Hochschule Fulda
Fachbereich Angewandte Informatik
Prof. Dr. A. Radl

Wintersemester 2023/2024
Mathematische Grundlagen – AI1004
Besprechung: 09.11.–14.11.2023

Übungsblatt 3

(Summenzeichen, Binomialkoeffizienten, vollständige Induktion)

Aufgabe 1
Schreiben Sie folgende Ausdrücke mit Hilfe des Summenzeichens:

(a) $1^2 + 2^3 + 3^4 + 4^5 + 5^6$,

(b) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}$,

(c) $4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22$.

Aufgabe 2
Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}^*$ folgende Identitäten mit Hilfe des Binomischen Satzes:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Aufgabe 3
Zeigen Sie nachfolgende Behauptungen jeweils mit vollständiger Induktion.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ gilt
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$2^n \geq n + 1.$$

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ ist die Zahl $3^n - 3$ ohne Rest durch 6 teilbar.

Aufgabe 4 (Zum Knobeln – wenn noch Zeit ist ...)
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ die Potenzmenge von $\{1, \ldots, n\}$ genau 2^n Elemente enthält.

Aufgabe 5 (Wenn noch Zeit ist ...)
Zeigen Sie folgende Identitäten für die Binomialkoeffizienten:

(a) $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$, falls $n \in \mathbb{N}^*$,

(b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, falls $n, k \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$.

(c) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, falls $n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}$ und $k + 1 \leq n$.