AI Angewandte Informatik

Hochschule Fulda
University of Applied Sciences

Prof. Dr.-Ing. Martin Kumm

5. Übungsblatt - Schaltnetze II

Digitaltechnik und Rechnersysteme • Wintersemester 2023/2024

1 Gruppenübung

1.1 Boolesche Algebra II

Vereinfachen Sie die folgenden Booleschen Funktionen durch algebraische Umformung. Stellen Sie das Ergebnis in disjunktiver Normalform (DNF) dar.

a) $f(a,b) = a + \overline{a+b}$ $= a + \bar{a}\bar{b} = a + \bar{b}$

b) $g(a,b,c) = a\cdot b\cdot \bar{b} + ac + a\cdot\bar{c}\,b$ $= ac\cdot(b+\bar{b}) + ab\bar{c} = ac + ba\bar{c} = a\cdot(c+b\bar{c}) = a\cdot(c+b) = ac + ab$

c) $h(x,y) = \overline{\overline{x+x\cdot y}\cdot(\bar{x}\cdot x+y)}$ $= \overline{\bar{x}\cdot(x+y)} = x + \overline{x+y} = x + \bar{x}\bar{y} = x + \bar{y}$

d) $i(a,b,c,d) = abcd + a\bar{b} + a\bar{b} + \bar{a}$

$= ab\cdot(cd+\bar{c}) + a\bar{b} + \bar{a} = ab\cdot(\bar{c}+d) + a\bar{b} + \bar{a} = ab\bar{c} + abd + a\bar{b} + \bar{a}$

$= ab\bar{c} + abd + \bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + a\bar{c} + \bar{a} + bd = \bar{a} + \bar{c} + \bar{b} + d$

1.2 Äquivalenz

Zeigen Sie mit Hilfe der Booleschen Algebra, dass die folgenden Beziehungen gültig sind:

$$x \equiv y = \overline{x \oplus y}$$

$$x \equiv y = \bar{x} \oplus y$$

$x \to y \cdot y \to x = (\bar{x}+y)\cdot(\bar{y}+x) = \bar{x}\bar{y} + \bar{x}x + y\bar{y} + yx$

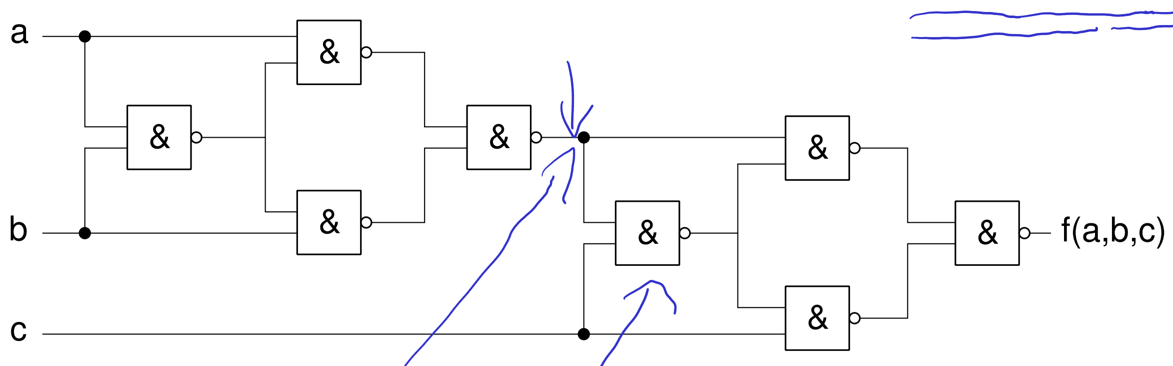
$= \bar{x}\bar{y} + yx = \bar{x}\bar{y} + xy = \overline{x \oplus y}$

identisch $\square$

$\bar{x} \oplus y = \bar{x}\cdot\bar{y} + xy$

1.3 Schaltungsanalyse *(6 Punkte)*

a) Welche Funktion $f(a,b,c)$ implementiert die folgende Schaltung? Geben Sie die vereinfachte Funktion an ein zeichnen Sie das resultierende Schaltbild.



$\cdot\, c$

$f(a,b,c) = \overline{\overline{\overline{\overline{ab}\cdot a}\cdot\overline{\overline{ab}\cdot a}}\cdot c}\cdot c \cdot \overline{\overline{ab\cdot a}\cdot\overline{ab\cdot a}\cdot c} \cdot \overline{ab\,a}\cdot\overline{ab\,a}$

$= \overline{\overline{\overline{aba}\cdot\overline{aba}\cdot c}\cdot c} + \overline{\overline{\overline{aba}\cdot\overline{aba}\cdot c}\cdot\overline{\overline{cba}\cdot\overline{cba}}}$

$=(\overline{ab}a\cdot\overline{ab}a+\overline{c})c + (\overline{a}ba\cdot a\overline{b}a+\overline{c})\cdot(\overline{a}ba+a\overline{b}a) = (\overline{a}ba+\overline{c})\cdot c + (\overline{aba}+\overline{c})\cdot(\overline{aba})$

$ab+\overline{a}=\overline{a}+b$

b) Simulieren Sie die das oben gezeigte Schaltbild sowie das von Ihnen vereinfachte Schaltbild mit einem Logiksimulator und zeigen Sie damit, dass beide Schaltungen die identische Funktionalität realisieren. Freie Logiksimulatoren finden Sie u.A. unter:

- LogiSim (Java-Anwendung): `http://www.cburch.com/logisim/de/index.html` (Achtung, hier werden die US-Symbole der Logikgatter verwendet!)
- LogicSim von Andreas Tetzl (Java-Anwendung): `http://www.tetzl.de/java_logic_simulator.html`
- Online Logiksimulator von circuitverse.org: `https://circuitverse.org/simulator` (Achtung, hier werden die US-Symbole der Logikgatter verwendet!)

Hinweise:

- *Überlegen Sie, ob Sie die Analyse vereinfachen können, indem Sie identische Schaltungsteile zusammenfassen.*
- *Sie können die Aufgabe sowohl mit Hilfe der Booleschen Algebra als auch mit Wahrheitstabellen lösen. Probieren Sie aus ob bei beidem das gleiche herauskommt!*

2 Hausübung

2.1 Boolesche Algebra (*6 Punkte*)

a) Vereinfachen Sie die folgenden Booleschen Funktionen durch algebraische Umformung. Stellen Sie das Ergebnis in disjunktiver Normalform (DNF) dar.

   a) $j(a,b,c,d) = a\overline{b} + c + \overline{a}\,\overline{c}\,d + b\overline{c}\,d$ $= a\overline{b} + c + \overline{a}d + b\overline{c}d = a\overline{b} + c + bd + \overline{a}d$

   b) $k(a,b,c,d) = \overline{\overline{a}\,b\,\overline{c}} \cdot \overline{a\,\overline{b}\,\overline{c}}$ $= (a+\overline{b}+c)\cdot(\overline{a}+b+c) = \cancel{a\overline{a}} + ab + ac + \overline{b}\overline{a} + \cancel{\overline{b}b} + \overline{b}c + c\overline{a} + cb + cc$

   c) $l(a,b,c,d) = abc + a\overline{b} + a\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,d + \overline{a}\,c$ $= ab + \overline{b}\overline{a} + c$

   d) $m(a,b,c,d) = (a\overline{b} + c)\cdot\overline{ab + \overline{a}\,\overline{c}}$.

b) Ermitteln Sie die Wahrheitstabelle von $j(a,b,c,d)$ vor und nach der Vereinfachung und überzeugen sich, dass beide identisch sind.

c) Ermitteln Sie die KDNF von $j(a,b,c,d)$.

2.2 Fahrzeugantrieb II

a) Vereinfachen Sie die Funktionen des Fahrzeugantriebs aus Übungsblatt ~~3~~ 4 mit Hilfe der Gesetze der Booleschen Algebra.

b) Simulieren Sie die Schaltbilder der beiden Funktionen mit einem Logiksimulator und überprüfen Sie damit, dass beide Schaltungen die identische Funktionalität realisieren. (Zur Abgabe dieses Teils reicht ein Screenshot der Schaltbilder im Simulationsprogramm.)

2.3 Konsensus-Gleichung *(4 Punkte)*

Leiten Sie die Konsensus-Gleichung

$$x \cdot y + \overline{x} \cdot z + y \cdot z = x \cdot y + \overline{x} \cdot z$$

durch algebraische Umformungen aus den Gleichungen der Formelsammlung ab, ohne jedoch die Konsensus-Gleichung selbst zu verwenden.

Hinweis: Erweitern Sie den Term $y \cdot z$ mit der Identität und führen Sie diese auf das Komplement zurück.

2.1 c) $abc + ab\bar{d} + a\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}c$

$= a\cdot(bc+\bar{c}) + ab\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}c = ab + a\bar{c} + ab\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}c$

$= ab + a\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}c = ab + \bar{c}\cdot(a + \bar{a}\bar{b}d) + \bar{a}c = ab + \bar{c}\cdot(a+\bar{b}d) + \bar{a}c$

$= \underline{\underline{ab + \bar{c}a + \bar{c}\bar{b}d + \bar{a}c}}$

2.1 d) $(a+\bar{b}+c)\cdot\overline{ab+\bar{a}\bar{c}} = (a+\bar{b}+c)\cdot((\bar{a}+\bar{b})\cdot(a+c)) =$

$(a+\bar{b}+c)\cdot(\bar{a}c + \bar{b}a + \bar{b}c) = \cancel{a\bar{b}} + a\bar{b}c + \bar{a}c\bar{b} + a\bar{b} + \cancel{\bar{b}c} + \bar{a}c + \cancel{a\bar{b}c}$

$+ \bar{b}c = a\bar{b}c + \bar{a}c\bar{b} + \cancel{a\bar{b}} + \bar{a}c + \bar{b}c = a\bar{b} + \bar{a}c\bar{b} + \bar{a}c + \bar{b}c$

$= a\bar{b} + \bar{a}c + \bar{b}c = a\bar{b} + \bar{a}c$

2.1 b) $j_1(a,b,c,d) = a\bar{b} + c + \bar{a}\bar{c}d + b\bar{c}d$ $\quad j_2(a,b,c,d) = a\bar{b} + c + bd + \bar{a}d$

a	b	c	d	j_1	j_2
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1

identisch

2.1 c) KDNF: $j(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}bc\bar{d}$
$+ \bar{a}bcd + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}d + a\bar{b}c\bar{d} + a\bar{b}cd + ab\bar{c}d$
$+ abc\bar{d} + abcd$

2.2 $\quad s_l = a \quad s_r = b$

$m_l(M,a,b) = \bar{M}\bar{a}b + \bar{M}ab + M\bar{a}\bar{b} + Ma\bar{b}$

$m_r(M,a,b) = \bar{M}a\bar{b} + \bar{M}ab + M\bar{a}\bar{b} + M\bar{a}b$

$$= \overline{M} b + M \bar{b} = M \otimes b$$

$$= \overline{M} a + M \bar{a} = M \otimes a$$

2.3 $\quad xy + \bar{x}z + yz = xy + \bar{x}z$

$$
\begin{aligned}
& xy + \bar{x}z + yz && \text{xy erw. mit } z + \bar{z} \\
&= xyz + xy\bar{z} + \bar{x}z + yz && \text{Absorption 1} \\
&= yz + xy\bar{z} + \bar{x}z && \text{yz erw. mit } x + \bar{x} \\
&= yzx + yz\bar{x} + xy\bar{z} + \bar{x}z && \text{Absorption 1} \\
&= \bar{x}z + yzx + xy\bar{z} && \text{ausklammern} \\
&= \bar{x}z + xy \cdot (z + \bar{z}) \\
&= \underline{\underline{\bar{x}z + xy}} \quad \square
\end{aligned}
$$