Le Cam の第一補題

Asymptotic Statistics 勉強会 第 14 回 資料

Minato

2023 年 7 月 29 日

概要

Asymptotic Statistics [VdV00] p.88, 89 に沿って Le Cam の第一補題の証明を記載しました。文献 [BL21] ではより丁寧な記法が用いられているので、記法は文献 [BL21] を参照しました。

目次

1 **おさらい** 2
1.1 確率変数列の収束 2
1.2 確率変数の絶対連続性と確率変数列の contiguity 2

2 **Le Cam の第一補題** 3
2.1 (i) $\Rightarrow$ (iv) の証明 3
2.2 (i) $\Leftarrow$ (iv) の証明 4
2.3 (i) $\Rightarrow$ (ii) の証明 4
2.4 (iii) $\Rightarrow$ (i) の証明 6
2.5 (ii) $\Rightarrow$ (iii) の証明 7

3 **補足** 11
3.1 収束する確率変数列の性質 11
3.2 上極限・下極限の性質 12
3.3 ラドン・ニコディムの定理 12

1　おさらい

1.1　確率変数列の収束

まず、確率変数列の収束列に関する記法を確認しておく。[*1]。

1.1.1　分布収束

確率変数 $X_n\colon \Omega_n \to \mathbb{R}^k$ $(n=1,2,\dots)$ を、確率空間 $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ 上の確率変数とする。また、確率変数 $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ $(n=1,2,\dots)$ を、確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 上の確率変数とする。

X_n の分布関数 $x \mapsto P_n(X_n \le x)$ と X の分布関数 $x \mapsto P(X \le x)$ に関して、

$$P_n(X_n \le x) \to P(X \le x)$$

が、分布関数 $P(X \le x)$ の任意の連続点 x で成り立つとき、確率変数列 X_n が X に分布収束する (*converge in distribution*) といい、

$$X_n \overset{P_n}{\rightsquigarrow} X$$

と表記する。

1.1.2　確率収束

$a \in \mathbb{R}^k$ を定数とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$P_n(\|X_n - a\| < \varepsilon) \to 0$$

が成り立つとき、X_n は定数 a に確率収束する (*converge in probability*) といい、

$$X_n \xrightarrow{P_n} a$$

と表記する。[*2]

1.2　確率変数の絶対連続性と確率変数列の contiguity

Definition 1.1 (絶対連続性 [VdV00, (p.85)])**.** 以下のような確率測度を考える：

- $(\Omega,\, \mathcal{A})$：可測空間
- $P,\, Q$：可測空間 $(\Omega, \mathcal{A})$ 上の確率測度

任意の可測集合 A に対し、

$$P(A) = 0 \text{ ならば } Q(A) = 0$$

が成り立つとき、Q は P に対して絶対連続 (*absolutely continuous*) であるといい、$Q \ll P$ と表す。

$P,\, Q$ を可測空間 $(\Omega,\, \mathcal{A})$ の確率測度としたとき、任意の可測関数 f について

$$\int f\,\mathrm{d}Q \ge \int f\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\,\mathrm{d}P \tag{1}$$

が成り立つ。また、Q が P に関して絶対連続ならば式 (1) は等号が成立する、すなわち、

$$\int f\,\mathrm{d}Q = \int f\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\,\mathrm{d}P. \tag{2}$$

[*1] [BL21, (p.3)] を参照しました。
[*2] ここでは、収束先が定数である場合の確率収束の定義と記法を与えている。

Definition 1.2 (Contiguity [VdV00, 6.3 Definition (p.87)])**.** 以下のような確率測度の列を考える：

- $(\Omega_n,\, \mathcal{A}_n)$：可測空間の列
- $P_n,\, Q_n$：可測空間 $(\Omega_n,\, \mathcal{A}_n)$ 上の確率測度の列

任意の可測集合列 A_n に関して

$$P_n(A_n) \to 0 \text{ ならば } Q_n(A_n) \to 0$$

が成り立つとき、Q_n は P_n に対して **contiguous** であるといい、$Q_n \triangleleft P_n$ と表す。

2 Le Cam の第一補題

Lemma 2.1 (Le Cam の第一補題 [VdV00, 6.4 Lemma (p.88)])**.** $P_n,\, Q_n$ を可測空間 $(\Omega_n,\, \mathcal{A}_n)$ 上の確率測度列とする。次の 4 つの主張は同値である：

(i) $Q_n \triangleleft P_n$.

(ii) ある収束部分列が存在して $\dfrac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n} \overset{Q_n}{\rightsquigarrow} U$ であるならば、$Q(U > 0) = 1$.

(iii) ある収束部分列が存在して $\dfrac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}P_n} \overset{P_n}{\rightsquigarrow} V$ であるならば、$\mathbb{E}_P[V] = 1$.

(iv) 任意の確率変数 $T_n \colon \Omega_n \to \mathbb{R}^k$ に対して、「$T_n \xrightarrow{P_n} 0$ ならば $T_n \xrightarrow{Q_n} 0$ 」が成り立つ。

ここで、U, V は、それぞれある確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, Q), (\Omega', \mathcal{A}', P)$ 上の確率変数。

4 つの主張の同値性は下記のように示す：

$$\begin{tikzcd}
\text{(i)} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & \text{(ii)} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{(iv)} & \text{(iii)} \arrow[ul, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

2.1 (i) ⇒ (iv) の証明

$T_n \xrightarrow{P_n} 0$ であるような確率変数 $T_n \colon \Omega_n \to \mathbb{R}^k$ を任意にとる。$\varepsilon > 0$ を任意にとると、確率収束の定義から、

$$P_n(\|T_n\| > \varepsilon) \to 0.$$

(i) より $Q_n \triangleleft P_n$ であるから、

$$Q_n(\|T_n\| > \varepsilon) \to 0. \tag{3}$$

ε は任意だったから、式 (3) は $T_n \xrightarrow{Q_n} 0$ が成り立つことを意味する。T_n も任意の確率変数であったから、(iv) が成り立つ。

2.2 (i) $\Leftarrow$ (iv) の証明

可測集合列 A_n を、$P_n(A_n) \to 0$ が成り立つ任意の列とする。$T_n = \mathbb{1}_{A_n}$ とし、$\varepsilon > 0$ を任意にとると、

$$\begin{aligned}P_n(|T_n| > \varepsilon) &= P_n(\mathbb{1}_{A_n} > \varepsilon) \\ &= \begin{cases} P_n(\emptyset) & (\varepsilon > 1 \text{ のとき}) \\ P_n(A_n) & (0 < \varepsilon \leq 1 \text{ のとき}) \end{cases} \\ &\to 0.\end{aligned}$$

これより $\mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow{P_n} 0$ が成り立つから、仮定 (iv) より $\mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow{Q_n} 0$. これより、

$$Q_n\left(|\mathbb{1}_{A_n}| > \varepsilon\right) \to 0. \tag{4}$$

式 (4) は任意の ε に関して成り立つから、$0 < \varepsilon \leq 1$ なる ε を考えることで $Q_n(A_n) \to 0$ が成り立つことがわかる。よって、$Q_n \triangleleft P_n$ が成り立つ。

2.3 (i) $\Rightarrow$ (ii) の証明

表記を簡潔にするために、$\dfrac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n} \overset{Q_n}{\rightsquigarrow} U$ なる収束部分列を単に $\{n\}$ と表記する[*3]。与えられた n に対し、関数 $g_n(\varepsilon)$ を次式で定義する：

$$g_n(\varepsilon) = Q_n\left(\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n} < \varepsilon\right) - Q(U < \varepsilon). \quad (\varepsilon > 0)$$

ここで、$\varepsilon > 0$ を任意にとり固定する。$B = (-\infty, \varepsilon)$ とおくと、B は開集合であるから、Portmanteau の補題 (Lemma 3.1 (v)) より、

$$\begin{gathered}\liminf_{n\to\infty} Q_n\left(\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n} \in B\right) \geq Q(U \in B). \\ \therefore \liminf_{n\to\infty} Q_n\left(\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n} < \varepsilon\right) \geq Q(U < \varepsilon). \\ \therefore \liminf_{n\to\infty} g_n(\varepsilon) \geq 0.\end{gathered}$$

$\varepsilon > 0$ は任意であったから、全ての $\varepsilon > 0$ で $\liminf_{n\to\infty} g_n(\varepsilon) \geq 0$ が成り立つ。ここで、Lemma 3.5 より、ある正の非増加列 $\{\varepsilon_n\}$ が存在して、$\liminf_{n\to\infty} g_n(\varepsilon_n) \geq 0$ が成り立つ。よって、

$$Q(U = 0) = \lim_{n\to\infty} Q(U < \varepsilon_n) \leq \liminf_{n\to\infty} Q_n\left(\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n} < \varepsilon_n\right). \tag{5}$$

式 (5) の証明

$\dfrac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n}$ は非負値の確率変数だから、Lemma 3.4 より収束先の U も非負値の確率変数である。$B_n = [0, \varepsilon_n)$ とおくと、列 $\{\varepsilon_n\}$ の取り方より $B_n \supset B_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ であり、$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{0\}$ である[*4]。確率測度の連続性から、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} Q(U < \varepsilon_n) &= Q\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\ &= Q(U = 0).\end{aligned}$$

---

*3 本来は、元の列 $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ と区別するために部分列を $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ などとして区別すべきであるが、本書 [VdV00] では $\{n\}$ と書いたら元の部分列を暗に意味するものとして説明されている。

*4 $\{0\} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ は明らかなので、逆の包含関係を確認しておく。$b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ とすると、全ての n に対して $0 \leq b < \varepsilon_n$ であるから、$n \to \infty$ を考えれば $b = 0$ となることがわかるので、$b \in \{0\}$.

$\liminf_{n\to\infty} g_n(\varepsilon_n) \geq 0$ より、

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} Q_n\left(\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n} < \varepsilon_n\right) &\geq \liminf_{n\to\infty} Q(U < \varepsilon_n) \\ &= Q(U = 0).\end{aligned}$$

一方、新たな関数 $\mu_n\colon \mathcal{A}_n \to [0,1]$ を $\mu_n = \dfrac{P_n + Q_n}{2}$ により定めると、μ_n は $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ 上の確率測度になる。

μ_n が確率測度であることの証明

まず、任意の $A \in \mathcal{A}_n$ に対して $0 \leq P_n(A) \leq 1,\ 0 \leq Q_n(A) \leq 1$ であるから、

$$0 \leq \mu_n(A) = \frac{P_n(A) + Q_n(A)}{2} \leq 1. \tag{6}$$

また、

$$\mu_n(\Omega_n) = \frac{P_n(\Omega_n) + Q_n(\Omega_n)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1. \tag{7}$$

さらに、$A_k \in \mathcal{A}_n\ (k = 1, 2, \dots),\ A_k \cap A_m = \emptyset\ (k \neq m)$ のとき、

$$\begin{aligned}\mu_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \frac{1}{2}\left\{P_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) + Q_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} P_n\left(A_k\right) + \sum_{k=1}^{\infty} Q_n\left(A_k\right)\right\} \\ &= \mu_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right).\end{aligned} \tag{8}$$

式 (6), (7), (8) より、μ_n は $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ 上の確率測度である。

さらに、

$$P_n \ll \mu_n,\ Q_n \ll \mu_n \tag{9}$$

が成り立つ。

式 (9) の証明

$\mu_n(A) = 0$ なる任意の $A \in \mathcal{A}_n$ に対し、$P_n(A) + Q_n(A) = 0,\ P_n(A) \geq 0,\ Q_n(A) \geq 0$ であるから $P_n(A) = Q_n(B) = 0$.

ラドン・ニコディムの定理 (Theorem 3.6) より、μ_n に関する P_n, Q_n の密度 (ラドン・ニコディム微分) $\dfrac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}\mu_n}$, $\dfrac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}\mu_n}$ が一意に存在するから、密度をそれぞれ p_n, q_n とおく。このとき、

$$\begin{aligned}P_n\left(\left\{\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n} \leq \varepsilon_n\right\} \cap \{q_n > 0\}\right) &= \int_{\left\{\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n} \leq \varepsilon_n\right\} \cap \{q_n > 0\}} p_n \,\mathrm{d}\mu_n \\ &= \int_{\left\{\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n} \leq \varepsilon_n\right\} \cap \{q_n > 0\}} \frac{p_n}{q_n} q_n \,\mathrm{d}\mu_n \\ &= \int_{\left\{\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n} \leq \varepsilon_n\right\}} \frac{p_n}{q_n} \,\mathrm{d}Q_n \quad (\because (2), (9)) \\ &\leq \int \varepsilon_n \,\mathrm{d}Q_n \\ &\to 0.\end{aligned}$$

仮定より $Q_n \triangleleft P_n$ だから、

$$Q_n\left(\left\{\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n} \leq \varepsilon_n\right\} \cap \{q_n > 0\}\right) \to 0.$$

よって、$Q_n(\{q_n = 0\}) = 0$ より、

$$\begin{aligned} Q_n\left(\left\{\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n} \le \varepsilon_n\right\}\right) &= Q_n\left(\left\{\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n} \le \varepsilon_n\right\} \cap \{q_n > 0\}\right) + Q_n\left(\left\{\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n} \le \varepsilon_n\right\} \cap \{q_n = 0\}\right) \\ &= Q_n\left(\left\{\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n} \le \varepsilon_n\right\} \cap \{q_n > 0\}\right) \\ &\to 0. \end{aligned} \tag{10}$$

式 (5), (10) より、

$$Q(U = 0) \le \liminf_{n\to\infty} Q_n\left(\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n} < \varepsilon_n\right) = 0.$$
$$\therefore Q(U > 0) = 1.$$

2.4 (iii) ⇒ (i) の証明

$\dfrac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}P_n} \overset{P_n}{\rightsquigarrow} V$ が成り立つような部分列 $\{n\}$ を任意にとる。$P_n(A_n) \to 0$ が成り立つような任意の可測集合列 A_n をとる。このとき、

$$\mathbb{1}_{\Omega_n \setminus A_n} \xrightarrow{P_n} 1. \tag{11}$$

式 (11) の証明

$\varepsilon > 0$ を任意にとり固定する。

$$\mathbb{1}_{\Omega_n \setminus A_n}(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega \in \Omega_n \setminus A_n) \\ 0 & (\omega \in A_n) \end{cases}$$

であるから、

$$\left\{\omega \in \Omega_n : d(\mathbb{1}_{\Omega_n \setminus A_n}, 1) > \varepsilon\right\} = \begin{cases} A_n & (0 < \varepsilon < 1) \\ \emptyset & (\varepsilon \ge 1) \end{cases}.$$

よって、

$$P_n\left(\left\{\omega \in \Omega_n : d(\mathbb{1}_{\Omega_n \setminus A_n}, 1) > \varepsilon\right\}\right) \le P_n(A_n) \to 0.$$

$\dfrac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}P_n} \overset{P_n}{\rightsquigarrow} V,\ \mathbb{1}_{\Omega_n \setminus A_n} \xrightarrow{P_n} 1$ より、Theorem 3.3 (v) を適用して、

$$\left(\frac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}P_n},\ \mathbb{1}_{\Omega_n \setminus A_n}\right) \overset{P_n}{\rightsquigarrow} (V,\ 1).$$

関数 $h\colon (v,t) \mapsto vt$ は $[0,\infty) \times \{0,1\}$ 上非負値連続関数であるから、portmanteau の補題 (Lemma 3.1 (v)) より、

$$\liminf_{n\to\infty} Q_n(\Omega_n \setminus A_n) \ge \liminf_{n\to\infty} \int \mathbb{1}_{\Omega_n \setminus A_n} \frac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}P_n}\,\mathrm{d}P_n \ge \mathbb{E}_P[1 \cdot V]. \tag{12}$$

式 (12) の証明

不等式 (1)：$\displaystyle\int f_n\,\mathrm{d}Q_n \ge \int f_n \frac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}P_n}\,\mathrm{d}Q_n$ より、$f_n = \mathbb{1}_{\Omega_n \setminus A_n}$ とすると、

$$\int \mathbb{1}_{\Omega_n \setminus A_n}\,\mathrm{d}Q_n \ge \int \mathbb{1}_{\Omega_n \setminus A_n} \frac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}P_n}\,\mathrm{d}P_n$$
$$\therefore Q_n(\Omega_n \setminus A_n) \ge \int \mathbb{1}_{\Omega_n \setminus A_n} \frac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}P_n}\,\mathrm{d}P_n.$$

両辺の下極限をとって、

$$\liminf_{n\to\infty} Q_n(\Omega_n \setminus A_n) \ge \liminf_{n\to\infty} \int \mathbb{1}_{\Omega_n \setminus A_n} \frac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}P_n}\,\mathrm{d}P_n.$$

上で定義した関数 h を用いると、右辺は

$$\liminf_{n\to\infty} \int \mathbb{1}_{\Omega_n \setminus A_n} \frac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}P_n}\,\mathrm{d}P_n = \liminf_{n\to\infty} h\left(\frac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}P_n},\ \mathbb{1}_{\Omega_n \setminus A_n}\right)$$

と変形できる。h は非負値連続関数であるから、portmanteau の補題 (Lemma 3.1 (v)) より

$$\liminf_{n\to\infty} h\left(\frac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}P_n},\ \mathbb{1}_{\Omega_n\setminus A_n}\right) \geq \mathbb{E}_P[h(V,\,1)] = \mathbb{E}_P[V].$$

仮定より、$\mathbb{E}_P[V]=1$ であるから、

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} Q_n\left(\Omega_n\setminus A_n\right) &\geq 1\\ \therefore \lim_{n\to\infty} Q_n\left(\Omega_n\setminus A_n\right) &= 1\\ \therefore \lim_{n\to\infty} Q_n(A_n) &= 0.\end{aligned}$$

これより、任意の収束部分列 $\{n\}$ に関して $Q_n(A_n)$ が 0 に収束するから、もとの列も同じ収束値に収束する。よって、$Q_n(A_n)\to 0$ が成り立つ。A_n は任意の可測集合列であったから、以上より $Q_n \vartriangleleft P_n$ が成り立つ。

2.5 (ii) ⇒ (iii) の証明

上記の証明で述べたように、確率測度 $\mu_n=\dfrac{P_n+Q_n}{2}$ に関する $P_n,\,Q_n$ の密度 $p_n,\,q_n$ に対し、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu_n}\left(P_n+Q_n\right)=2.$$

なぜなら、任意の可測集合 A_n に対し、

$$\int_{A_n} 2\,\mathrm{d}\mu_n = 2\int \mathbb{1}_{A_n}\,\mathrm{d}\mu_n = 2\mu_n(A_n) = P_n(A_n)+Q_n(A_n)$$

が成り立つことから従う。さらに、$P_n \ll \mu_n,\ Q_n \ll \mu_n$ より、

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu_n}\left(P_n+Q_n\right)=\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}\mu_n}+\frac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}\mu_n}=2.\\ \therefore\ p_n+q_n=2.\end{gathered}$$

密度は非負だから、各 n に対し、

$$0 \leq p_n,\,q_n \leq 2.$$

ここで、$\{n'\}$ を $\dfrac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}P_n} \overset{P_{n'}}{\rightsquigarrow} V$ であるような部分列とする。$\dfrac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}P_n}$ は Q_n に関して一様緊密であることは既に示している[*5]から、プロホロフの定理 (Theorem 3.2 (ii)) より、ある部分列 $\{n''\}\subset\{n'\}$ とある確率空間 $(\Omega,\mathcal{A},P)$ 上の確率変数 U が存在して、$\dfrac{\mathrm{d}P_{n''}}{\mathrm{d}Q_{n''}} \overset{P_{n''}}{\rightsquigarrow} U$ とできる。さらに、任意の $K\geq 0$ に対し、マルコフの不等式より、

$$\mu_{n''}\left(\frac{\mathrm{d}P_{n''}}{\mathrm{d}\mu_{n''}}>K\right) \leq \frac{1}{K}\mathbb{E}_{\mu_{n''}}\left[\frac{\mathrm{d}P_{n''}}{\mathrm{d}\mu_{n''}}\right] \leq \frac{2}{K}.$$

よって、$\dfrac{\mathrm{d}P_{n''}}{\mathrm{d}\mu_{n''}}$ は $\mu_{n''}$ に関して一様緊密だから、プロホロフの定理 (Theorem 3.2 (ii)) より、ある部分列 $\{n'''\}\subset\{n''\}$ とある確率空間 $(\Omega'',\mathcal{A}'',\mu)$ 上の確率変数 W が存在して、$\dfrac{\mathrm{d}P_{n'''}}{\mathrm{d}\mu_{n'''}} \overset{\mu_{n'''}}{\rightsquigarrow} W$ とできる。以上の議論より、部分列 $\{n'''\}$ 上で考えることにより、

$$\frac{\mathrm{d}Q_{n'''}}{\mathrm{d}P_{n'''}} \overset{P_{n'''}}{\rightsquigarrow} V,\ \frac{\mathrm{d}P_{n'''}}{\mathrm{d}Q_{n'''}} \overset{Q_{n'''}}{\rightsquigarrow} U,\ \frac{\mathrm{d}P_{n'''}}{\mathrm{d}\mu_{n'''}} \overset{\mu_{n'''}}{\rightsquigarrow} W$$

とできる。表記を簡潔にするために、これ以降、部分列 $\{n'''\}$ を単に $\{n\}$ と表記する。$P_n \ll \mu_n$ より、$\dfrac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}\mu_n}$ の期待値は、

$$\mathbb{E}_{\mu_n}\left[\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}\mu_n}\right] = \int \frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}\mu_n}\,\mathrm{d}\mu_n = \int\ \mathrm{d}P_n = 1.$$

---

*5 文献 [VdV00] p.88 上部参照。

$\dfrac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}\mu_n} \overset{\mu_n}{\rightsquigarrow} W,\ \mathbb{E}_{\mu_n}\left[\dfrac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}\mu_n}\right] = 1$ より、portmanteau の補題 (Lemma 3.1 (ii)) より

$$\mathbb{E}_\mu[W] = 1. \tag{13}$$

ここで、有界連続関数 f が与えられたとき、関数 $g\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ を

$$g(w) = \begin{cases} f\left(\dfrac{w}{2-w}\right)(2-w) & (0 \le w < 2) \\ 0 & (w = 2) \end{cases}$$

と定義すると、g も有界連続関数になる。

g が有界連続関数であることの証明

f の有界性より g も有界である。$0 \le w < 2$ であるような点 w 上で g が連続であることも明らかなので、$w = 2$ 上における片側連続性

$$\lim_{w \to 2-0} g(w) = g(2)$$

が成り立つことを示せば良い。まず、f は有界だから、ある定数 $M \ge 0$ が存在して、任意の $w \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f(w)| \le M$$

が成り立つ。ここで、$\varepsilon > 0$ を任意にとる。[*6] $2 - \varepsilon/M < w < 2$ なる w 上を考えると、$0 < 2 - w < \varepsilon/M$ であるから、

$$|g(w)| = \left| f\left(\frac{w}{2-w}\right)(2-w) \right| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

また、

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n} &= \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n}{2-p_n} = \frac{W_n}{2-W_n}, \\ \frac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}\mu_n} &= q_n = 2 - p_n = 2 - W_n \end{aligned}$$

が成り立つことから、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{Q_n}\left[f\left(\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n}\right)\right] &= \int f\left(\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n}\right)\mathrm{d}Q_n \qquad (14) \\ &= \int f\left(\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n}\right)\frac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}\mu_n}\,\mathrm{d}\mu_n \quad (\because\ Q_n \ll \mu_n) \\ &= \mathbb{E}_{\mu_n}\left[f\left(\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n}\right)\frac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}\mu_n}\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mu_n}\left[f\left(\frac{W_n}{2-W_n}\right)(2-W_n)\right] \qquad (15) \\ &= \mathbb{E}_{\mu_n}\left[g(W_n)\right]. \qquad (16) \end{aligned}$$

(15) から (16) への変形は、$W_n = 2\ \left(\text{すなわち } \dfrac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}\mu_n} = 0\right)$ のとき $g(W_n) = 0$ であることからわかる。

$W_n \overset{\mu_n}{\rightsquigarrow} W$ と portmanteau の補題 (Lemma 3.1 (ii)) より

$$\mathbb{E}_{\mu_n}\left[g(W_n)\right] \to \mathbb{E}_\mu[g(W)] = \mathbb{E}_\mu\left[f\left(\frac{W}{2-W}\right)(2-W)\right]. \tag{17}$$

式 (16) と式 (17) より、

$$\mathbb{E}_{Q_n}\left[f\left(\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n}\right)\right] \to \mathbb{E}_\mu[g(W)] = \mathbb{E}_\mu\left[f\left(\frac{W}{2-W}\right)(2-W)\right]. \tag{18}$$

[*6] ε をとる前に M をとっていることがポイント。

また、$\dfrac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n} \overset{Q_n}{\rightsquigarrow} U$ と portmanteau の補題 (Lemma 3.1 (ii)) より、

$$\mathbb{E}_{Q_n}\left[f\left(\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n}\right)\right] \to \mathbb{E}_Q[f(U)]. \tag{19}$$

式 (17) と式 (19) より、任意の有界連続関数 f について

$$\mathbb{E}_Q[f(U)] = \mathbb{E}_\mu\left[f\left(\frac{W}{2-W}\right)(2-W)\right] \ (= \mathbb{E}_\mu[g(W)]).$$

ここで、$f_m \le 1$ かつ $f_m \downarrow \mathbb{1}_{\{0\}}$ であるような関数列 $\{f_m\}$ をとる。たとえば、

$$f_m(x) = \begin{cases} 0 & \left(|x| \ge \frac{1}{m}\right) \\ -mx+1 & \left(0 \le x \le \frac{1}{m}\right) \\ mx+1 & \left(-\frac{1}{m} \le x \le 0\right) \end{cases}$$

とすればよく、このとき f_m は有界連続関数である。これよりルベーグの収束定理を適用でき、

$$\begin{aligned} Q(U=0) &= \mathbb{E}_Q\left[\mathbb{1}_{\{0\}}(U)\right] \\ &= \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}_Q\left[f_m(U)\right] \\ &= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{Q_n}\left[f_m\left(\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}Q_n}\right)\right] \\ &= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{\mu_n}\left[f_m\left(\frac{W_n}{2-W_n}\right)(2-W_n)\right] \\ &= \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}_{\mu}\left[f_m\left(\frac{W}{2-W}\right)(2-W)\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mu}\left[\mathbb{1}_{\{0\}}\left(\frac{W}{2-W}\right)(2-W)\right] \\ &= 2\mu(W=0). \end{aligned}$$

同様に、任意の有界連続関数 f に対し、関数 $h\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ を

$$h(w) = \begin{cases} f\left(\dfrac{2-w}{w}\right) w & (0 < w \le 2) \\ 0 & (w = 0) \end{cases}.$$

と定義すると、h も有界連続関数になる。

h が有界連続関数であることの証明

f の有界性より h も有界である。$0 < w \le 2$ であるような点 w 上で h が連続であることも明らかなので、$w=0$ 上における片側連続性

$$\lim_{w\to+0} h(w) = g(0)$$

が成り立つことを示せば良い。まず、f は有界だから、ある定数 $M \ge 0$ が存在して、任意の $w \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f(w)| \le M$$

が成り立つ。ここで、$\varepsilon > 0$ を任意にとる。$0 < w < \varepsilon/M$ なる w 上を考えると、

$$|h(w)| = \left| f\left(\frac{2-w}{w}\right) w \right| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{P_n}\left[f\left(\frac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}P_n}\right)\right] &= \mathbb{E}_{\mu_n}\left[f\left(\frac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}P_n}\right)\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}\mu_n}\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mu_n}\left[f\left(\frac{2-W_n}{W_n}\right)W_n\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mu_n}\left[h(W_n)\right]. \end{aligned}$$

h は有界連続関数だから、portmanteau の補題 (Lemma 3.1 (ii)) より、

$$\mathbb{E}_{\mu_n}[h(W_n)] \to \mathbb{E}_\mu[h(W)].$$

よって、

$$\mathbb{E}_{P_n}\left[f\left(\frac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}P_n}\right)\right] \to \mathbb{E}_\mu[h(W)] = \mathbb{E}_\mu\left[f\left(\frac{2-W}{W}\right)W\right].$$

一方、$\dfrac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}P_n} \overset{P_n}{\rightsquigarrow} V$ と portmanteau の補題 (Lemma 3.1 (ii)) より

$$\mathbb{E}_{P_n}\left[f\left(\frac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}P_n}\right)\right] \to \mathbb{E}_P[f(V)].$$

これより、

$$E_P[f(V)] = \mathbb{E}_\mu\left[f\left(\frac{2-W}{W}\right)W\right]$$

が成り立つ。ここで、$0 \le f_m(x) \uparrow x \, (= f(x))$ なる関数列を用いる。例えば、

$$f_m(x) = \begin{cases} x & (0 \le x \le m) \\ m & (x > m) \end{cases}$$

を考えればよい。このとき、

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P[V] &= \mathbb{E}_P[f(V)] \\
&= \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}_P[f_m(V)] \\
&= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{P_n}\left[f_m\left(\frac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}P_n}\right)\right] \\
&= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{\mu_n}\left[f_m\left(\frac{2-W_n}{W_n}\right)W_n\right] \\
&= \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}_\mu\left[f_m\left(\frac{2-W}{W}\right)W\right] \\
&= \mathbb{E}_\mu\left[\left(\frac{2-W}{W}\right)W\right] \\
&= \mathbb{E}_\mu\left[\mathbb{1}_{W>0}(2-W)\right] \\
&= 2\mu(W>0) - \mathbb{E}_\mu[W] \quad (\because\ \mathbb{1}_{W>0}W = W) \\
&= 2\mu(W>0) - 1.
\end{aligned}$$

最後の式変形は式 (13) を用いた。以上より、

$$\begin{cases} Q(U=0) = 2\mu(W=0) \\ \mathbb{E}_P[V] = 2\mu(W>0) - 1 \end{cases}$$

が成り立つことから、

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P[V] &= 2(1-\mu(W=0)) - 1 \\
&= 1 - 2\mu(W=0) \\
&= 1 - Q(U=0) \\
&= Q(U>0) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

したがって、部分列 $\{n'''\}$ 上で $\mathbb{E}_P[V] = 1$ であるから、(iii) が成り立つ。

3　補足

3.1　収束する確率変数列の性質

Lemma 3.1 (Portmanteau の補題 [VdV00, 2.2 Lemma (p.6)], [BL21, Proposition (p.9)], [Bil95, Theorem 29.1 (p.378), Problem 29.1 (p.385)])**.** $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ を確率空間とし、$X_n \colon \Omega_n \to \mathbb{R}^k$, $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ を $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 上の確率変数とする。次の主張は同値である：

(i) 関数 $x \mapsto P(X \le x)$ の任意の連続点 x に対して $P_n(X_n \le x) \le P(X \le x)$.
(ii) 任意の有界連続関数 f に対して $\mathbb{E}_{P_n}[f(X_n)] \to \mathbb{E}_P[f(X)]$.
(iii) 任意の有界リプシッツ関数 f に対して $\mathbb{E}_{P_n}[f(X_n)] \to \mathbb{E}_P[f(X)]$.
(iv) 任意の非負連続関数 f に対して $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}_{P_n}[f(X_n)] \ge \mathbb{E}_P[f(X)]$.
(v) 任意の開集合 G に対して $\liminf_{n\to\infty} P_n(X_n \in G) \ge P(X \in G)$.
(vi) 任意の閉集合 F に対して $\limsup_{n\to\infty} P_n(X_n \in F) \le P(X \in F)$.
(vii) $P(X \in \delta B) = 0$ なる任意のボレル集合 B に対して $P_n(X_n \in B) \to P(X \in B)$.

Theorem 3.2 (プロホロフの定理 [VdV00, 2.4 Theorem (p.8)])**.** X_n を $\mathbb{R}^k$ 上に値をとる確率変数とする。

(i) $X_n \rightsquigarrow X$ ならば、$\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ は一様緊密である。
(ii) X_n が一様緊密であるならば、ある部分列 $\{n_j\}$ が存在して、ある確率変数 X に対して $X_{n_j} \rightsquigarrow X$.

Theorem 3.3 ([VdV00, 2.7 Theorem (p.10)])**.** X_n, X を確率変数とする。このとき、

(iii) ある定数 c に対して $X_n \xrightarrow{P_n} c$ が成り立つことは $X_n \overset{P_n}{\rightsquigarrow} X$ が成り立つことと同値である。
(v) ある定数 c に対して $X_n \overset{P_n}{\rightsquigarrow} X$ かつ $Y_n \xrightarrow{P_n} Y$ ならば、$(X_n, Y_n) \rightsquigarrow (X, c)$.

Lemma 3.4. 非負値確率変数列 X_n がある確率変数 X に分布収束するとき、X もまた非負値確率変数である。

Proof. $U = (-\infty,\ 0)$ とおくと、U は開集合である。X_n が X に分布収束することから、Portmanteau の補題より

$$\liminf_{n\to\infty} P(X_n \in U) \ge P(X \in U).$$
$$\liminf_{n\to\infty} P(X_n < 0) \ge P(X < 0).$$

ここで、各 n に対し X_n は非負値をとる確率変数であるから $P(X_n < 0) = 0$. よって、

$$0 \ge P(X < 0).$$
$$\therefore P(X < 0) = 0.$$

よって、X の非負値確率変数である。 □

3.2　上極限・下極限の性質

Lemma 3.5 ([BL21, Lemma 1 (p.7)]). a を実数とし、以下を満たす関数列 $\{g_n\}$ を考える：

$$\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対し } \liminf_{n\to\infty} g_n(\varepsilon) \geq a.$$

このとき、ある $\{\varepsilon_n\}$ が存在して、$\varepsilon_n \downarrow 0$ かつ $\liminf_{n\to\infty} g_n(\varepsilon_n) \geq a$ を満たす。

Proof. 各整数 $k \geq 1$ に対し $\liminf_{n\to\infty} g_n\left(\frac{1}{k}\right) \geq a$ が成り立つことから、ある自然数 n_k が存在して、$n > n_k$ を満たす任意の n について $g_n\left(\frac{1}{k}\right) > a - \frac{1}{k}$ が成り立つ。一般性を失うことなく $n_{k+1} > n_k$ $(k = 1, 2, \dots)$ となるように $\{n_k\}$ をとれる。ここで、各 k に対し、$n_k \leq n < n_{k+1}$ なる n について、$\varepsilon_n = \frac{1}{k}$ とする。すると、$n \geq n_1$ を満たす全ての n で $g_n(\varepsilon_n) > a - \varepsilon_n$ が成り立つ。このように定義した数列 $\{\varepsilon_n\}$ は明らかに $\varepsilon_n \downarrow 0$ を満たし、

$$\liminf_{n\to\infty} g_n(\varepsilon_n) \geq a.$$

□

3.3　ラドン・ニコディムの定理

Le Cam の第一補題を示す際に用いるラドン・ニコディムの定理を紹介する。

Theorem 3.6 (ラドン・ニコディムの定理 [佐藤 94, 定理 7.1 (p.84)]). P, Q を可測空間 $(\Omega, \mathcal{A})$ の確率測度とし、$Q \ll P$ とする。このとき、確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 上の非負可積分な確率変数 Y で、

$$Q(A) = \int_A Y \,\mathrm{d}P \ \ (= \mathbb{E}_P [Y \mathbb{1}_A]), \qquad A \in \mathcal{A} \tag{20}$$

となるものが存在し、次の意味で一意：式 (20) を満たす別の Y' があるとすると、$Y = Y'$ が P- $a.e.$ で成り立つ。この Y をラドン・ニコディム微分といい、$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$ と書く。

参考文献

[20221] 統計学への確率論, その先へ: ゼロからの測度論的理解と漸近理論への架け橋. 内田老鶴圃, 2021.

[Bil95] Patrick Billingsley. Measure and probability. 1995.

[BL21] G Jogesh Babu and Bing Li. A revisit to le cam's first lemma. *Sankhya A*, Vol. 83, No. 2, pp. 597–606, 2021.

[VdV00] Aad W Van der Vaart. *Asymptotic statistics*, Vol. 3. Cambridge university press, 2000.

[佐藤 94] 佐藤坦. はじめての確率論 測度から確率へ. 共立出版, 1994.

[舟木 04] 舟木直久. 確率論. 講座数学の考え方 / 飯高茂 [ほか] 編. 朝倉書店, 2004.

[杉浦] 杉浦光夫. 基礎数学 2 解析入門 1, 第 2 巻. 東京大学出版会.