

采样与量化

信号的分类

		定义域（时域）	
		连续	离散
值域	连续	连续信号	离散（时间）信号
	离散		数字信号

采样的数学表示

零阶抽样保持

对信号 $x(t)$ 进行采样，采样周期为 T ，采样频率为 $f_s = \frac{1}{T}$ ，则使用的采样信号为

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

采样后的信号为

$$x_s(t) = x(t) \cdot s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$

此时的 $x_s(t)$ 仍为连续时间信号，但其可直接**转换为离散时间信号**

$$x[n] = x(nT)$$

频域上， $x(t)$ 的频谱为 $X(\Omega)$ ，则采样后的信号频谱为

$$X_s(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * \left(\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) \right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega - k\Omega_s)$$

Nyquist 采样定理

《信号与系统》课程中已知：

📖 *Thm.* Nyquist 采样定理

如果带限信号 $x(t)$ 的最高频率为 Ω_m ，即

$$X(\Omega) = 0, \quad |\Omega| > \Omega_m$$

则当采样频率 $\Omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2\Omega_m$ 时，信号 $x(t)$ 可以由其采样值 $x[n] = x(nT)$ 唯一确定。

Nyquist 采样定理是**充分**条件，对于「带限」以外的条件并没有说明。

非基带信号

对于**非基带**的带限信号，即有最低频率 Ω_L 和最高频率 Ω_U 的**带通**信号 $x(t)$ ，即使不满足 Nyquist 采样条件，也可能不发生混叠现象。

具体地，我们考虑 $(-\Omega_U, -\Omega_L)$ 频段在平移后与 (Ω_L, Ω_U) 频段不重叠的条件，即

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} N\Omega_s - \Omega_L \leq \Omega_L, \\ (N+1)\Omega_s - \Omega_U \geq \Omega_U, \end{cases} \iff \frac{2\Omega_U}{N+1} \leq \Omega_s \leq \frac{2\Omega_L}{N}$$

多采样率处理

采样率转换

整数倍降采样

对离散信号 $x[n]$ ，考虑**每 M 个值保留 1 个值**，构成新序列

$$y[n] = x[Mn]$$

称为 **M 倍抽取 (decimation)**。如果 $x[n] = x_a(nT_s)$ 是由某连续时间信号连续时间信号 $x_a(t)$ 以采样周期 T_s 采样得到的，则 $y[n]$ 可视为对 $x_a(t)$ 以采样周期 MT_s 采样得到的离散信号，即采样率降低为原来的 $\frac{1}{M}$ 。

抽取过程可以通过以下两步实现：

1. 对不需要的离散点**置零**，得到中间序列

$$x_M[n] = x[n] \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - Mm] \stackrel{\text{Poisson}}{=} x[n] \cdot \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}kn}$$

其 z 变换为

$$\begin{aligned} X_M(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x[n] \cdot \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}kn} \right) z^{-n} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(z \cdot e^{-j\frac{2\pi}{M}k} \right)^{-n} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X \left(z e^{-j\frac{2\pi}{M}k} \right) \end{aligned}$$

2. 对中间序列进行**压缩**，得到最终序列

$$y[n] = x_M[Mn]$$

其 z 变换为

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_M[Mn] z^{-n} \stackrel{n=Mm}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_M[m] \left(z \frac{1}{M} \right)^{-m} = X_M \left(z \frac{1}{M} \right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X \left(z \frac{1}{M} e^{-j\frac{2\pi}{M}k} \right) \end{aligned}$$

注意到，采样率为 $\frac{1}{T_s}$ 时满足 Nyquist 采样定理的信号，在采样率为

$\frac{1}{MT_s}$ 时可能会发生混叠现象。因此，在抽取前通常需要对信号进行**低通滤波** $X_{LP}(z) = H_{LP}(z)X(z)$ ，以抑制高频成分，防止混叠。这样，所得信号的 z 变换为

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_{LP} \left(z \frac{1}{M} e^{-j\frac{2\pi}{M}k} \right) X \left(z \frac{1}{M} e^{-j\frac{2\pi}{M}k} \right)$$

所得的**时域信号**为

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{LP}[Mn - m] \cdot x[m]$$

整数倍升采样

对离散信号 $x[n]$ ，类似地考虑以下步骤**提升采样率**：

1. 对每个离散点之间**插入 $L-1$ 个零**，得到中间序列

$$x_L[n] = \begin{cases} x \left[\frac{n}{L} \right], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

其 z 变换为

$$X_L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_L[n] z^{-n} \stackrel{n=mL}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] (z^L)^{-m} = X(z^L)$$

2. 显然引入了大量高频分量，对中间序列进行**低通滤波**，得到最终序列

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{LP}[n - m] \cdot x_L[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{LP}[n - kL] \cdot x[k]$$

其 z 变换为

$$Y(z) = H_{LP}(z) \cdot X(z^L)$$

其中 $H_{LP}(e^{j\omega})$ 的通带应为 $|\omega| \leq \frac{\pi}{L}$ ，以滤除插入零点引入的高频成分。

这称为 **L 倍理想插值 (ideal interpolation)**，完整保持了原始频谱的信息。

有理数倍采样率转换

对于任意有理数 $\alpha = \frac{L}{M}$ ，可以通过先进行 **L 倍升采样**，再进行 **M 倍降采样**来实现采样率转换。

采样率转换的高效实现

滤波与抽取/零插的交换

前述**整数倍降采样**和**整数倍升采样**都在**高数据率**下做滤波，其**计算复杂度较高**。我们希望交换低通滤波与抽取/零插的顺序，从而在**低数据率**下做滤波，降低计算复杂度。

可以证明：如果 M 倍降采样前的低通滤波器可以**写成 $H(z^M)$ 的形式**，则可以**交换低通滤波与抽取**的顺序；如果 L 倍升采样前的低通滤波器可以**写成 $H(z^L)$ 的形式**，则可以**交换低通滤波与零插**的顺序。

- 对于 M 倍降采样，

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_{LP} \left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}k} \right) X \left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}k} \right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H \left(\left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}k} \right)^M \right) X \left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}k} \right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(z e^{-j2\pi k}) X \left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}k} \right) \\ &= H(z) \cdot \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X \left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}k} \right) = H(z) \cdot X_M \left(z^{\frac{1}{M}} \right) \end{aligned}$$

即等价于抽取结果 $X_M \left(z^{\frac{1}{M}} \right)$ 经 $H(z)$ 滤波。

- 对于 L 倍升采样，

$$Y(z) = H_{LP}(z) \cdot X(z^L) = H(z^L) \cdot X(z^L) = (H(z') \cdot X(z')) \Big|_{z'=z^L}$$

即等价于 $X(z)$ 经 $H(z)$ 滤波后再进行 L 倍零插。

采样率的级联转换

当降/升采样率**变化比例较大**时，抗混叠滤波设计实现较为困难，可考虑采用**级联实现**降低计算量。

ΣΔ CIC 滤波器

积分器—梳状滤波器级联 (cascaded integrator-comb, CIC) 系统是一种常用的多采样率转换结构，适用于大倍率的升/降采样率转换。CIC 系统由多个积分器级联和多个梳状滤波器级联组成，且不需要乘法运算，计算复杂度低，非常适合硬件实现。

多相滤波器结构

单通道滤波器在多采样率处理中的计算效率较低，可采用**多相滤波器结构 (polyphase filter structure)** 提高计算效率。考虑

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \stackrel{n=kL+m}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{L-1} x[kL+m]z^{-(kL+m)} \\ &= \sum_{m=0}^{L-1} z^{-m} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kL+m](z^L)^{-k} \right) = \sum_{m=0}^{L-1} z^{-m} X_m(z^L) \end{aligned}$$

即分解为 L 相子序列的和，称为**信号的多相分解**，其中

$X_m(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kL+m]z^{-k}$ 是 $x[n]$ 的**第 m 相子序列**

$\dots, x[m], x[L+m], x[2L+m], \dots$ 的 z 变换。

类似地，**滤波器的多相分解**为

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \stackrel{n=kL+m}{=} \sum_{m=0}^{L-1} z^{-m} H_m(z^L)$$

其中 $H_m(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[kL+m]z^{-k}$ 是滤波器 $h[n]$ 的**第 m 相子滤波器**。

利用**滤波与抽取/零插的交换**原理，各相子滤波器可与抽取/零插操作交换，从而在低采样率下实现滤波，进一步降低计算复杂度。

均匀滤波器组的分解与重构

均匀 DFT 滤波器组的分解

使用多路并行的一组滤波器是实现**子带分解**，即将高速率宽带信号**分解为多路低速率窄带信号**的有效方法。

设将**基础低通滤波器 $H_0(z)$** 在频率上均匀移位 N 次，得到 N 个滤波器

$$H_k(z) = H_0 \left(z \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

每个滤波器均作为 N 倍降采样前的抗混叠滤波器，都需接受高速率信号 $X(z)$ 进行滤波，计算复杂度较高，因此考虑使用**多相滤波器结构**进行优化。

将基础低通滤波器 $H_0(z)$ 进行 **N 相分解**有

$$H_0(z) = \sum_{m=0}^{N-1} z^{-m} H_{0,m}(z^N)$$

则每个滤波器 $H_k(z)$ 可表示为

$$\begin{aligned} H_k(z) &= H_0 \left(z \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \right) = \sum_{m=0}^{N-1} \left(z \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \right)^{-m} H_{0,m} \left(\left(z \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \right)^N \right) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} z^{-m} e^{j\frac{2\pi}{N}km} H_{0,m}(z^N) \end{aligned}$$

其输出即

$$H_k(z)X(z) = X(z) \sum_{m=0}^{N-1} z^{-m} e^{j\frac{2\pi}{N}km} H_{0,m}(z^N)$$

注意到 $H_{0,m}(z^N)$ 结构，对输出做 **N 倍抽取**可与滤波交换，得到**第 k 路的输出**

$$\begin{aligned} Y_k(z) &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} H_k(z') X(z') \Big|_{z'=z^{\frac{1}{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}l}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X \left(z^{\frac{1}{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}l} \right) \\ &\quad \cdot \sum_{m=0}^{N-1} \left(z^{\frac{1}{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}l} \right)^{-m} e^{j\frac{2\pi}{N}km} H_{0,m} \left(\left(z^{\frac{1}{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}l} \right)^N \right) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}km} \cdot H_{0,m}(z) \cdot \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} z^{-m} e^{j\frac{2\pi}{N}lm} X \left(z^{\frac{1}{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}l} \right)}_{\substack{x[n-m] \text{ 的 } N \text{ 倍抽取} \\ \text{抽取后 } H_{0,m}(z) \text{ 滤波}}} \\ &= \underbrace{\text{DFT}(-k)}_{\text{抽取后 } H_{0,m}(z) \text{ 滤波}} \end{aligned}$$

设抽取后信号经过滤波器 $H_{0,m}(z)$ 输出的信号为 $v_m[n]$ ，其与第 k 路输出信号 $y_k[n]$ 在 **z 变换域**有关系

$$Y_k(z) = \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}km} V_m(z)$$

这是索引 m 与索引 k 之间的 DFT 关系（DFT 变换系数中 k 变为 $-k$ ），即**相 m 域到带 k 域的 DFT 关系**，与 z 无关，因此在**时域**同样有

$$y_k[n] = \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}km} v_m[n]$$

即各路输出信号可由各相子滤波器输出信号通过 DFT 变换得到，因此称为**均匀 DFT 滤波器组的分解结构**。

均匀 DFT 滤波器组的合成

多路由均匀 DFT 滤波器组分解出的**子带信号**亦可通过升采样后加和构成宽带的**重构信号**。设各路子带信号为 $x_k[n]$ ，则重构信号为

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=0}^{N-1} Y_k(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k(z^N) H_k(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k(z^N) \sum_{m=0}^{N-1} z^{-m} e^{j\frac{2\pi}{N}km} H_{0,m}(z^N) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} z^{-m} H_{0,m}(z^N) \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}km} X_k(z^N) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} z^{-m} \cdot H_{0,m}(z') \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}km} X_k(z') \Big|_{z'=z^N}}_{\substack{\text{IDFT} \\ H_{0,m}(z) \text{ 滤波}}} \\ &= \underbrace{\text{IDFT}}_{\text{IDFT}} \underbrace{H_{0,m}(z) \text{ 滤波}}_{N \text{ 倍零插}} \end{aligned}$$

为与前述 DFT 关系对应，这里认为各子带信号 $x_k[n]$ 通过**带 k 域到相 m 域的 IDFT**得到各相子滤波器输入信号。

有限字长效应

二进制表示的量化误差

浮点数

在计算机中，浮点数通常采用科学计数法表示，即一个数可以表示为

$$x = 2^c \times M$$

其中 c 称为**阶码 (exponent)**， M 称为**尾数 (mantissa)**。在二进制浮点数表示中，尾数 M 通常表示为

$$M = \overline{1.b_1b_2b_3\cdots b_t} = 1 + \sum_{i=1}^t b_i 2^{-i}$$

其中 $b_i \in \{0, 1\}$ ， t 为尾数的有效位数（不包括隐含的最高位 1）。例如，IEEE 754 单精度浮点数采用 23 位尾数和 8 位阶码表示。

浮点数表示的**动态范围较大**，**量化误差较小**。

定点数

定点数表示相当于只考虑浮点数的尾数部分，即对 $x \in [-1, 1)$ 进行量化表示。在**2-补码**表示中，定点数 x 可表示为

$$[x] = \begin{cases} |x|, & 0 \leq x < 1, \\ 2 - |x|, & -1 \leq x < 0 \end{cases} = \overline{b_0.b_1b_2b_3\cdots b_t}$$

其中 $b_i \in \{0, 1\}$ ， t 为定点数的小数位数，符号位 $b_0 = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ 。

考虑表示位数无限，则定点数 x 可**精确表示**为

$$x = -b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i 2^{-i}$$

截尾 (floor) 误差

对于有限字长 $(B+1)$ bit 的定点数表示，**截尾法**得到的量化值为

$$\hat{x}_T = -b_0 + \sum_{i=1}^B b_i 2^{-i}$$

其**量化误差**为

$$e_T = \hat{x}_T - x = - \sum_{i=B+1}^{\infty} b_i 2^{-i}$$

显然，该误差的最大值为 0，最小值为 -2^{-B} 。考虑输入的随机性，截尾误差可建模为**均匀分布**在 $[-2^{-B}, 0]$ 上的随机变量。

舍入 (round) 误差

对于有限字长 $(B+1)$ bit 的定点数表示，**舍入法**得到的量化值为

$$\hat{x}_R = -b_0 + \sum_{i=1}^B b_i 2^{-i} + b_{B+1} \cdot 2^{-B}$$

注意，二进制下的舍入为截断的第 1 位 b_{B+1} 为 1 即进 1，否则舍去。其**量化误差**为

$$e_R = \hat{x}_R - x = - \sum_{i=B+1}^{\infty} b_i 2^{-i} + b_{B+1} \cdot 2^{-B}$$

显然，该误差的最大值为 $2^{-(B+1)}$ ，最小值为 $-2^{-(B+1)}$ 。考虑输入的随机性，舍入误差可建模为**均匀分布**在 $[-2^{-(B+1)}, 2^{-(B+1)}]$ 上的随机变量。

Note 量化误差的统计特性

对于截尾和舍入两种量化方式，量化误差 e 均可建模为均匀分布的随机变量，其统计特性为：

- 均值 $m_T = \mathbb{E}[e_T] = -2^{-(B+1)}$ ， $m_R = \mathbb{E}[e_R] = 0$ ；
- 方差 $\sigma_e^2 = \frac{1}{12}(2^{-B})^2 = \frac{1}{12} \times 2^{-2B}$ ；
- 协方差 $C_e[k] = \mathbb{E}[e[n]e[n-k]] = \sigma_e^2 \delta[k]$ ，即量化误差为白噪声。

一般地，舍入法的均值为零，具有更简单的统计特性，因此在实际系统中更为常用。以下分析均以舍入法量化误差分析。

量化误差的统计分析

系统直接实现方式的误差分析

系统的量化误差可通过**误差传递分析**进行分析。考虑系统的直接实现，量化误差有两类来源：

- 采样量化误差**：输入信号 $x(t)$ 经过采样和量化后得到离散信号 $x[n]$ 引入的量化误差。
- 计算量化误差**：系统在处理离散信号 $x[n]$ 的过程中，由于有限字长引入的量化误差。

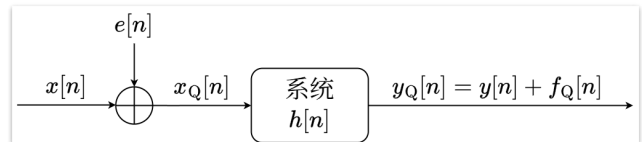
采样量化误差

设采样位数为 $1+B$ ，采样量化误差 $e[n]$ 的**统计特性**为：

- 均值 $\mathbb{E}[e[n]] = 0$ ；
- 功率 $\sigma_Q^2 = \frac{1}{12}(2^{-B})^2 = \frac{1}{12} \times 2^{-2B}$ ，功率谱密度为 $S_Q(\omega) = \sigma_Q^2$ 。

设系统的冲激响应为 $h[n]$ ，则采样量化误差**通过系统后的输出误差**为

$$f_Q[n] = e[n] * b[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e[m] \cdot b[n-m]$$



其有统计特性：

- 均值 $\mathbb{E}[f_Q[n]] = 0$ ；
- 功率由 Parseval 定理得 $\sigma_{Q,\text{out}}^2 = \sigma_Q^2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b[n]|^2$ ；
- 功率谱密度由 Wiener-Khinchin 定理得 $S_{Q,\text{out}}(\omega) = \sigma_Q^2 \cdot |H(e^{j\omega})|^2$ 。

计算量化误差

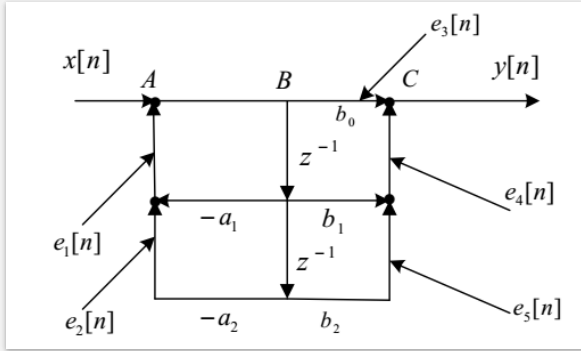
我们考虑一个**乘法器** $x[n] \xrightarrow{\alpha} \alpha x[n]$ ，需要对乘法结果**尾部舍入**，将引入量化误差 $e[n]$ ，其具有统计特性：

- 均值 $\mathbb{E}[e[n]] = 0$ ；
- 功率 $\sigma_e^2 = \frac{1}{12}(2^{-B})^2 = \frac{1}{12} \times 2^{-2B}$ ，功率谱密度为 $S_e(\omega) = \sigma_e^2$ 。

设从乘法结果节点（噪声源）到输出的冲激响应为 $g[n]$ ，则计算量化误差**通过系统后的输出误差**为 $f[n] = e[n] * g[n]$ ，即**输出误差功率**为

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_f(\omega) d\omega = \sigma_e^2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g[n]|^2$$

考虑一个如图所示的 IIR 滤波器：



其中共有 5 个乘法器，产生的计算量化误差分别为 $e_1[n], e_2[n], \dots, e_5[n]$ 。设乘法器输出均为 B 位，则每个量化误差的功率均为 σ_e^2 ，各量化误差通过系统到输出的冲激响应分别为

$$\begin{aligned} e_1[n], e_2[n] &\rightarrow f[n] = (e_1[n] + e_2[n]) * b[n], \\ e_3[n], e_4[n], e_5[n] &\rightarrow f[n] = (e_3[n] + e_4[n] + e_5[n]) \end{aligned}$$

因此，输出误差功率为

$$\sigma_f^2 = \frac{2^{-2B}}{12} \left(2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b[n]|^2 + 3 \right)$$

进一步地，对于直接 II 型实现的 IIR 滤波器

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}, \text{ 其输出误差功率为}$$

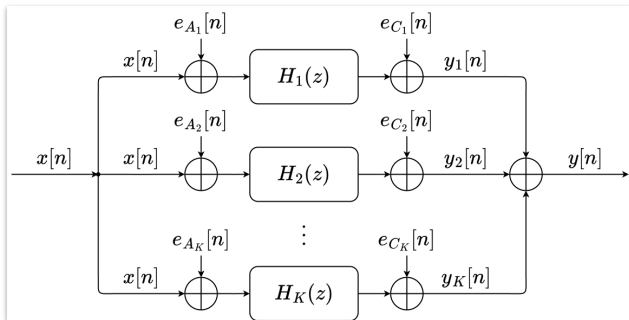
$$\sigma_f^2 = \frac{2^{-2B}}{12} \left(N \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b[n]|^2 + (M+1) \right)$$

特别地，复数乘法由 4 次实数乘法和若干加法组成，因此其计算量化误差功率为

$$\sigma_B^2 = 4\sigma_e^2 = \frac{4}{12} \times 2^{-2B} = \frac{1}{3} \times 2^{-2B}$$

量化误差的传播

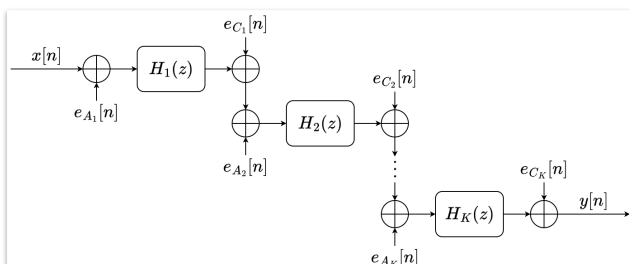
并联结构



设系统由 K 个子系统并联组成，每个子系统的冲激响应为 $b_k[n]$ ，子系统输入、输出端分别有误差源 $e_{A_k}[n]$ 和 $e_{C_k}[n]$ ，则整个系统的误差功率为

$$\sigma_f^2 = \sum_{k=1}^K \left(\sigma_{A_k}^2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_k[n]|^2 + \sigma_{C_k}^2 \right)$$

级联结构



设系统由 K 个子系统级联组成，每个子系统的冲激响应为 $b_k[n]$ ，子系统输入、输出端分别有误差源 $e_{A_k}[n]$ 和 $e_{C_k}[n]$ ，则整个系统的误差功率为

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= \frac{\sigma_{A_1}^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=1}^K |H_k(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &+ \sum_{k=1}^{K-1} \left(\sigma_{C_k}^2 + \sigma_{A_{k+1}}^2 \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{j=k+1}^K |H_j(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &+ \sigma_{C_K}^2 \end{aligned}$$

乘加结构

乘加结构 (MAC, multiply-accumulate) 是数字信号处理系统中常见的基本运算单元，通常用于实现滤波器和傅里叶变换等操作，其基本功能是对输入信号进行乘法运算后累加。

系统系数的量化误差

在有限字长系统中，系统系数的量化误差会影响零极点的位置，其中极点位置的变化会显著影响系统的稳定性。考虑系统函数

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

对每个系数，均需引入量化误差，即

$$\hat{H}(z) = \frac{\sum_{r=0}^M \hat{b}_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N \hat{a}_k z^{-k}}, \quad \begin{cases} \hat{a}_k = Q\{a_k\} = a_k + \Delta a_k, \\ \hat{b}_r = Q\{b_r\} = b_r + \Delta b_r \end{cases}$$

其中 $Q\{\cdot\}$ 表示量化操作， $\Delta a_k, \Delta b_r$ 分别为系数 a_k, b_r 的量化误差。

我们考虑某一个 Δa_k 对系统极点位置的影响。设系统的极点为 $\{p_j\}$ ，其全微分为

$$\Delta p_j = \sum_{k=1}^N \frac{\partial p_j}{\partial a_k} \Delta a_k = \sum_{k=1}^N \frac{\frac{\partial A(z)}{\partial a_k}}{\frac{\partial A(z)}{\partial p_j}} \bigg|_{z=p_j} \Delta a_k$$

假设只有一阶极点，则

$$A(z) = 1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} = \prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})$$

因此有

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(z)}{\partial a_k} \bigg|_{z=p_j} &= p_j^{-k} \\ \frac{\partial A(z)}{\partial p_j} \bigg|_{z=p_j} &= -p_j^{-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N (1 - p_k p_j^{-1}) = -p_j^{-N} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N (p_j - p_k) \end{aligned}$$

从而得到极点位置对系数量化误差的敏感度

$$\frac{\partial p_j}{\partial a_k} = \frac{\frac{\partial A(z)}{\partial a_k}}{\frac{\partial A(z)}{\partial p_j}} \bigg|_{z=p_j} = -\frac{p_j^{N-k}}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N (p_j - p_l)}$$

计算溢出及其避免

在有限字长系统中，计算溢出 (overflow) 是指在算术运算过程中，结果超出了所能表示的数值范围，导致结果错误或不可预测的现象。

我们主要考虑 $[-1, 1]$ 范围的定点数表示下加法溢出的问题。考虑一个反馈系统

$$w[n] = x[n] + a \cdot w[n-1]$$

其系统函数为

$$L(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

当 $|a| < 1$ 时, 系统**稳定**, 且其单位样值响应为 $l[n] = a^n u[n]$ 。尽管系统稳定, 但在有限字长实现时, 仍可能发生溢出; 要避免 $w[n]$ 的溢出, 需满足

$$|w[n]| = \left| \sum_{m=0}^{\infty} l[m]x[n-m] \right| \leq \max |x[n]| \cdot \sum_{m=0}^{\infty} |l[m]| \leq 1$$

■ 压缩比例因子

为避免 $w[n]$ 溢出, 需

$$\max |x[n]| \leq \frac{1}{\sum_{m=0}^{\infty} |l[m]|} = \frac{1}{\|l[n]\|_1}$$

引入**压缩比例因子 (scaling factor)** β , 将输入信号 $x[n]$ 压缩 β 倍为 $\frac{x[n]}{\beta}$, 即可恒成立上述不等式, 从而避免溢出。

► 第 I 类压缩比例因子

若 $x[n]$ 是**窄带信号** $x[n] = \cos(\omega_0 n + \varphi)$, 有 $\max |x[n]| = 1$, 输出为

$$|w[n]| = \left| L(e^{j\omega_0}) \cos(\omega_0 n + \varphi + \arg L(e^{j\omega_0})) \right| \leq |L(e^{j\omega_0})| \leq 1$$

因此取压缩比例因子

$$\beta_I = \max_{-\pi \leq \omega \leq \pi} |L(e^{j\omega})| = \|L(e^{j\omega})\|_{\infty}$$

► 第 II 类压缩比例因子

若 $x[n]$ 是**能量受限信号**, 有 $\sum_{n=0}^{\infty} |x[n]|^2 \leq 1$, 则有

$$\begin{aligned} |w[n]| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |L(e^{j\omega})| \cdot |X(e^{j\omega})| d\omega \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |L(e^{j\omega})|^2 d\omega} \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |L(e^{j\omega})|^2 d\omega} = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |l[n]|^2} = \|l[n]\|_2 \leq 1 \end{aligned}$$

因此, 考虑到输入信号一般不为能量有限信号, 取压缩比例因子

$$\beta_{II} = C \cdot \|l[n]\|_2, \quad C > 1$$

■ 压缩因子的加入

► 集中式

在系统的输入端统一加入压缩比例因子 β_{\max} , 在输出端统一放大 β_{\max} 倍, 所得**输出量化误差功率**为

$$\sigma_f^2 = \frac{2^{-2B}}{12} \left(\beta_{\max}^2 \sum_{i=1}^I \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g_i[n]|^2 + 1 \right)$$

其中 $g_i[n]$ 为第 i 个量化误差源到输出的冲激响应, 输出端的 $\frac{2^{-2B}}{12}$ 量化误差源来自输出端加法。

► 分布式

为避免系统内信号过度压缩导致信噪比下降, 可在系统的各个子系统**输入端分别加入压缩比例因子** β_k , 在各子系统的输出端分别放大 β_k 倍, 所得**输出量化误差功率**为

$$\sigma_f^2 = \frac{2^{-2B}}{12} \left(\sum_{k=1}^K \beta_k^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g_k[n]|^2 + 1 \right)$$

其中 $g_k[n]$ 为第 k 个子系统内量化误差源到输出的冲激响应, 输出端的 $\frac{2^{-2B}}{12}$ 量化误差源来自输出端加法。

■ FFT 计算中的溢出避免

考察 FFT 算法的基本**蝶形计算单元**

$$\begin{cases} X_L[i] = X_{L-1}[i] + X_{L-1}[j] W_N^r \\ X_L[j] = X_{L-1}[i] - X_{L-1}[j] W_N^r \end{cases}$$

其中 $X_{L-1}[i], X_{L-1}[j]$ 为第 $L-1$ 级的输入, $X_L[i], X_L[j]$ 为第 L 级的输出, $W_N^r = e^{-j\frac{2\pi}{N}r}$ 为旋转因子。

注意到, 蝶形计算单元的输出可能达到输入的两倍, 因此**为避免溢出**, 需在每一级 FFT 计算前**加入压缩比例因子 2**, 即将输入信号压缩 2 倍后再进行蝶形计算, 共引入量化噪声

$$\sigma_{BI}^2 = 2\sigma_e^2 + \sigma_B^2 = 6\sigma_e^2 = \frac{1}{2} \times 2^{-2B}$$

其中第一项 $2\sigma_e^2$ 来自对两个输入压缩的量化误差, 第二项 σ_B^2 来自复数乘法的量化误差。

对于 N 点 FFT, 共有 $\log_2 N$ 级计算, 总的误差为

$$\sigma_{f[k]}^2 = \sum_{L=1}^{\log_2 N} \left(\frac{1}{4} \times 2 \right)^{\log_2 N - L} \sigma_{BI}^2 \approx 2\sigma_{BI}^2 = 2^{-2B}$$

变换与表示

► 离散时间信号的表示

■ 变换域表示

设 $T\{\cdot\}$ 为一映射, 若存在对应的映射 $T^*\{\cdot\}$, 对任意 t 的函数 $x(t)$ 、足够小的 ε 、常数 A , 满足

$$(1 - \varepsilon)\|x(t)\| \leq A\|T^*\{T\{x(t)\}\}\| \leq (1 + \varepsilon)\|x(t)\|$$

则称 $T\{x(t)\}$ 为信号 $x(t)$ 的一种**表示**, 称 $T\{\cdot\}$ 为**变换 (transform)**, $T^*\{\cdot\}$ 为**逆变换 (inverse transform)**。对离散时间信号 $x[n]$, 记其变换域表示为 $X = T\{x[n]\}$, 此处 X 并不要求是定义在整数域上的函数。

将**有限长**的 $x[n]$ 排列成列向量 \vec{x} , 若 $T\{\cdot\}$ 是线性变换且也定义在整数域上, 则可以用**矩阵**表示这一变换, 即

$$\vec{y} = T\{\vec{x}\} = \mathbf{T}\vec{x}$$

其中 \mathbf{T} 是变换矩阵。

► 变换的正交性

若 \mathbf{T} 的列向量组 $\{\vec{t}_k\}$ 满足

$$\vec{t}_i^T \vec{t}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

则称变换 $T\{\cdot\}$ 是**正交变换**。

对于正交变换, 有

$$\forall \vec{x}, \vec{y}, \quad \vec{x}^T \vec{y} = (T\{\vec{x}\})^T (T\{\vec{y}\})$$

即正交变换具有**内积不变性**。

► 变换的完备性

映射 $T\{\cdot\}$ 是**完备的**, 当且仅当

$$\forall \vec{x}, \quad T\{\vec{x}\} = \vec{0} \implies \vec{x} = \vec{0}$$

即映射 $T\{\cdot\}$ 的核空间仅包含零向量。

☞ *Thm.* 变换的可逆性

若某变换域表示线性且完备, 则该变换域表示是可逆的。

正交变换是完备的, 因此也是可逆的。

设 $x[n]$ 是长度为 N 的离散时间信号，则有

- 其离散 Fourier 变换 (DFT) 定义为

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

- 其离散余弦变换 (DCT) 定义为

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{\pi}{N}\left(n + \frac{1}{2}\right)k\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

DFT 和 DCT 都是线性且正交的变换，因此它们都是完备且可逆的。

特征域表示

普通的时域或变换域可能难以表示信号的某种特征 (character)，如线性调频 (linear frequency modulation, LFM) 信号频率随时间线性变化的特征。此时，可以使用特征域 (character domain) 来表示信号。

离散时间系统的表示

离散线性时不变系统

线性时不变 (linear time-invariant, LTI) 系统是最常见的离散时间系统。

线性性

系统 $H\{\cdot\}$ 是线性的，当且仅当

$$\forall x_1[n], x_2[n] \subset \mathbb{R}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad H\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aH\{x_1[n]\} + bH\{x_2[n]\}$$

非线性的例子如平方律 (功率) 检波器，其输入输出关系为

$$y[n] = H\{x[n]\} = x^2[n]$$

时不变性

系统 $H\{\cdot\}$ 是时不变的，当且仅当

$$\forall x[n] \subset \mathbb{R}, \quad \forall n_0 \in \mathbb{Z}, \quad H\{x[n - n_0]\} = y[n - n_0]$$

离散 LTI 系统的描述

样值 (冲激) 响应函数

设 $H\{\cdot\}$ 是离散 LTI 系统， $\delta[n]$ 是单位冲激信号，则系统对单位冲激信号的响应

$$b[n] = H\{\delta[n]\}$$

称为系统的样值响应函数 (impulse response) 或冲激响应函数。

LTI 系统的样值响应函数 $b[n]$ 完全描述了该系统，也可以比较简单地表述系统的性质，如：

- 线性性：样值响应函数是线性的，

$$\begin{aligned} H\{ax_1[n] + bx_2[n]\}[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ax_1[k]b[n-k] + bx_2[k]b[n-k]) \\ &= a \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]b[n-k] + b \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2[k]b[n-k] \\ &= aH\{x_1[n]\}[n] + bH\{x_2[n]\}[n] \end{aligned}$$

- 时不变性：样值响应函数与时间无关，

$$\begin{aligned} H\{x[n - n_0]\}[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k - n_0]b[n - k] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]b[n - n_0 - m] = H\{x[n]\}[n - n_0] \end{aligned}$$

- 因果性：系统因果 $\iff b[n] = 0, \forall n < 0$;
- BIBO 稳定性：系统 BIBO 稳定 $\iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b[n]| < \infty$ 。

本征表示

设 $T\{\cdot\}$ 是离散 LTI 系统，令

$$T\{\xi[n]\} = \lambda \xi[n]$$

将离散时间单频复指数信号 $\xi[n] = e^{j\omega n}$ 代入，则有

$$T\{e^{j\omega n}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b[k] e^{j\omega(n-k)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} b[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n}$$

因此，离散时间单频复指数信号 $e^{j\omega n}$ 是离散 LTI 系统的本征信号 (eigen-signal)，对应的本征值 (eigen-value) 为

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b[k] e^{-j\omega k}$$

将输入信号 $x[n]$ 展开为离散时间单频复指数信号的线性组合

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

后，计算系统输出 $y[n]$ 将变得非常简单，有

$$y[n] = T\{x[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T\{X(\omega) e^{j\omega n}\} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) H(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

频率响应函数

离散 LTI 系统的频率响应函数 (frequency response) 定义为

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b[n] e^{-j\omega n}$$

即样值响应函数的离散时间 Fourier 变换 (DTFT)。

系统函数

离散 LTI 系统的系统函数 (system function) 定义为

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b[n] z^{-n}$$

即样值响应函数的双边 z 变换。

系统函数 $H(z)$ 是频率响应函数 $H(\omega)$ 的推广，有

$$H(\omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

系统函数 $H(z)$ 的收敛域 (region of convergence, ROC) 决定了系统的因果性和稳定性：

- 系统因果 \iff ROC 包含 $z = \infty$;
- 系统 BIBO 稳定 \iff ROC 包含单位圆 $|z| = 1$ 。

矩阵表示

离散时间信号可以很自然地用 (有限长或无限长) 向量表示，因而离散时间信号通过 LTI 系统的过程也就可以用矩阵与向量的乘积表示。

设 $x[n]$ 是长度为 N 的离散时间信号， $H\{\cdot\}$ 是离散 LTI 系统，其样值响应函数为 $b[n]$ ，则系统输出 $y[n]$ 可表示为

$$y[n] = H\{x[n]\} = \sum_k b[n-k] x[k]$$

对于 $n = 0, 1, \dots, N-1$ ，上式可以写成矩阵形式

$$\vec{y} = \mathbf{H} \vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{b}_0 \\ \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_{N-1} \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} b[0] & 0 & \cdots & 0 \\ b[1] & b[0] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b[N-1] & b[N-2] & \cdots & b[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix}$$

其中 \vec{b}_n 是样值响应函数 $b[n]$ 反褶后右移 n 位后的向量。

离散时间 Fourier 变换 (DTFT)

DTFT 的定义

DTFT 的引入

已知连续时间信号 $f(t)$ 的 Fourier 变换 (FT) 定义为

$$F(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt$$

以间隔 T 对其进行冲激采样，得到

$$f_s(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT)$$

则采样信号的 Fourier 变换为

$$F_s(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_s(t) e^{-j\Omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-j\Omega nT}$$

类比于此, 考虑离散时间信号 $x[n] = f(nT)$, 记采样得到的离散信号频率为 $\omega = \Omega T$, 可以定义**离散时间 Fourier 变换 (DTFT)** 如

(*) *Def.* 离散时间 Fourier 变换 (DTFT)

离散时间信号 $x[n]$ 的离散时间 Fourier 变换 (Discrete-Time Fourier Transform, DTFT) 定义为

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

其逆变换 (Inverse DTFT) 为

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

■ DTFT 与其它变换的关系

► DTFT 与 Fourier 变换的关系

由 [DTFT 的引入](#) 可知, 离散时间信号 $x[n]$ 的 DTFT 可以看作是其对应的连续时间信号 $f(t)$ 的采样信号频谱 $F_s(j\Omega)$ 在频点 $\Omega = \frac{\omega}{T}$ 处的取值, 即

$$X(\omega) = F_s(j\Omega) \Big|_{\Omega=\omega/T}$$

由于以 T 为周期的冲激采样会使频谱发生 $\frac{2\pi}{T}$ 的周期性重复, 因此 DTFT 是周期为 2π 的周期函数。

► DTFT 与 z 变换的关系

注意到 $x[n]$ 的 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

则 DTFT 可以看作是 z 变换在单位圆 $z = e^{j\omega}$ 上的取值, 即

$$X(\omega) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

■ DTFT 的逆变换

将离散时间信号 $x[n]$ 看作是基底为 $\{\delta[n-k]\}_k$ 的**无限维空间** ℓ^2 中的一个向量 \vec{x} , 其 DTFT $X(\omega)$ 可以看作是**该向量在另一组单位基底** $\{\hat{\phi}_\omega\} = \{\phi_\omega[n]\}_\omega = \{e^{j\omega n}\}_\omega$ 上的**投影系数**, 即

$$X(\omega) = \langle \vec{x}, \hat{\phi}_\omega \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

两组基底之间有对应关系

$$\text{DTFT}\{\delta[n-k]\} = e^{-j\omega k}$$

由于 $\{\hat{\phi}_\omega\}$ 是**完备的**, 因此可以通过投影系数 $X(\omega)$ 重构出原向量 \vec{x} 。考虑其基底 $e^{j\omega n}$ 变换回 $\delta[n-k]$ 的过程

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} e^{-j\omega k} d\omega = \delta[n-k]$$

则有

$$x[n] = \text{IDTFT}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

■ 典型信号的 DTFT

一些典型离散时间信号及其 DTFT 如下表所示:

信号类型	信号 $x[n]$	DTFT 频谱 $X(\omega)$
单位样值序列	$\delta[n]$	$e^{-j\omega \cdot 0} = 1$

信号类型	信号 $x[n]$	DTFT 频谱 $X(\omega)$
矩形窗序列	$\begin{cases} 1, & n \leq M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{\sin \frac{(2M+1)\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$
全 1 序列	1	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega n} = 2\pi \delta(\omega)$
复指数序列	$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
余弦序列	$\cos \omega_0 n$	$\pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
sinc 序列	$\frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$	$\begin{cases} 1, & \omega < \omega_c, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

DTFT 的性质

■ 基本性质

基本变换关系:

- 线性**, $ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$
- 反转**, $x[-n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(-\omega)$
- 共轭**, $x^*[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X^*(-\omega)$

延时、调制性质:

- 时移**, $x[n - n_0] \xrightarrow{\text{DTFT}} e^{-j\omega n_0} X(\omega)$
- 频移**, $e^{j\omega_0 n} x[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(\omega - \omega_0)$

微分性质:

- 时域差分**, $x[n] - x[n-1] \xrightarrow{\text{DTFT}} (1 - e^{-j\omega}) X(\omega)$
- 频域微分**, $jnx[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} \frac{dX(\omega)}{d\omega}$

Note DTFT 性质的应用

可以利用离散时间信号的离散特性简化部分过程, 例如序列解调中, 要将中心频率为 ω_0 的信号变换到基带, 连续时间信号中需要乘以 $\cos(\omega_0 n)$ 再进行低通滤波, 而数字下变频 (DDC) 任务中限定 $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ 时只需依次乘以 $e^{-j\pi n/2} = (-j)^n$ 即可。

此外, 也可以利用 DTFT 频谱的连续性补足信号序列离散的不, 如在延时估计中, 可以通过发射波形 $s[n]$ 和接收信号 $r[n] = s[n - n_0]$ 的 DTFT 频谱相差 $e^{-j\omega n_0} = \frac{R(\omega)}{S(\omega)}$ 中拟合得到非整数延时 n_0 。

信号与其 DTFT 频谱之间的能量归一化关系由 **Parseval 定理** 给出:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$$

■ 共轭与对称

在复数域中, 函数 $f(x)$ 是**共轭对称 (conjugate symmetric)** 的, 当且仅当 $f(x) = f^*(-x)$; 函数 $f(x)$ 是**共轭反对称 (conjugate anti-symmetric)** 的, 当且仅当 $f(x) = -f^*(-x)$ 。

任意离散时间信号 $x[n]$ 都可以分解为**共轭对称分量** $x_e[n]$ 和**共轭反对称分量** $x_o[n]$, 即

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n], \quad \begin{cases} x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]), \\ x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n]) \end{cases}$$

考察其 DTFT, 对共轭对称分量有

$$\begin{aligned} \text{DTFT}\{x_e[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e[n] e^{-j\omega n} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n] + x^*[-n]) e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{2} X(\omega) + \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*[m] (e^{-j\omega m})^* \\ &= \frac{1}{2} X(\omega) + \frac{1}{2} X^*(\omega) = \Re\{X(\omega)\} \end{aligned}$$

类似地, 对共轭反对称分量有

$$\begin{aligned}\text{DTFT}\{x_o[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o[n]e^{-j\omega n} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n] - x^*[-n])e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{2}X(\omega) - \frac{1}{2}X^*(\omega) = j\Im\{X(\omega)\}\end{aligned}$$

另一方面，谱 $X(\omega)$ 也可以分解为**共轭对称分量**

$$X_e(\omega) = \frac{X(\omega) + X^*(-\omega)}{2} \text{ 和 } \text{共轭反对称分量 } X_o(\omega) = \frac{X(\omega) - X^*(-\omega)}{2}$$

，对其做 IDTFT，有

$$\begin{aligned}\text{IDTFT}\{X_e(\omega)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_e(\omega)e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{X(\omega) + X^*(-\omega)}{2} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(-\omega)e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega') (e^{-j\omega' n})^* d\omega' \\ &= \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x^*[n] = \Re\{x[n]\} \\ \text{IDTFT}\{X_o(\omega)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_o(\omega)e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{X(\omega) - X^*(-\omega)}{2} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{2}x^*[n] = j\Im\{x[n]\}\end{aligned}$$

■ 5.4.1. DTFT 的共轭与对称性质

离散时间信号 $x[n]$ 的共轭对称分量 $x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$ 和共轭反对称分量 $x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$ 的 DTFT 分别为频谱 $X(\omega)$ 的实部和虚部，即

$$\text{DTFT}\{x_e[n]\} = \Re\{X(\omega)\}, \quad \text{DTFT}\{x_o[n]\} = j\Im\{X(\omega)\}$$

$x[n]$ 的实分量 $x_R[n] = \Re\{x[n]\}$ 和虚分量 $x_I[n] = j\Im\{x[n]\}$ 的 DTFT 分别为频谱 $X(\omega)$ 的共轭对称分量和共轭反对称分量，即

$$\begin{aligned}\text{DTFT}\{x_R[n]\} &= X_e(\omega) = \frac{X(\omega) + X^*(-\omega)}{2}, \\ \text{DTFT}\{x_I[n]\} &= X_o(\omega) = \frac{X(\omega) - X^*(-\omega)}{2}\end{aligned}$$

■ 卷积性质

类似于 Fourier 变换，DTFT 也具有卷积性质：

- 时域两信号 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的**线性卷积**的 DTFT 是其 **DTFT 频谱的乘积**：

$$x_1[n] * x_2[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

- 频域两信号 $X_1(\omega)$ 和 $X_2(\omega)$ 的**线性卷积**（的 $\frac{1}{2\pi}$ ）是其时域信号的**乘积**的 DTFT：

$$x_1[n] \cdot x_2[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\theta)X_2(\omega - \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

这里的常数因子与 Parseval 定理中的因子一致。

可以引入**互相关函数** $r_{x_1x_2}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2^*[n-k]$ ，其 DTFT 为

$$R_{x_1x_2}(\omega) = X_1(\omega)X_2^*(\omega)$$

特别地，当 $x_1[n] = x_2[n] = x[n]$ 时，互相关函数即为**自相关函数**

$$r_{xx}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[n-k], \text{ 其 DTFT 为 } R_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2.$$

■ 周期性

我们已知 $X(\omega)$ 是 2π 周期函数，即 $X(\omega) = X(\omega + 2k\pi)$ ， $k \in \mathbb{Z}$ 。

对于周期 T 信号 $x[n] = x[n+T]$ ，记其在一个周期内的**截断序列**为 $\tilde{x}[m] = x[m]$ ， $m = 0, 1, \dots, T-1$ ，则该周期信号可表示为

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{x}[n-kT] = \tilde{x}[n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kT]$$

其 DTFT 为

$$X(\omega) = \tilde{X}(\omega) \cdot \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right)$$

其中 $\tilde{X}(\omega)$ 是有限长信号 $\tilde{x}[m]$ 的 DTFT。

离散 Fourier 变换 (DFT)

■ DFT 的定义

■ DFT 的引入

离散时间 Fourier 变换 (DTFT) 是针对**无限长**信号的、**离散域向连续域**的变换，变换后的结果便于分析，但不利于计算机存储和处理。

对于 N 点长的离散时间信号 $x[n]$ ，其 DTFT

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}$$

仍是**连续频谱**，但若对信号做以 N 为周期的**周期延拓**，则其 DTFT

$$\begin{aligned}\tilde{X}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}[n]e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega(n+rN)} \\ &= X(\omega) \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega rN} = X(\omega) \cdot \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \\ &= \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega) \Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)\end{aligned}$$

变为**离散频谱**，且频谱间隔为 $\frac{2\pi}{N}$ 。因而可以仅取 N 个频点

$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$ ， $k = 0, 1, \dots, N-1$ ，将其定义为信号的**离散 Fourier 变换 (DFT)**。

(*) Def. 离散 Fourier 变换 (DFT)

设 $x[n]$ 是长度为 N 的离散时间信号，则其离散 Fourier 变换 (discrete Fourier transform, DFT) 定义为

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi nk/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

其逆变换 (Inverse DFT) 为

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi nk/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

■ DFT 的线性代数解释

DFT 是对离散时间信号各点的**加权求和**，其中权值为**复指数函数** $e^{-j2\pi nk/N}$ 。将离散时间信号 $x[n]$ 看作是 N 维空间 \mathbb{C}^N 中的一个向量 $\tilde{\mathbf{x}}$ ，其 DFT $X[k]$ 即可表为向量内积

$$X[k] = \left(e^{-j2\pi \cdot \frac{0k}{N}} \quad e^{-j2\pi \cdot \frac{1k}{N}} \quad \dots \quad e^{-j2\pi \cdot \frac{(N-1)k}{N}} \right) \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix} = \vec{d}_k^H \tilde{\mathbf{x}}$$

其中 $\vec{d}_k = \left(e^{j2\pi \cdot \frac{0k}{N}} \quad e^{j2\pi \cdot \frac{1k}{N}} \quad \dots \quad e^{j2\pi \cdot \frac{(N-1)k}{N}} \right)^T$ 。

因此，若定义 $\vec{X} = (X[0] \quad X[1] \quad \dots \quad X[N-1])^T$ ，则 DFT 可写为矩阵形式

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} \vec{d}_0 & \vec{d}_1 & \dots & \vec{d}_{N-1} \end{pmatrix}^H \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{D} \tilde{\mathbf{x}}$$

其中 $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \vec{d}_0 & \vec{d}_1 & \dots & \vec{d}_{N-1} \end{pmatrix}^H = \begin{pmatrix} \vec{d}_0^H \\ \vec{d}_1^H \\ \vdots \\ \vec{d}_{N-1}^H \end{pmatrix}$ 称为**DFT 矩阵**。

DFT 矩阵 \mathbf{D} 的各列向量 \vec{d}_k 互相正交，且模长均为 \sqrt{N} ，因此 DFT 为**离散正交变换**，其逆变换也可表示为矩阵

$$\mathbf{E} = \mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{D}^H$$

■ DFT 的点数

DFT 不一定要让频域采样点数与信号长度相同。定义间隔为 $\frac{2\pi}{T}$ 的频域采样函数

$$S_T(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

其对应于时域上以 T 为周期的冲激串

$$s_T[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rT]$$

使用 $s_T[n]$ 与信号 $x[n]$ 卷积进行周期延拓，即相当于频域上使用 $S_T(\omega)$ 进行采样。

(*) Def. T 点离散 Fourier 变换

设 $x[n]$ 是长度为 N 的离散时间信号， $T \geq N$ 为频域采样点数，则其 T 点离散 Fourier 变换定义为

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/T}, \quad k = 0, 1, \dots, T-1$$

其逆变换为

$$x[n] = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} X[k] e^{j2\pi nk/T}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

■ DFT 与其它变换的关系

► DFT 与 DTFT 的关系

设 $x[n]$ 是长度为 N 的离散时间信号，则其 DTFT 为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n}$$

N 点 DFT $X[k]$ 则为 DTFT 在 N 个 N 等分频点 $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$ 处的取值，即

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N} = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

而 T 点 DFT $X[k]$ 则为 DTFT 在 T 个 T 等分频点 $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$ 处的取值，即

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/T} = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{T}}, \quad k = 0, 1, \dots, T-1$$

► DFT 与 FT 的关系

设有连续信号 $s(t)$ ，其 Fourier 变换为 $S(\Omega)$ ；对 $s(t)$ 以间隔 T_s 进行冲激采样，得到采样信号 $s_s(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$ 和离散时间信号

$s_D[n] = s(nT_s)$ ，则采样信号的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned} S_s(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) e^{-j\Omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \delta(t - nT_s) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_s) e^{-j\Omega nT_s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_D[n] e^{-j\Omega nT_s} = S_D(\omega) \Big|_{\omega=\Omega T_s} \\ S_s(\Omega) &= S(\Omega) * \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)\right\} = S(\Omega) * \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T_s}\right) \\ &= \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T_s}\right) \end{aligned}$$

进而离散时间信号的 DFT 为

$$S_D[k] = S_D(\omega) \Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} = S_s(\Omega) \Big|_{\Omega=\frac{2\pi k}{NT_s}}$$

■ DFT 的性质

■ 基本性质

由于 DFT 是 DTFT 的离散化，自然地保持了 DTFT 的许多性质，如：

- 线性， $ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{\text{DFT}} aX_1[k] + bX_2[k]$ 。

- 共轭， $x^*[n] \xrightarrow{\text{DFT}} X^*[N-k]$ ，后者索引按模 N 计算，实质是下述循环反转 $X^*[(N-k)_N]R_N[k]$ 。
- 对称， $x_e[n] \xrightarrow{\text{DFT}} \Re\{X[k]\}$ ， $x_o[n] \xrightarrow{\text{DFT}} j\Im\{X[k]\}$ ， $x_R[n] \xrightarrow{\text{DFT}} X_e[k]$ ， $x_I[n] \xrightarrow{\text{DFT}} X_o[k]$ ，其中共轭对称、共轭反对称分量也由循环反转定义。
 - 特别地，当 $x[n]$ 为实序列时， $X[k]$ 具有共轭对称性 $X[k] = X^*[N-k]$ 。
- Parseval 定理， $\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$ 。

■ 周期性质

虽然 DFT 只定义在 $0, 1, \dots, N-1$ 上，但由于其本质是 DTFT 在等分频点处的取值，因此 DFT 也具有周期性，即允许定义

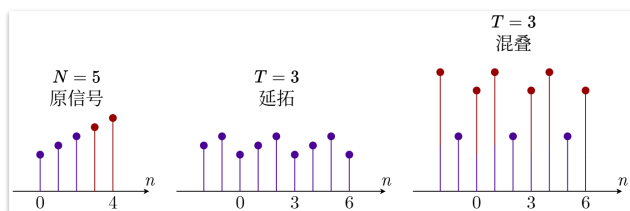
$$X[k] = X[k \bmod N]$$

对原有的 $X[k]$ 进行周期延拓。

引入以 T 为周期延拓的记号

$$\mathfrak{x}[n] = x[(n)_T] = x[n \bmod T]$$

当原序列长度 $N < T$ 时，空处补零；当 $N > T$ 时，截断为前 T 点后再做延拓，不发生混叠。



► 循环位移

对于 N 点长序列 $x[n]$ ，其 m 点循环位移定义为

$$x[((n-m))_N]R_N[n]$$

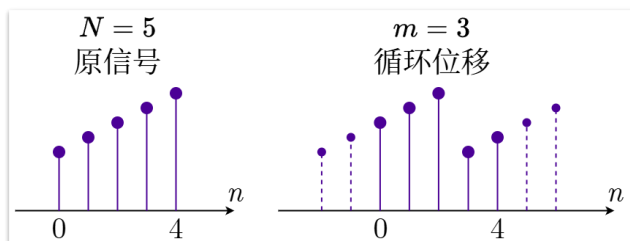


Fig. DFT 的循环位移性质

设 $x[n]$ 的 DFT 为 $X[k]$ ，则其 m 点循环位移序列 $x[((n-m))_N]R_N[n]$ 的 DFT 为

$$\text{DFT}\{x[((n-m))_N]R_N[n]\} = W_N^{mk} X[k]$$

其中 $W_N = e^{-j2\pi/N}$ 。

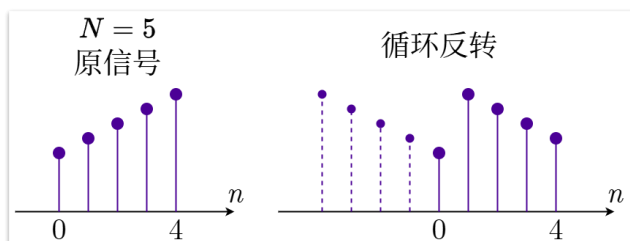
时域循环位移对应频域线性相移。

► 循环反转

对于 N 点长序列 $x[n]$ ，其循环反转定义为

$$x[(-n)_N]R_N[n]$$

注意循环反转是反转后延拓到原区间截断，其结果中 **0 时刻保持不变**，其余时刻按循环方式反转。



5.4. DFT 的循环反转性质

设 $x[n]$ 的 DFT 为 $X[k]$ ，则其循环反转序列 $x[(-n)_N]R_N[n]$ 的 DFT 为

$$\text{DFT}\{x[(-n)_N]R_N[n]\} = X[(-k)_N]R_N[k]$$

时域循环反转对应频域循环反转。

► 循环卷积

由 [循环反转](#) 和 [循环位移](#) 可组合为 **循环卷积**，其定义为

$$x[n] * y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[((n-m))_N]y[m] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[((n-m))_N]$$

考虑到 DTFT 中相乘与卷积有对应关系，考察 DFT 频域相乘的逆变换

$$\begin{aligned} \text{IDFT}\{X[k]Y[k]\} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]Y[k]W_N^{-nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x[m]W_N^{mk} \right) Y[k]W_N^{-nk} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y[k]W_N^{-(n-m)k} \right) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[((n-m))_N] \end{aligned}$$

5.4. DFT 的循环卷积性质

设 $x[n]$ 的 DFT 为 $X[k]$ ， $y[n]$ 的 DFT 为 $Y[k]$ ，则其循环卷积序列 $x[n] * y[n]$ 的 DFT 为

$$\text{DFT}\{x[n] * y[n]\} = X[k]Y[k]$$

时域循环卷积对应频域相乘。

► DFT 的快速计算

直接计算 DFT 需要 $O(N^2)$ 的时间复杂度，**快速傅里叶变换 (FFT)** 则可以将时间复杂度降为 $O(N \log N)$ 。

■ FFT 的基本思想

FFT 的基本思想是 **分治法 (divide and conquer)**，将 N 点 DFT 拆解为两个 $\frac{N}{2}$ 点 DFT 来计算。

记 $W_N = e^{-j2\pi/N}$ ，称为 **旋转因子 (twiddle factor)**，其性质有

- 周期性： $W_N^{k+N} = W_N^k$ ；
- 齐次性： $W_N^k = W_{N/m}^{k/m}$ ；
- 共轭对称性： $W_N^{(N-k)k} = W_N^{-nk} = (W_N^{nk})^*$ 。

旋转因子幂次项中有许多特殊值可以简化计算，例如

$$W_N^0 = 1, \quad W_N^{N/2} = -1, \quad W_N^{N/4} = -j, \quad W_N^{3N/4} = j$$

所对应项的计算均不需要复乘。在长序列中，这些项比例较小，对计算量影响不大；但在 **短序列中，则可以显著减少计算量**，特别是在 $N=2$ 与 $N=4$ 时可 **不需要任何复乘** 即得到 DFT。

■ 基 2 的频率抽取 FFT (Decimation-in-Frequency FFT with Radix-2)

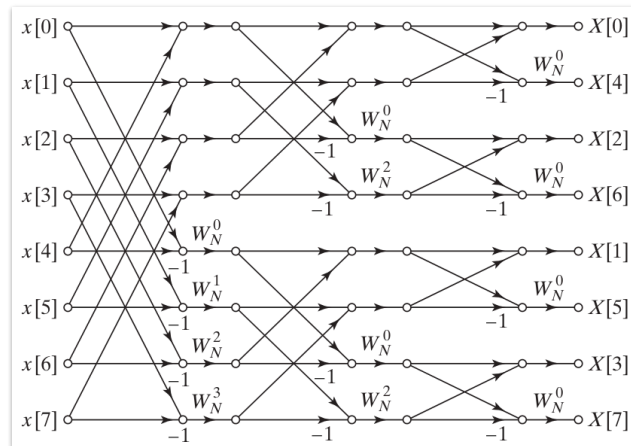
设 N 为偶数，将 $x[k]$ 拆分为前后两半，则 N 点 DFT 可写为

$$\begin{aligned} k = 2r, \quad X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]W_N^{n(2r)} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n]W_N^{n(2r)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]W_{N/2}^{nr} + W_N^{N/2r} \sum_{n=0}^{N/2-1} x\left[n + \frac{N}{2}\right]W_{N/2}^{nr} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(x[n] + x\left[n + \frac{N}{2}\right] \right) W_{N/2}^{nr} \\ k = 2r+1, \quad X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{n(2r+1)} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]W_N^{n(2r+1)} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n]W_N^{n(2r+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]W_N^{n(2r+1)} + W_N^{N(2r+1)/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} x\left[n + \frac{N}{2}\right]W_N^{n(2r+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]W_N^{n(2r+1)} - \sum_{n=0}^{N/2-1} x\left[n + \frac{N}{2}\right]W_N^{n(2r+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(x[n] - x\left[n + \frac{N}{2}\right] \right) W_{N/2}^{nr} \end{aligned}$$

这相当于将 N 点 DFT 拆解为两个 $\frac{N}{2}$ 点 DFT 来计算：

- 偶数序号 DFT 系数 $X[2r]$ 由点长 **序列** $e[n] = x[n] + x\left[n + \frac{N}{2}\right]$ 的 DFT 给出；
- 奇数序号 DFT 系数 $X[2r+1]$ 由 $\frac{N}{2}$ 点长 **序列** $o[n] = \left(x[n] - x\left[n + \frac{N}{2}\right] \right) W_N^n$ 的 DFT 给出。

对 $N=8$ 情形，其蝶形图表示为：



可见：

- 每一级蝶形运算将 N 点 DFT 拆解为两个 $\frac{N}{2}$ 点 DFT 来计算，共需 $\log_2 N$ 级，每级需 $N/2$ 个蝶形单元；
- 每个蝶形单元共有 1 次复乘和 2 次复加。

因此，基 2 的频率抽取 FFT 的时间复杂度为 $O(N \log N)$ 。

上图中，输入信号 $x[k]$ 的索引顺序为自然顺序 $0, 1, 2, \dots, 7$ ，而输出信号 $X[k]$ 的下标顺序为 $0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7$ ，为原序号 **二进制按位次序反转** 得到的序列，称为 **倒位序 (bit-reversed order)**。若需要按自然顺序输出，则需在计算后进行一次倒位序操作。

■ 基 2 的时间抽取 FFT (Decimation-in-Time FFT with Radix-2)

设 N 为偶数，将 $x[n]$ 按奇偶项拆分，则 N 点 DFT 可写为

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]W_N^{(2r)k} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1]W_N^{(2r+1)k} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1]W_{N/2}^{rk} \end{aligned}$$

其中：

- 偶数项组成 $\frac{N}{2}$ 点长 **序列** $x_e[r] = x[2r]$ ，其 DFT 为 $X_e[k] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]W_{N/2}^{rk}$ ；

- 奇数项组成 $\frac{N}{2}$ 点长序列 $x_o[r] = x[2r+1]$, 其 DFT 为

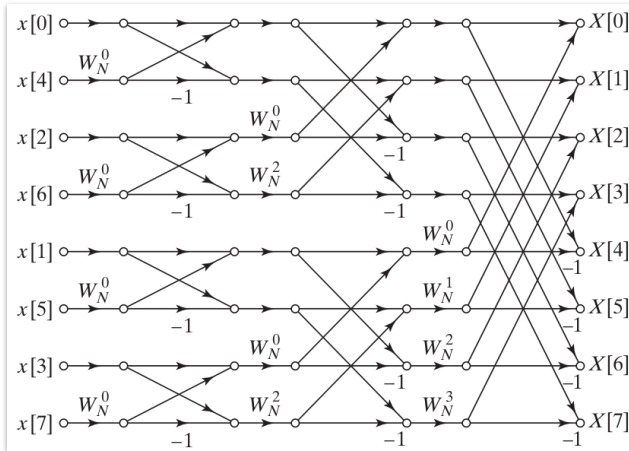
$$X_o[k] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_{N/2}^{rk}$$

因此, N 点 DFT 可写为

$$X[k] = X_e[k] + W_N^k X_o[k]$$

由于 $X_e[k]$ 和 $X_o[k]$ 均为周期为 $\frac{N}{2}$ 的序列, 与 W_N^k 的周期不一致, 截取到 $k = 0, 1, \dots, N-1$ 时, $X[k]$ 可分两部分写为

$$\begin{cases} X[k] = X_e[k] + W_N^k X_o[k], \\ X\left[k + \frac{N}{2}\right] = X_e[k] - W_N^k X_o[k], \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$



类似地, 基 2 的时间抽取 FFT 的时间复杂度也为 $O(N \log N)$; 得到的 DFT 系数 $X[k]$ 按照自然顺序排列, 而输入信号 $x[n]$ 则按倒位序排列。

■ 组合数 FFT

FFT 的基本思想是分治, 将 N 点 DFT 拆解为多个较小点数的 DFT 来计算。若 N 可分解为多个因子之积 $N = N_1 N_2 \dots N_m$, 则可将 N 点 DFT 拆解为 N_1 个 $N_2 N_3 \dots N_m$ 点 DFT 来计算, 再将每个 $N_2 N_3 \dots N_m$ 点 DFT 拆解为 N_2 个 $N_3 \dots N_m$ 点 DFT 来计算, 依此类推, 直至拆解为若干个小子数 DFT 来计算。

对 $N = N_1 N_2 \dots N_m$, 我们将时域索引 n 表示为

$$n = n_1 + N_1 n_2 + N_1 N_2 n_3 + \dots + N_1 N_2 \dots N_{m-1} n_m, \quad \begin{cases} n_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1, \\ n_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1, \\ \vdots \\ n_m = 0, 1, \dots, N_m - 1 \end{cases}$$

将频域索引 k 表示为

$$k = k_m + N_m k_{m-1} + N_m N_{m-1} k_{m-2} + \dots + N_m N_{m-1} \dots N_2 k_1, \quad \begin{cases} k_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1, \\ k_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1, \\ \vdots \\ k_m = 0, 1, \dots, N_m - 1 \end{cases}$$

引入记号 $\overset{b}{N}_a = N_a N_{a+1} \dots N_{b-1} N_b$, 将 nk 展开为

$$\begin{aligned} nk &= \left(n_1 + n_2 N_1 + \dots + n_m \overset{m-1}{N}_1 \right) \left(k_m + N_m k_{m-1} + \dots + \overset{m}{N}_2 k_1 \right) \\ &= \boxed{n_1 \overset{m}{N}_2 k_1} + n_1 \overset{m}{N}_3 k_2 + \dots + n_1 N_m k_{m-1} + n_1 k_m \\ &\quad + n_2 N k_1 + \boxed{n_2 N_1 \overset{m}{N}_3 k_2} + n_2 N_1 \overset{m}{N}_4 k_3 + \dots + n_2 N_1 N_m k_{m-1} + n_2 N_1 k_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + n_m \overset{m-1}{N}_2 k_1 + \dots + n_m N k_{m-1} + \boxed{n_m \overset{m-1}{N}_1 k_m} \end{aligned}$$

其中, 每行标记项之前的项均为 N 的整数倍, 第 r 行标记项的 N 连乘缺 N_r 因子, 故

$$\begin{aligned} W_N^{nk} &= \boxed{W_{N_1}^{n_1 k_1}} \times W_{\overset{2}{N}}^{n_1 k_2} \dots W_{\overset{m-1}{N}}^{n_1 k_{m-1}} W_N^{n_1 k_m} \\ &\quad \times 1 \times \boxed{W_{N_2}^{n_2 k_2}} \times W_{\overset{3}{N}}^{n_2 k_3} \dots W_{\overset{m-1}{N}}^{n_2 k_{m-1}} W_{\overset{m}{N}_2}^{n_2 k_m} \\ &\quad \times \dots \\ &\quad \times 1 \times \boxed{W_{N_{m-1}}^{n_{m-1} k_{m-1}}} \times W_{N_{m-1} N_m}^{n_{m-1} k_m} \\ &\quad \times 1 \times \boxed{W_{N_m}^{n_m k_m}} \end{aligned}$$

这里的每个标记项 $W_{N_r}^{n_r k_r}$ 都可视为 r 点 DFT 的变换基, 因此 N 点 DFT 可展开为

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} \\ &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \dots \sum_{n_m=0}^{N_m-1} x \left[n_1 + N_1 n_2 + \dots + \overset{m-1}{N}_1 n_m \right] W_N^{nk} \\ &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \boxed{W_{N_1}^{n_1 k_1}} \cdot W_{\overset{2}{N}}^{n_1 k_2} \dots W_{\overset{m-1}{N}}^{n_1 k_{m-1}} W_N^{n_1 k_m} \quad (N_1 \text{ 点}) \\ &\quad \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \boxed{W_{N_2}^{n_2 k_2}} \cdot W_{\overset{3}{N}}^{n_2 k_3} \dots W_{\overset{m-1}{N}}^{n_2 k_{m-1}} W_{\overset{m}{N}_2}^{n_2 k_m} \quad (N_2 \text{ 点}) \\ &\quad \dots \\ &\quad \sum_{n_{m-1}=0}^{N_{m-1}-1} \boxed{W_{N_{m-1}}^{n_{m-1} k_{m-1}}} \cdot W_{N_{m-1} N_m}^{n_{m-1} k_m} \quad (N_{m-1} \text{ 点}) \\ &\quad \sum_{n_m=0}^{N_m-1} \boxed{W_{N_m}^{n_m k_m}} \cdot x \left[n_1 + N_1 n_2 + \dots + \overset{m-1}{N}_1 n_m \right] \quad (N_m \text{ 点}) \end{aligned}$$

这里每个标记项 $W_{N_r}^{n_r k_r}$ 都可视为 N_r 点 DFT 的变换基, 因此 N 点 DFT 可拆解为多个较小点数 DFT 来计算。

■ FFT 的应用

■ FFT 计算线性卷积

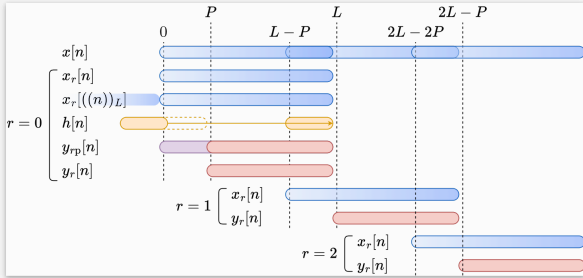
LTI 系统的输出 $y[n]$ 可由输入 $x[n]$ 与系统冲激响应 $b[n]$ 的线性卷积给出, 我们期望通过 FFT 快速得到 $X[k]$ 和 $H[k]$ 来高效计算线性卷积。

一般情况下, $b[n]$ 的长度 P 远小于 $x[n]$ 的长度 N , 若直接计算 N 点 DFT, 则需要对 $b[n]$ 进行大量补零, 导致计算量增大。为此, 可采用重叠保留法 (overlap-save method) 或重叠相加法 (overlap-add method) 来分段计算线性卷积。

► 重叠保留法

设输入信号 $x[n]$ 的长度为 N , 系统冲激响应 $b[n]$ 的长度为 P , 则线性卷积 $y[n] = x[n] * b[n]$ 的长度为 $N + P - 1$ 。选择分段长度 L , 满足 $L \geq P$, 则每段信号循环卷积贡献给线性卷积的无混叠有效输出长度为 $L - P + 1$ 。

重叠保留法计算线性卷积的基本思想为，将输入信号 $x[n]$ 分段，每段长度为 L ，相邻两段重叠 $P - 1$ 点，分别与系统冲激响应 $b[n]$ 做循环卷积，再保留每段循环卷积的第 $P - 1$ 点到第 $L - 1$ 点作为线性卷积的有效输出，最后将各段有效输出串联得到完整线性卷积结果。



GIVEN —

N 点长输入信号 $x[n]$ ，长度为 P 的系统冲激响应 $b[n]$

STEPS —

1. 对 $b[n]$ 做 L 点 FFT，得到 $H^L[k] = \text{DFT}_L\{b[n]\}$
2. 将 $x[n]$ 分段，每段长度为 L ，相邻两段重叠 $P - 1$ 点，记第 r 段为 $x_r[n]$
3. 对每段 $x_r[n]$ 做 L 点 FFT，得到 $X_r^L[k] = \text{DFT}_L\{x_r[n]\}$ ，并求 $y_{rp}[n] = \text{IDFT}\{X_r^L[k]H^L[k]\}$
4. 保留 $y_{rp}[n]$ 的第 $P - 1$ 点到第 $L - 1$ 点，作为线性卷积的有效输出 $y_r[n]$

OUTPUT —

线性卷积结果 $y[n]$ ，由各段有效输出串联得到

$$y[n] = \sum_r y_r[n - r(L - P + 1) + P - 1]$$

其中：

- L — 分段长度，满足 $L \geq P$ 。

► 重叠相加法

同样给定输入信号 $x[n]$ 的长度为 N ，系统冲激响应 $b[n]$ 的长度为 P 。

将 $x[n]$ 分为长度为 L 的子段 $x_r[n] = \begin{cases} x[n + rL], & 0 \leq n \leq L - 1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ ，则线性卷积 $y[n] = x[n] * b[n]$ 可表示为

$$y[n] = b[n] * \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n - rL] = \sum_{r=0}^{\infty} b[n] * x_r[n - rL]$$

重叠相加法计算线性卷积的基本思想为，将输入信号 $x[n]$ 分段，每段长度为 L ，分别与系统冲激响应 $b[n]$ 做线性卷积，再将各段线性卷积结果平移相加得到完整线性卷积结果。

GIVEN —

N 点长输入信号 $x[n]$ ，长度为 P 的系统冲激响应 $b[n]$

STEPS —

1. 对 $b[n]$ 做 $L + P - 1$ 点 FFT，得到 $H^{L+P-1}[k] = \text{DFT}_{L+P-1}\{b[n]\}$
2. 将 $x[n]$ 分段，每段长度为 L ，记第 r 段为 $x_r[n]$
3. 对每段 $x_r[n]$ 补零做 $L + P - 1$ 点 FFT，得到 $X_r^{L+P-1}[k] = \text{DFT}_{L+P-1}\{x_r[n]\}$ ，并求 $y_r[n] = \text{IDFT}\{X_r^{L+P-1}[k]H^{L+P-1}[k]\}$

OUTPUT —

线性卷积结果 $y[n]$ ，由各段线性卷积结果平移 rL 后相加得到

$$y[n] = \sum_r y_r[n - rL]$$

其中：

- L — 分段长度。

■ 梳状滤波器组与短时傅里叶变换

► DFT 作为滤波器组

梳状滤波器组 (filter bank) 由多个带通滤波器组成，每个带通滤波器提取信号的一个频段成分。

考虑一个简单的低通滤波器

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[n - k], \quad \text{i.e.} \quad b[n] = R_N[n]$$

它输出 $x[n]$ 在直流附近的频率分量。若希望提取 $x[n]$ 在其他频段的频率成分，可在频域做 $\frac{2k\pi}{N}$ 移位，相当于时域调制

$$b[n] = e^{j\frac{2k\pi}{N}n} R_N[n]$$

则滤波器输出为

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[n - m] e^{j\frac{2k\pi}{N}m}$$

此时注意到

$$y[N] = \sum_{m=0}^{N-1} x[N - m] e^{j\frac{2k\pi}{N}m} = \sum_{m'=1}^N x[m'] e^{j\frac{2k\pi}{N}(N-m')} = X[k]$$

其中假定 $x[0] = x[N]$ ，则滤波器在 $n = N$ 处的输出即为 $x[n]$ 的 DFT 系数 $X[k]$ 。因此，每个 DFT 系数 $X[k]$ 都可视为一个中心频率在 $\frac{2\pi k}{N}$ 的带通滤波器在 N 时刻的输出。

► 短时傅里叶变换 (STFT)

短时傅里叶变换 (STFT) 是对信号的局部时间窗内的信号做 Fourier 变换，得到信号在时频平面上的表示。

(*) Def. 短时傅里叶变换 (STFT)

设有离散时间信号 $x[n]$ ，选取长度为 W 的分析窗，则信号 $x[n]$ 的短时傅里叶变换 (short-time Fourier transform, STFT) 为

$$X[k, n] = \text{DFT}\{x[n - W + r + 1]\} = \sum_{r=0}^{W-1} x[n - W + r + 1] e^{-j2\pi kr/W}$$

其中 $k = 0, 1, \dots, W - 1$ ， n 为时间索引。

STFT 可视为对信号 $x[n]$ 中从 $n - W + 1$ 到 n 的长度为 W 的局部时间窗内的信号做 W 点 DFT，得到该时间窗内信号的频谱表示。

即使使用 FFT，直接计算 STFT 的复杂度仍为每个时间样点 $O(W \log W)$ ，仍然需要较大的计算量。注意到 STFT 相邻时间窗之间有大量重叠，可利用这一点来减少计算量。对比

$$\begin{aligned} X[k, n+1] &= \sum_{r=0}^{W-1} x[(n+1) - W + r + 1] e^{-j2\pi kr/W} \\ X[k, n] &= \sum_{r=0}^{W-1} x[n - W + r + 1] e^{-j2\pi kr/W} \end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned} X[k, n+1] &= \sum_{r=0}^{W-2} x[(n+1) - W + r + 1] e^{-j2\pi kr/W} + x[n+1] e^{-j2\pi k(W-1)/W} \\ &= \sum_{r'=1}^{W-1} x[n - W + r' + 1] e^{-j2\pi k(r'-1)/W} + x[n+1] e^{j2\pi k/W} \\ &= \left(\sum_{r'=0}^{W-1} x[n - W + r' + 1] e^{-j2\pi kr'/W} - x[n - W + 1] \right) e^{j2\pi k/W} \\ &\quad + x[n+1] e^{j2\pi k/W} \\ &= e^{j2\pi k/W} (X[k, n] - x[n - W + 1] + x[n+1]) \end{aligned}$$

即通过利用上一时刻 STFT 结果 $X[k, n]$ ，仅需两次复加与一次复乘即可得到下一时刻 STFT 结果 $X[k, n+1]$ ，每个时间样点的计算复杂度降为 $O(W)$ 。

■ 正交频分复用 (OFDM)

正交频分复用 (orthogonal frequency-division multiplexing, OFDM) 是一种多载波调制技术，广泛应用于无线通信系统中，如 Wi-Fi、4G 和 5G 移动通信等。

在 OFDM 系统中，高速数据流被分割成多个低速子载波，每个子载波使用较低的符号速率进行调制。由于子载波之间是正交的，可以有效地利用频谱资源，减少符号间干扰 (inter-symbol interference, ISI)。

数字频谱分析

■ DFT 与连续信号频谱的关系

■ 直观解释

设有连续时间信号 $s(t)$ ，对其以采样间隔 T_s 进行采样，得到离散时间信号 $s[n] = s(nT_s)$ 。采样信号的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned} S_s(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \delta(t - nT_s) e^{-j\Omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_s) e^{-j\Omega nT_s} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] e^{-j(\Omega T_s)n} = S_D(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\Omega T_s} \\ &= \mathcal{F} \left\{ s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \right\} = \frac{1}{2\pi} S(\Omega) * \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(\Omega - k \frac{2\pi}{T_s} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega') \frac{1}{T_s} \delta \left(\Omega - \Omega' - k \frac{2\pi}{T_s} \right) d\Omega' \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S \left(\Omega - k \frac{2\pi}{T_s} \right) \end{aligned}$$

其中 $S(\Omega)$ 为连续时间信号 $s(t)$ 的 Fourier 变换， $S_D(e^{j\omega})$ 为离散时间信号 $s[n]$ 的 DTFT。对 DTFT 取分立频点即得到 DFT

$$\begin{aligned} S_D[k] &= S_D(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi \frac{k}{N}} = \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S \left(\Omega - m \frac{2\pi}{T_s} \right) \Big|_{\Omega=2\pi \frac{k}{NT_s}} \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S \left(2\pi \left(\frac{k}{NT_s} - \frac{m}{T_s} \right) \right) \end{aligned}$$

显见，连续时间信号频谱 $S(\Omega)$ 在以 $\frac{2\pi}{T_s}$ 为周期混叠，DFT 频点 k 对应 DTFT 频率 $\omega = 2\pi \frac{k}{N}$ ，亦即对应连续时间频率 $\Omega = 2\pi \frac{k}{NT_s}$ 。

■ 解析解释

对连续信号 $s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$ 进行采样，得到离散时间信号

$$s[n] = s(nT_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) e^{j\Omega nT_s} d\Omega$$

截取 $n = 0, 1, \dots, M-1$ 点，做 N 点 DFT，得到

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{M-1} s[n] W_N^{kn} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) e^{j\Omega nT_s} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) \underbrace{\sum_{n=0}^{M-1} e^{jn \left(\Omega T_s - 2\pi \frac{k}{N} \right)}}_{\psi_{M,N,k}(\Omega)} d\Omega \end{aligned}$$

其中，对 $S(\Omega)$ 做加权积分的权函数为

$$\begin{aligned} \psi_{M,N,k}(\Omega) &= \sum_{n=0}^{M-1} e^{jn \left(\Omega T_s - 2\pi \frac{k}{N} \right)} \\ &= \frac{\sin \left(\frac{M}{2} \left(\Omega T_s - 2\pi \frac{k}{N} \right) \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} \left(\Omega T_s - 2\pi \frac{k}{N} \right) \right)} e^{j \frac{M-1}{2} \left(\Omega T_s - 2\pi \frac{k}{N} \right)} \end{aligned}$$

► 理解 1：对连续时间信号频谱的采样

理想情况下，对 $s(t)$ 频谱 $S(\Omega)$ 的理想采样应为

$$X_{\text{ideal}}[k] = S(\Omega) \Big|_{\Omega=2\pi \frac{k}{NT_s}} = \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) \delta \left(\Omega - 2\pi \frac{k}{NT_s} \right) d\Omega$$

实际的采样函数 $\frac{1}{2\pi} \psi_{M,N,k}(\Omega)$ 可视为对理想采样函数 $\delta \left(\Omega - 2\pi \frac{k}{NT_s} \right)$ 的一种逼近，随着 M 增大，其主瓣变窄，旁瓣减小，更加接近理想采样。

► 理解 2：滤波器组的输出

上面的频谱

$$\begin{aligned} X[k] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) \psi_{M,N,k}(\Omega) d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) \psi_{M,N,k}(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \Big|_{t=0} = \mathcal{F}^{-1} \{ S(\Omega) \psi_{M,N,k}(\Omega) \} \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

可视为对连续时间信号 $s(t)$ 通过一组滤波器组后在 $t=0$ 时刻的输出，第 k 个滤波器的频率响应为 $\psi_{M,N,k}(\Omega)$ ，对应时域冲激响应为

$$b_{M,N,k}(t) = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \delta(t - nT_s)$$

► 理解 3：无限长离散信号加矩形窗

设无限长离散信号 $s[n]$ ，其 DTFT 为 $S_D(\omega)$ 。对其进行矩形窗截断，得到长度为 M 的有限长信号

$$s_M[n] = s[n] R_M[n], \quad R_M[n] = u[n] - u[n-M]$$

则其 DTFT 为

$$\begin{aligned} S_M(\omega) &= S_D(\omega) * \text{DTFT} \{ R_M[n] \} = S_D(\omega) * \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\omega n} \\ &= S_D(\omega) * \frac{\sin \frac{M\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j \frac{(M-1)\omega}{2}} \end{aligned}$$

对其在 $0 \sim 2\pi$ 范围内均匀采样 N 点 (M 不一定等于 N)，即得到 DFT

$$\begin{aligned} X[k] &= S_M(\omega) \Big|_{\omega=2\pi \frac{k}{N}} = \int_{-\pi}^{\pi} S_D(\omega') \cdot \frac{\sin \left(\frac{M}{2} (\omega - \omega') \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} (\omega - \omega') \right)} e^{-j \frac{(M-1)}{2} (\omega - \omega')} d\omega' \Big|_{\omega=2\pi \frac{k}{N}} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} S_D(\omega') \cdot \frac{\sin \left(\frac{M}{2} (\omega' - \omega) \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} (\omega' - \omega) \right)} e^{j \frac{(M-1)}{2} (\omega' - \omega)} d\omega' \Big|_{\omega=2\pi \frac{k}{N}} \\ &\stackrel{\omega'=\Omega T_s}{=} T_s \int_{-\pi}^{\pi} S_D(\Omega T_s) \cdot \frac{\sin \left(\frac{M}{2} \left(\Omega T_s - 2\pi \frac{k}{N} \right) \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} \left(\Omega T_s - 2\pi \frac{k}{N} \right) \right)} e^{j \frac{(M-1)}{2} \left(\Omega T_s - 2\pi \frac{k}{N} \right)} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2\pi T_s S_D(\Omega T_s)) \cdot \psi_{M,N,k}(\Omega) d\Omega \end{aligned}$$

用 DFT (FFT) 进行频谱分析

■ 抗混叠滤波

实际连续信号一般不满足**带限 (bandlimited)** 条件，需先通过**抗混叠滤波器 (anti-aliasing filter)** 限制信号带宽，避免混叠失真。

设**采样**环节的采样率为 f_s ，则抗混叠滤波器的截止频率须取为 $B_{\text{pass}} < \frac{f_s}{2}$ 。

■ 采样

采样环节将连续时间信号 $s(t)$ 以采样间隔 $T_s = \frac{1}{f_s}$ 进行采样，得到离散时间信号 $x[n] = s(nT_s)$ 。

■ 截取、加窗

实际参加频谱分析的信号长度有限，需对离散时间信号进行**截取**，得到有限长信号 $x_M[n] = x[n]R_M[n]$ 。为减小截取引起的**频谱泄漏 (spectral leakage)**，通常会对有限长信号进行**时域加窗**处理，对应地在频域即卷积以**频率采样函数**，从而减小旁瓣泄漏的影响。

截取 M 点即等效于**乘以矩形窗 $R_M[n]$** ，其对应的频率采样函数为

$$\bar{R}_M(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\omega n} = \frac{\sin\left(\frac{M\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\frac{(M-1)\omega}{2}}$$

常用的窗函数如 **Hanning 窗**

$$w[n] = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{M}\right), \quad 0 \leq n \leq M-1$$

和 **Hamming 窗**

$$w[n] = 0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{M}, \quad 0 \leq n \leq M-1$$

我们使用**旁瓣高度**和**3 dB 主瓣展宽**来评价窗函数的频率特性：

- 旁瓣高度 (side lobe level)**：窗函数频谱中主瓣之外**最高旁瓣与主瓣峰值之比**，通常以 dB 为单位表示。旁瓣高度越低，频谱泄漏越小。
- 3 dB 主瓣展宽 (3 dB main lobe width)**：窗函数频谱中主瓣在峰值处下降 3 dB 所对应的频率宽度。主瓣展宽越小，频率分辨率损失越小。

窗函数	旁瓣高度 (dB)	3 dB 主瓣展宽 ($\times \frac{2\pi}{MT_s}$)
矩形窗	-13	0.89
三角窗	-25	1.28
Hanning 窗	-31	1.44
Hamming 窗	-41	1.30
Blackman 窗	-57	1.68

■ 频谱显示

对截取并加窗后的有限长信号 $x_M[n]$ 进行 FFT，即得到其 DFT 频谱 $X_M[k]$ 。若想更加「精细」地显示频谱，可以通过**零填充 (zero padding)** 的方式增加 FFT 点数 N ($N > M$)，使得频谱显示更加平滑。

M 点离散时间信号的 DTFT 频谱由 M 点 DFT **完全表示**，因此这一过程本质上并没有增加频谱信息，只是一种**插值**手段。注意到

$$\begin{aligned} X_M(\omega) &= \sum_{n=0}^{M-1} x_M[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{M-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_M[k] e^{j2\pi \frac{kn}{N}} \right) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} X_M[k] \sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{N} e^{-j\omega n + j2\pi \frac{kn}{N}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} X_M[k] \cdot \left[e^{-j\frac{M-1}{2}\left(\omega - 2\pi \frac{k}{N}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{M}{2}\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)\right)} \right] \end{aligned}$$

可见，零填充后的频谱 $X_M(\omega)$ 可视为对 DFT 频点 $X_M[k]$ 进行**加权插值**得到的连续频谱，其权函数与截断窗的频率采样函数相同。这一过程称为 **Shannon 插值**。

离散余弦变换 (DCT)

■ DCT 的定义

■ DCT 的引入

图像 (信息) 压缩中，我们希望用尽量少的数据表达尽量多的信息。考虑一个离散信号 $x[n]$ ，对其做**离散变换 \mathcal{T}** 得到变换域信号 $X[k] = \mathcal{T}\{x[n]\}$ ，若 $X[k]$ 的大部分能量集中在较小的系数索引集合 \mathcal{A} 上，则可舍弃那些系数较小的部分，即进行**截断**

$$X_{\mathcal{A}}[k] = \begin{cases} X[k], & k \in \mathcal{A}, \\ 0, & k \notin \mathcal{A}, \end{cases}$$

此时，利用 $X_{\mathcal{A}}[k]$ 进行**逆变换**可得到近似信号

$$x_{\mathcal{A}}[n] = \mathcal{T}^{-1}\{X_{\mathcal{A}}[k]\}$$

我们希望通过选择合适的变换 \mathcal{T} ，使得在较小的系数集合 \mathcal{A} 下，近似信号 $x_{\mathcal{A}}[n]$ 能较好地逼近原始信号 $x[n]$ 。为此，引入**编码误差**

$$|e_{\mathcal{A}}|^2 = \sum_n |x[n] - x_{\mathcal{A}}[n]|^2$$

若变换 \mathcal{T} 是**正交变换**，则有**帕塞瓦尔定理 (Parseval's theorem)** 给出

$$\begin{aligned} |e_{\mathcal{A}}|^2 &= \sum_n |x[n] - x_{\mathcal{A}}[n]|^2 \\ &= \left(\mathbf{T}^{-1} \vec{X} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \vec{X} \right)^H \left(\mathbf{T}^{-1} \vec{X} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \vec{X} \right) \\ &= \vec{X}^H \vec{X} - \vec{X}^H \mathbf{A} \vec{X} = \sum_{k \notin \mathcal{A}} |X[k]|^2 \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{A} = \text{diag}\{\mathbf{1}_{n \in \mathcal{A}}\}$ ， \mathbf{T} 为变换矩阵， $\vec{X} = \mathbf{T} \vec{x}$ 。可见，此时**编码误差仅与被截断的系数有关**。

DFT 是序列**直接周期延拓**后的 DTFT，在两个周期的交界处会产生**不连续点**，引入了较高频率成分，导致频谱能量分布较为分散，不利于压缩。尝试将原 N 点序列**对称扩展**到 $2N$ 点，然后做 $2N$ 点 DFT，即

$$\begin{aligned} x_{\text{ext}}[n] &= \begin{cases} x[n], & 0 \leq n < N, \\ x[2N-1-n], & N \leq n < 2N, \end{cases} \\ X_{\text{ext}}[k] &= \sum_{n=0}^{2N-1} x_{\text{ext}}[n] W_{2N}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_{2N}^{nk} + \sum_{n=N}^{2N-1} x[2N-1-n] W_{2N}^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_{2N}^{nk} + \sum_{m=0}^{N-1} x[m] W_{2N}^{(2N-1-m)k} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{j\frac{\pi}{2N}k} \left(e^{-j\frac{\pi}{2N}(2n+1)k} + e^{j\frac{\pi}{2N}(2n+1)k} \right) \\ &= 2e^{j\frac{\pi}{2N}k} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{\pi}{2N}(2n+1)k\right) \end{aligned}$$

其变化基函数为余弦函数 $\cos\left(\frac{\pi}{2N}(2n+1)k\right)$ 。对其做一些系数调整以保证正交性，由此引入**离散余弦变换 (DCT)**。

(*) Def. 离散余弦变换 (DCT)

离散余弦变换 (Discrete Cosine Transform, DCT) 是一种将离散信号转换为余弦基函数系表示的线性变换。对于长度为 N 的序列 $x[n]$ ，其 DCT 定义为

$$X_{\text{DCT}}[k] = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n], & k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{\pi}{2N}(2n+1)k\right), & k = 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

DCT 的输入与输出均为实数，且具有良好的能量集中特性，适用于信号压缩。

■ DCT 的快速计算

DCT 可视为对称扩展后的 DFT，因此可以**利用 FFT 算法**进行快速计算。考虑长度为 N 的实序列 $x[n]$ ，求其 DCT 即是求

$$\chi[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{\pi}{2N}(2n+1)k\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

然后进行适当的系数调整。

■ 对称延拓方案

定义长度为 $2N$ 的序列

$$x_{\text{ext}}[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n < N, \\ x[2N-1-n], & N \leq n < 2N, \end{cases}$$

对其做 $2N$ 点 DFT，得到

$$X_{\text{ext}}[k] = 2e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2N}k} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{\pi}{2N}(2n+1)k\right)$$

取前 n 个系数的模长（或乘以相位因子 $e^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2N}k}$ ），即可得到

$$\chi[k] = \frac{1}{2\sqrt{N}} e^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2N}k} X_{\text{ext}}[k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

FFT 求 $X_{\text{ext}}[k]$ 的计算复杂度为 $O(N \log N)$ ，因此 DCT 的计算复杂度也为 $O(N \log N)$ 。

■ 直接做 $2N$ 点 DFT

另一种方法是直接对 $x[n]$ 做 $2N$ 点 DFT，即

$$X_{\text{DFT-}2N}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_{2N}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{2N}nk}$$

然后取

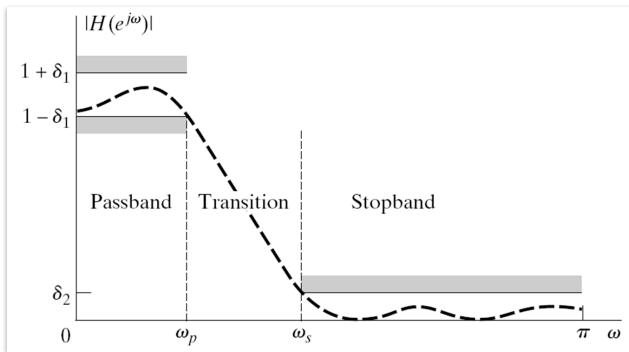
$$\begin{aligned} \Re\{e^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2N}k} X_{\text{DFT-}2N}[k]\} &= \Re\left\{\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2N}(2n+1)k}\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{\pi}{2N}(2n+1)k\right) \end{aligned}$$

即知

$$\chi[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \Re\{e^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2N}k} X_{\text{DFT-}2N}[k]\}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

同样，FFT 求 $X_{\text{DFT-}2N}[k]$ 的计算复杂度为 $O(N \log N)$ ，因此 DCT 的计算复杂度也为 $O(N \log N)$ 。

滤波与系统



典型数字低通的主要参数有：

- **通带截止频率 ω_p 、阻带截止频率 ω_s** ，定义了各频带边界为
 - 通带： $0 \leq |\omega| < \omega_p$
 - 过渡带： $\omega_p \leq |\omega| < \omega_s$
 - 阻带： $\omega_s \leq |\omega| < \pi$
- **通带峰值波纹 δ_1** ，定义为通带内增益的最大偏差，即

$$1 - \delta_1 \leq |H(e^{\mathrm{j}\omega})| \leq 1 + \delta_1, \quad \forall \omega \in [0, \omega_p)$$

通常使用 dB 值表示，即**通带波纹**为 $\alpha_1 = -20 \log_{10}(1 - \delta_1)$ dB。

- **阻带峰值波纹 δ_2** ，定义为阻带内增益的最大值，即

$$0 < |H(e^{\mathrm{j}\omega})| \leq \delta_2, \quad \forall \omega \in [\omega_s, \pi)$$

通常使用 dB 值表示，即**阻带波纹**为 $\alpha_2 = -20 \log_{10} \delta_2$ dB。

z 变换

z 变换的定义

(*) *Def.* 双边 z 变换

设离散时间信号 $x[n]$ ，其双边 z 变换定义为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

记作 $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$ ，其中 z 为复变量，通常表示为 $z = r e^{\mathrm{j}\omega}$ ， r 为模长， ω 为相位角。

■ z 变换的收敛域

由于 z 变换式为无穷 Laurent 级数，其**敛散性**取决于 z 的取值范围。对于不同的信号 $x[n]$ ，其 z 变换的**收敛域 (region of convergence, ROC)** 也不同。

序列类型	z 变换式 $Z\{x[n]\}$		收敛域 (ROC)
有限长序列	$n_1 < 0, \quad n_2 > 0$	$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]z^{-n}$	$0 < z < \infty$
	$n_1 < 0, \quad n_2 \leq 0$		$0 \leq z < \infty$
	$n_1 \geq 0, \quad n_2 > 0$		$0 < z \leq \infty$
右边序列	$X(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} x[n]z^{-n}$		$ z > r$
左边序列	$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_0} x[n]z^{-n}$		$ z < r$
双边序列	$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$		$r_1 < z < r_2$

(*) *Ex.* z 变换的收敛域举例

考虑**双边序列** $x[n] = a^{|n|}$ ，其 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n z^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{az}{1 - az}$$

两部分分别是 az^{-1} 和 az 的几何级数，其收敛分别要求 $|z| > |a|$ 和 $|z| < \frac{1}{|a|}$ ，因此整体的收敛域为

$$|a| < |z| < \frac{1}{|a|}$$

当 $|a| \geq 1$ 时，收敛域不存在。

因果系统的 z 变换收敛域为 $|z| > r$ ，其中 r 为系统**最大模值极点的模值**；**稳定系统**的 z 变换收敛域包含单位圆 $|z| = 1$ 。因此，**因果且稳定系统**要求其**所有极点均位于 z 平面单位圆内**。

■ 逆 z 变换

由 Cauchy 积分定理， z 变换具有唯一的逆变换，其表达式为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \oint_C z^{n-1} X(z) \mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \oint_C z^{n-1} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-m} \right) \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \oint_C z^{n-m-1} \mathrm{d}z \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \delta[n-m] = x[n] \end{aligned}$$

(*) *Def.* 逆 z 变换

设信号 $x[n]$ 的 z 变换为 $X(z)$ ，则其逆 z 变换定义为

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \oint_C z^{n-1} X(z) \mathrm{d}z$$

其中积分路径 C 为包含收敛域的闭合曲线。

► 留数法求逆 z 变换

逆 z 变换的积分式可通过留数定理计算。设 $X(z)$ 在收敛域内边界环内有有限个极点 $\{z_k\}$ ，在外边界环外有有限个极点 $\{z_m\}$ ，则

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi\mathbb{I}} \oint_C z^{n-1} X_R(z) dz + \frac{1}{2\pi\mathbb{I}} \oint_C z^{n-1} X_L(z) dz \\ &= \sum_k \text{Res}\{z^{n-1} X_R(z), z_k\} u[n] - \sum_m \text{Res}\{z^{n-1} X_L(z), z_m\} u[-n-1] \end{aligned}$$

其中，留数定义为

$$\text{Res}\{f(z), z_0\} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z))$$

其中 m 为极点 z_0 的阶数。

► 部分分式展开法求逆 z 变换

对于有理式 z 变换 $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ ，可以通过部分分式展开将其拆分为简单项的和，然后对每一项分别求逆 z 变换，再将结果相加。

设 $X(z)$ 可分解为

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \\ &= \sum_{m=0}^{M-N} B_m z^{-m} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{l=1}^{N_2} \sum_{s=1}^{r_l} \frac{C_{l,s}}{(1 - p_l z^{-1})^s} \end{aligned}$$

其中， p_k 和 p_l 分别为单极点和重极点的位置， N_1 和 N_2 分别为单极点和重极点的个数， r_l 为重极点 p_l 的阶数。对于这一分式展开式，各项的逆 z 变换分别为

$$\begin{aligned} z^{-m} &\xrightarrow{Z^{-1}} \delta[n-m] \\ \frac{1}{1 - p_k z^{-1}} &\xrightarrow{Z^{-1}} p_k^n u[n] \\ \frac{1}{(1 - p_l z^{-1})^s} &\xrightarrow{Z^{-1}} \frac{(n+s-1)!}{(s-1)! n!} p_l^n u[n] \end{aligned}$$

离散时间系统的 z 变换性质

■ 离散时间系统的 z 变换表示

设离散时间系统的输入输出关系为

$$y[n] + \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^M b_r x[n-r]$$

则对其做 z 变换，得到系统函数

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

其中， $X(z) = Z\{x[n]\}$ ， $Y(z) = Z\{y[n]\}$ ，系统冲激响应即为 $b[n] = Z^{-1}\{H(z)\}$ 。同时由定义知，系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b[n] e^{-j\omega n} = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

频率响应特别是幅频响应对应于系统的外在滤波特性，而系统函数 $H(z)$ 则反映了系统的内在结构实现。若对给定的幅频特性 $A(e^{j\omega}) \geq 0$ ，能够找到因果稳定的系统函数 $H(z)$ 使得 $|H(e^{j\omega})| = A(e^{j\omega})$ ，则称该幅频特性是可实现，该系统函数即为幅频特性 $A(e^{j\omega})$ 的实现。

Note 系统的可实现性

幅频特性 $A(e^{j\omega})$ 可实现的一个充分必要条件是 Paley-Wiener 条件：

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln A(e^{j\omega})| d\omega < \infty$$

进一步地，若所实现的系统是最小相位系统，则该实现是唯一的。

显然，若幅频特性 $A(e^{j\omega})$ 在某一频段内为零，则该幅频特性不可实现。一个推论是，在一个频率区间内恒为常数的幅频特性也是不可实现的。

■ 逆系统设计

通过设计逆系统，可以实现对原系统的补偿或校正。设离散时间系统的系统函数为 $H(z)$ ，则其逆系统的系统函数自然为 $H_1(z) = \frac{1}{H(z)}$ ，由部分分式法即可求出系统的冲激响应。

广义上，逆系统也可以容许延迟和缩放，即

$$H_1(z)H(z) = C z^{-D}$$

相应地，

$$b_1[n] * b[n] = C \delta[n-D]$$

可以使用最小二乘的数值方法设计逆系统，以近似满足上述关系，最小化均方误差

$$\sum_n |b_1[n] * b[n] * x[n] - x[n-D]|^2$$

原线性系统可表示为

$$\vec{y} = \mathbf{A}_b \vec{x}$$

其中， \mathbf{A}_b 为卷积矩阵

$$\mathbf{A}_b = \begin{pmatrix} b[0] & & & \\ b[1] & b[0] & & \\ b[2] & b[1] & b[0] & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

则求解逆系统等价于最小二乘求解

$$\mathbf{A}_b \vec{b}_1 \cong \vec{e}_D$$

其中 \vec{e}_D 为第 D 个位置为1，其余位置为0的单位向量。根据最小二乘解的正规方程，有

$$\hat{\vec{b}}_1 = (\mathbf{A}_b^H \mathbf{A}_b)^{-1} \mathbf{A}_b^H \vec{e}_D$$

■ 全通系统和最小相位系统

► 全通系统

全通系统是指幅频特性恒为常数的系统，其系统函数满足

$$|H_{ap}(e^{j\omega})| = C, \quad -\pi \leq \omega < \pi$$

全通系统的系统函数可表示为

$$H_{ap}(z) = C \prod_{k=1}^N \frac{-1}{p_k^*} \frac{z^{-1} - p_k^*}{1 - p_k z^{-1}} = G \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - p_k^*}{1 - p_k z^{-1}}$$

即系统的零点和极点以 $\begin{cases} z_p = p_k^* \\ z_o = (p_k^*)^{-1} \end{cases}$ 的方式成对出现，关于单位圆对称分布。

我们取一对零极点 $\left(\frac{1}{r} e^{j\varphi}, r e^{j\varphi}\right)$ 来分析，该全通系统为

$$H(z) = G \frac{z^{-1} - r e^{-j\varphi}}{1 - r e^{j\varphi} z^{-1}}$$

其相频特性为

$$\arg H(e^{j\omega}) = \arg G + \tan^{-1} \frac{(1-r^2)\sin(\omega-\varphi)}{(1-r^2)\cos(\omega-\varphi) + r(1-2r\cos(\omega-\varphi) + r^2)}$$

► 最小相位系统

最小相位系统是指**所有零点均位于单位圆内**的系统；若系统稳定、因果，则其**所有零极点均位于单位圆内**。

最小相位系统具有**最小群时延**的特性，即在所有具有相同幅频特性的因果稳定系统中，最小相位系统的群时延 $\tau_g(\omega) = -\frac{d \arg H(e^{j\omega})}{d\omega}$ 最小；因此，在幅频特性相同的因果稳定系统中，最小相位系统具有**最小能量延迟**特性，能够最快响应输入信号的能量变化。

📖 *Thm.* 系统的最小相位分解

任意系统均可分解为最小相位部分和全通部分的乘积

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{\text{ap}}(z)$$

最小相位分解的实现过程为：对系统的每个**单位圆外零点** $z_o = re^{j\varphi}$ ($r > 1$)，引入一个在该处有极点、在对应的单位圆内位置 $z'_o = (z_o^*)^{-1} = \frac{1}{r^*}e^{j\varphi}$ 有零点的全通系统，得到

$$z^{-1} - z_o^{-1} = (1 - z'_o z^{-1}) \cdot \frac{z^{-1} - z_o^{-1}}{1 - z'_o z^{-1}}$$

► 典型的离散时间系统

■ 数字正弦振荡器

数字正弦振荡器是一种用于生成离散时间正弦波信号的系统。由于保持振荡，其系统函数具有**单位圆上的共轭复数极点对**，即极点 $p_{1,2} = e^{\pm j\omega_0}$ ，其系统函数为

$$H(z) = \frac{b_0}{(1 - e^{j\omega_0}z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0}z^{-1})} = \frac{b_0}{1 - 2\cos\omega_0 \cdot z^{-1} + z^{-2}}$$

取 $b_0 = A \sin \omega_0$ ，则系统的冲激响应为

$$b[n] = A \sin(\omega_0(n+1))u[n]$$

$n = 0$ 时刻输入一个单位冲激，系统将输出一个**频率为 ω_0 ，幅度为 A 的正弦波**。

■ 数字陷波器

数字陷波器是一种用于抑制特定频率成分的系统。其系统函数具有**单位圆上的共轭复数零点对**，即零点 $z_{1,2} = e^{\pm j\omega_0}$ ，其系统函数为

$$H(z) = (1 - e^{j\omega_0}z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0}z^{-1}) = 1 - 2\cos\omega_0 \cdot z^{-1} + z^{-2}$$

这样得到的系统在频率 ω_0 处具有**零响应**，但 ω_0 附近的频率成分也会受到一定抑制。为了提高陷波器的选择性，可以在附近引入**极点对** $p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}$ ，使得系统函数变为

$$H(z) = \frac{1 - 2\cos\omega_0 \cdot z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos\omega_0 \cdot z^{-1} + r^2z^{-2}}, \quad 0 < r < 1$$

这样可以在 ω_0 附近形成**峰值响应**，从而增强陷波效果。

■ 梳状滤波器

梳状滤波器是一种具有周期性频率响应的系统，其系统函数为

IIR 滤波器

► IIR 滤波器的实现结构

IIR (Infinite Impulse Response) 滤波器是指具有**无限长冲激响应**的数字滤波器，其差分方程如

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{r=0}^M b_r x[n-r]$$

其系统函数可表示为**有理分式**

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

其显著的特征是存在分母上的**反馈**回路，存在极点。

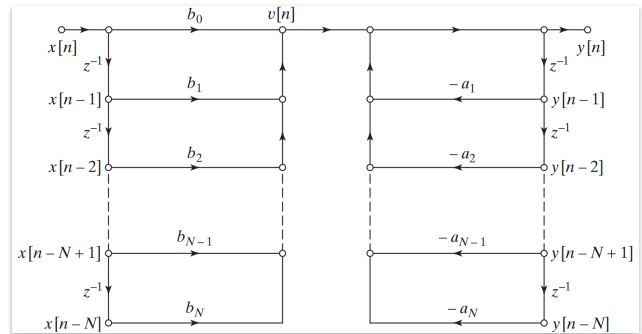
■ IIR 的直接实现

► IIR 的直接 I 型实现

一般地，IIR 滤波器可以拆分成两个**级联**子系统

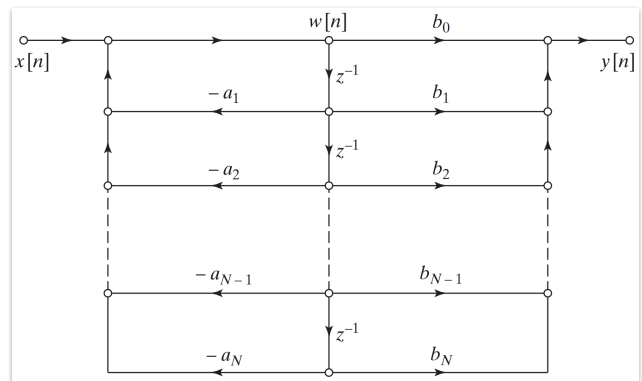
$$\begin{cases} v[n] = \sum_{r=0}^M b_r x[n-r], & (\text{滑动平均}) \\ y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + v[n] & (\text{自回归}) \end{cases}$$

直接依次实现上述两个子系统，得到**直接 I 型实现结构**。



► IIR 的直接 II 型实现

由于可以交换顺序，可以把延迟单元合并，得到**直接 II 型实现结构**。



■ IIR 的级联实现

将系统函数 $H(z)$ 分解为若干低阶子系统的乘积

$$H(z) = \frac{\prod_{r=0}^N (1 - z_r z^{-1})}{\prod_{k=0}^M (1 - p_k z^{-1})} = \prod_{i=1}^K H_i(z)$$

对实系数有理分式，其中每个子系统 $H_i(z)$ 为**一阶系统** $\frac{1 - g_r z^{-1}}{1 - c_k z^{-1}}$ 或**二阶系统** $\frac{(1 - b_r z^{-1})(1 - b_r^* z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$ ，于是 IIR 滤波器可以实现为这样多个**一阶和二阶子滤波器的级联**。子滤波器的实现可以采用直接 II 型结构。

■ IIR 的并联实现

将系统函数 $H(z)$ 分解为若干低阶子系统的和

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \\ &= \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k(1 - c_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})} \end{aligned}$$

即形成若干一阶和二阶子滤波器的并联。子滤波器的实现可以采用直接 II 型结构。

IIR 滤波器的间接设计方法

IIR 滤波器参数量大、较难控制，因此一般采用间接设计方法，先设计模拟滤波器，再通过变换转换为数字滤波器。

间接法的设计流程为：

- 根据数字滤波器的需求指标， $z = g(s)$ 变换得到模拟滤波器的需求指标；
- 设计满足模拟滤波器需求指标的模拟滤波器 $H_a(s)$ ；
- 通过 $s = f(z)$ 变换将模拟滤波器转换为数字滤波器 $H(z) = H_a(f(z))$ 。

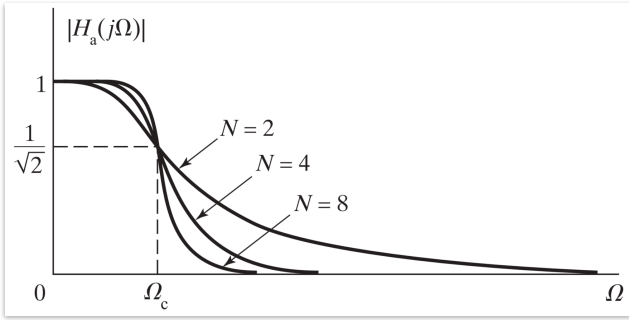
模拟滤波器的设计

Butterworth 滤波器

Butterworth 滤波器的幅频特性为

$$A(j\Omega) = |H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

其中，-3 dB 截止频率 Ω_c 和阶数 N 是待定系数。阶数 N 越大，则滤波器的过渡带越陡峭，但 -3 dB 的截止频率不变。



给定设计指标 $(\Omega_p, \Omega_s, \delta_1, \delta_2)$ 后，代入得到

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} = (1 - \delta_1)^2, \quad \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \delta_2^2$$

解得

$$N = \left\lceil \frac{\log \frac{1/(1 - \delta_1)^2 - 1}{1/\delta_2^2 - 1}}{2 \log \frac{\Omega_s}{\Omega_p}} \right\rceil, \quad \Omega_c = \Omega_p \left(\frac{1}{(1 - \delta_1)^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2N}}$$

Butterworth 滤波器的极点分布在以原点为中心、半径为 Ω_c 的圆周上。

$A(s)$ 的极点位置为

$$s_k = \Omega_c e^{j\pi \frac{2k+N-1}{2N}}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1$$

选出左半平面的极点 s_1, s_2, \dots, s_N ，则 Butterworth 滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_N)}$$

Chebyshev 滤波器

Chebyshev 滤波器分为 I 型和 II 型两种，分别对应通带波纹和阻带波纹。

Chebyshev I 型滤波器的幅频特性为

$$A(j\Omega) = |H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}$$

其中， $T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \arccos x), & |x| \leq 1, \\ \cosh(N \operatorname{arccosh} x), & |x| > 1 \end{cases}$ 为 Chebyshev 多项式； ε 为波纹因子， Ω_c 为等波纹通带的截止频率， N 为滤波器阶数，均为待定系数。

给定设计指标 $(\Omega_p, \Omega_s, \delta_1, \delta_2)$ 时，可认为 $\Omega_c = \Omega_p$ ；波纹因子 ε 与通带最大衰减 δ_1 的关系为

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} = 1 - \delta_1, \quad \text{i.e.} \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{1}{(1 - \delta_1)^2} - 1}$$

Chebyshev I 型滤波器在通带内等波纹，为了满足阻带衰减要求 δ_2 ，需要满足

$$\frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)} = \delta_2^2$$

解得

$$N = \left\lceil \frac{\operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{\delta_2^2} - 1}\right)}{\operatorname{arccosh}\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)} \right\rceil$$

Chebyshev I 型滤波器的极点位置为

$$s_k = -a \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right) + jb \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right), \quad k = 1, 2, \dots, N$$

其中， $a = \Omega_c \sinh\left(\frac{1}{N} \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\varepsilon}\right)$ ， $b = \Omega_c \cosh\left(\frac{1}{N} \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\varepsilon}\right)$ 。于是，可得到 Chebyshev I 型滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\varepsilon \times 2^{N-1} (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_N)}$$

Chebyshev II 型滤波器具有等波纹阻带，其幅频特性为

$$A(j\Omega) = |H_a(j\Omega)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{T_N^2\left(\frac{\Omega_c}{\Omega}\right)}}$$

类似可给出其设计。

s 平面到 z 平面的变换方法

冲激响应不变法

冲激响应不变法基于采样保持的思想，将模拟滤波器的冲激响应 $b_a(t)$ 以采样周期 T 采样，得到数字滤波器的冲激响应

$$b[n] = T b_a(nT)$$

模拟滤波器的系统函数可表示为

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - p_k}, \quad A_k = (s - s_k) H_a(s) \Big|_{s=p_k}$$

其冲激响应为

$$b_a(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_a(s)\} = \sum_{k=1}^N A_k e^{p_k t} u(t)$$

则数字滤波器的冲激响应为

$$b[n] = T \sum_{k=1}^N A_k e^{p_k n T} u[n]$$

得到其系统函数为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b[n] z^{-n} = T \sum_{k=1}^N A_k \sum_{n=0}^{\infty} (e^{p_k T} z^{-1})^n = T \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

基于模拟滤波器的冲激响应以采样周期 T 采样得到数字滤波器的冲激响应，则模拟滤波器极点 p_k 与数字滤波器极点 z_k 的对应关系为

$$z_k = e^{p_k T}$$

即系统函数项的对应关系为

$$\frac{1}{s - p_k} \longleftrightarrow \frac{T}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

► 双线性变换法

冲激响应不变法会引入**混叠失真**，因此更常用的是**双线性变换法**。其基本思想是通过压缩 $(-\infty, +\infty)$ 的 s 平面 $j\Omega$ 轴到 $[-\pi, \pi]$ 的 z 平面的角度区间，从而避免混叠失真。

具体地，令

$$j\Omega = k \cdot j \tan\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) = k \frac{e^{j\Omega_1 T/2} - e^{-j\Omega_1 T/2}}{e^{j\Omega_1 T/2} + e^{-j\Omega_1 T/2}}$$

为保持 $\Omega_1 \rightarrow 0$ 时 $\Omega \rightarrow 0$ ，须取 $k = \frac{2}{T}$ 。进而，由虚轴扩展到整个 s 平面，得到

$$s = \frac{2}{T} \frac{e^{s_1 T/2} - e^{-s_1 T/2}}{e^{s_1 T/2} + e^{-s_1 T/2}} = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}}$$

令 $z = e^{s_1 T}$ ，即得到**双线性变换**关系

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

由此可将模拟滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 转换为数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 。

在双线性变换法下，模拟频率 Ω 与数字频率 ω 的关系为

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

数字滤波器的指标也需要相应调整。

■ 数字频率变换

数字频率变换法通过对数字滤波器的系统函数进行变量替换，实现不同频率特性的滤波器设计。设有数字滤波器 $H_L(z)$ ，通过**变量替换** $z = G(Z)$ 得到新的数字滤波器

$$H_d(Z) = H_L(G(Z))$$

变量替换函数应满足：

- 保持单位圆映射，即当 $Z = e^{j\omega}$ 时， $G(Z)$ 也应在单位圆上；
- 单位圆内映射到单位圆内，以保证稳定性，即当 $|Z| < 1$ 时， $|G(Z)| < 1$ 。

全通系统的系统函数即满足上述条件，因而通常取 1 阶全通系统作为变量替换函数

$$G(Z) = \frac{Z - \alpha}{1 - \alpha^* Z}$$

► 低通到低通的频率变换

设有低通滤波器 $H_L(z)$ ，变量替换要求

- 保持**通带中心频率**不变： $G(e^{j0}) = e^{j0}$ ；
- 调整**通带截止频率**位置： $z = e^{j\theta_c} \rightarrow Z = e^{j\omega_c}$ 。

代入 $e^{j\theta_c} = G(e^{j\omega_c})$ ，解得

$$\alpha = \frac{\sin \frac{\theta_c - \omega_c}{2}}{\sin \frac{\theta_c + \omega_c}{2}}$$

► 低通到高通的频率变换

设有低通滤波器 $H_L(z)$ ，变量替换要求

- 移动**通带中心频率**到 π ： $G(e^{j0}) = e^{j\pi}$ ；
- 调整**通带截止频率**位置： $z = e^{j\theta_c} \rightarrow Z = e^{-j\omega_c}$ 。

代入 $e^{j\theta_c} = G(e^{-j\omega_c})$ ，解得

$$\alpha = -\frac{\cos \frac{\theta_c + \omega_c}{2}}{\cos \frac{\theta_c - \omega_c}{2}}$$

► 低通到带通的频率变换

设有低通滤波器 $H_L(z)$ ，变量替换要求

- 移动**通带中心频率**到 ω_0 ： $G(e^{j0}) = e^{j\omega_0}$ ；
- 调整**通带宽度**位置： $z = e^{j\theta_c} \rightarrow Z = e^{j\omega_1}$ 和 $z = e^{-j\theta_c} \rightarrow Z = e^{-j\omega_2}$ 。

两处位置调整，使用 2 阶全通系统作为变量替换函数，代入解得

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{-2\alpha k}{k+1}, \\ \alpha_2 = \frac{k-1}{k+1}, \end{cases} \quad \text{其中} \quad k = \frac{\tan \frac{\theta_c}{2}}{\tan \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}}, \quad \alpha = \frac{\cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}}{\cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}}$$

FIR 滤波器

► FIR 滤波器的实现结构

FIR (Finite Impulse Response) 滤波器是指具有**有限长冲激响应**的数字滤波器，冲激响应 $b(t)$ 时宽有限，意味着系统函数 $H(z)$ 是**有限长多项式**

$$b[n] = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k] \implies H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

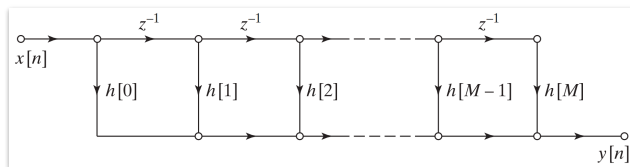
故 FIR 滤波器的差分方程为

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

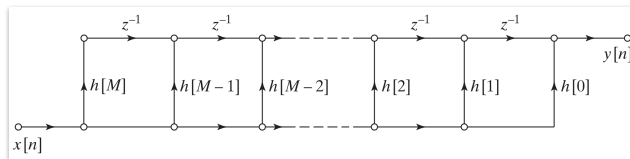
FIR 滤波器**没有反馈**回路，极点在 $z = 0$ 处，天然稳定。

■ FIR 的直接实现

FIR 滤波器可以直接根据差分方程实现：



也可以先加权、后延时，即形成**转置结构**：



■ FIR 的级联实现

对 FIR 滤波器，其系统函数 $H(z)$ 可分解为若干低阶多项式的乘积

$$H(z) = A \prod_{k=1}^{M_1} (1 - g_k z^{-1}) \prod_{l=1}^{M_2} (1 - b_l z^{-1})(1 - b_l^* z^{-1})$$

其中， $g_k \in \mathbb{R}$ ， $b_k \in \mathbb{C}$ 。则 FIR 滤波器可以实现为多个**一阶和二阶子滤波器的级联**。

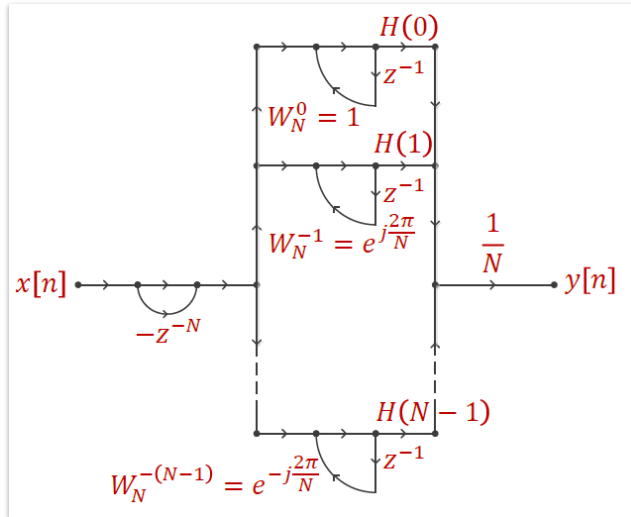
■ FIR 的频率取样实现

我们希望直接根据频率响应设计 FIR 滤波器。考虑到

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} b[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k]W_N^{-kn}$$

$$= \frac{1}{N}(1 - z^{-N}) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k]}{1 - W_N^{-k}z^{-1}}$$

其中, $W_N^k = e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$, $H[k] = H(z)|_{z=W_N^k}$ 。因此, 可以通过 N 个频率取样回路并联的方式设计 FIR 滤波器。



这一方案为 FIR 滤波器引入了极点且极点在单位圆上, 为稳定性考虑, 可以稍微缩小极点模值。借助 DFT 的频移性质, 亦可使用 $H(e^{j(\frac{2\pi k}{N} + \alpha)})$ 的值进行频率取样。

线性相位 FIR 滤波器

线性相位滤波器的实现

对线性相位 LTI 系统, 应有

$$H(e^{j\omega}) = \hat{H}(e^{j\omega})e^{-j(\alpha\omega - \beta)}$$

$$= \hat{H}(e^{j\omega})\cos(\alpha\omega - \beta) - j\hat{H}(e^{j\omega})\sin(\alpha\omega - \beta)$$

其中 $\hat{H}(e^{j\omega})$ 为实函数; 由频率响应定义,

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b[n]\cos(\omega n) - j \sum_{n=-\infty}^{\infty} b[n]\sin(\omega n)$$

两式相位相同, 应有

$$-\frac{\sin(\alpha\omega - \beta)}{\cos(\alpha\omega - \beta)} = -\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} b[n]\sin(\omega n)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} b[n]\cos(\omega n)}$$

即得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b[n]\sin(\omega(n - \alpha) + \beta) = 0$$

为使上式对任意 ω 成立,

1. 若 $\beta = 0$ 或 $\beta = \pi$, 则 $b[n]$ 应关于 $n = \alpha$ 偶对称;
2. 若 $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$, 则 $b[n]$ 应关于 $n = \alpha$ 奇对称。

因此, 因果的线性相位滤波器一定是 FIR 滤波器, 且其冲激响应 $b[n]$ 满足以下四种情况之一:

阶数 $M = 2\alpha$	对称性 β	
	偶对称 $\beta = 0, \pi$ $b[n] = b[M - n]$	奇对称 $\beta = \pm\pi/2$ $b[n] = -b[M - n]$
偶数	第 I 类线性相位 FIR 滤波器 低通、高通、带通	第 III 类线性相位 FIR 滤波器 带通
奇数	第 II 类线性相位 FIR 滤波器 低通、带通	第 IV 类线性相位 FIR 滤波器 高通、带通

由于 $b[n] = \pm b[M - n]$ 的对称性, 亦有

$$H(z) = \pm z^{-M}H(z^{-1})$$

FIR 滤波器没有极点, 其零点对称性受到这一对称性约束, 呈现为

- 若 $z_0 = re^{j\varphi}$ 是零点, 则其关于单位圆的倒数 $z'_0 = \frac{1}{z_0} = \frac{1}{r}e^{j\varphi}$ 也是零点, 二者的共轭复数亦是零点; 特别地,
 - 若实数 z_1 是零点, 则其关于单位圆的倒数 $z'_1 = \frac{1}{z_1}$ 也是零点;
 - 若单位圆上的零点 $z_2 = e^{j\varphi}$ 是零点, 则其共轭复数 $e^{-j\varphi}$ 也是零点。
- 单位圆与实轴的交点 ± 1 至少有一个是零点。

第 I 类线性相位 FIR 滤波器

第 I 类线性相位 FIR 滤波器满足 M 为偶数且 $b[n] = b[M - n]$, 频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M b[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} b[n]e^{-j\omega n} + b\left[\frac{M}{2}\right]e^{-j\omega\frac{M}{2}} + \sum_{n=\frac{M}{2}+1}^M b[n]e^{-j\omega n}$$

$$= e^{-j\omega\frac{M}{2}} \left(b\left[\frac{M}{2}\right] + 2 \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} b[n]\cos\left(\omega\left(n - \frac{M}{2}\right)\right) \right)$$

$$= e^{-j\omega\frac{M}{2}} \left(b\left[\frac{M}{2}\right] + 2 \sum_{m=1}^{\frac{M}{2}} b\left[\frac{M}{2} - m\right]\cos(\omega m) \right)$$

$$= e^{-j\omega\frac{M}{2}} \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}} a_m \cos(\omega m) = e^{-j\omega\frac{M}{2}} \hat{H}(e^{j\omega})$$

其中, $a_0 = b\left[\frac{M}{2}\right]$, $a_m = 2b\left[\frac{M}{2} - m\right]$, $m = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$ 。由于

$\hat{H}(e^{j\omega})$ 偶对称且关于 $\omega = \pi$ 也偶对称, 第 I 类线性相位 FIR 滤波器可以实现低通、高通、带通滤波器。

第 II 类线性相位 FIR 滤波器

第 II 类线性相位 FIR 滤波器满足 M 为奇数且 $b[n] = b[M - n]$, 频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M b[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} b[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=\frac{M+1}{2}}^M b[n]e^{-j\omega n}$$

$$= e^{-j\omega\frac{M}{2}} \sum_{m=1}^{(M+1)/2} b_m \cos\left(\omega\left(m + \frac{1}{2}\right)\right) = e^{-j\omega\frac{M}{2}} \hat{H}(e^{j\omega})$$

其中, $b_m = 2b\left[\frac{M+1}{2} - m\right]$, $m = 1, 2, \dots, \frac{M+1}{2}$ 。由于 $\hat{H}(e^{j\omega})$ 偶对称而关于 $\omega = \pi$ 奇对称, 第 II 类线性相位 FIR 滤波器可以实现低通、带通滤波器。

第 III 类线性相位 FIR 滤波器

第 III 类线性相位 FIR 滤波器满足 M 为偶数且 $b[n] = -b[M - n]$, 频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M b[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} b[n]e^{-j\omega n} + b\left[\frac{M}{2}\right]e^{-j\omega\frac{M}{2}} + \sum_{n=\frac{M}{2}+1}^M b[n]e^{-j\omega n}$$

$$= e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{M}{2}\omega\right)} \sum_{m=1}^{\frac{M}{2}} c_m \sin(\omega m) = e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{M}{2}\omega\right)} \hat{H}(e^{j\omega})$$

其中, $c[0] = b\left[\frac{M}{2}\right]$, $c_m = 2b\left[\frac{M}{2} - m\right]$, $m = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$ 。由于

$\hat{H}(e^{j\omega})$ 奇对称且关于 $\omega = \pi$ 也奇对称, 第 III 类线性相位 FIR 滤波器只能实现带通滤波器。

第 IV 类线性相位 FIR 滤波器

第 IV 类线性相位 FIR 滤波器满足 M 为奇数且 $b[n] = -b[M - n]$, 频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M b[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} b[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=\frac{M+1}{2}}^M b[n]e^{-j\omega n}$$

$$= e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{M}{2}\omega\right)} \sum_{m=1}^{(M+1)/2} d_m \sin\left(\omega\left(m - \frac{1}{2}\right)\right) = e^{-j\omega\frac{M}{2}} \hat{H}(e^{j\omega})$$

其中, $d_m = 2b \left[\frac{M+1}{2} - m \right]$, $m = 1, 2, \dots, \frac{M+1}{2}$ 。由于 $\hat{H}(e^{j\omega})$ 奇对称而关于 $\omega = \pi$ 偶对称, **第 IV 类线性相位 FIR 滤波器**可以实现高通、带通滤波器。

■ 窗函数法设计线性相位 FIR 滤波器

设我们期望实现频响为 $H_d(e^{j\omega})$ 的滤波器, 为此设计 $b[n]$, 使其 DTFT $H(e^{j\omega})$ 尽可能接近 $H_d(e^{j\omega})$ 。在**均方误差**意义下, 即希望

$$b[n] = \arg \min_{b[n]} \|H(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})\|^2 = \arg \min_{b[n]} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

设 $b_d[n] = \text{IDTFT}\{H_d(e^{j\omega})\}$, 由 Parseval 定理, 有

$$\begin{aligned} \|H(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})\|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b[n] - b_d[n]|^2 \\ &= \sum_{n=0}^M |b[n] - b_d[n]|^2 + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} |b_d[n]|^2 + \sum_{n=M+1}^{\infty} |b_d[n]|^2}_{\text{与 } b[n] \text{ 无关}} \end{aligned}$$

因此, **均方误差**意义下的**最优 M 阶 FIR 滤波器**冲激响应为

$$b[n] = \begin{cases} b_d[n], & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} = \text{IDTFT}\{H_d(e^{j\omega})\} \cdot w_{\text{rect}, M}[n]$$

即 $\text{IDTFT}\{H_d(e^{j\omega})\}$ 加**矩形窗**截断得到。

然而, 矩形窗截断会引入 **Gibbs 现象**, 导致频率响应出现较大波纹。为减小 Gibbs 现象, 可采用其他窗函数 $w[n]$ 截断理想冲激响应, 从而设计 FIR 滤波器。

► 固定窗

固定窗具有**不可调节**的主瓣宽度与阻带衰减特性, 常用的固定窗函数及其性能如下表所示:

窗函数	过渡带宽度 $\Delta\omega (\times \frac{2\pi}{N})$	最小阻带衰减 α_2 (dB)
矩形窗	0.89	21
三角窗	2.1	25
Hanning	3.1	44
Hamming	3.3	53
Blackman	5.5	74

使用时, 只需根据所需的过渡带宽度与阻带衰减选择合适的窗函数, 并根据线性相位 FIR 滤波器的特性确定窗长 M , 然后截断理想冲激响应即可。

► Kaiser 窗

Kaiser 窗是一种**参数化**窗函数, 可通过调整参数 β 控制主瓣宽度与旁瓣高度之间的权衡。Kaiser 窗定义为

$$w_{\text{Kaiser}, M, \beta}[n] = \begin{cases} \frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left(\frac{n}{\alpha} - 1\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中, $\alpha = \frac{M}{2}$, $I_0(\cdot)$ 是**零阶修正贝塞尔函数 (modified Bessel function of the first kind of order zero)**, 定义为

$$I_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(x/2)^k}{k!}\right)^2$$

Kaiser 窗的参数由经验公式给出, 即对于给定的**阻带波纹** δ_2 ($\alpha_2 = -20 \log_{10} \delta_2$ dB) 和**过渡带宽度** $\Delta\omega = |\omega_s - \omega_p|$, 有

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(\alpha_2 - 8.7), & \alpha_2 > 50, & \text{(深阻带)} \\ 0.5842(\alpha_2 - 21)^{0.4} + 0.07886(\alpha_2 - 21), & 21 \leq \alpha_2 \leq 50, & \text{(中阻带)} \\ 0, & \alpha_2 < 21, & \text{(浅阻带)} \end{cases}$$
$$M = \frac{\alpha_2 - 8}{2.285\Delta\omega}$$

Hilbert 变换

► Hilbert 变换的定义

■ 连续时间 Hilbert 变换

► 连续时域信号的 Hilbert 变换

设 $x(t)$ 为连续时间信号, 其 Fourier 变换 $X(j\Omega)$ 满足

$$X(j\Omega) = \begin{cases} X(j\Omega), & \Omega \geq 0, \\ 0, & \Omega < 0, \end{cases}$$

即 $x(t)$ 仅包含正频率成分。我们考虑其**实部** $x_r(t)$ 与**虚部** $x_i(t)$ 之间的关系, 设

$$x_r(t) \longleftrightarrow X_r(j\Omega), \quad x_i(t) \longleftrightarrow X_i(j\Omega)$$

则由 Fourier 变换的线性性质, 可设

$$X(j\Omega) = X_r(j\Omega) + jX_i(j\Omega) = \begin{cases} kX_r(j\Omega), & \Omega \geq 0, \\ 0, & \Omega < 0 \end{cases}$$

一种可能是

$$X_i(j\Omega) = \begin{cases} -jX_r(j\Omega), & \Omega \geq 0, \\ jX_r(j\Omega), & \Omega < 0 \end{cases} = H(j\Omega)X_r(j\Omega)$$

其中 $H(j\Omega) = -j \text{sgn}(\Omega)$, 其 Fourier 逆变换为

$$b(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{\pi t}$$

因此有

$$x_i(t) = x_r(t) * b(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_r(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

由此可见, 信号的实部与虚部之间通过卷积关系联系在一起, 这种卷积关系即为**Hilbert 变换**。

(*) Def. 连续时域 Hilbert 变换

连续时间信号 $x(t)$ 的 Hilbert 变换 (Hilbert transform) 定义为

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau = x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

逆变换为

$$x(t) = -\frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau = \hat{x}(t) * \left(-\frac{1}{\pi t}\right)$$

其中 $\text{P.V.} \int$ 表示主值积分 (Cauchy principal value), 用于处理积分中的奇点。

连续时域 Hilbert 变换描述了**频域单边**信号的**实部、虚部关系**。信号 $x(t) = x_r(t) + j\hat{x}_r(t)$ 保留了 $x_r(t)$ 的所有正频率成分, 而将负频率成分全部去除, 称为信号 $x_r(t)$ 的**解析信号 (analytic signal)**。

► 连续频域信号的 Hilbert 变换

设有因果信号 $x(t) = x(t)u(t)$, 其 Fourier 变换为

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\Omega) = X_R(j\Omega) + jX_I(j\Omega)$$

由于

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{2\pi} \left(\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega} \right)$$

则由卷积定理, 有

$$X(j\Omega) = X(j\Omega) * \mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{2\pi} (X_R(j\Omega) + jX_I(j\Omega)) * \left(\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega} \right)$$

展开后可得

$$\begin{aligned} X_R(j\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \left(\pi X_R(j\Omega) + X_I(j\Omega) * \frac{1}{\Omega} \right) \\ X_I(j\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \left(\pi X_I(j\Omega) - X_R(j\Omega) * \frac{1}{\Omega} \right) \end{aligned}$$

解出

$$X_R(\mathbb{J}\Omega) = \frac{1}{\pi} X_I(\mathbb{J}\Omega) * \frac{1}{\Omega} = \frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_I(\mathbb{J}\Omega')}{\Omega - \Omega'} d\Omega'$$

$$X_I(\mathbb{J}\Omega) = -\frac{1}{\pi} X_R(\mathbb{J}\Omega) * \frac{1}{\Omega} = -\frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_R(\mathbb{J}\Omega')}{\Omega - \Omega'} d\Omega'$$

⊗ Def. 连续频域 Hilbert 变换

连续频域信号 $X(\mathbb{J}\Omega)$ 的 Hilbert 变换 (Hilbert transform) 定义为

$$\hat{X}(\mathbb{J}\Omega) = \frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\mathbb{J}\Omega')}{\Omega - \Omega'} d\Omega'$$

逆变换为

$$X(\mathbb{J}\Omega) = -\frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{X}(\mathbb{J}\Omega')}{\Omega - \Omega'} d\Omega'$$

其中 $\text{P.V.} \int$ 表示主值积分 (Cauchy principal value), 用于处理积分中的奇点。

类似地, 连续频域 Hilbert 变换描述了**时域单边信号的实部、虚部关系**。信号 $X(\mathbb{J}\Omega) = X_R(\mathbb{J}\Omega) + \mathbb{J}\hat{X}_R(\mathbb{J}\Omega)$ 保留了 $X_R(\mathbb{J}\Omega)$ 的所有正时间成分, 而将负时间成分全部去除, 称为信号 $X_R(\mathbb{J}\Omega)$ 的**解析频谱 (analytic spectrum)**。

■ 离散时间 Hilbert 变换

► 离散时域信号的 Hilbert 变换

连续时间信号的 Hilbert 变换非因果, 难以实现。但如果有限长冲激响应, **非因果的离散时间系统**某种意义上是可以实现的。

类比 $H(\mathbb{J}\Omega) = -\mathbb{J} \text{sgn}(\Omega)$, 设

$$H(e^{\mathbb{J}\omega}) = -\mathbb{J} \text{sgn}(\omega) = \begin{cases} -\mathbb{J}, & 0 < \omega < \pi, \\ 0, & \omega = 0, \\ \mathbb{J}, & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

则其逆 DTFT 为

$$b[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{\mathbb{J}\omega}) e^{\mathbb{J}\omega n} d\omega = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \frac{2}{\pi} \sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right), & n \neq 0 \end{cases}$$

因此, 若 $z[n] = x_r[n] + \mathbb{J}x_i[n]$ 为解析信号, 则与连续时间情形类似, 有

$$x_i[n] = x_r[n] * b[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_r[n-m] b[m] = \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{x_r[n-(2m+1)]}{2m+1}$$

⊗ Def. 离散时域 Hilbert 变换

离散时间信号 $x[n]$ 的 Hilbert 变换 (Hilbert transform) 定义为

$$\hat{x}[n] = x[n] * b[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m] b[m] = \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{x[n-(2m+1)]}{2m+1}$$

逆变换为

$$x[n] = -\hat{x}[n] * b[n] = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n-m] b[m] = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}[n-(2m+1)]}{2m+1}$$

$$\text{其中 } b[n] = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \frac{2}{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n}, & n \neq 0 \end{cases}$$

► 离散频域信号的 Hilbert 变换

任意序列 $x[n]$ 可分解为**奇、偶分量**, 为

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n], \quad \begin{cases} x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]), \\ x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) \end{cases}$$

设有实因果信号 $x[n] = x[n]u[n]$, 则

$$x[n] = 2x_e[n]u[n] - x_e[0]\delta[n] = 2x_o[n]u[n] + x[0]\delta[n]$$

解得

$$\begin{cases} x_o[n] = x_e[n] \text{sgn}[n], \\ x_e[n] = x_o[n] \text{sgn}[n] + x[0]\delta[n] \end{cases}$$

由**DTFT 的共轭对称关系**, $x_e[n] \longleftrightarrow X_R(e^{\mathbb{J}\omega})$, $x_o[n] \longleftrightarrow \mathbb{J}X_I(e^{\mathbb{J}\omega})$, 则有

$$X_R(e^{\mathbb{J}\omega}) = x[0] + \frac{1}{2\pi} \text{P.V.} \int_{-\pi}^{\pi} X_I(e^{\mathbb{J}\omega'}) \cot\left(\frac{\omega - \omega'}{2}\right) d\omega'$$

$$X_I(e^{\mathbb{J}\omega}) = -\frac{1}{2\pi} \text{P.V.} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{\mathbb{J}\omega'}) \cot\left(\frac{\omega - \omega'}{2}\right) d\omega'$$

⊗ Def. 离散频域 Hilbert 变换

离散频域信号 $X(e^{\mathbb{J}\omega})$ 的 Hilbert 变换 (Hilbert transform) 定义为

$$\hat{X}(e^{\mathbb{J}\omega}) = -\frac{1}{2\pi} \text{P.V.} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{\mathbb{J}\omega'}) \cot\left(\frac{\omega - \omega'}{2}\right) d\omega'$$

逆变换为

$$X(e^{\mathbb{J}\omega}) = \frac{1}{2\pi} \text{P.V.} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}(e^{\mathbb{J}\omega'}) \cot\left(\frac{\omega - \omega'}{2}\right) d\omega'$$

其中 $\text{P.V.} \int$ 表示主值积分 (Cauchy principal value), 用于处理积分中的奇点。