2\mathrm{e}^k} = \sqrt[k]{2}\mathrm{e} \to \mathrm{e}$，因此收敛半径为 $R = \frac{1}{\mathrm{e}}$。 Ⓢ

1.3.2 Taylor 级数

重要定理 1.3.7. 解析函数的 Taylor 展开

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 为圆心的圆盘 C_R: $|z-z_0|<R$ 上解析，那么在圆盘 C_R 内任意点 z，函数 $f(z)$ 可展开为幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

其中

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0) \tag{1.6}$$

C_{R_0} 为以 z_0 为圆心、包含点 z 的圆周。

证明. 根据 Cauchy 积分公式，有 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\oint_{C_{R_1}}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$，可先将 $\dfrac{1}{\zeta-z}$ 展开为幂级数，即

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

这里由于 ζ 在以 z_0 为圆心、包含点 z 的圆周 C_{R_0} 上，容易知道满足 $\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1$。代入 Cauchy 积分公式，得到

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_{R_1}}f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\end{aligned}$$

从而可证。 □

例题 1.3.8. 考虑函数 $f(z)=\ln z$ 在点 $z_0=1$ 附近的 Taylor 展开。

解. 多值函数 $\ln z$ 的支点为 $z=0$, ∞，因此在 $z_0=1$ 附近的 Taylor 展开的圆盘应该避开这两个支点。取 $R=1$，则在圆盘 C_1 内有

$$\begin{aligned}
f(z)&=\ln z & f(1)&=\ln 1=2\pi n\mathrm{i}\\
f^{(1)}(z)&=\frac{1}{z} & f^{(1)}(1)&=1\\
f^{(2)}(z)&=-\frac{1}{z^2} & f^{(2)}(1)&=-1\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(k)}(z)&=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{z^k} & f^{(k)}(1)&=(-1)^{k-1}(k-1)!
\end{aligned}$$

因此在圆盘 C_1 内有

$$\ln z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-1)^n}{n}$$

Ⓢ

2 积分变换

3 数理方程

4 特殊函数