高等微积分（2）知识与方法

T$^{\mathrm{T}}$T

2024 年 6 月 15 日

目录

7 常数项级数

7.1 无穷级数的基本性质

重要定义 7.1. 常数项级数

数列 $\{u_n\}$ 的形式无穷和 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 称为以 u_n 为通项的**级数**，记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 或者 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$。$\forall n \geq 1$，定义 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$，称之为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的**部分和**。若数列 $\{S_n\}$ 收敛到 $S \in \mathbb{R}$ 或者发散，则相应地称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**到 $S \in \mathbb{R}$ 或者**发散**。

注 7.1. 对级数理论的进一步理解

（1）**级数理论与数列理论完全一致。**由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 可以来构造部分和数列 $\{S_n\}$，反过来，若 $\{S_n\}$ 为任意的数列，定义 $u_1=S_1$，且 $u_n=S_n-S_{n-1}$ $(n \geq 2)$，那么 $\{S_n\}$ 就是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列，且级数和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k=\lim\limits_{n \rightarrow \infty} S_n$。

（2）**级数理论是广义积分理论的特殊情形。**$\forall n \geq 1$ 以及 $\forall x \in[n-1, n)$，定义 $f(x)=u_n$，于是 $\forall N \geq 1$，我们均有 $\int_0^N f(x) \mathrm{d} x=\sum\limits_{n=1}^N \int_{n-1}^n f(x) \mathrm{d} x=\sum\limits_{n=1}^N u_n$。由此我们立刻得，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛当且仅当广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x) \mathrm{d} x$ 收敛，此时还有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n=\int_0^{+\infty} f(x) \mathrm{d} x$。

任意地去掉、添加或者改变级数的有限多项，不会改变其敛散性，但会改变该级数的和。

重要定理 7.1.1. 收敛级数的结合性

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n=S$，则对于任意严格递增的自然数数列 $\{n_k\}$（约定 $n_0=0$），均有

$$sumi[k] \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} u_n=S \tag{7.1}$$

证明. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} u_n=\lim\limits_{K \rightarrow \infty} \sum\limits_{k=1}^{K} \sum\limits_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} u_n=\lim\limits_{K \rightarrow \infty} \sum\limits_{n=1}^{n_K} u_n=S$。 □

一般地，定理 7.1.1 的逆命题不成立，如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散，但 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left((-1)^{2k-1}+(-1)^{2k}\right)=0$。**无穷级数的结合性一般只在收敛性的前提下才成立。**此外，如果 $\forall k \geq 1$，和式 $v_k=\sum\limits_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} u_n$ 中的项恒 ≥ 0 或者恒 ≤ 0，由夹逼定理（若 $n_{k-1} \leq n \leq n_k$，则 $S_n(u)$ 介于 $S_{k-1}(v)$，$S_k(v)$ 之间）可知无穷级数的结合性也成立。

重要定理 7.1.2. 级数收敛的必要条件

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$。

证明. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = 0$。 □

7.2 数项级数的判敛法则

7.2.1 数列衍生的判敛法则

重要定理 7.2.1. 数项级数的 Cauchy 准则

级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛，当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$ 使得 $\forall m > n \geq N$，均有

$$|S_m - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right| < \varepsilon \tag{7.2}$$

重要定理 7.2.2. 非负项级数的单调有界定理

非负项级数收敛，当且仅当其部分和数列有上界。

推论 7.2.3. 若非负项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ 发散，则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = +\infty$。

重要定理 7.2.4. 非负项级数的积分判别法

设 $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ 为**单调**函数，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛当且仅当 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。

证明.（1）**充分性**。设 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\forall n \geq 1$，均有

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= f(1) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty \end{aligned}$$

于是由单调有界定理可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛。

（2）**必要性**。设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛，则 $\forall A \geq 1$，均有

$$\int_1^A f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_1^{[A]+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{[A]} \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x = S_{[A]} \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty$$

于是我们由单调有界定理可知 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。

当 f 为单调递增时，证明类似，但此时如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$，进而可得 $f \equiv 0$。 □

7.2.2 比较、比率、根值判别法

重要定理 7.2.5. 非负项级数的比较判别法

设有非负项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $u_n = O(v_n)\ (n \to \infty)$，也即存在 $N > 0$ 以及 $C > 0$，使得 $\forall n > N$，均有 $|u_n| \leq C|v_n|$。那么：

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。

推论 7.2.6. 设有正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = c$，那么：

(1) 若 $0 < c < +\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散；

(2) 若 $c = 0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(3) 若 $c = +\infty$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

注 7.2.

在正项级数中，两个等价无穷小数列具有相同的敛散性。但一般常数项级数没有这个性质，反例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}\right)$ 敛散性不同，但 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}} = 1$。

例题 7.2.7. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$ 的敛散性。

解. 当 $n \to \infty$ 时，我们有

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n}) + \sqrt{1+\frac{1}{n}}} \sim \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

故所求级数收敛，并且我们还有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{N+1}}\right) = 1
\end{aligned}$$

Ⓢ

例题 7.2.8. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right)$ 的敛散性。

解. 由带 Peano 余项的 Taylor 展开 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$，当 $n\to\infty$ 时，我们有

$$\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}(1+o(1))\right)=\frac{1}{2n^2}(1+o(1))$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^2}$ 收敛，于是由比较判别法立刻可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$ 收敛。 Ⓢ

例题 7.2.9. 设 p，$q\in\mathbb{R}$，讨论 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^p(\ln n)^q}$ 的敛散性。

解. $\forall n\geq 2$，令 $u_n=\dfrac{1}{n^p(\ln n)^q}$。

（1）当 $p>1$ 时，$\forall n\geq 2$，令 $v_n=\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}(1+p)}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}(p-1)}(\ln n)^q}=0$，而 $\dfrac{1}{2}(1+p)>1$，由此知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}v_n$ 收敛，进而由比较判别法立刻可知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$ 收敛。

（2）当 $p<1$ 时，$\forall n\geq 2$，令 $v_n=\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}(1+p)}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\frac{1}{2}(1-p)}}{(\ln n)^q}=+\infty$，而 $\dfrac{1}{2}(1+p)<1$，故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}v_n$ 发散，进而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$ 发散。

（3）当 $p=1$ 时，由于级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$ 与广义积分 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^q}\xlongequal{t=\ln x}\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^q}$ 同敛散，由此可知当 $q>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$ 收敛，而当 $q\leq 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$ 发散。 Ⓢ

重要定理 7.2.10. 正项级数的比率判别法（d'Alembert 判别法）

设正项数列 $\{u_n\}$ 满足 $\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$，那么

（1）若 $\rho<1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

（2）若 $\rho>1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

若 $\rho=1$，则 d'Alembert 判别法无法判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性。

证明. 与等比级数应用比较判别法即得。 □

例题 7.2.11. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{3^n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$ 的敛散性。

解. 当 $n\to\infty$ 时，我们有

$$\frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}}=\frac{n+1}{3}\to+\infty \qquad \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\to\frac{1}{e}<1$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$ 发散，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 收敛。 Ⓢ

重要定理 7.2.12. 非负项级数的根值判别法（Cauchy 判别法）

设非负数列 $\{u_n\}$ 满足 $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$，那么

（1）若 $\rho<1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

（2）若 $\rho>1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

若 $\rho=1$，则 Cauchy 判别法无法判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性。

证明.（1）设 $\rho<1$，任取 $q\in(\rho,1)$，由题设可知

$$q>\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}\sqrt[k]{u_k}$$

于是由数列极限的保序性可知 $\exists N>0$ 使得 $q>\sup\limits_{k\geq N}\sqrt[k]{u_k}$，从而 $\forall n>N$，均有 $\sqrt[n]{u_n}<q$，故我们有 $u_n<q^n$。而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ 收敛，因此由比较判别法立刻可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

（2）设 $\rho>1$，任取 $q\in(1,\rho)$，由题设可知

$$q<\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}\sqrt[k]{u_k}$$

由递降数列的极限的性质可知，$\forall n\geq 1$，均有 $q<\sup\limits_{k\geq n}\sqrt[k]{u_k}$，由此可以构造严格递增自然数数列 $\{n_k\}$ 使得 $q<(u_{n_k})^{\frac{1}{n_k}}$，则 $u_{n_k}>q^{n_k}>1$，从而数列 $\{u_{n_k}\}$ 不收敛到 0，进而可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。 □

注 7.3. 比率、根值判别法的适用

若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足比率判别法的收敛条件 $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho<1$，则有

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}&=\limsup_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln u_n}{n}}\xlongequal{\text{Stolz}}\limsup_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln u_{n+1}-\ln u_n}{(n+1)-n}}\\&=\limsup_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\ln\frac{u_{n+1}}{u_n}}=\limsup_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho<1\end{aligned}$$

可知其也满足根值判别法的收敛条件。

进一步，若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足根值判别法的收敛条件 $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho<1$，则对任意的 $r\in(\rho,1)$，都有 $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{u_n}{r^n}}=\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{u_n}}{r}=\frac{\rho}{r}<1$，于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{r^n}$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{r^n}=0$。

由此可知，满足比率判别法或根值判别法的收敛条件的级数的收敛速度快于几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r^n}$。

7.2.3 一般数项级数的判敛法则

定理 7.2.13. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

重要定义 7.2. 绝对收敛

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **绝对收敛**；若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 不收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **条件收敛**。

重要定理 7.2.14. 绝对收敛的交换性

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=S$ 绝对收敛，$\varphi:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ 为正整数集到其自身的双射，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{\varphi(n)}=S$。

证明. $\forall N\geq 1$，$\sum\limits_{n=1}^{N}|u_{\varphi(n)}|\leq\sum\limits_{k=1}^{\infty}|u_k|<+\infty$，从而由单调有界定理可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{\varphi(n)}$ 绝对收敛。又 $\forall\varepsilon>0$，由题设可知 $\exists N>0$ 使得 $\forall n\geq N$，均有 $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|u_k|<\varepsilon$。

令 $K=\max\limits_{1\leq j\leq N}\varphi^{-1}(j)$，则 $\forall 1\leq j\leq N$，我们均有 $1\leq\varphi^{-1}(j)\leq K$。于是 $\forall n>K$，我们有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}u_{\varphi(k)}-S\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}u_{\varphi(k)}-\sum_{j=1}^{\infty}u_j\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}u_{\varphi(k)}-\sum_{j=1}^{N}u_j-\sum_{j=N+1}^{\infty}u_j\right|\leq\sum_{j=N+1}^{\infty}|u_j|<\varepsilon$$

从而由级数和的定义可知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_{\varphi(k)}=S$，故所证结论成立。 □

定理 7.2.15. 给定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则适当交换它的各项的次序，可以使其收敛到任意事先指定的实数 S，也可以使其发散到 $+\infty$ 或 $-\infty$。

引理 7.2.16. Able 引理 设 $\{b_n\}$ 单调，记 $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_k$，且有 $\forall k\in\mathbb{N}^*$，$|S_k|\leq M$，那么

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leq M\left(|b_1|+2|b_n|\right)\tag{7.3}$$

重要定理 7.2.17. 数项级数的 Dirichlet 判别准则

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列有界，并且数列 $\{v_n\}$ 单调且趋于 0，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 收敛。

证明. $\forall n\geq 1$，定义 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$，那么由题设立刻可知 $\exists M>0$ 使得 $\forall n\geq 1$，我们均有 $|S_n|<M$。$\forall\varepsilon>0$，同样由题设可知数列 $\{v_n\}$ 趋于 0，于是 $\exists N>0$ 使得 $\forall n\geq N$，我们均会有 $|v_n|<\dfrac{\varepsilon}{4M}$。进而可

知，$\forall m > n > N$，我们有

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n}^{m} u_k v_k\right| &= \left|\sum_{k=n}^{m} (S_k - S_{k-1}) v_k\right| = \left|\sum_{k=n}^{m} S_k v_k - \sum_{k=n}^{m} S_{k-1} v_k\right| \\
&= \left|\sum_{k=n}^{m} S_k v_k - \sum_{k=n-1}^{m-1} S_k v_{k+1}\right| = \left|S_m v_m + \sum_{k=n}^{m-1} S_k (v_k - v_{k+1}) - S_{n-1} v_n\right| \\
&\le |S_m||v_m| + |S_{n-1}||v_n| + \sum_{k=n}^{m-1} |S_k||v_k - v_{k+1}| \\
&\le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + M \sum_{k=n}^{m-1} |v_k - v_{k+1}| = \frac{\varepsilon}{2} + M \left|\sum_{k=n}^{m-1} (v_k - v_{k+1})\right| \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + M|v_n - v_m| \le \frac{\varepsilon}{2} + M(|v_n| + |v_m|) \le \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon
\end{aligned}$$

从而由 Cauchy 准则可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛。 □

由 Dirichlet 判别准则，易知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln n}$ 均为条件收敛。

重要定理 7.2.18. 数项级数的 Abel 判别准则

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，并且数列 $\{v_n\}$ 单调有界，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛。

证明. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$，则由 Dirichlet 判别准则知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n (v_n - v)$ 收敛。 □

重要定理 7.2.19. Leibniz 判别准则

如果正项数列 $\{v_n\}$ 单调下降趋于 0，则交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} v_n$ 收敛。

例题 7.2.20. 设 $x \in \mathbb{R}$，判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ 的敛散性。

解. 当 $|x| < 1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{|x|^n}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = |x| < 1$，原级数绝对收敛；

当 $|x| > 1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} = \infty \ne 0$，原级数发散；

当 $x = 1$ 时，由 Leibniz 判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 收敛；

当 $x = -1$ 时，原级数的通项变为 $(-1)^n \frac{(-1)^n}{n} = dfrac1n$，由此可知此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ 发散。 Ⓢ

例题 7.2.21. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ 的敛散性。

解. 由积化和差公式 $2\sin a\cos b=\sin(a+b)+\sin(a-b)$，有 $\cos n=\dfrac{\sin(\frac{1}{2}+n)+\sin(\frac{1}{2}-n)}{2\sin\frac{1}{2}}$，从而

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\cos n\right|=\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})-\sin(n-\frac{1}{2})}{2\sin\frac{1}{2}}\right|=\left|\frac{\sin(N+\frac{1}{2})-\sin\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}\right|\le\frac{\left|\sin(N+\frac{1}{2})\right|+\left|\sin\frac{1}{2}\right|}{2\sin\frac{1}{2}}\le\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$$

而 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 递降趋于 0，则由 Dirichlet 判别准则知原级数收敛。

又 $\dfrac{|\cos n|}{n}\ge\dfrac{\cos^2 n}{n}=\dfrac{1+\cos 2n}{2n}$，并且同样也由 Dirichlet 判别准则可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2n}{2n}$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2 n}{n}=+\infty$ 发散，故原级数为条件收敛。 Ⓢ

例题 7.2.22. 若 $f\in\mathscr{C}^{(2)}[-1,1]$ 使得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，求证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

证明. 因 f 连续，故 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot x=0$. 又 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$，进而由 $f\in\mathscr{C}^{(2)}[-1,1]$ 以及 L'Hospital 法则得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}f''(x)=\frac{1}{2}f''(0)$$

但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，由比较法则可知题设绝对收敛。 □

8 函数项级数

8.1 函数列与函数项级数的收敛性

重要定义 8.1. 函数列的收敛域与极限

设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为非空集合，而 $\{v_n(x)\}$，$x \in I$ 为定义在 I 上的一列函数，称为 I 上的**函数列**。

（1）设 $x_0 \in I$，若数列 $\{v_n(x_0)\}$ 收敛，则称点 x_0 为上述函数列的**收敛点**，否则称为**发散点**；记 J 是由上述函数列的所有收敛点组成的集合，称为该函数列的**收敛域**。

（2）$\forall x \in J$，定义 $v(x) = \lim\limits_{n\to\infty} v_n(x)$，由此得到的定义在 J 上的函数 v 称为函数列的**极限函数**；

（3）若 $\exists M > 0$ 使得 $\forall n \geq 1$ 以及 $\forall x \in I$，均有 $|v_n(x)| \leq M$，则称函数列 $\{v_n\}$ 在 I 上**一致有界**；

（4）如果 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$ 以及 $\forall x \in J$，均有 $|v_n(x) - v(x)| < \varepsilon$，则也称函数列 $\{v_n\}$ 在 J 上**一致收敛**到它的极限函数 v；此即，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$ 使 $\forall n > N$，均有 $\sup\limits_{x\in J} |v_n(x) - v(x)| < \varepsilon$；亦即，$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in J} |v_n(x) - v(x)| = 0}$。

例题 8.1.1. 收敛但不一致收敛的函数列。 $\forall n \geq 1$ 及 $\forall x \in [0,\ 1]$，令 $v_n(x) = x^n$，则

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x) = v(x) = \begin{cases} 0, & 若\ x \in [0,\ 1), \\ 1, & 若\ x = 1 \end{cases}$$

又 $\forall n \geq 1$，我们有

$$\sup_{x\in[0,\ 1]} |v_n(x) - v(x)| = \sup_{x\in[0,\ 1)} x^n = 1$$

故函数列 $\{x^n\}$ 在 $[0,\ 1]$ 上收敛，但非一致收敛；然而，$\forall \delta \in (0,\ 1)$，有

$$\sup_{x\in[0,\ 1-\delta]} |v_n(x) - v(x)| = \sup_{x\in[0,\ 1-\delta]} x^n = (1-\delta)^n$$

故函数列 $\{x^n\}$ 在 $[0,\ 1-\delta]$ 上一致收敛。

重要定义 8.2. 函数项级数

设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为非空集合，而 $\{u_n\}$ 为定义在 I 上的一列函数，我们称形式和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$ 为 I 上的**函数项级数**。

（1）设 $x_0 \in I$，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，则称 x_0 为上述函数项级数的**收敛点**，否则称为**发散点**；记 J 为上述函数项级数所有收敛点组成的集合，称为该函数项级数的**收敛域**；

（2）$\forall x \in J$，令 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，由此得到 J 上函数 S，称为上述函数项级数的**和函数**；

（3）称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 J 上为**一致收敛**，若 $\{S_n(x)\}$ 在 J 上一致收敛，其中 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$；此即，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$ 使得 $\forall x \in J$ 以及 $\forall n > N$，

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} u_k(x) - S(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \varepsilon$$

亦即，$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x \in J} \left| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| = 0$。

重要定理 8.1.2. 函数项级数一致收敛的必要条件

若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 J 上一致收敛，则 $\{u_n\}$ 在 J 上一致趋于 0 。

证明. 由题设立刻知，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$ 使得 $\forall m \geq n > N$ 以及 $\forall x \in J$，均有

$$\left| \sum_{k=n}^{m} u_k(x) \right| = |S_m(x) - S_n(x)| \leq |S_m(x) - S(x)| + |S_n(x) - S(x)| < 2\varepsilon$$

特别地，$\forall n > N$ 以及 $\forall x \in J$，均有 $|u_n(x)| < \varepsilon$，这表明函数列 $\{u_n\}$ 在 J 上一致趋于 0。 □

例题 8.1.3. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \left(\dfrac{1}{2x+1} \right)^n$ 的收敛域。

解. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{1}{2} \right\}$，我们均有

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1}{2x+1} \right)^n \right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}|2x+1|} = \frac{1}{|2x+1|}$$

由根值判别法可知，原级数在 $|2x+1| > 1$ 也即 $x > 0$ 或 $x < -1$ 时收敛，而 $x \in (-1,\ 0)$ 时发散；

当 $x = 0$ 时，原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$，则由 Leibniz 判别法可知它收敛；

当 $x = -1$ 时，原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$，发散。

故收敛域为 $(-\infty,\ -1) \cup [0,\ +\infty)$。 Ⓢ

例题 8.1.4. 收敛但不一致收敛的函数项级数。 几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的函数项级数，它的收敛域为 $(-1,\ 1)$，而和函数为 $S(x)=\dfrac{1}{1-x}$。$\forall n \geq 1$，我们有

$$\sup_{x\in(-1,\ 1)}\left|\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}-S(x)\right| = \sup_{x\in(-1,\ 1)}\left|\frac{1-x^n}{1-x}-\frac{1}{1-x}\right| = \sup_{x\in(-1,\ 1)}\frac{|x|^n}{|1-x|}=+\infty$$

由此可知几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ 在 $(-1,\ 1)$ 上收敛，但在 $(-1,\ 1)$ 上不为一致收敛。

重要定理 8.1.5. Weierstrass 判别法

若存在非负常数项收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ 使得 $\forall n \geq 1$ 以及 $\forall x \in J$，均有 $|u_n(x)| \leq M_n$，则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 J 上绝对收敛且一致收敛。通常称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**控制级数**。

证明. $\forall x \in J$，由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 绝对收敛。又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} M_k=0$。但 $\forall n \geq 1$，我们有

$$0 \leq \sup_{x\in J}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty}\sup_{x\in J}|u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k$$

于是由夹逼原理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in J}\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right|=0$。因此所证结论成立。 □

例题 8.1.6. 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $[0,\ +\infty)$ 上一致收敛。

证明. $\forall n \geq 1$ 以及 $\forall x \in \mathbb{R}$，令 $u_n(x)=x^2\mathrm{e}^{-nx}$，则 $u_n'(x)=2x\mathrm{e}^{-nx}-nx^2\mathrm{e}^{-nx}=(2-nx)x\mathrm{e}^{-nx}$，故 u_n' 在 $\left(0,\dfrac{2}{n}\right)$ 上严格正而在 $\left(\dfrac{2}{n},+\infty\right)$ 上严格负，则 u_n 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值点为 $x=\dfrac{2}{n}$，也即 $\forall x \geq 0$，我们有 $0 \leq u_n(x) \leq \dfrac{4}{n^2}\mathrm{e}^{-2}$。而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n^2}\mathrm{e}^{-2}$ 收敛，于是由 Weierstrass 判别法可知原函数项级数在 $[0,\ +\infty)$ 上一致收敛。 □

重要定理 8.1.7. 函数项级数的 Dirichlet 判别准则

如果在某个区间 I 上，函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和函数列为**一致有界**，而函数列 $\{v_n\}$ **单调且一致趋于 0**，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 在 I 上一致收敛。

重要定理 8.1.8. 函数项级数的 Abel 判别准则

如果在某个区间 I 上，函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为**一致收敛**，而函数列 $\{v_n\}$ **单调并且一致有界**，则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 在 I 上一致收敛。

例题 8.1.9. 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n}$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 上一致收敛，其中我们假设 $\delta \in (0,\pi)$。

证明. $\forall n \geq 1$ 以及 $\forall x \in [\delta, 2\pi-\delta]$，我们有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\right| \leq \left|\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

而 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 单调且一致趋于 0，于是由 Dirichlet 判别准则知，原函数项级数在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 上一致收敛。 □

8.2 一致收敛的函数项级数的和函数的性质

重要定理 8.2.1. 连续函数列一致收敛极限函数的连续性

设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为非空集合，而 $\{v_n\}$ 为定义在 I 上的连续函数列，并且在 I 上一致收敛到函数 v，则 v 在 I 上连续。

证明. 固定 $x_0 \in I$，$\forall \varepsilon > 0$，由一致收敛性可知，$\exists N > 0$ 使得 $\forall n \geq N$ 以及 $\forall x \in I$，均有

$$|v_n(x) - v(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

由于 v_N 在点 x_0 连续，则 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x \in I$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，均有 $|v_N(x) - v_N(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$。由此，

$$|v(x) - v(x_0)| \leq \underbrace{|v(x) - v_N(x)|}_{\text{一致收敛性}} + \underbrace{|v_N(x) - v_N(x_0)|}_{v_N\text{ 的连续性}} + \underbrace{|v_N(x_0) - v(x_0)|}_{\text{一致收敛性}} < \varepsilon$$

故 v 在点 x_0 连续，由 x_0 的任意性知所证成立。 □

重要定理 8.2.2. 一致收敛连续函数列的数列极限与函数极限可交换性

若连续函数列 $\{v_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛到 $v(x)$，则对任意 $x_0 \in I$，有

$$\lim_{I \ni x \to x_0} \lim_{n \to \infty} v_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{I \ni x \to x_0} v_n(x) \tag{8.1}$$

证明. $\lim\limits_{I \ni x \to x_0} \lim\limits_{n \to \infty} v_n(x) = \lim\limits_{I \ni x \to x_0} v(x) = v(x_0) = \lim\limits_{n \to \infty} v_n(x_0) = \lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{I \ni x \to x_0} v_n(x)$。 □

推论 8.2.3. 如果定义在 (a,b) 上的连续函数列 $\{v_n(x)\}$ 在 (a,b) 内的**任意闭子区间**上一致收敛到函数 $v(x)$（这种性质称为**内闭一致收敛**），则函数 $v(x)$ 在区间 (a,b) 上连续且为上述函数列在 (a,b) 上的极限函数。

重要定理 8.2.4. 一致收敛连续函数项级数的极限与级数求和可交换性

假设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 为非空集合，而 $\{u_n\}$ 为 I 上的连续函数组成的函数列，使函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 I 上一致收敛到函数 S，则 S 在 I 上连续。此即，对任意 $x_0 \in I$，

$$\lim_{I\ni x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{I\ni x\to x_0} v_n(x) \tag{8.2}$$

证明. $\forall n \geq 1$ 以及 $\forall x \in I$，令 $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$，则函数列 $\{S_n\}$ 在 I 上连续且在 I 上一致收敛到函数 S，故 S 在 I 上连续。或，对任意 $x_0 \in I$，

$$\begin{aligned}\lim_{I\ni x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) &= \lim_{I\ni x\to x_0} \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{I\ni x\to x_0} S(x) = S(x_0)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{I\ni x\to x_0} v_n(x)\end{aligned}$$

□

重要定理 8.2.5. 一致收敛连续函数项级数的积分与级数求和可交换性

假设 $\{u_n\}$ 为 $[a, b] := I$ 上的连续函数组成的函数列，使得函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到函数 S，则 S 在 I 上连续且 $\forall x \in [a, b]$，均有

$$\int_a^x S(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x v_n(t)\,\mathrm{d}t \tag{8.3}$$

并且右边作为变量 x 的函数项级数在 $[a, b]$ 上一致收敛。

证明. $\forall \varepsilon > 0$，由题设条件立刻知，$\exists N > 0$ 使得 $\forall m > N$ 以及 $\forall t \in [a, b]$，均有 $\left|\sum_{n=1}^{m} u_n(t) - S(t)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a+1}$。于是 $\forall x \in [a, b]$，我们有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{m} \int_a^x u_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x S(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{m} u_n(t) - S(t)\right)\mathrm{d}t\right|\\ &\leq \int_a^x \left|\sum_{n=1}^{m} u_n(t) - S(t)\right|\mathrm{d}t \leq \int_a^x \frac{\varepsilon}{b-a+1}\,\mathrm{d}t < \varepsilon\end{aligned}$$

因此所证结论成立。 □

重要定理 8.2.6. 一致收敛连续函数项级数的求导与级数求和可交换性

设 $\{u_n\}$ 为 $(a,\ b)$ 上的连续可导函数列。假设

(1) $\exists x_0 \in (a,\ b)$ 使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛;

(2) 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}u_n(x)}{\mathrm{d}x}$ 在 $(a,\ b)$ 上一致收敛,

那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 $(a,\ b)$ 上**内闭**一致收敛，和函数 S 在 $(a,\ b)$ 上连续可导，且 $\forall x \in (a,\ b)$，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u_n(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} S(x) \tag{8.4}$$

证明. 由于 $\{u_n'\}$ 为区间 $(a,\ b)$ 上的连续函数列，而函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'$ 在 $(a,\ b)$ 上一致收敛，则由极限与级数求和可交换性可知，它的和函数 $\sigma = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'$ 在 $(a,\ b)$ 上连续；进而再利用积分与级数求和可交换性可知，$\forall x \in (a,\ b)$，我们有

$$\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) - u_n(x_0))$$

且右边的函数项级数在 $(a,\ b)$ 上内闭一致收敛。而其中由题设可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，则由级数的线性性，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 也收敛，设其和为 $S(x)$，故 $\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,\mathrm{d}t = S(x) - S(x_0)$。又 σ 连续，于是 S 可导，且 $S'(x) = \sigma(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$，从而 S 为连续可导函数，故所证结论成立。 □

例题 8.2.7. 证明：$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(nx)}{n^2} \in \mathscr{C}^{(1)}(0,\ 2\pi)$。

证明. $\forall n \geq 1$ 以及 $\forall x \in (0,\ 2\pi)$，令 $u_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$，则 u_n 在 $(0,\ 2\pi)$ 上连续可导，且 $u_n'(x) = -\dfrac{\sin(nx)}{n}$。又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'$ 在 $(0,\ 2\pi)$ 上内闭一致收敛并且常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u(\pi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(n\pi)}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ 收敛，因此和函数 S 在 $(0,\ 2\pi)$ 上连续可导。 □

8.3 幂级数

8.3.1 幂级数的收敛半径

重要定义 8.3. 幂级数

设 $\{a_n\}$ 为常数项数列，而 $x_0 \in \mathbb{R}$，我们称 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ 形如的函数项级数为**幂级数**。

出于简便，我们通常取 $x_0 = 0$，即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$。一般情形可由此特殊情形通过平移而得到。

重要定理 8.3.1. Abel 定理

设 $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$，$\{a_n\}$ 为常数项数列，若 $\{a_n x_0^n\}$ 有界，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-|x_0|,\ |x_0|)$ 内绝对收敛且内闭一致收敛。

证明.（1）证绝对收敛：由题设可知，$\exists M>0$ 使得 $\forall n\geq 1$，均有 $|a_n x_0^n|\leq M$。从而 $\forall x\in(-|x_0|,\ |x_0|)$，我们有

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

又在 $(-|x_0|,\ |x_0|)$ 内 $\left|\dfrac{x}{x_0}\right|<1$，则由比较判别法知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ 收敛。

（2）证内闭一致收敛：取任意的闭区间 $[a,\ b]\subset(-|x_0|,\ |x_0|)$，尝试证明级数在 $[a,\ b]$ 内一致收敛。但对于这样的 $[a,\ b]$，必定存在一个常数 $r\in(0,\ |x_0|)$，使得 $[a,\ b]\subset[-r,\ r]\subset(-|x_0|,\ |x_0|)$，进而只需证明幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-r,\ r]$ 内一致收敛即可。

固定这样的 $r\in(0,\ |x_0|)$。$\forall x\in[-r,\ r]$，我们有

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M\left|\frac{r}{x_0}\right|^n$$

又因为 $\left|\dfrac{r}{x_0}\right|<1$，于是由 Weierstrass 判别法可知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-r,\ r]$ 上一致收敛，进而知该幂级数在 $(-|x_0|,\ |x_0|)$ 的任意的闭子区间上一致收敛，即内闭一致收敛。 □

推论 8.3.2. 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 处——

（*1*）收敛，那么它在 $(-|x_0|,\ |x_0|)$ 内绝对收敛且内闭一致收敛；

（*2*）发散，那么它在 $\big[-|x_0|,\ |x_0|\big]$ **外**发散，即 $\forall x\in\mathbb{R}$，若 $|x|>|x_0|$，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散。

由此，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域是一个区间。事实上，只能有以下三种可能性:

（1）仅在点 $x=0$ 处收敛；

（2）在任意点 $x\in\mathbb{R}$ 收敛；

（3）$\exists R>0$，使得 $|x|<R$ 时幂级数在点 x 处收敛，而 $|x|>R$ 时幂级数在点 x 处发散；至于在点 $x=\pm R$ 处，幂级数可为收敛或发散。

重要定义 8.4. 收敛半径

幂级数收敛域的半径称为它的**收敛半径**。

即，$R\in[0,\ +\infty]$ 恰好为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径当且仅当下列性质都成立:

（1）当 $|x|<R$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛；

（2）当 $|x|>R$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散。

我们称 $(-R,\ R)$ 为**收敛开区间**。

在收敛开区间基础上，为得到收敛域，还需讨论幂级数在点 $x=\pm R$ 处的收敛性。

在上述三种情形，幂级数的收敛半径分别为 0，$+\infty$ 和 R。

重要定理 8.3.3. 收敛半径的求出

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho}$，其中

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \tag{8.5}$$

且约定 $\frac{1}{0} = +\infty$，$\frac{1}{+\infty} = 0$。

证明. $\forall x \in \mathbb{R}$，我们有 $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x|^n} = \rho|x|$。

则当 $|x| < R$ 时，由根值判别法立刻可知，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛；

而当 $|x| > R$ 时，$\limsup_{n\to\infty} |a_n x^n| = +\infty$，即通项 $a_n x^n$ 不收敛到 0，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散。

故 R 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径。 □

推论 8.3.4. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho}$，若有下面条件之一：

（1）极限 $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 存在或为 $+\infty$；

（2）极限 $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ 存在或者为 $+\infty$。

例题 8.3.5. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域。

解. 由题设可知所求收敛半径为

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n \dfrac{2^n}{\sqrt{n}}}{(-1)^{n+1} \dfrac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

在 $x = \frac{1}{2}$ 处，幂级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，而由 Leibniz 判别法可知该级数收敛。在 $x = -\frac{1}{2}$ 处，幂级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$，该级数发散。故收敛域为 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$。 Ⓢ

重要定理 8.3.6. Abel 第二定理

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R \in (0, +\infty)$ 并且在 $x = R$ 处收敛，则 $\forall r \in (0, R)$，幂级数在 $[-r, R]$ 上**一致收敛**。

证明. 固定 $r \in (0, R)$。$\forall x \in [r, R]$，定义 $u_n(x) = a_n R^n$，$v_n(x) = \left(\frac{x}{R}\right)^n$，那么

（1）函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是常数项级数，关于 $x \in [r,\ R]$ 一致收敛；

（2）函数列 $\{v_n\}$ 单调，且我们还有 $|v_n| \leq 1$。

从而，由 Abel 判别准则（定理 8.1.8）立刻可知，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[r,\ R]$ 上为一致收敛。

而又由 Abel 定理（定理 8.3.1）可知，上述幂级数在 $[-r,\ r]$ 上一致收敛，于是该幂级数在 $[-r,\ R]$ 上一致收敛。 □

8.3.2 幂级数的性质

重要定理 8.3.7. 幂级数的四则运算性质

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $R_1 > 0$，$R_2 > 0$，令 $R = \min(R_1,\ R_2)$，则

（1）**线性性** $\forall \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ 以及 $\forall x \in (-R,\ R)$，

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) x^n \tag{8.6}$$

右边的收敛半径在 $R_1 \neq R_2$，$\lambda\mu \neq 0$ 时等于 R，但当 $R_1 = R_2$ 时，却有可能严格大于 R；

（2）**乘法** $\forall x \in (-R,\ R)$，均有

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) x^k \tag{8.7}$$

右边幂级数的收敛半径可严格大于 R；

（3）**除法** 当 $b_0 \neq 0$ 时，在原点的某个邻域内：$\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i x^i} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j x^j$，其中 $\forall n \geq 0$，系数 c_j 由下式定义：

$$a_n = \sum_{i+j=n} b_i c_j = \sum_{i=0}^{n} b_i c_{n-i} \tag{8.8}$$

由此我们可以递归地确定 c_n，即 $c_n = \dfrac{1}{b_0}\left(a_n - \sum\limits_{i=1}^{n} b_i c_{n-i}\right)$。

重要定理 8.3.8. 幂级数的逐项积分性质

若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$，则其和函数 $S \in \mathscr{C}(-R,\ R)$ 且 $\forall x \in (-R,\ R)$，均有

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \tag{8.9}$$

并且右边幂级数的收敛半径依然为 R。

证明. 任取 $x \in (-R,\ R)$，于是 $\exists r \in (0,\ R)$ 使得 $x \in (-r,\ r)$。由 Abel 定理可知，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-r,\ r]$ 上一致收敛，并且其通项为连续函数。则由极限与级数求和可交换性可知，和函数 S 在 $[-r,\ r]$ 上

连续。特别地，它在点 x 处连续。于是 $S\in\mathscr{C}(-R,\ R)$，随后再由积分与级数求和可交换性立刻可得

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

由根值判别法，右边幂级数收敛半径的倒数为

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{\frac{|a_n|}{n+1}}=\limsup_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{|a_n|}}{\sqrt[n+1]{n+1}}=\frac{1}{R}$$

□

重要定理 8.3.9. 幂级数的逐项求导性质

如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R>0$，那么其和函数 $S\in\mathscr{C}^{(\infty)}(-R,\ R)$，并且 $\forall x\in(-R,\ R)$ 以及 $\forall k\geq 0$，我们有

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}\tag{8.10}$$

并且右边幂级数的收敛半径依然为 R。

证明. 对 $k\geq 0$ 应用数学归纳法，往证：$S\in\mathcal{C}^{(k)}(-R,\ R)$ 并且 $S^{(k)}$ 满足上述等式。

当 $k=0$ 时，由前面定理可知此时所证成立。假设所证结论对 $k\geq 0$ 成立。$\forall n\geq k$，令

$$u_n(x)=n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}$$

则 u_n 在 $\mathbb{R}$ 上可导，并且 $u_k'\equiv 0$。而当 $n>k$ 时，

$$u_n'(x)=n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)a_nx^{n-k-1}$$

再注意到我们有

$$\limsup_{n\to\infty}\left(n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)|a_n|\right)^{\frac{1}{n-k-1}}\xlongequal{\lim\limits_{n\to\infty}(n-i)^{\frac{1}{n-k-1}}=1}\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n-k-1]{|a_n|}=1/R$$

于是知幂级数 $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}u_n'(x)$ 的收敛半径为 R，即由前面定理可知，它的和函数在 $(-R,\ R)$ 上连续并且 $\forall x\in(-R,\ R)$，我们均有

$$\int_0^x\left(\sum_{n=k+1}^{\infty}u_n'(t)\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=k+1}^{\infty}\int_0^x u_n'(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=k+1}^{\infty}(u_n(x)-u_n(0))=\sum_{n=k+1}^{\infty}u_n(x)$$

由归纳假设可知，右边等于 $S^{(k)}(x)-k!a_k$，即 $S^{(k)}(x)=k!a_k+\int_0^x\left(\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}u_n'(t)\right)\mathrm{d}t$，进而可知 $S^{(k)}$ 可导，并且 $\forall x\in(-R,\ R)$，我们均有

$$S^{(k+1)}(x)=\left(S^{(k)}-k!a_k\right)'(x)=\sum_{n=k+1}^{\infty}u_n'(x)$$

由此可知要证的结论对 $k+1$ 成立，进而由数学归纳法可知要证的结论对所有 $k\geq 0$ 均成立。 □

8.3.8 和 8.3.9 这两个定理表明，幂级数在其收敛域的内部可进行**任意多次**积分和求导，这些运算与级数求和运算**可交换次序**且**不改变收敛半径**。

例题 8.3.10. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(n+1)x^n$ 的收敛域以及和函数，并由此计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n(n+1)}{2^n}$。

解. 题设幂级数的收敛半径等于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|(-1)^{n+1}n(n+1)|}}=1$。$\forall x\in(-1,\ 1)$，我们已知 $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$，且该幂级数的收敛半径为 1。于是，由幂级数求导与求和可交换性可知 $-\dfrac{1}{(1+x)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}$，进而 $\dfrac{x^2}{(1+x)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n+1}$，再求导有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)nx^n=\dfrac{2x}{(1+x)^3}$，收敛半径不变。于是所求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n(n+1)}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\dfrac{8}{27}$。Ⓢ

8.3.3 幂级数展开

设 $R>0$，$x_0\in\mathbb{R}$，给定区间 (x_0-R,x_0+R) 上的函数 f。类比一元微分学的 Taylor 多项式，我们寻求这样的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，使得其在 (x_0-R,x_0+R) 上收敛到 $f(x)$。

重要定义 8.5. 函数的 Taylor 级数

设 $R>0$，$x_0\in\mathbb{R}$，给定区间 (x_0-R,x_0+R) 上的函数 f。若存在幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=f(x)$，则称幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 为 f 在 x_0 处的 **Taylor 级数**。当 $x_0=0$ 时，该幂级数也称为 **Maclaurin 级数**。

如果展式 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 成立，则由幂级数的性质可知 $\boldsymbol{f\in\mathscr{C}^{(\infty)}(x_0-R,\ x_0+R)}$，且 $\forall k\geq 0$ 以及 $\forall x\in(x_0-R,\ x_0+R)$，我们均有

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k} \tag{8.11}$$

特别地，我们有 $f^{(k)}(x_0)=k!a_k$。由此我们可知，如果函数 f 在点 x_0 处有 Taylor 级数展开，那么它的系数可由 f 来唯一确定。

注 8.1. 特例

f 在点 x_0 的邻域内为 $\mathscr{C}^{(\infty)}$ 类并不意味着 f 在点 x_0 处有 Taylor 级数展开。

考虑函数 $f(x)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}\in\mathscr{C}^{(\infty)}$，但 $\forall n\geq 0$，均有 $f^{(n)}(0)=0$，这表明 f 不能在原点处展开成 Taylor 级数。

假设 f 在点 x_0 的邻域内为 $\mathcal{C}^{(\infty)}$ 类，我们形式地记

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{8.12}$$

并将右边称为 f 在点 x_0 的 **Taylor 级数**。

下面记 Taylor 级数的部分和 $\sum\limits_{n=0}^{N}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=:T_N(x)$。$\forall n\geq 1$，由带 Lagrange 余项的 Taylor

公式可知，存在 ξ_{n+1} 介于 x_0，x 之间，使得

$$f(x)=\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{T_n(x)}+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{r_n(x)} \tag{8.13}$$

于是我们有

重要定理 8.3.11. 函数展成 Taylor 级数的充要条件

假设 $f\in\mathscr{C}^{(\infty)}(x_0-R,\ x_0+R)$，那么 f 在点 x_0 处的 Taylor 级数在 $(x_0-R,\ x_0+R)$ 内收敛到 f **当且仅当** f 在点 x_0 处的 Taylor 展式余项 $r_n(x)$ 随 $n\to\infty$ 而趋于 0。

推论 8.3.12. $\forall x\in(x_0-R,\ x_0+R)$，如果存在 $N>0$ 及 $M>0$ 使得 $\forall n>N$，$|\boldsymbol{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}|\leq \boldsymbol{M}$，则 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$。

推论 8.3.13. 假设 $f\in\mathscr{C}^{(\infty)}(x_0-R,\ x_0+R)$，若存在整数 $N>0$ 以及 $M>0$，使得对任意整数 $n>N$ 以及对任意 $\xi\in(x_0-R,\ x_0+R)$，均有 $|\boldsymbol{f^{(n+1)}(\xi)}|\leq\boldsymbol{M}$，则 $\forall x\in(x_0-R,\ x_0+R)$，我们有 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$。

重要定理 8.3.14. 常用函数的 Taylor 级数展开

(1) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$。

(2) $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$; $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$;

$\sinh x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$; $\cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$。

(3) $f(x) = (1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dbinom{\alpha}{n} x^n$, 其中对 $\alpha \in \mathbb{R}$ 有 $\dbinom{\alpha}{n} := \dfrac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$, 收敛域为 $\begin{cases} \mathbb{R}, & \alpha \in \mathbb{N}, \\ (-1,1), & \alpha \le -1, \\ (-1,1], & -1 < \alpha < 0, \\ [-1,1], & \alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}。 \end{cases}$ 特别地，有：

$\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1,\ 1)$; $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, $x \in (-1,\ 1)$;

$\sqrt{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n$, $x \in [-1,\ 1]$;

$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$, $x \in (-1,\ 1]$。

(4) $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $x \in (-1,\ 1]$; $\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $x \in [-1,\ 1)$;

$\ln \dfrac{1+x}{1-x} = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x \in (-1,\ 1)$。

(5) $\arctan x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x \in [-1,\ 1]$。

(6) $\arcsin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x \in [-1,\ 1]$。

(3) 的证明. 当 α 是自然数的时候，$f(0) = 1$，且

$$f^k(0) = \begin{cases} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1), & k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n, \\ 0, & k = n+1,\ \cdots \end{cases}$$

此时，$f(x)$ 的幂级数就是 x 的 n 此多项式：

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2}{(n-1)!}x^{n-1} + x^n \\ &= 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xn - 1 + x^n\end{aligned}$$

其中 $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ 就是组合数，上面就是中学的二项式定理。

下面假设 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_+$。因为

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \qquad n = 1,\ 2,\ \cdots$$

于是

$$f(0) = 1,\ f'(0) = \alpha,\ f''(0) = \alpha(\alpha-1),\ \cdots,\ f^n(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),\ \cdots$$

得到一个形式的 Taylor 级数

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

它的收敛半径为 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|n+1|}{|\alpha-n|}=1$，故在开区间 $(-1,\ 1)$ 内，上述幂级数收敛，记它的和函数是 $S(x)$ 。

下面说明 $S(x)=(1+x)^\alpha$，但为了避免分析 $R_n(x)$，我们采取以下办法：容易验证上面 $f(x)$ 满足 $f'(x)=\frac{\alpha}{1+x}f(x)$，即 $f(x)$ 是常微分方程 $y'-\frac{\alpha}{1+x}y=0$ 的解现在我们验证 $S(x)$ 也是该 ODE 的解。

因为

$$S'(x)=\alpha\left[1+(\alpha-1)x+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2+\cdots+\frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots\right]$$

等式两端同乘以 $(1+x)$，得到 x^n 的系数为

$$\alpha\left[\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n}{n!}+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1}{(n-1)!}\right]=\alpha\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

于是

$$(1+x)S'(x)=\alpha\left[1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1}{2!}x^2+\cdots\right]=\alpha S(x)$$

这就说明 $S(x)$ 是 ODE 的解。因为这个 ODE 是一阶齐次 ODE，解空间是一维的，所以

$$S(x)=C(1+x)^\alpha$$

再由 $S(0)=1$ 可以确定 $C=1$，从而 $S(x)=(1+x)^\alpha$ 。 □

例题 8.3.15. 求 $f(x)=\frac{x-1}{4-x}$ 在点 $x=1$ 的幂级数展式，并对任意整数 $n\ge 0$，计算 $f^{(n)}(1)$。

解. 当 $|x-1|<3$ 时，我们有

$$f(x)=\frac{x-1}{3-(x-1)}=\frac{x-1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}=\frac{x-1}{3}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^k=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}(x-1)^n$$

由此立刻可知 $f(1)=0$，且 $\forall n\ge 1$，我们有 $f^{(n)}(1)=\frac{1}{3^n}\cdot n!=\frac{n!}{3^n}$。 Ⓢ

8.4 Fourier 级数

8.4.1 形式 Fourier 级数

重要定义 8.6. 函数的内积

$\forall f,\ g\in\mathscr{C}[a,\ b]$，$(f,\ g):=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 称之为 $f,\ g$ 的**内积**。如果 $(f,\ g)=0$，则称 f 与 g **正交**，记作 $f\perp g$。

重要定义 8.7. 函数的范数

$\forall f\in\mathscr{C}[a,\ b]$，$\|f\|=\sqrt{(f,\ f)}:=\left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ 称为 f 的**范数**。

$f\equiv 0$ 当且仅当 $\|f\|=0$；$\forall f,\ g\in\mathscr{C}[a,\ b]$，均有 $\|f+g\|\le\|f\|+\|g\|$。

定义 8.8. $\Lambda=\{1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \cdots\}$ 称为**三角函数系**。

三角函数系有如下的性质：

引理 8.4.1. 正交性 三角函数系 Λ 在 $[a,\ a+2\pi]$ 上为非零的正交函数系，即 $\forall f,\ g\in\Lambda$，若 $f\ne g$，则

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0$$

事实上，$\forall n,\ m\ge 1$ 且 $n\ne m$ 有

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+2\pi}1\,\mathrm{d}x=2\pi,\quad \int_a^{a+2\pi}\cos^2 nx\,\mathrm{d}x=\int_a^{a+2\pi}\sin^2 nx\,\mathrm{d}x=\pi,\\
&\int_a^{a+2\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=\int_a^{a+2\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=0,\\
&\int_a^{a+2\pi}\cos mx\cos nx\,\mathrm{d}x=\int_a^{a+2\pi}\cos mx\sin nx\,\mathrm{d}x=\int_a^{a+2\pi}\sin mx\sin nx\,\mathrm{d}x=0
\end{aligned}$$

引理 8.4.2. 完全性 如果 $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$ 是以 2π 为周期的周期函数使得 $\forall g\in\Lambda$，均有 $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0$，则我们有 $f\equiv 0$。

由此可知，Λ 当中的元素在 $\mathbb{R}$ 上线性无关，且 Λ 就是 $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ 中以 2π 为周期的周期函数空间的一组基。

重要定义 8.9. 三角级数

形如 $\displaystyle\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 称为**三角级数**。

假设 f 是以 2π 为周期的周期函数且 $f(x)=\displaystyle\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 在 $[-\pi,\ \pi]$ 上一致收敛，则由积分与级数求和可交换性立刻可知

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\ (n\ge 0),\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\ (n\ge 1)$$

重要定义 8.10. Fourier 系数

假设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是以 2π 为周期的周期函数且 $f\big|_{[-\pi,\ \pi]}\in\mathscr{R}[-\pi,\ \pi]$，则称

$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\ (n\ge 0),\qquad b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\ (n\ge 1)\tag{8.14}$$

为 f 的 **Fourier 系数**，并记

$$f(x)\sim\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\cos nx+b_n(f)\sin nx)\tag{8.15}$$

为 f 的**形式 Fourier 级数**。

若 f 为偶函数，则 $\forall n\ge 1$，$b_n(f)=0$，此时 $\forall n\ge 0$，$a_n(f)=\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$，$b_n(f)=0$，相应的 Fourier 级数称为**余弦级数**；若 f 为奇函数，则 $\forall n\ge 0$，$a_n(f)=0$，此时 $\forall n\ge 1$，$a_n(f)=0$，$b_n(f)=$

$\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$，相应的 Fourier 级数称为**正弦级数**。

例题 8.4.3. 证明：如果级数 $\dfrac{|a_0|}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)<+\infty$，那么级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 必为某个周期为 2π 的函数的傅里叶级数。

证明. 我们熟知如下引理：

引理 8.4.4. 周期为 2π 的 n 次三角多项式 $T_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 的 Fourier 级数就是其本身。

由非负项级数 $\dfrac{|a_0|}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)$ 有上界，知其收敛，则由 Weierstrass 判别法，

$$\left|\frac{a_0}{2}\right|+\sum_{k=1}^{\infty}|a_k\cos kx+b_k\sin kx|\le\frac{|a_0|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k\cos kx|+|b_k\sin kx|)\le\frac{|a_0|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)$$

知 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 绝对且一致收敛于某个函数 $S(x)$。对引理 8.4.4 取 $n\to\infty$，即知 $S(x)$ 是所求的函数，即级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 是函数 $S(x)$ 的傅里叶级数。 □

8.4.2 Fourier 级数的性质及收敛性

引理 8.4.5. Riemann-Lebesgue 引理 若 f 在 $[a,\ b]$ 上可积，则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,\mathrm{d}x=0 \tag{8.16}$$

这个引理保证了，若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是以 2π 为周期的周期函数且在 $[-\pi,\ \pi]$ 上可积，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n(f)=\lim\limits_{n\to\infty}b_n(f)=0$。

重要定理 8.4.6. Dirichlet-Jordan 定理

假设 f 是以 2π 为周期的周期函数。如果 f 在 $[-\pi,\ \pi]$ 上逐段单调有界或逐段可微，那么 $\forall x\in\mathbb{R}$，函数 f 的 Fourier 级数在点 x 处收敛到 $S(x)=\dfrac{1}{2}\left(f(x-0)+f(x+0)\right)$。

定义 8.11. 考虑函数 $f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ 及区间 $[a,\ b]$ 的分割 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$。
（1）若 f 在每个子区间 $(x_{j-1},\ x_j)$ 上单调，则称函数 f 为**逐段（或分段）单调**。
（2）若 f 在每个子区间 $[x_{j-1},\ x_j]$ 上可微，则称函数 f 为**逐段（或分段）可微**；此时 f 在 $[a,\ b]$ 上**逐段连续**，因此 f 为有界函数。

更一般地，就有

定理 8.4.7. 收敛性定理 设 f 是以 2π 为周期的周期函数，并且在 $[-\pi,\ \pi]$ 上可积。如果函数 f 在 $(-\pi,\ \pi)$ 上连续且逐段单调有界，或者有有界导数，那么 f 的 Fourier 级数在 $(-\pi,\ \pi)$ 的任意闭子区间上一致收敛到 f 本身。

注 8.2. 非 $\mathbb{R}$ 上周期函数的延拓

对于定义在区间 $(-\pi,\ \pi)$ 上的任意函数 f，尽管它并不是定义在 $\mathbb{R}$ 上并且以 2π 为周期的函数，我们仍然可以将 f 延拓成为以 2π 为周期的函数，从而定义其 Fourier 系数（若相关积分均存在），由此得到形式 Fourier 级数。

为此，我们取 $f(\pi) = f(-\pi)$ 为任意常数，再将 f 以 2π 为周期从区间 $[-\pi,\ \pi]$ 延拓到整个 $\mathbb{R}$ 上。随后再来考虑延拓后的函数 f 的 Fourier 级数。若此时函数 f 满足 Dirichlet-Jordan 定理的条件，则 $\forall x \in (-\pi,\ \pi)$，函数 f 的 Fourier 级数在点 x 收敛到 $S(x) = \dfrac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$，在两个端点 $x = \pm\pi$ 收敛到 $\dfrac{1}{2}(f(-\pi+0)+f(\pi-0))$。

例题 8.4.8. $\forall x \in (-\pi,\ \pi)$，定义 $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$。求函数 f 在 $(-\pi,\ \pi)$ 内的 Fourier 级数并讨论其收敛性。

解. 由定义可知

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}(\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}) = \frac{2}{\pi}\sinh\pi$$

而 $\forall n \geq 1$，我们也有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-x}\cos(nx)\,\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{2}{\pi(1+n^2)}\sinh\pi, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-x}\sin(nx)\,\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{2n}{\pi(1+n^2)}\sinh\pi \end{aligned}$$

由于 f 在 $(-\pi,\ \pi)$ 上可微，则 $\forall x \in (-\pi,\ \pi)$，

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-x} &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) \\ &= \frac{2\sinh\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos(nx) + \frac{(-1)^n n}{1+n^2}\sin(nx)\right)\right) \end{aligned}$$

上述 Fourier 级数在点 $x = \pm\pi$ 处收敛到 $\dfrac{1}{2}(f(-\pi+0)+f(\pi-0)) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi})$。 Ⓢ

特别地，在 $x = 0$ 处，则有 $1 = \dfrac{2\sinh\pi}{\pi}\left(\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1+n^2}\right)$，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{2\sinh\pi} - \frac{1}{2}$$

而在点 $x = \pi$ 处，我们有 $\dfrac{2\sinh\pi}{\pi}\left(\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+n^2}\right) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi}) = \cosh\pi$，于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2\tanh\pi} - \frac{1}{2}$$

注 8.3. 一般周期函数的 Fourier 级数

假设 $\ell > 0$ 而 $T = 2\ell$。对周期为 T 的周期函数，我们可以相应地引入在任何长度为 T 的区间上均为正交的三角函数系 $\left\{1,\ \cos\frac{\pi}{\ell}x,\ \sin\frac{\pi}{\ell}x,\ \cdots,\ \cos\frac{n\pi}{\ell}x,\ \sin\frac{n\pi}{\ell}x,\ \cdots\right\}$。关于该函数系，前面介绍的所有结论依然成立。例如对 Dirichlet-Jordan 定理，只需将 π 换成 ℓ。

特别地，我们可以类似定义：

$$a_n(f) = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x\ (n \geq 0),\qquad b_n(f) = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x\ (n \geq 1) \tag{8.17}$$

称为 f 的 Fourier 系数，并记

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(f)\cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n(f)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right) \tag{8.18}$$

称上述函数项级数为 f 的（形式）Fourier 级数。

若只给定 $f(x)$ 是定义在 $(0,\ L)$ 上的函数，为求其周期为 $2L$ 的 Fourier 级数，有两种延拓方式：

- **奇延拓** $\forall x \in (-L,\ L)$，定义 $F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{若 } x \in (0,\ L), \\ -f(-x), & \text{若 } x \in (-L,\ 0), \end{cases}$ 此时 $\forall n \geq 0$，$a_n = 0$，而 $\forall n \geq 1$，我们则有 $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x$，相应的 Fourier 级数为正弦级数。
- **偶延拓** $\forall x \in (-L,\ L)$，定义 $F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{若 } x \in (0,\ L), \\ f(-x), & \text{若 } x \in (-L,\ 0), \end{cases}$ 此时 $\forall n \geq 0$，$b_n = 0$，而 $\forall n \geq 1$，我们则有 $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x$，相应的 Fourier 级数为余弦级数。

例题 8.4.9. $\forall x \in [0,\ 2]$，令 $f(x) = 2 - x$。将 f 在 $[0,\ 2]$ 上展成以 4 为周期的余弦级数并求和函数。

解. 首先将 f 偶延拓而定义 $F(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{若 } x \in [0,\ 2], \\ 2 + x, & \text{若 } x \in [-2,\ 0], \end{cases}$ 此时 $T = 4$，$\ell = 2$。故 F 的 Fourier 系数满足 $b_n = 0\ (n \geq 1)$。另外，我们还有

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (2 - x)\,\mathrm{d}x = 2$$

$\forall n \geq 1$，我们有

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} F(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (2 - x)\cos\frac{n\pi}{2}x\,\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2(1 - \cos(n\pi)) = \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2(1 - (-1)^n)$$

由于函数 F 在 $[-2,\ 2]$ 上为连续并且分段可微，而 $F(-2) = F(2)$，于是 $\forall x \in [0,\ 2]$，我们有

$$f(x) = 2 - x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{(2k-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2}x$$

Ⓢ

特别地，在点 $x = 0$ 处，我们有 $2 = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{8}{(2k-1)^2\pi^2}$，由此立刻可得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$。

8.4.3 Fourier 级数的平方平均收敛

对任意的整数 $n \geq 1$，我们令

$$\varLambda_n = \{1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cdots,\ \cos(nx),\ \sin(nx)\}$$

如果将 $\varLambda_n$ 所张成的实线性空间记作 $\mathcal{W}_n$，那么 $\mathcal{W}_n$ 为 $\mathscr{R}[-\pi,\ \pi]$ 的 $2n+1$ 维子空间。

重要定理 8.4.10. 最佳逼近定理

$\forall f \in \mathscr{R}[-\pi,\ \pi]$，令

$$S_n(f) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)) \tag{8.19}$$

则 $\|f - S_n(f)\| = \min\limits_{g \in \mathcal{W}_n} \|f - g\|$，且最小值仅在 $g = S_n(f)$ 处达到，此时有 $(f - S_n(f)) \perp \mathcal{W}_n$。

证明. 对任意的整数 $0 \leq k \leq n$，我们有

$$\begin{aligned}\big(f - S_n(f),\ \cos(kx)\big) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{\pi} S_n(f)(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \pi a_k(f) - \pi a_k(f) = 0\end{aligned}$$

同样，$\forall 1 \leq k \leq n$，均有 $\big(f - S_n(f),\ \sin(kx)\big) = 0$。于是 $f - S_n(f)$ 与 $\varLambda_n$ 中的任意元素正交，从而由线性性可知，$f - S_n(f)$ 与 $\mathcal{W}_n$ 中的任意元素正交，也就是说 $f - S_n(f) \perp \mathcal{W}_n$。

$\forall g \in \mathcal{W}_n$，定义 $F_n = f - S_n(f)$，$G_n = g - S_n(f)$，则 $G_n \in \mathcal{W}_n$，从而 $(F_n,\ G_n) = 0$，且我们有

$$\|f - g\|^2 = \|(f - S_n(f)) - (g - S_n(f))\|^2 = \|F_n - G_n\|^2 = \|F_n\|^2 + \|G_n\|^2 \geq \|F_n\|^2$$

上式恰好表明我们有

$$\min_{g \in \mathcal{W}_n} \|f - g\| = \|F_n\| = \|f - S_n(f)\|$$

并且仅当 $\|G_n\|^2 = 0$，即 $g = S_n(f)$ 时取到最小值。 $\square$

引理 8.4.11. Bessel 不等式 $\forall f \in \mathscr{R}[-\pi,\ \pi]$，均有

$$\frac{1}{2}(a_0(f))^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big((a_k(f))^2 + (b_k(f))^2\Big) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2\,\mathrm{d}x \tag{8.20}$$

证明. 对任意整数 $n \geq 1$，我们有

$$\begin{aligned}0 &\leq \|f - S_n(f)\|^2 = \|f\|^2 + \|S_n(f)\|^2 - 2(f,\ S_n(f)) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} (S_n(f)(x))^2\,\mathrm{d}x - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \,\mathrm{d}x + \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right) - \pi \left(a_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right)$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \,\mathrm{d}x - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right)$$

由此立得

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \,\mathrm{d}x$$

随后让 $n \to \infty$，可知

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \,\mathrm{d}x$$ □

推论 8.4.12. $\forall f \in \mathscr{R}[-\pi, \pi]$，级数 $\frac{1}{2}(a_0(f))^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left((a_k(f))^2 + (b_k(f))^2 \right)$ 收敛。

重要定理 8.4.13. Parseval 等式

$\forall f \in \mathscr{R}[-\pi, \pi]$，均有

$$\frac{1}{2}(a_0(f))^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left((a_k(f))^2 + (b_k(f))^2 \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \,\mathrm{d}x \tag{8.21}$$

推论 8.4.14. 唯一性 若 $f, g \in \mathscr{R}[-\pi, \pi]$ 有相同的 Fourier 级数，则 f, g 几乎处处相等；若 $f, g \in \mathscr{C}[-\pi, \pi]$ 有相同的 Fourier 级数，则 $f \equiv g$。

证明. 由于 $a_0(f-g) = a_0(f) - a_0(g) = 0$，而且 $\forall n \ge 1$，同样也有 $a_n(f-g) = 0$，$b_n(f-g) = 0$，于是由 Parseval 等式可知 $\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2 \,\mathrm{d}x = 0$。 □

重要定理 8.4.15. Fourier 级数在范数意义下的收敛（平方平均收敛）

$\forall f \in \mathscr{R}[-\pi, \pi]$，均有 $\lim_{n\to\infty} \|S_n(f) - f\| = 0$。

证明. $\|f - S_n(f)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \,\mathrm{d}x - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right)$，再让 $n \to \infty$。 □

推论 8.4.16. 广义 Parseval 等式 $\forall f, g \in \mathscr{R}[-\pi, \pi]$，均有

$$\frac{1}{2} a_0(f) a_0(g) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) a_k(g) + b_k(f) b_k(g)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \,\mathrm{d}x \tag{8.22}$$

证明. 对任意的整数 $n \geq 1$，我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(f))\,g(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_n(f)(x)g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(f))\,g(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos(kx)+b_k(f)\sin(kx))\right)g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(f))\,g(x)\,\mathrm{d}x + \frac{a_0(f)}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k(f)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)g(x)\,\mathrm{d}x + b_k(f)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)g(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(f))\,g(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}a_0(f)a_0(g) + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)a_k(g)+b_k(f)b_k(g))
\end{aligned}
$$

由 Cauchy 不等式，我们立刻有

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(f))\,g(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(f)|\cdot|g(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(f)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = \|f-S_n(f)\|\cdot\|g\|
\end{aligned}
$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f-S_n(f)\| = 0$，于是由夹逼原理可知所证结论成立。 □

重要定理 8.4.17. Fourier 级数求和与积分的可交换性

$\forall f \in \mathscr{R}[-\pi,\ \pi]$ 以及 $\forall a,\ x \in [-\pi,\ \pi]$，均有

$$
\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}a_0(f)(x-a) + \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x (a_k(f)\cos(kt)+b_k(f)\sin(kt))\,\mathrm{d}t \tag{8.23}
$$

也即 Fourier 级数求和（即便它**不是点态收敛**时也成立）总是可以与积分交换次序。

证明. 固定 $a,\ x \in [-\pi,\ \pi]$。不失一般性，我们可假设 $a < x$。$\forall t \in [-\pi,\ \pi]$，令 $g(t) = \begin{cases} 1, & \text{若 } t \in [a,\ x], \\ 0, & \text{若 } t \notin [a,\ x], \end{cases}$

则 g 在 $[-\pi,\ \pi]$ 上可积。于是我们有

$$
\begin{aligned}
\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\boldsymbol{g(t)}\,\mathrm{d}t &= \frac{\pi}{2}a_0(f)\boldsymbol{a_0(g)} + \pi\sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\boldsymbol{a_k(g)} + b_k(f)\boldsymbol{b_k(g)}) \\
&= \frac{\pi}{2}a_0(f)\int_a^x \mathbf{d}\boldsymbol{t} + \pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k(f)\int_a^x \mathbf{cos}\,\boldsymbol{kt}\,\mathbf{d}\boldsymbol{t} + b_k(f)\int_a^x \mathbf{sin}\,\boldsymbol{kt}\,\mathbf{d}\boldsymbol{t}\right) \\
&= \frac{1}{2}a_0(f)(x-a) + \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x (a_k(f)\cos(kt)+b_k(f)\sin(kt))\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

□

9 多元函数及其连续性

9.1 Euclid 空间

重要定义 9.1. Euclid 空间

设 $n \geq 1$ 为整数，定义 $\mathbb{R}^n = \{(x_1,\ \cdots,\ x_n) \mid x_j \in \mathbb{R},\ 1 \leq j \leq n\}$，称为 ***n* 维 Euclid 空间**。

对于 $X = (x_1,\ \cdots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n$，定义 $\|X\|_n := \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^2}$，称为 X 的**范数**，在不产生混淆时，记作 $\|X\|$。$\forall X = (x_1,\ \cdots,\ x_n)$，$Y = (y_1,\ \cdots,\ y_n) \in \mathbb{R}^n$，定义 $d(X,\ Y) := \|X - Y\|$ 为 X，Y 之间的**距离**，即有 $\|X - Y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$。

9.1.1 $\mathbb{R}^n$ 的拓扑性质

定义 9.2. 固定 $X_0 \in \mathbb{R}^n$，$\delta > 0$，定义

- $\boldsymbol{B(X_0,\ \delta)} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X - X_0\| < \delta\}$，称为点 X_0 的 **δ-邻域**，也称为以 X_0 为中心以 δ 为半径的**开球**。
- $\boldsymbol{\mathring{B}(X_0,\ \delta)} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|X - X_0\| < \delta\}$，称为 X_0 的**去心 δ-邻域**。

定义 9.3. 固定 $S \subseteq \mathbb{R}^n$，$X_0 \in \mathbb{R}^n$，定义

- 如果 $\exists \delta > 0$ 使得 $B(X_0,\ \delta) \subseteq S$，则称点 X_0 为 S 的一个**内点**。
- 如果 $\exists \delta > 0$ 使得 $B(X_0,\ \delta) \cap S = \varnothing$，则称点 X_0 为 S 的一个**外点**。
- 若 X_0 既不为 S 的内点，也不为其外点，则称 X_0 为 S 的一个**边界点**。等价地，点 X_0 为 S 的边界点当且仅当 $\forall \delta > 0$，均有 $B(X_0,\ \delta) \cap (\mathbb{R}^n \setminus S) \neq \varnothing$，$B(X_0,\ \delta) \cap S \neq \varnothing$。
- 若 $\forall \delta > 0$，均有 $\mathring{B}(X_0,\ \delta) \cap S \neq \varnothing$，则称 X_0 为 S 的一个**极限点**。

重要定义 9.4. 开集、闭集

若 S 的每点均为内点，则称 S 为**开集**；若 $\mathbb{R}^n \setminus S$ 为开集，则称 S 为**闭集**。

- 由 S 的所有内点组成的集合称为它的**内部**，记作 $\mathring{S}$，也记作 $\mathrm{Int}\ S$，这是一个开集。
- 由 S 的所有外点组成的集合称为它的**外部**，记作 $\mathrm{Ext}\ S$，这是一个开集。
- 由 S 的所有边界点组成的集合称为 S 的**边界**，记作 ∂S，这是一个闭集。
- $\overline{S} := \partial S \cup S$ 为 S 的**闭包**，它为闭集。

$\mathbb{R}^n$ 为 $\mathrm{Int}\ S$，∂S 和 $\mathrm{Ext}\ S$ 的不交并。$\varnothing$，$\mathbb{R}^n$ 既为开集，也为闭集。

定理 9.1.1. $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集当且仅当它为若干个开球的并。

证明.（1）**充分性。**假设 S 为若干个开球的并，即 $S = \bigcup\limits_{i \in J} B(X_i,\ \delta_i)$，则 $\forall X \in S$，存在 $X_{i_0} \in S$ 和 $\delta_{i_0} > 0$ 使得 $X \in B(X_{i_0},\ \delta_{i_0}) \subseteq S$，$X_{i_0} \in S$。令 $\eta = \delta_{i_0} - d(X,\ X_{i_0}) = \delta_{i_0} - \|X - X_{i_0}\| > 0$，则只需证 $B(X,\ \eta) \subseteq S$。

事实上，$\forall W \in B(X,\ \eta)$，$\|W - X\| < \eta$，由三角不等式就有 $\|W - X_{i_0}\| \leq \|W - X\| + \|X - X_{i_0}\| < \eta + d(X,\ X_{i_0}) = \delta_{i_0}$。于是 $\forall X \in S$，$\forall W \in B(X,\ \eta)$，$W \in B(X_{i_0},\ \delta_{i_0})$，即 $\forall X \in S$，$B(X,\ \eta) \subseteq S$，故 S

为开集。

（2）**必要性**。若 S 为开集，则 $\forall X \in S$，$\exists \delta_X > 0$ 使得 $B(X,\ \delta_X) \subseteq S$，则 $S = \bigcup\limits_{X \in S} B(X,\ \delta_X)$。 □

推论 9.1.2. 任意多个开集的并还是开集，任意多个闭集的交还是闭集。

定理 9.1.3. 有限多个开集的交为开集。

证明. 设 $S = \bigcap\limits_{j=1}^{k} S_j$，其中 S_j 为开集。对任意 $X \in S$ 以及任意 $1 \le j \le k$，因 $X \in S_j$ 且 S_j 为开集，则 $\exists \delta_j > 0$ 使得 $B(X,\ \delta_j) \subseteq S_j$。令 $\delta = \min\limits_{1 \le j \le k} \delta_j$，则 $B(X,\ \delta) = \bigcap\limits_{j=1}^{k} B(X,\ \delta_j) \subseteq S$。故所证成立。 □

推论 9.1.4. 有限多个闭集的并为闭集。

重要定义 9.5. 连通集

给定集合 $D \subseteq \mathbb{R}^n$，如果 $\forall X,\ Y \in D$，均存在 D 中的折线将 X，Y 连接起来，就称集合 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 为**连通集**；否则，则称为**非连通集**。

$\mathbb{R}^n$ 中非空的连通开集称为**开区域**，开区域的闭包称为**闭区域**。

9.1.2 $\mathbb{R}^n$ 中点列的收敛

重要定义 9.6. 点列收敛

设 $\{X_k\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的点列，而 $A \in \mathbb{R}^n$。

- 称 $\{X_k\}$ **收敛**到 A，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}$，使得 $\forall k > N$，均有 $\|X_k - A\| < \varepsilon$，此时记 $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = A$。
- 称 $\{X_k\}$ 为 **Cauchy 序列**，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}$，使得 $\forall k,\ l > N$，均有 $\|X_k - X_l\| < \varepsilon$。

对 $\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{X_k\}$ 及其极限 $A \in \mathbb{R}^n$，约定记号：$X_k = (x_k^{(1)},\ \ldots,\ x_k^{(n)})$，$A = (a^{(1)},\ \ldots,\ a^{(n)})$。

重要定理 9.1.5. 点列收敛的分量判别

$\lim\limits_{k\to\infty} X_k = A$ 当且仅当对于任意的整数 $1 \le j \le n$，均有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^{(j)} = a^{(j)}$。

证明.（1）**必要性**。由题设知，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}$，使得 $\forall k > N$，我们有 $\|X_k - A\| < \varepsilon$，因而对任意的 $1 \le j \le n$，我们有 $|x_k^{(j)} - a^{(j)}| \le \|X_k - A\| < \varepsilon$，也即我们有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^{(j)} = a^{(j)}$。

（2）**充分性**。由题设可得知，$\forall \varepsilon > 0$ 以及 $1 \le j \le n$，$\exists N_j \in \mathbb{N}$，使得 $\forall k > N_j$，均有 $|x_k^{(j)} - a^{(j)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$。令 $N = \max\limits_{1 \le j \le n} N_j$。则 $\forall k > N$，我们有 $\|X_k - A\| = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} |x_k^{(j)} - a^{(j)}|^2} < \varepsilon$，故 $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = A$。 □

由此，收敛数列中与偏序关系无关的性质都可以推广到收敛点列。如

推论 9.1.6. $\{X_k\}$ 为 Cauchy 序列当且仅当对任意 $1 \le j \le n$，$\left\{x_k^{(j)}\right\}$ 均为 Cauchy 数列。

推论 9.1.7. $\mathbb{R}^n$ 完备，即 $\mathbb{R}^n$ 中的 Cauchy 列必收敛。

定理 9.1.8. Ω 中任意收敛点列 $\{X_k\}$ 的极限 $A \in \Omega$，当且仅当 Ω 为闭集。

定理 9.1.9. 设 $S \subseteq \mathbb{R}^n$，$A \in \mathbb{R}^n$，则 A 为 S 的极限点当且仅当 $S \setminus \{A\}$ 中有点列 $\{X_k\}$ 收敛到 A。

证明.（1）**必要性**。若 A 为 S 的极限点，则 $\forall k \geq 1$，$\exists X_k \in \mathring{B}\left(A,\ \frac{1}{k}\right) \cap S$，即 $X_k \in S \setminus \{A\}$，$\|X_k - A\| < \frac{1}{k}$。于是由夹逼原理可知点列 $\{X_k\}$ 收敛到 A。
（2）**充分性**。若 $S \setminus \{A\}$ 中有点列 $\{X_k\}$ 收敛到 A，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$ 使得 $\forall k > N$，我们均有 $\|X_k - A\| < \varepsilon$。由于 $X_k \in S \setminus \{A\}$，故 $X_k \in \mathring{B}(A,\ \varepsilon) \cap S$，由此立刻可知 A 为 S 的极限点。 □

定义 9.7. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为非空集合，定义

- 令 $d(\Omega) = \sup\limits_{X,Y \in \Omega} \|X - Y\|$，称为 Ω 的**直径**。
- 若 Ω 包含在某个（有限的）球中，则称 Ω **有界**。

集合有界当且仅当它包含在某个以原点为中心的球中，当且仅当其直径有限。

特别地，称 $\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{X_k\}$ 有界，若它们组成的集合有界，即 $\exists r > 0$ 使 $\forall k \geq 1$，$\|X_k\| < r$。

重要定理 9.1.10. 闭集套定理

设 $\{F_k\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的非空闭集组成的集列使得 $F_1 \supseteq F_2 \cdots \supseteq F_k \supseteq \cdots$。若 $\lim\limits_{k \to \infty} d(F_k) = 0$，则交集 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ 为单点集。

重要定理 9.1.11. Weierstrass 定理

$\mathbb{R}^n$ 中有界点列必有收敛子点列。

9.2 n 元函数与 n 元向量值函数

重要定义 9.8. n 元向量值函数

设 $m,\ n \geq 1$ 为整数，$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为非空集。称任意映射 $\boldsymbol{f}: \Omega \to \mathbb{R}^m$ 为 Ω 上的 **n 元向量值函数**，当 $m = 1$ 时，称为 **n 元数量值函数**，简称为 **n 元函数**。

定义 9.9. 对向量值函数，定义以下运算：

线性组合 设 $\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{g}: \Omega \to \mathbb{R}^m$ 为向量值函数，而 $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$。$\forall X \in \Omega$，定义

$$(\lambda \boldsymbol{f} + \mu \boldsymbol{g})(X) := \lambda \boldsymbol{f}(X) + \mu \boldsymbol{g}(X)$$

乘、除法 设 $\boldsymbol{f}: \Omega \to \mathbb{R}^m$ 为向量值函数，而 $g: \Omega \to \mathbb{R}$ 为函数。$\forall X \in \Omega$，定义

$$(g\boldsymbol{f})(X) := g(X)\boldsymbol{f}(X), \qquad \left(\frac{\boldsymbol{f}}{g}\right)(X) \xlongequal{g(X) \neq 0} \frac{\boldsymbol{f}(X)}{g(X)}$$

复合运算 假设 $l,\ m,\ n \geq 1$ 为整数，$\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$，$\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{f}: \Omega_1 \to \Omega_2$，$\boldsymbol{g}: \Omega_2 \to \mathbb{R}^l$ 为向量值函

数。$\forall X \in \Omega_1$，定义

$$(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})(X) := \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(X))$$

设 $\boldsymbol{f}:\Omega\to\mathbb{R}^m$ 为 n 元向量值函数，则 $\forall X=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\Omega$，均有 $\boldsymbol{f}(X)\in\mathbb{R}^m$，记作 $Y=(y_1,\cdots,y_m)^{\mathrm{T}}$，每个 y_j 为 X 的函数：$y_j=f_j(X)=f_j(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$。故 $\boldsymbol{f}:\Omega\to\mathbb{R}^m$ 与 m 个 n 元函数 $f_j:\Omega\to\mathbb{R}$ 等价。此时记作 $\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_m)^{\mathrm{T}}$。

9.2.1 多元函数的极限

重要定义 9.10. 向量值函数的极限

设 $m, n\geq 1$ 为整数，$\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 为非空集，$X_0\in\mathbb{R}^n$ 为 Ω 的极限点，$\boldsymbol{f}:\Omega\to\mathbb{R}^m$ 为向量值函数，$A\in\mathbb{R}^m$。若

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ 使得\ \forall X\in\Omega,\ 当\ 0<\|X-X_0\|_n<\delta\ 时,\ \|\boldsymbol{f}(X)-A\|_m<\varepsilon$$

则称 X 在 Ω 内趋于 X_0 时，$\boldsymbol{f}(X)$ 以 A 为**极限**（或**收敛到** A），记作 $\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0}\boldsymbol{f}(X)=A$。

这个定义等价于，$\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0}\boldsymbol{f}(X)=A$ 当且仅当

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ 使得\ \forall X\in\mathring{B}(X_0,\delta)\cap\Omega,\ 有\ \boldsymbol{f}(X)\in B(A,\varepsilon)$$

若记 $\boldsymbol{f}=(f_1,\ldots,f_m)^{\mathrm{T}}$，$A=(a_1,\ldots,a_m)^{\mathrm{T}}$，那么 $\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0}\boldsymbol{f}(X)=A$ 当且仅当对于任意的 $1\leq j\leq m$，均有 $\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0}f_j(X)=a_j$。

如果点 X_0 为 $\Omega\cup\{X_0\}$ 的内点，我们通常将 $\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0}\boldsymbol{f}(X)$ 简记作 $\lim\limits_{\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X_0}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$。

定理 9.2.1. 向量值函数的极限有以下基本性质：

- 极限的唯一性、保序性、保号性及夹逼原理均仍成立。
- **四则运算** 设 $f, g:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，$\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0}f(X)=A$，$\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0}g(X)=B$ 存在，则

$$\lim_{\Omega\ni X\to X_0}(\lambda f+\mu g)(X)=\lambda A+\mu B,$$
$$\lim_{\Omega\ni X\to X_0}(fg)(X)=AB,\qquad \lim_{\Omega\ni X\to X_0}\left(\frac{f}{g}\right)(X)\xlongequal{B\neq 0}\frac{A}{B}$$

- **复合法则** 假设 $l, m, n\geq 1$ 为整数，$\Omega_1\subseteq\mathbb{R}^n$，$\Omega_2\subseteq\mathbb{R}^m$ 非空，而 $\boldsymbol{f}:\Omega_1\to\Omega_2$，$\boldsymbol{g}:\Omega_2\to\mathbb{R}^l$ 为向量值函数。如果 $\lim\limits_{\Omega_1\ni X\to X_0}\boldsymbol{f}(X)=Y_0$，且 $\exists\delta>0$ 使 $\forall X\in\mathring{B}(X_0,\delta)\cap\Omega_1$，$\boldsymbol{f}(X)\neq Y_0$，而 $\lim\limits_{\Omega_2\ni Y\to Y_0}\boldsymbol{g}(Y)=A$，则 $\lim\limits_{\Omega_1\ni X\to X_0}(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})(X)=A$。
- **点列极限与函数极限的关系** 设 $m, n\geq 1$ 为整数，$\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 非空，$\boldsymbol{f}:\Omega\to\mathbb{R}^m$ 为向量值函数，而 $X_0\in\mathbb{R}^n$，$A\in\mathbb{R}^m$。那么 $\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0}\boldsymbol{f}(X)=A$ 当且仅当对 $\Omega\setminus\{X_0\}$ 中收敛到 X_0 的任意点列 $\{X_k\}$，均有 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{f}(X_k)=A$。
- **Cauchy 准则** $\lim\limits_{\Omega\ni X\to X_0}\boldsymbol{f}(X)$ 收敛当且仅当 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 使 $\forall X', X''\in\mathring{B}(X_0,\delta)\cap\Omega$，均有 $\|\boldsymbol{f}(X')-\boldsymbol{f}(X'')\|_m<\varepsilon$。

计算多变量函数的极限通常很复杂，目前唯一有效方法是将之转化成单变量函数极限。出于简便记号，后面我们将只讨论两个变量的函数极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$，称为**二重极限**。我们也可考虑极限

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,\ y)$。由此我们还可以考虑单侧极限以及 x_0 或 y_0 为无穷的情形，比如 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to\infty}} f(x,\ y)$，$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} f(x,\ y)$，$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to+\infty}} f(x,\ y)$ 等。

例题 9.2.2. 计算 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$，其中 $a\in\mathbb{R}$。

解. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\ln\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\dfrac{x^2}{x+y}\ln\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\dfrac{x^2}{x+y}\cdot\left(-\dfrac{1}{2x}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{1+\frac{y}{x}}=-\dfrac{1}{2}$，故 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$。Ⓢ

例题 9.2.3. 试证明 $f(x,\ y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2-x}$ 在 $(x,\ y)$ 沿任何直线趋于 $(0,\ 0)$ 时，均会趋于 0，但是当 $(x,\ y)$ 趋于 $(0,\ 0)$ 时，极限却不存在。

解. 假设 $a,\ b\in\mathbb{R}$ 不全为零。对于过 $(0,\ 0)$ 的任意直线 $\begin{cases}x=at,\\y=bt\end{cases}$（$t\in\mathbb{R}$），我们有

$$\lim_{t\to0}f(at,\ bt)=\lim_{t\to0}\frac{(at)^2}{(at)^2+(bt)^2-at}=\lim_{t\to0}\frac{a^2}{a^2+b^2-\frac{a}{t}}=0$$

$\forall t\in\mathbb{R}$，定义 $g(t)=(t^2,\ t)$。那么 $\lim\limits_{t\to0}g(t)=(0,\ 0)$，且 g 在 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上不等于 $(0,\ 0)$。注意到

$$\lim_{t\to0}f\circ g(t)=\lim_{t\to0}\frac{(t^2)^2}{(t^2)^2+t^2-t^2}=1\neq0$$

于是由复合函数极限法则可知极限 $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)}f(x,\ y)$ 不存在。Ⓢ

重要定理 9.2.4. 二重极限与累次极限的关系

设有 $\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)}f(x,\ y)=A$，且在 x_0 的某去心邻域 U 内 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x,\ y)=\varphi(x)$ 存在，则 $A=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,\ y)$。

证明. 仅以 $A\in\mathbb{R}$ 为例，由极限的定义可知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 使得 $\forall(x,\ y)\in\mathring{B}\big((x_0,\ y_0),\ \delta\big)$，均有 $|f(x,\ y)-A|<\varepsilon$。则 $\forall x\in U\cap(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，对 y 取极限可得 $|\varphi(x)-A|\le\varepsilon$。故 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$。□

推论 9.2.5. 若二重极限与某一个累次极限均存在，则二者必然相等；即若 $\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)}f(x,\ y)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,\ y)=B$ 存在，则 $A=B$。

推论 9.2.6. 若累次极限存在但不相等，则二重极限不存在；即若 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,\ y)$ 与 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,\ y)$ 均存在但不相等，则 $\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)}f(x,\ y)$ 不存在。

9.2.2 多元函数的连续性

重要定义 9.11. 向量值函数的连续性

假设 $m,\ n \geq 1$ 为整数，$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$，$X_0 \in \Omega$ 为 Ω 的极限点，$\boldsymbol{f}: \Omega \to \mathbb{R}^m$ 为向量值函数。若

$$\lim_{\Omega \ni X \to X_0} \boldsymbol{f}(X) = \boldsymbol{f}(X_0)$$

则称 $\boldsymbol{f}$ 在点 X_0 处**连续**。

$\boldsymbol{f}$ 在点 X_0 连续当且仅当

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ 使得 } \forall X \in \Omega,\ \text{当 } \|X - X_0\|_n < \delta \text{ 时，均有 } \|\boldsymbol{f}(X) - \boldsymbol{f}(X_0)\|_m < \varepsilon$$

若点 X_0 不为 Ω 的极限点，上述性质恒成立，此时我们也称 $\boldsymbol{f}$ 在点 X_0 处连续。

若 $\boldsymbol{f}: \Omega \to \mathbb{R}^m$ 在 Ω 的每点连续，则称 $\boldsymbol{f}$ **在 Ω 上连续**，记作 $\boldsymbol{f} \in \mathscr{C}(\Omega; \mathbb{R}^m)$，即定义 $\mathscr{C}(\Omega; \mathbb{R}^m) = \{\boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{f}: \Omega \to \mathbb{R}^m \text{ 连续}\}$。$m = 1$ 时，简记为 $f \in \mathscr{C}(\Omega)$。

重要定理 9.2.7. 开集上连续函数的等价性质

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集，而 $\boldsymbol{f}: \Omega \to \mathbb{R}^m$ 为向量值函数。则 $\boldsymbol{f}$ 连续当且仅当对 $\mathbb{R}^m$ 中任意开集 G，原像集 $\boldsymbol{f}^{-1}(G) = \{x \in \Omega \mid \boldsymbol{f}(x) \in G\}$ 均为开集。

证明. (1) **充分性**。假设对于 $\mathbb{R}^m$ 中的任意开集 G，其原像集 $\boldsymbol{f}^{-1}(G)$ 为开集。取 $X_0 \in \Omega$，$\forall \varepsilon > 0$，令 $G = B(\boldsymbol{f}(X_0),\ \varepsilon)$，由题设知 $\boldsymbol{f}^{-1}(G)$ 为包含点 X_0 的开集，则 $\exists \delta > 0$ 使 $B(X_0,\ \delta) \subseteq \boldsymbol{f}^{-1}(G)$，于是 $\forall X \in B(X_0,\ \delta)$，均有 $\|\boldsymbol{f}(X) - \boldsymbol{f}(X_0)\|_m < \varepsilon$。因此 $\boldsymbol{f}$ 在点 X_0 处连续，从而 $\boldsymbol{f}$ 为连续映射。

(2) **必要性**。假设 $\boldsymbol{f}$ 为连续函数，而 G 为 $\mathbb{R}^m$ 中的任意非空开集。$\forall X_0 \in \boldsymbol{f}^{-1}(G)$，均有 $\boldsymbol{f}(X_0) \in G$。又 G 为开集，则 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $B(\boldsymbol{f}(X_0),\ \varepsilon) \subseteq G$。$\boldsymbol{f}$ 在 X_0 连续，则 $\exists \delta_1 > 0$ 使 $\forall X \in \Omega \cap B(X_0,\ \delta_1)$，我们有 $\|\boldsymbol{f}(X) - \boldsymbol{f}(X_0)\|_m < \varepsilon$。又 $\Omega \cap B(X_0,\ \delta_1)$ 为开集，故 $\exists \delta > 0$ 使 $B(X_0,\ \delta) \subseteq \Omega \cap B(X_0,\ \delta_1)$，则 $\forall X \in B(X_0,\ \delta)$，均有 $\|\boldsymbol{f}(X) - \boldsymbol{f}(X_0)\|_m < \varepsilon$，也即有 $B(X_0,\ \delta) \subseteq \boldsymbol{f}^{-1}(B(\boldsymbol{f}(X_0),\ \varepsilon)) \subseteq \boldsymbol{f}^{-1}(G)$，故 X_0 为 $\boldsymbol{f}^{-1}(G)$ 的内点，进而 $\boldsymbol{f}^{-1}(G)$ 为开集。 □

同理可证 $\boldsymbol{f}$ 连续当且仅当对于 $\mathbb{R}^m$ 中任意闭集 G，原像集 $\boldsymbol{f}^{-1}(G)$ 为闭集。

重要定理 9.2.8. 有界闭集上连续数量值函数的最值定理

假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为有界闭集，而 $f \in \mathscr{C}(\Omega)$，则 f 在 Ω 上有最大值和最小值。

证明. 首先证明 **f 在 Ω 上有界**。否则，$\forall k \in \mathbb{N}^*$，$\exists X_k \in \Omega$ 使得 $|f(X_k)| > k$。由 Ω 的有界性可知 $\{X_k\}$ 有一个子列 $\{X_{\ell_k}\}$ 收敛，设其极限为 A。又 Ω 为闭集，则 $A \in \Omega$，再由 f 的连续性以及夹逼原理可得 $f(A) = \lim\limits_{k \to \infty} f(X_{\ell_k}) = \infty$。矛盾！故假设不成立，从而 f 有界。

下证 **f 在 Ω 上有最值**。用反证法，假设 f 没有最大值或最小值。不失一般性，可假设 f 没有最大值，否则可以考虑 $-f$。令 $M = \sup f(\Omega)$。则 $\forall X \in \Omega$，$f(X) < M$。定义 $F(X) = \dfrac{1}{M - f(X)}$，则 $F \in \mathscr{C}(\Omega)$。又由 M 的定义可知，$\forall k \in \mathbb{N}^*$，$\exists X_k \in \Omega$ 使得 $f(X_k) > M - \dfrac{1}{k}$，故 $F(X_k) > k$，从而 F 在 Ω 上没有上界。矛盾！故所证成立。 □

继续讨论连通性，我们再定义

重要定义 9.12. 弧连通集

设 $D \subseteq \mathbb{R}^n$，如果 $\forall X, Y \in D$，均存在 D 中的连续曲线将 X, Y 连接起来，即存在向量值连续函数 $\boldsymbol{\gamma}: [0, 1] \to D$ 使得我们有 $\boldsymbol{\gamma}(0) = X$，$\boldsymbol{\gamma}(1) = Y$，则称集合 D **弧连通**。

则知定义 9.5 定义的折线连通集也为弧连通集。由连续函数的复合依然连续，若 $f \in \mathcal{C}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ 而 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为弧连通，则 $f(\Omega)$ 为弧连通集。

重要定理 9.2.9. 连通集上连续数量值函数的介值定理

假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为弧连通集，而 $f \in \mathscr{C}(\Omega)$，则 $\forall X_1, X_2 \in \Omega$ 以及介于 $f(X_1)$，$f(X_2)$ 之间的任意实数 μ，$\exists X_0 \in \Omega$ 使得 $f(X_0) = \mu$。

例题 9.2.10. 证明：存在正实数 m，M 使得对于任意的 $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，均有

$$m \sum_{j=1}^{n} |x_j| \le \|X\| \le M \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

证明. 定义 $S = \{Y \in \mathbb{R}^n \mid \|Y\|_n = 1\}$，则 S 为有界闭集。$\forall Y = (y_1, \cdots, y_n) \in S$，令 $f(Y) = \sum\limits_{j=1}^{n} |y_j| > 0$，则 f 连续，从而有最小值 $a > 0$，最大值 b。选取 $m = \dfrac{1}{b}$，$M = \dfrac{1}{a}$。

$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$，都有 $Y_X = \dfrac{1}{\|X\|_n}(x_1, \cdots, x_n) \in S$，则 $a \le f(Y_X) \le b$，也即 $a \le \dfrac{1}{\|X\|_n} \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| \le b$，从而我们有 $\dfrac{1}{b} \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| \le \|X\|_n \le \dfrac{1}{a} \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|$，也就是说我们有 $m \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| \le \|X\|_n \le M \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|$。

而 X 为零向量时，该式也成立，故所证成立。 □

10 多元函数微分学

10.1 偏导数与全微分

10.1.1 多元函数的可微性

定义 10.1. 设 $n \geq 1$ 为整数，$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$，而 $X_0 \in \mathbb{R}^n$ 为 Ω 的极限点，$f : \Omega \to \mathbb{R}$ 为函数。

- 若 $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} f(X) = 0$，称 f 在 $\Omega \ni X \to X_0$ 时为**无穷小函数**（或**无穷小量**），记作
$$f(X) = o(1)\ (\Omega \ni X \to X_0)$$
可见 $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} f(X) = A$ 当且仅当 $f(X) - A = o(1)\ (\Omega \ni X \to X_0)$。
- 设 $g : \Omega \to \mathbb{R}$ 为函数，若存在 $\beta > 0$，$\delta > 0$ 使 $\forall X \in \Omega \cap \mathring{B}(X_0, \delta)$，$|f(X)| \leq \beta |g(X)|$，则记
$$f(X) = O(g(X))\ (\Omega \ni X \to X_0)$$
若还有 $g(X) = O(f(X))$，则称 f，g 为**同阶**。
- 设 $k \geq 0$，若 $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} \dfrac{f(X)}{\|X - X_0\|^k} = 0$，则称 f 在 $\Omega \ni X \to X_0$ 时为 $\|X - X_0\|^k$ 的**高阶的无穷小**，记作
$$f(X) = o(\|X - X_0\|^k)\ (\Omega \ni X \to X_0)$$
- 若 $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} \dfrac{f(X)}{\|X - X_0\|^k} = c \neq 0$，则我们称 f 在 $\Omega \ni X \to X_0$ 时为 $\|X - X_0\|$ 的 **k 阶的无穷小**，此时 f 局部常号。若 $k = 0$，则 $\lim\limits_{\Omega \ni X \to X_0} f(X) = c$，因此我们通常不考虑 0 阶无穷小。

定义 10.2. 称 $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为**线性函数**，若 $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ 以及 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$，我们均有 $L(\lambda X + \mu Y) = \lambda L(X) + \mu L(Y)$。

重要定义 10.3. 全微分

假设 $X_0 = \left(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^n$，$r > 0$，而 $f : B(X_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为函数。若存在线性函数 $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 使得当 $X \to X_0$ 时，我们有
$$f(X) - f(X_0) = L(X - X_0) + o(\|X - X_0\|) \tag{10.1}$$
则称 f 在点 X_0 处**可微**，并将线性函数 L 记作 $\mathrm{d}f(X_0)$，称为 f 在点 X_0 处的**全微分**或**微分**。

注 10.1. 全微分的线性表示

设 $\hat{e}_1$, $\cdots$, $\hat{e}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的自然基底，令 $a_j = L(\hat{e}_j)$。$\forall X = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$，我们有 $X = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \hat{e}_j$，由此可得 $L(X) = \sum\limits_{j=1}^{n} L(\hat{e}_j) x_j = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j$。$\forall X = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$L(X) = (a_1, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (a_1, \cdots, a_n)X$$

于是线性函数 $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 可以与 n 阶行向量 $(a_1, \cdots, a_n)$ 视为等同，故 f 在点 X_0 处可微当且仅当 $\exists a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ 使得 $X \to X_0$ 时，

$$f(X) - f(X_0) = L(X - X_0) + o(\|X - X_0\|) = \boldsymbol{\sum_{j=1}^{n} a_j (x_j - x_j^{(0)})} + o(\|X - X_0\|)$$

f 在点 X_0 可微蕴含在该点连续，反之不对。

定理 10.1.1. 设 a_1, $\cdots$, $a_n \in \mathbb{R}$，$L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 线性使得 $\forall Y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$，均有 $L(Y) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j y_j$，则 $L = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \,\mathrm{d}x_j$。

证明. 定义 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为 $f(X) = x_j$，则在任意固定点 $X_0 = \left(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}\right)$ 处，$f(X) - f(X_0) = x_j - x_j^{(0)} = (\underbrace{0, \cdots, 0, 1}_{j}, 0, \cdots, 0)(X - X_0) + 0$。从而由微分的定义可知

$$\mathrm{d}f(X_0) = \mathrm{d}x_j^{(0)} = (\underbrace{0, \cdots, 0, 1}_{j}, 0, \cdots, 0) = \hat{e}_j$$

也即 $\mathrm{d}x_j = \hat{e}_j$。由于 $L(Y) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j y_j = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j y_j \hat{e}_j = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \,\mathrm{d}x_j(Y)$，因此所证结论成立。 □

定理 10.1.2. 假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集，$X_0 \in \Omega$，而函数 f，$g: \Omega \to \mathbb{R}$ 在点 X_0 可微。则下列性质成立：

- $\forall \lambda$，$\mu \in \mathbb{R}$，$\lambda f + \mu g$ 在点 X_0 处可微，并且 $\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(X_0) = \lambda \,\mathrm{d}f(X_0) + \mu \,\mathrm{d}g(X_0)$；
- fg 在点 X_0 处可微，并且 $\mathrm{d}(fg)(X_0) = f(X_0)\,\mathrm{d}g(X_0) + g(X_0)\,\mathrm{d}f(X_0)$，
- 若 $g(X_0) \neq 0$，则 $\dfrac{f}{g}$ 在点 X_0 处可微，并且 $\mathrm{d}\left(\dfrac{f}{g}\right)(X_0) = \dfrac{g(X_0)\,\mathrm{d}f(X_0) - f(X_0)\,\mathrm{d}g(X_0)}{(g(X_0))^2}$。

10.1.2 多元函数的可导性

重要定义 10.4. 偏导数

设 $X_0 = \left(x_1^{(0)},\ \cdots,\ x_n^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^n$，而函数 f 定义在点 X_0 的某邻域上。固定 $1 \le j \le n$。若

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) &:= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_1^{(0)},\ \cdots,\ x_{j-1}^{(0)},\ \boldsymbol{x_j^{(0)}+h},\ x_{j+1}^{(0)},\ \cdots,\ x_n^{(0)}\right)-f(X_0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(X_0+h\hat{e}_j)-f(X_0)}{h}\end{aligned} \tag{10.2}$$

存在，则称函数 f 在点 X_0 处关于第 j 个变量有**偏导数** $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)}$，通常也会将之记作 $\partial_j f(X_0)$ 或 $f'_{x_j}(X_0)$。若对于 $1 \le j \le n$，偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)$ 均存在，则称函数 f 在点 X_0 处**可导**。

偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)$ 实际上表示平面曲线 $y = f\left(x_1^{(0)},\ \cdots,\ x_{j-1}^{(0)},\ \boldsymbol{x},\ x_{j+1}^{(0)},\ \cdots,\ x_n^{(0)}\right)$ 在点 $x = x_j^{(0)}$ 处的切线方向。

例题 10.1.3. $n \ge 2$ 时 n 元函数可导不连续的实例 $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2$，定义 $f(x,\ y) = \begin{cases} 0, & \text{if } xy = 0, \\ 1, & \text{else} \end{cases}$，则 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,\ 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,\ 0) = 0$，但 f 在原点不连续。

重要定理 10.1.4. 可微性蕴含可导性

若 f 在点 X_0 处可微，则它可导，且

$$\mathrm{d}f(X_0) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)\,\mathrm{d}x_j \tag{10.3}$$

证明. 由题设可知存在 $a_1,\ \cdots,\ a_n \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall Y = (y_1,\ \cdots,\ y_n) \in \mathbb{R}^n$，我们均有 $\mathrm{d}f(X_0)(Y) = \sum_{j=1}^{n} a_j y_j = \sum_{j=1}^{n} a_j\,\mathrm{d}x_j(Y)$，也即我们有 $\mathrm{d}f(X_0) = \sum_{j=1}^{n} a_j\,\mathrm{d}x_j$。
对任意的 $1 \le j \le n$，由微分定义，当 $h \to 0$ 时，

$$f(X_0+h\hat{e}_j)-f(X_0) = \mathrm{d}f(X_0)(h\hat{e}_j) + o(\|h\hat{e}_j\|) = a_j h + o(|h|)$$

由此我们立刻可得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(X_0+h\hat{e}_j)-f(X_0)}{h} = a_j$$

也即 f 在点 X_0 处关于第 j 个变量可导，并且 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) = a_j$，故所证结论成立。 □

例题 10.1.5. $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2$，定义 $f(x,\ y) = \sqrt{|xy|}$。讨论函数 f 在原点处的连续性，可导性与可微性。

解. 因 $0\le f(x,\ y)\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$，则由夹逼原理可知 $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)}f(x,\ y)=0=f(0,\ 0)$，于是函数 f 在原点处连续。由偏导数的定义知

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\ 0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,\ 0)-f(0,\ 0)}{x}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,\ 0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,\ y)-f(0,\ 0)}{y}=0$$

下证 f 在原点不可微。用反证法，设 f 在原点可微，则当 $(x,\ y)\to(0,\ 0)$ 时，我们有

$$f(x,\ y)-f(0,\ 0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,\ 0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,\ 0)y+o(\sqrt{x^2+y^2})=o(\sqrt{x^2+y^2})$$

即 $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$。进而由复合函数极限法则可知 $0=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{|x^2|}}{\sqrt{x^2+x^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。矛盾！由此得证。Ⓢ

10.1.3 多元函数的连续可导性

重要定义 10.5. 可导与连续可导

设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 为非空开集，而 $f:\Omega\to\mathbb{R}$。

- 若 f 在 Ω 的每点可导，则称 f 在 Ω 上**可导**，由此可以在 Ω 上定义 n 个函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\ \cdots,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$，将它们称为 f 在 Ω 上的**偏导函数**。
- 若 $\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\ \cdots,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ 在点 $X_0\in\Omega$ 处连续，则称 f 在点 X_0 处**连续可导**。
- 若 f 在 Ω 每点均连续可导，则称 f 在 Ω 上**连续可导**。这样函数的集合记作 $\mathscr{C}^{(1)}(\Omega)$。

重要定理 10.1.6. 连续可导性蕴含可微性

若 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 为开集，而函数 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 在点 $X_0\in\Omega$ 处连续可导，则 f 在该点可微。

证明. 仅考虑 $n=2$ 的情形。由于 f 在点 X_0 处连续可导，于是 $\exists r>0$ 使得函数 f 在 $B(X_0,\ \sqrt{2}r)$ 上可导且其偏导函数在点 X_0 处连续。记 $X_0=(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)})$。$\forall h_1,\ h_2\in(-r,\ r)$，令

$$\begin{aligned}F(h_1,\ h_2)&=f(x_1^{(0)}+h_1,\ x_2^{(0)}+h_2)-f(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)})\\&=\left(f(x_1^{(0)}+h_1,\ x_2^{(0)}+h_2)-\boldsymbol{f(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}+h_2)}\right)+\left(\boldsymbol{f(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}+h_2)}-f(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)})\right)\end{aligned}$$

由 Lagrange 中值定理知，$\exists\theta_1,\ \theta_2\in(0,\ 1)$ 使得

$$F(h_1,\ h_2)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}+\boldsymbol{\theta_1h_1},\ x_2^{(0)}+h_2)h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}+\boldsymbol{\theta_2h_2})h_2$$

而由夹逼原理可知

$$\lim_{(h_1,\ h_2)\to(0,\ 0)}\theta_1h_1=\lim_{(h_1,\ h_2)\to(0,\ 0)}\theta_2h_2=0$$

又 f 在点 X_0 连续可导，由复合函数极限法则，

$$\lim_{(h_1,\ h_2)\to(0,\ 0)}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}+\boldsymbol{\theta_1h_1},\ x_2^{(0)}+h_2)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}),$$

$$\lim_{(h_1,\ h_2)\to(0,\ 0)}\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}+\boldsymbol{\theta_2h_2})=\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)})$$

于是当 $(h_1, h_2) \to (0, 0)$ 时，我们有

$$\begin{aligned}F(h_1, h_2) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) + o(1)\right) h_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) + o(1)\right) h_2 \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})h_2 + \boldsymbol{o(1)h_1 + o(1)h_2} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})h_2 + \boldsymbol{o(1)\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})h_2 + \boldsymbol{o(\|(h_1, h_2)\|)}\end{aligned}$$

这表明函数 f 在点 X_0 处可微。 □

定理 10.1.7. 若函数 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 关于它的第一个变量连续，而关于第二个变量的偏导函数在 $\mathbb{R}^2$ 上有界，求证：函数 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续。

证明. 由题设可知，$\exists M > 0$ 使得 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$，$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq M$。取 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$。$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$，由 Lagrange 中值定理，存在 ξ 介于 y_0，y 使得

$$\begin{aligned}|f(x, y) - f(x_0, y_0)| &\leq |\boldsymbol{f(x, y_0)} - f(x_0, y_0)| + |f(x, y) - \boldsymbol{f(x, y_0)}| \\ &= |\boldsymbol{f(x, y_0)} - f(x_0, y_0)| + \left|\frac{\partial}{\partial y} f(x, \xi)\right| |y - y_0| \\ &\leq |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| + M|y - y_0|\end{aligned}$$

□

10.1.4 向量值函数的微分

定义 10.6. 设 $X_0 = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$，$r > 0$，而 $\vec{f}: B(X_0, r) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，$g: B(X_0, r) \to \mathbb{R}$ 为映射。若 $\lim\limits_{X \to X_0} \frac{\|\vec{f}(X)\|}{|g(X)|} = 0$，则记 $\vec{f}(X) = \vec{o}(|g(X)|) = |g(X)|\vec{o}(1)$（$X \to X_0$），称 $\vec{f}$ 是 g 的**高阶无穷小量**。

如果记 $\vec{f} = (f_1, \cdots, f_m)^{\mathrm{T}}$，则上式成立当且仅当对任意的整数 $1 \leq i \leq m$，我们均有 $f_i(X) = o(|g(X)|)$（$X \to X_0$）。

重要定义 10.7. 向量值函数的全微分

假设 $X_0 = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$，$r > 0$，$\vec{f}: B(X_0, r) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 为向量值函数。如果存在线性映射 $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 使得 $X \to X_0$ 时，

$$\vec{f}(X) - \vec{f}(X_0) = A(X - X_0) + \vec{o}(\|X - X_0\|) \tag{10.4}$$

则称 $\vec{f}$ 在点 X_0 **可微**，并将映射 A 记作 $\mathrm{d}\vec{f}(X_0)$，称为 $\vec{f}$ 在点 X_0 的**全微分**或**微分**。线性映射 A 所对应的矩阵记作 $J\vec{f}(X_0)$，也记作 $J_{\vec{f}}(X_0)$，称为 $\vec{f}$ 在点 X_0 处的 **Jacobi 矩阵**。

若记 $\vec{f} = (f_1, \cdots, f_m)^{\mathrm{T}}$，则 $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ 为 $\vec{f}$ 在点 X_0 处的微分当且仅当 $X \to X_0$ 时，**对任意的整数 $1 \leq i \leq m$**，我们均有

$$f_i(X) - f_i(X_0) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^{(0)}) + o(\|X - X_0\|)$$

也即 f_i 在点 X_0 处可微，并且有 $a_{ij}=\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0)$。故 $\mathrm{d}\vec{f}(X_0)$ 所对应的矩阵的第 i 个行向量正好对应于 $\mathrm{d}f_i(X_0)$ 所对应的矩阵。由此可知 $\vec{f}$ 在点 X_0 可微当且仅当 f_1, $\cdots$, f_m 在该点可微且

$$\mathrm{d}\vec{f}(X_0)=\begin{pmatrix}\mathrm{d}f_1(X_0)\\ \vdots\\ \mathrm{d}f_m(X_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(X_0)\,\mathrm{d}x_j\\ \vdots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial f_m}{\partial x_j}(X_0)\,\mathrm{d}x_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0)\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(X_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(X_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \vdots\\ \mathrm{d}x_n\end{pmatrix}\tag{10.5}$$

也即

$$J_{\vec{f}}(X_0)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0)\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}\tag{10.6}$$

若将最右边那个列向量记作 $\mathrm{d}X$，则 $\mathrm{d}\vec{f}(X_0)=J_{\vec{f}}(X_0)\,\mathrm{d}X$。

通常也将 $J_{\vec{f}}(X_0)$ 记作 $\dfrac{\partial(f_1,\ \cdots,\ f_m)}{\partial(x_1,\ \cdots,\ x_n)}(X_0)$ 或 $\left.\dfrac{\partial(f_1,\ \cdots,\ f_m)}{\partial(x_1,\ \cdots,\ x_n)}\right|_{X_0}$。当 $m=n$ 时，相应行列式被称为 **Jacobi 行列式**，记作 $\dfrac{D(f_1,\ \cdots,\ f_m)}{D(x_1,\ \cdots,\ x_n)}(X_0)$ 或 $\left.\dfrac{D(f_1,\ \cdots,\ f_m)}{D(x_1,\ \cdots,\ x_n)}\right|_{X_0}$。

10.2 特殊导数的计算

10.2.1 方向导数

重要定义 10.8. 方向导数

设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 为开集，$X_0\in\Omega$，$f:\Omega\to\mathbb{R}$ 为函数，$\vec{\beta}\neq 0$ 为向量，$\vec{\beta}^0=(\cos\alpha_1,\ \cdots,\ \cos\alpha_n)^{\mathrm{T}}$ 为其单位向量，即 $\vec{\beta}^0=\dfrac{\vec{\beta}}{\|\vec{\beta}\|}=(\cos\alpha_1,\ \cdots,\ \cos\alpha_n)^{\mathrm{T}}$，其中 α_j 为 $\vec{\beta}$ 与 x_j 轴的夹角。若极限

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(X_0+h\vec{\beta}^0)-f(X_0)}{h}\tag{10.7}$$

存在，则称之为 f 在点 X_0 处沿 $\vec{\beta}$ 方向的**方向导数**，记作 $\dfrac{\partial f}{\partial\vec{\beta}}(X_0)$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial\vec{\beta}}\right|_{X_0}$ 或 $f'_{\vec{\beta}}(X_0)$。

方向导数只与方向有关，则显然有 $\dfrac{\partial f}{\partial\vec{\beta}}(X_0)=\dfrac{\partial f}{\partial\vec{\beta}^0}(X_0)$。

定义 10.9. 给定向量 $\vec{A}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$，$\vec{B}=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$，定义 $\vec{A}\cdot\vec{B}:=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$，称为两个向量的**内积**或者**数量积**。

定义 10.10. 对给定的映射 $f:\Omega\to\mathbb{R}$，$\Omega\subset\mathbb{R}^n$，记

$$\vec{\nabla}f(X_0):=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0),\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0),\ \cdots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)\right)$$

重要定理 10.2.1. 方向导数的存在性

若 f 在点 X_0 可微，则 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{\beta}}(X_0)$ 存在且

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\beta}}(X_0)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)\cos\alpha_j=\vec{\nabla} f(X_0)\cdot\vec{\beta}^0=\vec{\nabla} f(X_0)\cdot\frac{\vec{\beta}}{\|\vec{\beta}\|} \tag{10.8}$$

证明. 当 $h\to 0^+$ 时，$f(X_0+\vec{\beta}^0h)-f(X_0)=\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)h\cos\alpha_j+o(\|\vec{\beta}^0h\|)=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)\cos\alpha_j\right)h+o(|h|)$。 □

重要定义 10.11. 数量场的梯度

设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 为非空集。定义在 Ω 上的实值函数也称为 Ω 上的**数量场**。若 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 为开集，$X_0\in\Omega$，数量场 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 在点 X_0 沿任意方向有方向导数，其中沿 $\vec{e}$ 的方向导数的值最大且该值等于 $\|\vec{e}\|$，则称向量 $\vec{e}$ 为 f 在点 X_0 的**梯度**，此时将 $\vec{e}$ 记作 $\operatorname{grad} f(X_0)$ 或 $\vec{\nabla} f(X_0)$，也记作 $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f(X_0)$，$\mathbf{grad}\, f(X_0)$ 或 $\nabla f(X_0)$。

定理 10.2.2. *若 f 在点 X_0 处可微，则* $\operatorname{grad} f(X_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)\end{pmatrix}$。

证明. 设右边为 $\vec{e}$，$\vec{\beta}^0=(\cos\alpha_1,\ \cdots,\ \cos\alpha_n)^{\mathrm{T}}$，则

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\beta}^0}(X_0)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)\cos\alpha_j=\vec{e}\cdot\vec{\beta}^0=\|\vec{e}\|\cos\langle\vec{e},\ \vec{\beta}^0\rangle\le\|\vec{e}\|$$

其中 $\langle\vec{e},\ \vec{\beta}^0\rangle$ 表示 $\vec{e}$ 与 $\vec{\beta}^0$ 的夹角。由此得证。 □

重要定理 10.2.3. 方向导数与梯度的关系

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\beta}^0}(X_0)=\operatorname{grad} f(X_0)\cdot\vec{\beta}^0 \tag{10.9}$$

10.2.2 高阶偏导数

重要定义 10.12. 高阶偏导数

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为非空开集。若 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 在 Ω 上可导，则我们可以在 Ω 上定义 n 个偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$（$1\le i\le n$）。如果 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 关于第 j 个变量有偏导数 $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$，则称其为 f 对 x_i 再对 x_j 的**二阶偏导数**，记作 $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}}$ 或 $\boldsymbol{\partial_{ji}f}$。特别地，当 $i=j$ 时，我们将之记作 $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}}$。

如此递归下去，我们可定义三阶偏导数以及任意阶的偏导数。

重要定理 10.2.4. 交换求导次序的条件

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为非空开集。若 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 在 Ω 上有二阶偏导函数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$（$i\ne j$），并且它们当中的一个在点 $X_0\in\Omega$ 处连续，则

$$\frac{\partial^2 f}{\boldsymbol{\partial x_j\partial x_i}}(X_0)=\frac{\partial^2 f}{\boldsymbol{\partial x_i\partial x_j}}(X_0) \tag{10.10}$$

证明. 出于简便，仅考虑 $n=2$ 的情形。首先

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,\ x_2)=\lim_{h_2\to 0}\frac{f(x_1,\ x_2+h_2)-f(x_1,\ x_2)}{h_2}$$

记 $X_0=(a_1,\ a_2)$，于是我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(a_1,\ a_2)&=\lim_{h_1\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1,\ a_2)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,\ a_2)}{h_1}\\&=\lim_{h_1\to 0}\frac{1}{h_1}\left(\lim_{h_2\to 0}\frac{f(a_1+h_1,\ a_2+h_2)-f(a_1+h_1,\ a_2)}{h_2}\right.\\&\qquad\left.-\lim_{h_2\to 0}\frac{f(a_1,\ a_2+h_2)-f(a_1,\ a_2)}{h_2}\right)\\&=\lim_{h_1\to 0}\lim_{h_2\to 0}\frac{1}{h_1h_2}\Big((f(a_1+h_1,\ a_2+h_2)-f(a_1+h_1,\ a_2))\\&\qquad-(f(a_1,\ a_2+h_2)-f(a_1,\ a_2))\Big)\end{aligned}$$

故等价于证明上述累次极限可交换次序。不失一般性，假设 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}$ 在点 $X_0=(a_1,\ a_2)$ 处连续，并定义

$$F(h_1,\ h_2)=(f(a_1+h_1,\ a_2+h_2)-f(a_1+h_1,\ a_2))-(f(a_1,\ a_2+h_2)-f(a_1,\ a_2))$$

则由偏导数的定义可知

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(a_1,\ a_2)=\lim_{h_1\to 0}\lim_{h_2\to 0}\frac{1}{h_1h_2}F(h_1,\ h_2),\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(a_1,\ a_2)=\lim_{h_2\to 0}\lim_{h_1\to 0}\frac{1}{h_1h_2}F(h_1,\ h_2)$$

令 $\varphi(x_1)=f(x_1,\ a_2+h_2)-f(x_1,\ a_2)$。则我们有

$$F(h_1,\ h_2)=\varphi(a_1+h_1)-\varphi(a_1)$$

因 $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ 存在，则 φ 可导，从而由 Lagrange 中值定理可知，$\exists\theta_1\in(0,\ 1)$ 使得

$$F(h_1,\ h_2)=\varphi'(a_1+\theta_1h_1)h_1=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1h_1,\ a_2+h_2)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1h_1,\ a_2)\right)h_1$$

由于 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ 存在，于是在上式中对第二个变量应用 Lagrange 中值定理可知，$\exists \theta_2 \in (0,\ 1)$ 使得

$$\begin{aligned} F(h_1,\ h_2) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1 h_1,\ a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1 h_1,\ a_2)\right) h_1 \\ &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(a_1+\theta_1 h_1,\ a_2+\theta_2 h_2) h_1 h_2 \end{aligned}$$

由夹逼原理，连续性以及复合极限法则可知

$$\lim_{(h_1,\ h_2)\to(0,\ 0)} \frac{F(h_1,\ h_2)}{h_1 h_2} = \lim_{(h_1,\ h_2)\to(0,\ 0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1+\theta_1 h_1,\ a_2+\theta_2 h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1,\ a_2)$$

也即二重极限存在。故所证结论成立。 □

定义 10.13. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集，$k \geq 0$ 为整数，约定记号 $\mathscr{C}^{(k)}(\Omega) = \{f \mid f$ 在 Ω 上的 k 阶偏导数连续$\}$。特别地，$\mathscr{C}^{(0)}(\Omega) = \mathscr{C}(\Omega)$。若 $f \in \mathscr{C}^{(k)}(\Omega)$，则称 f 在 Ω 上 **k 阶连续可导**，也称 **k 阶连续可微**。

定理 10.2.5. 设 $k \geq 2$ 为整数。若 $f \in \mathcal{C}^{(k)}(\Omega)$，则对任意整数 $1 \leq r \leq k$，均有 $f \in \mathcal{C}^{(r)}(\Omega)$ 且 f 的任意一个 r 阶偏导数均与求偏导的次序无关。

10.2.3 复合函数的偏导数

重要定理 10.2.6. 复合函数求偏导的链式法则

如果 $u = u(x,\ y)$，$v = v(x,\ y)$ 在点 $(x,\ y) \in D$ 上具有一阶偏导数，而函数 $z = f(u,\ v)$ 在点 $(u,\ v) = (u(x,\ y),\ v(x,\ y))$ 可微分，则复合函数 $z = F(x,\ y) = f(u(x,\ y),\ v(x,\ y))$ 在点 $(x,\ y)$ 存在偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \tag{10.11}$$

证明. 给 x 以增量 Δx，则变量 u，v 有对应的增量

$$\Delta_x u = u(x+\Delta x,\ y) - u(x,\ y), \qquad \Delta_x v = v(x+\Delta x,\ y) - v(x,\ y)$$

由于 $z = f(u,\ v)$ 在点 $(u,\ v)$ 处是可微的，故

$$\Delta_x z := \frac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v + o(\sqrt{\Delta_x u^2 + \Delta_x v^2})$$

于是

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \frac{o(\sqrt{\Delta_x u^2 + \Delta_x v^2})}{\Delta x}$$

显然，当 $\Delta x \to 0$ 时

$$\Delta_x u = u(x+\Delta x,\ y) - u(x,\ y) \to 0, \qquad \Delta_x v = v(x+\Delta x,\ y) - v(x,\ y) \to 0$$

又因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 存在，那么当 $\Delta x \to 0$ 时，有

$$\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x,\ y) - u(x,\ y)}{\Delta x} \to \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{v(x+\Delta x,\ y) - v(x,\ y)}{\Delta x} \to \frac{\partial v}{\partial x}$$

记 $\sqrt{\Delta_x u^2 + \Delta_x v^2} := \rho$，则有 $\rho = \sqrt{\Delta_x u^2 + \Delta_x v^2} \to 0$，而 $\dfrac{o(\rho)}{\rho} = \dfrac{o\left(\sqrt{\Delta_x u^2 + \Delta_x v^2}\right)}{\sqrt{\Delta_x u^2 + \Delta_x v^2}} \to 0$。于是，当

$\Delta x \to 0$ 时，如果 $\rho = 0$，则 $\dfrac{o(\rho)}{\Delta x} = 0$；如果 $\rho \neq 0$，则

$$\frac{o(\rho)}{\Delta x} = \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\rho}{\Delta x} = \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta_x u}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_x v}{\Delta x}\right)^2} \cdot \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \to 0$$

代回到上面式子中，令 $\Delta x \to 0$，即得 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x}$。对 y 同理可证。 □

注 10.2. 单中间变量的复合函数的偏导数

对 $z = f(x, v(x, y))$，由上即有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

这里的 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 并不是固定的写法，但这两处偏导数的含义不同。

10.2.4 隐函数的导数

重要定理 10.2.7. $\mathbb{R}^2$ 中的隐函数定理

给定一点 $X_0 = (x_0,\ y_0) \in \mathbb{R}^2$，$r > 0$，数量值函数 $F : B(X_0,\ r) \to \mathbb{R}$ 满足 $f \in \mathscr{C}^{(1)}(B(X_0,\ r))$，$F(x_0,\ y_0) = 0$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,\ y_0) \neq 0$，则

（1）$\exists \delta,\ \eta > 0$ 满足 $B(x_0,\ \delta) \times B(y_0,\ \eta) \subset B(X_0,\ r)$（$\times$ 表示笛卡尔积），使得 $\forall x \in B(x_0,\ \delta)$，$\exists! y \in B(y_0,\ \eta)$ 使得 $F(x,\ y) = 0$，即可以定义一个新映射 $f : B(x_0,\ \delta) \to B(y_0,\ \eta)$ 使 $f(x) = y$；

（2）f 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类函数，且 $\forall x \in B(x_0,\ \delta)$，均有

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,\ f(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,\ f(x))} \tag{10.12}$$

证明. 不失一般性，我们可假设 $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,\ y_0) > 0$。否则考虑函数 $-F$。

（1）**存在性**。由题设可知 $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ 连续，则 $\exists \eta > 0$ 使得 $\forall (x,\ y) \in B(X_0,\ \sqrt{2}\eta) \subsetneqq B(X_0,\ r)$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,\ y) > 0$。$\forall (x,\ y) \in B(X_0,\ \sqrt{2}\eta)$，我们令 $g_x(y) = F(x,\ y)$。则对于每个固定的 $x \in [x_0 - \eta,\ x_0 + \eta]$，函数 g_x 在 $[y_0 - \eta,\ y_0 + \eta]$ 上可导且 $g'_{x_0}(y) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,\ y) > 0$，从而 g_{x_0} 为严格递增函数。又 $g_{x_0}(y_0) = 0$，故

$$F(x_0,\ y_0 - \eta) = g_{x_0}(y_0 - \eta) < g_{x_0}(y_0) = 0 < g_{x_0}(y_0 + \eta) = F(x_0,\ y_0 + \eta)$$

注意到 F 连续，于是由连续函数的保号性知，$\exists \delta \in (0,\ \eta)$ 使得 $\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$，均有

$$g_x(y_0 - \eta) = F(x,\ y_0 - \eta) < 0, \qquad g_x(y_0 + \eta) = F(x,\ y_0 + \eta) > 0$$

又 $\forall y \in [y_0 - \eta,\ y_0 + \eta]$，均有 $g'_x(y) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,\ y) > 0$，因此 g_x 在 $[y_0 - \eta,\ y_0 + \eta]$ 上严格递增且连续，由连续函数介值定理，$\exists! y \in (y_0 - \eta,\ y_0 + \eta)$ 使得 $F(x,\ y) = g_x(y) = 0$。令 $f(x) = y$。则 f 为所求。

（2）**连续性**。由前面讨论知，$\forall \varepsilon \in (0,\ \eta)$，$\exists \delta' \in (0,\ \varepsilon)$ 使 $\forall x \in B(x_0,\ \delta')$，$\exists! y \in B(y_0,\ \varepsilon)$ 使 $F(x,\ y) = 0$，

此时 $y=f(x)$，也即当 $|x-x_0|<\delta'$ 时，我们有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。故函数 f 在点 x_0 处连续。

取 $x_1\in B(x_0,\ \delta)$，$y_1=f(x_1)$，则 $F(x_1,\ y_1)=0$ 且 $(x_1,\ y_1)\in B((x_0,\ y_0),\ \eta)$，因此 $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_1,\ y_1)>0$。由前面的讨论可知，存在 $\delta_1\in(0,\ \delta)$，$\eta_1\in(0,\ \eta)$ 以及在 x_1 连续的函数 $g:B(x_1,\ \delta_1)\to B(y_1,\ \eta_1)$ 使 $F(x,\ g(x))=0$。另外可设 $B(x_1,\ \delta_1)\subset B(x_0,\ \delta)$，由唯一性知 $\forall x\in B(x_1,\ \delta_1)$，均有 $f(x)=g(x)$，故 f 在点 x_1 处连续。

（3）**可导性**。$\forall x\in B(x_0,\ \delta)$，$\exists h\in\mathbb{R}$，使 $x+h\in B(x_0,\ \delta)$。令 $y=f(x)$，$\Delta y=f(x+h)-f(x)$。由 Lagrange 中值定理可知，$\exists\theta_1,\ \theta_2\in(0,\ 1)$ 使得

$$\begin{aligned}0&=F(x+h,\ y+\Delta y)-F(x,\ y)\\&=(F(x+h,\ y+\Delta y)-\boldsymbol{F(x,\ y+\Delta y)})+(\boldsymbol{F(x,\ y+\Delta y)}-F(x,\ y))\\&=\frac{\partial F}{\partial x}(x+\theta_1h,\ y+\Delta y)\boldsymbol{h}+\frac{\partial F}{\partial y}(x,\ y+\theta_2\Delta y)\boldsymbol{\Delta y}\end{aligned}$$

由于 $\dfrac{\partial F}{\partial x}$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}$ 均连续，于是由夹逼原理以及复合函数极限法则可知

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\boldsymbol{\lim_{h\to0}\frac{\Delta y}{h}}=-\lim_{h\to0}\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x+\theta_1h,\ y+\Delta y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\ y+\theta_2\Delta y)}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,\ y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\ y)}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,\ f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\ f(x))}$$

上式同时表明 f' 为连续函数，故 f 连续可导。 □

定理 10.2.8. $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的隐函数定理 给定 $X_0\in\mathbb{R}^n$，$y_0\in\mathbb{R}$，$r>0$，数量值函数 $F:B((X_0,\ y_0),\ r)\to\mathbb{R}$。若 F 满足 $F\in\mathscr{C}^{(1)}\Big(((X_0,\ y_0),\ r)\Big)$ 使 $F(X_0,\ y_0)=0$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}(X_0,\ y_0)\neq0$，则

（*1*）$\exists\delta,\ \eta>0$ 满足 $B(X_0,\ \delta)\times B(y_0,\ \eta)\subset B((X_0,\ y_0),\ r)$，使得 $\forall X\in B(X_0,\ \delta)$，$\exists!y\in B(y_0,\ \eta)$ 使 $F(X,\ y)=0$，即可以定义一个新映射 $f:B(X_0,\ \delta)\to B(y_0,\ \eta)$，使得 $f(X)=y$；

（*2*）$f\in\mathscr{C}^{(1)}(B(X_0,\ \delta))$，且 $\forall X\in B(X_0,\ \delta)$ 与任意整数 $1\le i\le n$，$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X)=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(X,\ f(X))}{\frac{\partial F}{\partial y}(X,\ f(X))}$。

注 10.3. 隐函数求导

上述最后一个等式 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X)=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(X,\ f(X))}{\frac{\partial F}{\partial y}(X,\ f(X))}$ 可由对恒等式 $F(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ f(x_1,\ \cdots,\ x_n))=0$ 求偏导数而得。事实上，对 x_i 求偏导数可得

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(X,\ f(X))+\frac{\partial F}{\partial y}(X,\ f(X))\frac{\partial f}{\partial x_i}(X)=0$$

由此我们可立刻导出

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(X,\ f(X))}{\frac{\partial F}{\partial y}(X,\ f(X))}$$

例题 10.2.9. 设 F 为 $\mathscr{C}^{(2)}$ 类，则由方程 $F(x,\ y,\ z)=0$ 确定的隐函数 $z=f(x,\ y)$ 为 $\mathscr{C}^{(2)}$ 类，求 $\dfrac{\partial^2z}{\partial y\partial x}$。

证明. 令 $u=\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,\ y,\ z(x,\ y))\neq 0$。由题设可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,\ y,\ z(x,\ y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,\ y,\ z(x,\ y))}\right)\\
&=-\frac{1}{u^2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,\ y,\ z(x,\ y))\right)\frac{\partial F}{\partial z}(x,\ y,\ z(x,\ y))\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\partial F}{\partial x}(x,\ y,\ z(x,\ y))\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z}(x,\ y,\ z(x,\ y))\right)\right]\\
&=-\frac{1}{u^2}\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right]\\
&=-\frac{1}{u^2}\left[\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{u}\right)\right]\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{u}\right)\right]\right]\\
&=-\frac{1}{u^3}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right]\\
&=-\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^3}
\end{aligned}
$$

□

10.2.5 反函数的导数

我们考虑，向量值函数 $\vec{g}:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是否能有反函数 $\vec{g}^{-1}$，这等价于问方程 $X=\vec{g}(Y)$ 是否有解 $Y=\vec{g}^{-1}(X)$，也即问方程

$$F(X,\ Y):=\vec{g}(Y)-X=\vec{0}$$

是否有隐函数解 $Y=\vec{g}^{-1}(X)$?

重要定理 10.2.10. 反函数定理

设 $k\geq 1$ 为整数，$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为非空开集，$Y_0\in\Omega$，$\vec{g}:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 为 $\mathscr{C}^{(k)}$ 类使得 $J_{\vec{g}}(Y_0)$ 可逆。令 $X_0=\vec{g}(Y_0)$，则 $\exists\delta,\ \eta>0$ 满足 $B(Y_0,\ \eta)\subset\Omega$，使得

$$\begin{gathered}\text{存在 }\vec{f}:B(X_0,\ \delta)\to B(Y_0,\ \eta)\text{ 为 }\mathscr{C}^{(k)}\text{ 类，使得 }\forall X\in B(X_0,\ \delta),\ \forall Y\in B(Y_0,\ \eta),\\ \text{等式 }X=\vec{g}(Y)\text{ 成立当且仅当 }Y=\vec{f}(X)\end{gathered}$$

即 $\vec{g}$ 在点 Y_0 处具有局部的反函数（局部可逆）。此时，$\forall X\in B(X_0,\ \delta)$，$J_{\vec{f}}(X)=\left(J_{\vec{g}}(\vec{f}(X))\right)^{-1}=(J_{\vec{g}}(Y))^{-1}$。

例题 10.2.11. 极坐标变换 令 $D=(0,\ +\infty)\times(-\pi,\ \pi)$。$\forall(\rho,\ \varphi)\in D$，定义

$$\vec{f}(\rho,\ \varphi)=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\end{pmatrix}$$

则 $\vec{f}$ 为 $\mathscr{C}^{(\infty)}$ 类向量值函数且

$$J_{\vec{f}}(\rho,\ \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}$$

从而 Jacobi 行列式 $\det J_{\vec{f}}(\rho,\ \varphi) = \rho > 0$。于是 $\vec{f}$ 为局部可逆，其逆映射 $\vec{f}^{-1}$ 也为 $\mathscr{C}^{(\infty)}$ 类且

$$J_{\vec{f}^{-1}}(x,\ y) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

例题 10.2.12. 设隐函数 $u = u(x,\ y)$ 由方程组 $\begin{cases} u = f(x,\ y,\ z,\ t), \\ g(y,\ z,\ t) = 0, \\ h(z,\ t) = 0, \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$。

解. 由题设可知，利用方程组 $\begin{cases} g(y,\ z,\ t) = 0, \\ h(z,\ t) = 0 \end{cases}$，可将 z，t 确定为 y 的函数，由此可得 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\ y,\ z,\ t)$。

由隐函数定理可知

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \\ \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial z} & \dfrac{\partial g}{\partial t} \\ \dfrac{\partial h}{\partial z} & \dfrac{\partial h}{\partial t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} = -\left|\frac{\partial(g,\ h)}{\partial(z,\ t)}\right|^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial t} & -\dfrac{\partial g}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial h}{\partial z} & \dfrac{\partial g}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

于是 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = -\dfrac{\dfrac{\partial h}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial y}}{\left|\dfrac{\partial(g,\ h)}{\partial(z,\ t)}\right|}$，$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \dfrac{\dfrac{\partial h}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial y}}{\left|\dfrac{\partial(g,\ h)}{\partial(z,\ t)}\right|}$，进而可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\left|\dfrac{\partial(h,\ f)}{\partial(z,\ t)}\right|}{\left|\dfrac{\partial(g,\ h)}{\partial(z,\ t)}\right|}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}$$

Ⓢ

10.3 多元函数的 Taylor 展式

定义 10.14. 我们称函数 $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为**双线性型**，如果 $\forall X_0,\ Y_0 \in \mathbb{R}^n$，函数 $Y \mapsto F(X_0,\ Y)$ 和函数 $X \mapsto F(X,\ Y_0)$ 均为 $\mathbb{R}^n$ 上的线性函数。

对双线性函数 $F(X,\ Y)$，记 $X = (x_1,\ \cdots,\ x_n)^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^n x_i\mathbf{e}_i$，$Y = (y_1,\ \cdots,\ y_n)^{\mathrm{T}} = \sum_{j=1}^n y_j\mathbf{e}_j$，则

$$F(X,\ Y) = F\left(\sum_{i=1}^n x_i\mathbf{e}_i,\ Y\right) = \sum_{i=1}^n x_iF(\mathbf{e}_i,\ Y) = \sum_{i=1}^n x_iF\left(\mathbf{e}_i,\ \sum_{j=1}^n y_j\mathbf{e}_j\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_jF(\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j)$$

令 $a_{ij} = F(\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j)$，$A = (a_{ij})_{1\le i,\ j\le n}$，则

$$F(X,\ Y) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_jF(\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^n x_i\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j = \sum_{i=1}^n x_i(AY)_i = X^{\mathrm{T}}AY$$

即双线性函数可以用矩阵表示。

重要定理 10.3.1. 多元函数的带 Lagrange 余项的一阶 Taylor 展式

设 $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, 实值函数 $f \in \mathscr{C}^{(2)}(B(X_0,\ r))$, 则 $\forall X \in B(X_0,\ r)$, $\exists \theta \in (0,\ 1)$ 使得

$$\begin{aligned} f(X) &= f(X_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)(x_j - x_j^{(0)}) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_\theta)(x_i - x_i^{(0)})(x_j - x_j^{(0)}) \\ &= f(X_0) + \boldsymbol{J_f(X_0)}\Delta X + \frac{1}{2!}(\Delta X)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{H_f(X_\theta)}\Delta X \end{aligned}$$

其中 $\Delta X = X - X_0$, $X_\theta = X_0 + \theta(X - X_0)$, $J_f(X_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0),\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0),\ \cdots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)\right)$ 是 f 在点 X_0 的的 Jacobi 矩阵, $H_f(X_\theta) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_\theta)\right)_{1 \le i,\ j \le n}$ 为 f 在点 X_θ 的 **Hessian 矩阵**。

由这一定理, 当 $X \to X_0$ 时, $H_f(X_\theta) = H_f\left(X_0 + \theta(X - X_0)\right) = H_f(X_0) + \vec{\boldsymbol{o}}(1)$, 则得

重要定理 10.3.2. 多元函数的带 Peano 余项的二阶 Taylor 展式

设 $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, 实值函数 $f \in \mathscr{C}^{(2)}(B(X_0,\ r))$, 则 $\forall X \in B(X_0,\ r)$, 当 $X \to X_0$ 时,

$$f(X) = f(X_0) + J_f(X_0)\Delta X + \frac{1}{2!}(\Delta X)^{\mathrm{T}} H_f(X_0)\Delta X + o(\|\Delta X\|^2)$$

10.4 多元函数的极值与条件极值

10.4.1 极值与 Hessian 矩阵的正定性

重要定义 10.15. 极值

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $X_0 \in \Omega$, 而 $f : \Omega \to \mathbb{R}$。

- 如果 $\exists r > 0$ 使得 $\forall X \in B(X_0,\ r) \subseteq \Omega$, 均有 $f(X) \ge f(X_0)$, 那么称点 X_0 为 f 的（局部）**极小值点**, 而称 $f(X_0)$ 为（局部）**极小值**。
- 如果 $\exists r > 0$ 使得 $\forall X \in B(X_0,\ r) \subseteq \Omega$, 均有 $f(X) \le f(X_0)$, 那么称点 X_0 为 f 的（局部）**极大值点**, 而称 $f(X_0)$ 为（局部）**极大值**。

极小值点和极大值点合称**极值点**。

定义 10.16. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $X_0 \in \Omega$, 而 $f : \Omega \to \mathbb{R}$。

- 若 $\forall X \in \Omega$, 均有 $f(X) \ge f(X_0)$, 则称点 X_0 为 f 的**最小值点**, 而称 $f(X_0)$ 为**最小值**。
- 若 $\forall X \in \Omega$, 均有 $f(X) \le f(X_0)$, 则称点 X_0 为 f 的**最大值点**, 而称 $f(X_0)$ 为**最大值**。

最小值点和最大值点合称**最值点**。

极值点不一定是最值点, 而最值点也不一定是极值点; 但若最值点为内点, 则它为极值点。

重要定理 10.4.1. Fermat 定理的多元函数推广

假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, X_0 为 Ω 的内点, 而函数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 在该点可导。若 X_0 为 f 的极值点, 则 $J_f(X_0) = \vec{\boldsymbol{0}}$, 即 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) = 0 \ (1 \le j \le n)$。

证明. 由于 X_0 为 Ω 的内点，于是 $\exists r>0$ 使得 $B(X_0,\ r)\subset\Omega$。对任意整数 $1\leq j\leq n$，设 $\vec{e}_j$ 为沿第 j 个坐标轴正向的单位向量。$\forall t\in(-r,\ r)$，定义 $F(t)=f(X_0+t\vec{e}_j)$。则由题设可知函数 F 在点 $t=0$ 处可导，并且 F 还在该点处取极值，从而由 Fermat 定理可知 $0=F'(0)=\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)$。实际上，有

$$F'(0)=\lim_{t\to0}\frac{F(t)-F(0)}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{f(X_0+t\vec{e}_j)-f(X_0)}{t}=\frac{\partial f}{\partial\vec{e}_j}\bigg|_{X_0}=\mathrm{grad}f\big|_{X_0}\cdot\vec{e}_j=\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)$$ □

重要定理 10.4.2. Role 中值定理的多元函数推广

设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 为有界开区域，而 $f\in\mathscr{C}(\overline{\Omega})$ 在 Ω 内可微并且在 $\partial\Omega$ 上取常值，则 f 在 Ω 内必有驻点，也即 $\exists\xi\in\Omega$ 使得 $J_f(\xi)=\vec{0}$。

证明. 如果 f 在 $\overline{\Omega}$ 上为常值函数，则 f 在 Ω 内也会为常值函数，从而 $\forall\xi\in\Omega$，均有 $J_f(\xi)=\vec{\mathbf{0}}$。现在假设 f 不为常值函数。由于 $\overline{\Omega}$ 为有界闭集且 $f\in\mathcal{C}(\overline{\Omega})$，则 f 在 $\overline{\Omega}$ 上有最大值和最小值，但 f 在 $\partial\Omega$ 上取常值，故必有最值点 $\xi\in\Omega$，该点也为 f 的极值点，则 $J_f(\xi)=\vec{\mathbf{0}}$。 □

我们在线性代数中已知：

- 设 $A=(a_{ij})_{1\leq i,\ j\leq n}$ 为实对称矩阵，特征根为 $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n$，则存在正交矩阵 B 使得

$$A=B^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}B$$

  $\forall X\in\mathbb{R}^n$，记 $BX=(y_1,\ \cdots,\ y_n)^{\mathrm{T}}=Y$，则

$$X^{\mathrm{T}}AX=\sum_{j=1}^{n}\lambda_jy_j^2\geq\lambda_1\|Y\|^2=\lambda_1Y^{\mathrm{T}}Y=\lambda_1X^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}BX=\lambda_1X^{\mathrm{T}}X=\lambda_1\|X\|^2$$

  同理可以证明 $X^{\mathrm{T}}AX\leq\lambda_n\|X\|^2$。
- 对 n 阶实矩阵 A、任意非零向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，如果
  - 恒有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}>0$，称 A **正定**，这等价于说 $\lambda_1>0$；
  - 恒有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}\geq0$，称矩阵 A **半正定**，这等价于说 $\lambda_n<0$；
  - 恒有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}<0$，称矩阵 A **负定**，这等价于说 $\lambda_1=0$；
  - 恒有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}\leq0$，称矩阵 A **半负定**，这等价于说 $\lambda_n=0$；
  - $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$ 符号不定，称矩阵 A **不定**，这等价于说 $\lambda_1<0<\lambda_n$。

重要定理 10.4.3. 二阶连续可微函数极值点的判定定理

设 $X_0\in\mathbb{R}^n$，$r>0$，而 $f:B(X_0,\ r)\to\mathbb{R}$ 为二阶连续可微且 $J_f(X_0)=\vec{\mathbf{0}}$。
（1）若 $H_f(X_0)$ 正定，则 X_0 为 f 的极小值点；
（2）若 $H_f(X_0)$ 负定，则 X_0 为 f 的极大值点。

注 10.4. 可导函数极值点的判定方法

（1）求一阶偏导数，确定驻点。

（2）求二阶偏导数以便得到 Hessian 矩阵。

（3）判断 Hessian 矩阵在驻点处的性态：

- 正定则为极小值点，负定则为极大值点；
- 不定则不为极值点；
- 半正定或半负定则需要采用另外的方法来处理。

例题 10.4.4. 设隐函数 $z=z(x,\ y)$ 由方程 $F(x,\ y,\ z)=2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 确定，求其极值点。

解. 由隐函数定理可知，$z(x,\ y)$ 的驻点满足

$$0=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{4x+8z}{2z+8x-1},\qquad 0=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{4y}{2z+8x-1}$$

于是 $y=0,\ x=-2z$，代入隐函数方程可得两个驻点 $\begin{cases}x_1=\dfrac{16}{7},\\ y_1=0,\\ z_1=-\dfrac{8}{7},\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-2,\\ y_2=0,\\ z_2=1。\end{cases}$ 进而可求出 $H_{z(x,y)}(x,y)$。

Ⓢ

定理 10.4.5. 设 $X_0\in\mathbb{R}^n$，$r>0$，而 $f:B(X_0,\ r)\to\mathbb{R}$ 为二阶连续可微函数。

（1）若 X_0 为 f 的极小值点，则 $H_f(X_0)$ 为正定或半正定。

（2）若 X_0 为 f 的极大值点，则 $H_f(X_0)$ 为负定或半负定。

证明. 只需证（1）。由于 X_0 为函数 f 的极小值点，于是我们就有 $J_f(X_0)=\vec{0}$。固定向量 $X\in\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\}$。由带 Peano 余项的 Taylor 公式可知，当 $t\to 0$ 时，

$$f(X_0+tX)=f(X_0)+\boldsymbol{J_f(X_0)}tX+\frac{1}{2!}X^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H_f(X_0)}X\cdot t^2+o(\|tX\|^2)$$

注意到 $f(X_0+tX)\geq f(X_0)$，于是 $0\leq\dfrac{1}{2!}X^{\mathrm{T}}H_f(X_0)X\cdot t^2+t^2o(1)$，进而可得知 $0\leq X^{\mathrm{T}}H_f(X_0)X$。这表明 $H_f(X_0)$ 为正定或半正定。 □

例题 10.4.6. 设 $D=\left\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leq 1\right\}$，而且函数 $u:D\to\mathbb{R}$ 在 D 上为连续且在 D 的内部为二阶连续可导。若 $\forall(x,\ y)\in\operatorname{Int}D$，均有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\ y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,\ y)=u(x,\ y)$$

（1）若 $\forall(x,\ y)\in\partial D$，成立 $u(x,\ y)\geq 0$，求证：$\forall(x,\ y)\in D$，均有 $u(x,\ y)\geq 0$；（2）若 $\forall(x,\ y)\in\partial D$，成立 $u(x,\ y)>0$，求证：$\forall(x,\ y)\in D$，均有 $u(x,\ y)>0$。

证明.（1）用反证法，假设函数 u 在 D 上不为非负，由题设可得 u 在 $\mathrm{Int}\,D$ 上不为非负。又 u 连续。而且 D 为有界闭集，于是 u 在 D 上有最小值。将相应的最小值点记作 P_0。由于 u 在 ∂D 上为非负但在 $\mathrm{Int}\,D$ 上却不为非负，于是 $P_0 \in \mathrm{Int}\,D$ 并且 $u(P_0) < 0$，从而 P_0 为 u 的极小值点，由此立刻可得 Hessian 矩阵 $H_u(P_0)$ 为正定或半正定。于是我们就有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} H_u(P_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} H_u(P_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

但由题设又可得知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(P_0) = u(P_0) < 0$$

矛盾！故所证结论成立。

（2）由于 u 为连续函数而且 ∂D 为有界闭集，则 u 在 ∂D 上有最小值，设为 m，于是 $m > 0$。$\forall (x,\ y) \in D$，现定义 $v(x,\ y) = u(x,\ y) - \dfrac{m(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y)}{2\mathrm{e}}$，则 v 在 D 上连续，在 D 的内部二阶连续可导且使得 $\forall (x,\ y) \in \mathrm{Int}\,D$，我们均有

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,\ y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,\ y) = v(x,\ y)$$

另外，$\forall (x,\ y) \in \partial D$，我们还有

$$v(x,\ y) \geq m - \frac{m(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y)}{2\mathrm{e}} \geq 0$$

由（1）知 v 在 D 上非负，因此 $\forall (x,\ y) \in D$，我们均有

$$u(x,\ y) = v(x,\ y) + \frac{m(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y)}{2\mathrm{e}} \geq \frac{m(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y)}{2\mathrm{e}} > 0$$

因此所证结论成立。 □

10.4.2 条件极值与 Lagrange 乘数法

重要定义 10.17. 高维曲面

设 $n > k \geq 1$ 为整数，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集，$\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_{n-k} : \Omega \to \mathbb{R}$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类使得 $\forall X \in \Omega$，矩阵 $\dfrac{\partial(\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_{n-k})}{\partial(x_1,\ \ldots,\ x_n)}(X)$ 的秩为 $n-k$。令

$$S = \left\{ X \in \Omega \mid \varphi_i(X) = 0,\ \ 1 \leq i \leq n-k \right\}$$

若 $S \neq \varnothing$，则称 S 为 ***k* 维曲面**。

重要定义 10.18. 条件极值

假设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 为 k 维曲面，$X_0 \in S$，而 $f : S \to \mathbb{R}$ 为函数。

- 如果 $\exists r > 0$ 使得 $\forall X \in B(X_0,\ r) \cap S$，均有 $f(X) \geq f(X_0)$，则称 X_0 为 f 在 S 上的 **（条件）极小值点**，而称 $f(X_0)$ 为 **（条件）极小值**。
- 如果 $\exists r > 0$ 使得 $\forall X \in B(X_0,\ r) \cap S$，均有 $f(X) \leq f(X_0)$，则称 X_0 为 f 在 S 上的 **（条件）极大值点**，称 $f(X_0)$ 为 **（条件）极大值**。

定义 10.19. 条件最值 假设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 为 k 维曲面，$X_0 \in S$，而 $f : S \to \mathbb{R}$ 为函数。

- 如果 $\forall X \in S$，均有 $f(X) \geq f(X_0)$，则称 X_0 为 f 在 S 上的**最小值点**，称 $f(X_0)$ 为**最小值**。

- 如果 $\forall X \in S$，均有 $f(X) \leq f(X_0)$，则称 X_0 为 f 在 S 上的**最大值点**，称 $f(X_0)$ 为**最大值**。

重要定理 10.4.7. Lagrange 乘数法

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集，而 f，φ_1，$\cdots$，$\varphi_{n-k} : \Omega \to \mathbb{R}$ 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类函数，使得 $\forall X \in \Omega$，Hessian 矩阵 $\dfrac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-k})}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}$ 的秩为 $n-k$，确定的 k 维曲面为

$$S = \{X \in \Omega \mid \varphi_i(X) = 0,\ \ 1 \leq i \leq n-k\} \neq \varnothing$$

$\forall X \in \Omega$ 及 $\forall \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k}$，定义**拉氏函数**

$$L(X, \lambda) = f(X) + \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \varphi_j(X)$$

如果点 $X_0 \in S$ 为函数 f 在 S 上的条件极值点，则 $\exists \lambda \in \mathbb{R}^{n-k}$ 使得 (X_0, λ) 为 L 的驻点。

注 10.5. 对 Lagrange 乘数法的讨论

点 (X_0, λ) 为 L 的驻点当且仅当

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i}(X_0, \lambda) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) + \sum\limits_{j=1}^{n-k} \lambda_j \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(X_0) = 0, & (1 \leq i \leq n) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i}(X_0, \lambda) = \varphi_i(X_0) = 0, & (1 \leq i \leq n-k) \end{cases}$$

例题 10.4.8. 求空间椭圆 $S : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ lx + my + nz = 0 \end{cases}$ 的长、短半轴的长度，其中 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$。

解. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$，定义 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$。椭圆的长、短半轴的长度也就是 $\sqrt{f}$ 在 S 上的最大值和最小值，于是我们只需求 f 在 S 上的最大值和最小值。又 S 为有界闭集并且 f 连续，故 f 在 S 上有最值。$\forall (x, y, z, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^5$，令

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) + \mu(lx + my + nz)$$

由 Lagrange 乘数法知，最值点 (x, y, z) 满足：

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \frac{2\lambda x}{a^2} + \mu l, \qquad 0 = \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \frac{2\lambda y}{b^2} + \mu m, \qquad 0 = \frac{\partial L}{\partial z} = 2z + \frac{2\lambda z}{c^2} + \mu n,$$
$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1, \qquad 0 = \frac{\partial L}{\partial \mu} = lx + my + nz$$

由前三个关系式立刻可得

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + 2\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) + \mu(lx + my + nz) = 0$$

即得

$$\lambda = -(x^2 + y^2 + z^2)$$

同时我们也有

$$x = -\frac{a^2 l}{2(a^2 + \lambda)}\mu, \qquad y = -\frac{b^2 m}{2(b^2 + \lambda)}\mu, \qquad z = -\frac{c^2 n}{2(c^2 + \lambda)}\mu$$

由于原点不在 S 上，则 $\mu \neq 0$，从而我们有

$$0 = -\frac{1}{\mu}(lx+my+nz) = \frac{a^2l^2}{2(a^2+\lambda)} + \frac{b^2m^2}{2(b^2+\lambda)} + \frac{c^2n^2}{2(c^2+\lambda)}$$

出于简化记号，定义

$$\begin{aligned} A &= a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2, \\ B &= \frac{1}{2}\left(a^2l^2(b^2+c^2) + b^2m^2(c^2+a^2) + c^2n^2(a^2+b^2)\right), \\ C &= a^2b^2c^2 \end{aligned}$$

于是由前面的关系式可知 $A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0$。我们由此立刻可得

$$f(x,\ y,\ z) = -\lambda = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

拉氏函数的驻点所对应的 f 的值只有两个，而 f 在 S 上有最值，故椭圆的长、短半轴分别为

$$a^* = \left(\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{A}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad b^* = \left(\frac{B-\sqrt{B^2-AC}}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ⓢ

注 10.6. 求有界闭区域上的最值的一般方法

极值或最值问题常可被转化有界闭区域上的连续函数的最值问题，由于问题的解一定存在，关键在于如何确定最值点。一般步骤为：

（1）求函数在区域内部的驻点并计算相应值。

（2）将函数限制在边界上，求相应的拉氏函数的驻点，并计算原来那个函数的相应值。

（3）比较上述值的大小，由此确定最值点。

例题 10.4.9. 设 $P_1 = (0,\ 0)$，$P_2 = (1,\ 0)$，$P_3 = (0,\ 1)$，而 D 为三角形 $\Delta P_1P_2P_3$ 所围区域。$\forall P = (x,\ y) \in D$，令

$$f(P) = |PP_1|^2 + |PP_2|^2 + |PP_3|^2$$

求 f 在 D 上的最大值和最小值。

解. $\forall (x,\ y) \in D$，我们有

$$f(x,\ y) = x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + x^2 + (y-1)^2 = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$$

于是我们也可以将 f 看成是定义在整个 $\mathbb{R}^2$ 上的初等函数，故 f 为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类函数。由于 D 为有界闭集，故函数 f 在 D 上有最值。

（1）如果 f 在 D 上的最值点在 D 的内部，那么该点必为 f 的局部极值点，在该点处，我们有

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 2, \qquad 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 6y - 2$$

于是该点为 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$，并且 $f\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$。

（2）若 f 在 D 上的最值点位于 D 的边界，那么该点为 f 的条件极值点。除了顶点以外，∂D 由下述线段组成：$C_1: y = 0,\ 0 < x < 1$，$C_2: x = 0,\ 0 < y < 1$，$C_3: x + y = 1,\ 0 < x < 1$。于是我们需要来分别考虑

f 在 C_1, C_2, C_3 上的条件极值，相应的 Lagrange 函数为

$$
\begin{aligned}
L_1(x,\ y,\ \lambda_1) &= f(x,\ y) + \lambda_1 y,\\
L_2(x,\ y,\ \lambda_2) &= f(x,\ y) + \lambda_2 x,\\
L_3(x,\ y,\ \lambda_3) &= f(x,\ y) + \lambda_3(x+y-1)
\end{aligned}
$$

拉氏函数 L_1 的驻点满足 $\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial L_1}{\partial x} = 6x-2,\\ 0 = \dfrac{\partial L_1}{\partial y} = 6y-2+\lambda_1,\\ 0 = \dfrac{\partial L_1}{\partial \lambda_1} = y, \end{cases}$ 从而该点为 $\left(\dfrac{1}{3},\ 0,\ 2\right)$，并且 $f\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right) = \dfrac{5}{3}$；

拉氏函数 L_2 的驻点满足 $\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial L_2}{\partial x} = 6x-2+\lambda_2,\\ 0 = \dfrac{\partial L_2}{\partial y} = 6y-2,\\ 0 = \dfrac{\partial L_2}{\partial \lambda_2} = x, \end{cases}$ 则该点为 $\left(0,\ \dfrac{1}{3},\ 2\right)$，并且我们有 $f\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{5}{3}$；

拉氏函数 L_3 的驻点满足 $\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial L_3}{\partial x} = 6x-2+\lambda_3,\\ 0 = \dfrac{\partial L_3}{\partial y} = 6y-2+\lambda_3,\\ 0 = \dfrac{\partial L_3}{\partial \lambda_3} = x+y-1, \end{cases}$ 故该点为 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ -1\right)$，并且我们有 $f\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2}$。

另外，在三个顶点处，我们有

$$
f(P_1) = 2, \qquad f(P_2) = 3, \qquad f(P_3) = 3
$$

由于 f 在 D 上有最值，故 f 在 D 上的最值点必在上述点中，通过比较 f 在这些点处的值知 f 在点 P_2, P_3 处取到最大值 3，而在点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ 处取到最小值 $\dfrac{4}{3}$。 Ⓢ

10.5 曲面与曲线

我们已知，取 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0) \in \mathbb{R}^3$，设 $\vec{e} = (a,\ b,\ c)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$ 为非零向量，过 P_0 沿方向 $\vec{e}$ 的直线 $\varGamma$ 的方程为

$$
\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}
$$

该直线也可以表示成 $\begin{cases} x = x_0 + at,\\ y = y_0 + bt,\\ z = z_0 + ct。\end{cases}$ 若 $abc = 0$，则零分量的对应分子也为零，形式上也写成上面形式。

过 P_0 并且与 $\varGamma$ 垂直的平面 S 称为 $\varGamma$ 过 P_0 的**法平面**，它的方程为 $\begin{pmatrix} x-x_0\\ y-y_0\\ z-z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a\\ b\\ c \end{pmatrix} = 0$，也就是说 $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$。我们称 $\vec{e}$ 为平面 S 的**法向量**，$\varGamma$ 为 S 的**法线**。

10.5.1 曲面的表示

A) 曲面的显函数表示法 曲面 $S: z = f(x,\ y),\ (x,\ y) \in D \subset \mathbb{R}^2$。假设 f 在点 $(x_0,\ y_0)$ 处可微，令 $z_0 = f(x_0,\ y_0)$。当 $(x,\ y) \to (x_0,\ y_0)$ 时，

$$\begin{aligned} f(x,\ y) - z_0 &= f(x,\ y) - f(x_0,\ y_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0)(y - y_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right) \end{aligned}$$

则定义曲面 S 在点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 处的**切平面**方程为

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0)(y - y_0)$$

即

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0)(y - y_0) + (-1)(z - z_0) = 0$$

或者

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0)y + (-1)z = D$$

于是该切平面的法向量为 $\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0) \\ -1 \end{pmatrix}$，相应的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

B) 曲面的参数表示法 考虑曲面 S: $\begin{cases} x = f_1(u,\ v), \\ y = f_2(u,\ v), \\ z = f_3(u,\ v), \end{cases}$ $(u,\ v) \in D \subset \mathbb{R}^2$。设 $(u_0,\ v_0) \in D$，f_1，f_2，f_3 在点 $(u_0,\ v_0)$ 可微。令

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(u_0,\ v_0) \\ f_2(u_0,\ v_0) \\ f_3(u_0,\ v_0) \end{pmatrix}$$

当 $(u,\ v) \to (u_0,\ v_0)$ 时，我们有

$$\begin{pmatrix} f_1(u,\ v) - x_0 \\ f_2(u,\ v) - y_0 \\ f_3(u,\ v) - z_0 \end{pmatrix} = \frac{\partial(f_1,\ f_2,\ f_3)}{\partial(u,\ v)}(u_0,\ v_0)\begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix} + \vec{o}\left(\sqrt{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2}\right)$$

当矩阵 $\frac{\partial(f_1,\ f_2,\ f_3)}{\partial(u,\ v)}(u_0,\ v_0)$ 的秩等于 2 时，曲面 S 在点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 处有切平面

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \frac{\partial(f_1,\ f_2,\ f_3)}{\partial(u,\ v)}(u_0,\ v_0)\begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u-u_0 \\ v-v_0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x-x_0 = \frac{\partial f_1}{\partial u}\cdot(u-u_0) + \frac{\partial f_1}{\partial v}\cdot(v-v_0) \\ y-y_0 = \frac{\partial f_2}{\partial u}\cdot(u-u_0) + \frac{\partial f_2}{\partial v}\cdot(v-v_0) \\ z-z_0 = \frac{\partial f_3}{\partial u}\cdot(u-u_0) + \frac{\partial f_3}{\partial v}\cdot(v-v_0) \end{cases}$$

消去 u, v, 该切平面也可以表示成

$$\boldsymbol{\frac{D(f_2,\ f_3)}{D(u,\ v)}(u_0,\ v_0)}(x-x_0) + \boldsymbol{\frac{D(f_3,\ f_1)}{D(u,\ v)}(u_0,\ v_0)}(y-y_0) + \boldsymbol{\frac{D(f_1,\ f_2)}{D(u,\ v)}(u_0,\ v_0)}(z-z_0) = 0$$

从而曲面 S 在点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 处的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\boldsymbol{\frac{D(f_2,\ f_3)}{D(u,\ v)}(u_0,\ v_0)}} = \frac{y-y_0}{\boldsymbol{\frac{D(f_3,\ f_1)}{D(u,\ v)}(u_0,\ v_0)}} = \frac{z-z_0}{\boldsymbol{\frac{D(f_1,\ f_2)}{D(u,\ v)}(u_0,\ v_0)}}$$

C) 曲面的隐函数表示法 考虑 $S: F(x,\ y,\ z) = 0$。设 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0) \in S$, 而 F 在点 P_0 处可微。则当 $S \ni P(x,\ y,\ z) \to P_0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} 0 &= F(x,\ y,\ z) - F(x_0,\ y_0,\ z_0) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P_0)(z-z_0) + o(\|P-P_0\|) \end{aligned}$$

从而当 $J_F(P_0) \neq \vec{\mathbf{0}}$ 时, 曲面在点 P_0 有切平面

$$\boldsymbol{\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)}(x-x_0) + \boldsymbol{\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)}(y-y_0) + \boldsymbol{\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)}(z-z_0) = 0 \tag{10.13}$$

于是曲面 S 在点 P_0 处的法向量为 $\vec{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(P_0) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(P_0) \\ \frac{\partial F}{\partial z}(P_0) \end{pmatrix} = \operatorname{grad} F(P_0)$, 相应的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\boldsymbol{\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)}} = \frac{y-y_0}{\boldsymbol{\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)}} = \frac{z-z_0}{\boldsymbol{\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)}}$$

重要定义 10.20. 曲面的正交

若两曲面在交线上每点的法线互相垂直, 则称这两个曲面**正交**。

重要定理 10.5.1. 曲面正交的充要条件

曲面 S_1 : $F_1(x,\ y,\ z) = 0$ 和曲面 $S_2 : F_2(x,\ y,\ z) = 0$ 正交的充分必要条件是对于交线上的每点 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, 均有

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial z} = 0$$

证明. 在上述两曲面的交线上任取一点 P_0, 它们的法向量分别为 $\operatorname{grad} F_1(P_0)$, $\operatorname{grad} F_2(P_0)$, 二者正交当且仅当 $\operatorname{grad} F_1(P_0) \cdot \operatorname{grad} F_2(P_0) = 0$。由此得证。 □

10.5.2 空间曲线的表示

A) 空间曲线的参数表示法 考虑 $\Gamma:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\ t\in[\alpha,\ \beta],\\ z=z(t),\end{cases}$ 若上述这些函数在点 $t=t_0$ 处可微，则称曲线 Γ 在相应点 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 处可微，相应**切线**方程为 $\begin{cases}x-x_0=x'(t_0)(t-t_0),\\ y-y_0=y'(t_0)(t-t_0),\\ z-z_0=z'(t_0)(t-t_0)。\end{cases}$ 假设 $\left(x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0)\right)$ 不为零向量，该切线也可表述成

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)},$$

我们将经过点 P_0 并且与上述切线垂直的平面称为 Γ 在点 P_0 处的**法平面**，其方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

B) 空间曲线的隐函数表示法 考虑 $\Gamma:\begin{cases}F_1(x,\ y,\ z)=0,\\ F_2(x,\ y,\ z)=0,\end{cases}$ 设 F_1，F_2 在点 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 可微且 $\operatorname{grad}F_1(P_0)$，$\operatorname{grad}F_2(P_0)$ 不为零，则曲线 Γ 在该点的切线为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_1}{\partial x}(P_0)(x-x_0)+\dfrac{\partial F_1}{\partial y}(P_0)(y-y_0)+\dfrac{\partial F_1}{\partial z}(P_0)(z-z_0)=0,\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(P_0)(x-x_0)+\dfrac{\partial F_2}{\partial y}(P_0)(y-y_0)+\dfrac{\partial F_2}{\partial z}(P_0)(z-z_0)=0\end{cases}$$

该切线的方向为

$$\vec{T}=\operatorname{grad}F_1(P_0)\times\operatorname{grad}F_2(P_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial x}(P_0)\\ \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(P_0)\\ \dfrac{\partial F_1}{\partial z}(P_0)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_2}{\partial x}(P_0)\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(P_0)\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial z}(P_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{D(F_1,\ F_2)}{D(y,\ z)}(P_0)\\ \dfrac{D(F_1,\ F_2)}{D(z,\ x)}(P_0)\\ \dfrac{D(F_1,\ F_2)}{D(x,\ y)}(P_0)\end{pmatrix}$$

只有当 $\vec{T}\neq\vec{0}$ 时，上述方程组才的确给出一条直线，此时 Jacobi 矩阵 $\dfrac{\partial(F_1,\ F_2)}{\partial(x,\ y,\ z)}(P_0)$ 的秩等于 2。借助 $\vec{T}$，我们也可得到切线的另外一个表述:

$$\frac{x-x_0}{\frac{D(F_1,\ F_2)}{D(y,\ z)}(P_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{D(F_1,\ F_2)}{D(z,\ x)}(P_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{D(F_1,\ F_2)}{D(x,\ y)}(P_0)}$$

11 多元函数积分学

11.1 n 重积分

定义 11.1. 定义 $I = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_j \le x_j \le b_j, j \in \{1, \cdots, n\}\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的**区间**或者**坐标平行体**，其 n 维体积被定义为

$$\mu_n(I) := |I| := \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$$

重要定义 11.2. Riemann 可积

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界集，$f : \Omega \to \mathbb{R}$ 为函数，

- 将每一个区间 $[a_j, b_j]$ ($1 \le j \le n$) 分成更小的子区间，由此而得到的小坐标平行体所组成的集合，称为 I 的一个**分割**，记作 P，$\lambda(P) = \max_{J \in P} d(J)$ 为分割 P 的**步长**，其中 $d(J)$ 表示坐标平行体 J 的直径，即 J 中任意两点的最大距离；
- 假设 $P = \{I_j \mid 1 \le j \le k\}$ 为 I 的分割，对任意的整数 $1 \le j \le k$，选取 $\xi_j \in I_j$ ，记 $\xi = (\xi_j)_{1 \le j \le k}$，称 (P, ξ) 为 I 的**带点分割**；
- 设 $\widetilde{f} : I \to \mathbb{R}$ 为函数，定义

$$\sigma(\widetilde{f}; P, \xi) = \sum_{j=1}^{k} \widetilde{f}(\xi_j)|I_j|$$

  称为 $\widetilde{f}$ 关于带点分割 (P, ξ) 的 **Riemann 和**；
- 若 $\exists A \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得对 I 的任意带点分割 (P, ξ)，当 $\lambda(P) < \delta$ 时，均有 $|\sigma(\widetilde{f}; P, \xi) - A| < \varepsilon$。此时，我们记 $A = \lim\limits_{\lambda(P) \to 0} \sigma(\widetilde{f}; P, \xi)$，并称之为 $\widetilde{f}$ 在 I 上的积分，记作

$$\int_I \widetilde{f}(X)\,\mathrm{d}X \quad \text{或} \quad \int\!\!\cdots\!\!\int_I \widetilde{f}(x_1, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

  并称 $\widetilde{f} : I \to \mathbb{R}$ 为 **Riemann 可积**。
- 对有界集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，可找到坐标平行体 I 包含 Ω，$\forall X \in I$，定义

$$\widetilde{f}(X) = \begin{cases} f(X), & X \in \Omega, \\ 0, & X \in I \setminus \Omega \end{cases}$$

  如果 $\widetilde{f}$ 在 I 上为 Riemann 可积，则称 f 在 Ω 上为 **Riemann 可积**，此时定义 $\int_\Omega f(X)\,\mathrm{d}X = \int_I \widetilde{f}(X)\,\mathrm{d}X$，可以证明上述定义与坐标平行体 I 的选取无关。Ω 上的所有的 Riemann 可积函数的全体记作 $\mathscr{R}(\Omega)$，该集合可能「非常小」。

同单变量情形一样，可引入 Darboux 上和、Darboux 下和、振幅，进而借助它们来刻画 Riemann 可积函数。

定义 11.3. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$，定义 $1_\Omega(X) = \begin{cases} 1, & X \in \Omega, \\ 0, & X \notin \Omega, \end{cases}$ 并称 1_Ω 为集合 Ω 的**示性函数**。若 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界集且使得其示性函数 1_Ω 为 Riemann 可积，则称 Ω 为 **Jordan 可测集**，此时还称

$\int_\Omega 1_\Omega(X)\,\mathrm{d}X$ 为 Ω 的**体积**或**测度**，记作 $|\Omega|$。

重要定理 11.1.1. Jordan 可测集上的连续函数 Riemann 可积

设有界闭集 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为 Jordan 可测集，$f:\Omega\to\mathbb{R}$ 连续，则 f 在 Ω 上 Riemann 可积。

定理 11.1.2. Riemann 积分的基本性质。

- **有界性** 若 $f\in\mathscr{R}(\Omega)$，则 f 为有界函数。
- **线性性** $\forall f_1,\ f_2\in\mathscr{R}(\Omega)$ 以及 $\forall a,\ b\in\mathbb{R}$，我们均有 $af_1+bf_2\in\mathscr{R}(\Omega)$，并且
$$\int_\Omega (af_1(X)+bf_2(X))\,\mathrm{d}X = a\int_\Omega f_1(X)\,\mathrm{d}X + b\int_\Omega f_2(X)\,\mathrm{d}X$$
- **区域可加性** 设 $\Omega_1,\ \Omega_2\subset\Omega$ 为 Jordan 可测集，而 $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$，且 $\Omega_1,\ \Omega_2$ 没有公共的内点，则函数 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 在 Ω 上为 Riemann 可积当且仅当 f 在 $\Omega_1,\ \Omega_2$ 上 Riemann 可积，此时
$$\int_\Omega f(X)\,\mathrm{d}X = \int_{\Omega_1} f(X)\,\mathrm{d}X + \int_{\Omega_2} f(X)\,\mathrm{d}X.$$
- **保号性** 如果 $f\in\mathscr{R}(\Omega)$ 使得 $\forall X\in\Omega$，我们均有 $f(X)\geq 0$，则 $\int_\Omega f(X)\,\mathrm{d}X\geq 0$。
- **严格保号性** 若 $f\in\mathscr{C}(\Omega)$ 非负且不恒为零，则我们有 $\int_\Omega f(X)\,\mathrm{d}X>0$。
- **保序性** 若 $f,\ g\in\mathscr{R}(\Omega)$ 使得 $\forall X\in\Omega$，我们均有 $f(X)\leq g(X)$，则
$$\int_\Omega f(X)\,\mathrm{d}X \leq \int_\Omega g(X)\,\mathrm{d}X$$
- **绝对值不等式** 若 $f\in\mathscr{R}(\Omega)$，则 $|f|\in\mathscr{R}(\Omega)$ 且
$$\left|\int_\Omega f(X)\,\mathrm{d}X\right| \leq \int_\Omega |f(X)|\,\mathrm{d}X.$$
- **积分估计界** 若 $f\in\mathscr{R}(\Omega)$，$M,\ m$ 为其上、下界，则
$$m|\Omega| \leq \int_\Omega f(X)\,\mathrm{d}X \leq M|\Omega|$$
- **积分中值定理** 若 Ω 还为有界的闭连通集，而 $f\in\mathscr{C}(\Omega)$，则 $\exists X_0\in\Omega$ 使得
$$\int_\Omega f(X)\,\mathrm{d}X = f(X_0)|\Omega|.$$
由此立刻可知，$\forall Y\in\operatorname{Int}\Omega$，我们有
$$f(Y)=\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{|\bar{B}(Y,\ r)|}\int_{\bar{B}(Y,\ r)} f(X)\,\mathrm{d}X$$
- **变量替换定理** 设 $\Omega_1,\ \Omega_2\subset\mathbb{R}^n$ 为非空开集，$\varphi=(g_1,\ \cdots,\ g_n):\Omega_1\to\Omega_2$ 为连续可导的双射，并且它的逆映射 $\varphi^{-1}:\Omega_2\to\Omega_1$ 也为连续可导。若 $D_1\subset\Omega_1$ 为 Jordan 可测集，那么 $D_2=\varphi(D_1)$ 也为 Jordan 可测集，且 $\forall f\in\mathscr{C}(D_2)$，均有
$$\begin{aligned}\int_{D_2} f(Y)\,\mathrm{d}Y &= \int\cdots\int_{\varphi(D_1)} f(y_1,\ \cdots,\ y_n)\,\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n\\ &= \int\cdots\int_{D_1} f(g_1(X),\ \cdots,\ g_n(X))\left|\frac{D(g_1,\ \cdots,\ g_n)}{D(x_1,\ \cdots,\ x_n)}\right|\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\end{aligned}$$

11.2 二重积分的计算

11.2.1 直角坐标系下的二重积分

情形 11.2.1. 假设 $f_1,\ f_2 : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ 为连续函数使得 $\forall x \in [a,\ b]$, 均有 $f_1(x) \le f_2(x)$。则

$$D_1 = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\quad f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$$

为 Jordan 可测且 $|D_1| = \displaystyle\int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,\mathrm{d}x.$

若 $f : D_1 \to \mathbb{R}$ 为连续函数, 则

$$\iint_{D_1} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

情形 11.2.2. 假设 $g_1,\ g_2 : [c,\ d] \to \mathbb{R}$ 为连续函数使得 $\forall y \in [c,\ d]$, 均有 $g_1(y) \le g_2(y)$。则

$$D_2 = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid g_1(y) \le x \le g_2(y),\quad c \le y \le d\}$$

为 Jordan 可测且 $|D_2| = \displaystyle\int_c^d (g_2(y) - g_1(y))\,\mathrm{d}y.$

若 $f : D_2 \to \mathbb{R}$ 为连续函数, 则

$$\iint_{D_2} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

例题 11.2.3. 计算 $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_x^1 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$。

解. 看作 X 型区域上的二重积分式, 即令 $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\quad x \le y \le 1\}$, 此时 $\int_x^1 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$ 无解析表示。但注意到 $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le y,\quad 0 \le y \le 1\}$, 故可看作 Y 型区域上的二重积分, 有

$$I = \iint_D \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^y \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 y\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-1})$$ Ⓢ

例题 11.2.4. 体积计算一例 计算椭圆形的圆柱面 $4x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = 1 - y$ 以及 $z = 0$ 所围成的立体的体积。

解. 令 $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 \le 1\}$, 则所求立体的体积为

$$V = \iint_D (1-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}} (1-y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-4x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x=\frac{1}{2}\sin t} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\sin t\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{2}\sin 2t + t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$ Ⓢ

注 11.1. 对称性在二重积分当中的应用

假设积分区域 D 关于 x 轴对称，如果有

（a）$f(x,\ -y)=-f(x,\ y)$，则 $\iint_D f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$。

证明. 由定理 11.1.2 中变量替换定理，

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &\xlongequal[y=-v]{x=u} \iint_D f(u,\ -v)\left|\frac{D(u,\ -v)}{D(u,\ v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &=-\iint_D f(u,\ v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=-\iint_D f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

故 $\iint_D f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$。 □

（b）$f(x,\ -y)=f(x,\ y)$，则 $\iint_D f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint_{D'} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D' 为 D 位于 x 轴上侧（或下侧）的部分。

证明. 由变量替换可得 $\iint_{D''} f(x,\ y)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \xlongequal[y=-v]{x=u} \iint_{D'} f(u,\ -v)\left|\frac{D(u,\ -v)}{D(u,\ v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$，于是

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_{D'} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{D''} f(x,\ y)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &=\iint_{D'} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{D'} f(u,\ -v)\left|\frac{D(u,\ -v)}{D(u,\ v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &=2\iint_{D'} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

□

同理，假设积分区域 D 关于 y 轴对称，如果有

（a）$f(-x,\ y)=-f(x,\ y)$，则 $\iint_D f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$。

（b）$f(-x,\ y)=f(x,\ y)$，则 $\iint_D f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint_{D'} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D' 为 D 位于 y 轴左侧（或右侧）的部分。

假设积分区域 D 关于原点对称，如果有 $f(-x,\ -y)=-f(x,\ y)$，则 $\iint_D f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$。

11.2.2 极坐标系下的二重积分

极坐标 $(\rho,\ \varphi)$ 和直角坐标 $(x,\ y)$ 之间有映射关系 $\vec{f}:\begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi,\end{cases}$ 其 Jacobi 行列式为 $\frac{D(x,\ y)}{D(\rho,\ \varphi)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho$，于是由定理 11.1.2 中变量替换定理，即有

$$\iint_{\vec{f}(D)} F(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D F(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$$

例题 11.2.5. 计算由抛物线 $y^2=px$，$y^2=qx$ 与双曲线 $xy=a$，$xy=b$ 合起来所围成的平面区域 D 的面积，其中 $q>p>0$，$b>a>0$。

解. 作变换 $u=\dfrac{y^2}{x}$, $v=xy$, 则 D 变为 $D_1=\{(u,v)\mid p\le u\le q,\ a\le v\le b\}$, 知 Jacobi 行列式 $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}-\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x}\\ y & x\end{vmatrix}=-\dfrac{3y^2}{x}$, 即 $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=-\dfrac{x}{3y^2}=-\dfrac{1}{3u}$。由此有

$$S=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_1}\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\iint_{D_1}\frac{1}{3u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\int_a^b\left(\int_p^q\frac{1}{3u}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v=\frac{1}{3}(b-a)\ln\frac{q}{p}$$ Ⓢ

11.3 三重积分的计算

11.3.1 空间直角坐标系下的三重积分

情形 11.3.1. XY-Z 区域 $D_1\subset\mathbb{R}^2$ 为 Jordan 可测集, $f_1,\ f_2\in\mathscr{C}(D_1)$ 使得 $\forall(x,\ y)\in D_1$, 均有 $f_1(x,\ y)\le f_2(x,\ y)$. 令

$$\Omega_1=\big\{(x,\ y,\ z)\mid f_1(x,\ y)\le z\le f_2(x,\ y),\ (x,\ y)\in D_1\big\}$$

则 Ω_1 为 Jordan 可测集且 $\forall f\in\mathscr{C}(\Omega_1)$, 均有

$$\iiint_{\Omega_1}f(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{D_1}\left(\int_{f_1(x,\ y)}^{f_2(x,\ y)}f(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

情形 11.3.2. XZ-Y 区域 $D_2\subset\mathbb{R}^2$ 为 Jordan 可测集, $g_1,\ g_2\in\mathscr{C}(D_2)$ 使得 $\forall(x,\ z)\in D_2$, 均有 $g_1(x,\ z)\le g_2(x,\ z)$. 令

$$\Omega_2=\big\{(x,\ y,\ z)\mid g_1(x,\ z)\le y\le g_2(x,\ z),\ (x,\ z)\in D_2\big\}$$

则 Ω_2 为 Jordan 可测集且 $\forall f\in\mathscr{C}(\Omega_2)$, 均有

$$\iiint_{\Omega_2}f(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{D_2}\left(\int_{g_1(x,\ z)}^{g_2(x,\ z)}f(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

情形 11.3.3. YZ-X 区域 $D_3\subset\mathbb{R}^2$ 为 Jordan 可测集, $h_1,\ h_2\in\mathscr{C}(D_3)$ 使得 $\forall(y,\ z)\in D_3$, 均有 $h_1(y,\ z)\le h_2(y,\ z)$. 令

$$\Omega_3=\big\{(x,\ y,\ z)\mid h_1(y,\ z)\le x\le f_2(y,\ z),\ \ (y,\ z)\in D\big\}.$$

则 Ω_3 为 Jordan 可测集且 $\forall f\in\mathscr{C}(\Omega_3)$, 均有

$$\iiint_{\Omega_3}f(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{D_3}\left(\int_{h_1(y,\ z)}^{h_2(y,\ z)}f(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

例题 11.3.4. 计算 $I=\iiint_\Omega(y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 $\Omega=\left\{(x,\ y,\ z)\;\middle|\;\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1,\ \ z\ge 0\right\}$。

解. 知 $\Omega=\left\{(x,\ y,\ z)\;\middle|\;\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1,\ \ z\ge 0\right\}=\left\{(x,\ y,\ z)\;\middle|\;0\le z\le c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}},\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le\right.$

$1\Big\}$。由线性性与对称性可知

$$I=\iiint_\Omega y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\left(\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} z\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\frac{c^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\iint_{\substack{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\\ x,\ y\ge 0}}\frac{c^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=2c^2\iint_{\substack{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\\ x,\ y\ge 0}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ \xlongequal[y=b\rho\sin\varphi]{x=a\rho\cos\varphi}\ 2c^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1(1-\rho^2)ab\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\varphi$$
$$=2abc^2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}abc^2$$

Ⓢ

11.3.2 柱坐标系下的三重积分

柱坐标 $(\rho,\ \varphi,\ z)$ 和直角坐标 $(x,\ y,\ z)$ 之间有映射关系 $\vec{\boldsymbol{f}}:\begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi,\\ z=z,\end{cases}$ 其 Jacobi 行列式为 $\dfrac{D(x,\ y,\ z)}{D(\rho,\ \varphi,\ z)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho$，于是由定理 11.1.2 中变量替换定理，即有

$$\iiint_{\vec{\boldsymbol{f}}(D)}F(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint_D F(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$$

若取广义柱坐标系 $\vec{\boldsymbol{g}}:\begin{cases}x=a\rho\cos\varphi,\\ y=b\rho\sin\varphi,\\ z=z,\end{cases}$ 其 Jacobi 行列式为 $\dfrac{D(x,\ y,\ z)}{D(\rho,\ \varphi,\ z)}=\begin{vmatrix}a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi & 0\\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=ab\rho$，于是由定理 11.1.2 中变量替换定理，即有

$$\iiint_{\vec{\boldsymbol{g}}(D)}F(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint_D F(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)ab\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$$

例题 11.3.5. 求积分 $\displaystyle\iiint_\Omega(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中立体 Ω 为平面曲线 $\begin{cases}y^2=2z,\\ x=0,\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的旋转面与平面 $z=8$ 所围成的空间区域。

解. 在柱坐标系下 $\Omega_1=\left\{(\rho,\ \varphi,\ z)\mid 0\le\varphi\le 2\pi,\ \ 0\le\rho\le 4,\ \ \frac{1}{2}\rho^2\le z\le 8\right\}$，由此立刻可得

$$\iint_\Omega(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^4\left(\int_{\frac{1}{2}\rho^2}^8\rho^3\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\varphi=\frac{1024}{3}\pi$$

Ⓢ

例题 11.3.6. 计算 $\displaystyle\iiint_\Omega x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 $\Omega=\left\{(x,\ y,\ z)\mid\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right\}$。

解. 在柱坐标系下 Ω 变为 $\Omega_1=\left\{(\rho,\ \varphi,\ z)\mid \rho\le z\le\sqrt{R^2-\rho^2},\ \ 0\le\rho\le\frac{\sqrt{2}R}{2},\ \ 0\le\varphi\le 2\pi\right\}$, 由此立刻可得

$$\iiint_\Omega x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega_1}(\rho\cos\varphi)^2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}R}{2}}\left(\int_\rho^{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho^3\cos^2\varphi\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}R}{2}}\rho^3\left(\sqrt{R^2-\rho^2}-\rho\right)\mathrm{d}\rho=\frac{\pi R^5}{5}\left(\frac{2}{3}-\frac{5\sqrt{2}}{12}\right)$$

Ⓢ

11.3.3 球坐标系下的三重积分

球坐标 $(r,\ \theta,\ \varphi)$ 和直角坐标 $(x,\ y,\ z)$ 之间有映射关系 $\vec{f}:\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi,\\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\\ z=r\cos\theta,\end{cases}$ 其 Jacobi 行列式为

$$\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(r,\ \theta,\ \varphi)}=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{vmatrix}=r^2\sin\theta,$$ 于是由定理 11.1.2 中变量替换定理,

即有

$$\iiint_{\vec{f}(D)}F(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint_D F(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

其中 $r\ge 0,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi<2\pi$。

11.4 重积分的物理与几何应用

11.4.1 物体的重心（质心）与形心问题

重要定义 11.4. 重心（质心）、形心

假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 中分布有质量, 在点 X 处的密度为 $\rho(X)$, 则其**重心** $\overline{X}=(\bar{x}_1,\ \cdots,\ \bar{x}_n)$ 为

$$\bar{x}_j=\frac{\int\cdots\int_\Omega x_j\rho(x_1,\ \cdots,\ x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n}{\int\cdots\int_\Omega \rho(x_1,\ \cdots,\ x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n}$$

当 $\rho\equiv 1$ 时, 将质心称为**形心**。

例题 11.4.1. 设曲面 S 在球坐标系下的方程为 $r=a(1+\cos\theta)$（$a>0$）, 令 Ω 为曲面 S 所围成的有界区域, 求 Ω 在直角坐标系下的形心。

解. 在球坐标系下 Ω 变为 $\Omega_1=\{(r,\ \theta,\ \varphi)\mid 0\le r\le a(1+\cos\theta),\ \ 0\le\theta\le\pi,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi\}$, 由此可得 Ω 的体积为

$$|\Omega|=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{a(1+\cos\theta)}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\varphi=\frac{8}{3}\pi a^3$$

设所求质心为 $(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z})$，则由对称性可知

$$\bar{x}=\frac{1}{|\Omega|}\iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0,$$

$$\bar{y}=\frac{1}{|\Omega|}\iiint_{\Omega} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0,$$

$$\bar{z}=\frac{1}{|\Omega|}\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{1}{|\Omega|}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{a(1+\cos\theta)}(r\cos\theta)(r^2\sin\theta)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\varphi=\frac{4}{5}a$$

故所求质心为 $\left(0,\ 0,\ \dfrac{4}{5}a\right)$。 Ⓢ

11.4.2 空间曲面的面积问题

重要定理 11.4.2. 空间曲面的面积公式

设空间曲面 Σ 的参数方程为 $\begin{cases} x=x(u,\ v), \\ y=y(u,\ v), \\ z=z(u,\ v), \end{cases}$ $(u,\ v)\in D$，其中 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为 Jordan 可测集，而 $x,\ y,\ z$ 为连续可导函数使得 $\dfrac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(u,\ v)}$ 的秩为 2。定义 $E=\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2$，$G=\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2$，$F=\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v}$，则曲面 Σ 的面积为

$$S=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

证明. 定义

$$\vec{\boldsymbol{T}}_u=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u}\\ \dfrac{\partial z}{\partial u}\end{pmatrix},\quad \vec{\boldsymbol{T}}_v=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial v}\\ \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}$$

则我们有

$$\vec{\boldsymbol{T}}_u\times\vec{\boldsymbol{T}}_v=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u}\\ \dfrac{\partial z}{\partial u}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial v}\\ \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)}\\ \dfrac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)}\\ \dfrac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\end{pmatrix}$$

用以 $\mathrm{d}v$ 细分的 u 曲线和以 $\mathrm{d}u$ 细分的 v 曲线把曲面 Σ 分成小块，每个小块近似看作平行四边形，其面积就是 $\mathrm{d}\sigma=\left\|\vec{\boldsymbol{T}}_u\,\mathrm{d}u\times\vec{\boldsymbol{T}}_v\,\mathrm{d}v\right\|=\left\|\vec{\boldsymbol{T}}_u\times\vec{\boldsymbol{T}}_v\right\|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$，而

$$\begin{aligned}\left\|\vec{\boldsymbol{T}}_u\times\vec{\boldsymbol{T}}_v\right\|^2&=\left(\frac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)}\right)^2+\left(\frac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)}\right)^2+\left(\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right)^2\\&=\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 \\
&\quad - 2\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - 2\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - 2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \\
&= \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right)\cdot\left(\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right) \\
&\quad - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \\
&= \left\|\vec{\boldsymbol{T}}_u\right\|^2\left\|\vec{\boldsymbol{T}}_v\right\|^2 - \left\|\vec{\boldsymbol{T}}_u\cdot\vec{\boldsymbol{T}}_v\right\|^2
\end{aligned}
$$

定义 $E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$，$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$，$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$，则面积微元为 $\mathrm{d}\sigma=\left\|\vec{\boldsymbol{T}}_u\times\vec{\boldsymbol{T}}_v\right\|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$，故曲面的面积为 $S=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$。 □

11.5 曲线曲面积分

11.5.1 第一类曲线积分

重要定义 11.5. 第一类曲线积分

假设 $L\subset\mathbb{R}^3$ 为空间曲线，其起点为 A，终点为 B，而 $F:L\to\mathbb{R}$ 为函数，对任意的整数 $n\geq 1$，将 L 分割成 $\overset{\frown}{P_0P_1}$，$\overset{\frown}{P_1P_2}$，$\cdots$，$\overset{\frown}{P_{n-1}P_n}$ 共 n 段，其中 $P_0=A$，$P_n=B$。在每个小段 $\overset{\frown}{P_{i-1}P_i}$ 上取点 P_i^*，令

$$d=\max_{1\leq i\leq n}|\overset{\frown}{P_{i-1}P_i}|$$

并称之为分割的**步长**，定义（若极限存在）

$$\int_L F(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^n F(P_i^*)|\overset{\frown}{P_{i-1}P_i}|$$

并且称之为 F 在曲线 L 上的**第一类曲线积分**，也记之为 $\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s$，其中称 L 为**积分路径**，F 为**被积函数**，$F(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s$ 为**被积分式**，$\mathrm{d}s$ 为**曲线元素**或**弧微分**或**弧微元**。

上述极限存在，意味着 $\exists a\in\mathbb{R}$，使得 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 使得

$$\text{当 } d<\delta \text{ 时，均有 } \left|\sum_{i=1}^n F(P_i^*)|\overset{\frown}{P_{i-1}P_i}|-a\right|<\varepsilon$$

此时将 a 记作 $\int_L F(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s$。若 L 为分段光滑曲线（也即 L 可分成有限多段，且每一段均有连续可导的参数表示），而 F 为连续函数，则 $\int_L F(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s$ 存在。

重要定理 11.5.1. 第一类曲线积分与曲线的方向无关

函数 f 沿曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{BA}$ 的积分相等:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s = \int_{\overset{\frown}{BA}} F(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s$$

定义 11.6. 假设 $L \subset \mathbb{R}^3$ 为分段光滑曲线，在它上面分布有质量使得在点 $X \in L$ 处的密度为 $\rho(X)$。若 ρ 连续，则 L 的总质量 $M = \displaystyle\int_L \rho(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s$，$L$ 的**质心** $(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z})$ 为

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_L x\rho(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s,\qquad \bar{y} = \frac{1}{M}\int_L y\rho(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s,\qquad \bar{z} = \frac{1}{M}\int_L z\rho(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s$$

情形 11.5.2. 由参数方程组给定的曲线

设分段光滑曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ （$t \in [\alpha,\ \beta]$），则其弧微分为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

从而我们有

$$\int_L F(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta F(x(t),\ y(t),\ z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t \tag{11.1}$$

例题 11.5.3. 求柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$（$a > 0$）被平面 $z = 0$ 以及曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所截部分的面积。

解. 设 L 为圆周 $x^2 + y^2 = 2ax$，其参数方程为 $\begin{cases} x = a + a\cos\varphi, \\ y = a\sin\varphi \end{cases}$（$\varphi \in [0,\ 2\pi]$），于是所求面积为

$$S = \int_L \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a + a\cos\varphi)^2 + (a\sin\varphi)^2}\,a\,\mathrm{d}\varphi = 8a^2$$

Ⓢ

情形 11.5.4. 由隐函数方程组给定的曲线

若曲线 L 由隐函数方程组 $\begin{cases} \varphi_1(x,\ y,\ z) = 0, \\ \varphi_2(x,\ y,\ z) = 0 \end{cases}$ 给出，利用隐函数定理来局部求解上述方程组，由此得到曲线 L 的分段的参数表示，随后再对每段分别利用前面的公式计算。

11.5.2 第一类曲面积分

重要定义 11.7. 第一类曲面积分

假设 $S \subset \mathbb{R}^3$ 为曲面，$f: S \to \mathbb{R}$ 为函数。将 S 分割成 n 块 S_1，$\cdots$，S_n，在每块 S_j 上取一点 X_j，记 d 为所有 S_j 的直径中的最大者，我们定义（若极限存在）

$$\iint_S f(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{j=1}^{n} f(X_j)|S_j|$$

并称之为函数 f 在曲面 S 上的**第一类曲面积分**，S 为**积分曲面**，$f(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}\sigma$ 为被积分式，$\mathrm{d}\sigma$ 则为**面积元素**或**面积微分**或**面积微元**。

上述极限存在，意味着 $\exists a \in \mathbb{R}$，使得 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$ 使得

$$\text{当 } d < \delta \text{ 时，均有 } \left|\sum_{j=1}^{n} f(X_j)|S_j| - a\right| < \varepsilon$$

此时将 a 记作 $\iint_S f(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}\sigma$。若 S 为分片光滑曲面（即 S 可分成有限多片，每一片均有连续可导的参数表示），而 f 为连续函数，则 $\iint_S f(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}\sigma$ 存在。

设分片光滑曲面 S 的参数方程为 $\begin{cases} x = x(u,\ v), \\ y = y(u,\ v), \\ z = z(u,\ v), \end{cases}$ $(u,\ v) \in D$，其中 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为 Jordan 可测集，则面积微元为 $\mathrm{d}\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$，其中 $E = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2$，$G = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2$，$F = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v}$，于是

$$\iint_S f(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v))\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{11.2}$$

11.5.3 第二类曲线积分

重要定义 11.8. 第二类曲线积分

设 $L\subset\mathbb{R}^3$ 为空间曲线，它的起点为 A，终点为 B，而 $\vec{\boldsymbol{F}}=(F_1,\ F_2,\ F_3):L\to\mathbb{R}^3$ 为向量值函数 $\vec{\boldsymbol{F}}(x,\ y,\ z)=(F_1(x,\ y,\ z),\ F_2(x,\ y,\ z),\ F_3(x,\ y,\ z))$，$(x,\ y,\ z)\in L\subset\mathbb{R}^3$。
对任意整数 $n\geq 1$，我们将曲线 L 分割成 n 小段 $\widehat{P_0P_1}$，$\widehat{P_1P_2}$，$\cdots$，$\widehat{P_{n-1}P_n}$，其中 $P_0=A$，$P_n=B$，并记 $P_i=(x_i,\ y_i,\ z_i)$ $(0\leq i\leq n)$，$\vec{\boldsymbol{\ell}}=(x,\ y,\ z)$。在每个小段 $\widehat{P_{i-1}P_i}$ 上取点 $X_i=P_i^*=(x_i^*,\ y_i^*,\ z_i^*)$。令

$$d=\max_{1\leq i\leq n}|\overline{P_{i-1}P_i}|$$

并称之为分割的**步长**。定义（若极限存在）

$$\begin{aligned}\int_{L(\widehat{AB})}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{\ell}})\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}&=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{\boldsymbol{F}}(X_i)\cdot\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\\&=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big(F_1(X_i)(x_i-x_{i-1})+F_2(X_i)(y_i-y_{i-1})+F_3(X_i)(z_i-z_{i-1})\big)\end{aligned}$$

并且称之为向量值函数 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 沿曲线 L 由点 A 到点 B 的**第二类曲线积分**。

A) 第二类曲线积分的计算

情形 11.5.5. 由参数方程组给定的曲线

设分段光滑曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\\z=z(t),\end{cases}$ $t\in[\alpha,\ \beta]$，其中起点 A 和终点 B 所对应的参数分别为 α，β，则

$$\begin{aligned}\int_{L(\widehat{AB})}\vec{F}(\vec{\ell})\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}&=\int_{L(\widehat{AB})}F_1(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}x+\int_{L(\widehat{AB})}F_2(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}y+\int_{L(\widehat{AB})}F_3(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}z\\&=\int_{\alpha}^{\beta}F_1\left(x(t),\ y(t),\ z(t)\right)x'(t)\,\mathrm{d}t+\int_{\alpha}^{\beta}F_2\left(x(t),\ y(t),\ z(t)\right)y'(t)\,\mathrm{d}t\\&\quad+\int_{\alpha}^{\beta}F_3\left(x(t),\ y(t),\ z(t)\right)z'(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{11.3}$$

设路径 $L\subset\mathbb{R}^3$ 是起点为 A，终点为 B 的分段光滑曲线，其参数方程为 $\vec{\ell}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$，$t\in[a,\ b]$，而 $\vec{\boldsymbol{F}}=(F_1,\ F_2,\ F_3):L\to\mathbb{R}^3$ 为分段连续函数。$\forall P\in L$，设 L 在点 P 处的单位切向量为 $\vec{\boldsymbol{\tau}}^0(P)=(\cos\alpha(P),\ \cos\beta(P),\ \cos\gamma(P))$。而 $\forall t\in[a,\ b]$，我们有

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}^0(\vec{\ell}(t))=\frac{\vec{\ell}'(t)}{\|\vec{\ell}'(t)\|}=\frac{(x'(t),\ y'(t),\ z'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}}$$

由此立刻可得

$$\begin{aligned}\cos\alpha\left(\vec{\ell}(t)\right)&=\frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}},\\\cos\beta\left(\vec{\ell}(t)\right)&=\frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}},\\\cos\gamma\left(\vec{\ell}(t)\right)&=\frac{z'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}}\end{aligned}$$

注意到 $\mathrm{d}\ell=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,\mathrm{d}t$，即写出

$$\mathrm{d}x=x'(t)\,\mathrm{d}t=\cos\alpha\,\mathrm{d}\ell,\qquad \mathrm{d}y=y'(t)\,\mathrm{d}t=\cos\beta\,\mathrm{d}\ell,\qquad \mathrm{d}z=z'(t)\,\mathrm{d}t=\cos\gamma\,\mathrm{d}\ell$$

进而我们就有

$$\begin{aligned}\int_{(\widehat{AB})}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{\ell}})\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}&=\int_{L(\widehat{AB})}F_1(\vec{\boldsymbol{\ell}})\,\mathrm{d}x+F_2(\vec{\boldsymbol{\ell}})\,\mathrm{d}y+F_3(\vec{\boldsymbol{\ell}})\,\mathrm{d}z \qquad (11.4)\\&=\int_a^b\Big(F_1(\vec{\boldsymbol{\ell}}(t))x'(t)+F_2(\vec{\boldsymbol{\ell}}(t))y'(t)+F_3(\vec{\boldsymbol{\ell}}(t))z'(t)\Big)\,\mathrm{d}t\\&=\int_L(F_1(x,\ y,\ z)\cos\alpha+F_2(x,\ y,\ z)\cos\beta+F_3(x,\ y,\ z)\cos\gamma)\,\mathrm{d}\ell\\&=\int_L(\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{\tau}}^0)(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}\ell \qquad (11.5)\end{aligned}$$

其中，式 11.5 已是第一类曲面积分的形式。

B) Green 公式

定义 11.9. *称 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为单连通集，若 D 中的任意闭曲线所围的区域仍包含在 D 中（也即 D 中的任意闭曲线可连续地收缩成为一点）。若 D 不为单连通集，则称之为复连通集。*

重要定理 11.5.6. 单连通平面向量场的 Green 公式

假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 为单连通的有界闭区域，它的边界 $\partial\Omega$ 为分段光滑闭曲线，该曲线的正方向为逆时针方向，记 $\vec{\boldsymbol{n}}_0$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。如果 $\vec{\boldsymbol{F}}=(F_1,\ F_2)^{\mathrm{T}}:\Omega\to\mathbb{R}^2$ 为连续可导的向量值函数，则

$$\oint_{\partial\Omega}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}_0\,\mathrm{d}\ell=\iint_\Omega\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,\ y)+\frac{\partial F_2}{\partial y}(x,\ y)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (11.6)$$

推论 11.5.7. $|\Omega|=\displaystyle\iint_\Omega 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_{\partial\Omega+}x\,\mathrm{d}y=-\oint_{\partial\Omega+}y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega+}x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x$。

$\forall P\in\partial\Omega$，假设 $\vec{\boldsymbol{\tau}}_0(P)=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)^{\mathrm{T}}$ 为 $\partial\Omega$ 在点 P 处的单位切向量，则我们有 $\vec{\boldsymbol{n}}_0(P)=(\sin\alpha,\ -\cos\alpha)^{\mathrm{T}}$。又 $\mathrm{d}x=\cos\alpha\,\mathrm{d}\ell$，$\mathrm{d}y=\sin\alpha\,\mathrm{d}\ell$，于是我们有

$$\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}^0\,\mathrm{d}\ell=(F_1\sin\alpha-F_2\cos\alpha)\,\mathrm{d}\ell=F_1\,\mathrm{d}y-F_2\,\mathrm{d}x$$

从而 Green 公式又可以表述成

$$\oint_{\partial\Omega+}F_1\,\mathrm{d}y-F_2\,\mathrm{d}x=\iint_\Omega\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

若将 F_2 换成 $-F_1$，F_1 换成 F_2，则对 $\vec{\boldsymbol{F}}=(F_2,\ -F_1)^{\mathrm{T}}$ 有

$$\oint_{\partial\Omega}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}=\oint_{\partial\Omega+}F_1\,\mathrm{d}x+F_2\,\mathrm{d}y=\iint_\Omega\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

重要定理 11.5.8. 复连通平面向量场的 Green 公式

如果 $\mathbb{R}^2$ 上的闭区域 Ω 是由有限条分段光滑的曲线围成的，假设 $P,\ Q: D \to \mathbb{R}$ 是连续的函数并且具有连续的偏导数，那么

$$\int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{11.7}$$

其中 ∂D 是 D 的边界的正向按照「左侧」原则定义：当一个人沿着 ∂D 正向前行时，区域 D 总是在这个人的左手边。

例题 11.5.9. 计算 $\displaystyle\int_{L_1^+}(1+y\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x + (x+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}y$，其中 L_1 沿 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的上半周由 $A(a,\ 0)$ 到 $B(-a,\ 0)$。

解. 设 $L^+ = L_1^+ \cup \overrightarrow{BA}$，并且将 L 所围成的区域记作 Ω。则由 Green 公式可知

$$\begin{aligned}\oint_{L^+}(1+y\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x + (x+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}y &= \iint_\Omega\left(-\frac{\partial(1+y\mathrm{e}^x)}{\partial y} + \frac{\partial(x+\mathrm{e}^x)}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_\Omega(-\mathrm{e}^x+1+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}ab\end{aligned}$$

另一方面，我们也有

$$\int_{\overrightarrow{BA}}(1+y\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x + (x+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}y = \int_{-a}^{a}1\,\mathrm{d}x = 2a$$

由此可得

$$\int_{L_1^+}(1+y\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x+(x+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}y = \oint_{L^+}(1+y\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x+(x+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}y - \int_{\overrightarrow{BA}}(1+y\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x+(x+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}ab-2a$$ Ⓢ

例题 11.5.10. 计算 $\displaystyle\int_L \frac{(x+y)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中 L 是：$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$，逆时针方向。

解. 假设曲线 $L: x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 所围的区域为 Ω，那么原点为 Ω 的内点，但被积函数及 $P,\ Q$ 在原点不连续，不能在 Ω 上使用 Green 公式。但是，存在 $\delta>0$ 使得 Ω 包含 $L_\delta: x^2+y^2=\delta^2$，可令 Ω_δ 是以 $L\cup L_\delta$ 为边界的区域，其中 L 沿逆时针方向，而 L_δ 沿顺时针方向。

则由 Green 公式可知

$$\begin{aligned}\oint_{L\cup L_\delta}\frac{(x+y)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} &= \iint_{\Omega_\delta}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x+y}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{x-y}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_{\Omega_\delta}\left(\frac{(x^2+y^2)-(x+y)(2x)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-(x^2+y^2)-(x-y)(2y)}{(x^2+y^2)^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_{\Omega_\delta}\left(\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\oint_L \frac{(x+y)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} &= -\oint_{L_\delta} \frac{(x+y)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} \\
&= -\left(-\int_0^{2\pi} \frac{(\delta\cos\varphi+\delta\sin\varphi)\,\mathrm{d}(\delta\sin\varphi)}{\delta^2} + \frac{(\delta\cos\varphi-\delta\sin\varphi)\,\mathrm{d}(\delta\cos\varphi)}{\delta^2}\right) \\
&= \int_0^{2\pi} ((\cos\varphi+\sin\varphi)\cos\varphi-(\cos\varphi-\sin\varphi)\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi
\end{aligned}$$

Ⓢ

例 11.5.10 中，实际上不论 L 取何包围原点的闭合曲线，都有 $\displaystyle\int_L \frac{(x+y)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = 2\pi$。

11.5.4 第二类曲面积分

设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 为连通的光滑曲面，其参数方程为 $\vec{\boldsymbol{r}}=(x,\ y,\ z)$，$\begin{cases} x=x(u,\ v), \\ y=y(u,\ v), \\ z=z(u,\ v), \end{cases}$ $(u,\ v)\in D\subset\mathbb{R}^2$，其中 $x(u,\ v)$，$y(u,\ v)$，$z(u,\ v)$ 连续可微，则曲面法向量

$$\vec{\boldsymbol{n}}_\pm = \pm\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \dfrac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)} \\ \dfrac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)} \\ \dfrac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)} \end{pmatrix}$$

$\forall P\in S$，$\vec{\boldsymbol{n}}_+(P)$，$\vec{\boldsymbol{n}}_-(P)$ 在该点处给出曲面 S 的「两个」侧面。

定义 11.10. 固定 $P_0\in S$ 并在该点处取定单位法方向 $\vec{\boldsymbol{n}}(P_0)$（如 $\vec{\boldsymbol{n}}_+^0(P_0)$）为正方向。如果在任意点 $P\in S$ 处可确定单位法方向 $\vec{\boldsymbol{n}}^0(P)$ 使得 $\vec{\boldsymbol{n}}^0$ 在连接 P_0 的任意的光滑曲线上连续，则称 S 为**可定向曲面**，否则称为**不可定向曲面**。

定理 11.5.11. 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 为连通的光滑曲面，则 S 为可定向曲面当且仅当按上面定义取得的法向量 $\vec{\boldsymbol{n}}$ 永不为零向量。此时曲面 S 只有两个定向，分别为 $\vec{\boldsymbol{n}}_+$ 和 $\vec{\boldsymbol{n}}_-$。

定义 11.11. 假设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 为连通的可定向光滑曲面，在 S 上给定一个**定向**并且将相应的单位法向量记作 $\vec{\boldsymbol{n}}_S^0$，此时我们将 S 称为**定向曲面**。

重要定义 11.12. 第二类曲面积分

假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为开集，$S\subset\Omega$ 为可定向曲面（正侧为 S^+），而 $\vec{\boldsymbol{F}}=(P,\ Q,\ R):\Omega\to\mathbb{R}^3$ 为函数。将 S 分成 k 小块：$S_1,\ \cdots,\ S_k$。在 S_j 上取点 X_j，并令**有向面积** $\vec{\boldsymbol{S}}_j=\vec{\boldsymbol{n}}_S^0(X_j)|S_j|$。记 d 为所有 S_j 的直径当中的最大者。定义（若极限存在）

$$\iint_{S^+}\vec{\boldsymbol{F}}(x,\ y,\ z)\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}=\lim_{d\to0}\sum_{j=1}^{k}\vec{\boldsymbol{F}}(X_j)\cdot\vec{\boldsymbol{S}}_j \tag{11.8}$$

称为 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 在定向曲面 S^+ 上的**第二类曲面积分**。

上述极限存在，意味着 $\exists a\in\mathbb{R}$，使得 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 使得

$$\text{当 } d<\delta \text{ 时，均有 }\left|\sum_{j=1}^{k}\vec{\boldsymbol{F}}(X_j)\cdot\vec{\boldsymbol{S}}_j-a\right|<\varepsilon$$

此时将 a 记作 $\iint_{S^+}\vec{\boldsymbol{F}}(x,\ y,\ z)\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}$。若 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 为分片连续，则 $\iint_{S^+}\vec{\boldsymbol{F}}(x,\ y,\ z)\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}$ 存在。

若 S 为封闭曲面，常将外侧取为正侧，并且将第二类曲面积分记作 $\oiint_{S^+}\vec{\boldsymbol{F}}(x,\ y,\ z)\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}$。

A) 第二类曲面积分的计算 由定义可知

$$\iint_{S^+}\vec{\boldsymbol{F}}(x,\ y,\ z)\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}=\lim_{d\to0}\sum_{j=1}^{k}\vec{\boldsymbol{F}}(X_j)\cdot\vec{\boldsymbol{S}}_j=\lim_{d\to0}\sum_{j=1}^{k}\Big(\vec{\boldsymbol{F}}(X_j)\cdot\vec{\boldsymbol{n}}_S^0(X_j)\Big)|S_j|=\iint_{S}(\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}_S^0)(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}\sigma$$

也即我们有

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}=\vec{\boldsymbol{n}}_S^0(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}\sigma \tag{11.9}$$

若记 $\vec{\boldsymbol{n}}_S^0=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$，那么这里的 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 就是该向量和 x 轴，y 轴，z 轴正向的夹角，则

$$\begin{aligned}\iint_{S^+}\vec{\boldsymbol{F}}(x,\ y,\ z)\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}&=\iint_S\left(\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}_S^0\right)(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}\sigma\\&=\iint_S(P(x,\ y,\ z)\cos\alpha+Q(x,\ y,\ z)\cos\beta+R(x,\ y,\ z)\cos\gamma)\,\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

现定义

$$\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\cos\alpha\,\mathrm{d}\sigma,\qquad \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\cos\beta\,\mathrm{d}\sigma,\qquad \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma$$

则我们有

$$\iint_{S^+}\vec{\boldsymbol{F}}(x,\ y,\ z)\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}=\iint_{S^+}(P(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$$

设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 为光滑曲面，其参数方程为 $\begin{cases}x=x(u,\ v),\\y=y(u,\ v),\\z=z(u,\ v),\end{cases}$ $(u,\ v)\in D\subset\mathbb{R}^2$，其中 D 为 Jordan 可测，$x,\ y,\ z$ 为连续可微，且

$$\vec{\boldsymbol{n}}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u}\\\dfrac{\partial y}{\partial u}\\\dfrac{\partial z}{\partial u}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial v}\\\dfrac{\partial y}{\partial v}\\\dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)}\\\dfrac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)}\\\dfrac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\end{pmatrix}\neq\vec{\boldsymbol{0}}$$

$\forall (u,\ v) \in D$，我们记 $\vec{\boldsymbol{r}}(u,\ v) = \begin{cases} x(u,\ v), \\ y(u,\ v), \\ z(u,\ v), \end{cases}$ 则 $\vec{\boldsymbol{n}}(u,\ v) = \vec{\boldsymbol{r}}'_u(u,\ v) \times \vec{\boldsymbol{r}}'_v(u,\ v)$，并且

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \|\vec{\boldsymbol{n}}(u,\ v)\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{11.10}$$

于是 $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \vec{\boldsymbol{n}}^0_S(\vec{\boldsymbol{r}}(u,\ v))\,\mathrm{d}\sigma = \pm\vec{\boldsymbol{n}}(u,\ v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$，其中 $\pm$ 在 $\vec{\boldsymbol{n}}$ 与 S^+ 同向时取正号，反向时取负号。由此我们立刻可得

$$\begin{aligned}
\iint_{S^+} \vec{\boldsymbol{F}}(x,\ y,\ z) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} &= \pm \iint_D \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}(u,\ v)) \cdot \vec{\boldsymbol{n}}(u,\ v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \pm \iint_D \Bigg(P(x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v)) \frac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)} \\
&\qquad + Q(x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v)) \frac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)} \\
&\qquad + R(x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v)) \frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)} \Bigg)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

其中 $\pm$ 由任意一点处 $\vec{\boldsymbol{n}}$，S^+ 是否同向来定。

又由混合积 $\vec{\boldsymbol{F}} \cdot (\vec{\boldsymbol{r}}'_u \times \vec{\boldsymbol{r}}'_v)$ 的表达式可知

$$\begin{aligned}
\iint_{S^+} \vec{\boldsymbol{F}}(x,\ y,\ z) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} &= \pm \iint_D \vec{\boldsymbol{F}}(x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v)) \cdot \vec{\boldsymbol{n}}(u,\ v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \pm \iint_D \left(\vec{\boldsymbol{F}} \cdot (\vec{\boldsymbol{r}}'_u \times \vec{\boldsymbol{r}}'_v) \right)(u,\ v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \pm \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}(u,\ v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

形式上，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z &= \pm\frac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \cos\alpha\,\mathrm{d}\sigma, \\
\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x &= \pm\frac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \cos\beta\,\mathrm{d}\sigma, \\
\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y &= \pm\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

这里 $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v > 0$。所以 $\pm\dfrac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)}$ 与 $\cos\alpha$，$\pm\dfrac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)}$ 与 $\cos\beta$，$\pm\dfrac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}$ 与 $\cos\gamma$ 的符号必须分别一致。

B) Gauss 公式

重要定理 11.5.12. Gauss 公式

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为有界闭区域，其边界 $\partial\Omega$ 为分片光滑可定向曲面且以外侧为正向，而 $\vec{\boldsymbol{F}} = (P,\ Q,\ R) \in \mathscr{C}^{(1)}(\Omega)$，则

$$\oiint_{\partial\Omega^+} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{11.11}$$

注 11.2. 用微分形式表述的 Gauss 公式

因 $\oiint_{\partial\Omega^+}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}=\oiint_{\partial\Omega^+}P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，于是 Gauss 公式也可以表述成

$$\oiint_{\partial\Omega^+}P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{11.12}$$

考虑引入 **2 次微分形式**

$$\omega=P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

及其**外微分**

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega&=\mathrm{d}P\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\mathrm{d}Q\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}R\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\&=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\\&\quad+\left(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\&=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\end{aligned}$$

则 Gauss 公式也可表述成

$$\oiint_{\partial\Omega^+}\omega=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}\omega \tag{11.13}$$

C) Stokes 公式 给定空间的一张有向曲面 S，带有边界 ∂S。若曲面的方向与边界曲线的方向满足：当你沿着边界曲线方向走的时候，你的头指向曲面的方向，而且与你临近的曲面在你的左侧；或者满足右手螺旋法则：右手握着该曲面，大拇指指向曲面的正向，其余四个指头就指向边界曲线的正向；则称曲面及其边界的定向**协调**。

重要定理 11.5.13. Stokes 公式

假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为非空开集，$S\subset\Omega$ 为分片光滑可定向有界曲面，其边界 ∂S 为分段光滑闭曲线并且 S^+ 与 ∂S^+ 的定向协调，$\vec{\boldsymbol{F}}=(P,\ Q,\ R)\in\mathscr{C}^{(1)}(\Omega)$，则

$$\oint_{\partial S^+}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}=\oint_{\partial S^+}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\iint_{S^+}(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\vec{\boldsymbol{F}})\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} \tag{11.14}$$

其中 $\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\vec{\boldsymbol{F}}$ 被称为向量场 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 的旋度。

注 11.3. 散度与旋度

利用 Nabla 算子 $\vec{\boldsymbol{\nabla}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，可以定义

定义 11.13. 向量场 $\vec{\boldsymbol{F}} = \begin{pmatrix} P & Q & R \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 的**散度**为

$$\operatorname{div} \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{11.15}$$

定义 11.14. 向量场 $\vec{\boldsymbol{F}} = \begin{pmatrix} P & Q & R \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 的**旋度**为

$$\operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{F}} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{11.16}$$

例题 11.5.14. 求 $\displaystyle\oint_{L^+} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$，其中曲线 L 为球面 $S: x^2+y^2+z^2=a^2$ 在第一卦限中与坐标平面相交的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CA}$ 连接而成的闭曲线。

解. 记球面 S 的第一卦限部分为 S'，定义其正向背离原点，则 $L^+ = \partial S'^+$。由 Stokes 公式可知

$$\oint_{L^+} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{a^2}\oint_{L^+} x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z = \frac{1}{a^2}\iint_{S'^+} \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times (x,\ y,\ z)^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = 0$$ Ⓢ

例题 11.5.15. 计算 $\displaystyle\oint_{L^+} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，

（1）其中 L 是不经过也不围绕 z 轴的闭曲线；

（2）其中 L 是围绕 z 轴一圈的闭曲线，从 z 的正向向下看，曲线 L 的正向为逆时针方向。

解.（1）由于闭曲线 L 不经过也不围绕 z 轴，因此存在以 L 为边界且与 z 不相交的曲面 S，取 S 的正向使之与 L^+ 满足右手螺旋法则，则

$$\oint_{L^+} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \iint_{S^+} \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \left(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2},\ 0\right)^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = 0$$

（2）以 L^+（逆时针）为准线、z 轴为母线作一个柱面，记该柱面与 xy 平面的交线为 L_1^+（逆时针），该柱面的侧面为 S^+，其正向向外，则知 $\partial S^+ = L^- + L_1^+$，由 Stokes 公式可知

$$\oint_{L^- + L_1^+} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \iint_{S^+} \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \left(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2},\ 0\right)^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = 0$$

即有 $\displaystyle\oint_{L^+} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \oint_{L_1^+} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$。设 L_1 在 xy 平面所围区域为 D，取 $\delta > 0$ 使得 $B((0,\ 0);\delta) \subset D$，令 $L_2 = \partial B((0,\ 0);\delta)$，则由 Green 公式可得

$$\oint_{L_1^+ + L_2^-} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \iint_{D \setminus B((0,\ 0);\delta)} \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

于是

$$\oint_{L+}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_{L_1^+}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_{L_2^+}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=2\pi$$ Ⓢ

11.6 场论

11.6.1 平面上第二类曲线积分与路径的无关性

重要定理 11.6.1. 平面上第二类曲线积分仅依赖始末点的充要条件

假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 为非空开集，$\vec{\boldsymbol{F}}=(F_1,\ F_2)^{\mathrm{T}}$ 在 Ω 上连续可导，而 $A,\ B\in\Omega$ 为两个固定点，$L\subset\Omega$ 为连接 $A,\ B$ 的分段光滑曲线。那么，$\displaystyle\int_{L(\widehat{AB})}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}$ 仅依赖 $A,\ B$ 而与路径 L 无关，**当且仅当**对于 Ω 中过 $A,\ B$ 的任意分段光滑闭曲线 Γ，均有 $\displaystyle\oint_{\Gamma+}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}=0$。

证明. 假设 $L_1,\ L_2\subset\Omega$ 为连接 $A,\ B$ 的两条分段光滑的曲线，从 A 出发经 L_1 到 B 后，再沿 L_2 回到 A 可得到过 $A,\ B$ 的分段光滑的闭曲线 Γ；而由过 $A,\ B$ 的任意分段光滑闭曲线 Γ，也可以切分得到连接 $A,\ B$ 的分段光滑曲线 $L_1,\ L_2$。此时

$$\oint_{\Gamma+}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}=\int_{L_1(A)}^{(B)}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}-\int_{L_2(A)}^{(B)}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}$$

则 $\displaystyle\oint_{\Gamma+}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}=0\Longleftrightarrow\int_{L_1(\widehat{AB})}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}=\int_{L_2(\widehat{AB})}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}$，因此所证结论成立。 □

例题 11.6.2. 曲线积分 $\displaystyle\int_{L(\widehat{AB})}\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ 在复连通域 $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\bar{B}((0,\ 0);1)$ 上是否与路径无关？若是，求其从 $A(2,\ 0)$ 到点 $B(0,\ 3)$ 的积分值。

解. 设 Γ 为 Ω 中过 $A,\ B$ 的分段光滑闭曲线且参数方程为 $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[a,\ b]$. 则

$$\oint_{\Gamma+}\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}=\int_a^b\frac{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)}{\sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2-1}}\,\mathrm{d}t=\left(\sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2-1}\right)\Big|_a^b=0$$

因此题中的曲线积分在 Ω 上与路径无关。

特别地，若 $A=(2,\ 0)$，$B=(0,\ 3)$，并设 $L=\overrightarrow{AB}$，则其方程为 $y=3-\dfrac{3}{2}x\ (0\le x\le 2)$，于是

$$\int_{(AB)}\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}=\int_{L(\widehat{AB})}\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}=-\int_0^2\frac{x-\frac{3}{2}(3-\frac{3}{2}x)}{\sqrt{x^2+(3-\frac{3}{2}x)^2-1}}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\sqrt{x^2+\left(3-\frac{3}{2}x\right)^2-1}\,\Bigg|_0^2=2\sqrt{2}-\sqrt{3}$$ Ⓢ

重要定理 11.6.3. 平面单连通开区域上第二类曲线积分仅依赖始末点的充要条件

假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为**单连通**开区域，而函数 $\vec{F} = (F_1,\ F_2)^{\mathrm{T}}$ 在 Ω 上连续可导，则下列结论等价：

（1）$\forall (x,\ y) \in \Omega$，均有 $\dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,\ y) = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,\ y)$；

（2）$\forall A,\ B \in \Omega$，$\displaystyle\int_{L(\widehat{AB})} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ 仅与 $A,\ B$ 有关，而与 Ω 中连接 $A,\ B$ 的分段光滑曲线 L 无关；

（3）存在函数 $U : \Omega \to \mathbb{R}$，使得 $\forall (x,\ y) \in \Omega$，$\mathrm{d}U(x,\ y) = F_1(x,\ y)\,\mathrm{d}x + F_2(x,\ y)\,\mathrm{d}y$。

证明. **（1）$\Rightarrow$（2）** 对于 Ω 中过 $A,\ B$ 的分段光滑闭曲线 L，设其所围区域为 Ω_1，由 Green 公式知

$$\oint_{L+} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_{L+} F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y = \iint_{\Omega_1} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

进而由前面定理 11.6.1 可知（2）成立。

（2）$\Rightarrow$（3） 固定 $A \in \Omega$，$\forall B = (x_0,\ y_0) \in \Omega$，构造 $U(x_0,\ y_0) = \displaystyle\int_{L(AB)} F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y$，下面证明 $\mathrm{d}U = F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y$。

给 B 加上一个增量 $(h,\ k)$，当 $(h,\ k) \to (0,\ 0)$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
U(x_0 + h,\ y_0 + k) - U(x_0,\ y_0) &= \int_{(A)}^{(x_0+h,\ y_0+k)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} - \int_{(A)}^{(x_0,\ y_0)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{(x_0,\ y_0)}^{(x_0+h,\ y_0+k)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \\
&= \int_{(x_0,\ y_0)}^{(x_0+h,\ y_0)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \int_{(x_0+h,\ y_0)}^{(x_0+h,\ y_0+k)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \\
&= \int_{x_0}^{x_0+h} F_1(x,\ y_0)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y_0+k} F_2(x_0 + h,\ y)\,\mathrm{d}y \\
&= F_1(x_0 + \theta_1 h,\ y_0)h + F_2(x_0 + h,\ y_0 + \theta_2 k)k\ \big(\theta_1,\ \theta_2 \in (0,\ 1)\big) \\
&= F_1(x_0,\ y_0)h + F_2(x_0,\ y_0)k + o(1)h + o(1)k \\
&= F_1(x_0,\ y_0)h + F_2(x_0,\ y_0)k + o(1)\sqrt{h^2 + k^2}
\end{aligned}$$

即 $\mathrm{d}U(x_0,\ y_0) = F_1(x_0,\ y_0)\,\mathrm{d}x + F_2(x_0,\ y_0)\,\mathrm{d}y$，（3）成立。

（3）$\Rightarrow$（1） 由于 $\mathrm{d}U = F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y$，$F_1 = \dfrac{\partial U}{\partial x}$，$F_2 = \dfrac{\partial U}{\partial y}$，于是 $\dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$。又 $F_1,\ F_2$ 连续可导，因此 $\dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$，$\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ 均连续，即 $\dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$，也即 $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$，故（1）成立。 □

这个定理是说，单连通区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上的微分形式 $F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y$ 具有原函数，当且仅当 $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$。此外，显然若 U 为 $F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y$ 的一个原函数，那么 $U + C$ 也是上述微分形式的原函数，其中 C 为任意的常数。

定理 11.6.4. 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为单连通开区域，而函数 $\vec{F} = (F_1,\ F_2)^{\mathrm{T}}$ 在 Ω 上连续且使得 $F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y$ 在 Ω 上有原函数 U，则 $\forall A = (x_1,\ y_1)$，$B = (x_2,\ y_2) \in \Omega$，

$$\int_{L(AB)} F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y = U(x_2,\ y_2) - U(x_1,\ y_1) = U(B) - U(A) = U\Big|_{(x_1,\ y_1)}^{(x_2,\ y_2)}$$

例题 11.6.5. 求解 $\left(\ln y - \dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x + \left(\dfrac{x}{y} - \ln x\right)\mathrm{d}y = 0$。

证明. 注意到

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln y-\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}-\ln x\right)=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$$

故原方程为全微分方程，从而该方程的解满足

$$\begin{aligned}C&=\int_{(1,\ 1)}^{(x,\ y)}\left(\ln v-\frac{v}{u}\right)\mathrm{d}u+\left(\frac{u}{v}-\ln u\right)\mathrm{d}v\\&=\int_{(1,\ 1)}^{(x,\ 1)}\left(\ln v-\frac{v}{u}\right)\mathrm{d}u+\left(\frac{u}{v}-\ln u\right)\mathrm{d}v+\int_{(x,\ 1)}^{(x,\ y)}\left(\ln v-\frac{v}{u}\right)\mathrm{d}u+\left(\frac{u}{v}-\ln u\right)\mathrm{d}v\\&=-\int_1^x\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u+\int_1^y\left(\frac{x}{v}-\ln x\right)\mathrm{d}v=x\ln y-y\ln x\end{aligned}$$

其中 $C\in\mathbb{R}$ 为任意常数。 □

11.6.2 有势场和势函数

重要定义 11.15. 有势场、势函数

设有定义在区域 $D\subset\mathbb{R}^3$ 上的向量场 $\vec{\boldsymbol{F}}=(P,\ Q,\ R)$。如果存在 D 上的数量场 ϕ，满足 $\forall\vec{\boldsymbol{p}}=(x,\ y,\ z)\in D$, $\nabla\phi(p)=\operatorname{grad}\phi(p)=\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{p}})$，那么就称 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 是**有势场**，ϕ 成为 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 的一个**势函数**。

等价地，势函数满足 $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=P$, $\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=Q$, $\dfrac{\partial\phi}{\partial z}=R$。

重要定理 11.6.6. 有势场保守无旋

设有定义在区域 $D\subset\mathbb{R}^3$ 上的向量场 $\vec{\boldsymbol{F}}=(P,\ Q,\ R)$。以下三个结论等价：

（1）$\vec{\boldsymbol{F}}$ 是有势场；

（2）$\vec{\boldsymbol{F}}$ 是无旋场；

定义 11.16. 如果 $\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{F}}=\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\vec{\boldsymbol{F}}=\left(\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}\quad\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}\quad\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}=\vec{\boldsymbol{0}}$ 在 D 上处处成立，则称 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 为 D 上的一个**无旋场**。

（3）$\vec{\boldsymbol{F}}$ 是保守场。

定义 11.17. 如果对含于 D 中的任何一条封闭曲线 Γ，都有 $\displaystyle\int_\Gamma\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}=0$，则称 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 为 D 上的一个**保守场**。

证明. **(1) ⇒ (2)** 假设 $\vec{\boldsymbol{F}}=(P,\ Q,\ R)$ 是有势场，ϕ 是 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 的一个势函数，即知 $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=P$, $\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=Q$, $\dfrac{\partial\phi}{\partial z}=R$，于是

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\qquad\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\qquad\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

即可直接计算得

$$\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{F}}=\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\vec{\boldsymbol{F}}=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\vec{\boldsymbol{0}}$$

(2) ⇒ (3) 在 D 中任取一条封闭曲线 Γ，并且在 D 内作一个以 Γ 为边界的曲面 Σ，由 Stokes 公式就有

$$\int_{\Gamma}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}=\int_{\Sigma}\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}=0$$

从而 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 是 D 上的保守场。

(3) ⇒ (1) $\vec{\boldsymbol{F}}$ 的曲线积分与路径无关，即若 Γ_1，Γ_2 是两条有向曲线，它们都以 A 为起点，B 为终点. 则 $\displaystyle\int_{\Gamma_1}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}=\int_{\Gamma_2}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}$。固定 $A=(a,\ b,\ c)$，而 $B=(x,\ y,\ z)$ 是 D 中的任意一（变化）点，定义函数

$$\phi(x,\ y,\ z)=\int_A^B\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}=\int_{(a,\ b,\ c)}^{(x,\ y,\ z)}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}$$

取 h 使得 $(x+h,\ y,\ z)$ 仍然在 D 内，令 $B'=(x+h,\ y,\ z)$，则 $\displaystyle\phi(x+h,\ y,\ z)=\int_A^{B'}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}$，于是有积分中值定理

$$\phi(x+h,\ y,\ z)-\phi(x,\ y,\ z)=\int_B^{B'}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}=\int_x^{x+h}P(t,\ y,\ z)\,\mathrm{d}t\xlongequal{\exists x^*\in(x,\ x+h)}hP(x^*,\ y,\ z)$$

故 $\dfrac{\partial\phi(x,\ y,\ z)}{\partial x}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\phi(x+h,\ y,\ z)-\phi(x,\ y,\ z)}{h}=P(x,\ y,\ z)$，类似有 $\dfrac{\partial\phi(x,\ y,\ z)}{\partial y}=Q(x,\ y,\ z)$，$\dfrac{\partial\phi(x,\ y,\ z)}{\partial z}=R(x,\ y,\ z)$，故 ϕ 是 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 的势函数，即 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 是有势场。 □

11.7 含参积分

11.7.1 运算次序可交换性

定理 11.7.1. 如果 $f:[a,\ b]\times[c,\ d]\to\mathbb{R}$ 为连续函数，则 $\forall(x_0,\ y_0)\in[a,\ b]\times[c,\ d]$，均有

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,\ y)=f(x_0,\ y_0)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,\ y)\tag{11.17}$$

定义 11.18. 含参变量积分 假设 $f:[a,\ b]\times[c,\ d]\to\mathbb{R}$ 为函数，如果 $\forall y\in[c,\ d]$，积分 $I(y)=\displaystyle\int_a^b f(x,\ y)\,\mathrm{d}x$ 均有定义，则我们将之称为（以 y 为参变量的）**含参变量积分**。

重要定理 11.7.2. 极限与积分次序可交换性

如果 $f:[a,\ b]\times[c,\ d]\to\mathbb{R}$ 为连续函数，则 $I(y)=\displaystyle\int_a^b f(x,\ y)\,\mathrm{d}x:[c,\ d]\to\mathbb{R}$ 也为连续函数，即有

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,\ y)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{y\to y_0}f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\tag{11.18}$$

重要定理 11.7.3. 求导与积分次序可交换性

如果 $f:[a,\ b]\times[c,\ d]\to\mathbb{R}$ 为连续函数使得偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 $[a,\ b]\times[c,\ d]$ 上存在且连续，则 $I:[c,\ d]\to\mathbb{R}$ 连续可导且

$$I'(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x,\ y)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,\ y)\,\mathrm{d}x \tag{11.19}$$

重要定理 11.7.4. 变限积分

假设 $f:[a,\ b]\times[c,\ d]\to\mathbb{R}$ 为连续函数使得偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 $[a,\ b]\times[c,\ d]$ 上存在且连续，而 $\alpha,\ \beta:[c,\ d]\to[a,\ b]$ 可导。$\forall y\in[c,\ d]$，定义 $J(y)=\displaystyle\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f(x,\ y)\,\mathrm{d}x$，则 $J:[c,\ d]\to\mathbb{R}$ 为可导函数且

$$J'(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,\ y)\,\mathrm{d}x+f(\beta(y),\ y)\beta'(y)-f(\alpha(y),\ y)\alpha'(y) \tag{11.20}$$

重要定理 11.7.5. 积分与积分次序可交换性

若 $f:[a,\ b]\times[c,\ d]\to\mathbb{R}$ 连续，则

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,\ y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \tag{11.21}$$

证明. $\forall x\in[a,\ b]$ 以及 $\forall t\in[c,\ d]$，定义

$$F(x,\ t)=\int_c^t f(x,\ y)\,\mathrm{d}y,\qquad g(t)=\int_a^b F(x,\ t)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_c^t f(x,\ y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

则 $F:[a,\ b]\times[c,\ d]\to\mathbb{R}$ 连续且 $\dfrac{\partial F}{\partial t}(x,\ t)=f(x,\ t)$，于是 $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ 为连续。再由求导与积分次序可交换性可知函数 g 连续可导且我们有

$$g'(t)=\int_a^b\frac{\partial F}{\partial t}(x,\ t)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x,\ t)\,\mathrm{d}x$$

由此我们立刻可得

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_c^d g'(y)\,\mathrm{d}y=g(d)-g(c)=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,\ y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \qquad \square$$

例题 11.7.6. $\forall\theta\in(-1,\ 1)$，定义 $I(\theta)=\displaystyle\int_0^\pi\ln(1+\theta\cos x)\,\mathrm{d}x$，求 $I(\theta)$。

解. 由题设条件以及求导与积分次序可交换性可知，I 为连续可导且 $\forall\theta\in(-1,\ 1)\setminus\{0\}$，均有

$$I'(\theta)=\int_0^\pi\frac{\cos x}{1+\theta\cos x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi\frac{1}{\theta}\left(1-\frac{1}{1+\theta\cos x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\theta}-\frac{1}{\theta}\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}x}{1+\theta\cos x}$$

做变量替换，有

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\theta\cos x}\xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,(2\arctan t)}{1+\theta\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int_0^{+\infty}\frac{1+t^2}{1+t^2+\theta(1-t^2)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+\theta)+(1-\theta)t^2}=\frac{2}{\sqrt{1-\theta^2}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}}t}{1+\left(\sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}}t\right)^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\theta^2}}\arctan\sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}}t\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{1-\theta^2}}$$

由此我们立刻可得

$$I'(\theta)=\frac{\pi}{\theta}-\frac{\pi}{\theta}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}=\frac{\pi}{\theta}\cdot\frac{\sqrt{1-\theta^2}-1}{\sqrt{1-\theta^2}}=\frac{-\theta\pi}{(\sqrt{1-\theta^2}+1)\sqrt{1-\theta^2}}$$

注意到 $I(0)=0$，故 $\forall\theta\in(-1,\ 1)$，我们有

$$I(\theta)=\int_0^{\theta}I'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\theta}\frac{-t\pi\,\mathrm{d}t}{(\sqrt{1-t^2}+1)\sqrt{1-t^2}}=\int_0^{\theta}\frac{\pi\,\mathrm{d}(\sqrt{1-t^2})}{\sqrt{1-t^2}+1}$$

$$=\pi\ln(\sqrt{1-t^2}+1)\Big|_0^{\theta}=\pi\ln\frac{\sqrt{1-\theta^2}+1}{2}$$

Ⓢ

例题 11.7.7. 计算 $I=\displaystyle\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x$（$a,\ b>0$）。

解法一. 由积分与积分次序可交换性可知

$$I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\int_a^b x^y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_0^1 x^y\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\left(\frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_0^1\right)\mathrm{d}y=\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{y+1}=\ln(y+1)\Big|_a^b=\ln\frac{b+1}{a+1}$$

Ⓢ

解法二. 固定 $a>0$，$\forall b>0$，定义 $I(b)=\displaystyle\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\log x}\,\mathrm{d}x$，则 $I(a)=0$ 且由求导与积分次序可交换性得

$$I'(b)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{x^b-x^a}{\log x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^b\,\mathrm{d}x=\frac{1}{b+1}$$

由此立刻可得

$$I(b)=\int_a^b I'(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{t+1}=\log\frac{b+1}{a+1}$$

Ⓢ

*11.7.2 广义含参积分

重要定义 11.19. 广义含参积分的收敛

假设 $f:[a,\ \omega)\times[c,\ d]\to\mathbb{R}$ 为**连续**函数，其中 $\omega\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$。若 $y_0\in[c,\ d]$ 使广义积分

$$\int_a^{\omega} f(x,\ y_0)\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to\omega^-}\int_a^{A} f(x,\ y_0)\,\mathrm{d}x$$

收敛，则称广义含参积分 $\int_a^{\omega} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x$ 在点 y_0 处**收敛**，否则则称之在该点**发散**。

如果广义含参变量积分 $\int_a^{\omega} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x$ 在 $y\in[c,\ d]$ 的每点均收敛，我们则称之在 $[c,\ d]$ 上**收敛**，由此得到 $[c,\ d]$ 上的函数 $I(y)=\int_a^{\omega} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x$。

广义含参变量积分 $\int_a^{\omega} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,\ d]$ 上收敛到函数 $I(y)$，当且仅当

$$\forall y\in[c,\ d],\ \forall\varepsilon>0,\ \exists M\in[a,\ \omega),\ \text{使得}\ \forall A\in[M,\ \omega),\ \left|\int_a^{A} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x-I(y)\right|<\varepsilon$$

由 Cauchy 判别准则，广义含参变量积分 $\int_a^{\omega} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,\ d]$ 上收敛，当且仅当 $\forall y\in[c,\ d]$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists M\in[a,\ \omega)$，使得 $\forall A',\ A''\in[M,\ \omega)$，

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^{A''} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x-\int_a^{A'} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

重要定义 11.20. 广义含参积分的一致收敛

若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M\in[a,\ \omega)$，使得 $\forall A\in[M,\ \omega)$，$\forall y\in[c,\ d]$，均有 $\left|\int_a^{A} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x-I(y)\right|<\varepsilon$，则我们称广义含参积分 $\int_a^{\omega} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x$ 在区间 $[c,\ d]$ 上**一致收敛**到函数 $I(y)$。

由 Cauchy 判别准则，广义含参变量积分 $\int_a^{\omega} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,\ d]$ 上一致收敛，当且仅当 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M\in[a,\ \omega)$，使得 $\forall A',\ A''\in[M,\ \omega)$，$\forall y\in[c,\ d]$，$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$。

重要定理 11.7.8. 广义含参积分的 Weierstrass 判别法

假设 $f:[a,\ \omega)\times[c,\ d]\to\mathbb{R}$ 为连续函数，而函数 $F:[a,\ \omega)\to[0,\ +\infty)$ 使得 $\forall(x,\ y)\in[a,\ \omega)\times[c,\ d]$，均有 $|f(x,\ y)|\le F(x)$。若 $\int_a^{\omega} F(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{\omega} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,\ d]$ 一致收敛。

证明. 因 $\int_a^{\omega} F(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则由 Cauchy 准则知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists M\in[a,\ \omega)$ 使得 $\forall A',\ A''\in[M,\ \omega)$，均有

$\left|\int_{A'}^{A''} F(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$。则 $\forall y \in [c,\ d]$，我们有

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_{A'}^{A''} |f(x,\ y)|\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_{A'}^{A''} F(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

从而由 Cauchy 判别准则可知所证结论成立。 □

重要定理 11.7.9. 广义含参积分的 Abel 和 Dirichlet 判别法

设 $f,\ g : [a,\ \omega) \times [c,\ d] \to \mathbb{R}$ 为函数，使得 $\forall y \in [c,\ d]$，$f(x,\ y)$，$g(x,\ y)$ 在 $x \in [a,\ \omega)$ 的任意的闭子区间上均可积。那么，$\int_a^{\omega} f(x,\ y)g(x,\ y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [c,\ d]$ 一致收敛，如果

Abel $\int_a^{\omega} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [c,\ d]$ 一致收敛，$g(x,\ y)$ 有界且关于 x 单调。

Dirichlet $\forall y \in [c,\ d]$ 以及 $\forall A \in [a,\ \omega)$，$F(A,\ y) = \int_a^A f(x,\ y)\,\mathrm{d}x$ 有界，$g(x,\ y)$ 关于 x 单调且 $\lim\limits_{x \to \omega^-} g(x,\ y) = 0$ 关于 $y \in [c,\ d]$ 一致成立。

例题 11.7.10. 求证：广义含参变量积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $t \in [c,\ +\infty)$ 一致收敛，其中 $c > 0$。

证明. $\forall (x,\ t) \in [1,\ +\infty) \times [c,\ +\infty)$，定义函数 $f(x,\ t) = \sin(tx)$，$g(x,\ t) = \frac{1}{x}$，那么 g 关于 x 单调，且 $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x,\ t) = 0$ 关于 $t \in [c,\ +\infty)$ 一致成立。又 $\forall A > 1$，$\left|\int_1^A \sin(tx)\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{t}|\cos t - \cos(At)| \leq \frac{2}{c}$，则由 Dirichlet 判别准则可知 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $t \in [c,\ +\infty)$ 一致收敛。 □

广义含参积分也具有 11.7.1 节所述性质，即有

定理 11.7.11. 广义含参积分的分析性质 设 $f : [a,\ \omega) \times [c,\ d] \to \mathbb{R}$ 为连续函数。

- **极限与积分可交换性** 若广义含参变量积分 $I(y) = \int_a^{\omega} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [c,\ d]$ 一致收敛，则 I 在 $[c,\ d]$ 上连续。
- **求导与积分可交换性** 若 $I(y) = \int_a^{\omega} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x$ 在区间 $[c,\ d]$ 上收敛，偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $[a,\ \omega) \times [c,\ d]$ 上连续并且使得广义含参积分 $\int_a^{\omega} \frac{\partial f}{\partial y}(x,\ y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [c,\ d]$ 为一致收敛，则 I 在 $[c,\ d]$ 上连续可导，且 $I'(y) = \int_a^{\omega} \frac{\partial f}{\partial y}(x,\ y)\,\mathrm{d}x$。
- **积分与积分可交换性** 若 $I(y) = \int_a^{\omega} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [c,\ d]$ 一致收敛，则 I 在 $[c,\ d]$ 上可积，且 $\int_c^d \left(\int_a^{\omega} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_a^{\omega} \left(\int_c^d f(x,\ y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$。

11.7.3 Gamma 函数和 Beta 函数

重要定义 11.21. Gamma 函数

Gamma 函数定义为 $\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$。

例题 11.7.12. 讨论 Gamma 函数的收敛域。

解. 当 $s<1$ 时，$x=0$ 是瑕点，但它又是无穷积分。把它拆成两部分，考虑

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

当 $x\to 0$ 时，$x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\to x^{s-1}$，所以第一个积分当 $s>0$ 时收敛；当 $x\to+\infty$ 时，$x^2\cdot x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\to 0$，故对充分大的 x；恒有 $x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}<\dfrac{1}{x^2}$，所以第二个积分不论 s 为何值时都收敛。因而原积分当 $s>0$ 时收敛。 Ⓢ

定理 11.7.13. Gamma 函数具有以下性质：

（1）$\Gamma\in\mathscr{C}^{(\infty)}(0,\ +\infty)$；

（2）$\forall s>0$，$\Gamma(s)>0$，且 $\Gamma(1)=1$；

（3）$\forall s>0$，$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$；

（4）$\ln\Gamma(s)$ 是 $(0,\ +\infty)$ 上的凸函数。

（1）的证明. 把 $\Gamma(s)$ 分成两部分：

$$\Gamma(s)=\int_0^1 t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

对于任意 $\beta>\alpha>0$，让 $s\in[\alpha,\ \beta]$，则当 $0<t<1$ 时，$0<t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\le t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}$，因为 $\displaystyle\int_0^1 t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ 收敛，所以 $\displaystyle\int_0^1 t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ 关于 s 在 $[\alpha,\ \beta]$ 上一致收敛，因而 $\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ 是 $[\alpha,\ \beta]$ 上的连续函数。

当 $t>1$ 时，$t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\le t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-t}$，因为 $\displaystyle\int_1^{+}\infty i^{\beta-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ 收敛，所以积分 $\displaystyle\int_1^{+}\infty t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ 关于 s 在 $[\alpha,\ \beta]$ 上一致收敛，因而 $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ 是 $[\alpha,\ \beta]$ 上的连续函数。

由 $\beta>\alpha>0$ 的任意性，即知 $\Gamma(s)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上连续。

同理，可知积分 $\int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t$ 也在 $[\alpha,\ \beta]$ 上一致收敛，则 $\Gamma'(s)$ 存在且连续。以此类推，即知 $\Gamma\in\mathscr{C}^{(\infty)}(0,\ +\infty)$。 □

重要定理 11.7.14. Bohr-Mollerup 定理

如果一个定义在 $(0,\ +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 有以下性质：

(1) $\forall x>0,\ f(x)>0$，且 $f(1)=1$；

(2) $\forall x>0,\ f(x+1)=xf(x)$；

(3) $\ln f(x)$ 是 $(0,\ +\infty)$ 上的凸函数，

那么 $f(x)=\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$。

定理 11.7.15. 对任意 $s>0$，$\Gamma(2s)=\dfrac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\dfrac{1}{2}\right)$。

定理 11.7.16. 余元公式 对任意 $p\in(0,\ 1)$，有 $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\dfrac{\pi}{\sin p\pi}$。

重要定义 11.22. Beta 函数

Beta 函数定义为 $B(p,\ q)=\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$。

例题 11.7.17. 讨论 Beta 函数的收敛域。

解. 当 $p<1$ 时，$x=0$ 是瑕点；$q<1$ 时，$x=1$ 是瑕点。为了分别考虑函数在这两点附近的情况，把积分折成两部分：

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x=\int_0^a x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x+\int_a^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$$

其中 $a\in(0,1)$ 当 $x\to0$ 时 $x^{p-1}(1-x)^{q-1}\to x^{p-1}$，故当 $p>0$ 时，第一个积分收敛。当 $x\to1$ 时，$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\to(1-x)^{q-1}$，第二个积分当 $q>0$ 时收敛。因此原积分在 $p>0,\ q>0$ 时收敛。 Ⓢ

定理 11.7.18. Beta 函数也可表示为 $B(p,\ q)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}\,\mathrm{d}x$。

重要定理 11.7.19. Gamma 函数与 Beta 函数的关系

对任意 $p,\ q>0$，

$$B(p,\ q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{11.22}$$

证明. 可证 $f(p)=\dfrac{B(p,\ q)\Gamma(p+q)}{\Gamma(q)}$ 满足定理 11.7.14 的三条性质。 □

定理 11.7.20. Beta 函数具有以下性质：

(1) $B(p,\ q)\in\mathscr{C}^{(\infty)}(0,\ +\infty)^2$；

(2) $\forall p,\ q>0,\ B(p,\ q)=B(q,\ p)$；

(3) $\forall p,\ q>0,\ B(p+1,\ q+1)=\dfrac{pq}{(p+q+1)(p+q)}B(q,\ p)$。

例题 11.7.21. 计算 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha x \sin^\beta x \,\mathrm{d}x$，其中 $\alpha,\ \beta > -1$。

解. 令 $t = \sin^2 x$，则 $\mathrm{d}t = 2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x$，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha x \sin^\beta x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^{\frac{\alpha-1}{2}} t^{\frac{\beta-1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}B\left(\frac{\beta+1}{2},\ \frac{\alpha+1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}$$

Ⓢ

此处若取 $\alpha = \beta = 0$，则立得 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$。