采样与量化

信号的分类

		定义域（时域）	
		连续	离散
值域	连续	连续信号	离散（时间）信号
	离散		数字信号

采样的数学表示

零阶抽样保持

对信号 $x(t)$ 进行采样，采样周期为 T，采样频率为 $f_s = \dfrac{1}{T}$，则使用的采样信号为

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

采样后的信号为

$$x_s(t) = x(t) \cdot s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

此时的 $x_s(t)$ 仍为连续时间信号，但其可直接**转换为离散时间信号**

$$x[n] = x(nT)$$

频域上，$x(t)$ 的频谱为 $X(\mathrm{j}\Omega)$，则采样后的信号频谱为

$$X_s(\mathrm{j}\Omega) = \frac{1}{2\pi} X(\mathrm{j}\Omega) * \left(\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) \right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}(\Omega - k\Omega_s))$$

Nyquist 采样定理

《信号与系统》课程中已知：

> *Thm.* Nyquist 采样定理
>
> 如果带限信号 $x(t)$ 的最高频率为 Ω_m，即
>
> $$X(\mathrm{j}\Omega) = 0, \quad |\Omega| > \Omega_m$$
>
> 则当采样频率 $\Omega_s = \dfrac{2\pi}{T} > 2\Omega_m$ 时，信号 $x(t)$ 可以由其采样值 $x[n] = x(nT)$ 唯一确定。

Nyquist 采样定理是**充分**条件，对于「带限」以外的条件并没有说明。

非基带信号

对于**非基带**的带限信号，即有最低频率 Ω_L 和最高频率 Ω_U 的**带通**信号 $x(t)$，即使不满足 Nyquist 采样条件，也可能不发生混叠现象。

具体地，我们考虑 $(-\Omega_U, -\Omega_L)$ 频段在平移后与 (Ω_L, Ω_U) 频段不重叠的条件，即

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} N\Omega_s - \Omega_L \le \Omega_L, \\ (N+1)\Omega_s - \Omega_U \ge \Omega_U, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2\Omega_U}{N+1} \le \Omega_s \le \frac{2\Omega_L}{N}$$

多采样率处理

采样率转换

整数倍降采样

对离散信号 $x[n]$，考虑**每 M 个值保留 1 个值**，构成新序列

$$y[n] = x[Mn]$$

称为 **M 倍抽取 (decimation)**。如果 $x[n] = x_a(nT_s)$ 是由某连续时间信号连续时间信号 $x_a(t)$ 以采样周期 T_s 采样得到的，则 $y[n]$ 可视为对 $x_a(t)$ 以采样周期 MT_s 采样得到的离散信号，即采样率降低为原来的 $\dfrac{1}{M}$。

抽取过程可以通过以下两步实现：

1. 对不需要的离散点**置零**，得到中间序列

$$x_M[n] = x[n] \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - Mm] \overset{\text{Poisson}}{=\!=\!=} x[n] \cdot \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{M}kn}$$

其 z 变换为

$$\begin{aligned} X_M(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x[n] \cdot \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{M}kn} \right) z^{-n} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(z \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{M}k} \right)^{-n} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(z\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{M}k} \right) \end{aligned}$$

2. 对中间序列进行**压缩**，得到最终序列

$$y[n] = x_M[Mn]$$

其 z 变换为

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_M[Mn] z^{-n} \overset{n=\frac{m}{M}}{=\!=\!=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_M[m] \left(z^{\frac{1}{M}} \right)^{-m} = X_M\left(z^{\frac{1}{M}} \right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{1}{M}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{M}k} \right) \end{aligned}$$

注意到，采样率为 $\dfrac{1}{T_s}$ 时满足 Nyquist 采样定理的信号，在采样率为 $\dfrac{1}{MT_s}$ 时可能会发生混叠现象。因此，在抽取前通常需要对信号进行**低通滤波** $X_{\mathrm{LP}}(z) = H_{\mathrm{LP}}(z)X(z)$，以抑制高频成分，防止混叠。这样，所得信号的 z 变换为

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_{\mathrm{LP}}\left(z^{\frac{1}{M}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{M}k} \right) X\left(z^{\frac{1}{M}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{M}k} \right)$$

所得的**时域信号**为

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{\mathrm{LP}}[Mn - m] \cdot x[m]$$

整数倍升采样

对离散信号 $x[n]$，类似地考虑以下步骤**提升采样率**：

1. 对每个离散点之间**插入 $L-1$ 个零**，得到中间序列

$$x_L[n] = \begin{cases} x\left[\dfrac{n}{L}\right], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \cdots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

其 z 变换为

$$X_L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_L[n] z^{-n} \overset{n=mL}{=\!=\!=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left(z^L \right)^{-m} = X\left(z^L \right)$$

2. 显然引入了大量高频分量，对中间序列进行**低通滤波**，得到最终序列

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{\mathrm{LP}}[n-m] \cdot x_L[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{\mathrm{LP}}[n - kL] \cdot x[k]$$

其 z 变换为

$$Y(z) = H_{\mathrm{LP}}(z) \cdot X\left(z^L \right)$$

其中 $H_{\mathrm{LP}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 的通带应为 $|\omega| \le \dfrac{\pi}{L}$，以滤除插入零点引入的高频成分。

这称为 **L 倍理想插值 (ideal interpolation)**，完整保持了原始频谱的信息。

有理数倍采样率转换

对于任意有理数 $\alpha = \dfrac{L}{M}$，可以通过先进行 **L 倍升采样**，再进行 **M 倍降采样**来实现采样率转换。

采样率转换的高效实现

滤波与抽取/零插的交换

前述整数倍降采样和整数倍升采样都在**高数据率**下做滤波，其**计算复杂度较高**。我们希望交换低通滤波与抽取/零插的顺序，从而在**低数据率**下做滤波，降低计算复杂度。

可以证明：如果 M 倍降采样前的低通滤波器可以**写成 $H(z^M)$ 的形式**，则可以**交换低通滤波与抽取**的顺序；如果 L 倍升采样前的低通滤波器可以**写成 $H(z^L)$ 的形式**，则可以**交换低通滤波与零插**的顺序。

- 对于 M 倍降采样，

$$\begin{aligned}Y(z) &= \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} H_{\mathrm{LP}}\left(z^{\frac{1}{M}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{M}k}\right)X\left(z^{\frac{1}{M}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{M}k}\right)\\ &= \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} H\left(\left(z^{\frac{1}{M}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{M}k}\right)^{M}\right)X\left(z^{\frac{1}{M}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{M}k}\right)\\ &= \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} H\left(z\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k}\right)X\left(z^{\frac{1}{M}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{M}k}\right)\\ &= H(z)\cdot\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{1}{M}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{M}k}\right) = H(z)\cdot X_M\left(z^{\frac{1}{M}}\right)\end{aligned}$$

  即等价于抽取结果 $X_M\left(z^{\frac{1}{M}}\right)$ 经 $H(z)$ 滤波。

- 对于 L 倍升采样，

$$Y(z) = H_{\mathrm{LP}}(z)\cdot X\left(z^L\right) = H\left(z^L\right)\cdot X\left(z^L\right) = \left(H(z')\cdot X(z')\right)\Big|_{z'=z^L}$$

  即等价于 $X(z)$ 经 $H(z)$ 滤波后再进行 L 倍零插。

采样率的级联转换

当降/升采样率**变化比例较大**时，抗混叠滤波设计实现较为困难，可考虑采用**级联实现**降低计算量。

> *E.G.* CIC 滤波器
>
> 积分器—梳状滤波器级联 (cascaded integrator-comb, CIC) 系统是一种常用的多采样率转换结构，适用于大倍率的升/降采样率转换。CIC 系统由多个积分器级联和多个梳状滤波器级联组成，且不需要乘法运算，计算复杂度低，非常适合硬件实现。

多相滤波器结构

单通道滤波器在多采样率处理中的计算效率较低，可采用**多相滤波器结构 (polyphase filter structure)** 提高计算效率。考虑

$$\begin{aligned}X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \xlongequal{n=kL+m} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{L-1} x[kL+m]z^{-(kL+m)}\\ &= \sum_{m=0}^{L-1} z^{-m}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kL+m]\left(z^L\right)^{-k}\right) = \sum_{m=0}^{L-1} z^{-m}X_m\left(z^L\right)\end{aligned}$$

即分解为 L 相子序列的和，称为**信号的多相分解**，其中 $X_m(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kL+m]z^{-k}$ 是 $x[n]$ 的**第 m 相子序列** $\cdots, x[m], x[L+m], x[2L+m], \cdots$ 的 z 变换。

类似地，**滤波器的多相分解**为

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \xlongequal{n=kL+m} \sum_{m=0}^{L-1} z^{-m}H_m\left(z^L\right)$$

其中 $H_m(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[kL+m]z^{-k}$ 是滤波器 $h[n]$ 的**第 m 相子滤波器**。

利用滤波与抽取/零插的交换原理，各相子滤波器可与抽取/零插操作交换，从而在低采样率下实现滤波，进一步降低计算复杂度。

均匀滤波器组的分解与重构

均匀 DFT 滤波器组的分解

使用多路并行的一组滤波器是实现**子带分解**，即将高速率宽带信号**分解为多路低速率窄带信号**的有效方法。

设将**基础低通滤波器 $H_0(z)$** 在频率上均匀移位 N 次，得到 N 个滤波器

$$H_k(z) = H_0\left(z\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}\right),\qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

每个滤波器均作为 N 倍降采样前的抗混叠滤波器，都需接受高速率信号 $X(z)$ 进行滤波，计算复杂度较高，因此考虑使用多相滤波器结构进行优化。

将基础低通滤波器 $H_0(z)$ 进行 **N 相分解**有

$$H_0(z) = \sum_{m=0}^{N-1} z^{-m}H_{0,m}\left(z^N\right)$$

则每个滤波器 $H_k(z)$ 可表示为

$$\begin{aligned}H_k(z) = H_0\left(z\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}\right) &= \sum_{m=0}^{N-1}\left(z\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}\right)^{-m}H_{0,m}\left(\left(z\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}\right)^N\right)\\ &= \sum_{m=0}^{N-1} z^{-m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}km}H_{0,m}\left(z^N\right)\end{aligned}$$

其输出即

$$H_k(z)X(z) = X(z)\sum_{m=0}^{N-1} z^{-m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}km}H_{0,m}\left(z^N\right)$$

注意到 $H_{0,m}\left(z^N\right)$ 结构，对输出做 **N 倍抽取**可与滤波交换，得到**第 k 路的输出**

$$\begin{aligned}Y_k(z) &= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} H_k\left(z'\right)X\left(z'\right)\Big|_{z'=z^{\frac{1}{N}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}l}}\\ &= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X\left(z^{\frac{1}{N}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}l}\right)\\ &\quad\cdot\sum_{m=0}^{N-1}\left(z^{\frac{1}{N}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}l}\right)^{-m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}km}H_{0,m}\left(\left(z^{\frac{1}{N}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}l}\right)^N\right)\\ &= \underbrace{\sum_{m=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}km}\cdot\underbrace{H_{0,m}(z)\cdot\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} z^{-\frac{m}{N}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}lm}X\left(z^{\frac{1}{N}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}l}\right)}_{x[n-m]\text{ 的 }N\text{ 倍抽取}}}_{\text{抽取后 }H_{0,m}(z)\text{ 滤波}}}_{\text{DFT }(-k)}\end{aligned}$$

设抽取后信号经过滤波器 $H_{0,m}(z)$ 输出的信号为 $v_m[n]$，其与第 k 路输出信号 $y_k[n]$ 在 **z 变换域**有关系

$$Y_k(z) = \sum_{m=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}km}V_m(z)$$

这是索引 m 与索引 k 之间的 DFT 关系（DFT 变换系数中 k 变为 $-k$），即**相 m 域到带 k 域的 DFT 关系**，与 z 无关，因此在**时域**同样有

$$y_k[n] = \sum_{m=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}km}v_m[n]$$

即各路输出信号可由各相子滤波器输出信号通过 DFT 变换得到，因此称为**均匀 DFT 滤波器组的分解结构**。

均匀 DFT 滤波器组的合成

多路由均匀 DFT 滤波器组分解出的**子带信号**亦可通过升采样后加和构成宽带的**重构信号**。设各路子带信号为 $x_k[n]$，则重构信号为

$$\begin{aligned}Y(z) = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k\left(z^N\right)H_k(z) &= \sum_{k=0}^{N-1} X_k\left(z^N\right)\sum_{m=0}^{N-1} z^{-m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}km}H_{0,m}\left(z^N\right)\\ &= \sum_{m=0}^{N-1} z^{-m}H_{0,m}\left(z^N\right)\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}km}X_k\left(z^N\right)\\ &= \sum_{m=0}^{N-1} z^{-m}\cdot\underbrace{\underbrace{H_{0,m}\left(z'\right)\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}km}X_k\left(z'\right)}_{\text{IDFT}}}_{H_{0,m}(z)\text{ 滤波}}\Bigg|_{z'=z^N}}_{N\text{ 倍零插}}\end{aligned}$$

为与前述 DFT 关系对应，这里认为各子带信号 $x_k[n]$ 通过**带 k 域到相 m 域的 IDFT** 得到各相子滤波器输入信号。

有限字长效应

二进制表示的量化误差

浮点数

在计算机中，浮点数通常采用科学计数法表示，即一个数可以表示为

$$x = 2^c \times M$$

其中 c 称为**阶码 (exponent)**，M 称为**尾数 (mantissa)**。在二进制浮点数表示中，尾数 M 通常表示为

$$M = \overline{1.b_1 b_2 b_3 \cdots b_t} = 1 + \sum_{i=1}^{t} b_i 2^{-i}$$

其中 $b_i \in \{0, 1\}$，t 为尾数的有效位数（不包括隐含的最高位 1）。例如，IEEE 754 单精度浮点数采用 23 位尾数和 8 位阶码表示。

浮点数表示的**动态范围较大**，**量化误差较小**。

定点数

定点数表示相当于只考虑浮点数的尾数部分，即对 $x \in [-1, 1)$ 进行量化表示。在 **2-补码**表示中，定点数 x 可表示为

$$[x] = \begin{cases} |x|, & 0 \le x < 1, \\ 2 - |x|, & -1 \le x < 0 \end{cases} = \overline{b_0.\, b_1 b_2 b_3 \cdots b_t}$$

其中 $b_i \in \{0, 1\}$，t 为定点数的小数位数，符号位 $b_0 = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 1, & x < 0 \end{cases}$。

考虑表示位数无限，则定点数 x 可**精确表示**为

$$x = -b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i 2^{-i}$$

► 截尾 (floor) 误差

对于有限字长 $(B+1)$ bit 的定点数表示，**截尾法**得到的量化值为

$$\hat{x}_{\mathrm{T}} = -b_0 + \sum_{i=1}^{B} b_i 2^{-i}$$

其**量化误差**为

$$e_{\mathrm{T}} = \hat{x}_{\mathrm{T}} - x = -\sum_{i=B+1}^{\infty} b_i 2^{-i}$$

显然，该误差的最大值为 0，最小值为 -2^{-B}。考虑输入的随机性，截尾误差可建模为**均匀分布**在 $[-2^{-B}, 0]$ 上的随机变量。

► 舍入 (round) 误差

对于有限字长 $(B+1)$ bit 的定点数表示，**舍入法**得到的量化值为

$$\hat{x}_{\mathrm{R}} = -b_0 + \sum_{i=1}^{B} b_i 2^{-i} + b_{B+1} \cdot 2^{-B}$$

注意，二进制下的舍入为截断的第 1 位 b_{B+1} 为 1 即进 1，否则舍去。其**量化误差**为

$$e_{\mathrm{R}} = \hat{x}_{\mathrm{R}} - x = -\sum_{i=B+1}^{\infty} b_i 2^{-i} + b_{B+1} \cdot 2^{-B}$$

显然，该误差的最大值为 $2^{-(B+1)}$，最小值为 $-2^{-(B+1)}$。考虑输入的随机性，舍入误差可建模为**均匀分布**在 $[-2^{-(B+1)}, 2^{-(B+1)}]$ 上的随机变量。

> *Note* 量化误差的统计特性
>
> 对于截尾和舍入两种量化方式，量化误差 e 均可建模为**均匀分布**的随机变量，其统计特性为：
>
> - 均值 $m_{\mathrm{T}} = \mathbb{E}[e_{\mathrm{T}}] = -2^{-(B+1)}$，$m_{\mathrm{R}} = \mathbb{E}[e_{\mathrm{R}}] = 0$；
> - 方差 $\sigma_e^2 = \frac{1}{12}(2^{-B})^2 = \frac{1}{12} \times 2^{-2B}$；
> - 协方差 $C_e[k] = \mathbb{E}[e[n]e[n-k]] = \sigma_e^2 \delta[k]$，即量化误差为白噪声。
>
> 一般地，舍入法的均值为零，具有更简单的统计特性，因此在实际系统中更为常用。以下分析均以舍入法量化误差分析。

量化误差的统计分析

系统直接实现方式的误差分析

系统的量化误差可通过**误差传递分析**进行分析。考虑系统的直接实现，量化误差有两类来源：

- **采样量化误差**：输入信号 $x(t)$ 经过采样和量化后得到离散信号 $x[n]$ 引入的量化误差。
- **计算量化误差**：系统在处理离散信号 $x[n]$ 的过程中，由于有限字长引入的量化误差。

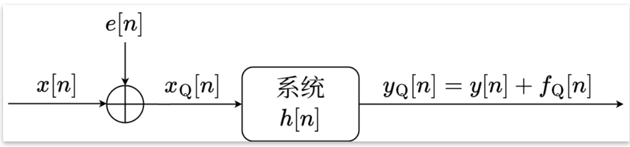
► 采样量化误差

设采样位数为 $1+B$，采样量化误差 $e[n]$ 的**统计特性**为：

- 均值 $\mathbb{E}[e[n]] = 0$；
- **功率** $\sigma_{\mathrm{Q}}^2 = \frac{1}{12}(2^{-B})^2 = \frac{1}{12} \times 2^{-2B}$，功率谱密度为 $S_{\mathrm{Q}}(\omega) = \sigma_{\mathrm{Q}}^2$。

设系统的冲激响应为 $h[n]$，则采样量化误差**通过系统后的输出误差**为

$$f_{\mathrm{Q}}[n] = e[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e[m] \cdot h[n-m]$$



其有统计特性：

- 均值 $\mathbb{E}[f_{\mathrm{Q}}[n]] = 0$；
- 功率由 Parseval 定理得 $\sigma_{\mathrm{Q,out}}^2 = \sigma_{\mathrm{Q}}^2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|^2$；
- 功率谱密度由 Wiener-Khinchin 定理得 $S_{\mathrm{Q,out}}(\omega) = \sigma_{\mathrm{Q}}^2 \cdot \left|H(e^{j\omega})\right|^2$。

► 计算量化误差

我们考虑一个**乘法器** $x[n] \xrightarrow{\alpha} \alpha x[n]$，需要对乘法结果**尾部舍入**，将引入量化误差 $e[n]$，其具有统计特性：

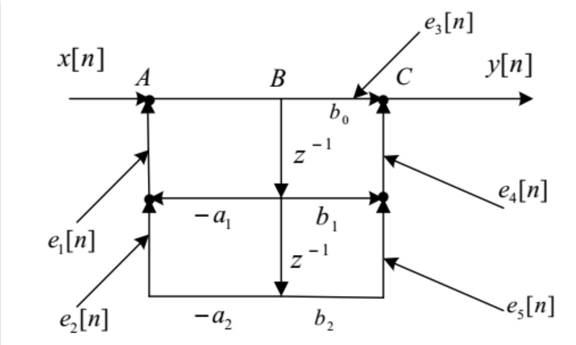
- 均值 $\mathbb{E}[e[n]] = 0$；
- 功率 $\sigma_e^2 = \frac{1}{12}(2^{-B})^2 = \frac{1}{12} \times 2^{-2B}$，功率谱密度为 $S_e(\omega) = \sigma_e^2$。

设从乘法结果节点（噪声源）到输出的冲激响应为 $g[n]$，则计算量化误差**通过系统**后的输出误差为 $f[n] = e[n] * g[n]$，即**输出误差功率**为

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_f(\omega)\, \mathrm{d}\omega = \sigma_e^2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g[n]|^2$$

☰ E.G. 算例：滤波器中的计算量化误差

考虑一个如图所示的 IIR 滤波器：



其中共有 5 个乘法器，产生的计算量化误差分别为 $e_1[n], e_2[n], \cdots, e_5[n]$。设乘法器输出均为 B 位，则每个量化误差的功率均为 σ_e^2，各量化误差通过系统到输出的冲激响应分别为

$$\begin{aligned} e_1[n], e_2[n] &\longrightarrow & f[n] = (e_1[n] + e_2[n]) * h[n], \\ e_3[n], e_4[n], e_5[n] &\longrightarrow & f[n] = (e_3[n] + e_4[n] + e_5[n]) \end{aligned}$$

因此，输出误差功率为

$$\sigma_f^2 = \frac{2^{-2B}}{12}\left(2\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|^2 + 3\right)$$

进一步地，对于直接 II 型实现的 IIR 滤波器

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}},$$ 其输出误差功率为

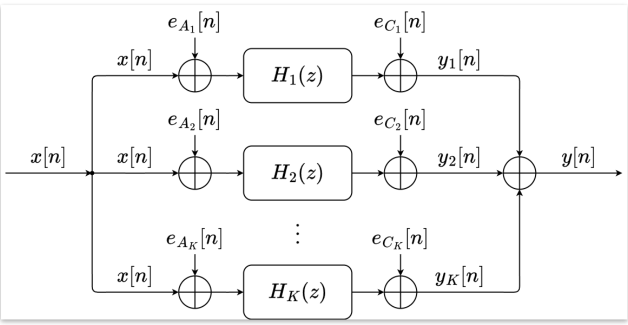
$$\sigma_f^2 = \frac{2^{-2B}}{12}\left(N\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|^2 + (M+1)\right)$$

特别地，复数乘法由 4 次实数乘法和若干加法组成，因此其计算量化误差功率为

$$\sigma_{\mathrm{B}}^2 = 4\sigma_e^2 = \frac{4}{12} \times 2^{-2B} = \frac{1}{3} \times 2^{-2B}$$

■ 量化误差的传播

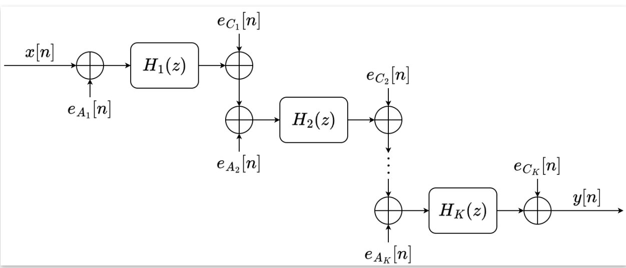
► 并联结构



设系统由 K 个子系统并联组成，每个子系统的冲激响应为 $h_k[n]$，子系统输入、输出端分别有误差源 $e_{A_k}[n]$ 和 $e_{C_k}[n]$，则整个系统的误差功率为

$$\sigma_f^2 = \sum_{k=1}^{K}\left(\sigma_{A_k}^2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h_k[n]|^2 + \sigma_{C_k}^2\right)$$

► 级联结构



设系统由 K 个子系统级联组成，每个子系统的冲激响应为 $h_k[n]$，子系统输入、输出端分别有误差源 $e_{A_k}[n]$ 和 $e_{C_k}[n]$，则整个系统的误差功率为

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 = &\frac{\sigma_{A_1}^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{k=1}^{K}\left|H_k(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|^2 \mathrm{d}\omega \\ &+ \sum_{k=1}^{K-1}\left(\sigma_{C_k}^2 + \sigma_{A_{k+1}}^2\right) \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{j=k+1}^{K}\left|H_j(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|^2 \mathrm{d}\omega \\ &+ \sigma_{C_K}^2 \end{aligned}$$

► 乘加结构

乘加结构 (MAC, multiply-accumulate) 是数字信号处理系统中常见的基本运算单元，通常用于实现滤波器和傅里叶变换等操作，其基本功能是**对输入信号进行乘法运算后累加**。

■ 系统系数的量化误差

在有限字长系统中，系统系数的量化误差会**影响零极点的位置**，其中**极点位置的变化会显著影响系统的稳定性**。考虑系统函数

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

对每个系数，均需**引入量化误差**，即

$$\hat{H}(z) = \frac{\sum_{r=0}^{M} \hat{b}_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^{N} \hat{a}_k z^{-k}}, \qquad \begin{cases} \hat{a}_k = Q\{a_k\} = a_k + \Delta a_k, \\ \hat{b}_r = Q\{b_r\} = b_r + \Delta b_r \end{cases}$$

其中 $Q\{\cdot\}$ 表示量化操作，$\Delta a_k, \Delta b_r$ 分别为系数 a_k, b_r 的量化误差。

我们考虑某一个 Δa_k 对系统极点位置的影响。设系统的极点为 $\{p_j\}$，其全微分为

$$\Delta p_j = \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial p_j}{\partial a_k}\Delta a_k = \sum_{k=1}^{N}\frac{\left.\frac{\partial A(z)}{\partial a_k}\right|_{z=p_j}}{\left.\frac{\partial A(z)}{\partial p_j}\right|_{z=p_j}}\Delta a_k$$

假设**只有一阶极点**，则

$$A(z) = 1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} = \prod_{k=1}^{N}(1 - p_k z^{-1})$$

因此有

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial A(z)}{\partial a_k}\right|_{z=p_j} &= p_j^{-k} \\ \left.\frac{\partial A(z)}{\partial p_j}\right|_{z=p_j} &= -p_j^{-1}\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N}(1 - p_k p_j^{-1}) = -p_j^{-N}\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N}(p_j - p_k) \end{aligned}$$

从而得到极点位置对系数量化误差的**敏感度**

$$\frac{\partial p_j}{\partial a_k} = \frac{\left.\frac{\partial A(z)}{\partial a_k}\right|_{z=p_j}}{\left.\frac{\partial A(z)}{\partial p_j}\right|_{z=p_j}} = -\frac{p_j^{N-k}}{\prod_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{N}(p_j - p_l)}$$

◤ 计算溢出及其避免

在有限字长系统中，**计算溢出 (overflow)** 是指在算术运算过程中，结果超出了所能表示的数值范围，导致结果错误或不可预测的现象。

我们主要考虑 $[-1, 1]$ **范围的定点数**表示下**加法**溢出的问题。考虑一个反馈系统

$$w[n] = x[n] + a \cdot w[n-1]$$

其系统函数为

$$L(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

当 $|a|<1$ 时，系统**稳定**，且其单位样值响应为 $l[n]=a^n u[n]$。尽管系统稳定，但在有限字长实现时，仍可能发生溢出；要避免 $w[n]$ 的溢出，需满足

$$|w[n]|=\left|\sum_{m=0}^{\infty} l[m]x[n-m]\right| \leq \max|x[n]|\cdot\sum_{m=0}^{\infty}|l[m]| \leq 1$$

压缩比例因子

为避免 $w[n]$ 溢出，需

$$\max|x[n]| \leq \frac{1}{\sum\limits_{m=0}^{\infty}|l[m]|}=\frac{1}{\|l[n]\|_1}$$

引入**压缩比例因子 (scaling factor)** β，将输入信号 $x[n]$ 压缩 β 倍为 $\dfrac{x[n]}{\beta}$，即可恒成立上述不等式，从而避免溢出。

第 I 类压缩比例因子

若 $x[n]$ 是**窄带信号** $x[n]=\cos(\omega_0 n+\varphi)$，有 $\max|x[n]|=1$，输出为

$$|w[n]|=\left|L(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0})\cos(\omega_0 n+\varphi+\arg L(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}))\right| \leq \left|L(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0})\right| \leq 1$$

因此取压缩比例因子

$$\beta_{\mathrm{I}}=\max_{-\pi\leq\omega\leq\pi}\left|L(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|=\left\|L(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right\|_\infty$$

第 II 类压缩比例因子

若 $x[n]$ 是**能量受限信号**，有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|x[n]|^2 \leq 1$，则有

$$\begin{aligned}
|w[n]| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} L(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\,\mathrm{d}\omega\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|L(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|\cdot\left|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|\mathrm{d}\omega \\
&\leq \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|L(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|^2\mathrm{d}\omega}\cdot\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|^2\mathrm{d}\omega} \\
&\leq \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|L(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|^2\mathrm{d}\omega}=\sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|l[n]|^2}=\|l[n]\|_2 \leq 1
\end{aligned}$$

因此，考虑到输入信号一般不为能量有限信号，取压缩比例因子

$$\beta_{\mathrm{II}}=C\cdot\|l[n]\|_2, \qquad C>1$$

压缩因子的加入

集中式

在系统的输入端统一加入压缩比例因子 $\beta_{\max}$，在输出端统一放大 $\beta_{\max}$ 倍，所得**输出量化误差功率**为

$$\sigma_f^2=\frac{2^{-2B}}{12}\left(\beta_{\max}^2\sum_{i=1}^{l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|g_i[n]|^2+1\right)$$

其中 $g_i[n]$ 为第 i 个量化误差源到输出的冲激响应，输出端的 $\dfrac{2^{-2B}}{12}$ 量化误差源来自输出端加法。

分布式

为避免系统内信号过度压缩导致信噪比下降，可在系统的各个子系统**输入端分别加入压缩比例因子** β_k，在各子系统的输出端分别放大 β_k 倍，所得**输出量化误差功率**为

$$\sigma_f^2=\frac{2^{-2B}}{12}\left(\sum_{k=1}^{K}\beta_k^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}|g_k[n]|^2+1\right)$$

其中 $g_k[n]$ 为第 k 个子系统内量化误差源到输出的冲激响应，输出端的 $\dfrac{2^{-2B}}{12}$ 量化误差源来自输出端加法。

FFT 计算中的溢出避免

考察 FFT 算法的基本**蝶形计算单元**

$$\begin{cases} X_L[i]=X_{L-1}[i]+X_{L-1}[j]W_N^r \\ X_L[j]=X_{L-1}[i]-X_{L-1}[j]W_N^r \end{cases}$$

其中 $X_{L-1}[i], X_{L-1}[j]$ 为第 $L-1$ 级的输入，$X_L[i], X_L[j]$ 为第 L 级的输出，$W_N^r=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}r}$ 为旋转因子。

注意到，蝶形计算单元的输出可能达到输入的两倍，因此**为避免溢出**，需在每一级 FFT 计算前**加入压缩比例因子 2**，即将输入信号压缩 2 倍后再进行蝶形计算，共引入量化噪声

$$\sigma_{\mathrm{BI}}^2=2\sigma_e^2+\sigma_{\mathrm{B}}^2=6\sigma_e^2=\frac{1}{2}\times 2^{-2B}$$

其中第一项 $2\sigma_e^2$ 来自对两个输入压缩的量化误差，第二项 σ_{B}^2 来自复数乘法的量化误差。

对于 N 点 FFT，共有 $\log_2 N$ 级计算，总的误差为

$$\sigma_{f[k]}^2=\sum_{L=1}^{\log_2 N}\left(\frac{1}{4}\times 2\right)^{\log_2 N-L}\sigma_{\mathrm{BI}}^2 \approx 2\sigma_{\mathrm{BI}}^2=2^{-2B}$$

变换与表示

离散时间信号的表示

变换域表示

设 $T\{\cdot\}$ 为一映射，若存在对应的映射 $T^*\{\cdot\}$，对任意 t 的函数 $x(t)$、足够小的 ε、常数 A，满足

$$(1-\varepsilon)\|x(t)\| \leq A\left\|T^*\{T\{x(t)\}\}\right\| \leq (1+\varepsilon)\|x(t)\|$$

则称 $T\{x(t)\}$ 为信号 $x(t)$ 的一种**表示**，称 $T\{\cdot\}$ 为**变换 (transform)**，$T^*\{\cdot\}$ 为**逆变换 (inverse transform)**。对离散时间信号 $x[n]$，记其变换域表示为 $X=T\{x[n]\}$，此处 X 并不要求是定义在整数域上的函数。

将**有限长**的 $x[n]$ 排列成列向量 $\vec{x}$，若 $T\{\cdot\}$ 是线性变换且也定义在整数域上，则可以用**矩阵**表示这一变换，即

$$\vec{y}=T\{\vec{x}\}=\boldsymbol{T}\vec{x}$$

其中 $\boldsymbol{T}$ 是变换矩阵。

变换的正交性

若 $\boldsymbol{T}$ 的列向量组 $\{\vec{t}_k\}$ 满足

$$\vec{t}_i^{\mathrm{T}}\vec{t}_j=\begin{cases}0, & i\neq j \\ 1, & i=j\end{cases}$$

则称变换 $T\{\cdot\}$ 是**正交变换**。

对于正交变换，有

$$\forall\vec{x},\vec{y}, \quad \vec{x}^{\mathrm{T}}\vec{y}=(T\{\vec{x}\})^{\mathrm{T}}(T\{\vec{y}\})$$

即正交变换具有**内积不变性**。

变换的完备性

映射 $T\{\cdot\}$ 是**完备的**，当且仅当

$$\forall\vec{x}, \quad T\{\vec{x}\}=\vec{0} \implies \vec{x}=\vec{0}$$

即映射 $T\{\cdot\}$ 的核空间仅包含零向量。

> *Thm.* 变换的可逆性
>
> 若某变换域表示是线性且完备，则该变换域表示是可逆的。

正交变换是完备的，因此也是可逆的。

> ☰ *E.G.* 常见的离散时间信号变换域表示
>
> 设 $x[n]$ 是长度为 N 的离散时间信号，则有
>
> - 其离散 Fourier 变换 (DFT) 定义为
>
> $$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/N},\quad k=0,1,\cdots,N-1$$
>
> - 其离散余弦变换 (DCT) 定义为
>
> $$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos\left(\frac{\pi}{N}\left(n+\frac{1}{2}\right)k\right),\quad k=0,1,\cdots,N-1$$
>
> DFT 和 DCT 都是线性且正交的变换，因此它们都是完备且可逆的。

■ 特征域表示

普通的时域或变换域可能难以表示信号的某种**特征 (character)**，如线性调频 (linear frequency modulation, LFM) 信号频率随时间线性变化的特征。此时，可以使用**特征域 (character domain)** 来表示信号。

离散时间系统的表示

■ 离散线性时不变系统

线性时不变 (linear time-invariant, LTI) 系统是最常见的离散时间系统。

▶ 线性性

系统 $H\{\cdot\}$ 是线性的，当且仅当

$$\forall x_1[n],x_2[n]\subset\mathbb{R},\quad\forall a,b\in\mathbb{R},\quad H\{ax_1[n]+bx_2[n]\}=aH\{x_1[n]\}+bH\{x_2[n]\}$$

非线性的例子如**平方律（功率）检波器**，其输入输出关系为

$$y[n]=H\{x[n]\}=x^2[n]$$

▶ 时不变性

系统 $H\{\cdot\}$ 是时不变的，当且仅当

$$\forall x[n]\subset\mathbb{R},\quad\forall n_0\in\mathbb{Z},\quad H\{x[n-n_0]\}=y[n-n_0]$$

■ 离散 LTI 系统的描述

▶ 样值（冲激）响应函数

设 $H\{\cdot\}$ 是离散 LTI 系统，$\delta[n]$ 是单位冲激信号，则系统对单位冲激信号的响应

$$h[n]=H\{\delta[n]\}$$

称为系统的**样值响应函数 (impulse response)** 或**冲激响应函数**。

LTI 系统的样值响应函数 $h[n]$ 完全描述了该系统，也可以比较简单地表述系统的性质，如：

- **线性性**：样值响应函数是线性的，

$$\begin{aligned}H\{ax_1[n]+bx_2[n]\}[n]&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(ax_1[k]h[n-k]+bx_2[k]h[n-k])\\&=a\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1[k]h[n-k]+b\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_2[k]h[n-k]\\&=aH\{x_1[n]\}[n]+bH\{x_2[n]\}[n]\end{aligned}$$

- **时不变性**：样值响应函数与时间无关，

$$\begin{aligned}H\{x[n-n_0]\}[n]&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k-n_0]h[n-k]\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]h[n-n_0-m]=H\{x[n]\}[n-n_0]\end{aligned}$$

- **因果性**：系统因果 $\iff h[n]=0,\ \forall n<0$；
- **BIBO 稳定性**：系统 BIBO 稳定 $\Longleftarrow\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|<\infty$。

▶ 本征表示

设 $T\{\cdot\}$ 是离散 LTI 系统，令

$$T\{\xi[n]\}=\lambda\xi[n]$$

将离散时间**单频复指数信号** $\xi[n]=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}$ 代入，则有

$$T\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(n-k)}=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}$$

因此，离散时间单频复指数信号 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}$ 是离散 LTI 系统的**本征信号 (eigen-signal)**，对应的**本征值 (eigen-value)** 为

$$H(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k}$$

将输入信号 $x[n]$ 展开为离散时间单频复指数信号的线性组合 $x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\,\mathrm{d}\omega$ 后，计算系统输出 $y[n]$ 将变得非常简单，有

$$y[n]=T\{x[n]\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T\{X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\}\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\omega)H(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\,\mathrm{d}\omega$$

▶ 频率响应函数

离散 LTI 系统的**频率响应函数 (frequency response)** 定义为

$$H(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

即样值响应函数的离散时间 Fourier 变换 (DTFT)。

▶ 系统函数

离散 LTI 系统的**系统函数 (system function)** 定义为

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]z^{-n}$$

即样值响应函数的双边 z 变换。

系统函数 $H(z)$ 是频率响应函数 $H(\omega)$ 的推广，有

$$H(\omega)=H(z)\big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}$$

系统函数 $H(z)$ 的收敛域 (region of convergence, ROC) 决定了系统的**因果性**和**稳定性**：

- 系统因果 $\iff$ ROC 包含 $z=\infty$；
- 系统 BIBO 稳定 $\iff$ ROC 包含单位圆 $|z|=1$。

▶ 矩阵表示

离散时间信号可以很自然地用（有限长或无限长）向量表示，因而离散时间信号通过 LTI 系统的过程也就可以用**矩阵与向量的乘积**表示。

设 $x[n]$ 是长度为 N 的离散时间信号，$H\{\cdot\}$ 是离散 LTI 系统，其样值响应函数为 $h[n]$，则系统输出 $y[n]$ 可表示为

$$y[n]=H\{x[n]\}=\sum_k h[n-k]x[k]$$

对于 $n=0,1,\cdots,N-1$，上式可以写成矩阵形式

$$\vec{y}=\boldsymbol{H}\vec{x}=\begin{pmatrix}\vec{h}_0\\\vec{h}_1\\\vdots\\\vec{h}_{N-1}\end{pmatrix}\vec{x}=\begin{pmatrix}h[0]&0&\cdots&0\\h[1]&h[0]&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\h[N-1]&h[N-2]&\cdots&h[0]\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x[0]\\x[1]\\\vdots\\x[N-1]\end{pmatrix}$$

其中 $\vec{h}_n$ 是样值响应函数 $h[n]$ **反褶**后**右移** n 位后的向量。

离散时间 Fourier 变换 (DTFT)

DTFT 的定义

■ DTFT 的引入

已知连续时间信号 $f(t)$ 的 **Fourier 变换 (FT)** 定义为

$$F(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\,\mathrm{d}t$$

以间隔 T 对其进行冲激采样，得到

$$f_s(t)=f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\delta(t-nT)$$

则采样信号的 Fourier 变换为

$$F_s(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f_s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega nT}$$

类比于此，考虑离散时间信号 $x[n]=f(nT)$，记采样得到的离散信号频率为 $\omega=\Omega T$，可以定义**离散时间 Fourier 变换 (DTFT)** 如

> *Def.* 离散时间 Fourier 变换 (DTFT)
>
> 离散时间信号 $x[n]$ 的 离散时间 Fourier 变换 (Discrete-Time Fourier Transform, DTFT) 定义为
>
> $$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$
>
> 其逆变换 (Inverse DTFT) 为
>
> $$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\,\mathrm{d}\omega$$

DTFT 与其它变换的关系

DTFT 与 Fourier 变换的关系

由 DTFT 的引入可知，离散时间信号 $x[n]$ 的 DTFT 可以看作是其对应的**连续时间信号 $f(t)$ 的采样信号频谱 $F_s(\mathrm{j}\Omega)$ 在频点 $\Omega=\frac{\omega}{T}$ 处的取值**，即

$$X(\omega)=F_s(\mathrm{j}\Omega)\Big|_{\Omega=\omega/T}$$

由于以 T 为周期的冲激采样会使频谱发生 $\frac{2\pi}{T}$ 的周期性重复，因此 DTFT 是周期为 2π 的周期函数。

DTFT 与 z 变换的关系

注意到 $x[n]$ 的 z 变换为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

则 DTFT 可以看作是 **z 变换在单位圆 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$ 上的取值**，即

$$X(\omega)=X(z)\Big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}$$

DTFT 的逆变换

将离散时间信号 $x[n]$ 看作是基底为 $\{\delta[n-k]\}_k$ 的**无限维空间** ℓ^2 中的一个向量 $\vec{x}$，其 DTFT $X(\omega)$ 可以看作是该向量在**另一组单位基底** $\left\{\hat{\phi}_\omega\right\}=\{\phi_\omega[n]\}_\omega=\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\}_\omega$ 上的**投影系数**，即

$$X(\omega)=\left\langle\vec{x},\hat{\phi}_\omega\right\rangle=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

两组基底之间有对应关系

$$\mathrm{DTFT}\{\delta[n-k]\}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k}$$

由于 $\left\{\hat{\phi}_\omega\right\}$ 是**完备的**，因此可以通过投影系数 $X(\omega)$ 重构出原向量 $\vec{x}$。考虑其基底 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}$ 变换回 $\delta[n-k]$ 的过程

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k}\,\mathrm{d}\omega=\delta[n-k]$$

则有

$$x[n]=\mathrm{IDTFT}\{X(\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\,\mathrm{d}\omega$$

典型信号的 DTFT

一些典型离散时间信号及其 DTFT 如下表所示:

信号类型	信号 $x[n]$	DTFT 频谱 $X(\omega)$
单位样值序列	$\delta[n]$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\cdot 0}=1$
矩形窗序列	$\begin{cases}1, & \lvert n\rvert\le M,\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$	$\dfrac{\sin\frac{(2M+1)\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$
全 1 序列	1	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}=2\pi\delta(\omega)$
复指数序列	$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
余弦序列	$\cos\omega_0 n$	$\pi(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))$
sinc 序列	$\dfrac{\sin\omega_c n}{\pi n}$	$\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert<\omega_c,\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

DTFT 的性质

基本性质

基本变换关系:

- **线性**,

  $ax_1[n]+bx_2[n]\xrightarrow{\text{DTFT}}$
- **反转**,

  $x[-n]\xrightarrow{\text{DTFT}}X$
- **共轭**,

  $x^*[n]\xrightarrow{\text{DTFT}}X$

延时、调制性质:

- **时移**,

  $x[n-n_0]\xrightarrow{\text{DTFT}}$
- **频移**,

  $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}x[n]\xrightarrow{\text{DTFT}}$

微分性质:

- **时域差分**,

  $x[n]-x[n-1]\xrightarrow{\text{DTFT}}$
- **频域微分**,

  $\mathrm{j}nx[n]\xrightarrow{\text{DTFT}}$

> *Note* DTFT 性质的应用
>
> 可以利用离散时间信号的离散特性简化部分过程，例如序列解调中，要将中心频率为 ω_0 的信号变换到基带，连续时间信号中需要乘以 $\cos(\omega_0 n)$ 再进行低通滤波，而数字下变频 (DDC) 任务中限定 $\omega_0=\frac{\pi}{2}$ 时只需依次乘以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi n/2}=(-\mathrm{j})^n$ 即可。
>
> 此外，也可以利用 DTFT 频谱的连续性补足信号序列离散的不足，如在延时估计中，可以通过发射波形 $s[n]$ 和接收信号 $r[n]=s[n-n_0]$ 的 DTFT 频谱相差 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n_0}=\frac{R(\omega)}{S(\omega)}$ 中拟合得到非整数延时 n_0。

信号与其 DTFT 频谱之间的能量归一化关系由 **Parseval 定理**给出:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert x[n]\rvert^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lvert X(\omega)\rvert^2\,\mathrm{d}\omega$$

共轭与对称

在复数域中，函数 $f(x)$ 是**共轭对称 (conjugate symmetric)** 的，当且仅当 $f(x)=f^*(-x)$；函数 $f(x)$ 是**共轭反对称 (conjugate anti-symmetric)** 的，当且仅当 $f(x)=-f^*(-x)$。

任意离散时间信号 $x[n]$ 都可以分解为**共轭对称分量** $x_e[n]$ 和**共轭反对称分量** $x_o[n]$，即

$$x[n]=x_e[n]+x_o[n],\qquad\begin{cases}x_e[n]=\dfrac{1}{2}(x[n]+x^*[-n]),\\ x_o[n]=\dfrac{1}{2}(x[n]-x^*[-n])\end{cases}$$

考察其 DTFT，对共轭对称分量有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{DTFT}\{x_e[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(x[n]+x^*[-n])\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \\
&= \frac{1}{2}X(\omega) + \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*[m](\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega m})^* \\
&= \frac{1}{2}X(\omega) + \frac{1}{2}X^*(\omega) = \mathfrak{Re}\{X(\omega)\}
\end{aligned}
$$

类似地，对共轭反对称分量有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{DTFT}\{x_o[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(x[n]-x^*[-n])\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \\
&= \frac{1}{2}X(\omega) - \frac{1}{2}X^*(\omega) = \mathrm{j}\,\mathfrak{Im}\{X(\omega)\}
\end{aligned}
$$

另一方面，谱 $X(\omega)$ 也可以分解为**共轭对称分量** $X_e(\omega) = \dfrac{X(\omega)+X^*(-\omega)}{2}$ 和**共轭反对称分量** $X_o(\omega) = \dfrac{X(\omega)-X^*(-\omega)}{2}$ ，对其做 IDTFT，有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{IDTFT}\{X_e(\omega)\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_e(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{X(\omega)+X^*(-\omega)}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(-\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega')(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega' n})^*\,\mathrm{d}\omega' \\
&= \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x^*[n] = \mathfrak{Re}\{x[n]\} \\
\mathrm{IDTFT}\{X_o(\omega)\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_o(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{X(\omega)-X^*(-\omega)}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{2}x^*[n] = \mathrm{j}\,\mathfrak{Im}\{x[n]\}
\end{aligned}
$$

> *Thm.* DTFT 的共轭与对称性质
>
> 离散时间信号 $x[n]$ 的共轭对称分量 $x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n]+x^*[-n])$ 和共轭反对称分量 $x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n]-x^*[-n])$ 的 DTFT 分别为频谱 $X(\omega)$ 的实部和虚部，即
>
> $$\mathrm{DTFT}\{x_e[n]\} = \mathfrak{Re}\{X(\omega)\}, \qquad \mathrm{DTFT}\{x_o[n]\} = \mathrm{j}\,\mathfrak{Im}\{X(\omega)\}$$
>
> $x[n]$ 的实分量 $x_R[n] = \mathfrak{Re}\{x[n]\}$ 和虚分量 $x_I[n] = \mathrm{j}\,\mathfrak{Im}\{x[n]\}$ 的 DTFT 分别为频谱 $X(\omega)$ 的共轭对称分量和共轭反对称分量，即
>
> $$\mathrm{DTFT}\{x_R[n]\} = X_e(\omega) = \frac{X(\omega)+X^*(-\omega)}{2},$$
> $$\mathrm{DTFT}\{x_I[n]\} = X_o(\omega) = \frac{X(\omega)-X^*(-\omega)}{2}$$

卷积性质

类似于 Fourier 变换，DTFT 也具有卷积性质：

- 时域两信号 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的**线性卷积**的 DTFT 是其 **DTFT 频谱的乘积**：

  $$x_1[n] * x_2[n] \xrightarrow{\mathrm{DTFT}} X_1(\omega)\cdot X_2(\omega)$$

- 频域两信号 $X_1(\omega)$ 和 $X_2(\omega)$ 的**线性卷积**（的 $\frac{1}{2\pi}$）是其时域信号的**乘积**的 DTFT：

  $$x_1[n]\cdot x_2[n] \xrightarrow{\mathrm{DTFT}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\theta)X_2(\omega-\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

  这里的常数因子与 Parseval 定理中的因子一致。

可以引入**互相关函数** $r_{x_1x_2}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2^*[n-k]$，其 DTFT 为

$$R_{x_1x_2}(\omega) = X_1(\omega)X_2^*(\omega)$$

特别地，当 $x_1[n] = x_2[n] = x[n]$ 时，互相关函数即为**自相关函数** $r_{xx}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[n-k]$，其 DTFT 为 $R_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2$。

周期性质

我们已知 $X(\omega)$ 是 2π **周期**函数，即 $X(\omega) = X(\omega+2k\pi)$，$k\in\mathbb{Z}$。

对于周期 T 信号 $x[n] = x[n+T]$，记其在一个周期内的**截断序列**为 $\tilde{x}[m] = x[m]$，$m = 0, 1, \cdots, T-1$，则该周期信号可表示为

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{x}[n-kT] = \tilde{x}[n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kT]$$

其 DTFT 为

$$X(\omega) = \tilde{X}(\omega)\cdot\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{T}k\right)$$

其中 $\tilde{X}(\omega)$ 是有限长信号 $\tilde{x}[m]$ 的 DTFT。

离散 Fourier 变换 (DFT)

DFT 的定义

DFT 的引入

离散时间 Fourier 变换 (DTFT) 是针对**无限长**信号的、**离散域向连续域**的变换，变换后的结果便于分析，但不利于计算机存储和处理。

对于 N **点长**的离散时间信号 $x[n]$，其 DTFT

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

仍是**连续频谱**，但若对信号做以 N 为周期的**周期延拓**，则其 DTFT

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{x}[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(n+rN)} \\
&= X(\omega)\sum_{r=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega rN} = X(\omega)\cdot\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right) \\
&= \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega)\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)
\end{aligned}
$$

变为**离散频谱**，且频谱间隔为 $\frac{2\pi}{N}$。因而可以仅取 N 个频点 $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$，$k = 0, 1, \cdots, N-1$，将其定义为信号的**离散 Fourier 变换 (DFT)**。

> *Def.* 离散 Fourier 变换 (DFT)
>
> 设 $x[n]$ 是长度为 N 的离散时间信号，则其离散 Fourier 变换 (discrete Fourier transform, DFT) 定义为
>
> $$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/N}, \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1$$
>
> 其逆变换 (Inverse DFT) 为
>
> $$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi nk/N}, \qquad n = 0, 1, \cdots, N-1$$

DFT 的线性代数解释

DFT 是对离散时间信号各点的**加权求和**，其中权值为**复指数函数** $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/N}$。将离散时间信号 $x[n]$ 看作是 N 维空间 $\mathbb{C}^N$ 中的一个向量 $\vec{x}$，其 DFT $X[k]$ 即可表为向量内积

$$
X[k] = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\cdot\frac{0k}{N}} & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\cdot\frac{1k}{N}} & \cdots & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\cdot\frac{(N-1)k}{N}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x[0]\\ x[1]\\ \vdots\\ x[N-1]\end{pmatrix} = \vec{\boldsymbol{d}}_k^{\mathrm{H}}\vec{\boldsymbol{x}}
$$

其中 $\vec{\boldsymbol{d}}_k = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\cdot\frac{0k}{N}} & \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\cdot\frac{1k}{N}} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\cdot\frac{(N-1)k}{N}}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$。

因此，若定义 $\vec{\boldsymbol{X}} = (X[0]\ \ X[1]\ \ \cdots\ \ X[N-1])^{\mathrm{T}}$，则 DFT 可写为矩阵形式

$$\vec{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix}\vec{\boldsymbol{d}}_0 & \vec{\boldsymbol{d}}_1 & \cdots & \vec{\boldsymbol{d}}_{N-1}\end{pmatrix}^{\mathrm{H}}\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{D}\vec{\boldsymbol{x}}$$

其中 $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{d}}_0 & \vec{\boldsymbol{d}}_1 & \cdots & \vec{\boldsymbol{d}}_{N-1} \end{pmatrix}^{\mathrm{H}} = \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{d}}_0^{\mathrm{H}} \\ \vec{\boldsymbol{d}}_1^{\mathrm{H}} \\ \vdots \\ \vec{\boldsymbol{d}}_{N-1}^{\mathrm{H}} \end{pmatrix}$ 称为 **DFT 矩阵**。

DFT 矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的各列向量 $\vec{\boldsymbol{d}}_k$ 互相正交，且模长均为 $\sqrt{N}$，因此 DFT 为**离散正交变换**，其逆变换也可表示为矩阵

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D}^{-1} = \frac{1}{N}\boldsymbol{D}^{\mathrm{H}}$$

DFT 的点数

DFT 不一定要让频域采样点数与信号长度相同。定义间隔为 $\frac{2\pi}{T}$ 的频域采样函数

$$S_T(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

其对应于时域上以 T 为周期的冲激串

$$s_T[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rT]$$

使用 $s_T[n]$ 与信号 $x[n]$ 卷积进行周期延拓，即相当于频域上使用 $S_T(\omega)$ 进行采样。

> *Def.* T 点离散 Fourier 变换
>
> 设 $x[n]$ 是长度为 N 的离散时间信号，$T \geq N$ 为频域采样点数，则其 T 点离散 Fourier 变换定义为
>
> $$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/T}, \quad k = 0, 1, \cdots, T-1$$
>
> 其逆变换为
>
> $$x[n] = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T-1} X[k]\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi nk/T}, \quad n = 0, 1, \cdots, N-1$$

DFT 与其它变换的关系

DFT 与 DTFT 的关系

设 $x[n]$ 是长度为 N 的离散时间信号，则其 DTFT 为

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

N 点 DFT $X[k]$ 则为 DTFT 在 N 个 **N 等分频点** $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$ 处的取值，即

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/N} = X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}, \quad k = 0, 1, \cdots, N-1$$

而 T 点 DFT $X[k]$ 则为 DTFT 在 T 个 **T 等分频点** $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$ 处的取值，即

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/T} = X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{T}}, \quad k = 0, 1, \cdots, T-1$$

DFT 与 FT 的关系

设有**连续信号** $s(t)$，其 Fourier 变换为 $S(\Omega)$；对 $s(t)$ 以间隔 T_s 进行冲激采样，得到**采样信号** $s_s(t) = s(t) \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$ 和**离散时间信号** $s_D[n] = s(nT_s)$，则采样信号的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned} S_s(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t - nT_s)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_s)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega nT_s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_D[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega nT_s} = S_D(\omega)\Big|_{\omega=\Omega T_s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_s(\Omega) &= S(\Omega) * \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)\right\} = S(\Omega) * \frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T_s}\right) \\ &= \frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} S\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T_s}\right) \end{aligned}$$

进而离散时间信号的 DFT 为

$$S_D[k] = S_D(\omega)\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} = S_s(\Omega)\Big|_{\Omega=\frac{2\pi k}{NT_s}}$$

DFT 的性质

基本性质

由于 DFT 是 DTFT 的离散化，自然地保持了 DTFT 的许多性质，如：

- 线性，$ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{\text{DFT}}$ 。
- 共轭，$x^*[n] \xrightarrow{\text{DFT}} X$，后者索引按模 N 计算，实质是下述循环反转 $X^*[((-k))_N]R_N[k]$。
- 对称，$x_e[n] \xrightarrow{\text{DFT}} \Re$，$x_o[n] \xrightarrow{\text{DFT}} \mathrm{j}\Im$，$x_R[n] \xrightarrow{\text{DFT}} X$，$x_I[n] \xrightarrow{\text{DFT}} X$，其中共轭对称、共轭反对称分量也由循环反转定义。
  - 特别地，当 $x[n]$ 为实序列时，$X[k]$ 具有共轭对称性 $X[k] = X^*[N-k]$。
- Parseval 定理，$\sum\limits_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$。

周期性质

虽然 DFT 只定义在 $0, 1, \cdots, N-1$ 上，但由于其本质是 DTFT 在等分频点处的取值，因此 DFT 也具有**周期性**，即允许定义

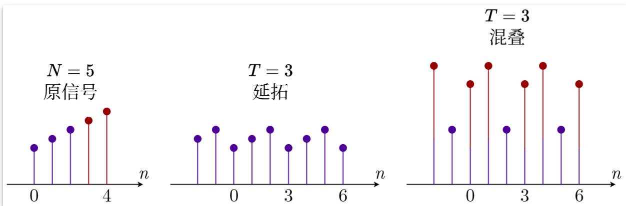
$$X[k] = X[k \bmod N]$$

对原有的 $X[k]$ 进行**周期延拓**。

引入以 T 为周期延拓的记号

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_T] = x[n \bmod T]$$

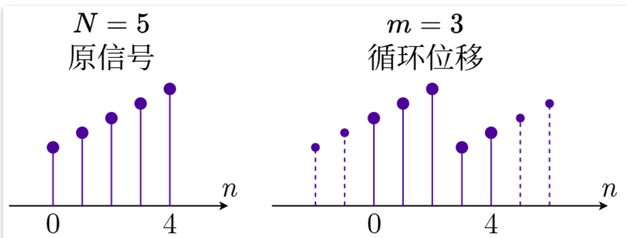
当原序列长度 $N < T$ 时，空处补零；当 $N > T$ 时，**截断**为前 T 点后再做**延拓**，不发生混叠。



循环位移

对于 N 点长序列 $x[n]$，其 **m 点循环位移**定义为

$$x[((n - m))_N]R_N[n]$$



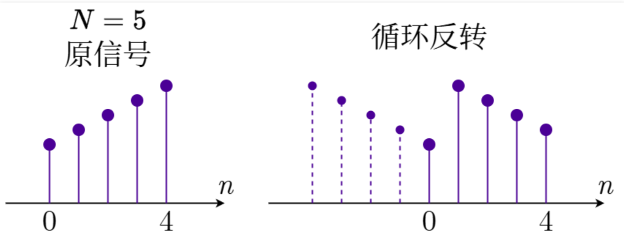
> **Thm.** DFT 的循环位移性质
>
> 设 $x[n]$ 的 DFT 为 $X[k]$，则其 m 点循环位移序列 $x[((n-m))_N]R_N[n]$ 的 DFT 为
>
> $$\mathrm{DFT}\{x[((n-m))_N]R_N[n]\} = W_N^{mk}X[k]$$
>
> 其中 $W_N = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi/N}$。
>
> 时域循环位移对应频域线性相移。

▶ 循环反转

对于 N 点长序列 $x[n]$，其**循环反转**定义为

$$x[((-n))_N]R_N[n]$$

注意循环反转是反转后延拓到原区间截断，其结果中 **0 时刻保持不变**，其余时刻按循环方式反转。



> **Thm.** DFT 的循环反转性质
>
> 设 $x[n]$ 的 DFT 为 $X[k]$，则其循环反转序列 $x[((-n))_N]R_N[n]$ 的 DFT 为
>
> $$\mathrm{DFT}\{x[((-n))_N]R_N[n]\} = X[((-k))_N]R_N[k]$$
>
> 时域循环反转对应频域循环反转。

▶ 循环卷积

由循环反转和循环位移可组合为**循环卷积**，其定义为

$$x[n]*y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[((n-m))_N]y[m] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[((n-m))_N]$$

考虑到 DTFT 中相乘与卷积有对应关系，考察 DFT 频域相乘的逆变换

$$\begin{aligned}
\mathrm{IDFT}\{X[k]Y[k]\} &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]Y[k]W_N^{-nk} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1} x[m]W_N^{mk}\right)Y[k]W_N^{-nk} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Y[k]W_N^{-(n-m)k}\right) \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[((n-m))_N]
\end{aligned}$$

> **Thm.** DFT 的循环卷积性质
>
> 设 $x[n]$ 的 DFT 为 $X[k]$，$y[n]$ 的 DFT 为 $Y[k]$，则其循环卷积序列 $x[n]*y[n]$ 的 DFT 为
>
> $$\mathrm{DFT}\{x[n]*y[n]\} = X[k]Y[k]$$
>
> 时域循环卷积对应频域相乘。

DFT 的快速计算

直接计算 DFT 需要 $O(N^2)$ 的时间复杂度，**快速傅里叶变换 (FFT)** 则可以将时间复杂度降为 $O(N\log N)$。

■ FFT 的基本思想

FFT 的基本思想是**分治法 (divide and conquer)**，将 N 点 DFT 拆解为两个 $\dfrac{N}{2}$ 点 DFT 来计算。

记 $W_N = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi/N}$，称为**旋转因子 (twiddle factor)**，其性质有

- 周期性：$W_N^{k+N} = W_N^k$；
- 齐次性：$W_N^k = W_{N/m}^{k/m}$；
- 共轭对称性：$W_N^{(N-n)k} = W_N^{-nk} = (W_N^{nk})^*$。

旋转因子幂次项中有许多特殊值可以简化计算，例如

$$W_N^0 = 1,\quad W_N^{N/2} = -1,\quad W_N^{N/4} = -\mathrm{j},\quad W_N^{3N/4} = \mathrm{j}$$

所对应项的计算均不需要复乘。在长序列中，这些项比例较小，对计算量影响不大；但**在短序列中，则可以显著减少计算量**，特别是在 $N=2$ 与 $N=4$ 时可**不需要任何复乘**即得到 DFT。

■ 基 2 的频率抽取 FFT (Decimation-in-Frequency FFT with Radix-2)

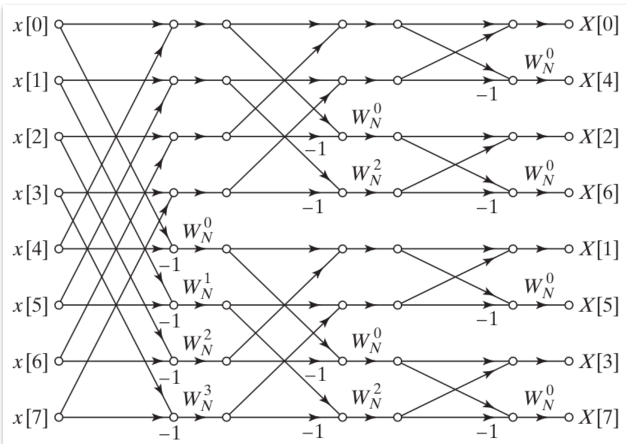
设 N 为偶数，将 $x[k]$ **拆分为前后两半**，则 N 点 DFT 可写为

$$\begin{aligned}
k=2r,\qquad X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]W_N^{n(2r)} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n]W_N^{n(2r)} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]W_{N/2}^{nr} + W_N^{Nr}\sum_{n=0}^{N/2-1} x\left[n+\frac{N}{2}\right]W_{N/2}^{nr} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1}\left(x[n] + x\left[n+\frac{N}{2}\right]\right)W_{N/2}^{nr} \\
k=2r+1,\qquad X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{n(2r+1)} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]W_N^{n(2r+1)} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n]W_N^{n(2r+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]W_N^{n(2r+1)} + W_N^{N(2r+1)/2}\sum_{n=0}^{N/2-1} x\left[n+\frac{N}{2}\right]W_N^{n(2r+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]W_N^{n(2r+1)} - \sum_{n=0}^{N/2-1} x\left[n+\frac{N}{2}\right]W_N^{n(2r+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1}\left(x[n] + x\left[n+\frac{N}{2}\right]\right)W_N^{n}W_{N/2}^{nr}
\end{aligned}$$

这相当于将 N 点 DFT 拆解为两个 $\dfrac{N}{2}$ 点 DFT 来计算：

- 偶数序号 DFT 系数 $X[2r]$ 由点长序列 $e[n] = x[n] + x\left[n+\dfrac{N}{2}\right]$ 的 DFT 给出；
- 奇数序号 DFT 系数 $X[2r+1]$ 由 $\dfrac{N}{2}$ 点长序列 $o[n] = \left(x[n] - x\left[n+\dfrac{N}{2}\right]\right)W_N^n$ 的 DFT 给出。

对 $N=8$ 情形，其蝶形图表示为：



可见：

- 每一级蝶形运算将 N 点 DFT 拆解为两个 $\dfrac{N}{2}$ 点 DFT 来计算，**共需 $\log_2 N$ 级**，每级需 $N/2$ 个蝶形单元；
- 每个蝶形单元共有 1 次复乘和 2 次复加。

因此，基 2 的频率抽取 FFT 的时间复杂度为 $O(N\log N)$。

上图中，输入信号 $x[k]$ 的索引顺序为自然顺序 $0,1,2,\cdots,7$，而输出信号 $X[k]$ 的下标顺序为 $0,4,2,6,1,5,3,7$，为原序号**二进制按位次序反转**。

得到的序列，称为**倒位序 (bit-reversed order)**。若需要按自然顺序输出，则需在计算后进行一次倒位序操作。

■ 基 2 的时间抽取 FFT (Decimation-in-Time FFT with Radix-2)

设 N 为偶数，将 $x[n]$ **按奇偶项拆分**，则 N 点 DFT 可写为

$$
\begin{aligned}
X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]W_N^{(2r)k} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1]W_N^{(2r+1)k} \\
&= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1]W_{N/2}^{rk}
\end{aligned}
$$

其中：

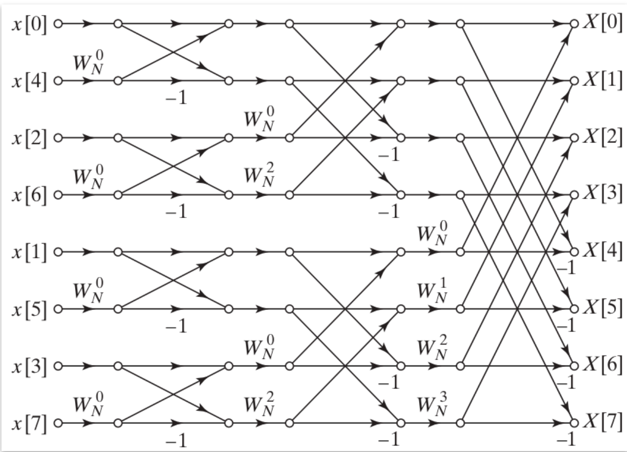
- 偶数项组成 $\frac{N}{2}$ 点长**序列 $x_e[r]=x[2r]$**，其 DFT 为
  $X_e[k]=\sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]W_{N/2}^{rk}$；
- 奇数项组成 $\frac{N}{2}$ 点长**序列 $x_o[r]=x[2r+1]$**，其 DFT 为
  $X_o[k]=\sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1]W_{N/2}^{rk}$。

因此，N 点 DFT 可写为

$$
X[k]=X_e[k]+W_N^kX_o[k]
$$

由于 $X_e[k]$ 和 $X_o[k]$ 均为周期为 $\frac{N}{2}$ 的序列，与 W_N^k 的周期不一致，**截取到 $k=0,1,\cdots,N-1$** 时，$X[k]$ 可分两部分写为

$$
\begin{cases}
X[k]=X_e[k]+W_N^kX_o[k], \\
X\left[k+\dfrac{N}{2}\right]=X_e[k]-W_N^kX_o[k],
\end{cases}
\quad k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1
$$



类似地，基 2 的时间抽取 FFT 的时间复杂度也为 $O(N\log N)$；得到的 DFT 系数 $X[k]$ 按照自然顺序排列，而**输入信号 $x[n]$ 则按倒位序排列**。

■ 组合数 FFT

FFT 的基本思想是**分治**，将 N 点 DFT 拆解为多个较小点数的 DFT 来计算。若 N 可分解为多个因子之积 $N=N_1N_2\cdots N_m$，则可将 N 点 DFT 拆解为 N_1 个 $N_2N_3\cdots N_m$ 点 DFT 来计算，再将每个 $N_2N_3\cdots N_m$ 点 DFT 拆解为 N_2 个 $N_3\cdots N_m$ 点 DFT 来计算，依此类推，直至拆解为若干个小点数 DFT 来计算。

对 $N=N_1N_2\cdots N_m$，我们将时域索引 n 表示为

$$
n=n_1+N_1n_2+N_1N_2n_3+\cdots+N_1N_2\cdots N_{m-1}n_m,
\quad
\begin{cases}
n_1=0,1,\cdots,N_1-1,\\
n_2=0,1,\cdots,N_2-1,\\
\vdots\\
n_m=0,1,\cdots,N_m-1
\end{cases}
$$

将频域索引 k 表示为

$$
k=k_m+N_mk_{m-1}+N_mN_{m-1}k_{m-2}+\cdots+N_mN_{m-1}\cdots N_2k_1,
\quad
\begin{cases}
k_1=0,1,\cdots,N_1-1,\\
k_2=0,1,\cdots,N_2-1,\\
\vdots\\
k_m=0,1,\cdots,N_m-1
\end{cases}
$$

引入记号 $\overset{b}{\underset{a}{N}}=N_aN_{a+1}\cdots N_{b-1}N_b$，将 nk 展开为

$$
\begin{aligned}
nk &= \left(n_1+n_2N_1+\cdots+n_m\overset{m-1}{\underset{1}{N}}\right)\left(k_m+N_mk_{m-1}+\cdots+\overset{m}{\underset{2}{N}}k_1\right) \\
&= \boxed{n_1\overset{m}{\underset{2}{N}}k_1}+n_1\overset{m}{\underset{3}{N}}k_2+\cdots+n_1N_mk_{m-1}+n_1k_m \\
&\quad +n_2Nk_1+\boxed{n_2N_1\overset{m}{\underset{3}{N}}k_2}+n_2N_1\overset{m}{\underset{4}{N}}k_3+\cdots+n_2N_1N_mk_{m-1}+n_2N_1k_m \\
&\quad +\cdots \\
&\quad +n_mN\overset{m-1}{\underset{2}{N}}k_1+\cdots+n_mNk_{m-1}+\boxed{n_m\overset{m-1}{\underset{1}{N}}k_m}
\end{aligned}
$$

其中，每行标记项之前的项均为 N 的整数倍，第 r 行标记项的 N 连乘缺 N_r 因子，故

$$
\begin{aligned}
W_N^{nk} = {} & \boxed{W_{N_1}^{n_1k_1}}\times W_{\overset{2}{\underset{1}{N}}}^{n_1k_2}\cdots W_{\overset{m-1}{\underset{1}{N}}}^{n_1k_{m-1}}W_N^{n_1k_m} \\
& \times 1\times\boxed{W_{N_2}^{n_2k_2}}\times W_{\overset{3}{\underset{2}{N}}}^{n_2k_3}\cdots W_{\overset{m-1}{\underset{2}{N}}}^{n_2k_{m-1}}W_{\overset{m}{\underset{2}{N}}}^{n_2k_m} \\
& \times\cdots \\
& \times 1\times\boxed{W_{N_{m-1}}^{n_{m-1}k_{m-1}}}\times W_{N_{m-1}N_m}^{n_{m-1}k_m} \\
& \times 1\times\boxed{W_{N_m}^{n_mk_m}}
\end{aligned}
$$

这里的每个标记项 $W_{N_r}^{n_rk_r}$ 都可**视为 r 点 DFT 的变换基**，因此 N 点 DFT 可展开为

$$
\begin{aligned}
X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{nk} \\
&= \sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\cdots\sum_{n_m=0}^{N_m-1}x\left[n_1+N_1n_2+\cdots+\overset{m-1}{\underset{1}{N}}n_m\right]W_N^{nk} \\
&= \sum_{n_1=0}^{N_1-1}\boxed{W_{N_1}^{n_1k_1}}\cdot W_{\overset{2}{\underset{1}{N}}}^{n_1k_2}\cdots W_{\overset{m-1}{\underset{1}{N}}}^{n_1k_{m-1}}W_N^{n_1k_m} && (N_1\text{ 点})\\
&\qquad \sum_{n_2=0}^{N_2-1}\boxed{W_{N_2}^{n_2k_2}}\cdot W_{\overset{3}{\underset{2}{N}}}^{n_2k_3}\cdots W_{\overset{m-1}{\underset{2}{N}}}^{n_2k_{m-1}}W_{\overset{m}{\underset{2}{N}}}^{n_2k_m} && (N_2\text{ 点})\\
&\qquad \cdots \\
&\qquad \sum_{n_{m-1}=0}^{N_{m-1}-1}\boxed{W_{N_{m-1}}^{n_{m-1}k_{m-1}}}\cdot W_{N_{m-1}N_m}^{n_{m-1}k_m} && (N_{m-1}\text{ 点})\\
&\qquad \sum_{n_m=0}^{N_m-1}\boxed{W_{N_m}^{n_mk_m}}\cdot x\left[n_1+N_1n_2+\cdots+\overset{m-1}{\underset{1}{N}}n_m\right] && (N_m\text{ 点})
\end{aligned}
$$

这里每个标记项 $W_{N_r}^{n_rk_r}$ 都可视为 N_r 点 DFT 的变换基，因此 N 点 DFT 可拆解为多个较小点数 DFT 来计算。

FFT 的应用

■ FFT 计算线性卷积

LTI 系统的输出 $y[n]$ 可由输入 $x[n]$ 与系统冲激响应 $h[n]$ 的**线性卷积**给出，我们期望通过 FFT 快速得到 $X[k]$ 和 $H[k]$ 来高效计算线性卷积。

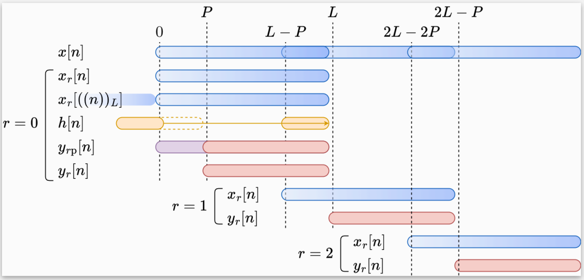
一般情况下，$h[n]$ 的长度 P 远小于 $x[n]$ 的长度 N，若直接计算 N 点 DFT，则需要对 $h[n]$ 进行**大量补零**，导致计算量增大。为此，可采用**重叠保留法 (overlap-save method)** 或**重叠相加法 (overlap-add method)** 来分段计算线性卷积。

▶ 重叠保留法

设输入信号 $x[n]$ 的长度为 N，系统冲激响应 $h[n]$ 的长度为 P，则线性卷积 $y[n]=x[n]*h[n]$ 的长度为 $N+P-1$。选择分段长度 L，满足 $L\geq P$，则每段信号**循环卷积**贡献给线性卷积的**无混叠有效输出**长度为 $L-P+1$。

Algo. 重叠保留法计算线性卷积

重叠保留法计算线性卷积的基本思想为，将输入信号 $x[n]$ 分段，每段长度为 L，相邻两段重叠 $P-1$ 点，分别与系统冲激响应 $h[n]$ 做循环卷积，再保留每段循环卷积的第 $P-1$ 点到第 $L-1$ 点作为线性卷积的有效输出，最后将各段有效输出串联得到完整线性卷积结果。



GIVEN —
N 点长输入信号 $x[n]$，长度为 P 的系统冲激响应 $h[n]$

STEPS —

1. 对 $h[n]$ 做 L 点 FFT，得到 $H^L[k]=\mathrm{DFT}_L\{h[n]\}$
2. 将 $x[n]$ 分段，每段长度为 L，相邻两段重叠 $P-1$ 点，记第 r 段为 $x_r[n]$
3. 对每段 $x_r[n]$ 做 L 点 FFT，得到 $X_r^L[k]=\mathrm{DFT}_L\{x_r[n]\}$，并求 $y_{rp}[n]=\mathrm{IDFT}\{X_r^L[k]H^L[k]\}$
4. 保留 $y_{rp}[n]$ 的第 $P-1$ 点到第 $L-1$ 点，作为线性卷积的有效输出 $y_r[n]$

OUTPUT —
线性卷积结果 $y[n]$，由各段有效输出串联得到

$$y[n]=\sum_r y_r[n-r(L-P+1)+P-1]$$

其中:

- L — 分段长度，满足 $L\geq P$。

▶ 重叠相加法

同样给定输入信号 $x[n]$ 的长度为 N，系统冲激响应 $h[n]$ 的长度为 P。将 $x[n]$ 分为长度为 L 的子段 $x_r[n]=\begin{cases}x[n+rL], & 0\leq n\leq L-1,\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$，则线性卷积 $y[n]=x[n]*h[n]$ 可表示为

$$y[n]=h[n]*\sum_{r=0}^{\infty}x_r[n-rL]=\sum_{r=0}^{\infty}h[n]*x_r[n-rL]$$

Algo. 重叠相加法计算线性卷积

重叠相加法计算线性卷积的基本思想为，将输入信号 $x[n]$ 分段，每段长度为 L，分别与系统冲激响应 $h[n]$ 做线性卷积，再将各段线性卷积结果平移相加得到完整线性卷积结果。

GIVEN —
N 点长输入信号 $x[n]$，长度为 P 的系统冲激响应 $h[n]$

STEPS —

1. 对 $h[n]$ 做 $L+P-1$ 点 FFT，得到 $H^{L+P-1}[k]=\mathrm{DFT}_{L+P-1}\{h[n]\}$
2. 将 $x[n]$ 分段，每段长度为 L，记第 r 段为 $x_r[n]$
3. 对每段 $x_r[n]$ 补零做 $L+P-1$ 点 FFT，得到 $X_r^{L+P-1}[k]=\mathrm{DFT}_{L+P-1}\{x_r[n]\}$，并求 $y_r[n]=\mathrm{IDFT}\{X_r^{L+P-1}[k]H^{L+P-1}[k]\}$

OUTPUT —
线性卷积结果 $y[n]$，由各段线性卷积结果平移 rL 后相加得到

$$y[n]=\sum_r y_r[n-rL]$$

其中:

- L — 分段长度。

■ 梳状滤波器组与短时傅里叶变换

▶ DFT 作为滤波器组

梳状**滤波器组 (filter bank)** 由多个带通滤波器组成，每个带通滤波器提取信号的一个频段成分。

考虑一个简单的低通滤波器

$$y[n]=\sum_{k=0}^{N-1}x[n-k],\qquad \text{i.e.}\qquad h[n]=R_N[n]$$

它输出 $x[n]$ 在**直流附近**的频率分量。若希望提取 $x[n]$ 在其他频段的频率成分，可在**频域**做 $\dfrac{2k\pi}{N}$ **移位**，相当于**时域调制**

$$h[n]=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2k\pi}{N}n}R_N[n]$$

则滤波器输出为

$$y[n]=\sum_{m=0}^{N-1}x[n-m]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2k\pi}{N}m}$$

此时注意到

$$y[N]=\sum_{m=0}^{N-1}x[N-m]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2k\pi}{N}m}=\sum_{m'=1}^{N}x[m']\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2k\pi}{N}(N-m')}=X[k]$$

其中假定 $x[0]=x[N]$，则滤波器在 $n=N$ 处的输出即为 **$x[n]$ 的 DFT 系数 $X[k]$**。因此，每个 DFT 系数 $X[k]$ 都可视为一个中心频率在 $\dfrac{2\pi k}{N}$ 的**带通滤波器**在 N 时刻的输出。

▶ 短时傅里叶变换 (STFT)

短时傅里叶变换 (STFT) 是对信号的**局部时间窗**内的信号做 Fourier 变换，得到信号在**时频平面**上的表示。

Def. 短时傅里叶变换 (STFT)

设有离散时间信号 $x[n]$，选取长度为 W 的分析窗，则信号 $x[n]$ 的短时傅里叶变换 (short-time Fourier transform, STFT) 为

$$X[k,n]=\mathrm{DFT}\{x[n-W+r+1]\}=\sum_{r=0}^{W-1}x[n-W+r+1]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kr/W}$$

其中 $k=0,1,\cdots,W-1$，n 为时间索引。

STFT 可视为对信号 $x[n]$ 中**从 $n-W+1$ 到 n** 的长度为 W 的**局部时间窗**内的信号做 W 点 DFT，得到该时间窗内信号的频谱表示。

即使使用 FFT，直接计算 STFT 的复杂度仍为每个时间样点 $O(W\log W)$，仍然需要较大的计算量。注意到 STFT 相邻时间窗之间**有大量重叠**，可利用这一点来减少计算量。对比

$$
\begin{aligned}
X[k,n+1] &= \sum_{r=0}^{W-1} x[(n+1)-W+r+1]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kr/W} \\
X[k,n] &= \sum_{r=0}^{W-1} x[n-W+r+1]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kr/W}
\end{aligned}
$$

得到

$$
\begin{aligned}
X[k,n+1] &= \sum_{r=0}^{W-2} x[(n+1)-W+r+1]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kr/W} + x[n+1]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k(W-1)/W} \\
&= \sum_{r'=1}^{W-1} x[n-W+r'+1]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k(r'-1)/W} + x[n+1]\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k/W} \\
&= \left(\sum_{r'=0}^{W-1} x[n-W+r'+1]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kr'/W} - x[n-W+1]\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k/W} \\
&\quad + x[n+1]\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k/W} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k/W}(X[k,n] - x[n-W+1] + x[n+1])
\end{aligned}
$$

即通过利用上一时刻 STFT 结果 $X[k,n]$，仅需**两次复加与一次复乘**即可得到下一时刻 STFT 结果 $X[k,n+1]$，每个时间样点的计算复杂度降为 $O(W)$。

■ 正交频分复用 (OFDM)

正交频分复用 (orthogonal frequency-division multiplexing, OFDM) 是一种多载波调制技术，广泛应用于无线通信系统中，如 Wi-Fi、4G 和 5G 移动通信等。

在 OFDM 系统中，**高速数据流**被分割成多个**低速子载波**，每个子载波使用较低的符号速率进行调制。由于子载波之间是正交的，可以有效地利用频谱资源，减少符号间干扰 (inter-symbol interference, ISI)。

数字频谱分析

DFT 与连续信号频谱的关系

■ 直观解释

设有连续时间信号 $s(t)$，对其以采样间隔 T_s 进行采样，得到离散时间信号 $s[n]=s(nT)$。采样信号的 Fourier 变换为

$$
\begin{aligned}
S_s(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t-nT_s)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_s)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega nT_s} \\
&\qquad = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\Omega T_s)n} = S_{\mathrm{D}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\Big|_{\omega=\Omega T_s} \\
&= \mathcal{F}\left\{s(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\right\} = \frac{1}{2\pi}S(\Omega)*\frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega-k\frac{2\pi}{T_s}\right) \\
&\qquad = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega')\frac{1}{T_s}\delta\left(\Omega-\Omega'-k\frac{2\pi}{T_s}\right)\mathrm{d}\Omega' \\
&\qquad = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} S\left(\Omega-k\frac{2\pi}{T_s}\right)
\end{aligned}
$$

其中 $S(\Omega)$ 为连续时间信号 $s(t)$ 的 Fourier 变换，$S_{\mathrm{D}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 为离散时间信号 $s[n]$ 的 DTFT。对 DTFT 取分立频点即得到 DFT

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{D}}[k] &= S_{\mathrm{D}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\Big|_{\omega=2\pi\frac{k}{N}} = \frac{1}{T_s}\sum_{m=-\infty}^{\infty} S\left(\Omega-m\frac{2\pi}{T_s}\right)\Bigg|_{\Omega=2\pi\frac{k}{NT_s}} \\
&= \frac{1}{T_s}\sum_{m=-\infty}^{\infty} S\left(2\pi\left(\frac{k}{NT_s}-\frac{m}{T_s}\right)\right)
\end{aligned}
$$

显见，连续时间信号频谱 $S(\Omega)$ 在以 $\frac{2\pi}{T_s}$ 为周期混叠，DFT 频点 k 对应 DTFT 频率 $\omega=2\pi\frac{k}{N}$，亦即对应连续时间频率 $\Omega=2\pi\frac{k}{NT_s}$。

■ 解析解释

对连续信号 $s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega t}\,\mathrm{d}\Omega$ 进行采样，得到离散时间信号

$$
s[n] = s(nT_s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega nT_s}\,\mathrm{d}\Omega
$$

截取 $n=0,1,\cdots,M-1$ 点，做 N 点 DFT，得到

$$
\begin{aligned}
X[k] &= \sum_{n=0}^{M-1}s[n]W_N^{kn} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{M-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{kn}{N}}\int_{-\infty}^{\infty}S(\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega nT_s}\,\mathrm{d}\Omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\Omega)\underbrace{\sum_{n=0}^{M-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\left(\Omega T_s-2\pi\frac{k}{N}\right)}}_{\psi_{M,N,k}(\Omega)}\mathrm{d}\Omega
\end{aligned}
$$

其中，**对 $S(\Omega)$ 做加权积分**的**权函数**为

$$
\begin{aligned}
\psi_{M,N,k}(\Omega) &= \sum_{n=0}^{M-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\left(\Omega T_s-2\pi\frac{k}{N}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{M}{2}\left(\Omega T_s-2\pi\frac{k}{N}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\left(\Omega T_s-2\pi\frac{k}{N}\right)\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{M-1}{2}\left(\Omega T_s-2\pi\frac{k}{N}\right)}
\end{aligned}
$$

▶ 理解 1：对连续时间信号频谱的采样

理想情况下，对 $s(t)$ 频谱 $S(\Omega)$ 的**理想采样**应为

$$
X_{\mathrm{ideal}}[k] = S(\Omega)\Big|_{\Omega=2\pi\frac{k}{NT_s}} = \int_{-\infty}^{\infty}S(\Omega)\delta\left(\Omega-2\pi\frac{k}{NT_s}\right)\mathrm{d}\Omega
$$

实际的采样函数 $\frac{1}{2\pi}\psi_{M,N,k}(\Omega)$ 可视为对理想采样函数 $\delta\left(\Omega-2\pi\frac{k}{NT_s}\right)$ 的一种**逼近**，随着 M 增大，其主瓣变窄，旁瓣减小，更加接近理想采样。

▶ 理解 2：滤波器组的输出

上面的频谱

$$
\begin{aligned}
X[k] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\Omega)\psi_{M,N,k}(\Omega)\,\mathrm{d}\Omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\Omega)\psi_{M,N,k}(\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}t\Omega}\,\mathrm{d}\Omega\Big|_{t=0} = \mathcal{F}^{-1}\{S(\Omega)\psi_{M,N,k}(\Omega)\}\Big|_{t=0}
\end{aligned}
$$

可视为对连续时间信号 $s(t)$ 通过一组滤波器组后在 $t=0$ 时刻的输出，第 k 个滤波器的频率响应为 $\psi_{M,N,k}(\Omega)$，对应时域冲激响应为

$$
h_{M,N,k}(t) = \sum_{n=0}^{M-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{kn}{N}}\delta(t-nT_s)
$$

▶ 理解 3：无限长离散信号加矩形窗

设有无限长离散信号 $s[n]$，其 DTFT 为 $S_{\mathrm{D}}(\omega)$。对其进行矩形窗截断，得到长度为 M 的有限长信号

$$
s_M[n] = s[n]R_M[n], \qquad R_M[n] = u[n]-u[n-M]
$$

则其 DTFT 为

$$
\begin{aligned}
S_M(\omega) &= S_{\mathrm{D}}(\omega)*\mathrm{DTFT}\{R_M[n]\} = S_{\mathrm{D}}(\omega)*\sum_{n=0}^{M-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \\
&= S_{\mathrm{D}}(\omega)*\frac{\sin\frac{M\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{(M-1)\omega}{2}}
\end{aligned}
$$

对其在 $0\sim 2\pi$ 范围内均匀采样 N 点（M 不一定等于 N），即得到 DFT

$$
\begin{aligned}
X[k] = S_M(\omega)\Big|_{\omega=2\pi\frac{k}{N}} &= \int_{-\pi}^{\pi}S_{\mathrm{D}}(\omega')\cdot\frac{\sin\left(\frac{M}{2}(\omega-\omega')\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\omega-\omega')\right)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{(M-1)}{2}(\omega-\omega')}\mathrm{d}\omega'\Bigg|_{\omega=2\pi\frac{k}{N}} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}S_{\mathrm{D}}(\omega')\cdot\frac{\sin\left(\frac{M}{2}(\omega'-\omega)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\omega'-\omega)\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{(M-1)}{2}(\omega'-\omega)}\mathrm{d}\omega'\Bigg|_{\omega=2\pi\frac{k}{N}} \\
&\overset{\omega'=\Omega T_s}{=\!=\!=} T_s\int_{-\pi}^{\pi}S_{\mathrm{D}}(\Omega T_s)\cdot\frac{\sin\left(\frac{M}{2}\left(\Omega T_s-2\pi\frac{k}{N}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\left(\Omega T_s-2\pi\frac{k}{N}\right)\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{(M-1)}{2}\left(\Omega T_s-2\pi\frac{k}{N}\right)}\mathrm{d}\Omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2\pi T_s S_{\mathrm{D}}(\Omega T_s))\cdot\psi_{M,N,k}(\Omega)\,\mathrm{d}\Omega
\end{aligned}
$$

用 DFT (FFT) 进行频谱分析

抗混叠滤波

实际连续信号一般不满足**带限 (bandlimited)** 条件，需先通过**抗混叠滤波器 (anti-aliasing filter)** 限制信号带宽，避免混叠失真。

设采样环节的采样率为 f_s，则抗混叠滤波器的截止频率须取为 $B_{\text{pass}} < \dfrac{f_s}{2}$。

采样

采样环节将连续时间信号 $s(t)$ 以采样间隔 $T_s = \dfrac{1}{f_s}$ 进行采样，得到离散时间信号 $x[n] = s(nT_s)$。

截取、加窗

实际参加频谱分析的信号长度有限，需对离散时间信号进行**截取**，得到有限长信号 $x_M[n] = x[n]R_M[n]$。为减小截断引起的**频谱泄漏 (spectral leakage)**，通常会对有限长信号进行**时域加窗**处理，对应地在频域即卷积以**频率采样函数**，从而减小旁瓣泄漏的影响。

截取 M 点即等效于**乘以矩形窗** $R_M[n]$，其对应的频率采样函数为

$$\tilde{R}_M(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \frac{\sin\left(\dfrac{M\omega}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\omega}{2}\right)} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{(M-1)\omega}{2}}$$

常用的窗函数如 **Hanning 窗**

$$w[n] = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi n}{M}\right), \quad 0 \le n \le M-1$$

和 **Hamming 窗**

$$w[n] = 0.54 - 0.46\cos\frac{2\pi n}{M}, \quad 0 \le n \le M-1$$

我们使用**旁瓣高度**和 **3 dB 主瓣展宽**来评价窗函数的频率特性：

- **旁瓣高度 (side lobe level)**：窗函数频谱中主瓣之外**最高旁瓣与主瓣峰值之比**，通常以 dB 为单位表示。旁瓣高度越低，频谱泄漏越小。
- **3 dB 主瓣展宽 (3 dB main lobe width)**：窗函数频谱中主瓣在峰值处下降 3 dB 所对应的频率宽度。主瓣展宽越小，频率分辨力损失越小。

窗函数	旁瓣高度 (dB)	3 dB 主瓣展宽 ($\times \frac{2\pi}{MT_s}$)
矩形窗	-13	0.89
三角窗	-25	1.28
Hanning 窗	-31	1.44
Hamming 窗	-41	1.30
Blackman 窗	-57	1.68

频谱显示

对截取并加窗后的有限长信号 $x_M[n]$ 进行 FFT，即得到其 DFT 频谱 $X_M[k]$。若想更加「精细」地显示频谱，可以通过**零填充 (zero padding)** 的方式增加 FFT 点数 N（$N > M$），使得频谱显示更加平滑。

M 点离散时间信号的 DTFT 频谱由 M 点 DFT **完全表示**，因此这一过程本质上并没有增加频谱信息，只是一种**插值**手段。注意到

$$\begin{aligned}
X_M(\omega) &= \sum_{n=0}^{M-1} x_M[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \sum_{n=0}^{M-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_M[k]\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{kn}{N}}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} X_M[k] \sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\left(\omega - 2\pi\frac{k}{N}\right)} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} X_M[k] \cdot \boxed{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{M-1}{2}\left(\omega - 2\pi\frac{k}{M}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\dfrac{M}{2}\left(\omega - \dfrac{2\pi k}{N}\right)\right)}{\sin\left(\dfrac{1}{2}\left(\omega - \dfrac{2\pi k}{N}\right)\right)}}
\end{aligned}$$

可见，零填充后的频谱 $X_M(\omega)$ 可视为对 DFT 频点 $X_M[k]$ 进行**加权插值**得到的连续频谱，其权函数与截断窗的频率采样函数相同。这一过程称为 **Shannon 插值**。

离散余弦变换 (DCT)

DCT 的定义

DCT 的引入

图像（信息）压缩中，我们希望用尽量少的数据表达尽量多的信息。考虑一个离散信号 $x[n]$，对其做**离散变换 $\mathcal{T}$** 得到变换域信号 $X[k] = \mathcal{T}\{x[n]\}$，若 $X[k]$ 的大部分能量集中在较小的系数索引集合 Λ 上，则可舍弃那些系数较小的部分，即进行**截断**

$$X_\Lambda[k] = \begin{cases} X[k], & k \in \Lambda, \\ 0, & k \notin \Lambda, \end{cases}$$

此时，利用 $X_\Lambda[k]$ 进行**逆变换**可得到近似信号

$$x_\Lambda[n] = \mathcal{T}^{-1}\{X_\Lambda[k]\}$$

我们希望通过选择合适的变换 $\mathcal{T}$，使得在较小的系数集合 Λ 下，近似信号 $x_\Lambda[n]$ 能较好地逼近原始信号 $x[n]$。为此，引入**编码误差**

$$|e_\Lambda|^2 = \sum_n |x[n] - x_\Lambda[n]|^2$$

若变换 $\mathcal{T}$ 是**正交变换**，则有**帕塞瓦尔定理 (Parseval's theorem)** 给出

$$\begin{aligned}
|e_\Lambda|^2 &= \sum_n |x[n] - x_\Lambda[n]|^2 \\
&= \left(\boldsymbol{T}^{-1}\vec{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\vec{\boldsymbol{X}}\right)^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{T}^{-1}\vec{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\vec{\boldsymbol{X}}\right) \\
&= \vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{H}}\vec{\boldsymbol{X}} - \vec{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Lambda}\vec{\boldsymbol{X}} = \sum_{k \notin \Lambda} |X[k]|^2
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda} = \operatorname{diag}\{\mathbb{1}_{n\in\Lambda}\}$，$\boldsymbol{T}$ 为变换矩阵，$\vec{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{T}\vec{\boldsymbol{x}}$。可见，此时**编码误差仅与被截断的系数有关**。

DFT 是序列**直接周期延拓**后的 DTFT，在两个周期的交界处会产生**不连续点**，引入了较高频率成分，导致频谱能量分布较为分散，不利于压缩。尝试将原 N 点序列**对称扩展**到 $2N$ 点，然后做 $2N$ 点 DFT，即

$$\begin{aligned}
x_{\text{ext}}[n] &= \begin{cases} x[n], & 0 \le n < N, \\ x[2N-1-n], & N \le n < 2N, \end{cases} \\
X_{\text{ext}}[k] &= \sum_{n=0}^{2N-1} x_{\text{ext}}[n]W_{2N}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_{2N}^{nk} + \sum_{n=N}^{2N-1} x[2N-1-n]W_{2N}^{nk} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_{2N}^{nk} + \sum_{m=0}^{N-1} x[m]W_{2N}^{(2N-1-m)k} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2N}k}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2N}(2n+1)k} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2N}(2n+1)k}\right) \\
&= 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2N}k} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\left(\frac{\pi}{2N}(2n+1)k\right)
\end{aligned}$$

其变化基函数为余弦函数 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2N}(2n+1)k\right)$。对其做一些系数调整以保证正交性，由此引入**离散余弦变换 (DCT)**。

> ***Def.*** 离散余弦变换 (DCT)
>
> 离散余弦变换 (Discrete Cosine Transform, DCT) 是一种将离散信号转换为余弦基函数系表示的线性变换。对于长度为 N 的序列 $x[n]$，其 DCT 定义为
>
> $$X_{\text{DCT}}[k] = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{N}} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} x[n], & k = 0 \\ \sqrt{\dfrac{2}{N}} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\left(\dfrac{\pi}{2N}(2n+1)k\right), & k = 1, \ldots, N-1 \end{cases}$$

DCT 的输入与输出均为实数，且具有良好的能量集中特性，适用于信号压缩。

DCT 的快速计算

DCT 可视为对称扩展后的 DFT，因此可以**利用 FFT 算法**进行快速计算。考虑长度为 N 的实序列 $x[n]$，求其 DCT 即是求

$$\chi[k]=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos\left(\frac{\pi}{2N}(2n+1)k\right),\quad k=0,1,\dots,N-1$$

然后进行适当的系数调整。

对称延拓方案

定义长度为 $2N$ 的序列

$$x_{\text{ext}}[n]=\begin{cases}x[n], & 0\le n<N,\\ x[2N-1-n], & N\le n<2N,\end{cases}$$

对其做 $2N$ 点 DFT，得到

$$X_{\text{ext}}[k]=2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2N}k}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos\left(\frac{\pi}{2N}(2n+1)k\right)$$

取**前 n 个系数**的模长（或乘以相位因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2N}k}$），即可得到

$$\chi[k]=\frac{1}{2\sqrt{N}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2N}k}X_{\text{ext}}[k],\quad k=0,1,\dots,N-1$$

FFT 求 $X_{\text{ext}}[k]$ 的计算复杂度为 $O(N\log N)$，因此 DCT 的计算复杂度也为 $O(N\log N)$。

直接做 $2N$ 点 DFT

另一种方法是直接对 $x[n]$ 做 $2N$ 点 DFT，即

$$X_{\text{DFT-}2N}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_{2N}^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{2N}nk}$$

然后取

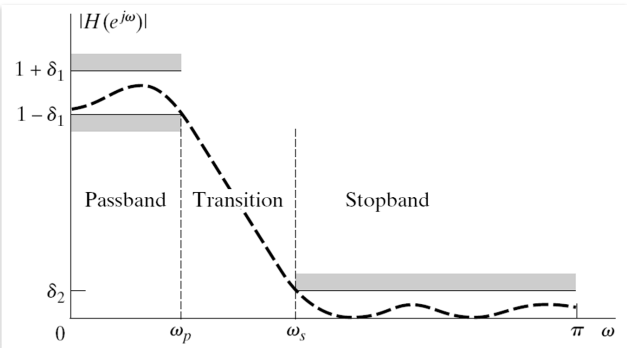
$$\begin{aligned}\Re\mathfrak{e}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2N}k}X_{\text{DFT-}2N}[k]\right\}&=\Re\mathfrak{e}\left\{\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2N}(2n+1)k}\right\}\\&=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos\left(\frac{\pi}{2N}(2n+1)k\right)\end{aligned}$$

即知

$$\chi[k]=\frac{1}{\sqrt{N}}\Re\mathfrak{e}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2N}k}X_{\text{DFT-}2N}[k]\right\},\quad k=0,1,\dots,N-1$$

同样，FFT 求 $X_{\text{DFT-}2N}[k]$ 的计算复杂度为 $O(N\log N)$，因此 DCT 的计算复杂度也为 $O(N\log N)$。

滤波与系统



典型数字低通的主要参数有：

- **通带截止频率 ω_{p}**、**阻带截止频率 ω_{s}**，定义了各频带边界为
  - 通带：$0\le|\omega|<\omega_{\mathrm{p}}$
  - 过渡带：$\omega_{\mathrm{p}}\le|\omega|<\omega_{\mathrm{s}}$
  - 阻带：$\omega_{\mathrm{s}}\le|\omega|<\pi$
- **通带峰值波纹 δ_1**，定义为通带内增益的最大偏差，即
  $$1-\delta_1\le|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|\le1+\delta_1,\qquad\forall\omega\in[0,\omega_{\mathrm{p}})$$
  通常使用 dB 值表示，即**通带波纹**为 $\alpha_1=-20\log_{10}(1-\delta_1)$ dB。
- **阻带峰值波纹 δ_2**，定义为阻带内增益的最大值，即
  $$0<|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|\le\delta_2,\qquad\forall\omega\in[\omega_{\mathrm{s}},\pi)$$
  通常使用 dB 值表示，即**阻带波纹**为 $\alpha_2=-20\log_{10}\delta_2$ dB。

z 变换

z 变换的定义

Def. 双边 z 变换

设离散时间信号 $x[n]$，其双边 z 变换定义为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

记作 $X(z)=\mathcal{Z}\{x[n]\}$，其中 z 为复变量，通常表示为 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$，$r$ 为模长，ω 为相位角。

z 变换的收敛域

由于 z 变换式为无穷 Laurent 级数，其**敛散性**取决于 z 的取值范围。对于不同的信号 $x[n]$，其 z 变换的**收敛域 (region of convergence, ROC)** 也不同。

序列类型		z 变换式 $\mathcal{Z}\{x[n]\}$	收敛域 (ROC)
有限长序列	$n_1<0,\ n_2>0$	$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2}x[n]z^{-n}$	$0<\lvert z\rvert<\infty$
	$n_1<0,\ n_2\le0$		$0\le\lvert z\rvert<\infty$
	$n_1\ge0,\ n_2>0$		$0<\lvert z\rvert\le\infty$
右边序列		$X(z)=\sum_{n=n_0}^{\infty}x[n]z^{-n}$	$\lvert z\rvert>r$
左边序列		$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_0}x[n]z^{-n}$	$\lvert z\rvert<r$
双边序列		$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$	$r_1<\lvert z\rvert<r_2$

E.G. z 变换的收敛域举例

考虑双边序列 $x[n]=a^{|n|}$，其 z 变换为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{|n|}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^nz^{-n}+\sum_{n=1}^{\infty}a^nz^n=\frac{1}{1-az^{-1}}+\frac{az}{1-az}$$

两部分分别是 az^{-1} 和 az 的几何级数，其收敛分别要求 $|z|>|a|$ 和 $|z|<\frac{1}{|a|}$，因此整体的收敛域为

$$|a|<|z|<\frac{1}{|a|}$$

当 $|a|\ge1$ 时，收敛域不存在。

因果系统的 z 变换收敛域为 $|z|>r$，其中 r 为系统**最大模值极点的模值**；**稳定**系统的 z 变换收敛域包含单位圆 $|z|=1$。因此，**因果且稳定**系统要求其**所有极点均位于 z 平面单位圆内**。

逆 z 变换

由 Cauchy 积分定理，z 变换具有唯一的逆变换，其表达式为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C z^{n-1}X(z)\,\mathrm{d}z&=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C z^{n-1}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]z^{-m}\right)\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\oint_C z^{n-m-1}\,\mathrm{d}z\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\delta[n-m]=x[n]\end{aligned}$$

Def. 逆 z 变换

设信号 $x[n]$ 的 z 变换为 $X(z)$，则其逆 z 变换定义为

$$x[n]=\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C z^{n-1}X(z)\,\mathrm{d}z$$

其中积分路径 C 为包含收敛域的闭合曲线。

▶ 留数法求逆z变换

逆z变换的积分式可通过**留数定理**计算。设$X(z)$在收敛域**内边界环内**有有限个极点$\{z_k\}$，在**外边界环外**有有限个极点$\{z_m\}$，则

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_C z^{n-1} X_{\mathrm{R}}(z)\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_C z^{n-1} X_{\mathrm{L}}(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \sum_k \mathrm{Res}\{z^{n-1}X_{\mathrm{R}}(z), z_k\} u[n] - \sum_m \mathrm{Res}\{z^{n-1}X_{\mathrm{L}}(z), z_m\} u[-n-1] \end{aligned}$$

其中，**留数**定义为

$$\mathrm{Res}\{f(z), z_0\} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}((z-z_0)^m f(z))$$

其中m为极点z_0的阶数。

▶ 部分分式展开法求逆z变换

对于有理式z变换$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}$，可以通过**部分分式展开**将其拆分为简单项的和，然后对每一项分别求逆z变换，再将结果相加。

设$X(z)$可分解为

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{\sum\limits_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1+\sum\limits_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \\ &= \sum_{m=0}^{M-N} B_m z^{-m} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1-p_k z^{-1}} + \sum_{l=1}^{N_2}\sum_{s=1}^{r_l} \frac{C_{l,s}}{(1-p_l z^{-1})^s} \end{aligned}$$

其中，p_k和p_l分别为**单极点**和**重极点**的位置，N_1和N_2分别为单极点和重极点的个数，r_l为重极点p_l的阶数。对于这一分式展开式，各项的逆z变换分别为

$$\begin{aligned} z^{-m} &\xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} \delta[n-m] \\ \frac{1}{1-p_k z^{-1}} &\xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} p_k^n u[n] \\ \frac{1}{(1-p_l z^{-1})^s} &\xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} \frac{(n+s-1)!}{(s-1)!\,n!} p_l^n u[n] \end{aligned}$$

离散时间系统的z变换性质

■ 离散时间系统的z变换表示

设离散时间系统的输入输出关系为

$$y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r]$$

则对其做z变换，得到**系统函数**

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum\limits_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1+\sum\limits_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

其中，$X(z)=\mathcal{Z}\{x[n]\}$，$Y(z)=\mathcal{Z}\{y[n]\}$，系统**冲激响应**即为$h[n]=\mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$。同时由定义知，系统的**频率响应**为

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = H(z)\big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}$$

频率响应特别是幅频响应对应于系统的外在滤波特性，而系统函数$H(z)$则反映了系统的内在结构实现。若对给定的幅频特性$A(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\geq 0$，能够找到**因果稳定**的系统函数$H(z)$使得$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|=A(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，则称该幅频特性是**可实现**的，该系统函数即为**幅频特性$A(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$的实现**。

> *Note* 系统的可实现性
>
> 幅频特性$A(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$可实现的一个充分必要条件是Paley-Wiener条件：
>
> $$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\ln A(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right| \mathrm{d}\omega < \infty$$
>
> 进一步地，若所实现的系统是最小相位系统，则该实现是唯一的。
>
> 显然，若幅频特性$A(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$在某一频段内为零，则该幅频特性不可实现。一个推论是，在一个频率区间内恒为常数的幅频特性也是不可实现的。

■ 逆系统设计

通过设计逆系统，可以实现对原系统的补偿或校正。设离散时间系统的系统函数为$H(z)$，则其**逆系统**的系统函数自然为$H_{\mathrm{I}}(z)=\frac{1}{H(z)}$，由部分分式法即可求出系统的冲激响应。

广义上，逆系统也可以**容许延迟和缩放**，即

$$H_{\mathrm{I}}(z)H(z) = Cz^{-D}$$

相应地，

$$h_{\mathrm{I}}[n] * h[n] = C\delta[n-D]$$

可以使用**最小二乘**的数值方法设计逆系统，以近似满足上述关系，最小化均方误差

$$\sum_n |h_{\mathrm{I}}[n] * h[n] * x[n] - x[n-D]|^2$$

原线性系统可表示为

$$\vec{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}_h \vec{\boldsymbol{x}}$$

其中，$\boldsymbol{A}_h$为**卷积矩阵**

$$\boldsymbol{A}_h = \begin{pmatrix} h[0] & & & \\ h[1] & h[0] & & \\ h[2] & h[1] & h[0] & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

则求解逆系统等价于最小二乘求解

$$\boldsymbol{A}_h \vec{\boldsymbol{h}}_{\mathrm{I}} \cong \vec{\boldsymbol{e}}_D$$

其中$\vec{\boldsymbol{e}}_D$为第D个位置为1，其余位置为0的单位向量。根据最小二乘解的正规方程，有

$$\hat{\vec{\boldsymbol{h}}}_{\mathrm{I}} = (\boldsymbol{A}_h^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_h)^{-1}\boldsymbol{A}_h^{\mathrm{H}}\vec{\boldsymbol{e}}_D$$

■ 全通系统和最小相位系统

▶ 全通系统

全通系统是指**幅频特性恒为常数**的系统，其系统函数满足

$$|H_{\mathrm{ap}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})| = C, \qquad -\pi \leq \omega < \pi$$

全通系统的系统函数可表示为

$$H_{\mathrm{ap}}(z) = C\prod_{k=1}^{N} \frac{-1}{p_k^*}\frac{z^{-1}-p_k^*}{1-p_k z^{-1}} = G\prod_{k=1}^{N} \frac{z^{-1}-p_k^*}{1-p_k z^{-1}}$$

即系统的零点和极点以$\begin{cases} z_{\mathrm{p}} = p_k, \\ z_{\mathrm{o}} = (p_k^*)^{-1} \end{cases}$的方式成对出现，**关于单位圆对称分布**。

我们取一对零极点$\left(\frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}, r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\right)$来分析，该全通系统为

$$H(z) = G\frac{z^{-1}-r\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}{1-r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}z^{-1}}$$

其**相频特性**为

$$\arg H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \arg G + \tan^{-1}\frac{(1-r^2)\sin(\omega-\varphi)}{(1-r^2)\cos(\omega-\varphi)+r(1-2r\cos(\omega-\varphi)+r^2)}$$

▶ 最小相位系统

最小相位系统是指**所有零点均位于单位圆内**的系统；若系统稳定、因果，则其**所有零极点均位于单位圆内**。

最小相位系统具有**最小群时延**的特性，即在所有具有相同幅频特性的因果稳定系统中，最小相位系统的群时延 $\tau_g(\omega) = -\dfrac{\mathrm{d}\arg H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})}{\mathrm{d}\omega}$ 最小；因此，在幅频特性相同的因果稳定系统中，最小相位系统具有**最小能量延迟**特性，能够最快响应输入信号的能量变化。

> *Thm.* 系统的最小相位分解
>
> 任意系统均可分解为**最小相位部分**和**全通部分**的乘积
>
> $$H(z) = H_{\min}(z)H_{\mathrm{ap}}(z)$$

最小相位分解的实现过程为：对系统的每个**单位圆外零点** $z_o = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$（$r > 1$），引入一个在该处有极点、在对应的单位圆内位置 $z_o' = (z_o^*)^{-1} = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ 有零点的全通系统，得到

$$z^{-1} - z_o^{-1} = (1 - z_o' z^{-1}) \cdot \frac{z^{-1} - z_o^{-1}}{1 - z_o' z^{-1}}$$

典型的离散时间系统

■ 数字正弦振荡器

数字正弦振荡器是一种用于生成离散时间正弦波信号的系统。由于保持振荡，其系统函数具有**单位圆上**的**共轭复数极点对**，即极点 $p_{1,2} = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega_0}$，其系统函数为

$$H(z) = \frac{b_0}{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}z^{-1})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0}z^{-1})} = \frac{b_0}{1-2\cos\omega_0\cdot z^{-1}+z^{-2}}$$

取 $b_0 = A\sin\omega_0$，则系统的冲激响应为

$$h[n] = A\sin(\omega_0(n+1))u[n]$$

$n = 0$ 时刻输入一个单位冲激，系统将输出一个**频率为 ω_0**，**幅度为 A 的正弦波**。

■ 数字陷波器

数字陷波器是一种用于抑制特定频率成分的系统。其系统函数具有**单位圆上的共轭复数零点对**，即零点 $z_{1,2} = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega_0}$，其系统函数为

$$H(z) = (1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}z^{-1})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0}z^{-1}) = 1-2\cos\omega_0\cdot z^{-1}+z^{-2}$$

这样得到的系统在频率 ω_0 处具有**零响应**，但 ω_0 附近的频率成分也会受到一定抑制。为了提高陷波器的选择性，可以在附近引入**极点对** $p_{1,2} = r\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega_0}$，使得系统函数变为

$$H(z) = \frac{1-2\cos\omega_0\cdot z^{-1}+z^{-2}}{1-2r\cos\omega_0\cdot z^{-1}+r^2z^{-2}},\qquad 0 < r < 1$$

这样可以在 ω_0 附近形成**峰值响应**，从而增强陷波效果。

■ 梳状滤波器

梳状滤波器是一种具有周期性频率响应的系统，其系统函数为

IIR 滤波器

IIR 滤波器的实现结构

IIR (Infinite Impulse Response) 滤波器是指具有**无限长冲激响应**的数字滤波器，其差分方程形如

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r]$$

其系统函数可表示为**有理分式**

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum\limits_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1+\sum\limits_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

其显著的特征是存在分母上的**反馈**回路，存在极点。

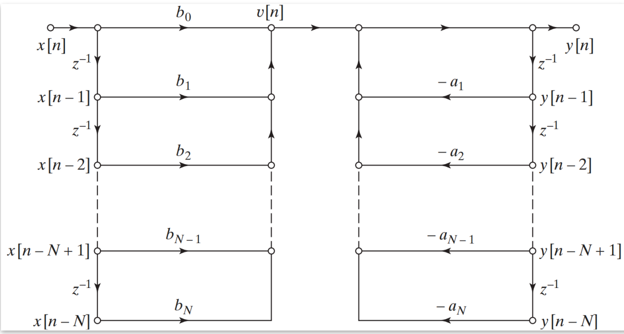
■ IIR 的直接实现

▶ IIR 的直接 I 型实现

一般地，IIR 滤波器可以拆分成两个**级联**子系统

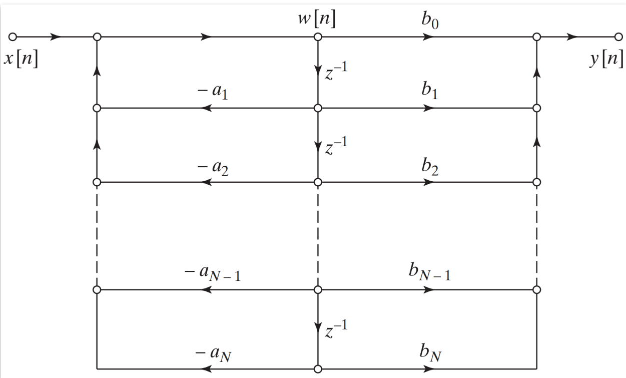
$$\begin{cases} v[n] = \sum\limits_{r=0}^{M} b_r x[n-r], & \text{（滑动平均）} \\ y[n] = -\sum\limits_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + v[n] & \text{（自回归）} \end{cases}$$

直接依次实现上述两个子系统，得到**直接 I 型实现结构**。



▶ IIR 的直接 II 型实现

由于可以交换顺序，可以把延迟单元合并，得到**直接 II 型实现结构**。



■ IIR 的级联实现

将系统函数 $H(z)$ 分解为若干低阶子系统的乘积

$$H(z) = \frac{\prod\limits_{r=0}^{N}(1-z_r z^{-1})}{\prod\limits_{k=0}^{M}(1-p_k z^{-1})} = \prod_{i=1}^{K} H_i(z)$$

对实系数有理分式，其中每个子系统 $H_i(z)$ 为**一阶系统** $\dfrac{1-g_r z^{-1}}{1-c_k z^{-1}}$ 或**二阶系统** $\dfrac{(1-h_r z^{-1})(1-h_r^* z^{-1})}{(1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z^{-1})}$，于是 IIR 滤波器可以实现为这样多个**一阶和二阶子滤波器的级联**。子滤波器的实现可以采用直接 II 型结构。

■ IIR 的并联实现

将系统函数 $H(z)$ 分解为若干低阶子系统的和

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\sum\limits_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1+\sum\limits_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \\ &= \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1}\frac{A_k}{1-c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2}\frac{B_k(1-e_k z^{-1})}{(1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z^{-1})} \end{aligned}$$

即形成若干**一阶和二阶子滤波器的并联**。子滤波器的实现可以采用直接II型结构。

IIR 滤波器的间接设计方法

IIR 滤波器参数量大、较难控制，因此一般采用**间接设计方法**，先设计模拟滤波器，再通过**变换**转换为数字滤波器。

间接法的设计流程为:

- 根据数字滤波器的需求指标，$z=g(s)$ **变换**得到模拟滤波器的需求指标；
- 设计满足模拟滤波器需求指标的模拟滤波器 $H_a(s)$；
- 通过 $s=f(z)$ **变换**将模拟滤波器转换为数字滤波器 $H(z)=H_a(f(z))$。

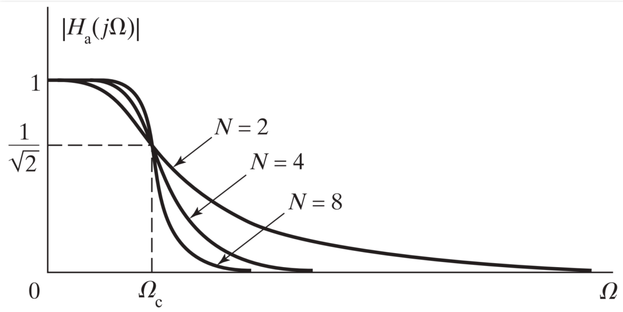
模拟滤波器的设计

Butterworth 滤波器

Butterworth 滤波器的幅频特性为

$$A(\mathrm{j}\Omega)=|H_a(\mathrm{j}\Omega)|^2=\frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

其中，-3 dB 截止频率 Ω_c 和阶数 N 是**待定系数**。阶数 N 越大，则滤波器的过渡带越陡峭，但 -3 dB 的截止频率不变。



给定设计指标 $(\Omega_p,\Omega_s,\delta_1,\delta_2)$ 后，代入得到

$$\frac{1}{1+\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}}=(1-\delta_1)^2,\qquad \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}}=\delta_2^2$$

解得

$$N=\left\lceil\frac{\log\frac{1/(1-\delta_1)^2-1}{1/\delta_2^2-1}}{2\log\frac{\Omega_s}{\Omega_p}}\right\rceil,\qquad \Omega_c=\Omega_p\left(\frac{1}{(1-\delta_1)^2}-1\right)^{-\frac{1}{2N}}$$

Butterworth 滤波器的极点分布在以原点为中心、半径为 Ω_c 的圆周上。$A(s)$ 的极点位置为

$$s_k=\Omega_c e^{\mathrm{j}\pi\frac{2k+N-1}{2N}},\qquad k=0,1,\cdots,2N-1$$

选出左半平面的极点 $s_1,s_2,\cdots,s_N$，则 **Butterworth 滤波器的系统函数**为

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^N}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_N)}$$

Chebyshev 滤波器

Chebyshev 滤波器分为 **I 型**和 **II 型**两种，分别对应**通带波纹**和**阻带波纹**。

Chebyshev I 型滤波器的幅频特性为

$$A(\mathrm{j}\Omega)=|H_a(\mathrm{j}\Omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}$$

其中，$T_N(x)=\begin{cases}\cos(N\arccos x), & |x|\le 1,\\ \cosh(N\operatorname{arcosh}x), & |x|>1\end{cases}$ 为 **Chebyshev 多项式**；ε 为**波纹因子**，Ω_c 为等波纹通带的**截止频率**，N 为滤波器阶数，均为**待定系数**。

给定设计指标 $(\Omega_p,\Omega_s,\delta_1,\delta_2)$ 时，可认为 $\Omega_c=\Omega_p$；波纹因子 ε 与通带最大衰减 δ_1 的关系为

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}=1-\delta_1,\qquad \text{i.e.}\qquad \varepsilon=\sqrt{\frac{1}{(1-\delta_1)^2}-1}$$

Chebyshev I 型滤波器**在通带内等波纹**，为了满足阻带衰减要求 δ_2，需要满足

$$\frac{1}{1+\varepsilon^2T_N^2\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)}=\delta_2^2$$

解得

$$N=\left\lceil\frac{\operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{\delta_2^2}-1}\right)}{\operatorname{arcosh}\frac{\Omega_s}{\Omega_p}}\right\rceil$$

Chebyshev I 型滤波器的极点位置为

$$s_k=-a\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right)+\mathrm{j}b\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right),\qquad k=1,2,\cdots,N$$

其中，$a=\Omega_c\sinh\left(\frac{1}{N}\operatorname{arcsinh}\frac{1}{\varepsilon}\right)$，$b=\Omega_c\cosh\left(\frac{1}{N}\operatorname{arcsinh}\frac{1}{\varepsilon}\right)$。于是，可得到**Chebyshev I 型滤波器的系统函数**为

$$H_a(s)=\frac{\frac{\Omega_c^N}{\varepsilon\times 2^{N-1}}}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_N)}$$

Chebyshev II 型滤波器具有等波纹阻带，其幅频特性为

$$A(\mathrm{j}\Omega)=|H_a(\mathrm{j}\Omega)|^2=1-\frac{1}{1+\varepsilon^2T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{T_N^2\left(\frac{\Omega_c}{\Omega}\right)}}$$

类似可给出其设计。

s平面到z平面的变换方法

冲激响应不变法

冲激响应不变法基于**采样保持**的思想，将模拟滤波器的冲激响应 $h_a(t)$ 以采样周期 T 采样，得到数字滤波器的冲激响应

$$h[n]=Th_a(nT)$$

模拟滤波器的系统函数可表示为

$$H_a(s)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s-p_k},\qquad A_k=(s-s_k)H_a(s)\big|_{s=p_k}$$

其冲激响应为

$$h_a(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H_a(s)\}=\sum_{k=1}^{N}A_ke^{p_kt}u(t)$$

则数字滤波器的冲激响应为

$$h[n]=T\sum_{k=1}^{N}A_ke^{p_knT}u[n]$$

得到其系统函数为

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h[n]z^{-n}=T\sum_{k=1}^{N}A_k\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{p_kT}z^{-1}\right)^n=T\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-e^{p_kT}z^{-1}}$$

> *Thm.* 冲激响应不变法的 s 到 z 极点对应关系
>
> 基于模拟滤波器的冲激响应以采样周期 T 采样得到数字滤波器的冲激响应，则模拟滤波器极点 p_k 与数字滤波器极点 z_k 的对应关系为
>
> $$z_k = \mathrm{e}^{p_k T}$$
>
> 即系统函数项的对应关系为
>
> $$\frac{1}{s-p_k} \longleftrightarrow \frac{T}{1-\mathrm{e}^{p_k T} z^{-1}}$$

▶ 双线性变换法

冲激响应不变法会引入**混叠失真**，因此更常用的是**双线性变换法**。其基本思想是通过压缩 $(-\infty, +\infty)$ 的 s 平面 $\mathrm{j}\Omega$ 轴到 $[-\pi, \pi]$ 的 z 平面的角度区间，从而避免混叠失真。

具体地，令

$$\mathrm{j}\Omega = k \cdot \mathrm{j}\tan\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) = k\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_1 T/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega_1 T/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_1 T/2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega_1 T/2}}$$

为保持 $\Omega_1 \to 0$ 时 $\Omega \to 0$，须取 $k = \frac{2}{T}$。进而，由虚轴扩展到整个 s 平面，得到

$$s = \frac{2}{T}\frac{\mathrm{e}^{s_1 T/2} - \mathrm{e}^{-s_1 T/2}}{\mathrm{e}^{s_1 T/2} + \mathrm{e}^{-s_1 T/2}} = \frac{2}{T}\frac{1-\mathrm{e}^{-s_1 T}}{1+\mathrm{e}^{-s_1 T}}$$

令 $z = \mathrm{e}^{s_1 T}$，即得到**双线性变换**关系

$$\boxed{s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

可由此将模拟滤波器的系统函数 $H_{\mathrm{a}}(s)$ 转换为数字滤波器的系统函数 $H(z)$。

在双线性变换法下，模拟频率 Ω 与数字频率 ω 的关系为

$$\Omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

数字滤波器的指标也需要相应调整。

■ 数字频率变换

数字频率变换法通过对数字滤波器的系统函数进行变量替换，实现不同频率特性的滤波器设计。设有数字滤波器 $H_{\mathrm{L}}(z)$，通过**变量替换** $z = G(Z)$ 得到新的数字滤波器

$$H_{\mathrm{d}}(Z) = H_{\mathrm{L}}(G(Z))$$

变量替换函数应满足：

- 保持单位圆映射，即当 $Z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$ 时，$G(Z)$ 也应在单位圆上；
- 单位圆内映射到单位圆内，以保证稳定性，即当 $|Z| < 1$ 时，$|G(Z)| < 1$。

全通系统的系统函数即满足上述条件，因而通常取 1 阶全通系统作为变量替换函数

$$G(Z) = \frac{Z-\alpha}{1-\alpha Z}$$

▶ 低通到低通的频率变换

设有低通滤波器 $H_{\mathrm{L}}(z)$，变量替换要求

- 保持**通带中心频率不变**：$G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0}) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}0}$；
- **调整通带截止频率**位置：$z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_{\mathrm{c}}} \longrightarrow Z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_{\mathrm{c}}}$。

代入 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_{\mathrm{c}}} = G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_{\mathrm{c}}})$，解得

$$\alpha = \frac{\sin\dfrac{\theta_{\mathrm{c}} - \omega_{\mathrm{c}}}{2}}{\sin\dfrac{\theta_{\mathrm{c}} + \omega_{\mathrm{c}}}{2}}$$

▶ 低通到高通的频率变换

设有低通滤波器 $H_{\mathrm{L}}(z)$，变量替换要求

- 移动**通带中心频率到** π：$G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0}) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}$；
- **调整通带截止频率**位置：$z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_{\mathrm{c}}} \longrightarrow Z = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_{\mathrm{c}}}$。

代入 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_{\mathrm{c}}} = G(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_{\mathrm{c}}})$，解得

$$\alpha = -\frac{\cos\dfrac{\theta_{\mathrm{c}} + \omega_{\mathrm{c}}}{2}}{\cos\dfrac{\theta_{\mathrm{c}} - \omega_{\mathrm{c}}}{2}}$$

▶ 低通到带通的频率变换

设有低通滤波器 $H_{\mathrm{L}}(z)$，变量替换要求

- 移动**通带中心频率到** ω_0：$G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0}) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}$；
- **调整通带宽度**位置：$z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_{\mathrm{c}}} \longrightarrow Z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1}$ 和 $z = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_{\mathrm{c}}} \longrightarrow Z = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_2}$。

两处位置调整，使用 2 阶全通系统作为变量替换函数，代入解得

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{-2\alpha k}{k+1}, \\ \alpha_2 = \dfrac{k-1}{k+1}, \end{cases} \quad \text{其中} \quad k = \frac{\tan\dfrac{\theta_{\mathrm{c}}}{2}}{\tan\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2}}, \quad \alpha = \frac{\cos\dfrac{\omega_2 + \omega_1}{2}}{\cos\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2}}$$

FIR 滤波器

FIR 滤波器的实现结构

FIR (Finite Impulse Response) 滤波器是指具有**有限长冲激响应**的数字滤波器，冲激响应 $h(t)$ 时宽有限，意味着系统函数 $H(z)$ 是**有限长多项式**

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] \quad \Longrightarrow \quad H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

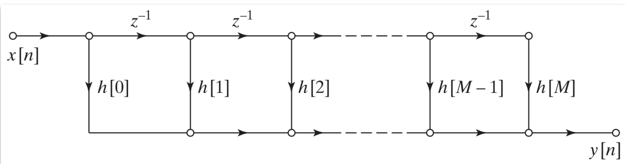
故 FIR 滤波器的差分方程为

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

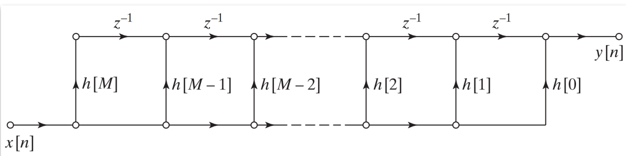
FIR 滤波器**没有反馈**回路，极点在 $z = 0$ 处，天然稳定。

■ FIR 的直接实现

FIR 滤波器可以直接根据差分方程实现：



也可以先加权、后延时，即形成**转置结构**：



■ FIR 的级联实现

对 FIR 滤波器，其系统函数 $H(z)$ 可分解为若干低阶多项式的乘积

$$H(z) = A\prod_{k=1}^{M_1}(1 - g_k z^{-1})\prod_{l=1}^{M_2}(1 - h_k z^{-1})(1 - h_k^* z^{-1})$$

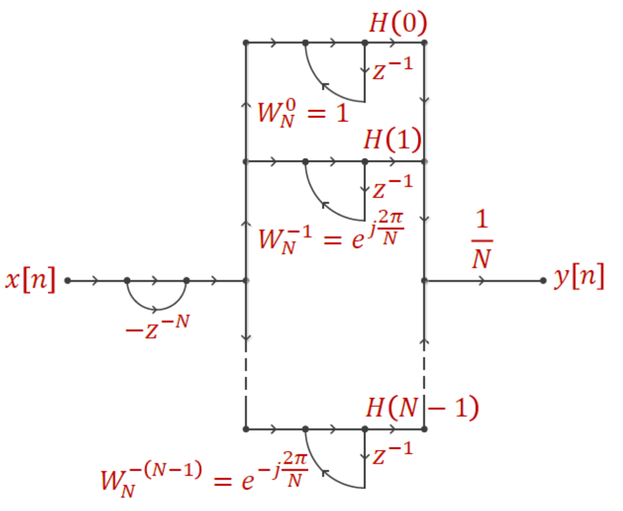
其中，$g_k \in \mathbb{R}$，$h_k \in \mathbb{C}$。则 FIR 滤波器可以实现为多个**一阶和二阶子滤波器的级联**。

■ FIR 的频率取样实现

我们希望直接根据频率响应设计 FIR 滤波器。考虑到

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} \cdot \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H[k]W_N^{-kn} \\
&= \frac{1}{N}(1-z^{-N})\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H[k]}{1-W_N^{-k}z^{-1}}
\end{aligned}
$$

其中，$W_N^k = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}$，$H[k] = H(z)\big|_{z=W_N^k}$。因此，可以通过 N 个**频率取样**回路**并联**的方式设计 FIR 滤波器。



这一方案为 FIR 滤波器**引入了极点**且极点在单位圆上，为稳定性考虑，可以稍微缩小极点模值。借助 DFT 的频移性质，亦可使用 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\frac{2\pi k}{N}+\alpha)})$ 的值进行频率取样。

线性相位 FIR 滤波器

线性相位滤波器的实现

对**线性相位** LTI 系统，应有

$$
\begin{aligned}
H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) &= \hat{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\alpha\omega-\beta)} \\
&= \hat{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\cos(\alpha\omega-\beta) - \mathrm{j}\hat{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\sin(\alpha\omega-\beta)
\end{aligned}
$$

其中 $\hat{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 为实函数；由频率响应定义，

$$
H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\cos(\omega n) - \mathrm{j}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\sin(\omega n)
$$

两式**相位相同**，应有

$$
-\frac{\sin(\alpha\omega-\beta)}{\cos(\alpha\omega-\beta)} = -\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\sin(\omega n)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\cos(\omega n)}
$$

即得

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\sin(\omega(n-\alpha)+\beta) = 0
$$

为使上式对任意 ω 成立，

1. 若 $\beta = 0$ 或 $\beta = \pi$，则 $h[n]$ 应关于 $n = \alpha$ 偶对称；
2. 若 $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$，则 $h[n]$ 应关于 $n = \alpha$ 奇对称。

因此，因果的线性相位滤波器**一定是 FIR 滤波器**，且其冲激响应 $h[n]$ 满足以下四种情况之一：

阶数 $M = 2\alpha$	对称性 β	
	偶对称 $\beta = 0, \pi$ $h[n] = h[M-n]$	**奇对称** $\beta = \pm\pi/2$ $h[n] = -h[M-n]$
偶数	第 I 类线性相位 FIR 滤波器 低通、高通、带通	第 III 类线性相位 FIR 滤波器 带通
奇数	第 II 类线性相位 FIR 滤波器 低通、带通	第 IV 类线性相位 FIR 滤波器 高通、带通

由于 $h[n] = \pm h[M-n]$ 的对称性，亦有

$$
H(z) = \pm z^{-M}H(z^{-1})
$$

FIR 滤波器没有极点，其**零点分布**受到这一对称性约束，呈现为

- 若 $z_0 = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ 是零点，则其关于单位圆的倒数 $z_0' = \frac{1}{z_0} = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ 也是零点，二者的共轭复数亦是零点；特别地，
  - 若实数 z_1 是零点，则其关于单位圆的倒数 $z_1' = \frac{1}{z_1}$ 也是零点；
  - 若单位圆上的零点 $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ 是零点，则其共轭复数 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$ 也是零点。
- 单位圆与实轴的交点 ±1 至少有一个是零点。

第 I 类线性相位 FIR 滤波器

第 I 类线性相位 FIR 滤波器满足 **M 为偶数**且 $h[n] = h[M-n]$，频率响应为

$$
\begin{aligned}
H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) &= \sum_{n=0}^{M} h[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} + h\left[\frac{M}{2}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{M}{2}} + \sum_{n=\frac{M}{2}+1}^{M} h[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{M}{2}}\left(h\left[\frac{M}{2}\right] + 2\sum_{n=0}^{M/2-1} h[n]\cos\left(\omega\left(n-\frac{M}{2}\right)\right)\right) \\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{M}{2}}\left(h\left[\frac{M}{2}\right] + 2\sum_{m=1}^{M/2} h\left[\frac{M}{2}-m\right]\cos(\omega m)\right) \\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{M}{2}}\sum_{m=0}^{M/2} a_m\cos(\omega m) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{M}{2}}\hat{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})
\end{aligned}
$$

其中，$a_0 = h\left[\frac{M}{2}\right]$，$a_m = 2h\left[\frac{M}{2}-m\right]$，$m = 1, 2, \cdots, \frac{M}{2}$。由于 $\hat{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 偶对称且关于 $\omega = \pi$ 也偶对称，**第 I 类线性相位 FIR 滤波器可以实现低通、高通、带通滤波器**。

第 II 类线性相位 FIR 滤波器

第 II 类线性相位 FIR 滤波器满足 **M 为奇数**且 $h[n] = h[M-n]$，频率响应为

$$
\begin{aligned}
H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) &= \sum_{n=0}^{M} h[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} + \sum_{n=\frac{M+1}{2}}^{M} h[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{M}{2}}\sum_{m=1}^{(M+1)/2} b_m\cos\left(\omega\left(m+\frac{1}{2}\right)\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{M}{2}}\hat{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})
\end{aligned}
$$

其中，$b_m = 2h\left[\frac{M+1}{2}-m\right]$，$m = 1, 2, \cdots, \frac{M+1}{2}$。由于 $\hat{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 偶对称而关于 $\omega = \pi$ 奇对称，**第 II 类线性相位 FIR 滤波器可以实现低通、带通滤波器**。

第 III 类线性相位 FIR 滤波器

第 III 类线性相位 FIR 滤波器满足 **M 为偶数**且 $h[n] = -h[M-n]$，频率响应为

$$
\begin{aligned}
H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) &= \sum_{n=0}^{M} h[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} + h\left[\frac{M}{2}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{M}{2}} + \sum_{n=\frac{M}{2}+1}^{M} h[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{M}{2}\omega\right)}\sum_{m=1}^{M/2} c_m\sin(\omega m) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{M}{2}\omega\right)}\hat{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})
\end{aligned}
$$

其中，$c[0] = h\left[\frac{M}{2}\right]$，$c_m = 2h\left[\frac{M}{2}-m\right]$，$m = 1, 2, \cdots, \frac{M}{2}$。由于 $\hat{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 奇对称且关于 $\omega = \pi$ 也奇对称，**第 III 类线性相位 FIR 滤波器只能实现带通滤波器**。

第 IV 类线性相位 FIR 滤波器

第 IV 类线性相位 FIR 滤波器满足 **M 为奇数**且 $h[n] = -h[M-n]$，频率响应为

$$
\begin{aligned}
H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) &= \sum_{n=0}^{M} h[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} + \sum_{n=\frac{M+1}{2}}^{M} h[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{M}{2}\omega\right)}\sum_{m=1}^{(M+1)/2} d_m\sin\left(\omega\left(m-\frac{1}{2}\right)\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{M}{2}}\hat{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})
\end{aligned}
$$

其中，$d_m = 2b\left[\frac{M+1}{2} - m\right]$，$m = 1, 2, \cdots, \frac{M+1}{2}$。由于 $\hat{H}(e^{j\omega})$ 奇对称而关于 $\omega = \pi$ 偶对称，**第 IV 类线性相位 FIR 滤波器可以实现高通、带通滤波器**。

窗函数法设计线性相位 FIR 滤波器

设我们期望实现频响为 $H_d(e^{j\omega})$ 的滤波器，为此设计 $h[n]$，使其 DTFT $H(e^{j\omega})$ 尽可能接近 $H_d(e^{j\omega})$。在**均方误差**意义下，即希望

$$h[n] = \underset{h[n]}{\arg\min} \|H(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})\|^2 = \underset{h[n]}{\arg\min} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})|^2 \, d\omega$$

设 $h_d[n] = \text{IDTFT}\{H_d(e^{j\omega})\}$，由 Parseval 定理，有

$$\begin{aligned}\|H(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})\|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n] - h_d[n]|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{M} |h[n] - h_d[n]|^2 + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} |h_d[n]|^2 + \sum_{n=M+1}^{\infty} |h_d[n]|^2}_{\text{与 } h[n] \text{ 无关}}\end{aligned}$$

因此，**均方误差**意义下的**最优 M 阶 FIR 滤波器**冲激响应为

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} = \text{IDTFT}\left\{H_d(e^{j\omega})\right\} \cdot w_{\text{rect},M}[n]$$

即 $\text{IDTFT}\{H_d(e^{j\omega})\}$ 加**矩形窗**截断得到。

然而，矩形窗截断会引入 **Gibbs 现象**，导致频率响应出现较大波纹。为减小 Gibbs 现象，可采用其他窗函数 $w[n]$ 截断理想冲激响应，从而设计 FIR 滤波器。

▶ 固定窗

固定窗具有**不可调节**的主瓣宽度与阻带衰减特性，常用的固定窗函数及其性能如下表所示：

窗函数	过渡带宽度 $\Delta\omega$ ($\times\frac{2\pi}{N}$)	最小阻带衰减 α_2 (dB)
矩形窗	0.89	21
三角窗	2.1	25
Hanning	3.1	44
Hamming	3.3	53
Blackman	5.5	74

使用时，只需根据所需的过渡带宽度与阻带衰减选择合适的窗函数，并根据线性相位 FIR 滤波器的特性确定窗长 M，然后截断理想冲激响应即可。

▶ Kaiser 窗

Kaiser 窗是一种**参数化**窗函数，可通过调整参数 β 控制主瓣宽度与旁瓣高度之间的权衡。Kaiser 窗定义为

$$w_{\text{Kaiser},M;\beta}[n] = \begin{cases} \dfrac{I_0\left(\beta\sqrt{1 - \left(\frac{n}{\alpha} - 1\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}, & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中，$\alpha = \frac{M}{2}$，$I_0(\cdot)$ 是**零阶修正贝塞尔函数 (modified Bessel function of the first kind of order zero)**，定义为

$$I_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(x/2)^k}{k!}\right)^2$$

Kaiser 窗的参数由经验公式给出，即对于给定的**阻带波纹** δ_2（$\alpha_2 = -20\log_{10}\delta_2$ dB）和**过渡带宽度** $\Delta\omega = |\omega_s - \omega_p|$，有

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(\alpha_2 - 8.7), & \alpha_2 > 50, & \text{(深阻带)} \\ 0.5842(\alpha_2 - 21)^{0.4} + 0.07886(\alpha_2 - 21), & 21 \le \alpha_2 \le 50, & \text{(中阻带)} \\ 0, & \alpha_2 < 21, & \text{(浅阻带)} \end{cases}$$

$$M = \frac{\alpha_2 - 8}{2.285\Delta\omega}$$

Hilbert 变换

Hilbert 变换的定义

连续时间 Hilbert 变换

▶ 连续时域信号的 Hilbert 变换

设 $x(t)$ 为连续时间信号，其 Fourier 变换 $X(j\Omega)$ 满足

$$X(j\Omega) = \begin{cases} X(j\Omega), & \Omega \ge 0, \\ 0, & \Omega < 0, \end{cases}$$

即 $x(t)$ 仅包含正频率成分。我们考虑其**实部 $x_r(t)$ 与虚部 $x_i(t)$ 之间**的关系，设

$$x_r(t) \longleftrightarrow X_r(j\Omega), \qquad x_i(t) \longleftrightarrow X_i(j\Omega)$$

则由 Fourier 变换的线性性质，可设

$$X(j\Omega) = X_r(j\Omega) + jX_i(j\Omega) = \begin{cases} kX_r(j\Omega), & \Omega \ge 0, \\ 0, & \Omega < 0 \end{cases}$$

一种可能是

$$X_i(j\Omega) = \begin{cases} -jX_r(j\Omega), & \Omega \ge 0, \\ jX_r(j\Omega), & \Omega < 0 \end{cases} = H(j\Omega)X_r(j\Omega)$$

其中 $H(j\Omega) = -j\,\text{sgn}(\Omega)$，其 Fourier 逆变换为

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\Omega)e^{j\Omega t}\, d\Omega = \frac{1}{\pi t}$$

因此有

$$x_i(t) = x_r(t) * h(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_r(\tau)}{t - \tau}\, d\tau$$

由此可见，信号的实部与虚部之间通过卷积关系联系在一起，这种卷积关系即为**Hilbert 变换**。

> **Def.** 连续时域 Hilbert 变换
>
> 连续时间信号 $x(t)$ 的 **Hilbert 变换 (Hilbert transform)** 定义为
>
> $$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\text{P. V.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau}\, d\tau = x(t) * \frac{1}{\pi t}$$
>
> 逆变换为
>
> $$x(t) = -\frac{1}{\pi}\text{P. V.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t - \tau}\, d\tau = \hat{x}(t) * \left(-\frac{1}{\pi t}\right)$$
>
> 其中 $\text{P. V.}\int$ 表示**主值积分 (Cauchy principal value)**，用于处理积分中的奇点。

连续时域 Hilbert 变换描述了**频域单边**信号的**实部、虚部关系**。信号 $x(t) = x_r(t) + j\hat{x}_r(t)$ 保留了 $x_r(t)$ 的所有正频率成分，而将负频率成分全部去除，称为信号 $x_r(t)$ 的**解析信号 (analytic signal)**。

▶ 连续频域信号的 Hilbert 变换

设有因果信号 $x(t) = x(t)u(t)$，其 Fourier 变换为

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\Omega) = X_R(j\Omega) + jX_I(j\Omega)$$

由于

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{2\pi}\left(\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega}\right)$$

则由卷积定理，有

$$X(j\Omega) = X(j\Omega) * \mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{2\pi}(X_R(j\Omega) + jX_I(j\Omega)) * \left(\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega}\right)$$

展开后可得

$$X_R(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}\left(\pi X_R(j\Omega) + X_I(j\Omega) * \frac{1}{\Omega}\right)$$
$$X_I(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}\left(\pi X_I(j\Omega) - X_R(j\Omega) * \frac{1}{\Omega}\right)$$

解出

$$X_{\mathrm{R}}(\mathrm{j}\Omega)=\frac{1}{\pi}X_{\mathrm{I}}(\mathrm{j}\Omega)*\frac{1}{\Omega}=\frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X_{\mathrm{I}}(\mathrm{j}\Omega')}{\Omega-\Omega'}\,\mathrm{d}\Omega'$$
$$X_{\mathrm{I}}(\mathrm{j}\Omega)=-\frac{1}{\pi}X_{\mathrm{R}}(\mathrm{j}\Omega)*\frac{1}{\Omega}=-\frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X_{\mathrm{R}}(\mathrm{j}\Omega')}{\Omega-\Omega'}\,\mathrm{d}\Omega'$$

Def. 连续频域 Hilbert 变换

连续频域信号 $X(\mathrm{j}\Omega)$ 的 **Hilbert 变换 (Hilbert transform)** 定义为

$$\hat{X}(\mathrm{j}\Omega)=\frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X(\mathrm{j}\Omega')}{\Omega-\Omega'}\,\mathrm{d}\Omega'$$

逆变换为

$$X(\mathrm{j}\Omega)=-\frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{X}(\mathrm{j}\Omega')}{\Omega-\Omega'}\,\mathrm{d}\Omega'$$

其中 $\mathrm{P.V.}\int$ 表示**主值积分 (Cauchy principal value)**，用于处理积分中的奇点。

类似地，连续频域 Hilbert 变换描述了**时域单边**信号的**实部、虚部关系**。信号 $X(\mathrm{j}\Omega)=X_{\mathrm{R}}(\mathrm{j}\Omega)+\mathrm{j}\hat{X}_{\mathrm{R}}(\mathrm{j}\Omega)$ 保留了 $X_{\mathrm{R}}(\mathrm{j}\Omega)$ 的所有正时间成分，而将负时间成分全部去除，称为信号 $X_{\mathrm{R}}(\mathrm{j}\Omega)$ 的**解析频谱 (analytic spectrum)**。

离散时间 Hilbert 变换

离散时域信号的 Hilbert 变换

连续时间信号的 Hilbert 变换非因果，难以实现。但如果有限长冲激响应，**非因果的离散时间系统**某种意义上是可以实现的。

类比 $H(\mathrm{j}\Omega)=-\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}(\Omega)$，设

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=-\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}(\omega)=\begin{cases}-\mathrm{j}, & 0<\omega<\pi,\\ 0, & \omega=0,\\ \mathrm{j}, & -\pi<\omega<0\end{cases}$$

则其逆 DTFT 为

$$h[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\,\mathrm{d}\omega=\begin{cases}0, & n=0,\\ \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n}, & n\neq 0\end{cases}$$

因此，若 $z[n]=x_{\mathrm{r}}[n]+\mathrm{j}x_{\mathrm{i}}[n]$ 为解析信号，则与连续时间情形类似，有

$$x_{\mathrm{i}}[n]=x_{\mathrm{r}}[n]*h[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_{\mathrm{r}}[n-m]h[m]=\frac{1}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{x_{\mathrm{r}}[n-(2m+1)]}{2m+1}$$

Def. 离散时域 Hilbert 变换

离散时间信号 $x[n]$ 的 **Hilbert 变换 (Hilbert transform)** 定义为

$$\hat{x}[n]=x[n]*h[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[n-m]h[m]=\frac{1}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{x[n-(2m+1)]}{2m+1}$$

逆变换为

$$x[n]=-\hat{x}[n]*h[n]=-\sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{x}[n-m]h[m]=-\frac{1}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\hat{x}[n-(2m+1)]}{2m+1}$$

其中 $h[n]=\begin{cases}0, & n=0,\\ \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n}, & n\neq 0\end{cases}$。

离散频域信号的 Hilbert 变换

任意序列 $x[n]$ 可分解为**奇、偶分量**，为

$$x[n]=x_{\mathrm{e}}[n]+x_{\mathrm{o}}[n],\qquad \begin{cases}x_{\mathrm{e}}[n]=\frac{1}{2}(x[n]+x[-n]),\\ x_{\mathrm{o}}[n]=\frac{1}{2}(x[n]-x[-n])\end{cases}$$

设有实因果信号 $x[n]=x[n]u[n]$，则

$$x[n]=2x_{\mathrm{e}}[n]u[n]-x_{\mathrm{e}}[0]\delta[n]=2x_{\mathrm{o}}[n]u[n]+x[0]\delta[n]$$

解得

$$\begin{cases}x_{\mathrm{o}}[n]=x_{\mathrm{e}}[n]\,\mathrm{sgn}[n],\\ x_{\mathrm{e}}[n]=x_{\mathrm{o}}[n]\,\mathrm{sgn}[n]+x[0]\delta[n]\end{cases}$$

由 **DTFT 的共轭对称关系**，$x_{\mathrm{e}}[n]\longleftrightarrow X_{\mathrm{R}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，$x_{\mathrm{o}}[n]\longleftrightarrow \mathrm{j}X_{\mathrm{I}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，则有

$$X_{\mathrm{R}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=x[0]+\frac{1}{2\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\pi}^{\pi}X_{\mathrm{I}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega'})\cot\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)\mathrm{d}\omega'$$
$$X_{\mathrm{I}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=-\frac{1}{2\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\pi}^{\pi}X_{\mathrm{R}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega'})\cot\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)\mathrm{d}\omega'$$

Def. 离散频域 Hilbert 变换

离散频域信号 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 的 **Hilbert 变换 (Hilbert transform)** 定义为

$$\hat{X}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=-\frac{1}{2\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\pi}^{\pi}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega'})\cot\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)\mathrm{d}\omega'$$

逆变换为

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\frac{1}{2\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{X}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega'})\cot\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)\mathrm{d}\omega'$$

其中 $\mathrm{P.V.}\int$ 表示**主值积分 (Cauchy principal value)**，用于处理积分中的奇点。