复变函数与数理方程知识与方法

T^TT

2024 年 10 月 16 日

目录

1 复变函数

1.1 复数与复变函数

1.1.1 复数的定义与运算

定义 1.1. 设 $z = x + \mathrm{i}y$，其中 x 和 y 是实数，i 是虚数单位，满足 $\mathrm{i}^2 = -1$，则称 z 为**复数**，x 为**实部**，y 为**虚部**，记作 $z = \mathfrak{Re}\, z + \mathrm{i}\, \mathfrak{Im}\, z$。

定义 1.2. 改用极坐标 ρ 和 φ 表示复数 z，即可得到复数 z 的**三角式** $z = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ 或**指数式** $z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$。其中 $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为复数 z 的**模**，$\varphi = \mathrm{Arg}\, z$ 为复数 z 的**幅角**。

约定：以 $\arg z$ 表示复数 z 的幅角中满足 $0 \le \mathrm{Arg}\, z < 2\pi$ 的一个特定值，称为 z 的**幅角主值**。

定义 1.3. 复数 $z = x + \mathrm{i}y = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 的**共轭**定义为 $z^* = x - \mathrm{i}y = \rho(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi) = \rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$。

复数的运算规则与实数类似，即满足交换律、结合律、分配律等基本运算法则。乘、除、乘方、开方运算使用三角式或指数式更为方便：

重要定理 1.1.1. 复数三角式或指数式的乘、除、乘方、开方运算

设复数 $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1) = \rho_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$ 和 $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) = \rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$，则有：

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= \rho_1\rho_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big) = \rho_1\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)},\\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big) = \frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)},\\
z_1^n &= \rho_1^n\big(\cos n\varphi_1 + \mathrm{i}\sin n\varphi_1\big) = \rho_1^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi_1},\\
\sqrt[n]{z_1} &= \sqrt[n]{\rho_1}\left(\cos\frac{\varphi_1+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi_1+2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{\rho_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi_1+2k\pi}{n}}, \qquad k = 0,1,2,\cdots,n-1
\end{aligned}
$$

注 1.1. 幅角运算

（1）复数 z 的幅角 φ 不能唯一确定，其可以加减 $2k\pi$，即 $\varphi + 2k\pi$ 也是复数 z 的幅角，其中 $k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$。因此，根式 $\sqrt[n]{z}$ 的幅角也就可以加减 $\frac{2\pi}{n}$ 的整数倍，从而 $\sqrt[n]{z}$ 有 n 个值。

（2）一般地，$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$，但 $\mathrm{Arg}\, z^2 = \mathrm{Arg}\, z + \mathrm{Arg}\, z \neq 2\,\mathrm{Arg}\, z$。

例题 1.1.2. 将实值坐标平面上的直线方程 $ax + by + c = 0$ 表示为复数形式。

解. 令直线上 $z = x + \mathrm{i}y$，则有 $x = \mathfrak{Re}\, z = \frac{z+z^*}{2}$，$y = \mathfrak{Im}\, z = \frac{z-z^*}{2\mathrm{i}}$，因此有

$$a\frac{z+z^*}{2} + b\frac{z-z^*}{2\mathrm{i}} + c = 0 \quad \Rightarrow \quad (a-\mathrm{i}b)z + (a+\mathrm{i}b)z^* + 2\mathrm{i}c = 0$$

即

$$B^* z + B z^* + C = 0$$

其中 $B \in \mathbb{C}$，$C \in \mathbb{R}$。 Ⓢ

1.1.2 复变函数与解析函数

重要定义 1.4. 复变函数、解析函数

在复平面上存在一个点集 E，若对于每一个 $z \in E$，都按照一定规律有一个或多个复数 w 与之对应，则称这种对应关系为从 E 到复数集 $\mathbb{C}$ 的**复变函数**，记作 $w = f(z)$。其中，z 称为 w 的**宗量**，E 称为 f 的**定义域**。

若函数的定义域 E 是一个**区域**：

- E 是全由**内点**组成的点集；
- E 具有**连通性**，即对于任意两点 z_1 和 z_2，连接 z_1 和 z_2 的折线段也存在于 E 中；

并且在区域上每一点都**解析**（定义 1.6），则称复变函数 f 为**解析函数**。

典型的复变函数有：

- **多项式**：$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$；
- **有理分式**：$f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$，其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 为多项式函数；
- **根式**：$f(z) = \sqrt[n]{z - a}$；
- 部分**初等函数**：
  - **指数函数**：$f(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$；
  - **三角函数**：$\sin z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$，$\cos z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$，
    这里 $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ 仍成立，但 $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 \geq 1$；
  - **双曲函数**：$\sinh z = \dfrac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}$，$\cosh z = \dfrac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}$；
  - **对数函数**：$\ln z = \ln\left(|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z}\right) = \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z$；
  - **幂函数**：$z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln z}$。

例题 1.1.3. 在**反演**变换 $w = \dfrac{1}{z}$（$z \neq 0$）中，z 平面上的下面曲线各映射为 w 平面上的什么曲线？

（1）$|z| = 2$；（2）$\mathfrak{Re}\, z = 1$。

解. 设 $z = x + \mathrm{i}y$，$w = u + \mathrm{i}v$，则

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + \mathrm{i}y} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{x}{x^2 + y^2},\ v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

（1）$x^2 + y^2 = 4$，则 $u = \dfrac{x}{4}$，$v = -\dfrac{y}{4}$，即 $u^2 + v^2 = \dfrac{1}{16}$，为 w 平面上的圆心在原点、半径为 $\dfrac{1}{4}$ 的圆，复平面上的表示为 $|w| = \dfrac{1}{2}$。

（2）$x = 1$，则 $u = \dfrac{1}{1 + y^2}$，$v = -\dfrac{y}{1 + y^2}$，即 $u^2 + v^2 = \dfrac{1 + y^2}{(1 + y^2)^2} = \dfrac{1}{1 + y^2} = u$，为 w 平面上的圆心在 $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$、半径为 $\dfrac{1}{2}$ 的圆，复平面上的表示为 $\left|w - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$。 Ⓢ

1.1.3 复变函数的导数

重要定义 1.5. 复变函数的导数

设函数 $w=f(z)$ 是在区域 B 上定义的单值函数，若在 B 内对于任意一点 z，存在极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \tag{1.1}$$

且其值与 $\Delta z\to 0$ 的方式无关，则称函数 $w=f(z)$ 在 z 处**可导**，称该极限为函数 $f(z)$ 在点 z 处的**导数**，记作 $f'(z)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$。

形式上看，复变函数和实变函数导数的定义相同，因此在某些方面具有一致性。然而，**它们具有本质的区别，因为实变函数只需要沿实轴逼近极限，而复变函数则需要在全方向逼近极限。**

下面给出函数可导的必要条件：

重要定理 1.1.4. Cauchy-Riemann 条件

记复变函数 $w=f(z)$ 中，$\mathfrak{Re}\,w=u$，$\mathfrak{Im}\,w=v$，$\mathfrak{Re}\,z=x$，$\mathfrak{Im}\,z=y$，$|z|=\rho$，$\arg z=\varphi$，则函数可导的必要条件是各偏导数存在且满足 **Cauchy-Riemann 方程**：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi},\\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}=-\dfrac{\partial v}{\partial \rho}\end{cases} \tag{1.2}$$

例题 1.1.5. 设有函数 $f(z)=\sqrt{|\mathfrak{Im}\,z^2|}$，求其在复平面原点的可导性。

解. 设 $z=x+\mathrm{i}y$，知 $u=\mathfrak{Re}\,f(z)=\sqrt{|2xy|}$，$v=\mathfrak{Im}\,f(z)=0$。则在 $(0,\ 0)$ 点有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,\ 0)-u(0,\ 0)}{\Delta x}=0=\frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0,\ \Delta y)-u(0,\ 0)}{\Delta y}=0=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

因此满足 Cauchy-Riemann 方程。然而，从定义看，由于 $\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\dfrac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\dfrac{\sqrt{|2\Delta x\Delta y|}}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}$，因此

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0+\\ \Delta x=\Delta y}}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\frac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}},\qquad \lim_{\substack{\Delta x\to 0+\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=0$$

这说明函数在原点不可导。**其原因是：函数 $u(x,\ y)$ 在 $(0,\ 0)$ 点不可微。** Ⓢ

重要定理 1.1.6. 单值复变函数可导的充要条件

单值函数 $f(z)=u(x,\ y)+\mathrm{i}v(x,\ y)$ 可导，当且仅当 $u(x,\ y)$ 和 $v(x,\ y)$ 可微，并且各偏导数满足定理 1.1.4 的 Cauchy-Riemann 条件。

重要定义 1.6. 解析

若函数 $f(z)$ 在点 z_0 及其邻域上处处可导，则称 $f(z)$ 在点 z_0 处**解析**。
若函数 $f(z)$ 在区域 B 上的每一点都解析，则称 $f(z)$ 在区域 B 上**解析**，此时称 $f(z)$ 为**解析函数**。

注 1.2. 解析函数实部与虚部的关系

解析函数的实部和虚部不是独立的，知道了其中之一，例如实部 u，根据 Cauchy-Riemann 条件就可以唯一地（相差一个常数）确定虚部 v，这是因为

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}y = -\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y$$

从而有

$$v = \int \mathrm{d}v = -\int \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y + C$$

定理 1.1.7. 若函数 $f(z) = u(x,\ y) + \mathrm{i}v(x,\ y)$ 在区域 B 上解析，则
（1）$u = \mathfrak{Re}\, f(z)$，$v = \mathfrak{Im}\, f(z)$ 均为 B 上的**调和函数**：

- u，v 在区域 B 上均有二阶连续偏导数；
- u，v 均满足**拉普拉斯方程**，即 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$，$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$；

（2）$u(x,\ y) = C_1$，$v(x,\ y) = C_2$（C_1，C_2 为任意实数）是 B 上的两组**正交曲线簇**。

例题 1.1.8. 已知解析函数 $f(z) = u(x,\ y) + \mathrm{i}v(x,\ y)$ 的虚部 $v = \sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}$，求其实部 u 和函数 f。

解. 改用极坐标 $x = \rho\cos\varphi$，$y = \rho\sin\varphi$，则有

$$v = \sqrt{-\rho\cos\varphi + \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}} = \sqrt{-\rho\cos\varphi + \rho} = \sqrt{2\rho}\sin\frac{\varphi}{2}$$

则可求出 $\dfrac{\partial v}{\partial \rho} = \dfrac{1}{\sqrt{2\rho}}\sin\dfrac{\varphi}{2}$，$\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} = \sqrt{\dfrac{\rho}{2}}\cos\dfrac{\varphi}{2}$。因此有

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sqrt{2\rho}}\cos\frac{\varphi}{2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\rho\frac{\partial v}{\partial \rho} = -\sqrt{\frac{\rho}{2}}\sin\frac{\varphi}{2}$$

得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u &= \frac{\partial u}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\rho}}\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\rho - \sqrt{\frac{\rho}{2}}\sin\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\sqrt{2\rho} - \sqrt{2\rho}\,\mathrm{d}\cos\frac{\varphi}{2} = \mathrm{d}\left(\sqrt{2\rho}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\end{aligned}$$

因此

$$u = \sqrt{2\rho}\cos\frac{\varphi}{2} + C = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + C$$

从而得到函数 f 为

$$f(z) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + \mathrm{i}\sqrt{2\rho}\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + \mathrm{i}\sqrt{y + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Ⓢ

---

*1.1.4 复变函数的多值性

重要定义 1.7. 多值函数

若函数 $w=f(z)$ 的定义域 E 中，对于某些 z，存在多个值 w 与之对应，则称 $w=f(z)$ 为**多值函数**。多值函数在每个宗量 z 处都有多个值，一般认为 $f(z)$ 表示 z 处的全部值的集合。

若定义在上面点集 E 上的单值函数 $w_n=f_n(z)\in f(z)$（$\forall z\in E$），则称 $f_n(z)$ 为 $f(z)$ 的一个**单值分支**。

例题 1.1.9. 设有函数 $w=\sqrt{z}$，其中 $|z|=\rho$，$\arg z=\varphi$。

由 $\sqrt{z}=\sqrt{\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Arg}z}}=\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Arg}z/2}=\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+2k\pi)/2}=\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi/2+k\pi)}$（$k\in\mathbb{Z}$），知 $\sqrt{z}$ 有两个值：

$$\begin{cases} k=0: & w_1=\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2}, \\ k=1: & w_2=\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi/2+\pi)}=-\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2} \end{cases}$$

因此，$w=\sqrt{z}$ 有两个单值分支。

设 z 从某一点 z_0 出发（对应地 w 从分支 w_1 上的 $w_0=\sqrt{|z_0|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z_0/2}$ 出发），沿着闭合曲线 C 回到 z_0。

1.2 复变函数积分

1.2.1 Cauchy 积分定理

重要定理 1.2.1. 单连通区域 Cauchy 定理

设函数 $f(z)$ 在闭单连通区域 $\overline{B}$ 上解析，则沿 $\overline{B}$ 上任意分段光滑闭合曲线 ℓ，有

$$\oint_{\ell} f(z)\,\mathrm{d}z=0 \tag{1.3}$$

定理 1.2.2. 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 B 上解析，且在 $\overline{B}$ 上连续，则沿 $\overline{B}$ 上任意分段光滑闭合曲线 ℓ，有

$$\oint_{\ell} f(z)\,\mathrm{d}z=0 \tag{1.4}$$

例题 1.2.3. 计算积分 $I=\oint_{\ell}(z-\alpha)^n\,\mathrm{d}z$（$\alpha$ 为常数，n 为整数）。

解.（1）若回路 ℓ 不包围点 α，则被积函数在 ℓ 所围区域上解析，故积分 $I=0$。

（2）若回路 ℓ 包围点 α，则当 $n\geq 0$ 时，被积函数在 ℓ 所围区域上解析，故积分 $I=0$；

当 $n\leq -1$ 时，被积函数在 ℓ 所围区域上有一个奇点 α。由定义，存在以 α 为中心、R 为半径的圆周 γ 在 ℓ 所围区域内，因此在圆周 γ 上有 $z-\alpha=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，以及

$$I=\oint_{\ell}(z-\alpha)^n\,\mathrm{d}z=\oint_{\gamma}R^n\mathrm{e}^{in\varphi}\,\mathrm{d}(\alpha+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})=\mathrm{i}R^{n+1}\oint_0^{2\pi}\mathrm{e}^{in\varphi}\,\mathrm{d}\varphi=\begin{cases}0, & n\neq -1,\\ 2\pi\mathrm{i}, & n=-1\end{cases}$$

Ⓢ

1.2.2 Cauchy 积分公式

重要定理 1.2.4. 单连通区域 Cauchy 积分公式

设函数 $f(z)$ 在闭单连通区域 $\overline{B}$ 上解析，ℓ 为 $\overline{B}$ 的边界线，若点 α 在 ℓ 内部，则有

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\ell}\frac{f(z)}{z-\alpha}\,\mathrm{d}z \tag{1.5}$$

证明. 由例 1.2.3 可知，$\oint_{\ell}\frac{\mathrm{d}z}{z-\alpha}=2\pi\mathrm{i}$，因此有

$$f(\alpha)=f(\alpha)\cdot\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\ell}\frac{\mathrm{d}z}{z-\alpha}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\ell}\frac{f(\alpha)}{z-\alpha}\,\mathrm{d}z$$

于是只需证明 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\ell}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\,\mathrm{d}z=0$。
由于 α 是区域 B 上一点，因此存在以 α 为圆心、任意小 ε 为半径的小圆 $C_\varepsilon\subset B$。由 Cauchy 定理，有

$$\left|\oint_{\ell}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\,\mathrm{d}z\right|=\left|\oint_{C_\varepsilon}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\,\mathrm{d}z\right|$$

我们有估计

$$\left|\oint_{C_\varepsilon}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\,\mathrm{d}z\right|\le\frac{\max\limits_{z\in C_\varepsilon}|f(z)-f(\alpha)|}{\varepsilon}2\pi\varepsilon=2\pi\max_{z\in C_\varepsilon}|f(z)-f(\alpha)|$$

令 $\varepsilon\to0$，即 $C_\varepsilon\to\{\alpha\}$，由于 $f(z)$ 连续，即 $f(z)\to f(\alpha)$，$\max\limits_{z\in C_\varepsilon}|f(z)-f(\alpha)|\to0$，因此有

$$\left|\oint_{\ell}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\,\mathrm{d}z\right|=\lim_{\varepsilon\to0}\left|\oint_{C_\varepsilon}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\,\mathrm{d}z\right|=0\quad\Rightarrow\quad\oint_{\ell}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\,\mathrm{d}z=0$$

故定理得证。 □

通常将 Cauchy 积分公式写为

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\ell}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$$

若 $f(z)$ 在 ℓ 所围区域上存在奇点，则需考虑挖去奇点后的复连通区域。在复连通区域上，$f(z)$ 解析，显然 Cauchy 积分公式仍然成立，只要将 ℓ 理解为所有边界线并都取正向即可。

例题 1.2.5. 考虑围线 $C_R\colon|z|=R$，讨论不同 R 下的积分

$$I=\oint_{C_R}\frac{1}{z^3(z+1)(z-1)}\,\mathrm{d}z$$

解. 注意到被积函数在 $z=0$，$z=-1$，$z=1$ 处都有奇点。
（1）当 $0<R<1$ 时，有

$$I_R=\oint_{C_R}\frac{\frac{1}{(z+1)(z-1)}}{z^3}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(\frac{1}{(z+1)(z-1)}\right)\bigg|_{z=0}=\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)\bigg|_{z=0}$$
$$=\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\left(\frac{2}{(z-1)^3}-\frac{2}{(z+1)^3}\right)\bigg|_{z=0}=-2\pi\mathrm{i}$$

（2）当 $R>1$ 时，在 C_R 内作三个小圆 $C_{R_{-1}}\colon|z+1|=R_{-1}$，$C_{R_0}\colon|z|=R_0$，$C_{R_1}\colon|z-1|=R_1$，其中

$R_{-1}+1<R$，$R_1+1<R$，$R_0+R_1<1$，$R_0+R_{-1}<1$，则有

$$\begin{aligned} I_R &= \left(\oint_{C_{R_{-1}}}+\oint_{C_{R_0}}+\oint_{C_{R_1}}\right)\frac{1}{(z+1)(z-1)z^3}\,\mathrm{d}z \\ &= \oint_{C_{R_{-1}}}\frac{\frac{1}{z^3(z-1)}}{z+1}\,\mathrm{d}z+\oint_{C_{R_0}}\frac{\frac{1}{(z+1)(z-1)}}{z^3}\,\mathrm{d}z+\oint_{C_{R_1}}\frac{\frac{1}{z^3(z+1)}}{z-1}\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{(-1)^3(-1-1)}-1+\frac{1}{1(1+1)}\right)=0 \end{aligned}$$

（3）当 $R=0$ 时，积分不存在。 Ⓢ

例题 1.2.6. 代数学基本定理 证明在 z 平面上的 n 次多项式 $p_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$（$a_n\neq0$）至少有一个零点。

证明. 用反证法。若 $p_n(z)$ 无零点，则有 $\frac{1}{p_n(z)}$ 在整个复平面上解析。由于

$$\lim_{|z|\to\infty}p_n(z)=\lim_{|z|\to\infty}z^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_1}{z^{n-1}}+\frac{a_0}{z^n}\right)=\infty$$

因此

$$\lim_{|z|\to\infty}\frac{1}{p_n(z)}=0$$

由 Liouville 定理，$\frac{1}{p_n(z)}$ 为常数，即 $p_n(z)$ 为常数，与 $a_n\neq0$ 矛盾。因此，$p_n(z)$ 至少有一个零点。 □

1.3 Taylor 级数和 Laurent 级数

1.3.1 复数项级数

重要定义 1.8. 复数项级数

设有复数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}z_n=z_0+z_1+z_2+\cdots+z_n+\cdots$$

其中 $z_n=a_n+\mathrm{i}b_n$，a_n 和 b_n 为实数。若级数通项的实部 a_n 和虚部 b_n 的级数分别收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z_n$ **收敛**，并定义其和为

$$\sum_{n=0}^{\infty}z_n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n+\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}b_n$$

定理 1.3.1. Cauchy 收敛准则 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z_n$ 收敛，当且仅当对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当

$n > N$ 时，对任意 $p \in \mathbb{N}^*$，有

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} z_n\right| < \varepsilon$$

定义 1.9. 如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 收敛，且级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n|$ 也收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ **绝对收敛**。

绝对收敛的级数必然收敛，且求和的先后次序可以任意改变。

定理 1.3.2. 设有两个级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n$，若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n$ 分别绝对收敛于 A、B，则其逐项相乘的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_n w_k$ 绝对收敛于 AB。

重要定义 1.10. 函数项级数

设有函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z) = w_0(z) + w_1(z) + w_2(z) + \cdots + w_n(z) + \cdots$$

若对某个区域 B 或某根曲线 ℓ 上的每一点 z，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 在区域 B 或沿曲线 ℓ **收敛**。

定理 1.3.3. Cauchy 收敛准则 函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 在区域 B 或沿曲线 ℓ 上收敛，当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N(z)$ 使得当 $n > N(z)$ 时，对任意 $p \in \mathbb{N}^*$，有

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} w_n(z)\right| < \varepsilon$$

若选取的 $N(z)$ 与点 z 无关，则称级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 在区域 B 或沿曲线 ℓ 上**一致收敛**。

定理 1.3.4. （*1*）若在区域 B 或曲线 ℓ 上一致收敛的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 每一项都是 B 或 ℓ 上的连续函数，则级数的和函数 $w(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 也是 B 或 ℓ 上的连续函数。

（*2*）若在曲线 ℓ 上一致收敛的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 每一项都是 ℓ 上的连续函数，则级数可以沿 ℓ 逐项积分，即

$$\int_\ell \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\int_\ell w_n(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

（*3*）若在闭区域 $\overline{B}$ 上一致收敛的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 每一项都是 $\overline{B}$ 上的解析函数，则级数的和函数 $w(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 也是 $\overline{B}$ 上的解析函数，且级数可以逐项求导，即

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} w_n(z)$$

其中各阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} w_n(z)$ 也在 $\overline{B}$ 上一致收敛。

定义 1.11. 若函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 在区域 B 或沿曲线 ℓ 上所有点 z 处都满足通项 $|w_n(z)| \le M_n$，而正常数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ 在区域 B 或沿曲线 ℓ 上**绝对且一致收敛**。

重要定义 1.12. 幂级数

设有函数项级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_k(z-z_0)^k + \cdots$$

其中 a_k 为常数，z_0 为常数，这样的级数称为以 z_0 为中心的**幂级数**。

定理 1.3.5. 幂级数的绝对收敛条件 对幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$，若存在正数 $R = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$，则 $|z-z_0| < R$ 时 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ 绝对收敛，而 $|z-z_0| > R$ 时级数发散。

注 1.3. 收敛半径

幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ 的**收敛半径** R 可定义为

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \qquad \text{或} \qquad R = \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

圆 $|z-z_0| = R$ 称为幂级数的**收敛圆**。

幂级数在收敛圆的内部绝对且一致收敛，进而在收敛圆内单值解析，于是可以逐项积分、逐项微分，且逐项积分、微分不改变收敛半径。

例题 1.3.6. 讨论幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k \cos \mathrm{i}k$ 的收敛半径。

解. 幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k \cos \mathrm{i}k$ 的系数为 $a_k = \cos \mathrm{i}k = \dfrac{\mathrm{e}^k + \mathrm{e}^{-k}}{2}$，因此收敛半径为

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{2}}{\sqrt[k]{\mathrm{e}^k + \mathrm{e}^{-k}}}$$

注意到 $k \to \infty$ 时，$\mathrm{e} < \sqrt[k]{\mathrm{e}^k + \mathrm{e}^{-k}} < \sqrt[k]{2\mathrm{e}^k} = \sqrt[k]{2}\mathrm{e} \to \mathrm{e}$，因此收敛半径为 $R = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$。 Ⓢ

1.3.2 Taylor 级数

重要定理 1.3.7. 解析函数的 Taylor 展开

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 为圆心的圆盘 C_R: $|z-z_0|<R$ 上解析，那么在圆盘 C_R 内任意点 z，函数 $f(z)$ 可展开为幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

其中

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\tag{1.6}$$

C_{R_0} 为以 z_0 为圆心、包含点 z 的圆周。

证明. 根据 Cauchy 积分公式，有 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_{R_1}}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$，可先将 $\dfrac{1}{\zeta-z}$ 展开为幂级数，即

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

这里由于 ζ 在以 z_0 为圆心、包含点 z 的圆周 C_{R_0} 上，容易知道满足 $\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1$。代入 Cauchy 积分公式，得到

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_{R_1}}f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)(z_0)}}{n!}(z-z_0)^n\end{aligned}$$

从而可证。 □

例题 1.3.8. 考虑函数 $f(z)=\ln z$ 在点 $z_0=1$ 附近的 Taylor 展开。

解. 多值函数 $\ln z$ 的支点为 $z=0,\ \infty$，因此在 $z_0=1$ 附近的 Taylor 展开的圆盘应该避开这两个支点。取 $R=1$，则在圆盘 C_1 内有

$$\begin{aligned}&f(z)=\ln z && f(1)=\ln 1=2\pi n i\\&f^{(1)}(z)=\frac{1}{z} && f^{(1)}(1)=1\\&f^{(2)}(z)=-\frac{1}{z^2} && f^{(2)}(1)=-1\\&\vdots && \vdots\\&f^{(k)}(z)=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{z^k} && f^{(k)}(1)=(-1)^{k-1}(k-1)!\end{aligned}$$

因此在圆盘 C_1 内有

$$\ln z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{k}(z-1)^k=2\pi n\mathrm{i}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{k}(z-1)^k$$ Ⓢ

其中，n 为整数，每个 n 对应 $\ln z$ 的一个单值分支。称 $n=0$ 的分支为 $\ln z$ 的主值。

注 1.4. 解析延拓

当 Taylor 展开的收敛半径 $R \neq +\infty$ 时，会出现级数在收敛圆外发散的情况。例如我们知道

$$\ln z = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{k}(z-1)^k \qquad (\ |z-1|<1\ )$$

即我们有两个函数

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{k}(z-1)^k \qquad (\ |z-1|<1\ )$$

$$f_2(z) = \ln z \qquad (\ z \neq 0\ )$$

其中 $f_1(z)$ 在较小区域内解析，而 $f_2(z)$ 在较大区域内解析，且两者在交集内相等。我们称 $f_1(z)$ 为 $f_2(z)$ 的**解析延拓**。

下面的定理保证了解析延拓的唯一性：

定理 1.3.9. 设 $f(z)$，$g(z)$ 在区域 B 上解析，如果存在 $\{z_n\} \subset B$，使得 $f(z_n) = g(z_n)$ （$n = 1, 2, \cdots$），且 $\{z_n\}$ 在 B 内聚敛于点 z_0，则在 B 上有 $f(z) = g(z)$。

1.3.3 Laurent 级数

当函数在所研究区域上存在奇点时，就不能再作 Taylor 级数展开，而需要考虑除去奇点的环域上的展开，即 **Laurent 级数**展开。

定义 1.13. 含有正、负幂次的幂级数称为**双边幂级数**，形如 $\cdots + a_{-2}(z-z_0)^{-2} + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$，记作 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$。

引入变量 $\zeta = \dfrac{1}{z-z_0}$，则一个双边幂级数可以写为 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{-k}\zeta^k$，即两个幂级数的和。设这两个幂级数的收敛半径分别为 R_1 和 $\dfrac{1}{R_2}$，则可知双边幂级数的正幂部分在 $|z-z_0| < R_1$ 内收敛，负幂部分在 $|z-z_0| > R_2$ 内收敛。

若 $R_1 > R_2$，则双边幂级数在环域 $R_2 < |z-z_0| < R_1$ 内**收敛**，且为**绝对且一致收敛**于一个**解析函数**。环域 $R_2 < |z-z_0| < R_1$ 称为双边幂级数的**收敛环**。

重要定理 1.3.10. 解析函数的 Laurent 展开

设 $f(z)$ 在环域 $R_2 < |z-z_0| < R_1$ 上单值解析，则对环域上的每一点 z，函数 $f(z)$ 可展开为双边幂级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\ell} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \tag{1.7}$$

ℓ 为环域内绕内圆一周的任意闭合曲线。

$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ 称为 **Laurent 级数**，$f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ 称为函数 $f(z)$ 的 **Laurent 展开**。

重要定义 1.14. 孤立奇点

若函数 $f(z)$ 在某点 z_0 不可导（甚至不连续、无定义），而在 z_0 的任意小邻域内除 z_0 外处处可导，则称 z_0 为函数 $f(z)$ 的**孤立奇点**。

定义 1.15. 在挖去孤立奇点 z_0 而形成的环域上的解析函数 $f(z)$ 可展开为 *Laurent* 级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$，其中正幂部分 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ 称为函数 $f(z)$ 的**解析部分**，负幂部分 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}$ 称为函数 $f(z)$ 的**主要部分**。

重要定义 1.16. 可去奇点、极点、本性奇点

设函数 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域内解析，其 Laurent 展开的负幂部分——

- 全为 0，则称 z_0 为函数 $f(z)$ 的**可去奇点**；
- 只有有限项，则称 z_0 为函数 $f(z)$ 的**极点**；
- 有无限项，则称 z_0 为函数 $f(z)$ 的**本性奇点**。

1.3.4 留数定理

重要定义 1.17. 留数

设函数 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域内解析，其 Laurent 展开为 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$，则称系数 $a_{-1} = \dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\ell} f(z)\,\mathrm{d}z$ 为函数 $f(z)$ 在 z_0 处的**留数**，记作 $\mathrm{Res}\, f(z_0)$。

重要定理 1.3.11. 留数定理

设函数 $f(z)$ 在闭曲线 ℓ 所围区域 B 上除有限个孤立奇点 z_1, z_2, $\cdots$, z_n 外解析，在闭区域 $\overline{B}$ 上除孤立奇点外连续，那么有

$$\oint_\ell f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res} f(z_k) \tag{1.8}$$

证明. 由于 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{B}$ 上除孤立奇点外连续，因此可以在 ℓ 上任意一点 z 处展开为 Laurent 级数，即

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (z - z_k)^m$$

在 Laurent 级数的收敛环中，作回路 ℓ_k 分别包围孤立奇点 z_k，则根据 Cauchy 定理有

$$\oint_\ell f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\oint_{\ell_k} f(z)\,\mathrm{d}z$$

将 Laurent 级数代入右边积分，有

$$\oint_{\ell_k} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\ell_k}\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (z-z_k)^m\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}a_{-1}^{(k)} = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res} f(z_k)$$ □

留数定理指出了了被积函数的回路积分等于该函数所围奇点留数之和，因此**围道积分问题可以转换为留数求解问题**。

A) 留数的计算方法 1

注 1.5. 无穷远点处的留数

若 ∞ 是 $f(z)$ 的孤立奇点，即存在 $R > 0$，使得 $f(z)$ 在 $R < |z - z_0| < +\infty$ 内解析，那么也可以在 ∞ 处对 $f(z)$ 做 Laurent 展开 $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$，其中 $a_k = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\ell \dfrac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta$。

定义 1.18. 系数 $a_{-1} = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\ell f(z)\,\mathrm{d}z$ **的相反数**称为函数 $f(z)$ 在无穷远点处的**留数**，记作 $\operatorname{Res} f(\infty)$，即

$$\operatorname{Res} f(\infty) = -a_{-1} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\ell f(z)\,\mathrm{d}z \tag{1.9}$$

按顺时针方向积分，部分是因为这个方向自然看作绕 ∞ 的正方向。

B) 留数定理的应用 留数定理一个重要应用就是计算某些**实变函数的定积分**。因此，需要将实变函数定积分和复变函数定积分联系起来。

情形 1.3.12. $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos x,\ \sin x)\,\mathrm{d}x$，即被积函数是**三角函数的有理式**，积分区间是 $[0,\ 2\pi]$。

做变量替换 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$，则 $\cos x = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$，$\sin x = \dfrac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}$，$\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$，积分轨迹变成了绕单位圆逆

时针一周，即

$$I=\oint_{|z|=1}R\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\ \frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

情形 1.3.13. $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$，积分区间是 $(-\infty,\ +\infty)$。复变函数 $f(z)$ 在实轴上没有奇点，在上半平面除有限个奇点外是解析的；当 z 在上半平面及实轴上逼近无穷远点时，$zf(z)$ 一致趋于 0。

注 1.6. 上下限均为无穷远点的反常积分

上面的反常积分（$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$）通常理解为 $\displaystyle\lim_{\substack{R_1\to+\infty\\R_2\to+\infty}}\int_{-R_1}^{R_2}f(x)\,\mathrm{d}x$。若极限存在的话，这一极限便称为 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值；而若 $R_1=R_2\to+\infty$ 的极限存在，这一极限便称为 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 的**主值**，记为 $\mathcal{P}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$。

本情形积分要计算的就是积分主值。

考虑半圆形回路 ℓ，

$$\oint_{\ell}f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{-R}^{R}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{C_R}f(z)\,\mathrm{d}z$$

其中 C_R 为以零点为圆点 R 为半径的半圆（上半平面），积分路径为逆时针方向。根据留数定理，可知

$$\int_{-R}^{R}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{C_R}f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{z_0\in\ell\text{内奇点}}\operatorname{Res}f(z_0)$$

其中 $\displaystyle\int_{C_R}f(z)\,\mathrm{d}z$ 只是半个圆周的积分，不能使用留数定理，考虑对其进行**估计**。当 $R\to\infty$ 时，

$$\left|\int_{C_R}f(z)\,\mathrm{d}z\right|\le\int_{C_R}|f(z)||\,\mathrm{d}z|=\int_{C_R}|zf(z)|\frac{|\,\mathrm{d}z|}{|z|}\le\max_{z\in C_R}|zf(z)|\int_{C_R}\frac{|\,\mathrm{d}z|}{|z|}=\max_{z\in C_R}|zf(z)|\cdot\pi R\to0$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{z_0\in\text{上半平面内奇点}}\operatorname{Res}f(z_0)$$

情形 1.3.14. $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\,\mathrm{d}x$，积分区间是 $(-\infty,\ +\infty)$。复变函数 $f(z)$ 在实轴上没有奇点，在上半平面除有限个奇点外是解析的；当 z 在上半平面及实轴上逼近无穷远点时，$f(z)$ 一致趋于 0。

引理 1.3.15. *设 m 为正数，C_R 为以原点为圆心、R 为半径的半圆（上半平面），积分路径为逆时针方向，又设当 z 在上半平面或实轴上趋于无穷时，$f(z)$ 一致趋于 0，则 $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}f(z)\mathrm{e}^{imz}\,\mathrm{d}z=0$。*

证明. 做变量替换 $z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，则 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$，有估计

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R}f(z)\mathrm{e}^{imz}\,\mathrm{d}z\right|&=\left|\int_0^{\pi}f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{e}^{\mathrm{i}mR\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\right|=\left|\int_0^{\pi}f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{e}^{\mathrm{i}mR(\cos\varphi+i\sin\varphi)}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\right|\\&\le\int_0^{\pi}\left|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}mR\cos\varphi}\cdot\mathrm{e}^{-mR\sin\varphi}\cdot\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right|\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

$$= \int_0^\pi |f(Re^{\mathrm{i}\varphi})| \mathrm{e}^{-mR\sin\varphi} R\,\mathrm{d}\varphi \le \max_{\varphi\in[0,\pi]} |f(Re^{\mathrm{i}\varphi})| \int_0^\pi R\mathrm{e}^{-mR\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

考察极限 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_0^{\pi/2} R\mathrm{e}^{-mR\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$，由 $0<\dfrac{2\varphi}{\pi}<\sin\varphi$，有

$$\int_0^{\pi/2} R\mathrm{e}^{-mR\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \le \int_0^{\pi/2} R\mathrm{e}^{-mR\cdot 2\varphi/\pi}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2m}\left(1-\mathrm{e}^{-mR}\right) \xrightarrow{R\to+\infty} \frac{\pi}{2m}$$

于是 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_0^{\pi} R\mathrm{e}^{-mR\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = 2\lim\limits_{R\to+\infty}\int_0^{\pi/2} R\mathrm{e}^{-mR\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$ 有界，因此 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\,\mathrm{d}z = 0$。 □

于是，根据引理，利用留数定理，有（$m>0$）

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{z_0\in\text{上半平面内奇点}} \operatorname{Res}\left(f(z_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz_0}\right)$$

针对形如 $\int_0^{+\infty} g(x)\cos mx\,\mathrm{d}x$ 或 $\int_0^{+\infty} h(x)\sin mx\,\mathrm{d}x$ 的积分，可以利用对称性进行奇、偶延拓，然后同上计算，有（$m>0$）

$$\int_0^{+\infty} g(x)\cos mx\,\mathrm{d}x = \pi\mathrm{i}\sum_{z_0\in\text{上半平面内奇点}} \operatorname{Res}\left(g(z_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz_0}\right)$$

$$\int_0^{+\infty} h(x)\sin mx\,\mathrm{d}x = \pi\sum_{z_0\in\text{上半平面内奇点}} \operatorname{Res}\left(h(z_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz_0}\right)$$

当 $m<0$ 时，改用下半平面的半圆路径，同上可有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\,\mathrm{d}x = -2\pi\mathrm{i}\sum_{z_0\in\text{下半平面内奇点}} \operatorname{Res}\left(f(z_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz_0}\right)$$

$$\int_0^{+\infty} g(x)\cos mx\,\mathrm{d}x = -\pi\mathrm{i}\sum_{z_0\in\text{下半平面内奇点}} \operatorname{Res}\left(g(z_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz_0}\right)$$

$$\int_0^{+\infty} h(x)\sin mx\,\mathrm{d}x = -\pi\sum_{z_0\in\text{下半平面内奇点}} \operatorname{Res}\left(h(z_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz_0}\right)$$

情形 1.3.16. $I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$，积分区间是 $(-\infty,\ +\infty)$。复变函数 $f(z)$ 在实轴上有**单极点** $z=\alpha$，在上半平面除有限个奇点外是解析的；当 z 在上半平面及实轴上逼近无穷远点时，$zf(z)$（或如情形 1.3.14 的 $\dfrac{f(z)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}}$）一致趋于 0。

2 积分变换

3 数理方程

4 特殊函数