Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2023/2024

KAPITEL I: Grundlagen

1. Mengen

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl

Email: agnes.radl@informatik.hs-fulda.de

Mengen

Georg Cantor[1] (1895) „Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

Notation

- $m \in M$ oder $M \ni m$, falls m ein Element der Menge M ist.
- $m \notin M$ oder $M \not\ni m$, falls m kein Element der Menge M ist.

Beispiel

- $M = \{1, 2, 3, 5\}$; dann $5 \in M$, $4 \notin M$;
  beachte: $\{1, 2, 2\} = \{1, 2\}$ und $\{1, 2\} = \{2, 1\}$
- $\mathbb{N}$ (Menge der natürlichen Zahlen), also $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\{m \in \mathbb{N} : m \text{ gerade}\}$

[1] Georg Cantor (1845–1918), deutscher Mathematiker

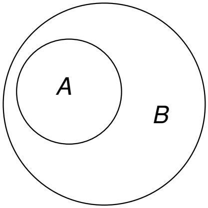
leere Menge

$\emptyset$ oder $\{\}$

Menge, die kein Element enthält.

Teilmenge, Obermenge

Seien A und B Mengen.



$$A \subseteq B,$$

falls für alle $x \in A$ auch $x \in B$ gilt.

- A ist eine Teilmenge von B bzw.
- B ist eine Obermenge von A.

Beispiel

- $\{1, 4\} \subseteq \{1, 2, 4, 5\}$
- $\{2n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$

Bemerkung

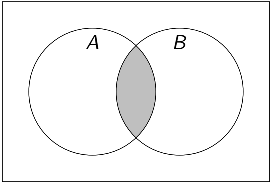
- Für jede Menge A gilt:
  $\emptyset \subseteq A, \;\; A \subseteq A$.
- $A = B$ bedeutet $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

Durchschnitt

Seien A und B Mengen.

Durchschnitt von A und B:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$$



Beispiel

- $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 5, 12\}$, $A \cap B = \{1, 5\}$
- $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{3, 4\}$, $A \cap B = \emptyset$
- $A = \emptyset$, B beliebige Menge: $A \cap B = \emptyset$
- Ist $A \subseteq B$, dann ist $A \cap B = A$.
- $A \cap A = A$

Bemerkung

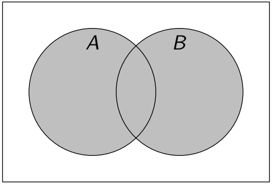
- A und B heißen disjunkt, falls $A \cap B = \emptyset$.

Vereinigung

Seien A und B Mengen.

Vereinigung von A und B:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$$



Beispiel

- $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 5, 12\}$, $\quad A \cup B = \{1, 2, 5, 12\}$
- $A = \emptyset$, B beliebige Menge: $\quad A \cup B = B$
- $A \cup A = A$

Bemerkung

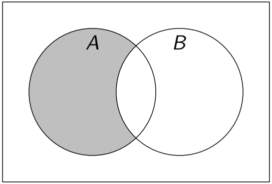
- disjunkte Vereinigung: $A \dot\cup B$ bedeutet $A \cup B$, wobei $A \cap B = \emptyset$.

Differenz

Seien A und B Mengen.

Differenz von A und B:

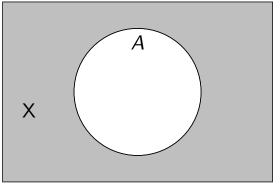
$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}$$



Beispiel

- $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 5, 12\}$, $A \setminus B = \{2\}$
- $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \setminus B = \emptyset$

Komplement



Seien A und X Mengen, wobei $A \subseteq X$.

Komplement von A in X:

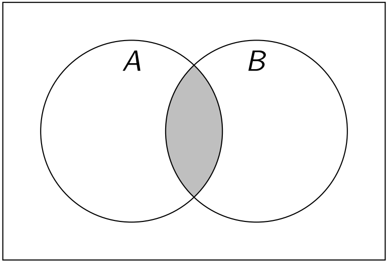
$$\overline{A} = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}$$

Beispiel

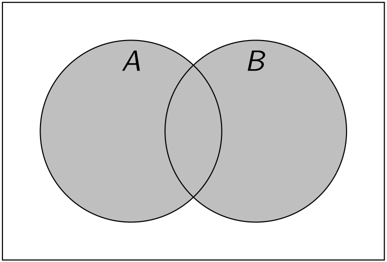
- $X = \mathbb{N}$, $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, $\quad \overline{A} = \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$

Zusammenfassung der Venn-Diagramme

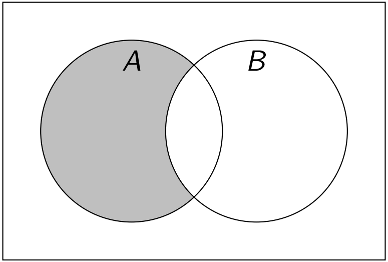
$A \cap B$



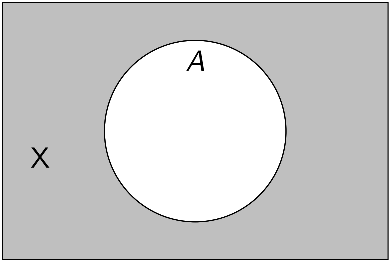
$A \cup B$



$A \setminus B$

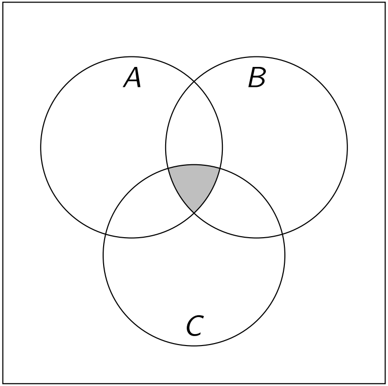


$\overline{A}$

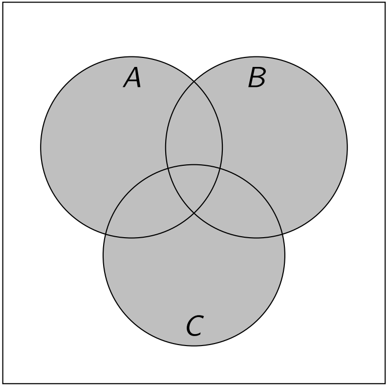


Venn-Diagramme mit 3 Mengen (Beispiele)

$A \cap B \cap C$



$A \cup B \cup C$



Rechenregeln für Mengen

Es seien A, B, C Mengen. Dann gelten die folgenden Regeln:

Assoziativgesetze (für Vereinigung und Durchschnitt)

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C),\\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C);\end{aligned}$$

Distributivgesetze („Wie vertragen sich Vereinigung und Durchschnitt?“)

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C),\\ (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C);\end{aligned}$$

de Morgansche Regeln

(X Menge, $A, B \subseteq X$; Komplementbildung in X)

$$\begin{aligned}\overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B},\\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}.\end{aligned}$$

kartesisches Produkt

Seien A und B Mengen.

Kartesisches[1] Produkt von A und B:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

Beispiel

- $A = \{2, 5\}, \quad B = \{1, 2, 3\},$
  $A \times B = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$
- $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$: $\quad A \times B = \emptyset$

Bemerkung

Eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$ nennt man eine binäre oder zweistellige Relation.

[1] René Descartes (1596–1650); französischer Mathematiker

Bemerkung

- Durchschnitt und Vereinigung der Mengen $A_1, \dots, A_n$:

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap \dots \cap A_n = \{x : x \in A_1 \text{ und } \dots \text{ und } x \in A_n\},$$

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup \dots \cup A_n = \{x : x \in A_1 \text{ oder } \dots \text{ oder } x \in A_n\},$$

- Das kartesische Produkt der Mengen $A_1, \dots, A_n$:

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n\}.$$

Eine Teilmenge $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$ nennt man eine *n-stellige Relation*.

Potenzmenge

Sei A eine Menge.

Potenzmenge von A:

$$\mathbb{P}(A) = \{M : M \subseteq A\}$$

„Menge aller Teilmengen von A“

Beispiel

- $A = \{2, 5\}, \quad \mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{5\}, \{2, 5\}\}$
- $\mathbb{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\{1, 3, 7\} \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$, $\{3n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$

Endliche Mengen

- Eine Menge A ist endlich, falls $A = \emptyset$ oder die Elemente in A durchnummeriert werden können bis zu einer Zahl $n \in \mathbb{N}$.
- Dabei bezeichnet $|A|$ die Anzahl der Elemente in A.
- Ist A keine endliche Menge so besitzt A unendlich viele Elemente. Notation in diesem Fall: $|A| = \infty$.

Beispiele:

- $|\{1, 7, 11\}| = 3$,
- $|\{1, 2, 2\}| = 2$,
- $|\emptyset| = 0$,
- $|\mathbb{N}| = \infty$.

Wichtige Mengen: Die Zahlbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$ „Menge der natürlichen Zahlen“
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ „Menge der ganzen Zahlen“
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ „Menge der rationalen Zahlen“
- $\mathbb{R} =$ Menge aller Dezimalzahlen „Menge der reellen Zahlen“

Es gilt

$$\mathbb{N}^* \subsetneq \mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

Wichtige Mengen: Intervalle in $\mathbb{R}$

Definition

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Dann definiere

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, (abgeschlossenes Intervall)

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, (offenes Intervall)

- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, (nach rechts halboffenes Intervall)

- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, (nach links halboffenes Intervall)

Intervalle in $\mathbb{R}$ (Fortsetzung)

- a und b sind die Randpunkte des Intervalls.
- $b - a$ ist die Länge des Intervalls.

Uneigentliche Intervalle

Definition

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann definiere

- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$,

- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$,

- $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$,

- $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$,

- $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$.

Notation

Für offene Intervallenden werden statt runden Klammern oft auch eckige Klammern verwendet, also

- $(a, b) =]a, b[$,
- $[a, b) = [a, b[$,
- $(a, b] =]a, b]$,
- $[a, \infty) = [a, \infty[$,
- $(a, \infty) =]a, \infty[$,
- $(-\infty, b] =]-\infty, b]$,
- $(-\infty, b) =]-\infty, b[$,
- $(-\infty, \infty) =]-\infty, \infty[$.