

采样与量化

信号的分类

		定义域 (时域)	
		连续	离散
值域	连续	连续信号	离散 (时间) 信号
	离散		数字信号

采样的数学表示

零阶抽样保持

对信号 $x(t)$ 进行采样，采样周期为 T ，采样频率为 $f_s = \frac{1}{T}$ ，则使用的采样信号为

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

采样后的信号为

$$x_s(t) = x(t) \cdot s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$

此时的 $x_s(t)$ 仍为连续时间信号，但其可直接转换为离散时间信号

$$x[n] = x(nT)$$

频域上， $x(t)$ 的频谱为 $X(\Omega)$ ，则采样后的信号频谱为

$$X_s(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * \left(\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) \right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega - k\Omega_s)$$

Nyquist 采样定理

《信号与系统》课程中已知：

『*Theorem* Nyquist 采样定理』

如果带限信号 $x(t)$ 的最高频率为 Ω_m ，即

$$X(\Omega) = 0, \quad |\Omega| > \Omega_m$$

则当采样频率 $\Omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2\Omega_m$ 时，信号 $x(t)$ 可以由其采样值 $x[n] = x(nT)$ 唯一确定。

Nyquist 采样定理是充分条件，对于「带限」以外的条件并没有说明。

非基带信号

对于非基带的带限信号，即有最低频率 Ω_L 和最高频率 Ω_U 的带通信号 $x(t)$ ，即使不满足 Nyquist 采样条件，也可能不发生混叠现象。

具体地，我们考虑 $(-\Omega_U, -\Omega_L)$ 频段在平移后与 (Ω_L, Ω_U) 频段不重叠的条件，即

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} N\Omega_s - \Omega_L \leq \Omega_L, \\ (N+1)\Omega_s - \Omega_U \geq \Omega_U, \end{cases} \iff \frac{2\Omega_U}{N+1} \leq \Omega_s \leq \frac{2\Omega_L}{N}$$

多采样率处理

采样率转换

整数倍降采样

对离散信号 $x[n]$ ，考虑每 M 个值保留 1 个值，构成新序列

$$y[n] = x[Mn]$$

称为 **M 倍抽取 (decimation)**。如果 $x[n] = x_a(nT_s)$ 是由某连续时间信号连续时间信号 $x_a(t)$ 以采样周期 T_s 采样得到的，则 $y[n]$ 可视为对 $x_a(t)$ 以采样周期 MT_s 采样得到的离散信号，即采样率降低为原来的 $\frac{1}{M}$ 。

抽取过程可以通过以下两步实现：

1. 对不需要的离散点置零，得到中间序列

$$x_M[n] = x[n] \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - Mm] \xrightarrow{\text{Poisson}} x[n] \cdot \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{\frac{j2\pi}{M} kn}$$

其 z 变换为

$$X_M(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x[n] \cdot \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{\frac{j2\pi}{M} kn} \right) z^{-n} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(z \cdot e^{-\frac{j2\pi}{M} k} \right)^{-n} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X \left(ze^{-\frac{j2\pi}{M} k} \right)$$

2. 对中间序列进行压缩，得到最终序列

$$y[n] = x_M[Mn]$$

其 z 变换为

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_M[Mn] z^{-n} \xrightarrow{n=\frac{m}{M}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_M[m] \left(z^{\frac{1}{M}} \right)^{-m} = X_M \left(z^{\frac{1}{M}} \right) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X \left(z^{\frac{1}{M}} e^{-\frac{j2\pi}{M} k} \right)$$

注意到，采样率为 $\frac{1}{T_s}$ 时满足 Nyquist 采样定理的信号，在采样率为 $\frac{1}{MT_s}$ 时可能会发生混叠现象。因此，在抽取前通常需要对信号进行低通滤波 $X_{LP}(z) = H_{LP}(z)X(z)$ ，以抑制高频成分，防止混叠。这样，所得信号的 z 变换为

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_{LP} \left(z^{\frac{1}{M}} e^{-\frac{j2\pi}{M} k} \right) X \left(z^{\frac{1}{M}} e^{-\frac{j2\pi}{M} k} \right)$$

所得的时域信号为

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{LP}[Mn - m] \cdot x[m]$$

整数倍升采样

对离散信号 $x[n]$ ，类似地考虑以下步骤提升采样率：

1. 对每个离散点之间插入 $L-1$ 个零，得到中间序列

$$x_L[n] = \begin{cases} x \left[\frac{n}{L} \right], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

其 z 变换为

$$X_L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_L[n] z^{-n} \xrightarrow{n=\frac{m}{L}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left(z^L \right)^{-m} = X(z^L)$$

2. 显然引入了大量高频分量，对中间序列进行低通滤波，得到最终序列

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{LP}[n - m] \cdot x_L[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{LP}[n - kL] \cdot x[k]$$

其 z 变换为

$$Y(z) = H_{LP}(z) \cdot X(z^L)$$

其中 $H_{LP}(e^{j\omega})$ 的通带应为 $|\omega| \leq \frac{\pi}{L}$ ，以滤除插入零点引入的高频成分。

这称为 L 倍理想插值 (ideal interpolation)，完整保持了原始频谱的信息。

有理数倍采样率转换

对于任意有理数 $\alpha = \frac{L}{M}$ ，可以通过先进行 L 倍升采样，再进行 M 倍降采样来实现采样率转换。

采样率转换的高效实现

■ 滤波与抽取/零插的交换

前述整数倍降采样和整数倍升采样都在高数据率下做滤波，其计算复杂度较高。我们希望交换低通滤波与抽取/零插的顺序，从而在低数据率下做滤波，降低计算复杂度。

可以证明：如果 M 倍降采样前的低通滤波器可以写成 $H(z^M)$ 的形式，则可以交换低通滤波与抽取的顺序；如果 L 倍升采样前的低通滤波器可以写成 $H(z^L)$ 的形式，则可以交换低通滤波与零插的顺序。

- 对于 M 倍降采样，

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_{LP} \left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}k} \right) X \left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}k} \right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H \left(\left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}k} \right)^M \right) X \left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}k} \right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H \left(z e^{-j2\pi k} \right) X \left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}k} \right) \\ &= H(z) \cdot \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X \left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}k} \right) = H(z) \cdot X_M \left(z^{\frac{1}{M}} \right) \end{aligned}$$

即等价于抽取结果 $X_M \left(z^{\frac{1}{M}} \right)$ 经 $H(z)$ 滤波。

- 对于 L 倍升采样，

$$Y(z) = H_{LP}(z) \cdot X(z^L) = H(z^L) \cdot X(z^L) = (H(z') \cdot X(z'))|_{z'=z^L}$$

即等价于 $X(z)$ 经 $H(z)$ 滤波后再进行 L 倍零插。

■ 采样率的级联转换

当降/升采样率变化比例较大时，抗混叠滤波设计实现较为困难，可考虑采用级联实现降低计算量。

≡ E.G. CIC 滤波器

积分器—梳状滤波器级联 (cascaded integrator-comb, CIC) 系统是一种常用的多采样率转换结构，适用于大倍率的升/降采样率转换。CIC 系统由多个积分器级联和多个梳状滤波器级联组成，且不需要乘法运算，计算复杂度低，非常适合硬件实现。

■ 多相滤波器结构

单通道滤波器在多采样率处理中的计算效率较低，可采用多相滤波器结构 (polyphase filter structure) 提高计算效率。考虑

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \xrightarrow{n=kL+m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{L-1} x[kL+m] z^{-(kL+m)} \\ &= \sum_{m=0}^{L-1} z^{-m} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kL+m] (z^L)^{-k} \right) = \sum_{m=0}^{L-1} z^{-m} X_m(z^L) \end{aligned}$$

即分解为 L 相子序列的和，称为信号的多相分解，其中

$X_m(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kL+m] z^{-k}$ 是 $x[n]$ 的第 m 相子序列
 $\dots, x[m], x[L+m], x[2L+m], \dots$ 的 z 变换。

类似地，滤波器的多相分解为

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b[n] z^{-n} \xrightarrow{n=kL+m} \sum_{m=0}^{L-1} z^{-m} H_m(z^L)$$

其中 $H_m(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b[kL+m] z^{-k}$ 是滤波器 $b[n]$ 的第 m 相子滤波器。

利用滤波与抽取/零插的交换原理，各相子滤波器可与抽取/零插操作交换，从而在低采样率下实现滤波，进一步降低计算复杂度。

■ 均匀滤波器组的分解与重构

■ 均匀 DFT 滤波器组的分解

使用多路并行的一组滤波器是实现子带分解，即将高数据率宽带信号分解为多路低速率窄带信号的有效方法。

设将基础低通滤波器 $H_0(z)$ 在频率上均匀移位 N 次，得到 N 个滤波器

$$H_k(z) = H_0 \left(z \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

每个滤波器均作为 N 倍降采样前的抗混叠滤波器，都需接受高数据率信号 $X(z)$ 进行滤波，计算复杂度较高，因此考虑使用多相滤波器结构进行优化。

将基础低通滤波器 $H_0(z)$ 进行 N 相分解有

$$H_0(z) = \sum_{m=0}^{N-1} z^{-m} H_{0,m}(z^N)$$

则每个滤波器 $H_k(z)$ 可表示为

$$\begin{aligned} H_k(z) &= H_0 \left(z \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \right) = \sum_{m=0}^{N-1} \left(z \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \right)^{-m} H_{0,m} \left(\left(z \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \right)^N \right) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} z^{-m} e^{j\frac{2\pi}{N}km} H_{0,m}(z^N) \end{aligned}$$

其输出即

$$H_k(z)X(z) = X(z) \sum_{m=0}^{N-1} z^{-m} e^{j\frac{2\pi}{N}km} H_{0,m}(z^N)$$

注意到 $H_{0,m}(z^N)$ 结构，对输出做 N 倍抽取可与滤波交换，得到第 k 路的输出

$$\begin{aligned} Y_k(z) &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} H_k(z') X(z') \Big|_{z' = z^{\frac{1}{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}l}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X \left(z^{\frac{1}{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}l} \right) \\ &\quad \cdot \sum_{m=0}^{N-1} \left(z^{\frac{1}{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}l} \right)^{-m} e^{j\frac{2\pi}{N}km} H_{0,m} \left(\left(z^{\frac{1}{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}l} \right)^N \right) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}km} \cdot H_{0,m}(z) \cdot \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} z^{-\frac{m}{N}} e^{j\frac{2\pi}{N}lm} X \left(z^{\frac{1}{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}l} \right)}_{\substack{x[n-m] \text{ 的 } N \text{ 倍抽取} \\ \text{抽取后 } H_{0,m}(z) \text{ 滤波}}}_{\text{DFT}(-k)} \\ &\quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{DFT}(-k)} \end{aligned}$$

设抽取后信号经过滤波器 $H_{0,m}(z)$ 输出的信号为 $v_m[n]$ ，其与第 k 路输出信号 $y_k[n]$ 在 z 变换域有关系

$$Y_k(z) = \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}km} V_m(z)$$

这是索引 m 与索引 k 之间的 DFT 关系 (DFT 变换系数中 k 变为 $-k$)，即相 m 域到带 k 域的 DFT 关系，与 z 无关，因此在时域同样有

$$y_k[n] = \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}km} v_m[n]$$

即各路输出信号可由各相子滤波器输出信号通过 DFT 变换得到，因此称均匀 DFT 滤波器组的分解结构。

■ 均匀 DFT 滤波器组的合成

多路由均匀 DFT 滤波器组分解出的子带信号亦可通过升采样后加和构成宽带的重构信号。设各路子带信号为 $x_k[n]$ ，则重构信号为

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=0}^{N-1} Y_k(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k(z^N) H_k(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k(z^N) \sum_{m=0}^{N-1} z^{-m} e^{j\frac{2\pi}{N}km} H_{0,m}(z^N) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} z^{-m} H_{0,m}(z^N) \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}km} X_k(z^N) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} z^{-m} \cdot H_{0,m}(z') \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}km} X_k(z')}_{\substack{\text{IDFT} \\ |z'|=z^N}} \Big|_{z'=z^N} \\ &\quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\substack{H_{0,m}(z) \text{ 滤波} \\ N \text{ 倍零插}}} \end{aligned}$$

为与前述 DFT 关系对应，这里认为各子带信号 $x_k[n]$ 通过带 k 域到相 m 域的 IDFT 得到各相子滤波器输入信号。

有限字长效应

二进制表示的量化误差

浮点数

在计算机中，浮点数通常采用科学计数法表示，即一个数可以表示为

$$x = 2^c \times M$$

其中 c 称为阶码 (exponent)， M 称为尾数 (mantissa)。在二进制浮点数表示中，尾数 M 通常表示为

$$M = \overline{.b_1 b_2 b_3 \cdots b_t} = 1 + \sum_{i=1}^t b_i 2^{-i}$$

其中 $b_i \in \{0, 1\}$ ， t 为尾数的有效位数（不包括隐含的最高位 1）。例如，IEEE 754 单精度浮点数采用 23 位尾数和 8 位阶码表示。

浮点数表示的动态范围较大，量化误差较小。

定点数

定点数表示相当于只考虑浮点数的尾数部分，即对 $x \in [-1, 1)$ 进行量化表示。在 2 补码表示中，定点数 x 可表示为

$$[x] = \begin{cases} |x|, & 0 \leq x < 1, \\ 2 - |x|, & -1 \leq x < 0 \end{cases} = \overline{b_0.b_1 b_2 b_3 \cdots b_t}$$

其中 $b_i \in \{0, 1\}$ ， t 为定点数的小数位数，符号位 $b_0 = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ 。

考虑表示位数无限，则定点数 x 可精确表示为

$$x = -b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i 2^{-i}$$

截尾 (floor) 误差

对于有限字长 $(B+1)$ bit 的定点数表示，截尾法得到的量化值为

$$\hat{x}_T = -b_0 + \sum_{i=1}^B b_i 2^{-i}$$

其量化误差为

$$e_T = \hat{x}_T - x = - \sum_{i=B+1}^{\infty} b_i 2^{-i}$$

显然，该误差的最大值为 0，最小值为 -2^{-B} 。考虑输入的随机性，截尾误差可建模为均匀分布在 $[-2^{-B}, 0]$ 上的随机变量。

舍入 (round) 误差

对于有限字长 $(B+1)$ bit 的定点数表示，舍入法得到的量化值为

$$\hat{x}_R = -b_0 + \sum_{i=1}^B b_i 2^{-i} + b_{B+1} \cdot 2^{-B}$$

注意，二进制下的舍入为截断的第 1 位 b_{B+1} 为 1 即进 1，否则舍去。其量化误差为

$$e_R = \hat{x}_R - x = - \sum_{i=B+1}^{\infty} b_i 2^{-i} + b_{B+1} \cdot 2^{-B}$$

显然，该误差的最大值为 $2^{-(B+1)}$ ，最小值为 $-2^{-(B+1)}$ 。考虑输入的随机性，舍入误差可建模为均匀分布在 $[-2^{-(B+1)}, 2^{-(B+1)}]$ 上的随机变量。

量化误差的统计特性

对于截尾和舍入两种量化方式，量化误差 e 均可建模为均匀分布的随机变量，其统计特性为：

- 均值 $m_T = \mathbb{E}[e_T] = -2^{-(B+1)}$, $m_R = \mathbb{E}[e_R] = 0$;
- 方差 $\sigma_e^2 = \frac{1}{12}(2^{-B})^2 = \frac{1}{12} \times 2^{-2B}$;
- 协方差 $C_e[k] = \mathbb{E}[e[n]e[n-k]] = \sigma_e^2 \delta[k]$ ，即量化误差为白噪声。

一般地，舍入法的均值为零，具有更简单的统计特性，因此在实际系统中更为常用。以下分析均以舍入法量化误差分析。

量化误差的统计分析

系统直接实现方式的误差分析

系统的量化误差可通过误差传递分析进行分析。考虑系统的直接实现，量化误差有两类来源：

- 采样量化误差：输入信号 $x(t)$ 经过采样和量化后得到离散信号 $x[n]$ 引入的量化误差。
- 计算量化误差：系统在处理离散信号 $x[n]$ 的过程中，由于有限字长引入的量化误差。

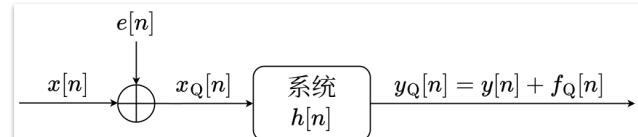
采样量化误差

设采样位数为 $1+B$ ，采样量化误差 $e[n]$ 的统计特性为：

- 均值 $\mathbb{E}[e[n]] = 0$;
- 功率 $\sigma_Q^2 = \frac{1}{12}(2^{-B})^2 = \frac{1}{12} \times 2^{-2B}$ ，功率谱密度为 $S_Q(\omega) = \sigma_Q^2$ 。

设系统的冲激响应为 $b[n]$ ，则采样量化误差通过系统后的输出误差为

$$f_Q[n] = e[n] * b[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e[m] \cdot b[n-m]$$



其有统计特性：

- 均值 $\mathbb{E}[f_Q[n]] = 0$;
- 功率由 Parseval 定理得 $\sigma_{Q,\text{out}}^2 = \sigma_Q^2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b[n]|^2$;
- 功率谱密度由 Wiener-Khinchin 定理得 $S_{Q,\text{out}}(\omega) = \sigma_Q^2 \cdot |H(e^{j\omega})|^2$ 。

计算量化误差

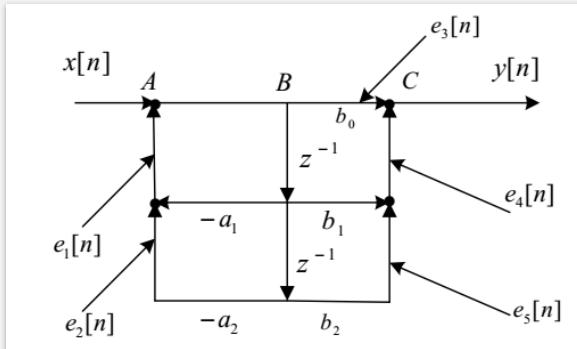
我们考虑一个乘法器 $x[n] \xrightarrow{\alpha} \alpha x[n]$ ，需要对乘法结果尾部舍入，将引入量化误差 $e[n]$ ，其具有统计特性：

- 均值 $\mathbb{E}[e[n]] = 0$;
- 功率 $\sigma_e^2 = \frac{1}{12}(2^{-B})^2 = \frac{1}{12} \times 2^{-2B}$ ，功率谱密度为 $S_e(\omega) = \sigma_e^2$ 。

设从乘法结果节点（噪声源）到输出的冲激响应为 $g[n]$ ，则计算量化误差通过系统后的输出误差为 $f[n] = e[n] * g[n]$ ，即输出误差功率为

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_f(\omega) d\omega = \sigma_e^2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g[n]|^2$$

考虑一个如图所示的 IIR 滤波器：



其中共有 5 个乘法器，产生的计算量化误差分别为 $e_1[n], e_2[n], \dots, e_5[n]$ 。设乘法器输出均为 B 位，则每个量化误差的功率均为 σ_e^2 ，各量化误差通过系统到输出的冲激响应分别为

$$\begin{aligned} e_1[n], e_2[n] &\rightarrow f[n] = (e_1[n] + e_2[n]) * b[n], \\ e_3[n], e_4[n], e_5[n] &\rightarrow f[n] = (e_3[n] + e_4[n] + e_5[n]) \end{aligned}$$

因此，输出误差功率为

$$\sigma_f^2 = \frac{2^{-2B}}{12} \left(2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b[n]|^2 + 3 \right)$$

进一步地，对于直接 II 型实现的 IIR 滤波器

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}, \text{ 其输出误差功率为}$$

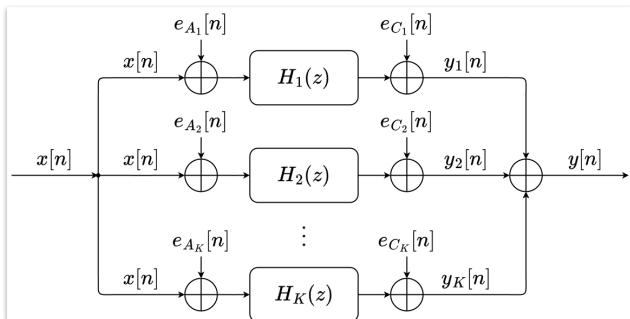
$$\sigma_f^2 = \frac{2^{-2B}}{12} \left(N \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b[n]|^2 + (M+1) \right)$$

特别地，复数乘法由 4 次实数乘法和若干加法组成，因此其计算量化误差功率为

$$\sigma_B^2 = 4\sigma_e^2 = \frac{4}{12} \times 2^{-2B} = \frac{1}{3} \times 2^{-2B}$$

■ 量化误差的传播

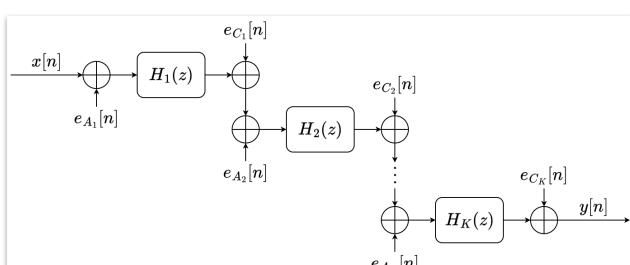
► 并联结构



设系统由 K 个子系统并联组成，每个子系统的冲激响应为 $b_k[n]$ ，子系统输入、输出端分别有误差源 $e_{A_k}[n]$ 和 $e_{C_k}[n]$ ，则整个系统的误差功率为

$$\sigma_f^2 = \sum_{k=1}^K \left(\sigma_{A_k}^2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_k[n]|^2 + \sigma_{C_k}^2 \right)$$

► 级联结构



设系统由 K 个子系统级联组成，每个子系统的冲激响应为 $b_k[n]$ ，子系统输入、输出端分别有误差源 $e_{A_k}[n]$ 和 $e_{C_k}[n]$ ，则整个系统的误差功率为

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= \frac{\sigma_{A_1}^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=1}^K |H_k(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &+ \sum_{k=1}^{K-1} (\sigma_{C_k}^2 + \sigma_{A_{k+1}}^2) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{j=k+1}^K |H_j(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &+ \sigma_{C_K}^2 \end{aligned}$$

► 乘加结构

乘加结构 (MAC, multiply-accumulate) 是数字信号处理系统中常见的基本运算单元，通常用于实现滤波器和傅里叶变换等操作，其基本功能是对输入信号进行乘法运算后累加。

■ 系统系数的量化误差

在有限字长系统中，系统系数的量化误差会影响零极点的位置，其中极点位置的变化会显著影响系统的稳定性。考虑系统函数

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

对每个系数，均需引入量化误差，即

$$\hat{H}(z) = \frac{\sum_{r=0}^M \hat{b}_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N \hat{a}_k z^{-k}}, \quad \begin{cases} \hat{a}_k = Q\{a_k\} = a_k + \Delta a_k, \\ \hat{b}_r = Q\{b_r\} = b_r + \Delta b_r \end{cases}$$

其中 $Q\{\cdot\}$ 表示量化操作， $\Delta a_k, \Delta b_r$ 分别为系数 a_k, b_r 的量化误差。

我们考虑某一个 Δa_k 对系统极点位置的影响。设系统的极点为 $\{p_j\}$ ，其全微分为

$$\Delta p_j = \sum_{k=1}^N \frac{\partial p_j}{\partial a_k} \Delta a_k = \sum_{k=1}^N \frac{\frac{\partial A(z)}{\partial a_k}}{\frac{\partial A(z)}{\partial p_j}} \Big|_{z=p_j} \Delta a_k$$

假设只有一阶极点，则

$$A(z) = 1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} = \prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})$$

因此有

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(z)}{\partial a_k} \Big|_{z=p_j} &= p_j^{-k} \\ \frac{\partial A(z)}{\partial p_j} \Big|_{z=p_j} &= -p_j^{-1} \prod_{k=1, k \neq j}^N (1 - p_k p_j^{-1}) = -p_j^{-N} \prod_{k=1, k \neq j}^N (p_j - p_k) \end{aligned}$$

从而得到极点位置对系数量化误差的敏感度

$$\frac{\partial p_j}{\partial a_k} = \frac{\frac{\partial A(z)}{\partial a_k}}{\frac{\partial A(z)}{\partial p_j}} \Big|_{z=p_j} = -\frac{p_j^{N-k}}{\prod_{l=1, l \neq j}^N (p_j - p_l)}$$

■ 计算溢出及其避免

在有限字长系统中，计算溢出 (overflow) 是指在算术运算过程中，结果超出了所能表示的数值范围，导致结果错误或不可预测的现象。

我们主要考虑 $[-1, 1]$ 范围的定点数表示下加法溢出的问题。考虑一个反馈系统

$$w[n] = x[n] + a \cdot w[n-1]$$

其系统函数为

$$L(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

当 $|a| < 1$ 时, 系统**稳定**, 且其单位样值响应为 $I[n] = a^n u[n]$ 。尽管系统稳定, 但在有限字长实现时, 仍可能发生溢出; 要避免 $w[n]$ 的溢出, 需满足

$$|w[n]| = \left| \sum_{m=0}^{\infty} I[m]x[n-m] \right| \leq \max|x[n]| \cdot \sum_{m=0}^{\infty} |I[m]| \leq 1$$

■ 压缩比例因子

为避免 $w[n]$ 溢出, 需

$$\max|x[n]| \leq \frac{1}{\sum_{m=0}^{\infty} |I[m]|} = \frac{1}{\|I[n]\|_1}$$

引入**压缩比例因子 (scaling factor) β** , 将输入信号 $x[n]$ 压缩 β 倍为 $\frac{x[n]}{\beta}$, 即可恒成立上述不等式, 从而避免溢出。

► 第 I 类压缩比例因子

若 $x[n]$ 是**窄带信号** $x[n] = \cos(\omega_0 n + \phi)$, 有 $\max|x[n]| = 1$, 输出为

$$|w[n]| = |L(e^{j\omega_0}) \cos(\omega_0 n + \phi + \arg L(e^{j\omega_0}))| \leq |L(e^{j\omega_0})| \leq 1$$

因此取压缩比例因子

$$\beta_I = \max_{-\pi \leq \omega \leq \pi} |L(e^{j\omega})| = \|L(e^{j\omega})\|_\infty$$

► 第 II 类压缩比例因子

若 $x[n]$ 是**能量受限信号**, 有 $\sum_{n=0}^{\infty} |x[n]|^2 \leq 1$, 则有

$$\begin{aligned} |w[n]| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |L(e^{j\omega})| \cdot |X(e^{j\omega})| d\omega \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |L(e^{j\omega})|^2 d\omega} \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |L(e^{j\omega})|^2 d\omega} = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |I[n]|^2} = \|I[n]\|_2 \leq 1 \end{aligned}$$

因此, 考虑到输入信号一般不为能量有限信号, 取压缩比例因子

$$\beta_{II} = C \cdot \|I[n]\|_2, \quad C > 1$$

■ 压缩因子的加入

► 集中式

在系统的输入端统一加入压缩比例因子 β_{\max} , 在输出端统一放大 β_{\max} 倍, 所得**输出量化误差功率**为

$$\sigma_f^2 = \frac{2^{-2B}}{12} \left(\beta_{\max}^2 \sum_{i=1}^l \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g_i[n]|^2 + 1 \right)$$

其中 $g_i[n]$ 为第 i 个量化误差源到输出的冲激响应, 输出端的 $\frac{2^{-2B}}{12}$ 量化误差源来自输出端加法。

► 分布式

为避免系统内信号过度压缩导致信噪比下降, 可在系统的各个子系统**输入端分别加入压缩比例因子 β_k** , 在各子系统的输出端分别放大 β_k 倍, 所得**输出量化误差功率**为

$$\sigma_f^2 = \frac{2^{-2B}}{12} \left(\sum_{k=1}^K \beta_k^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g_k[n]|^2 + 1 \right)$$

其中 $g_k[n]$ 为第 k 个子系统内量化误差源到输出的冲激响应, 输出端的 $\frac{2^{-2B}}{12}$ 量化误差源来自输出端加法。

■ FFT 计算中的溢出避免

考察 FFT 算法的基本**蝶形计算单元**

$$\begin{cases} X_L[i] = X_{L-1}[i] + X_{L-1}[j]W_N^r \\ X_L[j] = X_{L-1}[i] - X_{L-1}[j]W_N^r \end{cases}$$

其中 $X_{L-1}[i], X_{L-1}[j]$ 为第 $L-1$ 级的输入, $X_L[i], X_L[j]$ 为第 L 级的输出, $W_N^r = e^{-j\frac{2\pi}{N}r}$ 为旋转因子。

注意到, 蝶形计算单元的输出可能达到输入的两倍, 因此**为避免溢出**, 需在每一级 FFT 计算前**加入压缩比例因子 2**, 即将输入信号压缩 2 倍后进行蝶形计算, 共引入量化噪声

$$\sigma_{BI}^2 = 2\sigma_e^2 + \sigma_B^2 = 6\sigma_e^2 = \frac{1}{2} \times 2^{-2B}$$

其中第一项 $2\sigma_e^2$ 来自对两个输入压缩的量化误差, 第二项 σ_B^2 来自复数乘法的量化误差。

对于 N 点 FFT, 共有 $\log_2 N$ 级计算, 总的误差为

$$\sigma_{f[k]}^2 = \sum_{L=1}^{\log_2 N} \left(\frac{1}{4} \times 2 \right)^{\log_2 N - L} \sigma_{BI}^2 \approx 2\sigma_{BI}^2 = 2^{-2B}$$

变换与表示

► 离散时间信号的表示

■ 变换域表示

设 $T\{\cdot\}$ 为一映射, 若存在对应的映射 $T^*\{\cdot\}$, 对任意 t 的函数 $x(t)$ 、足够小的 ε 、常数 A , 满足

$$(1 - \varepsilon) \|x(t)\| \leq A \|T^*\{T\{x(t)\}\}\| \leq (1 + \varepsilon) \|x(t)\|$$

则称 $T\{x(t)\}$ 为信号 $x(t)$ 的一种**表示**, 称 $T\{\cdot\}$ 为**变换 (transform)**, $T^*\{\cdot\}$ 为**逆变换 (inverse transform)**。对离散时间信号 $x[n]$, 记其变换域表示为 $X = T\{x[n]\}$, 此处 X 并不要求是定义在整数域上的函数。

将**有限长**的 $x[n]$ 排列成列向量 \vec{x} , 若 $T\{\cdot\}$ 是线性变换且也定义在整数域上, 则可以用**矩阵**表示这一变换, 即

$$\vec{y} = T\{\vec{x}\} = T\vec{x}$$

其中 T 是变换矩阵。

► 变换的正交性

若 T 的列向量组 $\{t_k\}$ 满足

$$\vec{t}_i^T \vec{t}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

则称变换 $T\{\cdot\}$ 是**正交变换**。

对于正交变换, 有

$$\forall \vec{x}, \vec{y}, \quad \vec{x}^T \vec{y} = (T\{\vec{x}\})^T (T\{\vec{y}\})$$

即正交变换具有**内积不变性**。

► 变换的完备性

映射 $T\{\cdot\}$ 是**完备的**, 当且仅当

$$\forall \vec{x}, \quad T\{\vec{x}\} = \vec{0} \implies \vec{x} = \vec{0}$$

即映射 $T\{\cdot\}$ 的核空间仅包含零向量。

▀ Thm. 变换的可逆性

若某变换域表示线性且完备, 则该变换域表示是可逆的。

正交变换是完备的, 因此也是可逆的。

≡ E.G. 常见的离散时间信号变换域表示

设 $x[n]$ 是长度为 N 的离散时间信号，则有

- 其 离散 Fourier 变换 (DFT) 定义为

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

- 其 离散余弦变换 (DCT) 定义为

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos \left(\frac{\pi}{N} \left(n + \frac{1}{2} \right) k \right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

DFT 和 DCT 都是线性且正交的变换，因此它们都是完备且可逆的。

■ 特征域表示

普通的时域或变换域可能难以表示信号的某种特征 (character)，如线性调频 (linear frequency modulation, LFM) 信号频率随时间线性变化的特征。此时，可以使用特征域 (character domain) 来表示信号。

■ 离散时间系统的表示

■ 离散线性时不变系统

线性时不变 (linear time-invariant, LTI) 系统是最常见的离散时间系统。

► 线性性

系统 $H\{\cdot\}$ 是线性的，当且仅当

$$\forall x_1[n], x_2[n] \subset \mathbb{R}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad H\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aH\{x_1[n]\} + bH\{x_2[n]\}$$

非线性的例子如平方律 (功率) 检波器，其输入输出关系为

$$y[n] = H\{x[n]\} = x^2[n]$$

► 时不变性

系统 $H\{\cdot\}$ 是时不变的，当且仅当

$$\forall x[n] \subset \mathbb{R}, \quad \forall n_0 \in \mathbb{Z}, \quad H\{x[n - n_0]\} = y[n - n_0]$$

■ 离散 LTI 系统的描述

► 样值 (冲激) 响应函数

设 $H\{\cdot\}$ 是离散 LTI 系统， $\delta[n]$ 是单位冲激信号，则系统对单位冲激信号的响应

$$b[n] = H\{\delta[n]\}$$

称为系统的样值响应函数 (impulse response) 或冲激响应函数。

LTI 系统的样值响应函数 $b[n]$ 完全描述了该系统，也可以比较简单地表述系统的性质，如：

- **线性性**：样值响应函数是线性的，

$$\begin{aligned} H\{ax_1[n] + bx_2[n]\}[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ax_1[k]b[n-k] + bx_2[k]b[n-k]) \\ &= a \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]b[n-k] + b \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2[k]b[n-k] \\ &= aH\{x_1[n]\}[n] + bH\{x_2[n]\}[n] \end{aligned}$$

- **时不变性**：样值响应函数与时间无关，

$$\begin{aligned} H\{x[n - n_0]\}[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k - n_0]b[n - k] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]b[n - n_0 - m] = H\{x[n]\}[n - n_0] \end{aligned}$$

- **因果性**：系统因果 $\iff b[n] = 0, \forall n < 0$ ；

- **BIBO 稳定性**：系统 BIBO 稳定 $\iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b[n]| < \infty$ 。

► 本征表示

设 $T\{\cdot\}$ 是离散 LTI 系统，令

$$T\{\xi[n]\} = \lambda \xi[n]$$

将离散时间单频复指数信号 $\xi[n] = e^{j\omega n}$ 代入，则有

$$T\{e^{j\omega n}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b[k]e^{j\omega(n-k)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} b[k]e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n}$$

因此，离散时间单频复指数信号 $e^{j\omega n}$ 是离散 LTI 系统的本征信号 (eigen-signal)，对应的本征值 (eigen-value) 为

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b[k]e^{-j\omega k}$$

将输入信号 $x[n]$ 展开为离散时间单频复指数信号的线性组合

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega \text{ 后，计算系统输出 } y[n] \text{ 将变得非常简单，有}$$

$$y[n] = T\{x[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T\{X(\omega) e^{j\omega n}\} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) H(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

► 频率响应函数

离散 LTI 系统的频率响应函数 (frequency response) 定义为

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b[n] e^{-j\omega n}$$

即样值响应函数的离散时间 Fourier 变换 (DTFT)。

► 系统函数

离散 LTI 系统的系统函数 (system function) 定义为

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b[n] z^{-n}$$

即样值响应函数的双边 z 变换。

系统函数 $H(z)$ 是频率响应函数 $H(\omega)$ 的推广，有

$$H(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

系统函数 $H(z)$ 的收敛域 (region of convergence, ROC) 决定了系统的因果性和稳定性：

- 系统因果 \iff ROC 包含 $z = \infty$ ；
- 系统 BIBO 稳定 \iff ROC 包含单位圆 $|z| = 1$ 。

► 矩阵表示

离散时间信号可以很自然地用（有限长或无限长）向量表示，因而离散时间信号通过 LTI 系统的过程也就可以用矩阵与向量的乘积 表示。

设 $x[n]$ 是长度为 N 的离散时间信号， $H\{\cdot\}$ 是离散 LTI 系统，其样值响应函数为 $b[n]$ ，则系统输出 $y[n]$ 可表示为

$$y[n] = H\{x[n]\} = \sum_k b[n-k]x[k]$$

对于 $n = 0, 1, \dots, N-1$ ，上式可以写成矩阵形式

$$\vec{y} = \mathbf{H}\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{b}_0 \\ \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_{N-1} \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} b[0] & 0 & \cdots & 0 \\ b[1] & b[0] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b[N-1] & b[N-2] & \cdots & b[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix}$$

其中 \vec{b}_n 是样值响应函数 $b[n]$ 反褶后右移 n 位后的向量。

离散时间 Fourier 变换 (DTFT)

■ DTFT 的定义

■ DTFT 的引入

已知连续时间信号 $f(t)$ 的 Fourier 变换 (FT) 定义为

$$F(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt$$

以间隔 T 对其进行冲激采样，得到

$$f_s(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT)$$

则采样信号的 Fourier 变换为

$$F_s(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_s(t) e^{-j\Omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-j\Omega nT}$$

类比于此，考虑离散时间信号 $x[n] = f(nT)$ ，记采样得到的离散信号频率为 $\omega = \Omega T$ ，可以定义 **离散时间 Fourier 变换 (DTFT)** 如

(*) *Def.* 离散时间 Fourier 变换 (DTFT)

离散时间信号 $x[n]$ 的离散时间 Fourier 变换 (Discrete-Time Fourier Transform, DTFT) 定义为

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

其逆变换 (Inverse DTFT) 为

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

■ DTFT 与其它变换的关系

► DTFT 与 Fourier 变换的关系

由 [DTFT 的引入](#) 可知，离散时间信号 $x[n]$ 的 DTFT 可以看作是其对应的连续时间信号 $f(t)$ 的采样信号频谱 $F_s(j\Omega)$ 在频点 $\Omega = \frac{\omega}{T}$ 处的取值，即

$$X(\omega) = F_s(j\Omega) \Big|_{\Omega=\omega/T}$$

由于以 T 为周期的冲激采样会使频谱发生 $\frac{2\pi}{T}$ 的周期性重复，因此 DTFT 是周期为 2π 的周期函数。

► DTFT 与 z 变换的关系

注意到 $x[n]$ 的 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

则 DTFT 可以看作是 [z 变换在单位圆 \$z = e^{j\omega}\$ 上的取值](#)，即

$$X(\omega) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

■ DTFT 的逆变换

将离散时间信号 $x[n]$ 看作是基底为 $\{\delta[n-k]\}_k$ 的无限维空间 ℓ^2 中的一个向量 \vec{x} ，其 DTFT $X(\omega)$ 可以看作是该向量在 [另一组单位基底](#)

$\{\hat{\phi}_{\omega}\} = \{\phi_{\omega}[n]\}_{\omega} = \{e^{j\omega n}\}_{\omega}$ 上的 [投影系数](#)，即

$$X(\omega) = \langle \vec{x}, \hat{\phi}_{\omega} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

两组基底之间有对应关系

$$\text{DTFT}\{\delta[n-k]\} = e^{-j\omega k}$$

由于 $\{\hat{\phi}_{\omega}\}$ 是完备的，因此可以通过投影系数 $X(\omega)$ 重构出原向量 \vec{x} 。考虑其基底 $e^{j\omega n}$ 变换回 $\delta[n-k]$ 的过程

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} e^{-j\omega k} d\omega = \delta[n-k]$$

则有

$$x[n] = \text{IDTFT}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

■ 典型信号的 DTFT

一些典型离散时间信号及其 DTFT 如下表所示：

信号类型	信号 $x[n]$	DTFT 频谱 $X(\omega)$
单位样值序列	$\delta[n]$	$e^{-j\omega 0} = 1$

信号类型	信号 $x[n]$	DTFT 频谱 $X(\omega)$
矩形窗序列	$\begin{cases} 1, & n \leq M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{\sin \frac{(2M+1)\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$
全 1 序列	1	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega n} = 2\pi \delta(\omega)$
复指数序列	$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
余弦序列	$\cos \omega_0 n$	$\pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
sinc 序列	$\frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$	$\begin{cases} 1, & \omega < \omega_c, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

■ DTFT 的性质

■ 基本性质

基本变换关系：

- 线性， $ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$
- 反转， $x[-n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(-\omega)$
- 共轭， $x^*[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X^*(-\omega)$

延时、调制性质：

- 时移， $x[n - n_0] \xrightarrow{\text{DTFT}} e^{-j\omega n_0} X(\omega)$
- 频移， $e^{j\omega_0 n} x[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(\omega - \omega_0)$

微分性质：

- 时域差分， $x[n] - x[n-1] \xrightarrow{\text{DTFT}} (1 - e^{-j\omega}) X(\omega)$
- 频域微分， $jnx[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} \frac{dX(\omega)}{d\omega}$

(*) *Note* DTFT 性质的应用

可以利用离散时间信号的离散特性简化部分过程，例如序列解调中，要将中心频率为 ω_0 的信号变换到基带，连续时间信号中需要乘以 $\cos(\omega_0 n)$ 再进行低通滤波，而数字下变频 (DDC) 任务中限定 $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ 时只需依次乘以 $e^{-j\pi n/2} = (-j)^n$ 即可。

此外，也可以利用 DTFT 频谱的连续性补足信号序列离散的不足，如在延时估计中，可以通过发射波形 $s[n]$ 和接收信号

$r[n] = s[n - n_0]$ 的 DTFT 频谱相差 $e^{-j\omega n_0} = \frac{R(\omega)}{S(\omega)}$ 中拟合得到非整数延时 n_0 。

信号与其 DTFT 频谱之间的能量归一化关系由 [Parseval 定理](#) 给出：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$$

■ 共轭与对称

在复数域中，函数 $f(x)$ 是 [共轭对称 \(conjugate symmetric\)](#) 的，当且仅当 $f(x) = f^*(-x)$ ；函数 $f(x)$ 是 [共轭反对称 \(conjugate anti-symmetric\)](#) 的，当且仅当 $f(x) = -f^*(-x)$ 。

任意离散时间信号 $x[n]$ 都可以分解为 [共轭对称分量](#) $x_e[n]$ 和 [共轭反对称分量](#) $x_o[n]$ ，即

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n], \quad \begin{cases} x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]), \\ x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n]) \end{cases}$$

考察其 DTFT，对共轭对称分量有

$$\begin{aligned} \text{DTFT}\{x_e[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e[n] e^{-j\omega n} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n] + x^*[-n]) e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{2} X(\omega) + \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*[m] (e^{-j\omega m})^* \\ &= \frac{1}{2} X(\omega) + \frac{1}{2} X^*(\omega) = \Re\{X(\omega)\} \end{aligned}$$

类似地，对共轭反对称分量有

$$\begin{aligned}\text{DTFT}\{x_o[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o[n] e^{-j\omega n} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n] - x^*[-n]) e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{2} X(\omega) - \frac{1}{2} X^*(\omega) = j \Im\{X(\omega)\}\end{aligned}$$

另一方面，谱 $X(\omega)$ 也可以分解为共轭对称分量

$$X_e(\omega) = \frac{X(\omega) + X^*(-\omega)}{2} \text{ 和 共轭反对称分量 } X_o(\omega) = \frac{X(\omega) - X^*(-\omega)}{2}$$

，对其做 IDTFT，有

$$\begin{aligned}\text{IDTFT}\{X_e(\omega)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_e(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{X(\omega) + X^*(-\omega)}{2} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2} x[n] + \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(-\omega) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2} x[n] + \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega') (e^{-j\omega' n})^* d\omega' \\ &= \frac{1}{2} x[n] + \frac{1}{2} x^*[n] = \Re\{x[n]\} \\ \text{IDTFT}\{X_o(\omega)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_o(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{X(\omega) - X^*(-\omega)}{2} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2} x[n] - \frac{1}{2} x^*[n] = j \Im\{x[n]\}\end{aligned}$$

■ *Theorem.* DTFT 的共轭与对称性质

离散时间信号 $x[n]$ 的共轭对称分量 $x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$ 和共轭反对称分量 $x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$ 的 DTFT 分别为频谱 $X(\omega)$ 的实部和虚部，即

$$\text{DTFT}\{x_e[n]\} = \Re\{X(\omega)\}, \quad \text{DTFT}\{x_o[n]\} = j \Im\{X(\omega)\}$$

$x[n]$ 的实分量 $x_R[n] = \Re\{x[n]\}$ 和虚分量 $x_I[n] = j \Im\{x[n]\}$ 的 DTFT 分别为频谱 $X(\omega)$ 的共轭对称分量和共轭反对称分量，即

$$\begin{aligned}\text{DTFT}\{x_R[n]\} &= X_e(\omega) = \frac{X(\omega) + X^*(-\omega)}{2}, \\ \text{DTFT}\{x_I[n]\} &= X_o(\omega) = \frac{X(\omega) - X^*(-\omega)}{2}\end{aligned}$$

■ 卷积性质

类似于 Fourier 变换，DTFT 也具有卷积性质：

- 时域两信号 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的线性卷积的 DTFT 是其 DTFT 频谱的乘积：

$$x_1[n] * x_2[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

- 频域两信号 $X_1(\omega)$ 和 $X_2(\omega)$ 的线性卷积（的 $\frac{1}{2\pi}$ ）是其时域信号的乘积的 DTFT：

$$x_1[n] \cdot x_2[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\theta) X_2(\omega - \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

这里的常数因子与 Parseval 定理中的因子一致。

可以引入互相关函数 $r_{x_1 x_2}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] x_2^*[n-k]$ ，其 DTFT 为

$$R_{x_1 x_2}(\omega) = X_1(\omega) X_2^*(\omega)$$

特别地，当 $x_1[n] = x_2[n] = x[n]$ 时，互相关函数即为自相关函数

$$r_{xx}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] x^*[n-k]$$

■ 周期性质

我们已知 $X(\omega)$ 是 2π 周期函数，即 $X(\omega) = X(\omega + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ 。

对于周期 T 信号 $x[n] = x[n+T]$ ，记其在一个周期内的截断序列为 $\tilde{x}[m] = x[m]$, $m = 0, 1, \dots, T-1$ ，则该周期信号可表示为

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{x}[n-kT] = \tilde{x}[n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kT]$$

其 DTFT 为

$$X(\omega) = \tilde{X}(\omega) \cdot \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T} k\right)$$

其中 $\tilde{X}(\omega)$ 是有限长信号 $\tilde{x}[m]$ 的 DTFT。

离散 Fourier 变换 (DFT)

■ DFT 的定义

■ DFT 的引入

离散时间 Fourier 变换 (DTFT) 是针对无限长信号的、离散域向连续域的变换，变换后的结果便于分析，但不利于计算机存储和处理。

对于 N 点长的离散时间信号 $x[n]$ ，其 DTFT

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n}$$

仍是连续频谱，但若对信号做以 N 为周期的周期延拓，则其 DTFT

$$\begin{aligned}\tilde{X}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}[n] e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega(n+rN)} \\ &= X(\omega) \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega rN} = X(\omega) \cdot \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \\ &= \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega) \Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)\end{aligned}$$

变为离散频谱，且频谱间隔为 $\frac{2\pi}{N}$ 。因而可以仅取 N 个频点

$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ ，将其定义为信号的离散 Fourier 变换 (DFT)。

(*) Def. 离散 Fourier 变换 (DFT)

设 $x[n]$ 是长度为 N 的离散时间信号，则其离散 Fourier 变换 (discrete Fourier transform, DFT) 定义为

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

其逆变换 (Inverse DFT) 为

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi nk/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

■ DFT 的线性代数解释

DFT 是对离散时间信号各点的加权求和，其中权值为复指数函数 $e^{-j2\pi nk/N}$ 。将离散时间信号 $x[n]$ 看作是 N 维空间 \mathbb{C}^N 中的一个向量 \tilde{x} ，其 DFT $X[k]$ 即可表为向量内积

$$X[k] = \left(e^{-j2\pi \cdot \frac{0k}{N}}, e^{-j2\pi \cdot \frac{1k}{N}}, \dots, e^{-j2\pi \cdot \frac{(N-1)k}{N}} \right)^T \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix} = \vec{d}_k^H \vec{x}$$

其中 $\vec{d}_k = \left(e^{j2\pi \cdot \frac{0k}{N}}, e^{j2\pi \cdot \frac{1k}{N}}, \dots, e^{j2\pi \cdot \frac{(N-1)k}{N}} \right)^T$ 。

因此，若定义 $\vec{X} = (X[0] \ X[1] \ \dots \ X[N-1])^T$ ，则 DFT 可写为矩阵形式

$$\vec{X} = (\vec{d}_0 \ \vec{d}_1 \ \dots \ \vec{d}_{N-1})^H \vec{x} = \mathbf{D} \vec{x}$$

其中 $\mathbf{D} = (\vec{d}_0 \ \vec{d}_1 \ \dots \ \vec{d}_{N-1})^H = \begin{pmatrix} \vec{d}_0^H \\ \vec{d}_1^H \\ \vdots \\ \vec{d}_{N-1}^H \end{pmatrix}$ 称为 DFT 矩阵。

DFT 矩阵 \mathbf{D} 的各列向量 \vec{d}_k 互相正交，且模长均为 \sqrt{N} ，因此 DFT 为离散正交变换，其逆变换也可表示为矩阵

$$\mathbf{E} = \mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{D}^H$$

■ DFT 的点数

DFT 不一定要让频域采样点数与信号长度相同。定义间隔为 $\frac{2\pi}{T}$ 的频域采样函数

$$S_T(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

其对应于时域上以 T 为周期的冲激串

$$s_T[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rT]$$

使用 $s_T[n]$ 与信号 $x[n]$ 卷积进行周期延拓，即相当于频域上使用 $S_T(\omega)$ 进行采样。

(*) Def. T 点离散 Fourier 变换

设 $x[n]$ 是长度为 N 的离散时间信号， $T \geq N$ 为频域采样点数，则其 T 点离散 Fourier 变换定义为

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/T}, \quad k = 0, 1, \dots, T-1$$

其逆变换为

$$x[n] = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} X[k] e^{j2\pi nk/T}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

■ DFT 与其它变换的关系

► DFT 与 DTFT 的关系

设 $x[n]$ 是长度为 N 的离散时间信号，则其 DTFT 为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n}$$

N 点 DFT $X[k]$ 则为 DTFT 在 N 个 N 等分频点 $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$ 处的取值，即

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N} = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

而 T 点 DFT $X[k]$ 则为 DTFT 在 T 个 T 等分频点 $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$ 处的取值，即

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/T} = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{T}}, \quad k = 0, 1, \dots, T-1$$

► DFT 与 FT 的关系

设有连续信号 $s(t)$ ，其 Fourier 变换为 $S(\Omega)$ ；对 $s(t)$ 以间隔 T_s 进行冲激采样，得到采样信号 $s_s(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$ 和离散时间信号 $s_D[n] = s(nT_s)$ ，则采样信号的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned} S_s(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) e^{-j\Omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \delta(t - nT_s) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_s) e^{-j\Omega nT_s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_D[n] e^{-j\Omega nT_s} = S_D(\omega) \Big|_{\omega=\Omega T_s} \\ S_s(\Omega) &= S(\Omega) * \mathcal{F} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \right\} = S(\Omega) * \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(\Omega - \frac{2\pi k}{T_s} \right) \\ &= \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S \left(\Omega - \frac{2\pi k}{T_s} \right) \end{aligned}$$

进而离散时间信号的 DFT 为

$$S_D[k] = S_D(\omega) \Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} = S_s(\Omega) \Big|_{\Omega=\frac{2\pi k}{NT_s}}$$

■ DFT 的性质

■ 基本性质

由于 DFT 是 DTFT 的离散化，自然地保持了 DTFT 的许多性质，如：

- 线性， $ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{\text{DFT}} aX_1[k] + bX_2[k]$ 。

- 共轭， $x^*[n] \xrightarrow{\text{DFT}} X^*[N-k]$ ，后者索引按模 N 计算，实质是下述循环反转 $X^*[((-k))_N] R_N[k]$ 。
- 对称， $x_e[n] \xrightarrow{\text{DFT}} \Re\{X[k]\}$ ， $x_o[n] \xrightarrow{\text{DFT}} \Im\{X[k]\}$ ， $x_R[n] \xrightarrow{\text{DFT}} X_e[k]$ ， $x_I[n] \xrightarrow{\text{DFT}} X_o[k]$ ，其中共轭对称、共轭反对称分量也由循环反转定义。
- 特别地，当 $x[n]$ 为实序列时， $X[k]$ 具有共轭对称性 $X[k] = X^*[N-k]$ 。
- Parseval 定理， $\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$ 。

■ 周期性质

虽然 DFT 只定义在 $0, 1, \dots, N-1$ 上，但由于其本质是 DTFT 在等分频点处的取值，因此 DFT 也具有周期性，即允许定义

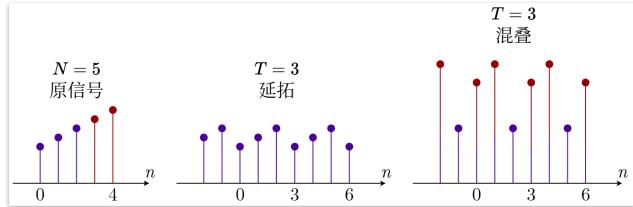
$$X[k] = X[k \bmod N]$$

对原有的 $X[k]$ 进行周期延拓。

引入以 T 为周期延拓的记号

$$x[n] = x[((n)_T)] = x[n \bmod T]$$

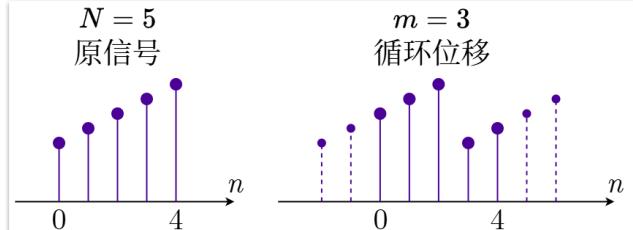
当原序列长度 $N < T$ 时，空处补零；当 $N > T$ 时，截断为前 T 点后再做延拓，不发生混叠。



► 循环位移

对于 N 点长序列 $x[n]$ ，其 m 点循环位移定义为

$$x[((n-m)_N)R_N[n]]$$



(*) Thm. DFT 的循环位移性质

设 $x[n]$ 的 DFT 为 $X[k]$ ，则其 m 点循环位移序列 $x[((n-m)_N)R_N[n]]$ 的 DFT 为

$$\text{DFT}\{x[((n-m)_N)R_N[n]]\} = W_N^{mk} X[k]$$

其中 $W_N = e^{-j2\pi/N}$ 。

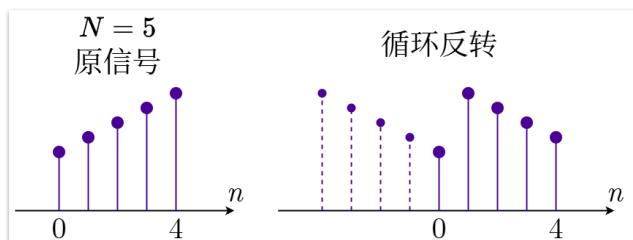
时域循环位移对应频域线性相移。

► 循环反转

对于 N 点长序列 $x[n]$ ，其循环反转定义为

$$x[((-n)_N)R_N[n]]$$

注意循环反转是反转后延拓到原区间截断，其结果中 0 时刻保持不变，其余时刻按循环方式反转。



■ *Theorem.* DFT 的循环反转性质

设 $x[n]$ 的 DFT 为 $X[k]$, 则其循环反转序列 $x[(-n))_N]R_N[n]$ 的 DFT 为

$$\text{DFT}\{x[(-n))_N]R_N[n]\} = X[((-k))_N]R_N[k]$$

时域循环反转对应频域循环反转。

► 循环卷积

由 循环反转 和 循环位移 可组合为 循环卷积, 其定义为

$$x[n] * y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[((n-m))_N]y[m] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[((n-m))_N]$$

考虑到 DTFT 中相乘与卷积有对应关系, 考察 DFT 频域相乘的逆变换

$$\begin{aligned} \text{IDFT}\{X[k]Y[k]\} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]Y[k]W_N^{-nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x[m]W_N^{mk} \right) Y[k]W_N^{-nk} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y[k]W_N^{-(n-m)k} \right) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[((n-m))_N] \end{aligned}$$

■ *Theorem.* DFT 的循环卷积性质

设 $x[n]$ 的 DFT 为 $X[k]$, $y[n]$ 的 DFT 为 $Y[k]$, 则其循环卷积序列 $x[n] * y[n]$ 的 DFT 为

$$\text{DFT}\{x[n] * y[n]\} = X[k]Y[k]$$

时域循环卷积对应频域相乘。

■ DFT 的快速计算

直接计算 DFT 需要 $O(N^2)$ 的时间复杂度, 快速傅里叶变换 (FFT) 则可以将时间复杂度降为 $O(N \log N)$ 。

■ FFT 的基本思想

FFT 的基本思想是分治法 (divide and conquer), 将 N 点 DFT 拆解为两个 $\frac{N}{2}$ 点 DFT 来计算。

记 $W_N = e^{-j2\pi/N}$, 称为旋转因子 (twiddle factor), 其性质有

- 周期性: $W_N^{k+N} = W_N^k$;
- 齐次性: $W_N^k = W_{N/m}^{k/m}$;
- 共轭对称性: $W_N^{(N-n)k} = W_N^{-nk} = (W_N^{nk})^*$ 。

旋转因子幂次项中有许多特殊值可以简化计算, 例如

$$W_N^0 = 1, \quad W_N^{N/2} = -1, \quad W_N^{N/4} = -j, \quad W_N^{3N/4} = j$$

所对应的计算均不需要复乘。在长序列中, 这些项比例较小, 对计算量影响不大; 但在短序列中, 则可以显著减少计算量, 特别是在 $N = 2$ 与 $N = 4$ 时可不需要任何复乘即得到 DFT。

■ 基 2 的频率抽取 FFT

(Decimation-in-Frequency FFT with Radix-2)

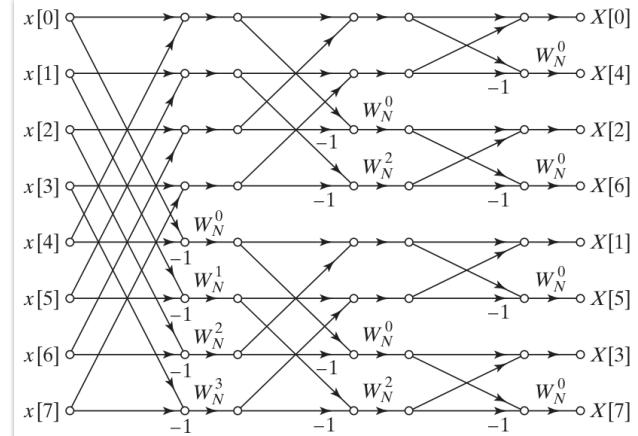
设 N 为偶数, 将 $x[k]$ 拆分为前后两半, 则 N 点 DFT 可写为

$$\begin{aligned} k = 2r, \quad X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]W_N^{n(2r)} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n]W_N^{n(2r)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]W_{N/2}^{nr} + W_N^{Nr} \sum_{n=0}^{N/2-1} x\left[n + \frac{N}{2}\right]W_{N/2}^{nr} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(x[n] + x\left[n + \frac{N}{2}\right] \right) W_{N/2}^{nr} \\ k = 2r+1, \quad X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{n(2r+1)} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]W_N^{n(2r+1)} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n]W_N^{n(2r+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]W_N^{n(2r+1)} + W_N^{(2r+1)/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} x\left[n + \frac{N}{2}\right]W_N^{n(2r+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]W_N^{n(2r+1)} - \sum_{n=0}^{N/2-1} x\left[n + \frac{N}{2}\right]W_N^{n(2r+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(x[n] + x\left[n + \frac{N}{2}\right] \right) W_N^n W_{N/2}^{nr} \end{aligned}$$

这相当于将 N 点 DFT 拆解为两个 $\frac{N}{2}$ 点 DFT 来计算:

- 偶数序号 DFT 系数 $X[2r]$ 由点长序列 $e[n] = x[n] + x\left[n + \frac{N}{2}\right]$ 的 DFT 给出;
- 奇数序号 DFT 系数 $X[2r+1]$ 由 $\frac{N}{2}$ 点长序列 $o[n] = \left(x[n] - x\left[n + \frac{N}{2}\right]\right)W_N^n$ 的 DFT 给出。

对 $N = 8$ 情形, 其蝶形图表示为:



可见:

- 每一级蝶形运算将 N 点 DFT 拆解为两个 $\frac{N}{2}$ 点 DFT 来计算, **共需** $\log_2 N$ 级, 每级需 $N/2$ 个蝶形单元;
- 每个蝶形单元共有 1 次复乘和 2 次复加。

因此, 基 2 的频率抽取 FFT 的时间复杂度为 $O(N \log N)$ 。

上图中, 输入信号 $x[k]$ 的索引顺序为自然顺序 $0, 1, 2, \dots, 7$, 而输出信号 $X[k]$ 的下标顺序为 $0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7$, 为原序号**二进制按位次序反转**得到的序列, 称为**倒位序 (bit-reversed order)**。若需要按自然顺序输出, 则需在计算后进行一次倒位序操作。

■ 基 2 的时间抽取 FFT

(Decimation-in-Time FFT with Radix-2)

设 N 为偶数, 将 $x[n]$ 按奇偶项拆分, 则 N 点 DFT 可写为

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]W_N^{(2r)k} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1]W_N^{(2r+1)k} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1]W_{N/2}^{rk} \end{aligned}$$

其中:

- 偶数项组成 $\frac{N}{2}$ 点长序列 $x_e[r] = x[2r]$, 其 DFT 为

$$X_e[k] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]W_{N/2}^{rk};$$

- 奇数项组成 $\frac{N}{2}$ 点长序列 $x_o[r] = x[2r+1]$, 其 DFT 为

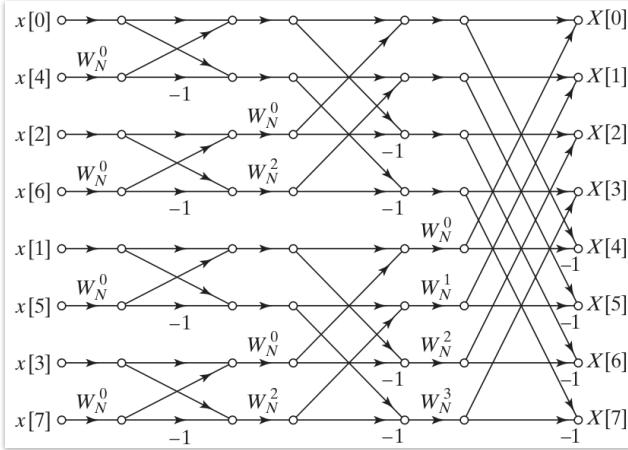
$$X_o[k] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_N^{rk}$$

因此, N 点 DFT 可写为

$$X[k] = X_e[k] + W_N^k X_o[k]$$

由于 $X_e[k]$ 和 $X_o[k]$ 均为周期为 $\frac{N}{2}$ 的序列, 与 W_N^k 的周期不一致, 截取到 $k = 0, 1, \dots, N-1$ 时, $X[k]$ 可分两部分写为

$$\begin{cases} X[k] = X_e[k] + W_N^k X_o[k], \\ X\left[k + \frac{N}{2}\right] = X_e[k] - W_N^k X_o[k], \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$$



类似地, 基 2 的时间抽取 FFT 的时间复杂度也为 $O(N \log N)$; 得到的 DFT 系数 $X[k]$ 按照自然顺序排列, 而输入信号 $x[n]$ 则按倒位序排列。

■ 组合数 FFT

FFT 的基本思想是 **分治**, 将 N 点 DFT 拆解为多个较小点数的 DFT 来计算。若 N 可分解为多个因子之积 $N = N_1 N_2 \dots N_m$, 则可将 N 点 DFT 拆解为 N_1 个 $N_2 N_3 \dots N_m$ 点 DFT 来计算, 再将每个 $N_2 N_3 \dots N_m$ 点 DFT 拆解为 N_2 个 $N_3 \dots N_m$ 点 DFT 来计算, 依此类推, 直至拆解为若干个小点数 DFT 来计算。

对 $N = N_1 N_2 \dots N_m$, 我们将时域索引 n 表示为

$$n = n_1 + N_1 n_2 + N_1 N_2 n_3 + \dots + N_1 N_2 \dots N_{m-1} n_m, \\ \begin{cases} n_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1, \\ n_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1, \\ \vdots \\ n_m = 0, 1, \dots, N_m - 1 \end{cases}$$

将频域索引 k 表示为

$$k = k_m + N_m k_{m-1} + N_m N_{m-1} k_{m-2} + \dots + N_m N_{m-1} \dots N_2 k_1, \\ \begin{cases} k_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1, \\ k_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1, \\ \vdots \\ k_m = 0, 1, \dots, N_m - 1 \end{cases}$$

引入记号 $\overset{b}{N} = N_a N_{a+1} \dots N_{b-1} N_b$, 将 nk 展开为

$$\begin{aligned} nk &= \left(n_1 + n_2 N_1 + \dots + n_m \overset{m-1}{N}_1 \right) \left(k_m + N_m k_{m-1} + \dots + \overset{m}{N}_1 k_1 \right) \\ &= \overset{m}{N}_2 \overset{m}{N}_1 k_1 + n_1 \overset{m}{N}_2 k_2 + \dots + n_1 N_m k_{m-1} + n_1 k_m \\ &\quad + n_2 N_k_1 + \overset{m}{N}_3 \overset{m}{N}_2 k_2 + n_2 N_1 \overset{m}{N}_3 k_3 + \dots + n_2 N_1 N_m k_{m-1} + n_2 N_1 k_m \\ &\quad + \dots \\ &\quad + n_m \overset{m-1}{N}_2 k_1 + \dots + n_m N_k m-1 + \overset{m-1}{N}_1 \overset{m}{N}_2 k_m \end{aligned}$$

其中, 每行标记项之前的项均为 N 的整数倍, 第 r 行标记项的 N 连乘缺 N_r 因子, 故

$$\begin{aligned} W_N^{nk} &= \boxed{W_{N_1}^{n_1 k_1}} \times W_{\overset{2}{N}}^{n_2 k_2} \dots W_{\overset{m-1}{N}_1}^{n_{m-1} k_{m-1}} W_{\overset{m}{N}}^{n_m k_m} \\ &\quad \times 1 \times \boxed{W_{N_2}^{n_2 k_2}} \times W_{\overset{3}{N}}^{n_3 k_3} \dots W_{\overset{m-1}{N}_2}^{n_{m-1} k_{m-1}} W_{\overset{m}{N}}^{n_m k_m} \\ &\quad \times \dots \\ &\quad \times 1 \times \boxed{W_{N_{m-1}}^{n_{m-1} k_{m-1}}} \times W_{N_{m-1} N_m}^{n_m k_m} \\ &\quad \times 1 \times \boxed{W_{N_m}^{n_m k_m}} \end{aligned}$$

这里的每个标记项 $W_{N_r}^{n_r k_r}$ 都可视为 r 点 DFT 的变换基, 因此 N 点 DFT 可展开为

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} \\ &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \dots \sum_{n_m=0}^{N_m-1} x \left[n_1 + N_1 n_2 + \dots + \overset{m-1}{N}_1 n_m \right] W_N^{nk} \\ &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \boxed{W_{N_1}^{n_1 k_1}} \cdot W_{\overset{2}{N}}^{n_2 k_2} \dots W_{\overset{m-1}{N}_1}^{n_{m-1} k_{m-1}} W_{\overset{m}{N}}^{n_m k_m} \quad (N_1 \text{ 点}) \\ &\quad \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \boxed{W_{N_2}^{n_2 k_2}} \cdot W_{\overset{3}{N}}^{n_3 k_3} \dots W_{\overset{m-1}{N}_2}^{n_{m-1} k_{m-1}} W_{\overset{m}{N}}^{n_m k_m} \quad (N_2 \text{ 点}) \\ &\quad \dots \\ &\quad \sum_{n_{m-1}=0}^{N_{m-1}-1} \boxed{W_{N_{m-1}}^{n_{m-1} k_{m-1}}} \cdot W_{N_{m-1} N_m}^{n_m k_m} \quad (N_{m-1} \text{ 点}) \\ &\quad \sum_{n_m=0}^{N_m-1} \boxed{W_{N_m}^{n_m k_m}} \cdot x \left[n_1 + N_1 n_2 + \dots + \overset{m-1}{N}_1 n_m \right] \quad (N_m \text{ 点}) \end{aligned}$$

这里每个标记项 $W_{N_r}^{n_r k_r}$ 都可视为 N_r 点 DFT 的变换基, 因此 N 点 DFT 可拆解为多个较小点数 DFT 来计算。

FFT 的应用

FFT 计算线性卷积

LTI 系统的输出 $y[n]$ 可由输入 $x[n]$ 与系统冲激响应 $b[n]$ 的 **线性卷积** 给出, 我们期望通过 FFT 快速得到 $X[k]$ 和 $H[k]$ 来高效计算线性卷积。

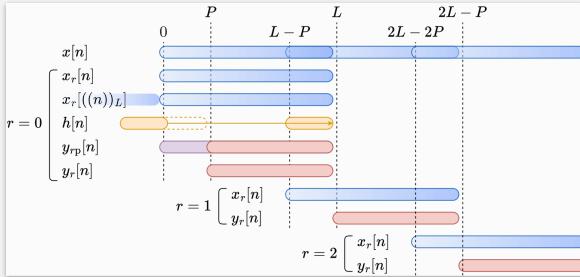
一般情况下, $b[n]$ 的长度 P 远小于 $x[n]$ 的长度 N , 若直接计算 N 点 DFT, 则需要对 $b[n]$ 进行 **大量补零**, 导致计算量增大。为此, 可采用 **重叠保留法 (overlap-save method)** 或 **重叠相加法 (overlap-add method)** 来分段计算线性卷积。

► 重叠保留法

设输入信号 $x[n]$ 的长度为 N , 系统冲激响应 $b[n]$ 的长度为 P , 则线性卷积 $y[n] = x[n] * b[n]$ 的长度为 $N + P - 1$ 。选择分段长度 L , 满足 $L \geq P$, 则每段信号 **循环卷积** 贡献给线性卷积的 **无混叠有效输出** 长度为 $L - P + 1$ 。

④ *Algo.* 重叠保留法计算线性卷积

重叠保留法计算线性卷积的基本思想为，将输入信号 $x[n]$ 分段，每段长度为 L ，相邻两段重叠 $P - 1$ 点，分别与系统冲激响应 $b[n]$ 做循环卷积，再保留每段循环卷积的第 $P - 1$ 点到第 $L - 1$ 点作为线性卷积的有效输出，最后将各段有效输出串联得到完整线性卷积结果。



GIVEN —

N 点长输入信号 $x[n]$ ，长度为 P 的系统冲激响应 $b[n]$

STEPS —

1. 对 $b[n]$ 做 L 点 FFT，得到 $H^L[k] = \text{DFT}_L\{b[n]\}$
2. 将 $x[n]$ 分段，每段长度为 L ，相邻两段重叠 $P - 1$ 点，记第 r 段为 $x_r[n]$
3. 对每段 $x_r[n]$ 做 L 点 FFT，得到 $X_r^L[k] = \text{DFT}_L\{x_r[n]\}$ ，并求 $y_{rp}[n] = \text{IDFT}\{X_r^L[k]H^L[k]\}$
4. 保留 $y_{rp}[n]$ 的第 $P - 1$ 点到第 $L - 1$ 点，作为线性卷积的有效输出 $y_r[n]$

OUTPUT —

线性卷积结果 $y[n]$ ，由各段有效输出串联得到

$$y[n] = \sum_r y_r[n - r(L - P + 1) + P - 1]$$

其中：

- L — 分段长度，满足 $L \geq P$ 。

► 重叠相加法

同样给定输入信号 $x[n]$ 的长度为 N ，系统冲激响应 $b[n]$ 的长度为 P 。

将 $x[n]$ 分为长度为 L 的子段 $x_r[n] = \begin{cases} x[n + rL], & 0 \leq n \leq L - 1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ ，则线性卷积 $y[n] = x[n] * b[n]$ 可表示为

$$y[n] = b[n] * \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n - rL] = \sum_{r=0}^{\infty} b[n] * x_r[n - rL]$$

④ *Algo.* 重叠相加法计算线性卷积

重叠相加法计算线性卷积的基本思想为，将输入信号 $x[n]$ 分段，每段长度为 L ，分别与系统冲激响应 $b[n]$ 做线性卷积，再将各段线性卷积结果平移相加得到完整线性卷积结果。

GIVEN —

N 点长输入信号 $x[n]$ ，长度为 P 的系统冲激响应 $b[n]$

STEPS —

1. 对 $b[n]$ 做 $L + P - 1$ 点 FFT，得到 $H^{L+P-1}[k] = \text{DFT}_{L+P-1}\{b[n]\}$
2. 将 $x[n]$ 分段，每段长度为 L ，记第 r 段为 $x_r[n]$
3. 对每段 $x_r[n]$ 补零做 $L + P - 1$ 点 FFT，得到 $X_r^{L+P-1}[k] = \text{DFT}_{L+P-1}\{x_r[n]\}$ ，并求 $y_r[n] = \text{IDFT}\{X_r^{L+P-1}[k]H^{L+P-1}[k]\}$

OUTPUT —

线性卷积结果 $y[n]$ ，由各段线性卷积结果平移 rL 后相加得到

$$y[n] = \sum_r y_r[n - rL]$$

其中：

- L — 分段长度。

■ 梳状滤波器组与短时傅里叶变换

► DFT 作为滤波器组

梳状滤波器组 (filter bank) 由多个带通滤波器组成，每个带通滤波器提取信号的一个频段成分。

考虑一个简单的低通滤波器

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[n - k], \quad \text{i.e.} \quad b[n] = R_N[n]$$

它输出 $x[n]$ 在 **直流附近** 的频率分量。若希望提取 $x[n]$ 在其他频段的频率成分，可在 **频域** 做 $\frac{2k\pi}{N}$ 移位，相当于 **时域调制**

$$b[n] = e^{j\frac{2k\pi}{N}n} R_N[n]$$

则滤波器输出为

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[n - m] e^{j\frac{2k\pi}{N}m}$$

此时注意到

$$y[N] = \sum_{m=0}^{N-1} x[N - m] e^{j\frac{2k\pi}{N}m} = \sum_{m'=1}^N x[m'] e^{j\frac{2k\pi}{N}(N-m')} = X[k]$$

其中假定 $x[0] = x[N]$ ，则滤波器在 $n = N$ 处的输出即为 **x[n] 的 DFT 系数 $X[k]$** 。因此，每个 DFT 系数 $X[k]$ 都可视为一个中心频率在 $\frac{2\pi k}{N}$ 的带通滤波器在 N 时刻的输出。

► 短时傅里叶变换 (STFT)

短时傅里叶变换 (STFT) 是对信号的**局部时间窗**内的信号做 Fourier 变换，得到信号在**时频平面上**的表示。

(*) *Def.* 短时傅里叶变换 (STFT)

设有离散时间信号 $x[n]$ ，选取长度为 W 的分析窗，则信号 $x[n]$ 的短时傅里叶变换 (short-time Fourier transform, STFT) 为

$$X[k, n] = \text{DFT}\{x[n - W + r + 1]\} = \sum_{r=0}^{W-1} x[n - W + r + 1] e^{-j2\pi kr/W}$$

其中 $k = 0, 1, \dots, W - 1$ ， n 为时间索引。

STFT 可视为对信号 $x[n]$ 中从 $n - W + 1$ 到 n 的长度为 W 的**局部时间窗**内的信号做 W 点 DFT，得到该时间窗内信号的频谱表示。

即使使用 FFT，直接计算 STFT 的复杂度仍为每个时间样点 $O(W \log W)$ ，仍然需要较大的计算量。注意到 STFT 相邻时间窗之间有大量重叠，可利用这一点来减少计算量。对比

$$\begin{aligned} X[k, n+1] &= \sum_{r=0}^{W-1} x[(n+1) - W + r + 1] e^{-j2\pi kr/W} \\ X[k, n] &= \sum_{r=0}^{W-1} x[n - W + r + 1] e^{-j2\pi kr/W} \end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned} X[k, n+1] &= \sum_{r=0}^{W-2} x[(n+1) - W + r + 1] e^{-j2\pi kr/W} + x[n+1] e^{-j2\pi k(W-1)/W} \\ &= \sum_{r'=1}^{W-1} x[n - W + r' + 1] e^{-j2\pi k(r'-1)/W} + x[n+1] e^{j2\pi k/W} \\ &= \left(\sum_{r'=0}^{W-1} x[n - W + r' + 1] e^{-j2\pi kr'/W} - x[n - W + 1] \right) e^{j2\pi k/W} \\ &\quad + x[n+1] e^{j2\pi k/W} \\ &= e^{j2\pi k/W} (X[k, n] - x[n - W + 1] + x[n+1]) \end{aligned}$$

即通过利用上一时刻 STFT 结果 $X[k, n]$ ，仅需两次复加与一次复乘即可得到下一时刻 STFT 结果 $X[k, n+1]$ ，每个时间样点的计算复杂度降为 $O(W)$ 。

■ 正交频分复用 (OFDM)

正交频分复用 (orthogonal frequency-division multiplexing, OFDM) 是一种多载波调制技术，广泛应用于无线通信系统中，如 Wi-Fi、4G 和 5G 移动通信等。

在 OFDM 系统中，**高速数据流**被分割成多个**低速子载波**，每个子载波使用较低的符号速率进行调制。由于子载波之间是正交的，可以有效地利用频谱资源，减少符号间干扰 (inter-symbol interference, ISI)。

数字频谱分析

DFT 与连续信号频谱的关系

■ 直观解释

设有连续时间信号 $s(t)$ ，对其以采样间隔 T_s 进行采样，得到离散时间信号 $s[n] = s(nT)$ 。采样信号的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned} S_s(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \delta(t - nT_s) e^{-j\Omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_s) e^{-j\Omega nT_s} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] e^{-j(\Omega T_s)n} = S_D(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\Omega T_s} \\ &= \mathcal{F} \left\{ s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \right\} = \frac{1}{2\pi} S(\Omega) * \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(\Omega - k \frac{2\pi}{T_s} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega') \frac{1}{T_s} \delta \left(\Omega - \Omega' - k \frac{2\pi}{T_s} \right) d\Omega' \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S \left(\Omega - k \frac{2\pi}{T_s} \right) \end{aligned}$$

其中 $S(\Omega)$ 为连续时间信号 $s(t)$ 的 Fourier 变换， $S_D(e^{j\omega})$ 为离散时间信号 $s[n]$ 的 DTFT。对 DTFT 取分立频点即得到 DFT

$$\begin{aligned} S_D[k] &= S_D \left(e^{j\omega} \right) \Big|_{\omega=2\pi \frac{k}{N}} = \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S \left(\Omega - m \frac{2\pi}{T_s} \right) \Big|_{\Omega=2\pi \frac{k}{NT_s}} \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S \left(2\pi \left(\frac{k}{NT_s} - \frac{m}{T_s} \right) \right) \end{aligned}$$

显见，连续时间信号频谱 $S(\Omega)$ 在以 $\frac{2\pi}{T_s}$ 为周期混叠，DFT 频点 k 对应 DTFT 频率 $\omega = 2\pi \frac{k}{N}$ ，亦即对应连续时间频率 $\Omega = 2\pi \frac{k}{NT_s}$ 。

■ 解析解释

对连续信号 $s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$ 进行采样，得到离散时间信号

$$s[n] = s(nT_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) e^{j\Omega nT_s} d\Omega$$

截取 $n = 0, 1, \dots, M-1$ 点，做 N 点 DFT，得到

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{M-1} s[n] W_N^{kn} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) e^{j\Omega nT_s} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) \underbrace{\sum_{n=0}^{M-1} e^{-j2\pi \frac{(nT_s - 2\pi \frac{k}{N})}{N}}}_{\psi_{M,N,k}(\Omega)} d\Omega \end{aligned}$$

其中，**对 $S(\Omega)$ 做加权积分的权函数**为

$$\begin{aligned} \psi_{M,N,k}(\Omega) &= \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j2\pi \frac{(nT_s - 2\pi \frac{k}{N})}{N}} \\ &= \frac{\sin \left(\frac{M}{2} \left(\Omega T_s - 2\pi \frac{k}{N} \right) \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} \left(\Omega T_s - 2\pi \frac{k}{N} \right) \right)} e^{j\frac{M-1}{2} \left(\Omega T_s - 2\pi \frac{k}{N} \right)} \end{aligned}$$

► 理解 1：对连续时间信号频谱的采样

理想情况下，对 $s(t)$ 频谱 $S(\Omega)$ 的**理想采样**应为

$$X_{\text{ideal}}[k] = S(\Omega) \Big|_{\Omega=2\pi \frac{k}{NT_s}} = \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) \hat{\delta} \left(\Omega - 2\pi \frac{k}{NT_s} \right) d\Omega$$

实际的采样函数 $\frac{1}{2\pi} \psi_{M,N,k}(\Omega)$ 可视为对理想采样函数 $\hat{\delta} \left(\Omega - 2\pi \frac{k}{NT_s} \right)$ 的一种**逼近**，随着 M 增大，其主瓣变窄，旁瓣减小，更加接近理想采样。

► 理解 2：滤波器组的输出

上面的频谱

$$\begin{aligned} X[k] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) \psi_{M,N,k}(\Omega) d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) \psi_{M,N,k}(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \Big|_{t=0} = \mathcal{F}^{-1} \{ S(\Omega) \psi_{M,N,k}(\Omega) \} \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

可视为对连续时间信号 $s(t)$ 通过一组滤波器组后在 $t = 0$ 时刻的输出，第 k 个滤波器的频率响应为 $\psi_{M,N,k}(\Omega)$ ，对应时域冲激响应为

$$b_{M,N,k}(t) = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \delta(t - nT_s)$$

► 理解 3：无限长离散信号加矩形窗

设有无限长离散信号 $s[n]$ ，其 DTFT 为 $S_D(\omega)$ 。对其进行矩形窗截断，得到长度为 M 的有限长信号

$$s_M[n] = s[n] R_M[n], \quad R_M[n] = u[n] - u[n-M]$$

则其 DTFT 为

$$\begin{aligned} S_M(\omega) &= S_D(\omega) * \text{DTFT}\{R_M[n]\} = S_D(\omega) * \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\omega n} \\ &= S_D(\omega) * \frac{\sin \frac{M\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j\frac{(M-1)\omega}{2}} \end{aligned}$$

对其在 $0 \sim 2\pi$ 范围内均匀采样 N 点 (M 不一定等于 N)，即得到 DFT

$$\begin{aligned} X[k] &= S_M(\omega) \Big|_{\omega=2\pi \frac{k}{N}} = \int_{-\pi}^{\pi} S_D(\omega') \cdot \frac{\sin \left(\frac{M}{2} (\omega - \omega') \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} (\omega - \omega') \right)} e^{-j\frac{(M-1)}{2} (\omega - \omega')} d\omega' \Big|_{\omega=2\pi \frac{k}{N}} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} S_D(\omega') \cdot \frac{\sin \left(\frac{M}{2} (\omega' - \omega) \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} (\omega' - \omega) \right)} e^{j\frac{(M-1)}{2} (\omega' - \omega)} d\omega' \Big|_{\omega=2\pi \frac{k}{N}} \\ &\stackrel{\omega'=\Omega T_s}{=} T_s \int_{-\pi}^{\pi} S_D(\Omega T_s) \cdot \frac{\sin \left(\frac{M}{2} (\Omega T_s - 2\pi \frac{k}{N}) \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} (\Omega T_s - 2\pi \frac{k}{N}) \right)} e^{j\frac{(M-1)}{2} (\Omega T_s - 2\pi \frac{k}{N})} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2\pi T_s S_D(\Omega T_s)) \cdot \psi_{M,N,k}(\Omega) d\Omega \end{aligned}$$

用 DFT (FFT) 进行频谱分析

■ 抗混叠滤波

实际连续信号一般不满足带限 (bandlimited) 条件，需先通过抗混叠滤波器 (anti-aliasing filter) 限制信号带宽，避免混叠失真。

设采样环节的采样率为 f_s ，则抗混叠滤波器的截止频率须取为 $B_{\text{pass}} < \frac{f_s}{2}$ 。

■ 采样

采样环节将连续时间信号 $s(t)$ 以采样间隔 $T_s = \frac{1}{f_s}$ 进行采样，得到离散时间信号 $x[n] = s(nT_s)$ 。

■ 截取、加窗

实际参加频谱分析的信号长度有限，需对离散时间信号进行截取，得到有限长信号 $x_M[n] = x[n]R_M[n]$ 。为减小截断引起的频谱泄漏 (spectral leakage)，通常会对有限长信号进行时域加窗处理，对应地在频域即卷积以频率采样函数，从而减小旁瓣泄漏的影响。

截取 M 点即等效于乘以矩形窗 $R_M[n]$ ，其对应的频率采样函数为

$$\tilde{R}_M(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\omega n} = \frac{\sin\left(\frac{M\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\frac{(M-1)\omega}{2}}$$

常用的窗函数如 Hanning 窗

$$w[n] = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{M}\right), \quad 0 \leq n \leq M-1$$

和 Hamming 窗

$$w[n] = 0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{M}, \quad 0 \leq n \leq M-1$$

我们使用旁瓣高度和 3 dB 主瓣展宽来评价窗函数的频率特性：

- 旁瓣高度 (side lobe level): 窗函数频谱中主瓣之外最高旁瓣与主瓣峰值之比，通常以 dB 为单位表示。旁瓣高度越低，频谱泄漏越小。
- 3 dB 主瓣展宽 (3 dB main lobe width): 窗函数频谱中主瓣在峰值处下降 3 dB 所对应的频率宽度。主瓣展宽越小，频率分辨率损失越小。

窗函数	旁瓣高度 (dB)	3 dB 主瓣展宽 ($\times \frac{2\pi}{MT_s}$)
矩形窗	-13	0.89
三角窗	-25	1.28
Hanning 窗	-31	1.44
Hamming 窗	-41	1.30
Blackman 窗	-57	1.68

■ 频谱显示

对截取并加窗后的有限长信号 $x_M[n]$ 进行 FFT，即得到其 DFT 频谱 $X_M[k]$ 。若想更加「精细」地显示频谱，可以通过零填充 (zero padding) 的方式增加 FFT 点数 N ($N > M$)，使得频谱显示更加平滑。

M 点离散时间信号的 DTFT 频谱由 M 点 DFT 完全表示，因此这一过程中本质上并没有增加频谱信息，只是一种插值手段。注意到

$$\begin{aligned} X_M(\omega) &= \sum_{n=0}^{M-1} x_M[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{M-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_M[k] e^{j2\pi \frac{kn}{N}} \right) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} X_M[k] \sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{N} e^{-j\omega \left(\omega - 2\pi \frac{k}{N} \right)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} X_M[k] \cdot \boxed{e^{-j\frac{M-1}{2} \left(\omega - 2\pi \frac{k}{M} \right)} \cdot \frac{\sin \left(\frac{M}{2} \left(\omega - \frac{2\pi k}{N} \right) \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} \left(\omega - \frac{2\pi k}{N} \right) \right)}} \end{aligned}$$

可见，零填充后的频谱 $X_M(\omega)$ 可视为对 DFT 频点 $X_M[k]$ 进行加权插值得到的连续频谱，其权函数与截断窗的频率采样函数相同。这一过程称为 Shannon 插值。

离散余弦变换 (DCT)

■ DCT 的定义

■ DCT 的引入

图像（信息）压缩中，我们希望用尽量少的数据表达尽量多的信息。考虑一个离散信号 $x[n]$ ，对其做离散变换 \mathcal{T} 得到变换域信号 $X[k] = \mathcal{T}\{x[n]\}$ ，若 $X[k]$ 的大部分能量集中在较小的系数索引集合 A 上，则可舍弃那些系数较小的部分，即进行截断

$$X_A[k] = \begin{cases} X[k], & k \in A, \\ 0, & k \notin A, \end{cases}$$

此时，利用 $X_A[k]$ 进行逆变换可得到近似信号

$$x_A[n] = \mathcal{T}^{-1}\{X_A[k]\}$$

我们希望通过选择合适的变换 \mathcal{T} ，使得在较小的系数集合 A 下，近似信号 $x_A[n]$ 能较好地逼近原始信号 $x[n]$ 。为此，引入编码误差

$$|e_A|^2 = \sum_n |x[n] - x_A[n]|^2$$

若变换 \mathcal{T} 是正交变换，则有帕塞瓦尔定理 (Parseval's theorem) 给出

$$\begin{aligned} |e_A|^2 &= \sum_n |x[n] - x_A[n]|^2 \\ &= (\mathbf{T}^{-1}\vec{X} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\vec{X})^H (\mathbf{T}^{-1}\vec{X} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\vec{X}) \\ &= \vec{X}^H \vec{X} - \vec{X}^H \mathbf{A} \vec{X} = \sum_{k \notin A} |X[k]|^2 \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{A} = \text{diag}\{\mathbf{1}_{n \in A}\}$ ， \mathbf{T} 为变换矩阵， $\vec{X} = \mathbf{T}\vec{x}$ 。可见，此时编码误差仅与被截断的系数有关。

DFT 是序列直接周期延拓后的 DTFT，在两个周期的交界处会产生不连续点，引入了较高频率成分，导致频谱能量分布较为分散，不利于压缩。尝试将原 N 点序列对称扩展到 $2N$ 点，然后做 $2N$ 点 DFT，即

$$\begin{aligned} x_{\text{ext}}[n] &= \begin{cases} x[n], & 0 \leq n < N, \\ x[2N-1-n], & N \leq n < 2N, \end{cases} \\ X_{\text{ext}}[k] &= \sum_{n=0}^{2N-1} x_{\text{ext}}[n] W_{2N}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_{2N}^{nk} + \sum_{n=N}^{2N-1} x[2N-1-n] W_{2N}^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_{2N}^{nk} + \sum_{m=0}^{N-1} x[m] W_{2N}^{(2N-1-m)k} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{j\frac{\pi}{2N}k} (e^{-j\frac{\pi}{2N}(2n+1)k} + e^{j\frac{\pi}{2N}(2n+1)k}) \\ &= 2e^{j\frac{\pi}{2N}k} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{\pi}{2N}(2n+1)k\right) \end{aligned}$$

其变化基函数为余弦函数 $\cos\left(\frac{\pi}{2N}(2n+1)k\right)$ 。对其做一些系数调整以保证正交性，由此引入离散余弦变换 (DCT)。

(*) Def. 离散余弦变换 (DCT)

离散余弦变换 (Discrete Cosine Transform, DCT) 是一种将离散信号转换为余弦基函数系表示的线性变换。对于长度为 N 的序列 $x[n]$ ，其 DCT 定义为

$$X_{\text{DCT}}[k] = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n], & k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{\pi}{2N}(2n+1)k\right), & k = 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

DCT 的输入与输出均为实数，且具有良好的能量集中特性，适用于信号压缩。

■ DCT 的快速计算

DCT 可视为对称扩展后的 DFT，因此可以利用 FFT 算法进行快速计算。考虑长度为 N 的实序列 $x[n]$ ，求其 DCT 即是求

$$x[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{\pi}{2N}(2n+1)k\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

然后进行适当的系数调整。

■ 对称延拓方案

定义长度为 $2N$ 的序列

$$x_{\text{ext}}[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n < N, \\ x[2N-1-n], & N \leq n < 2N, \end{cases}$$

对其做 $2N$ 点 DFT, 得到

$$X_{\text{ext}}[k] = 2e^{\frac{j\pi}{2N}k} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{\pi}{2N}(2n+1)k\right)$$

取前 n 个系数的模长 (或乘以相位因子 $e^{-j\frac{\pi}{2N}k}$), 即可得到

$$\chi[k] = \frac{1}{2\sqrt{N}} e^{-j\frac{\pi}{2N}k} X_{\text{ext}}[k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

FFT 求 $X_{\text{ext}}[k]$ 的计算复杂度为 $O(N \log N)$, 因此 DCT 的计算复杂度也为 $O(N \log N)$ 。

■ 直接做 $2N$ 点 DFT

另一种方法是直接对 $x[n]$ 做 $2N$ 点 DFT, 即

$$X_{\text{DFT-}2N}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_{2N}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{2N}nk}$$

然后取

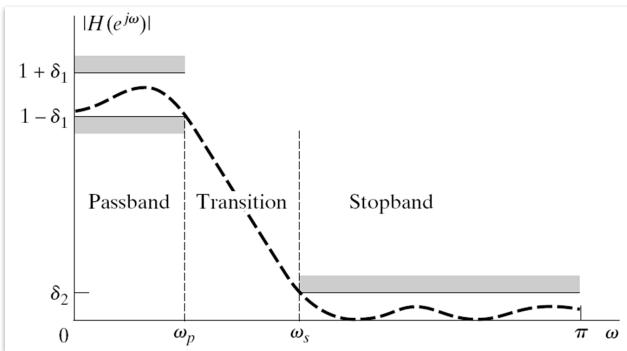
$$\begin{aligned} \Re\left\{e^{-j\frac{\pi}{2N}k} X_{\text{DFT-}2N}[k]\right\} &= \Re\left\{\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{\pi}{2N}(2n+1)k}\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{\pi}{2N}(2n+1)k\right) \end{aligned}$$

即知

$$\chi[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \Re\left\{e^{-j\frac{\pi}{2N}k} X_{\text{DFT-}2N}[k]\right\}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

同样, FFT 求 $X_{\text{DFT-}2N}[k]$ 的计算复杂度为 $O(N \log N)$, 因此 DCT 的计算复杂度也为 $O(N \log N)$ 。

滤波与系统



典型数字低通的主要参数有:

- 通带截止频率 ω_p 、阻带截止频率 ω_s , 定义了各频带边界为
 - 通带: $0 \leq |\omega| < \omega_p$
 - 过渡带: $\omega_p \leq |\omega| < \omega_s$
 - 阻带: $\omega_s \leq |\omega| < \pi$
- 通带峰值波纹 δ_1 , 定义为通带内增益的最大偏差, 即

$$1 - \delta_1 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_1, \quad \forall \omega \in [0, \omega_p]$$

通常使用 dB 值表示, 即通带波纹为 $\alpha_1 = -20 \log_{10}(1 - \delta_1)$ dB。

- 阻带峰值波纹 δ_2 , 定义为阻带内增益的最大值, 即

$$0 < |H(e^{j\omega})| \leq \delta_2, \quad \forall \omega \in [\omega_s, \pi]$$

通常使用 dB 值表示, 即阻带波纹为 $\alpha_2 = -20 \log_{10} \delta_2$ dB。

z 变换

z 变换的定义

(*) Def. 双边 z 变换

设离散时间信号 $x[n]$, 其双边 z 变换定义为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

记作 $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$, 其中 z 为复变量, 通常表示为 $z = re^{j\omega}$, r 为模长, ω 为相位角。

z 变换的收敛域

由于 z 变换式为无穷 Laurent 级数, 其收敛性取决于 z 的取值范围。对于不同的信号 $x[n]$, 其 z 变换的收敛域 (region of convergence, ROC) 也不同。

序列类型	z 变换式 $\mathcal{Z}\{x[n]\}$	收敛域 (ROC)
有限长序列	$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] z^{-n}$	$0 < z < \infty$
	$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] z^{-n}$	$0 \leq z < \infty$
	$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] z^{-n}$	$0 < z \leq \infty$
右边序列	$X(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} x[n] z^{-n}$	$ z > r$
左边序列	$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_0} x[n] z^{-n}$	$ z < r$
双边序列	$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$	$r_1 < z < r_2$

(*) EG. z 变换的收敛域举例

考虑双边序列 $x[n] = a^{|n|}$, 其 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n z^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{az}{1 - az}$$

两部分分别是 az^{-1} 和 az 的几何级数, 其收敛分别要求 $|z| > |a|$ 和 $|z| < \frac{1}{|a|}$, 因此整体的收敛域为

$$|a| < |z| < \frac{1}{|a|}$$

当 $|a| \geq 1$ 时, 收敛域不存在。

因果系统的 z 变换收敛域为 $|z| > r$, 其中 r 为系统最大模值极点的模值; 稳定系统的 z 变换收敛域包含单位圆 $|z| = 1$ 。因此, 因果且稳定系统要求其所有极点均位于 z 平面单位圆内。

■ 逆 z 变换

由 Cauchy 积分定理, z 变换具有唯一的逆变换, 其表达式为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{n-1} X(z) dz &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{n-1} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-m} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \oint_C z^{n-m-1} dz \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \delta[n-m] = x[n] \end{aligned}$$

(*) Def. 逆 z 变换

设信号 $x[n]$ 的 z 变换为 $X(z)$, 则其逆 z 变换定义为

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{n-1} X(z) dz$$

其中积分路径 C 为包含收敛域的闭合曲线。

► 留数法求逆 z 变换

逆 z 变换的积分式可通过留数定理计算。设 $X(z)$ 在收敛域内**内边界环内**有有限个极点 $\{z_k\}$, 在**外边界环外**有有限个极点 $\{z_m\}$, 则

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{n-1} X_R(z) dz + \frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{n-1} X_L(z) dz \\ &= \sum_k \text{Res}\{z^{n-1} X_R(z), z_k\} u[n] - \sum_m \text{Res}\{z^{n-1} X_L(z), z_m\} u[-n-1] \end{aligned}$$

其中, **留数**定义为

$$\text{Res}\{f(z), z_0\} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-z_0)^m f(z))$$

其中 m 为极点 z_0 的阶数。

► 部分分式展开法求逆 z 变换

对于有理式 z 变换 $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$, 可以通过**部分分式展开**将其拆分为简单项的和, 然后对每一项分别求逆 z 变换, 再将结果相加。

设 $X(z)$ 可分解为

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \\ &= \sum_{m=0}^{M-N} B_m z^{-m} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{l=1}^{N_2} \sum_{s=1}^{r_l} \frac{C_{l,s}}{(1 - p_l z^{-1})^s} \end{aligned}$$

其中, p_k 和 p_l 分别为**单极点**和**重极点**的位置, N_1 和 N_2 分别为单极点和重极点的个数, r_l 为重极点 p_l 的阶数。对于这一分式展开式, 各项的逆 z 变换分别为

$$\begin{array}{ccc} z^{-m} & \xrightarrow{Z^{-1}} & \delta[n-m] \\ \frac{1}{1-p_k z^{-1}} & \xrightarrow{Z^{-1}} & p_k^n u[n] \\ \frac{1}{(1-p_l z^{-1})^s} & \xrightarrow{Z^{-1}} & \frac{(n+s-1)!}{(s-1)! n!} p_l^n u[n] \end{array}$$

► 离散时间系统的 z 变换性质

■ 离散时间系统的 z 变换表示

设离散时间系统的输入输出关系为

$$y[n] + \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^M b_r x[n-r]$$

则对其做 z 变换, 得到**系统函数**

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

其中, $X(z) = Z\{x[n]\}$, $Y(z) = Z\{y[n]\}$, 系统**冲激响应**即为 $b[n] = Z^{-1}\{H(z)\}$ 。同时由**定义**知, 系统的**频率响应**为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b[n] e^{-jn\omega} = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

频率响应特别是幅频响应对应于系统的外在滤波特性, 而系统函数 $H(z)$ 则反映了系统的内在结构实现。若对给定的幅频特性 $A(e^{j\omega}) \geq 0$, 能够找到**因果稳定**的系统函数 $H(z)$ 使得 $|H(e^{j\omega})| = A(e^{j\omega})$, 则称该幅频特性是**可实现的**, 该系统函数即为**幅频特性** $A(e^{j\omega})$ 的**实现**。

∅ Note 系统的可实现性

幅频特性 $A(e^{j\omega})$ 可实现的一个充分必要条件是 Paley-Wiener 条件:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln A(e^{j\omega})| d\omega < \infty$$

进一步地, 若所实现的系统是**最小相位系统**, 则该实现是唯一的。

显然, 若幅频特性 $A(e^{j\omega})$ 在某一频段内为零, 则该幅频特性不可实现。一个推论是, 在一个频率区间内恒为常数的幅频特性也是不可实现的。

■ 逆系统设计

通过设计逆系统, 可以实现对原系统的补偿或校正。设离散时间系统的系统函数为 $H(z)$, 则其**逆系统**的系统函数自然为 $H_1(z) = \frac{1}{H(z)}$, 由**部分分式法**即可求出系统的冲激响应。

广义上, 逆系统也可以**容许延迟和缩放**, 即

$$H_1(z)H(z) = Cz^{-D}$$

相应地,

$$b_1[n] * b[n] = C\delta[n-D]$$

可以使用**最小二乘**的数值方法设计逆系统, 以近似满足上述关系, 最小化均方误差

$$\sum_n |b_1[n] * b[n] * x[n] - x[n-D]|^2$$

原线性系统可表示为

$$\vec{y} = \mathbf{A}_b \vec{x}$$

其中, \mathbf{A}_b 为**卷积矩阵**

$$\mathbf{A}_b = \begin{pmatrix} b[0] & & & \\ b[1] & b[0] & & \\ b[2] & b[1] & b[0] & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

则求解逆系统等价于最小二乘求解

$$\mathbf{A}_b \vec{b}_1 \cong \vec{e}_D$$

其中 \vec{e}_D 为第 D 个位置为1, 其余位置为0的单位向量。根据最小二乘解的正规方程, 有

$$\hat{\vec{b}}_1 = (\mathbf{A}_b^\top \mathbf{A}_b)^{-1} \mathbf{A}_b^\top \vec{e}_D$$

■ 全通系统和最小相位系统

► 全通系统

全通系统是指**幅频特性恒为常数**的系统, 其系统函数满足

$$|H_{ap}(e^{j\omega})| = C, \quad -\pi \leq \omega < \pi$$

全通系统的系统函数可表示为

$$H_{ap}(z) = C \prod_{k=1}^N \frac{-1}{p_k^*} \frac{z^{-1} - p_k^*}{1 - p_k z^{-1}} = G \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - p_k^*}{1 - p_k z^{-1}}$$

即系统的零点和极点以 $\begin{cases} z_p = p_k, \\ z_o = (p_k^*)^{-1} \end{cases}$ 的方式成对出现, **关于单位圆对称分布**。

我们取一对零极点 $(\frac{1}{r}e^{j\varphi}, re^{j\varphi})$ 来分析, 该全通系统为

$$H(z) = G \frac{z^{-1} - re^{-j\varphi}}{1 - re^{j\varphi} z^{-1}}$$

其**相频特性**为

$$\arg H(e^{j\omega}) = \arg G + \tan^{-1} \frac{(1-r^2)\sin(\omega-\varphi)}{(1-r^2)\cos(\omega-\varphi) + r(1-2r\cos(\omega-\varphi)+r^2)}$$

► 最小相位系统

最小相位系统是指所有零点均位于单位圆内的系统；若系统稳定、因果，则其所有零极点均位于单位圆内。

最小相位系统具有**最小群时延**的特性，即在所有具有相同幅频特性的因果稳定系统中，最小相位系统的群时延 $\tau_g(\omega) = -\frac{d \arg H(e^{j\omega})}{d\omega}$ 最小；因此，在幅频特性相同的因果稳定系统中，最小相位系统具有**最小能量延迟**特性，能够最快响应输入信号的能量变化。

§ 3.1m 系统的最小相位分解

任意系统均可分解为最小相位部分和全通部分的乘积

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

最小相位分解的实现过程为：对系统的每个**单位圆外零点** $z_o = re^{j\varphi}$ ($r > 1$)，引入一个在该处有极点、在对应的单位圆内位置 $z'_o = (z_o^*)^{-1} = \frac{1}{r}e^{j\varphi}$ 有零点的全通系统，得到

$$z^{-1} - z_o^{-1} = (1 - z'_o z^{-1}) \cdot \frac{z^{-1} - z_o^{-1}}{1 - z'_o z^{-1}}$$

■ 典型的离散时间系统

■ 数字正弦振荡器

数字正弦振荡器是一种用于生成离散时间正弦波信号的系统。由于保持振荡，其系统函数具有**单位圆上的共轭复数极点对**，即极点 $p_{1,2} = e^{\pm j\omega_0}$ ，其系统函数为

$$H(z) = \frac{b_0}{(1 - e^{j\omega_0}z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0}z^{-1})} = \frac{b_0}{1 - 2\cos\omega_0 \cdot z^{-1} + z^{-2}}$$

取 $b_0 = A \sin\omega_0$ ，则系统的冲激响应为

$$b[n] = A \sin(\omega_0(n+1))u[n]$$

$n=0$ 时刻输入一个单位冲激，系统将输出一个**频率为 ω_0 ，幅度为 A** 的正弦波。

■ 数字陷波器

数字陷波器是一种用于抑制特定频率成分的系统。其系统函数具有**单位圆上的共轭复数零点对**，即零点 $z_{1,2} = e^{\pm j\omega_0}$ ，其系统函数为

$$H(z) = (1 - e^{j\omega_0}z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0}z^{-1}) = 1 - 2\cos\omega_0 \cdot z^{-1} + z^{-2}$$

这样得到的系统在频率 ω_0 处具有**零响应**，但 ω_0 附近的频率成分也会受到一定抑制。为了提高陷波器的选择性，可以在附近引入**极点对** $p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}$ ，使得系统函数变为

$$H(z) = \frac{1 - 2\cos\omega_0 \cdot z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos\omega_0 \cdot z^{-1} + r^2z^{-2}}, \quad 0 < r < 1$$

这样可以在 ω_0 附近形成**峰值响应**，从而增强陷波效果。

■ 梳状滤波器

梳状滤波器是一种具有周期性频率响应的系统，其系统函数为

IIR 滤波器

■ IIR 滤波器的实现结构

IIR (Infinite Impulse Response) 滤波器是指具有**无限长冲激响应**的数字滤波器，其差分方程形如

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{r=0}^M b_r x[n-r]$$

其系统函数可表示为**有理分式**

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

其显著的特征是存在分母上的**反馈回路**，存在极点。

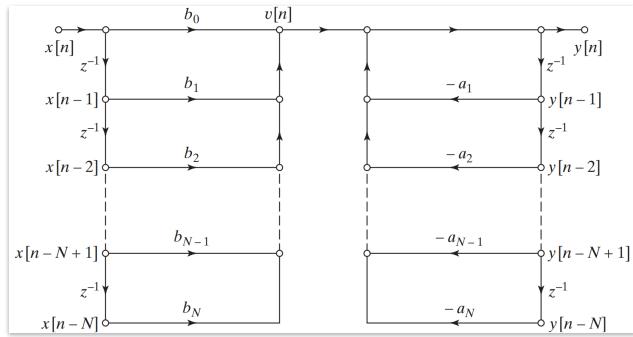
■ IIR 的直接实现

► IIR 的直接 I 型实现

一般地，IIR 滤波器可以拆分成两个**级联**子系统

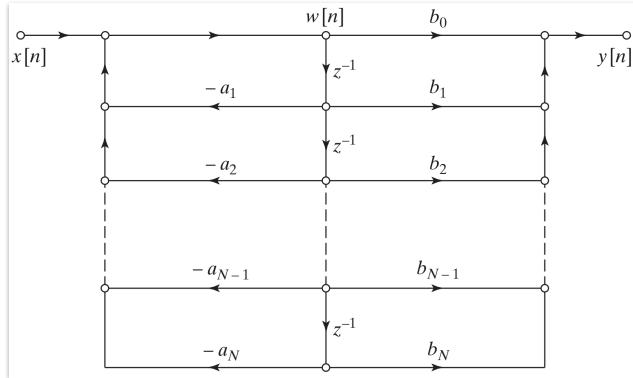
$$\begin{cases} v[n] = \sum_{r=0}^M b_r x[n-r], & (\text{滑动平均}) \\ y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + v[n] & (\text{自回归}) \end{cases}$$

直接依次实现上述两个子系统，得到**直接 I 型实现结构**。



► IIR 的直接 II 型实现

由于可以交换顺序，可以把延迟单元合并，得到**直接 II 型实现结构**。



■ IIR 的级联实现

将系统函数 $H(z)$ 分解为若干低阶子系统的乘积

$$H(z) = \frac{\prod_{r=0}^N (1 - z_r z^{-1})}{\prod_{k=0}^M (1 - p_k z^{-1})} = \prod_{i=1}^K H_i(z)$$

对实系数有理分式，其中每个子系统 $H_i(z)$ 为**一阶系统** $\frac{1 - g_r z^{-1}}{1 - c_k z^{-1}}$ 或**二阶系统** $\frac{(1 - b_r z^{-1})(1 - b_r^* z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$ ，于是 IIR 滤波器可以实现为这样多个**一阶**和**二阶子滤波器的级联**。子滤波器的实现可以采用直接 II 型结构。

■ IIR 的并联实现

将系统函数 $H(z)$ 分解为若干低阶子系统的和

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \\ &= \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k (1 - c_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})} \end{aligned}$$

即形成若干一阶和二阶子滤波器的并联。子滤波器的实现可以采用直接II型结构。

IIR 滤波器的间接设计方法

IIR滤波器参数量大、较难控制，因此一般采用间接设计方法，先设计模拟滤波器，再通过变换转换为数字滤波器。

间接法的设计流程为：

- 根据数字滤波器的需求指标， $z = g(s)$ 变换得到模拟滤波器的需求指标；
- 设计满足模拟滤波器需求指标的模拟滤波器 $H_a(s)$ ；
- 通过 $s = f(z)$ 变换将模拟滤波器转换为数字滤波器 $H(z) = H_a(f(z))$ 。

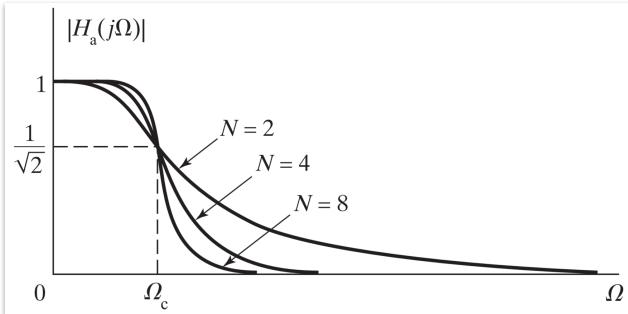
■ 模拟滤波器的设计

► Butterworth 滤波器

Butterworth 滤波器的幅频特性为

$$A(j\Omega) = |H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

其中， -3 dB 截止频率 Ω_c 和阶数 N 是待定系数。阶数 N 越大，则滤波器的过渡带越陡峭，但 -3 dB 的截止频率不变。



给定设计指标 $(\Omega_p, \Omega_s, \delta_1, \delta_2)$ 后，代入得到

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} = (1 - \delta_1)^2, \quad \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \delta_2^2$$

解得

$$N = \left\lceil \frac{\log \frac{1/(1-\delta_1)^2 - 1}{1/\delta_2^2 - 1}}{2 \log \frac{\Omega_s}{\Omega_p}} \right\rceil, \quad \Omega_c = \Omega_p \left(\frac{1}{(1-\delta_1)^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2N}}$$

Butterworth 滤波器的极点分布在以原点为中心、半径为 Ω_c 的圆周上。

$A(s)$ 的极点位置为

$$s_k = \Omega_c e^{\pm j\pi \frac{2k+N-1}{2N}}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1$$

选出左半平面的极点 s_1, s_2, \dots, s_N ，则 Butterworth 滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_N)}$$

► Chebyshev 滤波器

Chebyshev 滤波器分为 I 型和 II 型两种，分别对应通带波纹和阻带波纹。

Chebyshev I 型滤波器的幅频特性为

$$A(j\Omega) = |H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}$$

其中， $T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \arccos x), & |x| \leq 1, \\ \cosh(N \operatorname{arcosh} x), & |x| > 1 \end{cases}$ 为 Chebyshev 多项式； ε 为波纹因子， Ω_c 为等波纹通带的截止频率， N 为滤波器阶数，均为待定系数。

给定设计指标 $(\Omega_p, \Omega_s, \delta_1, \delta_2)$ 时，可认为 $\Omega_c = \Omega_p$ ；波纹因子 ε 与通带最大衰减 δ_1 的关系为

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} = 1 - \delta_1, \quad \text{i.e.} \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{1}{(1 - \delta_1)^2} - 1}$$

Chebyshev I 型滤波器在通带内等波纹，为了满足阻带衰减要求 δ_2 ，需要满足

$$\frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2 \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)} = \delta_2^2$$

解得

$$N = \left\lceil \frac{\operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{\delta_2^2} - 1} \right)}{\operatorname{arccosh} \frac{\Omega_s}{\Omega_p}} \right\rceil$$

Chebyshev I 型滤波器的极点位置为

$$s_k = -a \sin \left(\frac{(2k-1)\pi}{2N} \right) + jb \cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2N} \right), \quad k = 1, 2, \dots, N$$

其中， $a = \Omega_c \sinh \left(\frac{1}{N} \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\varepsilon} \right)$ ， $b = \Omega_c \cosh \left(\frac{1}{N} \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\varepsilon} \right)$ 。于是，可得到 Chebyshev I 型滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{\frac{\Omega_c^N}{\varepsilon \times 2^{N-1}}}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_N)}$$

Chebyshev II 型滤波器具有等波纹阻带，其幅频特性为

$$A(j\Omega) = |H_a(j\Omega)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{T_N^2 \left(\frac{\Omega_c}{\Omega}\right)}}$$

类似可给出其设计。

■ s 平面到 z 平面的变换方法

► 冲激响应不变法

冲激响应不变法基于采样保持的思想，将模拟滤波器的冲激响应 $h_a(t)$ 以采样周期 T 采样，得到数字滤波器的冲激响应

$$b[n] = Tb_a(nT)$$

模拟滤波器的系统函数可表示为

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - p_k}, \quad A_k = (s - s_k)H_a(s)|_{s=p_k}$$

其冲激响应为

$$b_a(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_a(s)\} = \sum_{k=1}^N A_k e^{p_k t} u(t)$$

则数字滤波器的冲激响应为

$$b[n] = T \sum_{k=1}^N A_k e^{p_k n T} u[n]$$

得到其系统函数为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b[n] z^{-n} = T \sum_{k=1}^N A_k \sum_{n=0}^{\infty} (e^{p_k T} z^{-1})^n = T \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

■ *Theorem.* 冲激响应不变法的 s 到 z 极点对应关系

基于模拟滤波器的冲激响应以采样周期 T 采样得到数字滤波器的冲激响应，则模拟滤波器极点 p_k 与数字滤波器极点 z_k 的对应关系为

$$z_k = e^{p_k T}$$

即系统函数项的对应关系为

$$\frac{1}{s - p_k} \longleftrightarrow \frac{T}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

► 双线性变换法

冲激响应不变法会引入混叠失真，因此更常用的是**双线性变换法**。其基本思想是通过压缩 $(-\infty, +\infty)$ 的 s 平面 $j\Omega$ 轴到 $[-\pi, \pi]$ 的 z 平面的角度区间，从而避免混叠失真。

具体地，令

$$j\Omega = k \cdot j \tan\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) = k \frac{e^{j\Omega_1 T/2} - e^{-j\Omega_1 T/2}}{e^{j\Omega_1 T/2} + e^{-j\Omega_1 T/2}}$$

为保持 $\Omega_1 \rightarrow 0$ 时 $\Omega \rightarrow 0$ ，须取 $k = \frac{2}{T}$ 。进而，由虚轴扩展到整个 s 平面，得到

$$s = \frac{2}{T} \frac{e^{s_1 T/2} - e^{-s_1 T/2}}{e^{s_1 T/2} + e^{-s_1 T/2}} = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}}$$

令 $z = e^{s_1 T}$ ，即得到**双线性变换关系**

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

可由此将模拟滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 转换为数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 。

在双线性变换法下，模拟频率 Ω 与数字频率 ω 的关系为

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

数字滤波器的指标也需要相应调整。

■ 数字频率变换

数字频率变换法通过对数字滤波器的系统函数进行变量替换，实现不同频率特性的滤波器设计。设有数字滤波器 $H_L(z)$ ，通过**变量替换**

$z = G(Z)$ 得到新的数字滤波器

$$H_d(Z) = H_L(G(Z))$$

变量替换函数应满足：

- 保持单位圆映射，即当 $Z = e^{j\omega}$ 时， $G(Z)$ 也应在单位圆上；
- 单位圆内映射到单位圆内，以保证稳定性，即当 $|Z| < 1$ 时， $|G(Z)| < 1$ 。

全通系统的系统函数即满足上述条件，因而通常取1阶全通系统作为变量替换函数

$$G(Z) = \frac{Z - \alpha}{1 - \alpha Z}$$

► 低通到低通的频率变换

设有低通滤波器 $H_L(z)$ ，变量替换要求

- 保持通带中心频率不变： $G(e^{j0}) = e^{j0}$ ；
- 调整通带截止频率位置： $z = e^{j\theta_c} \rightarrow Z = e^{j\omega_c}$

代入 $e^{j\theta_c} = G(e^{j\omega_c})$ ，解得

$$\alpha = \frac{\sin \frac{\theta_c - \omega_c}{2}}{\sin \frac{\theta_c + \omega_c}{2}}$$

► 低通到高通的频率变换

设有低通滤波器 $H_L(z)$ ，变量替换要求

- 移动通带中心频率到 π ： $G(e^{j0}) = e^{j\pi}$ ；
- 调整通带截止频率位置： $z = e^{j\theta_c} \rightarrow Z = e^{-j\theta_c}$ 。

代入 $e^{j\theta_c} = G(e^{-j\theta_c})$ ，解得

$$\alpha = -\frac{\cos \frac{\theta_c + \omega_c}{2}}{\cos \frac{\theta_c - \omega_c}{2}}$$

► 低通到带通的频率变换

设有低通滤波器 $H_L(z)$ ，变量替换要求

- 移动通带中心频率到 ω_0 ： $G(e^{j0}) = e^{j\omega_0}$ ；
- 调整通带宽度位置： $z = e^{j\theta_c} \rightarrow Z = e^{j\omega_1}$ 和 $z = e^{-j\theta_c} \rightarrow Z = e^{-j\omega_2}$ 。

两处位置调整，使用2阶全通系统作为变量替换函数，代入解得

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{-2\alpha k}{k+1}, \\ \alpha_2 = \frac{k-1}{k+1}, \end{cases} \quad \text{其中 } k = \frac{\tan \frac{\theta_c}{2}}{\tan \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}}, \quad \alpha = \frac{\cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}}{\cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}}$$

FIR 滤波器

► FIR 滤波器的实现结构

FIR (Finite Impulse Response) 滤波器是指具有有限长冲激响应的数字滤波器，冲激响应 $b(t)$ 时宽有限，意味着系统函数 $H(z)$ 是**有限长多项式**

$$b[n] = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k] \implies H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

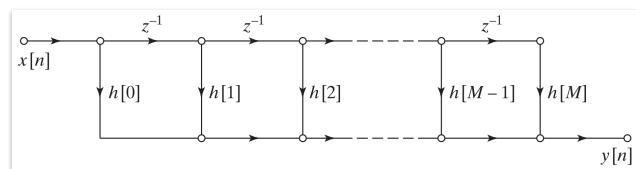
故FIR滤波器的差分方程为

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

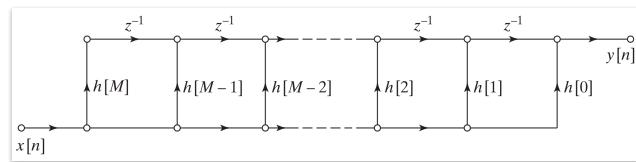
FIR滤波器没有反馈回路，极点在 $z = 0$ 处，天然稳定。

■ FIR 的直接实现

FIR滤波器可以直接根据差分方程实现：



也可以先加权、后延时，即形成**转置结构**：



■ FIR 的级联实现

对FIR滤波器，其系统函数 $H(z)$ 可分解为若干低阶多项式的乘积

$$H(z) = A \prod_{k=1}^{M_1} (1 - g_k z^{-1}) \prod_{l=1}^{M_2} (1 - b_l z^{-1})(1 - b_l^* z^{-1})$$

其中， $g_k \in \mathbb{R}$, $b_k \in \mathbb{C}$ 。则FIR滤波器可以实现为多个**一阶和二阶子滤波器的级联**。

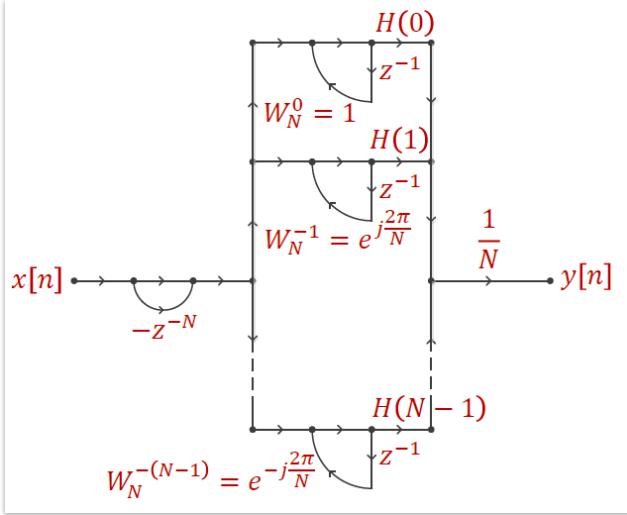
■ FIR 的频率取样实现

我们希望直接根据频率响应设计FIR滤波器。考虑到

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} b[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k]W_N^{-kn}$$

$$= \frac{1}{N}(1 - z^{-N}) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k]}{1 - W_N^{-k}z^{-1}}$$

其中, $W_N^k = e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$, $H[k] = H(z)|_{z=W_N^k}$ 。因此, 可以通过 N 个频率取样回路并联的方式设计 FIR 滤波器。



这一方案为 FIR 滤波器引入了极点且极点在单位圆上, 为稳定性考虑, 可以稍微缩小极点模值。借助 DFT 的频移性质, 亦可使用 $H(e^{j(\frac{2\pi k}{N} + z)})$ 的值进行频率取样。

■ 线性相位 FIR 滤波器

■ 线性相位滤波器的实现

对线性相位 LTI 系统, 应有

$$H(e^{j\omega}) = \hat{H}(e^{j\omega})e^{-j(\alpha\omega - \beta)}$$

$$= \hat{H}(e^{j\omega})\cos(\alpha\omega - \beta) - j\hat{H}(e^{j\omega})\sin(\alpha\omega - \beta)$$

其中 $\hat{H}(e^{j\omega})$ 为实函数; 由频率响应定义,

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b[n]\cos(\omega n) - j\sum_{n=-\infty}^{\infty} b[n]\sin(\omega n)$$

两式相位相同, 应有

$$-\frac{\sin(\alpha\omega - \beta)}{\cos(\alpha\omega - \beta)} = -\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} b[n]\sin(\omega n)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} b[n]\cos(\omega n)}$$

即得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b[n]\sin(\omega(n - \alpha) + \beta) = 0$$

为使上式对任意 ω 成立,

1. 若 $\beta = 0$ 或 $\beta = \pi$, 则 $b[n]$ 应关于 $n = \alpha$ 偶对称;
2. 若 $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$, 则 $b[n]$ 应关于 $n = \alpha$ 奇对称。

因此, 因果的线性相位滤波器一定是 FIR 滤波器, 且其冲激响应 $b[n]$ 满足以下四种情况之一:

阶数 $M = 2\alpha$		对称性 β
		偶对称 $\beta = 0, \pi$ $b[n] = b[M - n]$
偶数	第 I 类线性相位 FIR 滤波器 低通、高通、带通	奇对称 $\beta = \pm\pi/2$ $b[n] = -b[M - n]$
	带通	第 III 类线性相位 FIR 滤波器
奇数	第 II 类线性相位 FIR 滤波器 低通、带通	第 IV 类线性相位 FIR 滤波器 高通、带通

由于 $b[n] = \pm b[M - n]$ 的对称性, 亦有

$$H(z) = \pm z^{-M}H(z^{-1})$$

FIR 滤波器没有极点, 其零点分布受到这一对称性约束, 呈现为

- 若 $z_0 = re^{j\varphi}$ 是零点, 则其关于单位圆的倒数 $z'_0 = \frac{1}{z_0} = \frac{1}{r}e^{-j\varphi}$ 也是零点, 二者的共轭复数亦是零点; 特别地,
 - 若实数 z_1 是零点, 则其关于单位圆的倒数 $z'_1 = \frac{1}{z_1}$ 也是零点;
 - 若单位圆上的零点 $z_2 = e^{j\varphi}$ 是零点, 则其共轭复数 $e^{-j\varphi}$ 也是零点。
- 单位圆与实轴的交点 ± 1 至少有一个是零点。

► 第 I 类线性相位 FIR 滤波器

第 I 类线性相位 FIR 滤波器满足 M 为偶数且 $b[n] = b[M - n]$, 频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M b[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} b[n]e^{-j\omega n} + b\left[\frac{M}{2}\right]e^{-j\omega\frac{M}{2}} + \sum_{n=\frac{M}{2}+1}^M b[n]e^{-j\omega n}$$

$$= e^{-j\omega\frac{M}{2}} \left(b\left[\frac{M}{2}\right] + 2 \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} b[n] \cos\left(\omega\left(n - \frac{M}{2}\right)\right) \right)$$

$$= e^{-j\omega\frac{M}{2}} \left(b\left[\frac{M}{2}\right] + 2 \sum_{m=1}^{\frac{M}{2}} b\left[\frac{M}{2} - m\right] \cos(\omega m) \right)$$

$$= e^{-j\omega\frac{M}{2}} \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}} a_m \cos(\omega m) = e^{-j\omega\frac{M}{2}} \hat{H}(e^{j\omega})$$

其中, $a_0 = b\left[\frac{M}{2}\right]$, $a_m = 2b\left[\frac{M}{2} - m\right]$, $m = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$ 。由于

$\hat{H}(e^{j\omega})$ 偶对称且关于 $\omega = \pi$ 也偶对称, 第 I 类线性相位 FIR 滤波器可以实现低通、高通、带通滤波器。

► 第 II 类线性相位 FIR 滤波器

第 II 类线性相位 FIR 滤波器满足 M 为奇数且 $b[n] = b[M - n]$, 频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M b[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}} b[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=\frac{M+1}{2}}^M b[n]e^{-j\omega n}$$

$$= e^{-j\omega\frac{M}{2}} \sum_{m=1}^{(M+1)/2} b_m \cos\left(\omega\left(m + \frac{1}{2}\right)\right) = e^{-j\omega\frac{M}{2}} \hat{H}(e^{j\omega})$$

其中, $b_m = 2b\left[\frac{M+1}{2} - m\right]$, $m = 1, 2, \dots, \frac{M+1}{2}$ 。由于 $\hat{H}(e^{j\omega})$ 偶对称且关于 $\omega = \pi$ 奇对称, 第 II 类线性相位 FIR 滤波器可以实现低通、带通滤波器。

► 第 III 类线性相位 FIR 滤波器

第 III 类线性相位 FIR 滤波器满足 M 为偶数且 $b[n] = -b[M - n]$, 频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M b[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} b[n]e^{-j\omega n} + b\left[\frac{M}{2}\right]e^{-j\omega\frac{M}{2}} + \sum_{n=\frac{M}{2}+1}^M b[n]e^{-j\omega n}$$

$$= e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{M}{2}\omega\right)} \sum_{m=1}^{\frac{M}{2}} c_m \sin(\omega m) = e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{M}{2}\omega\right)} \hat{H}(e^{j\omega})$$

其中, $c[0] = b\left[\frac{M}{2}\right]$, $c_m = 2b\left[\frac{M}{2} - m\right]$, $m = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$ 。由于

$\hat{H}(e^{j\omega})$ 奇对称且关于 $\omega = \pi$ 也奇对称, 第 III 类线性相位 FIR 滤波器只能实现带通滤波器。

► 第 IV 类线性相位 FIR 滤波器

第 IV 类线性相位 FIR 滤波器满足 M 为奇数且 $b[n] = -b[M - n]$, 频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M b[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}} b[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=\frac{M+1}{2}}^M b[n]e^{-j\omega n}$$

$$= e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{M}{2}\omega\right)} \sum_{m=1}^{(M+1)/2} d_m \sin\left(\omega\left(m - \frac{1}{2}\right)\right) = e^{-j\omega\frac{M}{2}} \hat{H}(e^{j\omega})$$

其中, $d_m = 2b\left[\frac{M+1}{2} - m\right]$, $m = 1, 2, \dots, \frac{M+1}{2}$ 。由于 $\hat{H}(e^{j\omega})$ 奇对称而关于 $\omega = \pi$ 偶对称, 第 IV 类线性相位 FIR 滤波器可以实现高通、带通滤波器。

■ 窗函数法设计线性相位 FIR 滤波器

设我们期望实现频响为 $H_d(e^{j\omega})$ 的滤波器, 为此设计 $b[n]$, 使其 DTFT $H(e^{j\omega})$ 尽可能接近 $H_d(e^{j\omega})$ 。在 **均方误差** 意义下, 即希望

$$b[n] = \arg \min_{b[n]} \|H(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})\|^2 = \arg \min_{b[n]} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

设 $b_d[n] = \text{IDTFT}\{H_d(e^{j\omega})\}$, 由 Parseval 定理, 有

$$\begin{aligned} \|H(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})\|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b[n] - b_d[n]|^2 \\ &= \sum_{n=0}^M |b[n] - b_d[n]|^2 + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} |b_d[n]|^2 + \sum_{n=M+1}^{\infty} |b_d[n]|^2}_{与 b[n] 无关} \end{aligned}$$

因此, **均方误差** 意义下的**最优 M 阶 FIR 滤波器**冲激响应为

$$b[n] = \begin{cases} b_d[n], & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} = \text{IDTFT}\{H_d(e^{j\omega})\} \cdot w_{\text{rect}, M}[n]$$

即 $\text{IDTFT}\{H_d(e^{j\omega})\}$ 加**矩形窗**截断得到。

然而, 矩形窗截断会引入 **Gibbs 现象**, 导致频率响应出现较大波纹。为减小 Gibbs 现象, 可采用其他窗函数 $w[n]$ 截断理想冲激响应, 从而设计 FIR 滤波器。

► 固定窗

固定窗具有**不可调节**的主瓣宽度与阻带衰减特性, 常用的固定窗函数及其性能如下表所示:

窗函数	过渡带宽度 $\Delta\omega (\times \frac{2\pi}{N})$	最小阻带衰减 α_2 (dB)
矩形窗	0.89	21
三角窗	2.1	25
Hanning	3.1	44
Hamming	3.3	53
Blackman	5.5	74

使用时, 只需根据所需的过渡带宽度与阻带衰减选择合适的窗函数, 并根据线性相位 FIR 滤波器的特性确定窗长 M , 然后截断理想冲激响应即可。

► Kaiser 窗

Kaiser 窗是一种**参数化**窗函数, 可通过调整参数 β 控制主瓣宽度与旁瓣高度之间的权衡。Kaiser 窗定义为

$$w_{\text{Kaiser}, M, \beta}[n] = \begin{cases} \frac{I_0\left(\beta\sqrt{1 - \left(\frac{n}{\alpha} - 1\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中, $\alpha = \frac{M}{2}$, $I_0(\cdot)$ 是**零阶修正贝塞尔函数 (modified Bessel function of the first kind of order zero)**, 定义为

$$I_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(x/2)^k}{k!}\right)^2$$

Kaiser 窗的参数由经验公式给出, 即对于给定的**阻带波纹** δ_2 ($\alpha_2 = -20 \log_{10} \delta_2$ dB) 和**过渡带宽度** $\Delta\omega = |\omega_s - \omega_p|$, 有

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(\alpha_2 - 8.7), & \alpha_2 > 50, \\ 0.5842(\alpha_2 - 21)^{0.4} + 0.07886(\alpha_2 - 21), & 21 \leq \alpha_2 \leq 50, \\ 0, & \alpha_2 < 21, \end{cases}$$

$$M = \frac{\alpha_2 - 8}{2.285\Delta\omega}$$

Hilbert 变换

► Hilbert 变换的定义

■ 连续时间 Hilbert 变换

► 连续时域信号的 Hilbert 变换

设 $x(t)$ 为连续时间信号, 其 Fourier 变换 $X(j\Omega)$ 满足

$$X(j\Omega) = \begin{cases} X(j\Omega), & \Omega \geq 0, \\ 0, & \Omega < 0, \end{cases}$$

即 $x(t)$ 仅包含正频率成分。我们考虑其实部 $x_r(t)$ 与虚部 $x_i(t)$ 之间的关系, 设

$$x_r(t) \longleftrightarrow X_r(j\Omega), \quad x_i(t) \longleftrightarrow X_i(j\Omega)$$

则由 Fourier 变换的线性性质, 可设

$$X(j\Omega) = X_r(j\Omega) + jX_i(j\Omega) = \begin{cases} kX_r(j\Omega), & \Omega \geq 0, \\ 0, & \Omega < 0 \end{cases}$$

一种可能是

$$X_i(j\Omega) = \begin{cases} -jX_r(j\Omega), & \Omega \geq 0, \\ jX_r(j\Omega), & \Omega < 0 \end{cases} = H(j\Omega)X_r(j\Omega)$$

其中 $H(j\Omega) = -j \operatorname{sgn}(\Omega)$, 其 Fourier 逆变换为

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{\pi t}$$

因此有

$$x_i(t) = x_r(t) * h(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_r(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

由此可见, 信号的实部与虚部之间通过卷积关系联系在一起, 这种卷积关系即为**Hilbert 变换**。

(*) **Def.** 连续时域 Hilbert 变换

连续时间信号 $x(t)$ 的 Hilbert 变换 (Hilbert transform) 定义为

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau = x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

逆变换为

$$x(t) = -\frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau = \hat{x}(t) * \left(-\frac{1}{\pi t}\right)$$

其中 P.V. \int 表示主值积分 (Cauchy principal value), 用于处理积分中的奇点。

连续时域 Hilbert 变换描述了**频域单边**信号的**实部、虚部关系**。信号 $x(t) = x_r(t) + j\hat{x}_r(t)$ 保留了 $x_r(t)$ 的所有正频率成分, 而将负频率成分全部去除, 称为信号 $x_r(t)$ 的**解析信号 (analytic signal)**。

► 连续频域信号的 Hilbert 变换

设有因果信号 $x(t) = x(t)u(t)$, 其 Fourier 变换为

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\Omega) = X_R(j\Omega) + jX_I(j\Omega)$$

由于

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{2\pi} \left(\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega} \right)$$

则由卷积定理, 有

$$X(j\Omega) = X(j\Omega) * \mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{2\pi} (X_R(j\Omega) + jX_I(j\Omega)) * \left(\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega} \right)$$

展开后可得

$$\begin{aligned} X_R(j\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \left(\pi X_R(j\Omega) + X_I(j\Omega) * \frac{1}{\Omega} \right) \\ X_I(j\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \left(\pi X_I(j\Omega) - X_R(j\Omega) * \frac{1}{\Omega} \right) \end{aligned}$$

解出

$$X_R(j\Omega) = \frac{1}{\pi} X_I(j\Omega) * \frac{1}{\Omega} = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_I(j\Omega')}{\Omega - \Omega'} d\Omega'$$

$$X_I(j\Omega) = -\frac{1}{\pi} X_R(j\Omega) * \frac{1}{\Omega} = -\frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_R(j\Omega')}{\Omega - \Omega'} d\Omega'$$

(*) Def. 连续频域 Hilbert 变换

连续频域信号 $X(j\Omega)$ 的 Hilbert 变换 (Hilbert transform) 定义为

$$\hat{X}(j\Omega) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(j\Omega')}{\Omega - \Omega'} d\Omega'$$

逆变换为

$$X(j\Omega) = -\frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{X}(j\Omega')}{\Omega - \Omega'} d\Omega'$$

其中 P.V. \int 表示主值积分 (Cauchy principal value), 用于处理积分中的奇点。

类似地, 连续频域 Hilbert 变换描述了时域单边信号的实部、虚部关系。信号 $X(j\Omega) = X_R(j\Omega) + j\hat{X}_R(j\Omega)$ 保留了 $X_R(j\Omega)$ 的所有正时间成分, 而将负时间成分全部去除, 称为信号 $X_R(j\Omega)$ 的解析频谱 (analytic spectrum)。

■ 离散时间 Hilbert 变换

► 离散时域信号的 Hilbert 变换

连续时间信号的 Hilbert 变换非因果, 难以实现。但如果有限长冲激响应, 非因果的离散时间系统某种意义上是可以实现的。

类比 $H(j\Omega) = -j \operatorname{sgn}(\Omega)$, 设

$$H(e^{j\omega}) = -j \operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega < \pi, \\ 0, & \omega = 0, \\ j, & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

则其逆 DTFT 为

$$b[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \frac{2}{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n}, & n \neq 0 \end{cases}$$

因此, 若 $z[n] = x_r[n] + jx_i[n]$ 为解析信号, 则与连续时间情形类似, 有

$$x_i[n] = x_r[n] * b[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_r[n-m] b[m] = \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{x_r[n-(2m+1)]}{2m+1}$$

(*) Def. 离散时域 Hilbert 变换

离散时间信号 $x[n]$ 的 Hilbert 变换 (Hilbert transform) 定义为

$$\hat{x}[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m] b[m] = \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{x[n-(2m+1)]}{2m+1}$$

逆变换为

$$x[n] = -\hat{x}[n] * b[n] = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n-m] b[m] = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}[n-(2m+1)]}{2m+1}$$

$$\text{其中 } b[n] = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \frac{2}{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n}, & n \neq 0 \end{cases}.$$

► 离散频域信号的 Hilbert 变换

任意序列 $x[n]$ 可分解为奇、偶分量, 为

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n], \quad \begin{cases} x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]), \\ x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) \end{cases}$$

设有实因果信号 $x[n] = x[n]u[n]$, 则

$$x[n] = 2x_e[n]u[n] - x_e[0]\delta[n] = 2x_o[n]u[n] + x[0]\delta[n]$$

解得

$$\begin{cases} x_o[n] = x_e[n] \operatorname{sgn}[n], \\ x_e[n] = x_o[n] \operatorname{sgn}[n] + x[0]\delta[n] \end{cases}$$

由 DTFT 的共轭对称关系, $x_e[n] \longleftrightarrow X_R(e^{j\omega})$, $x_o[n] \longleftrightarrow jX_I(e^{j\omega})$, 则有

$$X_R(e^{j\omega}) = x[0] + \frac{1}{2\pi} P.V. \int_{-\pi}^{\pi} X_I(e^{j\omega'}) \cot\left(\frac{\omega - \omega'}{2}\right) d\omega'$$

$$X_I(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi} P.V. \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\omega'}) \cot\left(\frac{\omega - \omega'}{2}\right) d\omega'$$

(*) Def. 离散频域 Hilbert 变换

离散频域信号 $X(e^{j\omega})$ 的 Hilbert 变换 (Hilbert transform) 定义为

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi} P.V. \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega'}) \cot\left(\frac{\omega - \omega'}{2}\right) d\omega'$$

逆变换为

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} P.V. \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}(e^{j\omega'}) \cot\left(\frac{\omega - \omega'}{2}\right) d\omega'$$

其中 P.V. \int 表示主值积分 (Cauchy principal value), 用于处理积分中的奇点。