

# Basic Engineering Circuit Analysis

## 电子电路启蒙教程

T<sup>T</sup>T

2024 年 9 月 24 日

### 目录

1 电路基本概念	2	3.2.3 Bode 图 . . . . .	27
1.1 电路与电源	2	3.3 双端口网络 . . . . .	28
1.2 集总约束原则	4	3.3.1 双端口网络的参数与变量 . . . . .	29
1.3 阻性电路	4	3.3.2 双端口网络的连接 . . . . .	31
1.3.1 Kirchhoff 定律	4	4 非线性器件	32
1.3.2 基本电路结构	5	4.1 pn 结与二极管 . . . . .	32
1.4 电路分析方法	6	4.1.1 p 型半导体与 n 型半导体 . . . . .	32
1.4.1 节点分析法	6	4.1.2 pn 结 . . . . .	33
1.4.2 环路分析法	7	4.1.3 pn 结二极管 . . . . .	34
1.5 线性电路的叠加与等效	9	4.1.4 特殊的二极管 . . . . .	34
1.5.1 线性叠加	9	4.2 双极结式晶体管 (BJT) . . . . .	35
1.5.2 线性等效	9	4.2.1 BJT 的结构与原理 . . . . .	35
2 电容、电感	11	4.2.2 BJT 的端口特性 . . . . .	36
2.1 电容器与电感器	11	4.2.3 BJT 直流分析 . . . . .	38
2.1.1 电容	11	4.2.4 BJT 交流分析 . . . . .	38
2.1.2 电感	13	4.3 金属—氧化物—半导体场效应晶体管 (MOSFET) . . . . .	39
2.2 磁耦合网络	15	4.3.1 MOSFET 的结构与原理 . . . . .	39
2.2.1 互感器	15	4.3.2 MOSFET 的端口特性 . . . . .	39
2.2.2 理想变压器	17	4.3.3 MOSFET 的交流增益 . . . . .	40
3 线性电路综合分析	18	4.3.4 MOSFET 的频率响应 . . . . .	41
3.1 瞬态电路分析	18	4.4 晶体管模块实例 . . . . .	43
3.1.1 一阶电路	18	4.4.1 电流镜 . . . . .	43
3.1.2 二阶电路	20	4.4.2 差分对 . . . . .	43
3.2 交流稳态电路分析	22	5 运算放大器与反馈设计	44
3.2.1 复激励函数与阻抗	23	5.1 运算放大器 . . . . .	44
3.2.2 频域电路分析	25	5.2 运算放大器上的反馈回路 . . . . .	45

5.2.1 反相闭环组态 . . . . .	46	6.2.1 负阻值与振荡器 . . . . .	54
5.2.2 同相闭环组态 . . . . .	47	<b>A 常见词汇中英文对照表</b>	<b>55</b>
<b>6 电路应用衔接</b>	<b>47</b>	<b>B Cadence Virtuoso 电路仿真基本用法</b>	<b>59</b>
6.1 CMOS 数字逻辑电路 . . . . .	47	B.1 启动 . . . . .	59
6.1.1 CMOS 反相器 . . . . .	47	B.1.1 连接 MobaXterm 服务器 . . . . .	59
6.1.2 CMOS 逻辑门电路 . . . . .	49	B.1.2 新建 Virtuoso 库 . . . . .	59
6.1.3 数字开关与动态逻辑电路 . . . . .	51	B.1.3 新建 Cell 图 . . . . .	59
6.1.4 反馈回路与存储电路 . . . . .	53	B.2 绘图 . . . . .	59
6.2 振荡电路 . . . . .	54	B.2.1 开关 . . . . .	59

# 1 Basic Concepts in Circuits

## 电路基本概念

### 1.1 电路与电源

为了使得研究更简单也更泛用，**电路**简单地定义为**电气元件**的互联。电路中研究的常见物理量如表 1.1 所示。

**表 1.1: 电子电路常见物理量**

物理量 Quantities	符号 Symbol	定义或含义 Definition	标准单位 Unit
电荷量 charge	$Q$ or $q$	正或负电荷的多少	coulomb(C)
电流 current	$I$ or $i$	$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$	ampere(A)
电压 voltage	$V$ or $v$	$v = \frac{dw}{dq}$	volt(V)
电功率 power	$P$ or $p$	$p = \frac{dw}{dq} \frac{dq}{dt} = vi$	watt(W)
电功 work	$W$ or $w$	$\Delta w = \int_{t_1}^{t_2} vi dt$	joule(J)

我们定义电流与电压的**关联参考方向**为电流从电压「+」侧流向电压「-」侧为正。这样，电功率就可统一用  $p(t) = v(t)i(t)$  计算，其中  $p > 0$  表示元件消耗电能， $p < 0$  表示元件提供电能。

#### 注 1.1. 以分贝 (dB) 作单位

分贝 (dB) 是无量纲单位，以分贝作单位是一种相对的、对数的表示。

功率  $p$  若以分贝作单位，有

$$p = 10 \lg \frac{p}{1 \text{ W}} \text{ dBW} = 10 \lg \frac{p}{1 \text{ mW}} \text{ dBmW}$$

电压  $v$  若以分贝作单位，则有

$$v = 20 \lg \frac{v}{1 \text{ V}} \text{ dBV} = 20 \lg \frac{v}{1 \text{ mV}} \text{ dBmV}$$

其中，单位 dBW、dBmW 往往又简称为 dB、dBm。

**例题 1.1.1.** 一个电阻  $R_L = 50 \Omega$  上加有  $V_0$  dBV 的电压，则其上消耗的功率为

$$\begin{aligned} p &= 10 \lg \frac{p}{1 \text{ mW}} \text{ dBmW} = 10 \lg \frac{V_L^2}{R_L} \frac{1}{1 \text{ mW}} \text{ dBmW} \\ &= \left( 10 \lg \frac{1}{R_L \times 1 \text{ k}\Omega^{-1}} + 10 \lg \frac{V_L^2}{1 \text{ V}^2} \right) \text{ dBmW} \\ &= \left( 10 \lg \frac{1}{50 \Omega \times 1 \text{ k}\Omega^{-1}} + 20 \lg \frac{V_L}{1 \text{ V}} \right) \text{ dBmW} \\ &= (13 + V_0) \text{ dBmW} \end{aligned}$$

为了更简便地描述电流、电压的能量效应，我们定义从  $t_0$  开始一段时间  $T$  内电流和电压的**有效值**为

$$i_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2(\tau) d\tau}, \quad v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v^2(\tau) d\tau}$$

给定电流、电压信号  $i(t) = I_P \cos(\omega t + \varphi_I)$ ,  $v(t) = V_P \cos(\omega t + \varphi_V)$ , 即有

$$I_{\text{rms}} = \frac{I_P}{\sqrt{2}}, \quad V_{\text{rms}} = \frac{V_P}{\sqrt{2}} \quad (1.1)$$

直接计算，有

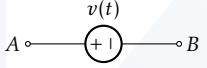
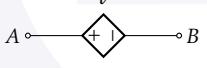
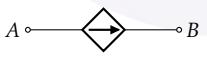
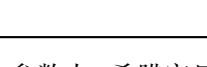
$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) = V_P \cos(\omega t + \varphi_V) I_P \cos(\omega t + \varphi_I) \\ &= \frac{1}{2} V_P I_P \cos(\varphi_V - \varphi_I) + \frac{1}{2} V_P I_P \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I) \end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left( \frac{1}{2} V_P I_P \cos(\varphi_V - \varphi_I) + \frac{1}{2} V_P I_P \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I) \right) dt \\ &= \frac{1}{2} V_P I_P \cos(\varphi_V - \varphi_I) = \frac{V_P}{\sqrt{2}} \frac{I_P}{\sqrt{2}} \cos(\varphi_V - \varphi_I) = I_{\text{rms}} V_{\text{rms}} \cos(\varphi_V - \varphi_I) \end{aligned}$$

将要使用的电源模型如表 1.2 所示。

表 1.2: 常见的电源模型

类别	名称	符号	作用
独立源	恒压源		保持两端电压 $v_{AB} \equiv v(t)$
	恒流源		保持通过电流 $i_{AB} \equiv i(t)$
受控源	压控电压源		依某部分电路电压 $v_s$ 控制两端电压 $v = \mu v_s$
	流控电压源		依某部分电路电流 $i_s$ 控制两端电压 $v = r i_s$
	流控电流源		依某部分电路电流 $i_s$ 控制通过电流 $i = \beta i_s$
	压控电流源		依某部分电路电压 $v_s$ 控制通过电流 $i = g v_s$

注意，表 1.2 中依赖源的四个参数中，希腊字母表示的  $\mu$  和  $\beta$  是无量纲量，而拉丁字母表示的  $r$  和  $g$  是有量纲的，量纲与字母对应的物理量（电阻  $R$ 、电导  $G$ ）一致。

## 1.2 集总约束原则

对一段导体，记其两端截面为  $x$  与  $y$ ，在其中有 Maxwell 方程：

$$\int_{S_x} J \, dS - \int_{S_y} J \, dS = \frac{\partial q}{\partial t}$$

对一个闭合回路，有 Maxwell 方程：

$$\oint E \, dl = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

显然，若  $\frac{\partial q}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = 0$ ，电流通过导体的时间忽略不计，则这两个方程可简化为  $i_x = i_y$ ,  $\oint dv = 0$ 。

### 结论 1.2.1. 集总约束原则

若满足以下条件，则电路可以抽象为分立元件考虑：

- (1) 电路中没有变化的磁场；
- (2) 电路中各节点处的电荷量不变；
- (3) 电路的尺寸远小于其中电流激发的电磁波的波长。

电子电路研究满足集总约束原则的电路。

## 1.3 阻性电路

### 定义 1.3.1. 电阻 (resistance)、电导 (conductance)

电路元件电压与电流的比例常数称为 **电阻**，电流与电压的比例常数称为 **电导**，分别用  $R$  和  $G$  表示。

电阻的单位是 ohm ( $\Omega$ )，电导的单位是 siemens ( $S$ )。

### 元件 1.1. 电阻器 (resistor)

**记号** 固定电阻器记作 ————— (R)，可变电阻器记作 ————— (vR)。

**特性** 两端电压  $v(t)$  与通过电流  $i(t)$  成正比，比例系数就是其电阻  $R$ ，即

$$v(t) = R i(t)$$

### 1.3.1 Kirchhoff 定律

由电子电路与系统的集总约束原则，我们有  $\int_{S_x} J \, dS - \int_{S_y} J \, dS = \frac{\partial q}{\partial t} = 0$ ，即有：

### 结论 1.3.1. Kirchhoff 电流定律

进入任一节点的电流代数和为 0。

即，对电路中任一节点，设从其所连的  $N$  个分支的第  $j$  个进入该节点的电流为  $i_j(t)$ ，则有  $\sum_{j=1}^N i_j(t) = 0$ 。

KCL 也可用「离开节点电流代数和为 0」或「进入节点总电流等于离开节点总电流」表述。

**推论 1.3.2.** 进入任何封闭曲面的电流的代数和为 0。

我们也有  $\oint E \, dl = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = 0$ , 即有:

### 结论 1.3.3. Kirchhoff 电压定律

沿任何封闭环路的电压代数和为 0。

即, 对电路中任一环路, 设从其某一节点开始的  $N$  个分支中第  $j$  个沿固定方向上电压为  $v_j(t)$ , 则有

$$\sum_{j=1}^N v_j(t) = 0.$$

KCL 背后是电荷守恒, KVL 背后是能量守恒。基于两大 Kirchhoff 定律, 或者说基于这两个守恒关系, 再加上电路中元件的数学条件, 就可以解出各个分支上的电压和电流。

### 1.3.2 基本电路结构

由 Ohm 定律和 Kirchhoff 定律, 容易得出:

### 结论 1.3.4. 电阻的串联分压法则

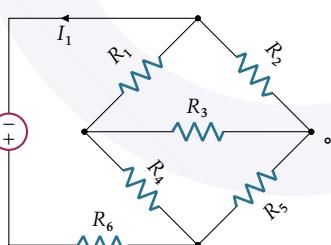
$N$  个串联电阻  $R_1, R_2, \dots, R_N$  的等效电阻为  $R_S = R_1 + R_2 + \dots + R_N$ , 电阻  $R_j$  上分的电压是总电压的  $\frac{R_j}{R_S}$ 。

### 结论 1.3.5. 电阻的并联分流法则

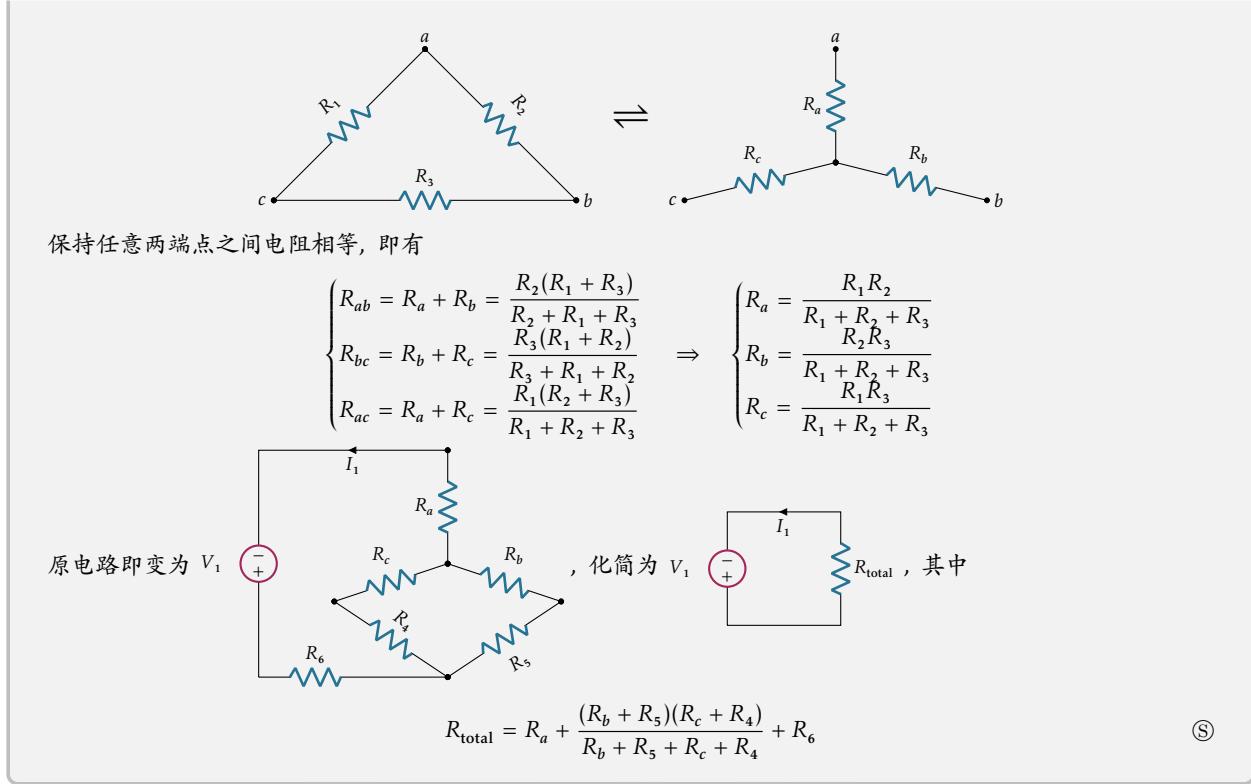
$N$  个并联电阻  $R_1, R_2, \dots, R_N$  的等效电阻为  $R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}}$ , 电阻  $R_j$  上分的电流是总电流的  $\frac{R_p}{R_j}$ 。

此时我们就可以解决一些简单问题了。

**例题 1.3.6.** 化简电路:  $V_1$



解. 考虑做端点等效的替换:



### 注 1.2. Y-Δ 变换

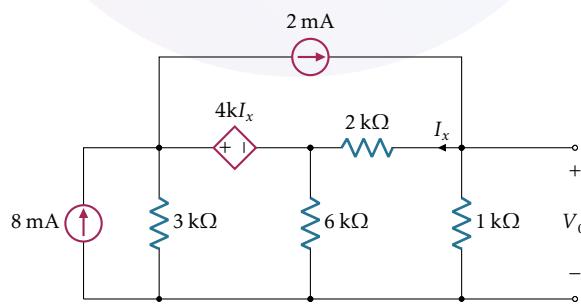
例 1.3.6 给出的等效代换沟通了三角形 (Δ型) 电路与三岔型 (Y型) 电路, 称为 Y-Δ 变换。

一般地, 有  $\begin{cases} R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_b = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_c = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \end{cases}$ 。特别地, 当各电阻相等时, 有  $R_\Delta = 3R_Y$ 。

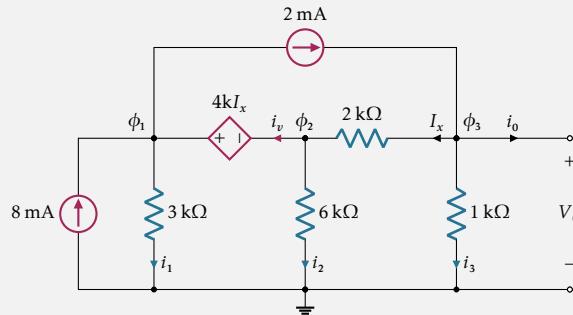
## 1.4 电路分析方法

### 1.4.1 节点分析法

**例题 1.4.1.** 在电路中求解  $V_0$ 。



解. 设出节点电压和各分支电流:



则在  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  及接地处, 由 KCL 有

$$\begin{aligned} 8 \text{ mA} - 2 \text{ mA} + i_v - i_1 &= 0 \\ -i_v + I_x - i_2 &= 0 \\ 2 \text{ mA} - I_x - i_0 - i_3 &= 0 \\ i_1 + i_2 + i_3 + i_0 - 8 \text{ mA} &= 0 \end{aligned}$$

由 Ohm 定律代入即

$$\begin{aligned} 8 \text{ mA} - 2 \text{ mA} + i_v - \frac{\phi_1}{3 \text{ k}\Omega} &= 0 \\ -i_v + \frac{\phi_3 - \phi_2}{2 \text{ k}\Omega} - \frac{\phi_2}{6 \text{ k}\Omega} &= 0 \\ 2 \text{ mA} - \frac{\phi_3 - \phi_2}{2 \text{ k}\Omega} - i_0 - \frac{\phi_3}{1 \text{ k}\Omega} &= 0 \\ \frac{\phi_1}{3 \text{ k}\Omega} + \frac{\phi_2}{6 \text{ k}\Omega} + \frac{\phi_3}{1 \text{ k}\Omega} + i_0 - 8 \text{ mA} &= 0 \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} 8 \text{ mA} - 2 \text{ mA} - \frac{\phi_1}{3 \text{ k}\Omega} + \frac{\phi_3 - \phi_2}{2 \text{ k}\Omega} - \frac{\phi_2}{6 \text{ k}\Omega} &= 0 \\ 2 \text{ mA} - \frac{\phi_3 - \phi_2}{2 \text{ k}\Omega} + \frac{\phi_1}{3 \text{ k}\Omega} + \frac{\phi_2}{6 \text{ k}\Omega} - 8 \text{ mA} &= 0 \end{aligned}$$

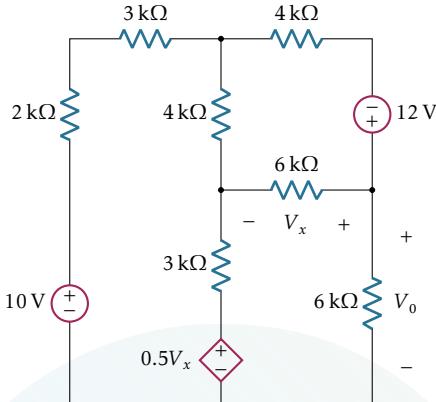
另外, 有  $\phi_1 - \phi_2 = 4kI_x = 4k\frac{\phi_3 - \phi_2}{2 \text{ k}\Omega}$ ,  $\phi_3 - 0 = V_0$ , 即可求解。⑤

### 注 1.3. 节点分析法的步骤

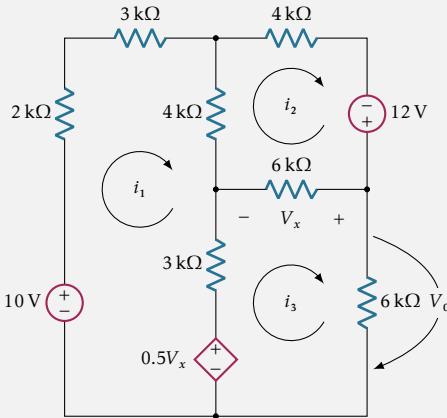
- (1) 确定节点数目和参考节点, 设出节点电压和各分支电流;
- (2) 对每个电压源列出 KVL 方程, 其中依赖电压源的控制变量用节点电压表示;
- (3) 设有  $N$  个节点,  $N_v$  个电压源, 则还需列出  $N - 1 - N_v$  个独立的 KCL 方程。首先考虑与电压源不邻接的非参考节点, 然后考虑包裹电压源的「超节点」; 其中依赖电流源的控制变量用节点电压表示。

### 1.4.2 环路分析法

**例题 1.4.2.** 在电路中求解  $V_0$ 。



解. 设出环路电流:



则  $V_x = 6 \text{k}\Omega(i_2 - i_3)$ , 由 KVL 有

$$10 \text{V} - 2 \text{k}\Omega \cdot i_1 - 3 \text{k}\Omega \cdot i_1 - 4 \text{k}\Omega(i_1 - i_2) - 3 \text{k}\Omega(i_1 - i_3) - 0.5V_x = 0$$

$$12 \text{V} - 6 \text{k}\Omega(i_2 - i_3) - 4 \text{k}\Omega(i_2 - i_1) - 4 \text{k}\Omega \cdot i_2 = 0$$

$$0.5V_x - 3 \text{k}\Omega(i_3 - i_1) + 6 \text{k}\Omega(i_2 - i_3) - 6 \text{k}\Omega \cdot i_3 = 0$$

$$\text{代入解得 } \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5644 \text{ mA} \\ 1.8020 \text{ mA} \\ 1.1617 \text{ mA} \end{bmatrix}, \text{ 于是 } V_0 = 6 \text{k}\Omega \cdot i_3 = 6.97 \text{ V}.$$

(S)

#### 注 1.4. 环路分析法的步骤

- (1) 确定基元环路数目, 设出假想仅在各环路中保留的电流;
- (2) 基于每个电流源列出电流方程;
- (3) 设有  $N$  个基元环路,  $N_i$  个电流源, 则还需对剩余环路绕开电流源列出  $N - 1 - N_i$  个独立的 KVL 方程。

## 1.5 线性电路的叠加与等效

### 1.5.1 线性叠加

#### 定义 1.5.1. 线性器件 (linear devices)

如果一个器件的伏安特性  $v(i)$  是满足叠加性和均匀性的线性表达式，则称这是一个线性器件。

#### 定义 1.5.2. 线性电路 (linear circuit)

一般地，线性电路只含有：

- (1) 线性器件（电阻、电压、电感）；
- (2) 线性的受控源；
- (3) 独立源。

#### 结论 1.5.1. 线性电路的叠加定理

线性电路的输出电压（或电流），等于其中各个独立源单独作用，而其他独立源关闭（电压源短路，电流源开路）时的输出电压（或电流）之和。

### 1.5.2 线性等效

复杂的有源线性电路，有 **Thévenin 形式**（如图 1.1a 所示）和 **Norton 形式**（如图 1.1b 所示）两种等效形式。

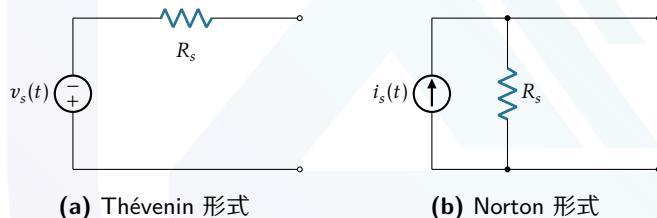


图 1.1: 线性电路的等效形式

如图 1.2a、1.2b 所示，这两种等价形式的输出应认为是任意给定的外接负载  $R_L$  上的电压/电流。Thévenin

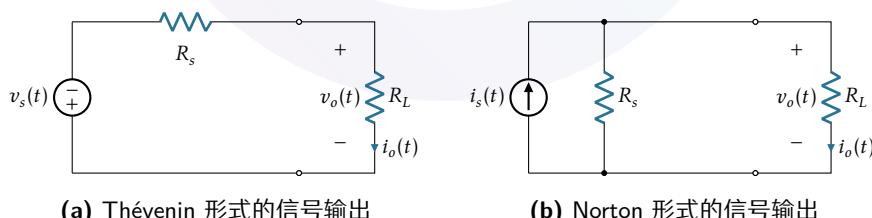


图 1.2: 两种等价形式的输出

形式中，

$$v_o(t) = \frac{R_L}{R_s + R_L} v_s(t), \quad i_o(t) = \frac{1}{R_s + R_L} v_s(t)$$

Norton 形式中,

$$i_o(t) = \frac{R_s}{R_s + R_L} i_s(t), \quad v_o(t) = \frac{R_s R_L}{R_s + R_L} i_s(t)$$

由两种表示方法的等价性, 参数  $v_s(t)$  和  $i_s(t)$  之间的关系为  $v_s(t) = R_s i_s(t)$ 。

同时可以看出, 当  $R_s \ll R_L$  时,  $v_o \approx v_s$ ; 当  $R_s \gg R_L$  时,  $i_o \approx i_s$ 。

### 注 1.5. 求线性电路的 Thévenin 或 Norton 等价形式的步骤

- (1) 分别使输出两端点之间开路、短路, 求出开路输出电压  $v_0$  和短路输出电流  $i_0$ ;
- (2)

## 2 电容、电感

### 2.1 电容器与电感器

#### 2.1.1 电容

##### 元件 2.1. 电容器 (capacitor)

**记号** 固定电容器记作  (C)，平行板电容器可更具体地记作  (eC)。

**特性** 存储电量与两端电压称正比，比例系数为**电容** C，即  $q = Cv$ 。

平行板电容器之间的电场与所带电荷之间的关系为  $E(t) = \frac{q(t)}{\epsilon A}$ ，而板间电压  $v(t) = \int_{l_0}^{l_0+d(t)} E(t) dl = E(t)d(t)$ ，则  $q(t) = \frac{\epsilon A}{d(t)}v(t)$ ，即  $C(t) = \frac{\epsilon A}{d(t)}$ 。

由  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ ，电容器的伏安特性为

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (2.1)$$

即

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

于是还可导出

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) = Cv(t)\frac{dv(t)}{dt} \\ w(t) &= \int_{-\infty}^t Cv(\tau)\frac{dv(\tau)}{d\tau} d\tau = \frac{1}{2}Cv^2(\tau) \Big|_{-\infty}^t = \frac{q^2(t)}{2C} \end{aligned}$$

由此容易导出下面的结论。

##### 结论 2.1.1. 电容器电压不突变性

电容器两端电压不能突变。

证明. 有

$$\begin{aligned} 0 \leq |v(t + \Delta t) - v(t)| &= \left| \frac{1}{C} \int_t^{t+\Delta t} i(\tau) d\tau \right| \leq \frac{1}{C} \int_t^{t+\Delta t} |i(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{\sup_{t \leq \tau \leq t+\Delta t} |i(\tau)|}{C} \Delta t \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

即  $\Delta t \rightarrow 0$  时， $|v(t + \Delta t) - v(t)| = 0$ 。  $\square$

下面考虑电容器的串并联特性。

### 结论 2.1.2. 电容的串联分压法则

$N$  个串联电容  $C_1, C_2, \dots, C_N$  的等效电容为  $C_s = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}}$ , 电容  $C_j$  上分的电压是总电压的  $\frac{C_s}{C_j}$ 。

证明. 给  $N$  个电容  $C_1, C_2, \dots, C_N$  的串联加上  $v(t)$  的电压和  $i(t)$  的电流, 则由电容的伏安特性有

$$i(t) = C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} = C_2 \frac{dv_2(t)}{dt} = \dots = C_N \frac{dv_N(t)}{dt} = C_s \frac{dv(t)}{dt}$$

而其中  $v(t) = \sum_{n=1}^N v_n(t)$ , 于是

$$\frac{i(t)}{C_s} = \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N v_n(t) = \sum_{n=1}^N \frac{dv_n(t)}{dt} = \sum_{n=1}^N \frac{i(t)}{C_n} \Rightarrow C_s = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}}$$

考虑到  $v_j(t) = \frac{1}{C_j} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \propto C_j^{-1}$ , 有

$$\frac{v_j(t)}{v(t)} = \frac{\frac{1}{C_j}}{\sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n}} = \frac{C_s}{C_j}$$

□

### 结论 2.1.3. 电容的并联分流法则

$N$  个并联电容  $C_1, C_2, \dots, C_N$  的等效电容为  $C_p = C_1 + C_2 + \dots + C_N$ , 电容  $C_j$  上分的电流是总电流的  $\frac{C_j}{C_p}$ 。

证明. 给  $N$  个电容  $C_1, C_2, \dots, C_N$  的并联加上  $v(t)$  的电压和  $i(t)$  的电流, 则由电容的伏安特性有

$$i_n(t) = C_n \frac{dv(t)}{dt}, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

又  $i(t) = \sum_{n=1}^N i_n(t)$ , 于是

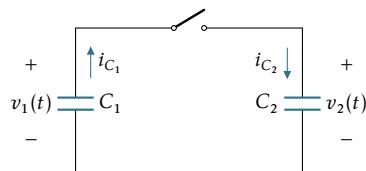
$$C_p \frac{dv(t)}{dt} = \sum_{n=1}^N i_n(t) = \sum_{n=1}^N C_n \frac{dv(t)}{dt} = \left( \sum_{n=1}^N C_n \right) \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow C_p = C_1 + C_2 + \dots + C_N$$

且显然  $i_j(t) \propto C_j$ , 即知

$$\frac{i_j(t)}{i(t)} = \frac{C_j}{\sum_{n=1}^N C_n} = \frac{C_j}{C_p}$$

□

例题 2.1.4. 如图, 开关闭合前两电容器分别带电荷为  $q_1(0) = Q_1, q_2(0) = Q_2$ , 求开关在  $t = 0$  时刻闭合前后两电容器中存储的总能量。



解. 开关闭合前,

$$w(t < 0) = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2}$$

开关闭合后, 设  $t = t_1$  时刻达到稳定, 则有  $v_1(t_1) = v_2(t_1)$ , 即要

$$\begin{cases} \frac{q_1(t_1)}{C_1} = \frac{q_2(t_1)}{C_2}, \\ q_1(t_2) + q_2(t_1) = Q_1 + Q_2 \end{cases}$$

解出  $q_1(t_1) = C_1 \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2}$ ,  $q_2(t_1) = C_2 \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2}$ , 于是

$$w(t_1) = \frac{q_1^2(t_1)}{2C_1} + \frac{q_2^2(t_1)}{2C_2} = \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{2(C_1 + C_2)}$$

从另一个角度看, 开关闭合后, 两电容器并联形成了一个容值为  $C_1 + C_2$  的电容, 其中能量就是  $w(t_1) = \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{2(C_1 + C_2)}$ 。(S)

注意到, 例 2.1.4 中电路总能量减少了, 但似乎并没有元件在消耗能量。

### 2.1.2 电感

#### 元件 2.2. 电感器 (inductor)

**记号** 普通电感线圈记为 —— (L), 带铁芯的电感线圈记为 —— (cute choke)。

**特性** 线圈中的磁通链与流过电流成正比, 比例系数为 **电感**  $L$ , 即  $\lambda = Li$ 。

由 Faraday 电磁感应定律,  $v(t) = \frac{d\lambda(t)}{dt}$ , 则电感器的伏安特性为

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (2.3)$$

即

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

进而

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) = Li(t) \frac{di(t)}{dt} \\ w(t) &= \int_{-\infty}^t Li(\tau) \frac{di(\tau)}{d\tau} d\tau = \frac{Li^2(\tau)}{2} \Big|_{-\infty}^t = \frac{\lambda^2(t)}{2L} \end{aligned}$$

与结论 2.1.1—2.1.3 类似, 我们也有下面的一些结论。

### 结论 2.1.5. 电感器电流不突变性

电感器之中电流不能突变。

证明. 有

$$\begin{aligned} 0 \leq |i(t + \Delta t) - i(t)| &= \left| \frac{1}{L} \int_t^{t+\Delta t} v(\tau) d\tau \right| \leq \frac{1}{L} \int_t^{t+\Delta t} |v(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{\sup_{t \leq \tau \leq t+\Delta t} v(\tau)}{L} \Delta t \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

即  $\Delta t \rightarrow 0$  时,  $|i(t + \Delta t) - i(t)| = 0$ 。  $\square$

### 结论 2.1.6. 电感的串联分压法则

$N$  个串联电感  $L_1, L_2, \dots, L_N$  的等效电感为  $L_S = L_1 + L_2 + \dots + L_N$ , 电感  $L_j$  上分的电压是总电压的  $\frac{L_j}{L_S}$ 。

证明. 给  $N$  个电感  $L_1, L_2, \dots, L_N$  的串联加上  $v(t)$  的电压和  $i(t)$  的电流, 则由电感的伏安特性有

$$v_n(t) = L_n \frac{di(t)}{dt}, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

而  $v(t) = \sum_{n=1}^N v_n(t)$ , 于是

$$L_S \frac{di(t)}{dt} = \sum_{n=1}^N v_n(t) = \sum_{n=1}^N L_n \frac{di(t)}{dt} = \left( \sum_{n=1}^N L_n \right) \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow L_S = L_1 + L_2 + \dots + L_N$$

且显然  $v_j(t) \propto L_j$ , 有

$$\frac{v_j(t)}{v(t)} = \frac{L_j}{\sum_{n=1}^N L_n} = \frac{L_j}{L_S}$$

$\square$

### 结论 2.1.7. 电感的并联分流法则

$N$  个并联电感  $L_1, L_2, \dots, L_N$  的等效电感为  $L_p = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N}}$ , 电感  $L_j$  上分的电流是总电流的  $\frac{L_p}{L_j}$ 。

证明. 给  $N$  个电感  $L_1, L_2, \dots, L_N$  的并联加上  $v(t)$  的电压和  $i(t)$  的电流, 则由电感的伏安特性有

$$v(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} = \dots = L_N \frac{di_N(t)}{dt} = L_S \frac{di(t)}{dt}$$

又  $i(t) = \sum_{n=1}^N i_n(t)$ , 于是

$$\frac{v(t)}{L_p} = \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N i_n(t) = \sum_{n=1}^N \frac{di_n(t)}{dt} = \sum_{n=1}^N \frac{v(t)}{L_n} \Rightarrow L_p = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N}}$$

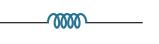
考虑到  $i_j(t) = \frac{1}{L_j} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau \propto L_j^{-1}$ , 即知

$$\frac{i_j(t)}{i(t)} = \frac{\frac{1}{L_j}}{\sum_{n=1}^N \frac{1}{L_n}} = \frac{L_p}{L_j}$$

□

电阻、电容、电感三种线性元件的基本数学物理性质如表 2.3 所示。

表 2.3: 电阻、电容、电感的基本性质

性质	电阻	电容	电感
记号			
记忆因子	—	$q$	$\lambda$
伏安特性	$\begin{cases} i(t) = \frac{v(t)}{R} \\ v(t) = i(t)R \end{cases}$	$\begin{cases} i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \\ v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \end{cases}$	$\begin{cases} i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \\ v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \end{cases}$
存储能量	0	$w = \frac{1}{2} C v^2 = \frac{q^2}{2C}$	$w = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{\lambda^2}{2L}$
串联等效	$R_S = \sum_{j=1}^N R_j$	$C_S^{-1} = \sum_{j=1}^N C_j^{-1}$	$L_S = \sum_{j=1}^N L_j$
并联等效	$R_p^{-1} = \sum_{j=1}^N R_j^{-1}$	$C_p = \sum_{j=1}^N C_j$	$L_p^{-1} = \sum_{j=1}^N L_j^{-1}$
直流等效	原阻值电阻	无穷大电阻 (开路)	无穷小电阻 (短路)
电流突变	可	可	不可
电压突变	可	不可	可

## 2.2 磁耦合网络

### 2.2.1 互感器

考虑如图 2.3 所示的电路。只给  $L_1$  通电, 由 Ampère 定律,  $\lambda_1(t) = N_1 \phi(t) = L_1 i_1(t)$ , 且有  $v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt}$ ; 将磁感线用铁芯导入  $L_2$ , 由 Faraday 电磁感应定律, 在  $L_2$  中  $\lambda_2(t) = N_2 \phi(t) = \frac{N_2}{N_1} \lambda_1(t) = \frac{N_2}{N_1} L_1 i_1(t)$ , 则  $v_2(t) = \frac{d\lambda_2(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{N_2}{N_1} L_1 i_1(t) \right) = \frac{N_2}{N_1} L_1 \frac{di_1(t)}{dt}$ 。于是可以定义

#### 定义 2.2.1. 互感 (mutual inductance)

两个匝数分别为  $N_1, N_2$  的电感线圈  $L_1, L_2$  用铁芯相通,  $L_1$  中电流在  $L_2$  中产生的磁链与  $L_1$  中电流的比例系数为  $\frac{N_2}{N_1} L_1$ , 称为  $L_1$  中电流对  $L_2$  的互感系数, 简称互感, 记作  $L_{21}$ 。

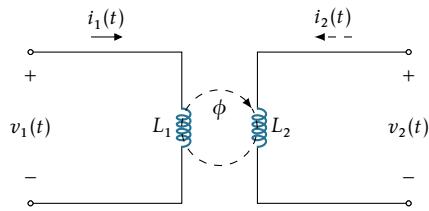


图 2.3: 互感器

下面给  $L_1, L_2$  同时通电，则两线圈中的磁链分别为  $\begin{cases} \lambda_1 = L_1 i_1 + L_{12} i_2, \\ \lambda_2 = L_{21} i_1 + L_2 i_2, \end{cases}$  对时间求导就有  $\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt}, \\ v_2 = L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}. \end{cases}$

事实上，我们有  $L_{12} = L_{21} = M$ 。前一式子表明，互感线圈的电压相对独立地来自于两个线圈中的电流变化，自感项与自身电流变化率的比例系数为其自身的电感，互感项与另一线圈电流变化率的比例系数为两线圈间的互感。

### 注 2.1. 互感方向

我们在电感两侧加点表示线圈盘绕的方向（右手或左手），当两线圈中电流都从加点流入或都从加点流出时互感项系数为所标记的  $M$ ，否则互感项系数为  $-M$ 。

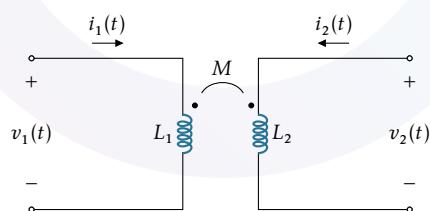
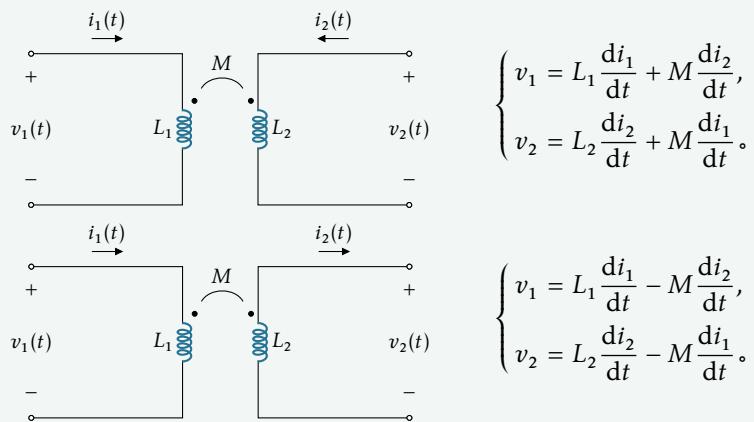


图 2.4: 互感器

在如图 2.4 的互感装置中，电路整体消耗的功率即为

$$\begin{aligned} p(t) &= v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) \\ &= \left( L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \right) i_1(t) + \left( M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \right) i_2(t) \\ &= \frac{1}{2} L_1 \frac{d}{dt} i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 \frac{d}{dt} i_2^2(t) + M \frac{d}{dt} (i_1(t)i_2(t)) \end{aligned}$$

互感器存储的总能量就是

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) + M i_1(t)i_2(t)$$

即

$$w(t) = \frac{1}{2} \left( L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 \left( i_2(t) + \frac{M}{L_2} i_1(t) \right)^2 \quad (2.5)$$

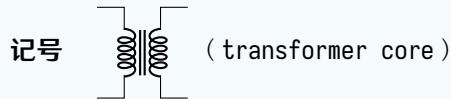
互感器中的能量  $w(t) \geq 0$ , 则  $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$ , 于是我们定义

### 定义 2.2.2. 椭合系数 (coefficient of coupling)

两个电感线圈  $L_1, L_2$  用铁芯相通构成椭合系数为  $M$  的互感器, 称比值  $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$  为这个互感器的椭合系数。

## 2.2.2 理想变压器

### 元件 2.3. 理想变压器 (ideal transformer)



**特性** 理想的互感器, 满足以下条件:

- (1) 铁芯中的磁通量穿过两个线圈的每一匝, 没有磁漏;
- (2) 没有导线电阻和铁芯涡流, 即没有铜损和铁损。

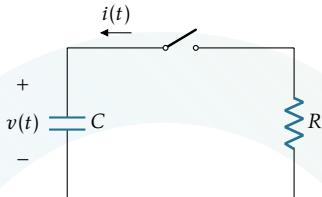
于是其满足  $\begin{cases} v_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt}, \\ v_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt}, \end{cases}$  即有  $\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2}$ 。

### 3 线性电路综合分析

#### 3.1 瞬态电路分析

##### 3.1.1 一阶电路

**例题 3.1.1. 无源 RC 电路** 电路中电容  $C$  已充电至  $V_0$ ,  $t = 0$  时刻闭合开关, 求  $v(t)$ 。



由 KCL,

$$C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R} = 0$$

解一阶常微分方程得  $v(t) = V_0 e^{-\frac{1}{CR}t}$ , 代入边界条件  $v(0) = V_0$ , 得

$$v(t) = V_0 e^{-\frac{1}{CR}t}$$

其中,  $\tau = RC$  称为时间常数, 与电路至稳定的速度成反比。一般认为  $t = 5\tau$  之后电路的变化即可忽略不计, 此前的电路分析称为**瞬态电路分析**, 此后的电路分析称为**稳态电路分析**。

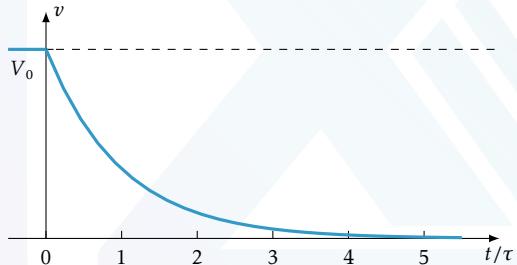
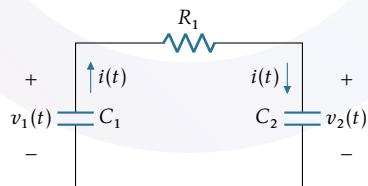


图 3.5: 例 3.1.1 电路中的  $v(t)$  曲线

**例题 3.1.2.** 基于例 2.1.4, 设其中开关闭合后的电阻为  $R_1$ , 求电流  $i(t)$ 。



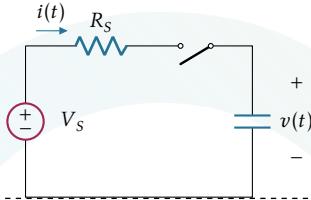
解. 由 KVL 即有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t i(t) dt + i(t)R_1 + \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^t i(t) dt = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt} i(t) + \frac{1}{R_1} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) i(t) = 0 \end{aligned}$$

则解出

$$i(t) = i(0)e^{-a_1 t}, \quad \text{其中} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{1}{R_1} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right), \\ i(0) = \frac{1}{R_1} \left( \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2} \right) \end{cases} \quad (S)$$

**例题 3.1.3. 有源 RC 电路** 电路中电容在开关闭合前没有充电,  $t = 0$  时刻闭合开关, 求  $v(t)$ 。

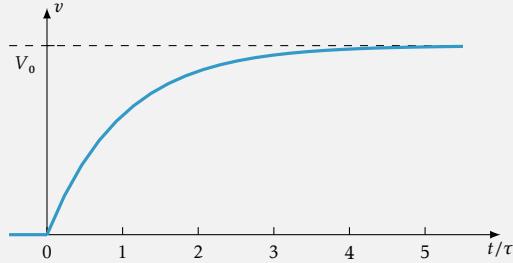


解. 由 KVL 即有

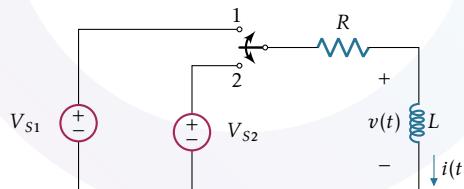
$$i(t)R + v(t) = V_s \Rightarrow \frac{d}{dt}v(t) + \frac{1}{RC}v(t) = \frac{1}{RC}V_s$$

解出

$$v(t) = V_s - V_s e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (S)$$



**例题 3.1.4. 有源 RL 电路** 分析电路中开关在反复拨动时  $i(t)$  的变化, 其中  $V_{S1} > V_{S2}$ , 线圈在  $t = 0$  时刻开关拨到 1 侧之前没有充电。



解. 当开关拨到 1 侧时, 由 KVL 有

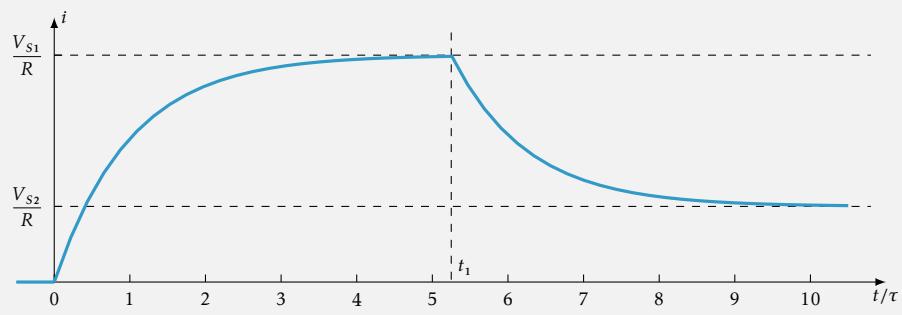
$$V_{S1} = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow \frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{V_{S1}}{L}$$

解一阶常微分方程得

$$i(t) = \frac{V_{S1}}{R} - \frac{V_{S1}}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

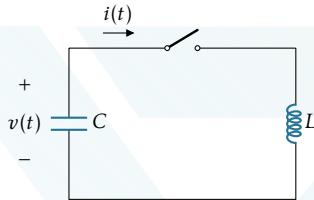
设  $t = t_1 > 5\tau_1$  时刻开关拨到 2 侧, 除电源电压和边界条件外方程完全相同, 同理即得

$$i(t) = \frac{V_{S2}}{R} + \left( \frac{V_{S1}}{R} - \frac{V_{S2}}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}(t-t_1)} \quad (S)$$



### 3.1.2 二阶电路

**例题 3.1.5. 无源 LC 电路** 电路中电容在开关闭合前充电到  $V_0$ , 求  $v(t)$ 。



解. 由 KCL,

$$-C \frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau \Rightarrow \frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} v(t) = 0$$

解二阶线性常系数齐次微分方程, 其特征方程为  $S^2 + \frac{1}{LC} = 0$ , 记  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , 其两个特征根为  $S_1 = j\omega_0$ ,  $S_2 = -j\omega_0$ , 则知方程的通解为

$$v(t) = K_1 e^{j\omega_0 t} + K_2 e^{-j\omega_0 t}$$

代入初始条件  $v(0) = V_0$ ,  $\left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0$ , 得  $K_1 = K_2 = \frac{V_0}{2}$ , 即有

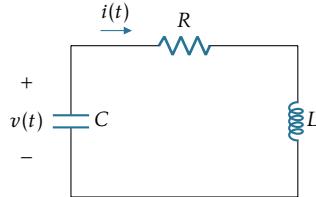
$$v(t) = \frac{V_0}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) = V_0 \cos \omega_0 t \quad (S)$$

进一步, 若初始条件为电容中充有电压  $v_0$ , 电感中充有电流  $i_0$ , 则解出

$$v(t) = v_0 \cos \omega_0 t + \sqrt{\frac{L}{C}} i_0 \sin \omega_0 t = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad \text{其中} \quad \begin{cases} A = \sqrt{v_0^2 + \frac{L}{C} i_0^2}, \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \\ \phi = \arctan \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{i_0}{v_0} \end{cases}$$

能量会一直在电场能和磁场能之间转化, 没有损耗。

**例题 3.1.6. 无源 RLC 电路** 在开关闭合前电容中充有电压  $v_0$ , 电感中充有电流  $i_0$ , 求  $v(t)$ 。



解. 知  $i(t) = -C \frac{dv(t)}{dt}$ , 由 KVL, 有

$$-v(t) + i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v(t) = 0$$

解二阶线性常系数齐次微分方程, 其特征方程为  $S^2 + \frac{R}{L}S + \frac{1}{LC} = 0$ , 记  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $\zeta = \frac{R}{2\omega_0 L} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ , 其两个特征根为  $S_1 = -\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$ ,  $S_2 = -\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$ 。

(1) 若  $\zeta > 1$ , 则知方程的通解为

$$v(t) = K_1 e^{(-\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1})t} + K_2 e^{(-\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1})t}$$

代入初始条件  $v(0) = v_0$ ,  $\left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{i_0}{C}$ , 可解出

$$K_1 = \frac{v_0}{2} + \frac{\zeta\omega_0 v_0 - \frac{i_0}{C}}{2\omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}}, \quad K_2 = \frac{v_0}{2} - \frac{\zeta\omega_0 v_0 - \frac{i_0}{C}}{2\omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

即得

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-\zeta\omega_0 t} \left( \frac{v_0}{2} \left( \left( e^{\omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}} \right)^t + \left( e^{\omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}} \right)^{-t} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\zeta\omega_0 v_0 - \frac{i_0}{C}}{2\omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \left( e^{\omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}} \right)^t - \left( e^{\omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}} \right)^{-t} \right) \right) \end{aligned}$$

(2) 若  $\zeta = 1$ , 则知  $S_1 = S_2 = -\omega_0$ , 方程的通解为

$$v(t) = K_1 e^{-\omega_0 t} + K_2 t e^{-\omega_0 t}$$

代入初始条件  $v(0) = v_0$ ,  $\left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{i_0}{C}$ , 可解出  $K_1 = v_0$ ,  $K_2 = \omega_0 v_0 - \frac{i_0}{C}$ , 即得

$$v(t) = \left( v_0 + \omega_0 v_0 t - \frac{i_0}{C} t \right) e^{-\omega_0 t}$$

(3) 若  $\zeta < 1$ , 则知方程的通解为

$$v(t) = K_1 e^{(-\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2})t} + K_2 e^{(-\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2})t}$$

代入初始条件  $v(0) = v_0$ ,  $\left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{i_0}{C}$ , 可解出

$$K_1 = \frac{v_0}{2} - j \frac{\zeta\omega_0 v_0 - \frac{i_0}{C}}{2\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad K_2 = \frac{v_0}{2} + j \frac{\zeta\omega_0 v_0 - \frac{i_0}{C}}{2\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

即得

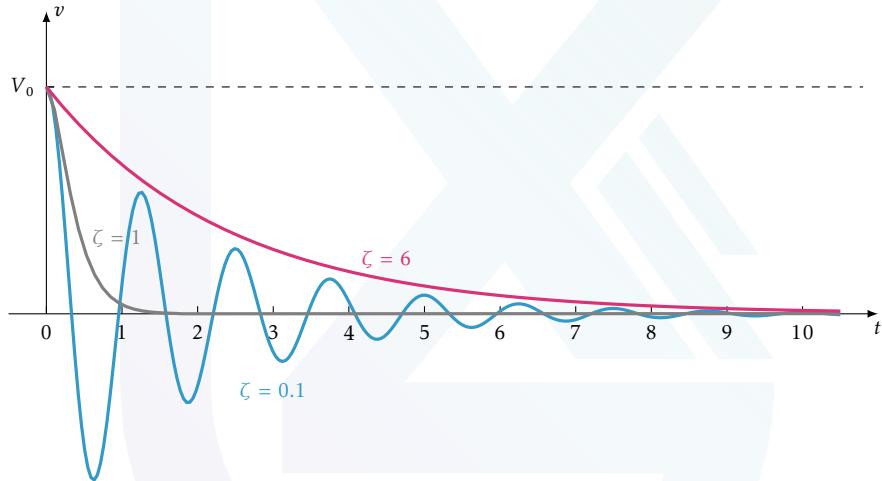
$$v(t) = V e^{-\zeta \omega_0 t} \sin(\omega_d t + \phi), \quad \text{其中} \quad \begin{cases} V = \sqrt{v_0^2 + \left( \frac{\zeta \omega_0 v_0 - i_0}{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}} \right)^2} \\ \omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \\ \phi = \arctan \frac{\omega_0 v_0 \sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta \omega_0 v_0 - i_0 / C} \end{cases} \quad (3)$$

例 3.1.6 所讨论的电路即是带阻尼的 LC 振荡电路，其中我们定义  $\alpha = \frac{R}{2L}$  为阻尼系数， $\omega_0$  为 LC 共振圆频率，二者比值  $\zeta = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{R}{2\omega_0 L} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$  称为电路的阻尼比，其物理与数学意义已在上面有很清楚的展示： $\zeta > 1$  的称为过阻尼电路， $\zeta = 1$  的称为临界阻尼电路， $\zeta < 1$  的称为欠阻尼电路。

若令初状态  $i_0 = 0$ ，则上面欠阻尼的结果就简化为

$$v(t) = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \frac{\omega_d t}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \sin(\omega_d t + \arccos \zeta) \quad (3.1)$$

分别取  $i_0 = 0$ ,  $\zeta = 0.1, 1, 6$  作图，得



### 注 3.1. 时域分析一阶、二阶电路的方法

- (1) 根据 KCL、KVL，列出关于  $i(t)$  或  $v(t)$  的常微分方程，在线性电路的条件下，其是一阶或二阶线性常系数常微分方程；
- (2) 无源电路中，这个方程为齐次方程，直接解出通解；有源电路中，方程带有常数项，同时找出对应特解即可；
- (3) 画出  $i(t)$  或  $v(t)$  曲线，分析物理意义。

## 3.2 交流稳态电路分析

在上面的分析中，可以注意到求解微分方程之初所找的特解  $v_p(t)$ （或  $i_p(t)$ ）与电源电压的变化有关。

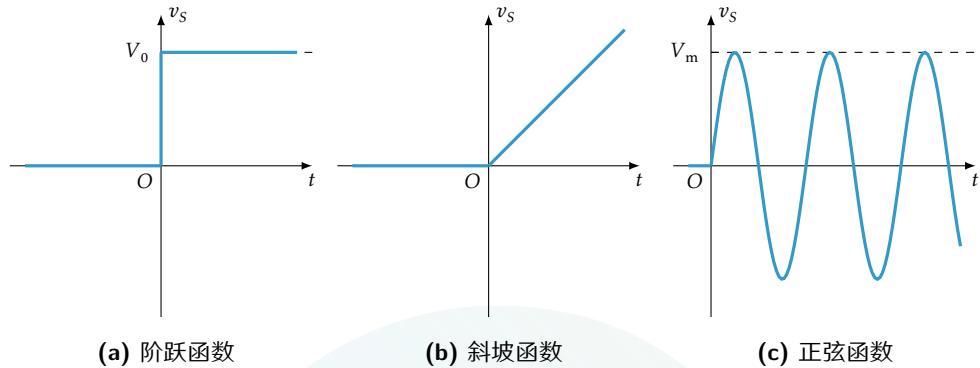


图 3.6: 主要的电源激励函数

前面的分析中，我们对阶跃激励函数（图 3.6a）取的特解为

$$x_p(t) = K$$

数学上，我们对斜坡激励函数（图 3.6b）取的特解为

$$x_p(t) = pt + q$$

对正弦激励函数（图 3.6c）取的特解为

$$x_p(t) = K_1 \sin(\omega t) + K_2 \cos(\omega t)$$

进而都可以采用类似的方法进行电路分析。

### 3.2.1 复激励函数与阻抗

我们考虑将电源电压设为  $v_S(t) = V_S e^{j\omega t}$ ，则其加在电阻  $R$  上时电流为

$$i(t) = \frac{v_S(t)}{R} = \frac{V_S}{R} e^{j\omega t}$$

其加在电容  $C$  上时电流为

$$i(t) = C \frac{dv_S(t)}{dt} = j\omega C V_S e^{j\omega t}$$

其加在电感  $L$  上时电流为

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_S(\tau) d\tau = \frac{V_S}{j\omega L} e^{j\omega t}$$

#### 定义 3.2.1. 阻抗 (impedance)

加在元件上的相量电压与元件中的相量电流的比值，称为元件在这一相量频率下的阻抗，记作  $Z$ 。

阻抗的计算仍然可以使用叠加定理、Thévenin 等效等等方法。

**例题 3.2.1.** 试求  $R_1, R_2, C_1, C_2$  之间的关系，使得  $R_1, C_1$  串联与  $R_1, C_2$  并联这两个电路的端口效应等效。

表 3.4: 电阻、电容、电感的阻抗性质

性质	电阻	电容	电感
记号	$R$	$C$	$L$
伏安特性	$\begin{cases} i(t) = \frac{v(t)}{R} \\ v(t) = i(t)R \end{cases}$	$\begin{cases} i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \\ v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \end{cases}$	$\begin{cases} i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \\ v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \end{cases}$
阻抗	$R$	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega L$

解. 两电路的等效阻抗分别为

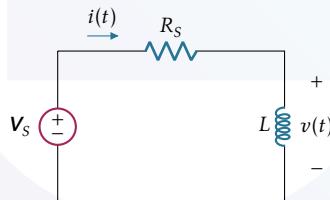
$$Z_{eq1} = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}, \quad Z_{eq2} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C_2} = \frac{\frac{1}{R_2} - j\omega C_2}{\frac{1}{R_2} + \omega^2 C_2^2}$$

我们即是希望  $Z_{eq1} = Z_{eq2}$ , 那么

$$\begin{cases} \Re\{Z_{eq}\} = R_1 = \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_2} + \omega^2 C_2^2} \\ \Im\{Z_{eq}\} = -\frac{1}{\omega C_1} = -\frac{\omega C_2}{\frac{1}{R_2} + \omega^2 C_2^2} \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} R_2 = \frac{R_1^2 + \omega^2 C_1^2}{R_1 \omega^2 C_1^2}, \\ C_2 = \frac{C_1}{R_1^2 + \omega^2 C_1^2}. \end{cases}$$
(S)

例题 3.2.2. 设  $t = -\infty$  时电感  $L$  上未充有电流, 求在电源电压为  $V_S = V_S e^{j\omega t}$  时  $L$  上的电压  $v(t)$ 。



时域解法. 由 KVL 有  $\frac{d}{dt}i(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}v_S(t)$ , 而猜测电流应具有  $I(t) = I_S e^{j(\omega t+\varphi)}$  的形式, 代入即有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(I_S e^{j(\omega t+\varphi)}) + \frac{R}{L}I_S e^{j(\omega t+\varphi)} &= \frac{1}{L}V_S e^{j\omega t} \Rightarrow j\omega I_S e^{j(\omega t+\varphi)} + \frac{R}{L}I_S e^{j(\omega t+\varphi)} = \frac{1}{L}V_S e^{j\omega t} \\ &\Rightarrow \left(j\omega + \frac{R}{L}\right)I_S e^{j\varphi} = \frac{1}{L}V_S \end{aligned}$$

$$\text{从而 } I_S e^{j\varphi} = \frac{V_S}{R + j\omega L}, \text{ 即有 } \begin{cases} I_S = \frac{V_S}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \\ \varphi = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}. \end{cases} \text{ 真实电流为 } i(t) = \Re\{I(t)\}.$$
(S)

频域解法。由 KVL 有

$$V_S = Rl_S + j\omega Ll_S \Rightarrow l_S = \frac{V_S}{R + j\omega L}$$

$$\text{真实电流为 } i(t) = \Re\{l_S\} = \frac{V_S}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \cos(\omega t) - \omega L \sin(\omega t))。 \quad (8)$$

下面考虑复能量。将电压  $v(t) = V_S \cos(\omega t + \varphi_V)$  抽象为  $\mathbf{V} = V_S / \underline{\varphi_V} = V_S e^{j\varphi_V}$ , 电流  $i(t) = I_S \cos(\omega t + \varphi_I)$  抽象为  $I = I_S / \underline{\varphi_I} = I_S e^{j\varphi_I}$ , 定义复功率为  $S = \frac{1}{2} \mathbf{V} I^*$ , 其即有

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \mathbf{V} I^* = \frac{1}{2} V_S e^{j\varphi_V} I_S e^{-j\varphi_I} = \frac{1}{2} V_S I_S e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} \\ &= \frac{1}{2} V_S I_S (\cos(\varphi_V - \varphi_I) + j \sin(\varphi_V - \varphi_I)) \\ &= V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} (\cos(\varphi_V - \varphi_I) + j \sin(\varphi_V - \varphi_I)) \end{aligned}$$

显然, 平均功率  $\bar{P} = \Re\{S\}$ , 余下的虚部称为无功功率, 记为  $Q = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin(\varphi_V - \varphi_I)$ 。

**定义 3.2.2. 功率参量**  $pf = \frac{\bar{P}}{V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}} = \cos(\varphi_V - \varphi_I)$ 。

**定义 3.2.3. 功率角**  $\varphi_V - \varphi_I = \tan^{-1} \frac{Q}{\bar{P}}$ 。

与电阻电路中类似, 当负载阻抗  $Z_L$  与 Thévenin 或 Norton 形式电源的内阻抗  $Z_S$  满足  $Z_S = Z_L^*$  时, 负载上的功率获得最大值  $\frac{V_{\text{rms}}^2}{4R_S}$ 。

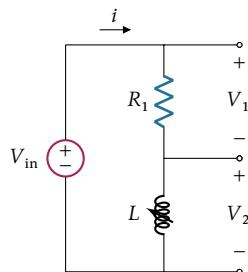
### 3.2.2 频域电路分析

#### 定义 3.2.4. 传递函数 (transfer function)

一个电路或系统中输出与输入的比值随电信号频率的变化关系, 称为该电路或系统的传递函数。一般地, 传递函数记作  $H(\omega) = M(\omega) e^{j\phi(\omega)}$ , 其中  $M(\omega) = |H(\omega)|$  称为  $H(\omega)$  的幅值,  $\phi(\omega) = \arg H(\omega)$  称为  $H(\omega)$  的相位。

按照输出、输入信号的类型, 传递函数分为电流增益  $G_i(\omega) = \frac{I_{\text{out}}}{I_{\text{in}}}$ , 电压增益  $G_v(\omega) = \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}}$ , 互阻抗  $Z_i(\omega) = \frac{V_{\text{out}}}{I_{\text{in}}}$ , 互导纳  $Y_i(\omega) = \frac{I_{\text{out}}}{V_{\text{in}}}$  四种。

考虑如图电路, 有  $V_{\text{out}} = iZ_L = \frac{j\omega L}{R_1 + j\omega L} V_{\text{in}}$ , 即得该电路的传递函数



$$G_v(\omega) = \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{1}{R_1 + j\omega L} \Leftrightarrow \begin{cases} |G_v(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\frac{R_1^2}{\omega^2 L^2} + 1}} \\ \arg G_v(\omega) = \tan^{-1} \frac{R_1}{\omega L} \end{cases}$$

注意到  $\omega$  很大时  $G_v(\omega) \rightarrow 1$ , 即高频电压全部同相加在输出负载上;  $\omega$  很小时  $G_v(\omega) \rightarrow \frac{j\omega L}{R_1} \rightarrow 0$ , 即低频电压几乎不加在输出负载上, 且输出电压与输入电压的相位差  $90^\circ$ 。这样的电路就具有了滤波特性。

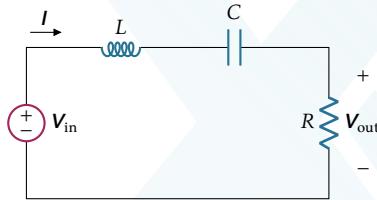
### 元件 3.1. 滤波器 (filter)

**记号** 在 ——— (allpass) 的波浪线上打「/」表示滤掉的频率, 即有高通滤波器 ——— (highpass)、低通滤波器 ——— (lowpass)、带通滤波器 ——— (bandpass)、带阻滤波器 ——— (bandstop)。

**特性** 信号输出与频率有各自的变化关系。

约定: 幅值增益下降到最大增益  $G_0$  的  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  时的频率, 称为滤波器的截止频率。

**例题 3.2.3.** 试确定如图电路对应的滤波特性。



解. 由 KVL 有  $V_{\text{out}} = IR = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}V_{\text{in}}$ , 即传递函数  $G_v(\omega) = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$ 。显然,  $\omega \rightarrow 0$  与  $\omega \rightarrow +\infty$  时, 都有  $\omega L - \frac{1}{\omega C} \rightarrow \infty$ , 即有  $G_v(\omega) \rightarrow 0$ ; 而注意到  $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ , 即  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  时,  $G_v(\omega) = 1$ , 则这是一个带通滤波器。⑧

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  称为 LC 共振频率,  $\omega = \omega_0$  的电路状态称为共振状态。

下面根据约定求例 3.2.3 中滤波器的两截止频率的距离, 即带宽 (BW)。令

$$|G_v(\omega)| = \left| \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

解得  $\omega_c = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \pm \frac{R}{2L}$ , 即知  $BW = \frac{R}{L}$ 。进而注意到

$$\begin{aligned} G_v(\omega) &= \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{j}{R}\left(\frac{\omega L}{\omega_0 \sqrt{LC}} - \frac{\omega_0 \sqrt{LC}}{\omega C}\right)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{j}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \end{aligned}$$

定义品质参数  $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ , 重新计算  $BW$ , 令  $|G_v(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 解出

$$\omega_c = \omega_0 \left( \sqrt{\frac{1}{4Q^2 + 1}} \pm \frac{1}{2Q} \right)$$

则  $BW = \frac{\omega_0}{Q}$ 。

当频率  $\omega$  为共振频率  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  时, 电路阻抗  $Z_{eq} = R$ 。此时, 设  $v_{in}(t) = V_0 \cos \omega_0 t$ , 则  $i(t) = \frac{V_0}{R} \cos \omega_0 t$ , 则可求

$$\begin{aligned} w_s(t) &= w_L(t) + w_C(t) = \frac{1}{2}Li^2(t) + \frac{1}{2}C\left(\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau\right)^2 \\ &= \frac{V_0^2 L}{2R^2} \cos^2 \omega_0 t + \frac{V_0^2}{2\omega_0^2 R^2 C} \sin^2 \omega_0 t \equiv \frac{V_0^2 L}{2R^2} \\ w_D(T) &= \int_0^T i^2(t) R dt = \frac{V_0^2 T}{2R} \end{aligned}$$

于是  $\frac{w_s}{w_D} = \frac{\frac{V_0^2 L}{2R^2}}{\frac{V_0^2 T}{2R}} = \frac{L}{RT} = \frac{\omega_0 L}{2\pi R} = \frac{L}{2\pi R \sqrt{LC}}$ , 即有

$$Q = 2\pi \frac{w_s}{w_D} \quad (3.2)$$

### 3.2.3 Bode 图

传递函数绘图的  $\omega$  轴通常使用对数坐标。但对数坐标不是线性的, 给作图带来了一些不便。为此, 引入注中的分贝 (dB), 建立对数频率坐标和增益分贝坐标的关系。

功率增益  $\frac{P_{out}}{P_{in}}$  以 dB 作单位定义为

$$\frac{P_{out}}{P_{in}} = 10 \lg \frac{P_{out}}{P_{in}} \text{ dB}$$

其就有

$$\begin{aligned}\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} &= 10 \lg \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} \text{ dB} = 10 \lg \left( \frac{V_o^2}{R_o} \middle| \frac{V_i^2}{R_i} \right) \text{ dB} \\ &= 10 \lg \left( \frac{V_o}{V_i} \right)^2 \text{ dB} + 10 \lg \frac{R_i}{R_o} \text{ dB} \xrightarrow{\text{if } R_i=R_o} 20 \lg \frac{V_o}{V_i} \text{ dB}\end{aligned}$$

于是电压增益  $\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}}$  以 dB 作单位定义为

$$\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = 20 \lg \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} \text{ dB}$$

一般形式的传递函数为

$$H(\omega) = H_0 \frac{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{z1}}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{z2}}\right) \cdots \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{zm}}\right)}{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{p1}}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{p2}}\right) \cdots \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{pm}}\right)} = H_0 \frac{A_{z1}/\phi_{z1} \cdot A_{z2}/\phi_{z2} \cdots A_{zm}/\phi_{zm}}{A_{p1}/\phi_{p1} \cdot A_{p2}/\phi_{p2} \cdots A_{pm}/\phi_{pm}} \quad (3.3)$$

对分子中一项的贡献  $H_{zk}(\omega) = 1 + \frac{j\omega}{\omega_{zk}}$ , 可知:

- $\omega \ll \omega_{zk}$  时,  $H_{zk}(\omega) \rightarrow 1$ ;
- $\omega$  在  $\omega_{zk}$  附近时,  $H_{zk}(\omega_{zk}) = 1 + j$ ,  $H_{zk}(10\omega_{zk}) = 1 + 10j \approx 10j \approx 10H_{zk}(\omega_{zk})$ ;
- $\omega \gg \omega_{zk}$  时,  $H_{zk}(\omega) \rightarrow \frac{j\omega}{\omega_{zk}}$ 。

其中, 对幅值  $|H_{zk}(\omega)|$ , 以 dB 作单位就有

$$\begin{aligned}|H_{zk}(10\omega_{zk})| - |H_{zk}(\omega_{zk})| &= 20 \lg |H_{zk}(10\omega_{zk})| \text{ dB} - 20 \lg |H_{zk}(\omega_{zk})| \text{ dB} \\ &= 20 \lg \frac{|H_{zk}(10\omega_{zk})|}{|H_{zk}(\omega_{zk})|} \text{ dB} = 20 \lg 10 \text{ dB} = 20 \text{ dB}\end{aligned}$$

即, 在  $\omega_{zk}$  附近,  $\omega$  每增大 10 倍,  $|H_{zk}(\omega)|$  的 dB 值滚升 20 dB; 对幅角  $\arg H_{zk}(\omega)$ , 则有

$$\arg H_{zk}(\omega_{zk}) = 45^\circ, \quad \arg H_{zk}(10\omega_{zk}) \approx 90^\circ$$

即, 在  $\omega_{zk}$  附近,  $\omega$  每增大 10 倍, 相位正偏  $45^\circ$ 。类似可知, 对分母中一项的贡献  $H_{pk}(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_{zk}}}$ , 在  $\omega_{pk}$  附近,  $\omega$  每增大 10 倍,  $|H_{pk}(\omega)|$  的 dB 值滚降 20 dB, 相位回偏  $45^\circ$ 。

### 注 3.2. Laplace 域

## 3.3 双端口网络

### 定义 3.3.1. 双端口网络 (two-port network)

双端口网络是一种具有四个端子的电路网络, 其四个端子构成两对端子, 每个端口的一对端子上的电流相等。

### 3.3.1 双端口网络的参数与变量

双端口网络的变量为两个端口上的电压、电流  $v_1, v_2, i_1, i_2$ 。我们考虑取出两个变量为输入变量，两个变量为输出变量，这共有 6 种可能，形成 6 组参数。

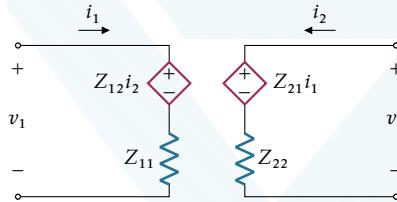
A) **Z 参数与 Y 参数** 考虑以  $i_1, i_2$  为自变量， $v_1, v_2$  为因变量，在线性电路中就有

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

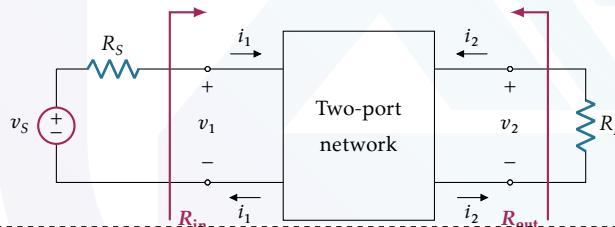
分别令端口开路（使  $i_1 = 0$  或  $i_2 = 0$ ），加压求流、加流求压，就有

$$Z_{11} = \frac{v_{\text{test}1}}{i_{\text{test}1}} \Big|_{i_2=0}, \quad Z_{12} = \frac{v_{\text{test}1}}{i_{\text{test}2}} \Big|_{i_1=0}, \quad Z_{21} = \frac{v_{\text{test}2}}{i_{\text{test}1}} \Big|_{i_2=0}, \quad Z_{22} = \frac{v_{\text{test}2}}{i_{\text{test}2}} \Big|_{i_1=0}$$

矩阵  $Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$  称为双端口网络的 **Z 参数矩阵**。



**例题 3.3.1.** 求该双端口网络的传递函数  $H = \frac{v_L}{v_S}$ 、输入阻抗  $R_{\text{in}}$ 、输出阻抗  $R_{\text{out}}$ ，其中双端口网络的 Z 参数已知。



解. 由 KVL 有  $\begin{cases} v_S = R_S i_1 + v_1, \\ v_2 + R_L i_2 = 0, \end{cases}$  而  $\begin{cases} v_1 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2, \\ v_2 = Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2, \end{cases}$  即解出

$$v_S = \left( R_S + Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{R_L + Z_{22}} \right) i_1$$

于是知

$$\begin{aligned} H = \frac{v_L}{v_S} &= \frac{-R_L i_2}{\left( R_S + Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{R_L + Z_{22}} \right) i_1} = \frac{-R_L}{\left( R_S + Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{R_L + Z_{22}} \right)} \cdot \frac{-Z_{21}}{R_L + Z_{22}} \\ &= \frac{R_L Z_{21}}{(R_S + Z_{11})(R_L + Z_{22}) - Z_{12} Z_{21}} \end{aligned}$$

知  $v_S = R_S i_1 + R_{\text{in}} i_1$ ，对比系数即知  $R_{\text{in}} = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{R_L + Z_{22}}$ 。

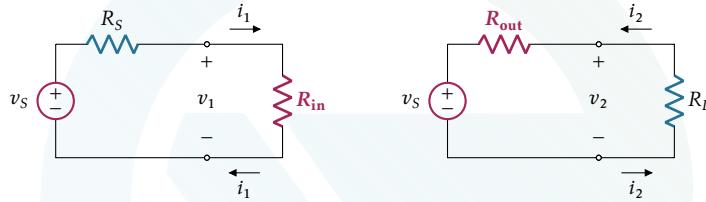
将  $v_S = \left( R_S + Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{R_L + Z_{22}} \right) i_1$  代入  $i_2 = -\frac{Z_{21}}{R_L + Z_{22}} i_1$ , 即有

$$i_2 = -\frac{Z_{21}}{R_L + Z_{22}} \cdot \frac{v_S}{R_S + Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{R_L + Z_{22}}} = -\frac{Z_{21}v_S}{(R_L + Z_{22})(R_S + Z_{11}) - Z_{12}Z_{21}}$$

即  $\frac{Z_{21}}{R_S + Z_{11}} v_S = -R_L i_2 - \left( Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{R_S + Z_{11}} \right) i_2$ , 其中  $-R_L i_2 = v_2$ , 则

$$R_{\text{out}} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{R_S + Z_{11}} \quad (3)$$

例 3.3.1 电路中可以化为:



其中  $R_{\text{in}} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{R_L + Z_{22}}$ ,  $R_{\text{out}} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{R_S + Z_{11}}$ 。当有最大能量传输效率（最大能量传递函数）时，两个电

路中分别有  $\begin{cases} R_{\text{in}} = R_S, \\ R_{\text{out}} = R_L, \end{cases}$  于是解得

$$\begin{aligned} R_S &= \sqrt{Z_{11} \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{22}}} = \sqrt{R_{\text{in}} \Big|_{R_L=0} \cdot R_{\text{in}} \Big|_{R_L=\infty}} \\ R_L &= \sqrt{Z_{22} \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{11}}} = \sqrt{R_{\text{out}} \Big|_{R_S=0} \cdot R_{\text{out}} \Big|_{R_S=\infty}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

类似地，考虑以  $v_1, v_2$  为自变量， $i_1, i_2$  为因变量，在线性电路中就有

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

分别令端口短路（使  $v_1 = 0$  或  $v_2 = 0$ ），加压求流、加流求压，就有

$$Y_{11} = \frac{i_{\text{test}1}}{v_{\text{test}1}} \Big|_{v_2=0}, \quad Y_{12} = \frac{i_{\text{test}1}}{v_{\text{test}2}} \Big|_{v_1=0}, \quad Y_{21} = \frac{i_{\text{test}2}}{v_{\text{test}1}} \Big|_{v_2=0}, \quad Y_{22} = \frac{i_{\text{test}2}}{v_{\text{test}2}} \Big|_{v_1=0}$$

矩阵  $Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$  称为双端口网络的 **Y 参数矩阵**。

注意到  $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ , 即知

$$Z = Y^{-1}$$

B)  **$T$  参数与  $T'$  参数** 类似地, 记双端口网络中

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

矩阵  $T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  称为双端口网络的  **$T$  参数矩阵**。令右侧端口开路、短路, 在左侧加压求流、加流求压, 就有

$$A = \left. \frac{v_{\text{test}1}}{v_{\text{test}2}} \right|_{i_2=0}, \quad B = -\left. \frac{v_{\text{test}1}}{i_{\text{test}2}} \right|_{v_2=0}, \quad C = \left. \frac{i_{\text{test}1}}{v_{\text{test}2}} \right|_{i_2=0}, \quad D = -\left. \frac{i_{\text{test}1}}{i_{\text{test}2}} \right|_{v_2=0}$$

记双端口网络中

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ -i_1 \end{bmatrix}$$

矩阵  $T' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  称为双端口网络的  **$T'$  参数矩阵**。令左侧端口开路、短路, 在右侧加压求流、加流求压, 就有

$$a = \left. \frac{v_{\text{test}2}}{v_{\text{test}1}} \right|_{i_1=0}, \quad b = -\left. \frac{v_{\text{test}2}}{i_{\text{test}1}} \right|_{v_1=0}, \quad c = \left. \frac{i_{\text{test}2}}{v_{\text{test}1}} \right|_{i_1=0}, \quad d = -\left. \frac{i_{\text{test}2}}{i_{\text{test}1}} \right|_{v_1=0}$$

C)  **$h$  参数与  $g$  参数** 记双端口网络中

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

矩阵  $h = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$  称为双端口网络的  **$h$  参数矩阵**。类似, 记

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

矩阵  $g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$  称为双端口网络的  **$g$  参数矩阵**。同上有  $h = g^{-1}$ 。

### 3.3.2 双端口网络的连接

双端口网络的串联如图 3.7 所示, 其伏安特性有

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = Z_1 \begin{bmatrix} i_{11} \\ i_{12} \end{bmatrix} + Z_2 \begin{bmatrix} i_{21} \\ i_{22} \end{bmatrix} = (Z_1 + Z_2) \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

即其  $Z$  参数

$$Z_{\text{串}} = Z_1 + Z_2$$

类似, 双端口网络的并联如图 3.8 所示, 其伏安特性有

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{11} \\ i_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{21} \\ i_{22} \end{bmatrix} = Y_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} + Y_2 \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = (Y_1 + Y_2) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

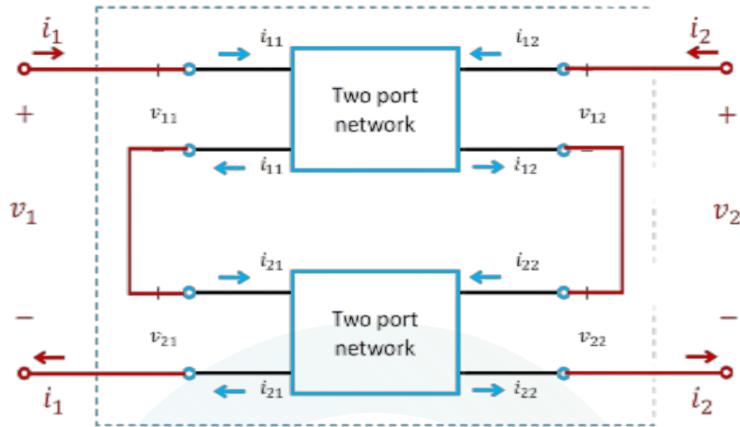


图 3.7: 双端口网络的串联

即其 Y 参数

$$Y_{\text{并}} = Y_1 + Y_2$$

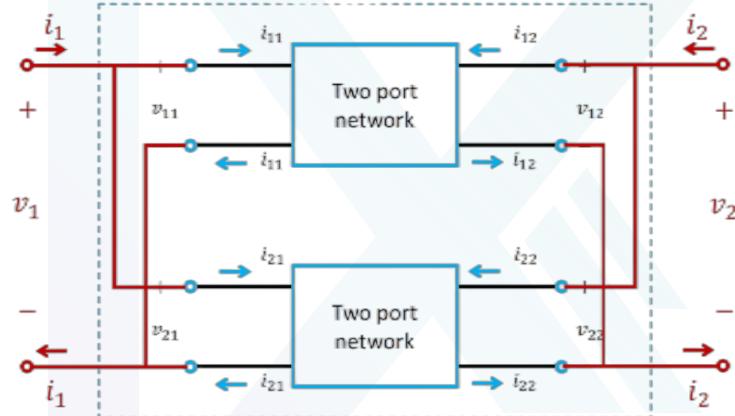


图 3.8: 双端口网络的并联

## 4 非线性器件

### 4.1 pn 结与二极管

#### 4.1.1 p型半导体与n型半导体

硅晶体中，在0 K下每个硅原子周边成4根共价键，价电子全部约束在共价键内，称为本征硅；温度升高，电子逃逸成为自由电子（n），在其母原子周围留下空穴（p）。当加上电场时，自由电子将定向移动，空穴临近位置的约束电子也可能填补空穴，在其原位置产生新的空穴，形成空穴的「移动」。因此，在半导体中有两种载流子：带一个单位负电荷的自由电子，和带一个单位正电荷的空穴。其中含量多的称为多数载流子，简称多子；含量少的称为少数载流子，简称少子。

但纯硅晶体中载流子的浓度太低，无法传导明显的电流。为提高载流子的浓度，往往对硅晶体掺杂，即引入价电子数不同的杂质原子。

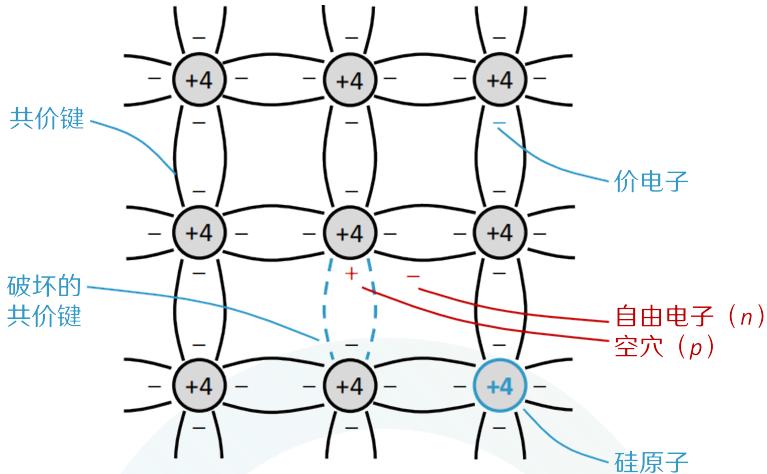


图 4.9: 半导体中的载流子

- 引入 5 价原子（如 P），每个杂质原子可额外贡献一个自由电子，会使自由电子浓度增大，形成 **n 型半导体**。**n 型半导体**中，多子为自由电子，少子为空穴。
- 引入 3 价原子（如 B），每个杂质原子可从临近原子接受一个电子，从而额外产生一个空穴，形成 **p 型半导体**。**p 型半导体**中，多子为空穴，少子为自由电子。

半导体中载流子（自由电子和空穴）的运动产生电流。由电场作用产生的电流称为**漂移电流**，其电流密度与载流子的电荷量、浓度、迁移率成正比，即有

漂移电流

drift current

$$J_p = q_e p \mu_p E, \quad J_n = q_e n \mu_n E$$

其中  $p$  和  $n$  就分别是空穴和自由电子的浓度， $\mu_p$  和  $\mu_n$  分别是空穴和自由电子的迁移率，而总电流密度就是

$$J = J_p + J_n = q_e(p\mu_p + n\mu_n)E$$

即电导率为  $\sigma = \frac{J}{E} = q_e(p\mu_p + n\mu_n)$ 。

由载流子顺浓度梯度的扩散产生的电流称为**扩散电流**，其电流密度与载流子的电荷量、扩散常数和浓度梯度成正比，即有

$$J_p = -q_e D_p \nabla p, \quad J_n = -q_e D_n \nabla n$$

其中  $D_p$  和  $D_n$  分别是空穴和自由电子的扩散常数，满足  $\frac{D_n}{\mu_n} = \frac{D_p}{\mu_p} = V_T$ ，这个比值称为**热电压**，其值为  $V_T = \frac{kT}{q_e}$ ，其中  $k \approx 1.3806488 \times 10^{-23}$  J/K 为 Boltzmann 常数。温度取 300 K 时，热电压的值为  $2.585 \times 10^{-2}$  V。

#### 4.1.2 pn 结

将 **p 型半导体**与 **n 型半导体**靠在一起，接触位置会发生两种载流子的扩散：空穴向 **n 型半导体**扩散，自由电子向 **p 型半导体**扩散，使得 **n 型半导体**一侧电势稍高于 **p 型半导体**一侧，形成**耗尽层**并建立起电场。该电场会在耗尽层产生**势垒电压**，其值为

$$V_0 = V_T \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2}$$

其中  $N_A$  和  $N_D$  分别是 **p 型半导体**与 **n 型半导体**中的掺杂浓度。该电压会阻碍空穴和自由电子的扩散，因此需要加上直流偏压。

A) 正向偏置电压 外加电场的方向与内建电场的方向相反。此时，外加电压将使得耗尽层  $n$  侧正电荷减少， $p$  侧负电荷减少，耗尽层变薄。同时， $p$  型半导体中空穴增多， $n$  型半导体中自由电子增多，因而顺外加电压方向可以产生较大的扩散电流。

B) 反向偏置电压 外加电场的方向与内建电场的方向相同。

#### 4.1.3 $pn$ 结二极管

##### 元件 4.1. 二极管 (diode)

记号 ——  —— (Do)

特性 具有单向导通性，伏安特性为  $i = I_S \left( e^{\frac{v}{V_T}} - 1 \right)$  ( $v \geq 0$ )。

这个伏安特性近似也可以写成  $v \approx V_T \ln \frac{i}{I_S}$  ( $i \geq 0$ )。在基尔霍夫定律方程中出现这样的项，往往会将线性方程变为没有解析解的超越方程。因而，需要对二极管进行线性建模。

A) 恒压降模型 认为导通后电流随电压变化极快，各电流对应电压视作常量  $v_D$ 。则导通后，二极管可视为一个顺着导通方向恒有  $v_D$  压降的直流恒压源。

B) 小信号模型 1

##### 元件 4.2. 齐纳二极管

记号 ——  —— (zDo)

特性 在反向「breakdown」区工作。

#### 4.1.4 特殊的二极管

##### 元件 4.3. 发光二极管 (LED)

记号 ——  —— (leDo)

特性 具有二极管的一般特性，同时导通时将电信号转化为光信号。

##### 元件 4.4. 光电二极管 (photodiode)

记号 ——  —— (pDo)

特性

## 4.2 双极结式晶体管 (BJT)

### 元件 4.5. BJT

记号 *npn* 型 BJT 记为 —— ( *npn* ), *pnp* 型 BJT 记为 —— ( *pnp* )。

特性 见 4.2.2 节。

### 4.2.1 BJT 的结构与原理

如图 4.10, *npn* 型 BJT 由三个半导体区域组成: **发射极区** (*E*, *n*型)、**基极区** (*B*, *p*型) 和**集电极区** (*C*, *n*型)。*pnp* 型 BJT 各区域的半导体材料相反。相邻两个区域相接构成 *pn* 结, 即形成**发射结 (EBJ)** 和**集电结 (CBJ)**。

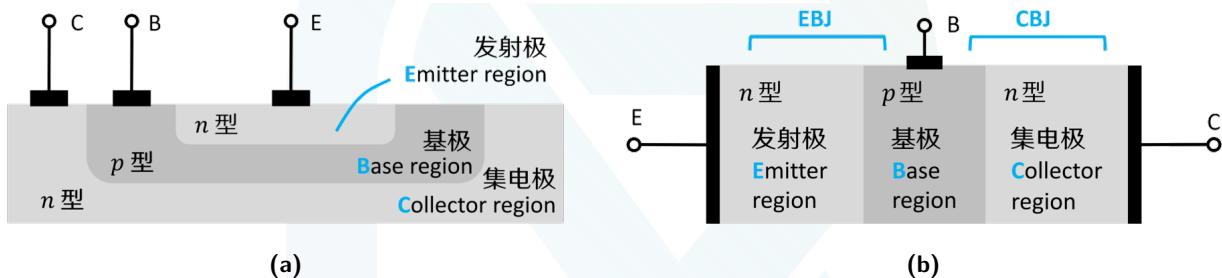


图 4.10: *npn* 型 BJT 的横截面结构示意图

按照两个 *pn* 结的通断特性, BJT 有如表 4.5 所示的四种工作模式。下面以 *npn* 型 BJT 为例, 对它的各模式电路进行分析。

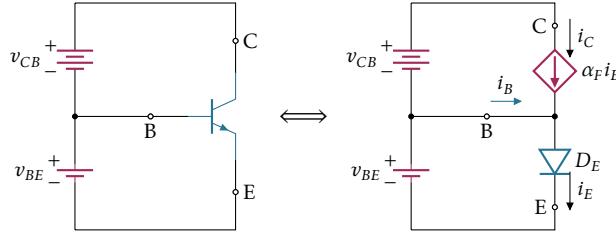
表 4.5: BJT 的工作模式

模式	EBJ	CBJ
截止 Cutoff	反偏电压	反偏电压
饱和 Saturation	正偏电压	正偏电压
正激活 Active	正偏电压	反偏电压
反激活 Reverse active	反偏电压	正偏电压

A) 正激活 Active 模式 EBJ 上有正向偏压, CBJ 上有反向偏压, 即  $v_{BE} > 0$ ,  $v_{BC} < 0$ 。其集电极电流  $i_C$ 、基极电流  $i_B$ 、发射极电流  $i_E$  分别为

$$\begin{aligned} i_C &= I_S e^{\frac{v_{BE}}{V_T}}, & \text{其中 } I_S = \frac{A_E q D_n n_i^2}{N_A W} \\ i_B &= \frac{i_C}{\beta_F} = \frac{I_S}{\beta_F} e^{\frac{v_{BE}}{V_T}} \\ i_E &= \frac{i_C}{\alpha_F} = \frac{I_S}{\alpha_F} e^{\frac{v_{BE}}{V_T}}, & \text{其中 } \alpha_F = \frac{\beta_F}{\beta_F + 1} \end{aligned} \quad (4.1)$$

其电路可有等效替代如下:



公式中,  $\beta_F$  的典型值在 50~200 之间, 则  $\alpha_F \approx 1$ 。

**B) 反激活 Reverse active 模式** EBJ 上有反向偏压, CBJ 上有正向偏压, 即  $v_{BE} < 0$ ,  $v_{BC} > 0$ 。其集电极电流  $i_C$ 、基极电流  $i_B$ 、发射极电流  $i_E$  的关系与上面类似, 即

$$\begin{aligned} i_E &= I_S e^{\frac{v_{BC}}{V_T}}, & \text{其中 } I_S = \frac{A_E q D_n n_i^2}{N_A W} \\ i_B &= \frac{i_E}{\beta_R} = \frac{I_S}{\beta_R} e^{\frac{v_{BC}}{V_T}} \\ i_C &= \frac{i_E}{\alpha_R} = \frac{I_S}{\alpha_R} e^{\frac{v_{BC}}{V_T}}, & \text{其中 } \alpha_R = \frac{\beta_R}{\beta_R + 1} \end{aligned} \quad (4.2)$$

不同的是,  $\alpha_R$  约为 0.01~0.05。

**C) 饱和 Saturation 模式** EBJ、CBJ 上均是正向偏压, 即  $v_{BE} > 0$ ,  $v_{BC} > 0$ 。此时有

$$i_C = \left( \alpha_F - \frac{1}{\alpha_R} \right) I_S \left( e^{\frac{v_{BC}}{V_T}} - 1 \right) + \alpha_F i_E \quad (4.3)$$

可见当  $v_{BC}$  增大时, 由  $\alpha_F - \frac{1}{\alpha_R} < 0$ , 知  $i_C$  减小。

#### 4.2.2 BJT 的端口特性

**A) BJT 的伏安特性** 显见其服从基尔霍夫定律。此外, 由上面分析可知三个端口电流的关系, 以下即仅分析  $i_C$ 。

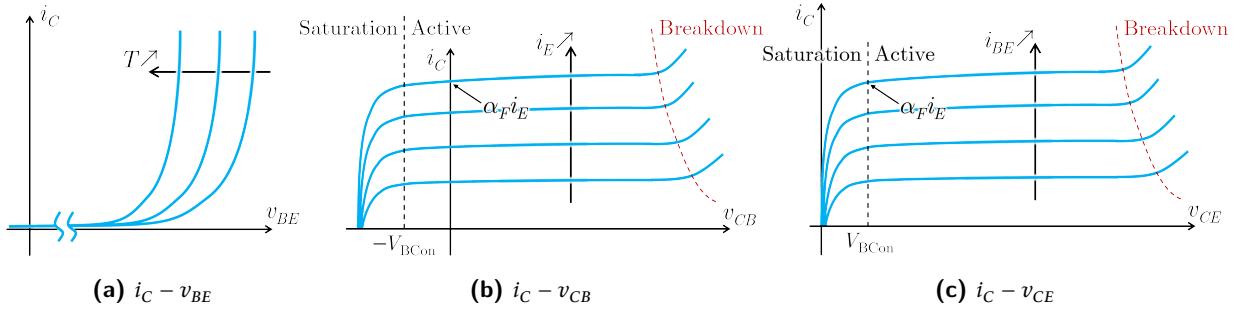
$i_C - v_{BE}$  特性 由  $i_C = I_S e^{v_{BE}/V_T}$  可直接得出。

$i_C - v_{CB}$  特性 固定  $i_E$ , Active 模式下,  $i_C = I_S e^{v_{BE}/V_T}$  与  $v_{CB}$  无直接关系,  $i_C - v_{CB}$  曲线是一条与  $i_C$  轴交于  $\alpha_F i_E$  处的水平线; 反号后  $v_{BC}$  继续增大进入 Saturation 模式, 当  $v_{BC}$  增大时, 由  $\alpha_F - \frac{1}{\alpha_R} < 0$ , 知  $i_C = \left( \alpha_F - \frac{1}{\alpha_R} \right) I_S \left( e^{\frac{v_{BC}}{V_T}} - 1 \right) + \alpha_F i_E$  减小。此外, 当  $v_{CB}$  过大导致反偏  $pn$  结击穿时,  $i_C$  即随  $v_{CB}$  增大。

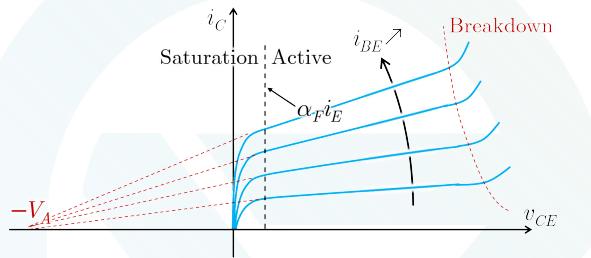
$i_C - v_{CE}$  特性 固定  $i_E$  (也即固定  $v_{BE}$ ), 由  $v_{CE} = v_{BE} + v_{CE}$ , 容易得到  $i_C - v_{CE}$  特性曲线与  $i_C - v_{CB}$  曲线的关系。

实际上,  $npn$  型 BJT 的  $i_C - v_{CE}$  特性曲线没有上面那么完美, 在 Active 模式区域其并不水平, 而是有轻微的上翘, 即 Active 模式下  $i_C$  仍是与  $v_{CE}$  有关的:

$$i_C = I_S e^{\frac{v_{BE}}{V_T}} \left( 1 + \frac{v_{CE}}{V_A} \right) \quad (4.4)$$

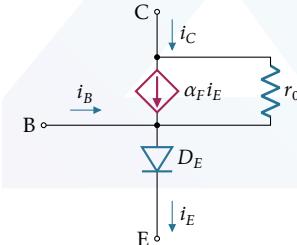
图 4.11:  $npn$  型 BJT 的伏安特性曲线

式中  $V_A$  称为 Early 电压, 这个现象称为 Early 效应。

图 4.12: 考虑 Early 效应时  $npn$  型 BJT 的  $i_C - v_{CE}$  特性曲线

Early 效应产生自 Active 模式下从集电极看去的电阻不为无穷, 即集电极的流控流源上并联有电阻  $r_0$ 。对  $i_C = I_S e^{v_{BE}/V_T} \left( 1 + \frac{v_{CE}}{V_A} \right)$  求导, 有

$$r_0 = \left( \frac{\partial i_C}{\partial v_{CE}} \Big|_{v_{BE}} \right)^{-1} = \frac{V_A + V_{CE}}{I_C} \approx \frac{V_A}{I_C}$$

图 4.13: 考虑 Early 效应的  $npn$  型 BJT 的 Active 模式模型

$npn$  型 BJT 的  $i_C - v_{CE}$  上, Saturation 区域中更靠近  $v_{CE} = 0$  的区域中曲线斜率会有明显的增大, 这块区域称为 Deeper Saturation 区 (深度饱和区)。此区域中, 不同于先前的大信号  $\beta$  ( $\beta_{DC} = \frac{I_C}{I_B} = \beta_F$ ), 定义小信号  $\beta$  为  $\beta_{AC} = \frac{\Delta i_C}{\Delta i_B} \Big|_{v_{CE}}$ 、强制  $\beta$  为  $\beta_{forced} = \frac{i_C}{i_B} \Big|_{v_{CE}}$ , 这两个  $\beta$  比大信号  $\beta$  小不少。

此外, 深度饱和区中, 可以近似有  $v_{CEsat} = v_{CEoff} + I_{Csat} R_{CEsat}$ , 其中  $R_{CEsat} = \frac{\partial v_{CE}}{\partial i_C} \Big|_{\substack{i_B=I_B \\ i_C=I_{Csat}}}^*$ 。

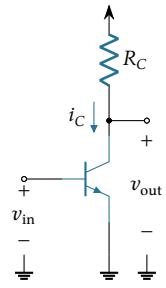
一般取临界饱和区  $V_{CEsat} = 0.3 \text{ V}$ , 深度饱和区  $V_{CEsat} = 0.2 \text{ V}$ 。

**B) BJT 的传递特性**  $npn$  型 BJT 的传递特性, 一般考虑的是  $v_{CE} - v_{BE}$  传递特性。在 Cutoff 模式,  $v_{BE} < v_{BEon}$ ; 在 Saturation 模式,  $v_{BE} > v_{BEon}$ ,  $v_{BC} = v_{BE} - v_{CE} > v_{BCon}$ ,  $v_{CE}$  电压也呈水平, 电压值下降至  $v_{CEsat}$ ; 在

Active 模式下,  $v_{BE} > v_{BEon}$ ,  $v_{BC} = v_{BE} - v_{CE} < v_{BCon}$ 。一般取这两个阈值电压  $v_{BEon} = 0.5 \text{ V}$ ,  $v_{BCon} = 0.4 \text{ V}$ 。

考虑在如右电路中进行定量分析:

- $v_{BE} < v_{BEon}$  时, BJT 工作在 Cutoff 模式,  $i_C = 0$ ,  $v_{out} = v_{CE} = V_{dd}$ ;
- $v_{BE} > v_{BEon}$ ,  $v_{BC} = v_{BE} - v_{CE} < v_{BCon}$  时, BJT 工作在 Active 模式下, 有  $i_C = I_S e^{v_{BE}/V_T}$ , 则  $v_{out} = V_{dd} - i_C R_C = V_{dd} - R_C I_S e^{v_{in}/V_T}$ ;
- $v_{BC} = v_{BE} - v_{CE} = v_{in} - v_{out} > v_{BCon}$  时, 即  $v_{out} < v_{in} - v_{BCon}$  时, BJT 工作在 Saturation 模式,  $v_{out} = V_{CEsat}$ ,  $I_{Csat} = \frac{V_{dd} - V_{CEsat}}{R_C}$ 。



#### 4.2.3 BJT 直流分析

BJT 工作在 Cutoff 模式下和 Saturation 模式下时, 其通断行为为一个受  $v_{in}$  控制的开关。

BJT 工作在 Active 模式时, 若直接解 KVL、KCL 方程, 由于有  $I_C = I_S e^{\frac{v_{BE}}{V_T}}$  等超越式, 方程一般没有解析解。一般取  $|V_{BE}| = 0.7 \text{ V}$ , 替代超越式列方程求解。

#### 4.2.4 BJT 交流分析

在  $v_{BE} - v_{CE}$  传递曲线中, Active 模式区域中有一段斜率变化不大的曲线。加直流偏置电压  $V_{BE}$  偏置到该区域中静态工作点  $Q$ , 然后加交流小信号, 则输出的交流成分是交流小信号依  $Q$  处斜率的放大信号, 增益可有估计

$$A_v = \left. \frac{dv_o}{dv_{in}} \right|_{v_{in}=V_{BE}} = -\frac{1}{V_T} R_C I_S e^{v_{BE}/V_T} = -\frac{I_C R_C}{V_T} = -\frac{V_{dd} - V_{CE}}{V_T} > -\frac{V_{dd} - V_{CEsat}}{V_T}$$

偏置点  $Q$  的选取, 或者说偏置电压  $V_{BE}$  的取值, 对上面所述的放大过程十分重要。

**定量分析** 设 BE 上输入电压  $v_{in} = V_{BE} + v_{be} \sin(\omega t + \varphi)$ , 则由 Active 模式电流关系即有

$$\begin{aligned} i_C &= I_S e^{V_T^{-1} v_{BE}} = I_S e^{V_T^{-1} (V_{BE} + v_{be} \sin(\omega t + \varphi))} \xrightarrow{I_C = I_S e^{V_T^{-1} V_{BE}}} I_C e^{V_T^{-1} v_{be} \sin(\omega t + \varphi)} \\ &\xrightarrow{v_{be} \ll V_T} I_C \left( 1 + \frac{1}{V_T} v_{be} \sin(\omega t + \varphi) \right) = I_C + \frac{I_C}{V_T} v_{be} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

定义电路的跨导值

$$g_m = \frac{I_C}{V_T} = \left. \frac{\partial i_C}{\partial v_{BE}} \right|_{i_C = I_C} \quad (4.5)$$

进一步, 代入可求

$$v_o = V_{dd} - i_C R_C = V_{dd} - I_C R_C - \frac{I_C}{V_T} R_C v_{be} \sin(\omega t + \varphi) = V_{CE} - g_m R_C v_{be} \sin(\omega t + \varphi)$$

于是

$$A_v = \frac{v_o|_{AC}}{v_{in}|_{AC}} = -g_m R_C \quad (4.6)$$

考虑自输入端 (基极) 看去的输入阻值, 其为  $R_{in} = \frac{\Delta v_{in}}{\Delta i_{in}} = \frac{\Delta v_{BE}}{\Delta i_B}$ 。由  $i_B = \frac{i_C}{\beta} = \frac{I_C}{\beta} + \frac{1}{\beta} \frac{I_C}{V_T} v_{in,AC}$ , 知  $\Delta i_B = \frac{1}{\beta} \frac{I_C}{V_T} v_{in,AC} = \frac{1}{\beta} g_m v_{AC}$ , 进而有

$$R_{in} = \frac{\Delta v_{BE}}{\Delta i_B} = \frac{v_{in,AC}}{\Delta i_B} = \frac{V_T}{I_B} = \frac{\beta}{g_m} \quad (4.7)$$

### 4.3 金属—氧化物—半导体场效应晶体管 (MOSFET)

#### 元件 4.6. MOSFET

记号  (nmos, bulk)  (pmos, bulk)

#### 特性

##### 4.3.1 MOSFET 的结构与原理

##### 4.3.2 MOSFET 的端口特性

A)  $i_D - v_{DS}$  特性 随  $v_{DS}$  增大, 在沟道夹断之前  $i_D$  不断增大, 直到  $v_{GS} - v_{DS} = V_{th}$  后沟道夹断,  $i_D$  不再变化。达到  $v_{GS} - v_{DS} = V_{th}$  之前, 称该 NMOS 管工作在 **Triode 区** (「三极管区」); 达到  $v_{GS} - v_{DS} = V_{th}$  之后, 称该 NMOS 管工作在 **Saturation 区** (「饱和区」)。

在 Triode 区, 有

$$i_D = \mu_n C_{ox} \frac{W}{L} \left[ (v_{GS} - V_{th}) v_{DS} - \frac{1}{2} v_{DS}^2 \right] \quad (4.8)$$

其中  $\frac{W}{L}$  即沟道的宽高比; 基于这个式子, 定义过驱动电压  $v_{OV} = v_{GS} - V_{th}$ , 跨导参数  $k_n = \mu_n C_{ox} \frac{W}{L}$ 。当  $v_{DS} \rightarrow 0$  时, 略去高次小项, 上式变为  $i_D = \mu_n C_{ox} \frac{W}{L} (v_{GS} - V_{th}) v_{DS} = k_n (v_{GS} - V_{th}) v_{DS}$ , 于是可以定义此时 NMOS 管的等效电阻  $r_{DS} = \frac{1}{k_n (v_{GS} - V_{th})}$ 。

在 Saturation 区,  $i_D$  将保持两区交界处的饱和值, 即向 4.8 式代入  $v_{DS} = v_{DSsat} = v_{GS} - V_{th}$ , 有

$$i_D = \frac{1}{2} \mu_n C_{ox} \frac{W}{L} (v_{GS} - V_{th})^2 \quad (4.9)$$

实际上, Saturation 区沟道夹断之后还会随  $v_{DS}$  增大继续缩短, 即会有

$$\begin{aligned} i_D &= \frac{1}{2} \mu_n C_{ox} \frac{W}{L - \Delta L} (v_{GS} - V_{th})^2 = \frac{1}{2} \mu_n C_{ox} \frac{W}{L \left(1 - \frac{\Delta L}{L}\right)} (v_{GS} - V_{th})^2 \\ &\xlongequal{\Delta L \ll L} \frac{1}{2} \mu_n C_{ox} \frac{W}{L} \left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right) (v_{GS} - V_{th})^2 \end{aligned}$$

而  $\Delta L \propto v_{DS}$ , 设比例系数为  $\frac{1}{V_A}$ , 则

$$i_D = \frac{1}{2} \mu_n C_{ox} \frac{W}{L} (v_{GS} - V_{th})^2 \left(1 + \frac{v_{DS}}{V_A}\right) \quad (4.10)$$

这称为**沟道长度调制效应**, 也沿用 BJT 中的名词称为 **Early 效应**, 其中  $V_A$  称为 **Early 电压**。考虑 Early 效应时, Saturation 区各  $v_{GS}$  下的  $i_D - v_{DS}$  曲线 (直线) 相交于  $v_{DS} = -V_A$  处。

**B)  $i_D - v_{GS}$  特性** 固定  $v_{DS}$ , 则由上知  $i_D - v_{GS}$  关系为

$$i_D = \begin{cases} 0, & v_{GS} < V_{th}, \\ \frac{1}{2}k_n(v_{GS} - V_{th})^2, & V_{th} < v_{GS} < V_{th} + v_{DS}, \\ k_n\left[(v_{GS} - V_{th})v_{DS} - \frac{1}{2}v_{DS}^2\right], & v_{GS} > V_{th} + v_{DS}. \end{cases}$$

其中, 通常更重要的是  $v_{GS} < V_{th} + v_{DS}$ , 即在 Saturation 区中的部分。

**C)  $v_{DS} - v_{GS}$  特性** 基于图 4.14a 所示电路, 由前面的伏安特性容易得到  $v_{DS} - v_{GS}$  关系, 其可分为 Cutoff、Saturation、Triode 三个区, 如图 4.14b 所示。

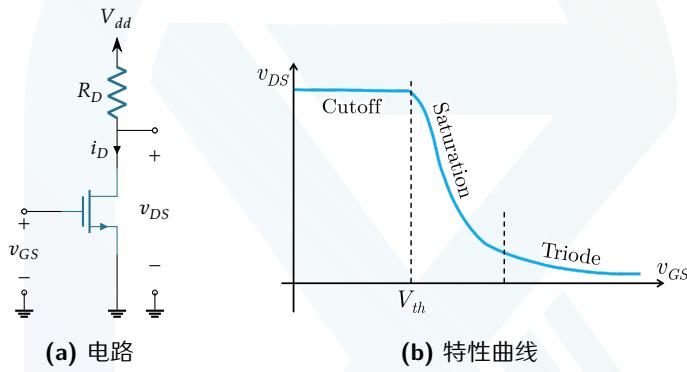


图 4.14: NMOS 管的  $v_{DS} - v_{GS}$  特性

### 4.3.3 MOSFET 的交流增益

在  $v_{DS} - v_{GS}$  传递曲线中, Saturation 区域中有一段斜率变化不大的曲线。加直流偏置电压  $V_{GS}$  偏置到该区域中**静态工作点**  $Q$ , 然后加交流小信号, 则输出的交流成分是交流小信号依  $Q$  处斜率的放大信号。

在 Saturation 区内, 据晶体管的特性有

$$i_D = \frac{1}{2}k_n(V_{GS} + v_{in,AC} - V_{th})^2 = \frac{1}{2}k_n(V_{GS} - V_{th})^2 + k_n(V_{GS} - V_{th})v_{in,AC} + \frac{1}{2}k_nv_{in,AC}^2$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}v_{in,AC} \ll V_{GS} - V_{th}} I_D + k_n(V_{GS} - V_{th})v_{in,AC}$$

其中定义**跨导参数**为

$$g_m = k_n(v_{in} - V_{th}) \quad (4.11)$$

基于图 4.14a 所示电路, 由  $v_{out} = V_{dd} - \frac{1}{2}k_n(v_{in} - V_{th})^2 R_D$ , 即有电压增益

$$A_v = \left. \frac{dv_{out}}{dv_{in}} \right|_{v_{in}=V_{GS}} = -k_n(v_{in} - V_{th})R_D = -g_m R_D$$

NMOS 管的小信号混合  $\pi$  模型如图 4.15。

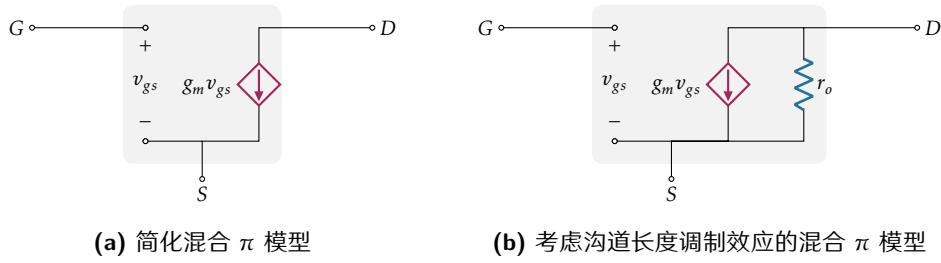


图 4.15: 小信号混合  $\pi$  模型

#### 4.3.4 MOSFET 的频率响应

如图 4.16 所示是一个典型的 CS 放大电路，其中  $C_1$ ,  $C_2$  称为耦合电容， $C_S$  称为旁路电容，它们起到为交流输入信号「隔直」的作用。但对低频交流信号，隔直电容并不能完全看作导线，从而对低频增益造成影响。

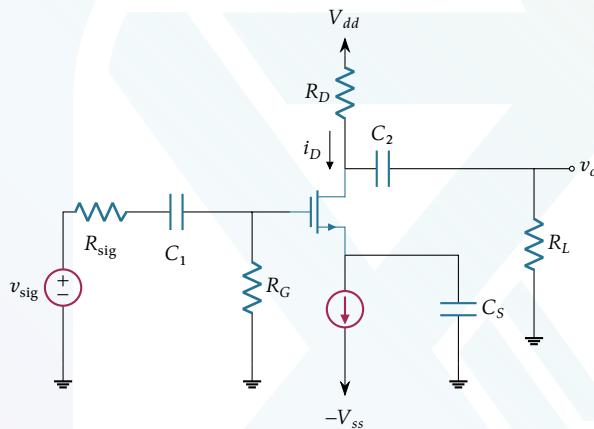


图 4.16: 一个典型的 CS 放大电路

- 考虑  $C_1$  的作用, 有

$$v_G = \frac{R_G}{R_{sig} + \frac{1}{sC_1} + R_G} v_{sig} = v_{sig} \frac{R_G}{R_{sig} + R_G} \frac{s}{s + \frac{1}{C_1(R_{sig} + R_G)}}$$

其向电路传函贡献了一个高通项，零点  $\omega_{L1} = \frac{1}{C_1(R_{sig} + R_G)}$ 。

- 考虑  $C_2$  的作用，有

$$v_{out} = -i_d \frac{R_D R_L}{R_D + R_L + \frac{1}{sC_2}} = -i_d R_L \frac{s}{s + \frac{1}{C_2(R_D + R_L)}}$$

其也向电路传函贡献了一个高通项，零点  $\omega_{L2} = \frac{1}{C_2(R_D + R_L)}$ 。

- 考虑  $C_S$  的作用, 有

$$v_G - g_m v_{gs} \frac{1}{s C_S} = v_{gs} \quad \Rightarrow \quad v_{gs} = v_G \frac{s}{s + \frac{g_m}{C_S}}$$

其也向电路传函贡献了一个高通项，零点  $\omega_{L3} = \frac{g_m}{C_s}$ 。

在高频部分, MOS 管栅极和衬底极之间的氧化物电容将导通, 不再有  $i_G = 0$ , 此时 NMOS 管的高频小信号模型如图 4.17 所示, 其中相比于一般小信号模型所多出的两个电容  $C_{gs}$ 、 $C_{gd}$  将对高频增益造成影响。将图 4.16 改写为高频交流形式如图 4.18, 注意到

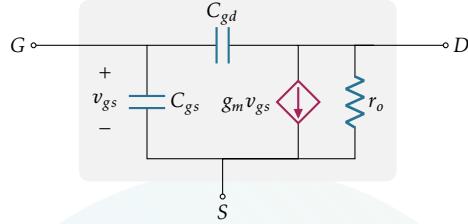


图 4.17: 高频小信号混合  $\pi$  模型

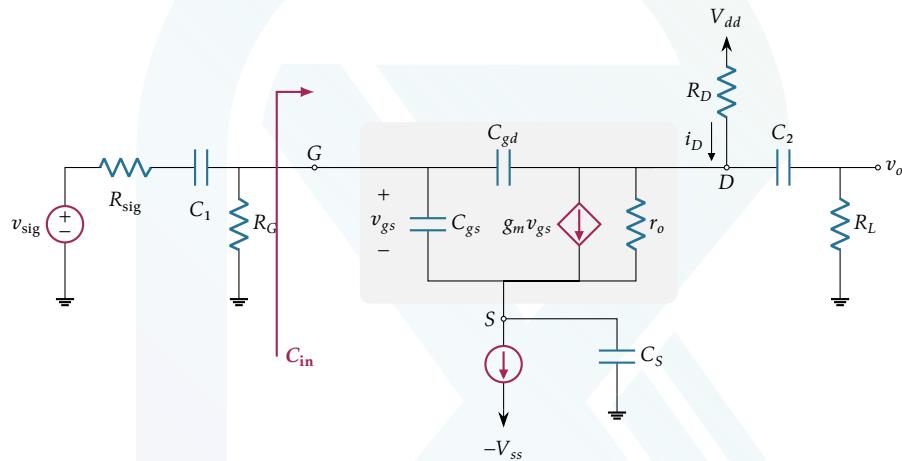


图 4.18: 图 4.16 中 CS 放大电路的高频交流等效形式

$$\begin{aligned} v_{\text{out}} &= (-g_m v_{gs} + i_{gd}) \cdot (R_L \parallel R_D \parallel r_o) \frac{\frac{g_m v_{gs} \gg i_{gd}}{R'_L := R_L \parallel R_D \parallel r_o}}{} - g_m v_{gs} R'_L \\ \implies i_{gd} &= (v_{gs} - v_{\text{out}}) s C_{gd} = (1 + g_m R'_L) s C_{gd} v_{gs} \\ \implies i_{\text{in}} &= i_{gs} + i_{gd} = (C_{gs} + C_{gd}(1 + g_m R'_L)) s v_{gs} \end{aligned}$$

即可定义  $C_{\text{in}} = C_{gs} + C_{gd}(1 + g_m R'_L)$ , 进而

$$G_v = \frac{v_o}{v_{\text{sig}}} = \frac{-g_m v_{gs} R'_L}{v_{\text{sig}}} = \frac{-g_m R'_L}{v_{\text{sig}}} \frac{v_{G\_TH}}{1 + s R_{G\_TH} C_{\text{in}}} = -\frac{g_m R'_L R_G}{R_{\text{sig}} + R_G} \frac{1}{1 + s R_{G\_TH} C_{\text{in}}}$$

其中  $R_{G\_TH} = R_{\text{sig}} \parallel R_B$ ,  $v_{G\_TH} = \frac{R_B}{R_{\text{sig}} + R_B} v_{\text{sig}}$ , 标红项  $\frac{1}{1 + s R_{G\_TH} C_{\text{in}}}$  即是向电路增益贡献的低通项, 极点

$$\omega_{H1} = \frac{1}{R_{G\_TH} C_{\text{in}}}.$$

## 4.4 晶体管模块实例

### 4.4.1 电流镜

最简单的电流镜形式如图 4.19a 所示。其中，不考虑 Early 效应，若做到两个 BJT 完全相同，即  $\beta_{Q_1} = \beta_{Q_2} = \beta$ ，就有

$$I_{\text{ref}} = I_{C1} + I_{B1} + I_{B2} = I_{C1} + \frac{I_{C1}}{\beta} + \frac{I_{C2}}{\beta} \xrightarrow{I_{\text{out}}=I_S e^{\frac{v_{BE}}{V_T}}} \left(1 + \frac{2}{\beta}\right) I_{\text{out}} \implies \frac{I_{\text{out}}}{I_{\text{ref}}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\beta}} \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} 1$$

若  $Q_2$  的发射结面积是  $Q_1$  的  $m$  倍，即  $I_{S2} = mI_{S1}$ ，则有

$$I_{\text{ref}} = I_{C1} + I_{B1} + I_{B2} = I_{C1} + \frac{I_{C1}}{\beta} + \frac{I_{C2}}{\beta} \xrightarrow{I_{\text{out}}=I_S e^{\frac{v_{BE}}{V_T}}} \left(1 + \frac{1}{m\beta} + \frac{1}{\beta}\right) I_{\text{out}} \implies \frac{I_{\text{out}}}{I_{\text{ref}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{m\beta} + \frac{1}{\beta}} \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} m$$

此即一个根据  $I_{\text{ref}}$  和  $m$  确定的电流源。写出小信号模型可知，其输出等效电阻即为  $r_{o2}$ ，不考虑 Early 效应时可视为  $R_{\text{out}} = \infty$ 。事实上，即使考虑 Early 效应，也可算出  $\frac{I_{\text{out}}}{I_{\text{ref}}} = \frac{m}{1 + \frac{1+m}{\beta}} \left(1 + \frac{V_{\text{out}} - V_{BE}}{V_{A2}}\right)$ ，只需控制  $V_{\text{out}} = V_{BE}$  即可在电流大小上与无 Early 效应时一致。

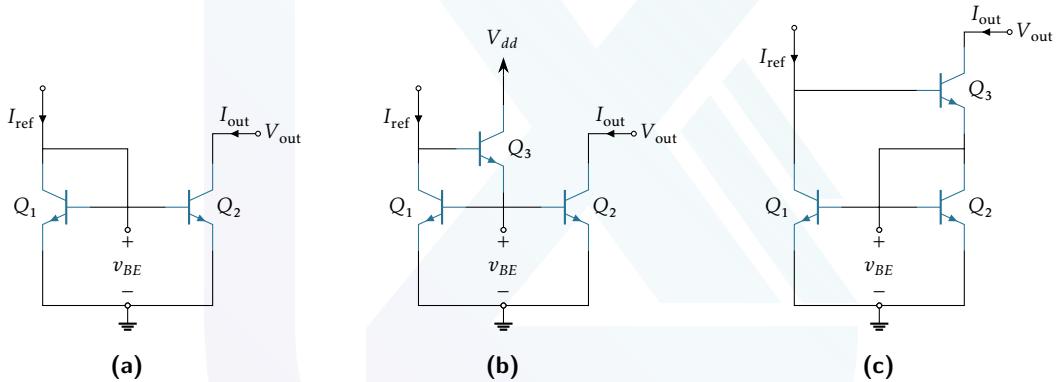


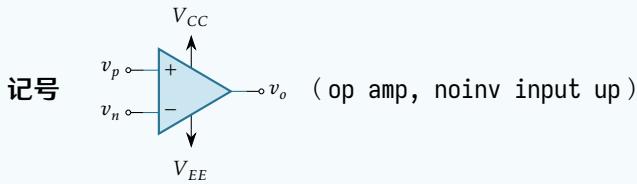
图 4.19: BJT 电流镜

### 4.4.2 差分对

## 5 运算放大器与反馈设计

### 5.1 运算放大器

#### 元件 5.1. 运算放大器 (operational amplifier)



**特性** 在直流电压  $V_{CC}$ ,  $V_{EE}$  驱动下, 输出端点相对接地的电压  $v_o = A_v(v_p - v_n)$ 。

我们可以用前面的组件构建运放器的简单模型, 如图 5.20。

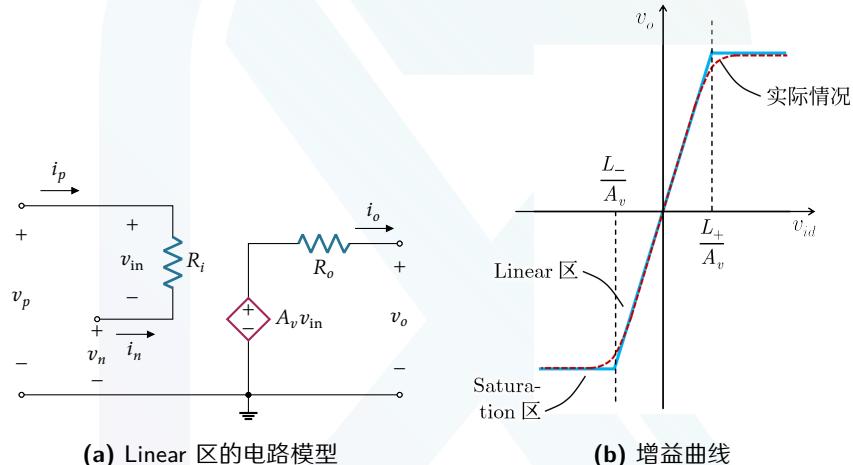


图 5.20: 运放器的增益特性模型

实际的运算放大器一般有较大的  $A_v$  值 ( $10^4 \sim 10^8$ ) 和  $R_i$  ( $10^6 \sim 10^{13} \Omega$ ) 以及较小的  $R_o$  ( $1 \sim 100 \Omega$ )。因此, 可以假设  $A_v = \infty$ ,  $R_i = \infty$ ,  $R_o = 0$ , 这样的运算放大器称为**理想运算放大器**, 如图 5.21 所示。当理想运放工作在 Linear 区时, 有

$$i_p = i_n = 0, \quad v_p = v_n$$

因此, 只要  $v_p \neq v_n$ , 理想运放的输出电平就只能为  $\pm V_{dd}$ 。

理想运放的一个直接应用是比较输入端两个信号 (通常是输入信号  $v_{in}$  和参考信号  $v_{ref}$ ) 的大小, 称为**过零检测器**, 记为

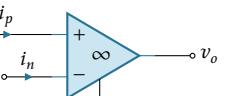


图 5.21: 理想运算放大器

**过零检测器**

zero-crossing  
detector

在  $v_{in} > v_{ref}$  时输出高电平, 后者在  $v_{in} < v_{ref}$  时输出高电平。基于过零检测器可以构建简单的模数转换器(ADC)。

### 注 5.1. 模拟信号与数字信号

与实际物理量变化形式类似的电信号称为模拟信号。在模拟信号上等时间间隔地采样并用有限位数的数字表示采样值的大小，就得到数字信号。数字信号常以二进制表示，在电信号上表现为只有高电平（1）和低电平（0）。

要将模拟信号转换为数字信号，需要用到如图 5.22 所示的模数转换器，其在输入端接入模拟电信号，在  $N$  个输出端输出  $N$  位二进制数表示的数字信号。

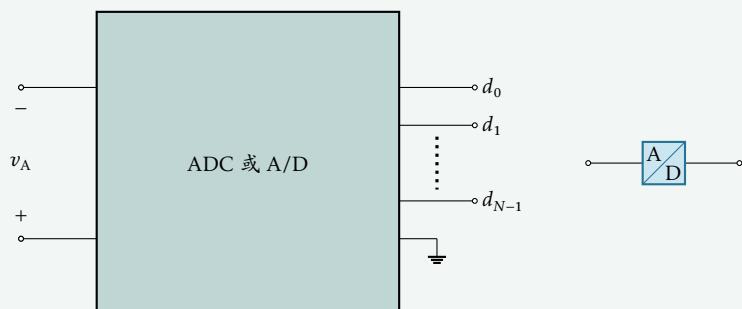
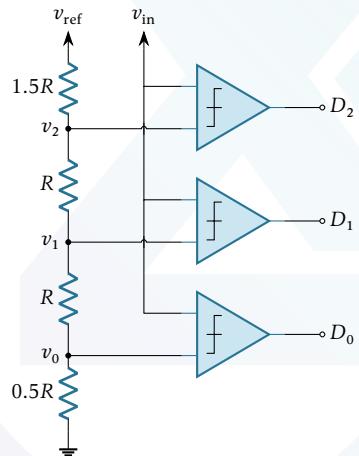


图 5.22: 模数转换器

**例题 5.1.1.** 求电路输出  $\overline{D_2 D_1 D_0}_{(2)}$  与输入信号  $v_{in}$  的关系。



解. 由 KVL, 知  $v_0 = \frac{1}{8}v_{ref}, v_1 = \frac{3}{8}v_{ref}, v_2 = \frac{5}{8}v_{ref}$ , 则

$$\overline{D_2 D_1 D_0} = \begin{cases} 000, & v_{in} < \frac{1}{8}v_{ref}, \\ 001, & \frac{1}{8}v_{ref} < v_{in} < \frac{3}{8}v_{ref}, \\ 011, & \frac{3}{8}v_{ref} < v_{in} < \frac{5}{8}v_{ref}, \\ 111, & v_{in} > \frac{5}{8}v_{ref} \end{cases} \quad (S)$$

## 5.2 运算放大器上的反馈回路

**例题 5.2.1.** 已知单位增益缓冲器的电路结构如图 5.23a 所示, 图 5.23b 是其特性模型。若  $A_o \gg 1$ ,  $R_o \ll R_i$ , 由此考虑  $\frac{V_o}{V_s}$  的值。

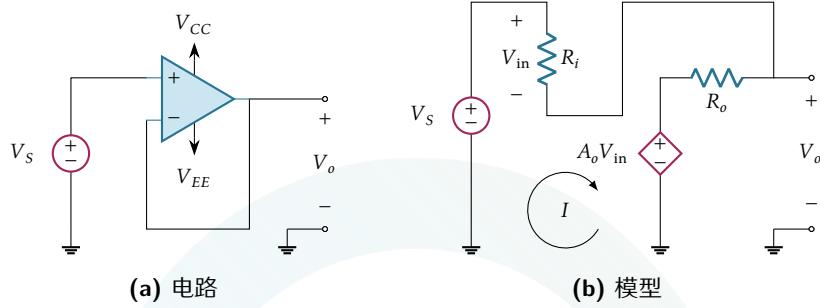


图 5.23: 单位增益缓冲器

解. 由图易知  $V_{in} = IR_i$ , 且有

$$V_s = IR_i + IR_o + A_o V_{in}$$

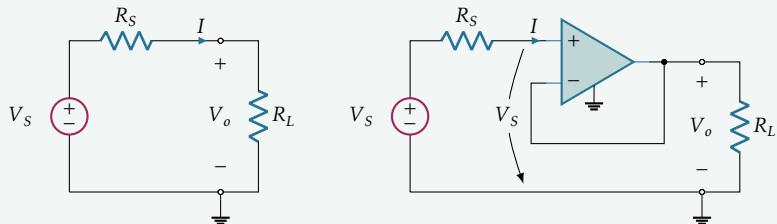
$$V_o = A_o V_{in} + IR_o$$

故

$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{A_o IR_i + IR_o}{IR_i + IR_o + A_o IR_i} = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_o + A_o R_i}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{A_o + \frac{R_o}{R_i}}} \xrightarrow[A_o \gg 1]{R_o \ll R_i} 1 \quad (5)$$

### 注 5.2. 单位增益缓冲器的作用

考虑左图电路, 有  $V_o = V_s - IR_s < V_s$ 。添加一个单位增益缓冲器后成为右图, 其中  $I \rightarrow 0$ , 运放器 + 端子处电压为  $V_s$ , 有  $V_o = V_s$ 。



左图电路中, 负载  $R_L$  的电压负载在源上, 提供给  $R_L$  的能量只能来自源  $V_s$ ; 右图电路中, 源  $V_s$  几乎没有能量损失, 提供给  $R_L$  的能量几乎都来自运放器的电源。换句话说, 这里的单位增益缓冲器起到了隔离电源与负载的作用, 两边只有电压数值的关联而没有能量的关联。这个电路称为电压跟随器。

#### 5.2.1 反相闭环组态

在图 5.24 所示的回路中,  $x_o = Ax_i$ ,  $x_f = \beta x_o$ , 反馈回路对输入的影响为  $x_i = x_s - x_f$ , 则有

$$A_f = \frac{x_o}{x_s} = \frac{Ax_i}{x_i + x_f} = \frac{A}{1 + A\beta} \xrightarrow[A\beta \gg 1]{} \frac{1}{\beta}$$

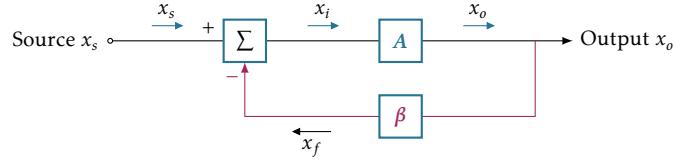
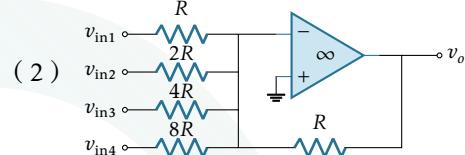
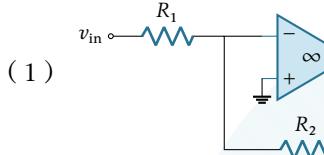


图 5.24: 负反馈模型

**例题 5.2.2.** 求运放电路的闭环输出。



解. (1) 构成负反馈回路, 能够保持运放工作在 Linear 区。则由  $v_n = v_p = 0$ , 可有  $\frac{v_{in} - 0}{R_1} = \frac{0 - v_o}{R_2}$ , 即闭环增益

$$\frac{v_o}{v_{in}} = -\frac{R_2}{R_1}$$

(2) Linear 区可以应用叠加原理, 即有

$$v_o = -\frac{R}{R} v_{in1} - \frac{R}{2R} v_{in2} - \frac{R}{4R} v_{in3} - \frac{R}{8R} v_{in4} \quad (S)$$

## 5.2.2 同相闭环组态

# 6 电路应用衔接

## 6.1 CMOS 数字逻辑电路

### 6.1.1 CMOS 反相器

CMOS 数字逻辑反相器如图 6.25a 所示。在其电压传输特性曲线 (图 6.25b) 上, 取切线斜率为  $-1$  的位置输入为  $V_{IL}$ ,  $V_{IH}$ 。而若进行级联, 则输入信号会介于输出信号的最值  $V_{OL}$ ,  $V_{OH}$  之间。于是, 认为

- 输入信号介于  $V_{OL}$  和  $V_{IL}$  之间时, 输出视为高电平,  $NM_L := V_{IL} - V_{OL}$  称为低输入噪声门限 (裕度);
- 输入信号介于  $V_{IH}$  和  $V_{OH}$  之间时, 输出视为低电平,  $NM_H := V_{OH} - V_{IH}$  称为高输入噪声门限 (裕度)。

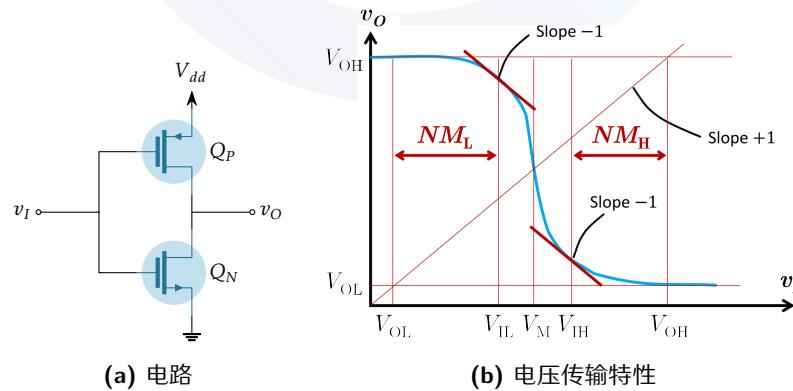


图 6.25: CMOS 反相器

在  $v_I = V_{IH}$  处,  $\begin{cases} v_{SG,P} \geq V_{th}, & \text{即 } Q_P \text{ 工作在 Saturation 区;} \\ v_{DG,P} \leq V_{th}, & \text{即 } Q_N \text{ 工作在 Triode 区。} \end{cases}$  于  
是列式

$$\begin{cases} i_{D,P} = i_{D,N}, \\ i_{D,N} = (\mu_n C_{ox}) \left( \frac{W}{L} \right) \left[ (v_{GS,N} - V_{th}) v_{DS,N} - \frac{1}{2} v_{DS,N}^2 \right], \\ i_{D,P} = \frac{1}{2} (\mu_p C_{ox}) \left( \frac{W}{L} \right)_p (v_{SG,P} - V_{th})^2, \\ \frac{dv_O}{dv_I} = \frac{dv_{DS,N}}{dv_{GS,N}} = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{假设 } (\mu_n C_{ox}) \left( \frac{W}{L} \right)_n = (\mu_p C_{ox}) \left( \frac{W}{L} \right)_p} V_{IH} = \frac{5V_{dd} - 2V_{th}}{8}$$

同理即得  $V_{IL} = \frac{3V_{dd} + 2V_{th}}{8}$ 。若进一步假设  $V_{OL} = 0, V_{OH} = V_{dd}$ , 则可求得  $NM_L = NM_H = \frac{3V_{dd} + 2V_{th}}{8}$ 。

下面向 CMOS 反相器输入阶跃电压信号, 考察其时间和能量的动态特性。

**A) 传播延迟** 对 CMOS 反相器输入阶跃电压信号, 其实际输出响应如图 6.26a 所示, 变化趋势类似电容的充放电过程, 于是不妨将电路中所有容性成分集中为电容  $C$ , 而 MOS 管保持理想, 如图 6.26b。定义输出电压从低电位到高电位、从高电位到低电位的过程中, 越过最高电平一半所用的时间为**传输延时**  $t_{PLH}, t_{PHL}$ 。

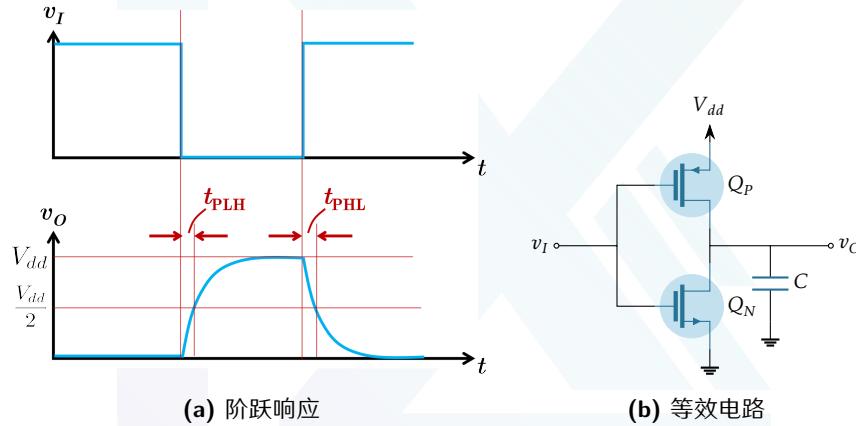


图 6.26: CMOS 反相器的传播延迟

下面考察输出由低电平到高电平的过程。

- 输入在  $V_{dd}$ , 输出在 GND 时,  $Q_P$  在 Cutoff 区,  $Q_N$  在 Triode 区;
- 当输入跳变到 GND 后,  $Q_N$  进入 Cutoff 区保持关断,  $Q_P$  进入 Saturation 区, 有  $i_D = \frac{1}{2} k_p (v_{SG,P} - V_{th})^2 = \frac{1}{2} k_p (V_{dd} - V_{th})^2$  为恒值, 直到  $v_{DG,P} = v_O$  达到  $V_{th}$ 。于是

$$t_{PLH1} = \frac{C \Delta v_O}{i_D} = \frac{2CV_{th}}{k_p(V_{dd} - V_{th})^2}$$

- 当  $v_{DG,P} = v_O$  达到  $V_{th}$  后,  $Q_P$  进入 Triode 区, 有  $i_D = k_p \left[ (v_{SG,P} - V_{th}) v_{SD,P} - \frac{1}{2} v_{SD,P}^2 \right] = k_p \left[ (V_{dd} - V_{th}) \cdot (V_{dd} - v_O) - \frac{1}{2} (V_{dd} - v_O)^2 \right]$ , 于是

$$t_{PLH2} = \int_{V_{th}}^{\frac{V_{dd}}{2}} \frac{C dv_O}{i_D} = \frac{C}{k_p} \int_{V_{th}}^{\frac{V_{dd}}{2}} \frac{dv_O}{(V_{dd} - V_{th})(V_{dd} - v_O) - \frac{1}{2} (V_{dd} - v_O)^2} = \frac{C}{k_p(V_{dd} - V_{th})} \ln \frac{3V_{dd} - 4V_{th}}{V_{dd}}$$

故总的传输延迟为

$$t_{PLH} = \frac{2CV_{th}}{k_p(V_{dd} - V_{th})^2} + \frac{C}{k_p(V_{dd} - V_{th})} \ln \frac{3V_{dd} - 4V_{th}}{V_{dd}} \quad (6.1)$$

**B) 能量消耗** 电容  $C$  放电过程中, 耗散能量即为慢点所储能量, 为  $E_{dissipated1} = \frac{1}{2}CV_{dd}^2$ ; 充电过程中, 耗散能量为电源供能与电容储能之差, 即  $E_{dissipated2} = V_{dd} \int_{t_{PLH}} i_D dt - \frac{1}{2}CV_{dd}^2 = \frac{1}{2}CV_{dd}^2$ 。故, 每个周期能量消耗为  $CV_{dd}^2$ , 动态耗能功率即  $P_{dyn} = fCV_{dd}^2$ 。

### 6.1.2 CMOS 逻辑门电路

CMOS 逻辑门电路是 CMOS 反相器的扩展或推广: 逆变器由 NMOS 下拉晶体管和 PMOS 上拉晶体管组成, 以输入电压与期望输出相反的方式工作。CMOS 逻辑门将这两个晶体管扩展为如图 6.27 所示的两个网络: 由 NMOS 晶体管构成的下拉网络 (PDN) 和由 PMOS 晶体管构成的上拉网络 (PUN)。

这两个网络由一组输入变量以互补的方式控制。在所有期望低输出 ( $Y = 0^1$ ) 的输入组合下, PUN 将导通, 将输出节点接通到地, 使得输出端  $v_Y = 0$ , 同时 PUN 关断,  $V_{dd}$  和地面之间不存在直流路径; 在所有期望高输出 ( $Y = 1$ ) 的输入组合下, PDN 将导通, 将输出节点拉到  $V_{dd}$ , 使得输出电压  $v_Y = V_{dd}$ , 同时 PDN 关断, 电路中同样不存在  $V_{dd}$  和地之间的直流路径。

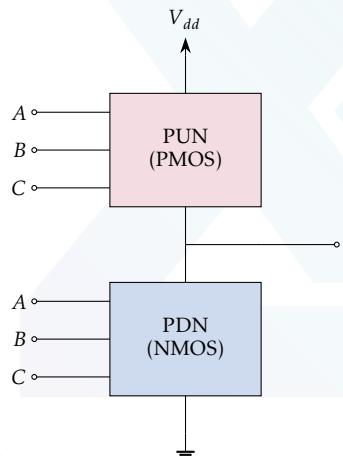


图 6.27: CMOS 逻辑门电路的一般模式

#### 元件 6.1. 非门

**记号** 输入信号  $A$  做非运算输出  $Y$ , 记作  $A \rightarrowtail Y$ 。

**特性**  $Y = \overline{A}$ 。

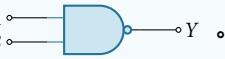
<sup>1</sup>在本文档中, 为区分电压值和逻辑值两种情况, 逻辑值的相等使用「 $\equiv$ 」(\eqcirc) 表示。

前面的 CMOS 反相器输出与输入的关系为 

$v_I$	$v_O$
$V_{dd}$	GND
GND	$V_{dd}$

，这就是一个 CMOS 非门。

### 元件 6.2. 与非门

**记号** 输入信号  $A, B$  做与非运算输出  $Y$ , 记作 。

**特性**  $Y = \overline{A \cdot B}$ 。

如图 6.28 所示为一种 CMOS 与非门逻辑电路。当  $A$  或  $B$  有一个输入为 GND 时, 对应的  $Q_{PA}$  和  $Q_{PB}$  总有至少一路导通到  $V_{dd}$ , 而接地路线上  $Q_{NA}$  和  $Q_{NB}$  总有至少一处断开, 输出  $Y = V_{dd}$ 。

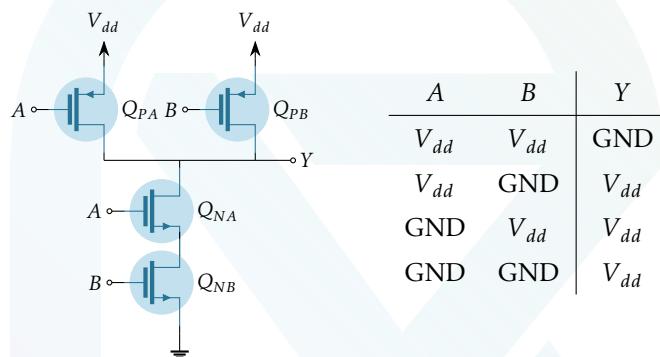


图 6.28: 一种 CMOS 与非门电路

### 元件 6.3. 或非门

**记号** 输入信号  $A, B$  做或非运算输出  $Y$ , 记作 。

**特性**  $Y = \overline{A + B}$ 。

如图 6.29 所示为一种 CMOS 或非门逻辑电路。当  $A$  或  $B$  有一个输入为  $V_{dd}$  时, 导通到  $V_{dd}$  路线上对应的  $Q_{PA}$  和  $Q_{PB}$  总有至少一处断开, 而  $Q_{NA}$  和  $Q_{NB}$  总有至少一路接地, 输出  $Y = \text{GND}$ 。

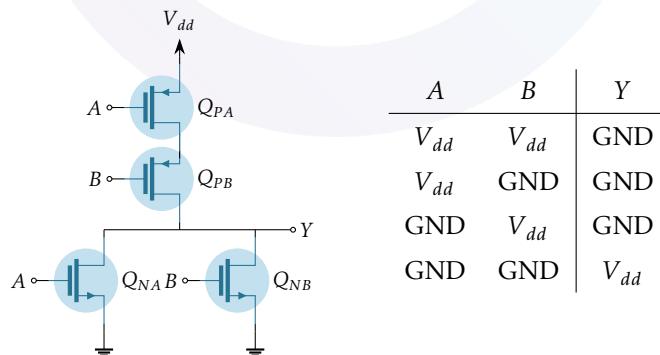


图 6.29: 一种 CMOS 或非门电路

### 注 6.1. 逻辑门的扇入与伪 NMOS 逻辑电路

扇入 (Fan-in) 表示单个逻辑门接受的最大输入信号数量。以上图 6.28 和图 6.29 中的逻辑门都只是 Fan-in 为 2 的情况，但这种构造每增加 1 个输入需要多出 2 个晶体管，不够节约硅片面积，也会引入更多寄生电容。图 6.30 是一种伪 NMOS 逻辑电路，通过调整  $Q_P$  和各  $Q_N$  的工艺参数，可以使得上下同时导通时  $Y \approx \text{GND}$ ，从而有  $Y = \overline{A + B + C + D}$ ，而且每增加 1 个输入只需要多出 1 个晶体管。

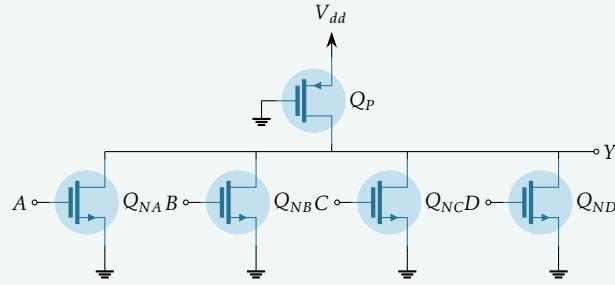


图 6.30: 一种伪 NMOS 或非门

### 6.1.3 数字开关与动态逻辑电路

单个的 NMOS 管可以用作开关，如图 6.31a 所示。

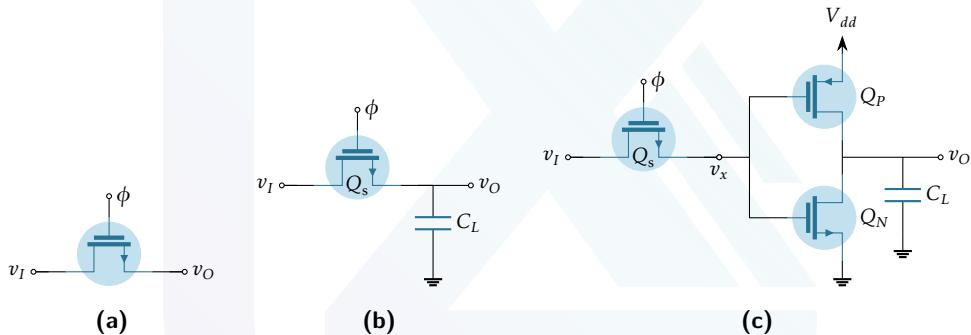


图 6.31: 单 NMOS 开关

由于电路中各种寄生电容的存在，单 NMOS 开关输出端的阶跃响应也有传播延迟，可看作图 6.31b 电路。但与前面反相器的响应不同的是，NMOS 导通时要求  $v_{GS,N} = \phi - v_O > V_{th}$ ，即  $v_O < \phi - V_{th} \leq V_{dd} - V_{th}$ ，则  $V_{OH} = V_{dd} - V_{th}$  比供电电压低。这导致噪声门限减小，若以此控制一个 CMOS 反相器的输入信号（如图 6.31c），各 MOS 管相匹配，则  $v_{SG,P} = V_{dd} - v_x > |V_{th}|$ ，即  $Q_P$  将始终打开。类似地，若使用 PMOS 作开关，由于  $v_{SG,N} = v_O - \phi > V_{th}$  的限制， $V_{OL} = V_{th}$  比 GND 高。

单 NMOS、单 PMOS 开关分别有不能得到理想高电平、低电平的问题。若将其并联为图 6.32 电路，并令  $\phi = V_{dd}$ ，则  $v_I$  跳变到  $V_{dd}$  时， $Q_N$  偏置到 Saturation 区，负载电容充电至  $V_{dd} - V_{th}$ ，此时  $Q_N$  关断但  $Q_P$  仍导通，于是保证了  $V_{OH} = V_{dd}$ ；由 MOS 管源极和漏极的对称性，即也可保证  $V_{OL} = 0$ 。而当  $\phi = 0$  时， $Q_P$ 、 $Q_N$  均只能在 Cutoff 区，即切断了  $v_I$  与  $v_O$  的电路联系。

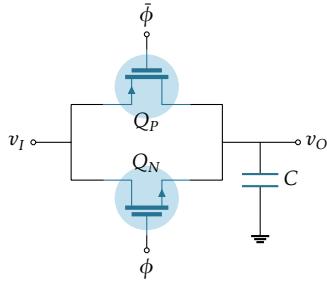


图 6.32: CMOS 传输门

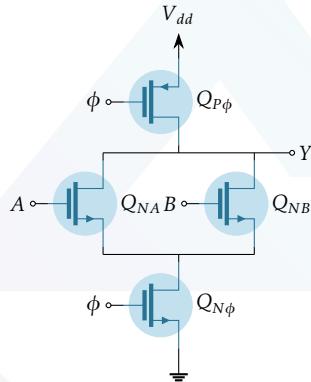
## 元件 6.4. 传输门

**记号** 信号  $\phi$  控制  $X$  到  $Y$  的传输, 记作  $X \xrightarrow{\phi} Y$ 。

**特性** 当  $\phi = 1$  时,  $Y = X$ 。

CMOS 传输门电路的缺点在于使用的晶体管数目较多, 不利于节省硅片面积。如果在特定要求情境下, 可以将开关功能与逻辑运算功能结合构造电路, 则可以节省一些面积。

**例题 6.1.1.** 讨论下面电路中, 控制信号  $\phi$  不同时, 输出信号  $Y$  与信号  $A, B$  的关系。



解.  $\phi = 0$  时,  $Q_{P\phi}$  导通而  $Q_{N\phi}$  关断,  $Y = 1$ , 与  $A, B$  无关;  $\phi = 1$  时,  $Q_{P\phi}$  关断而  $Q_{N\phi}$  导通,  $Y$  接到地仅需  $A, B$  中有一个接到  $V_{dd}$ , 即  $Y = \overline{A + B}$ 。(S)

综合来看, 上例中实际上有  $Y = \overline{A + B} + \overline{\phi} = \overline{(A + B) \cdot \phi}$ 。但其中,  $\phi = 1$  时  $Y = \overline{A + B}$  要求  $Q_{NA}, Q_{NB}$  全部关断时  $Y = 1$ , 因此必须保证在取  $\begin{cases} \phi = 1, \\ A = 1, \text{ 之前有 } Y = 1, \text{ 即在这之前 } \phi = 0. \end{cases}$  一般  $\phi$  设为时钟信号。

### 6.1.4 反馈回路与存储电路

前面所研究的逻辑电路被称为**组合电路**，它们的输出只取决于输入的现值。因此，这些电路没有存储能力。存储电路是数字系统的重要组成部分，包含存储的逻辑电路称为**顺序电路**；也就是说，它们的输出不仅取决于输入的现值，还取决于输入的先前值。

**例题 6.1.2.** 用时钟信号  $\phi$  控制如图 6.33a 所示的电路，分析输出信号  $Q$ 。

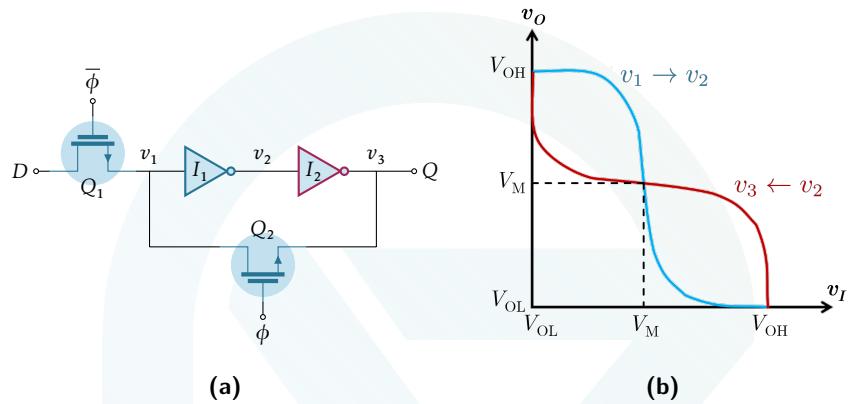


图 6.33: 一个 D 触发器电路

解.  $\phi = 0$  时， $Q_1$  打开、 $Q_2$  关闭，可直接充电至  $Q = D$ 。

$\phi = 1$  时， $Q_1$  关闭、 $Q_2$  打开，反馈回路将两个反相器的输出信号送回输入。据图 6.26a 所示的传输曲线，得此时  $v_1$ ， $v_2$ ， $v_3$  的关系如图 6.33b。读图可知， $(V_M, V_M)$  不是一个稳定的平衡点，因此输出端  $v_3$  只可能取为  $V_{OH}$  或  $V_{OL}$ ，即  $Q$  保持前面输入的  $D$  不变。 (S)

将例 6.1.2 中的反相器用 CMOS 电路展开，调整两个 NMOS 开关的位置，就得到图 6.34 所示的存储单元。

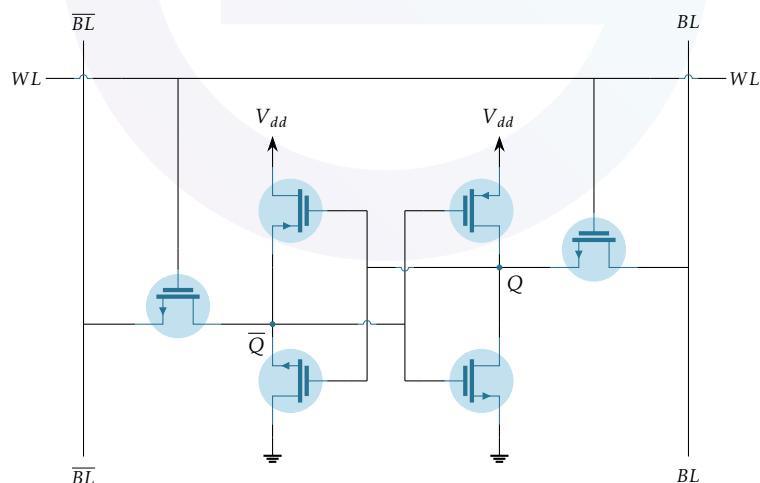


图 6.34: 一种随机存取存储器单元

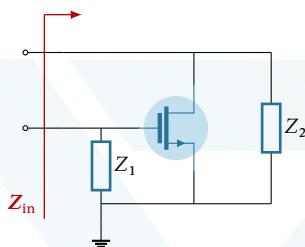
首先考虑读取操作，并假设该单元格正在存储一个1。在这种情况下， $Q$ 在高电平 $V_{dd}$ ， $\bar{Q}$ 在低电平GND。在读取操作开始之前， $BL$ 和 $\bar{BL}$ 线路都被拉高到高电平范围，这个过程称为预充电。为了简化问题，这里假设 $BL$ 和 $\bar{BL}$ 的预充电电压为 $V_{dd}$ ，当字线被选择和接入晶体管被打开时，对电路的检查显示，唯一将导电的部分如图 15

## 6.2 振荡电路

### 6.2.1 负阻值与振荡器

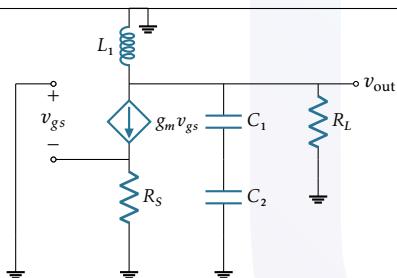
前面第 1 节已经研究，RLC 电路的振荡是一个能量衰减的过程。如果在电路中引入负电阻，则电路信号的振荡有可能不再衰减。**负电阻是能量输入的一种体现。**

**例题 6.2.1.** 计算下面电路的小信号输入阻抗。



解.

(S)



## A 常见词汇中英文对照表

English	中文
Active Devices	有源器件
Amplification	放大
Angular frequency	角频率
Base Region	基区
Bistable Circuit	双稳态电路
Bode plot	波特图
Body effect	体效应
Branch	支路
Capacitor	电容器
Channel	通道
Charge	电荷
Circuit Equation	电路方程
CMOS Inverters	CMOS 反相器
Collector Region	集电区
Complementary MOS (CMOS)	互补金属-氧化物-半导体
Complementary Solution	补充解
Complex Power	复功率
Conductance	电导率
Conductivity	导电性
Covalent bonds	共价键
Crossover network	分频网络
Crystal Oscillator	晶体振荡器
Current	电流
Current density	电流密度
Cutoff	截止
Damping Factor	阻尼因子
Decibel	分贝
Depletion Region	耗尽区
Differential Equation	微分方程
Diffusion current	扩散电流
Digital Switches	数字开关
Doped semiconductors	掺杂半导体
Drift current	漂移电流
Dynamic Logic Circuits	动态逻辑电路
Dynamic RAM (DRAM) Cell	动态随机存取存储器单元
Electric Devices	电子器件

续表

English	中文
Electric field	电场
Electron mobility	电子迁移率
Emitter Region	发射区
Energy	能量
Enhancement-type	增强型
Equivalent circuits	等效电路
Extraordinary Node	非普通节点
Feedback Loop	反馈回路
Field-Effect Transistor (FET)	场效应晶体管
Forward Bias	正向偏置
Free electron	自由电子
Frequency-domain	频域
Gate	栅极
Ground	接地
High pass filter	高通滤波器
Hole mobility	空穴迁移率
Homogeneity	同质性
Impedance	阻抗
Independent sources	独立源
Inductor	电感器
Input Bias Current	输入偏置电流
Input Impedance	输入阻抗
Input Offset Current	输入偏移电流
Integrated Circuit (IC)	集成电路
Integrator	积分器
Kirchhoff's Law	基尔霍夫定律
KVL/KCL	基尔霍夫电压/电流定律
Linear circuit	线性电路
Linear Devices	线性器件
Logic-Gate Circuits	逻辑门电路
Low pass filter	低通滤波器
Lumped Matter Discipline (LMD)	集总物质规律
Magnetic field	磁场
Magnetic Flux	磁通量
Memory Circuits	存储电路
Mesh-current method	回路电流法
Metal-Oxide-Semiconductor (MOS)	金属-氧化物-半导体

续表

English	中文
Negative Feedback	负反馈
Negative Resistance	负阻抗
NMOS transistor	NMOS 晶体管
Node	节点
Node-voltage method	节点电压法
Noise Margin	噪声裕度
Non-linear Devices	非线性器件
Norton's theorem	诺顿定理
Ohm's Law	欧姆定律
Operational Amplifier	运算放大器
Oscillation	振荡
Overdamped	过阻尼
Parasitic capacitance	寄生电容
Passive Devices	无源器件
Permittivity	介电常数
Phase	相位
PMOS transistor	PMOS 晶体管
Positive Feedback	正反馈
Power	功率
Power Consumption	功耗
Propagation Delay	传播延迟
Quality factor	品质因数
Ramp Function	斜坡函数
Reactive Power	无功功率
Resistance	电阻
Resistor	电阻器
Resonate Frequency	共振频率
Reverse Bias	反向偏置
Saturation Mode	饱和模式
Saturation Region	饱和区域
Schmitt Trigger	施密特触发器
Semiconductors	半导体
Signal Generators	信号发生器
Silicon crystal	硅晶体
Sinusoidal Function	正弦函数
Source	源极
Static RAM (SRAM) Cell	静态随机存取存储器单元

续表

English	中文
Steady State	稳态
Step Function	阶跃函数
Substrate (Body)	衬底
Superposition	叠加
Thévenin's theorem	戴维南定理
Threshold voltage	阈值电压
Time Constant	时间常数
Transconductance	跨导
Transfer function	传递函数
Transient Circuit Analysis	瞬态电路分析
Tunnel Diode	隧道二极管
Underdamped	欠阻尼
Voltage	电压
Voltage division	电压分压
Voltage Source	电压源

## B Cadence Virtuoso 电路仿真基本用法

### B.1 启动

#### B.1.1 连接 MobaXterm 服务器

mkdir: 创建文件夹。

cd: 打开文件夹。

virtuoso &: 打开 Virtuoso。

#### B.1.2 新建 Virtuoso 库

Tools→Library Manager 打开 Virtuoso 库管理器对话框「Library manager」，然后 File→New→Library 打开新建库对话框「New Library」。

在 New Library 界面为 library 命名，勾选 Reference existing technology library，将库 Analoglib 移入 Reference Technology Libraries。

#### B.1.3 新建 Cell 图

在 Library manager 界面选中刚才新建的 library，单击 File→New→Cell View，在弹出的「New File」窗口中 Cell 项为 Cell 命名，同时确认 Library 选项是刚才新建的 library、type 选项是 schematic。点击 OK。此时自动进入到原理图界面。

### B.2 绘图

#### B.2.1 开关

开关 switch 实际上是一个电磁继电器，开关的开合由线圈中是否有从 + 到 - 的电流决定。