

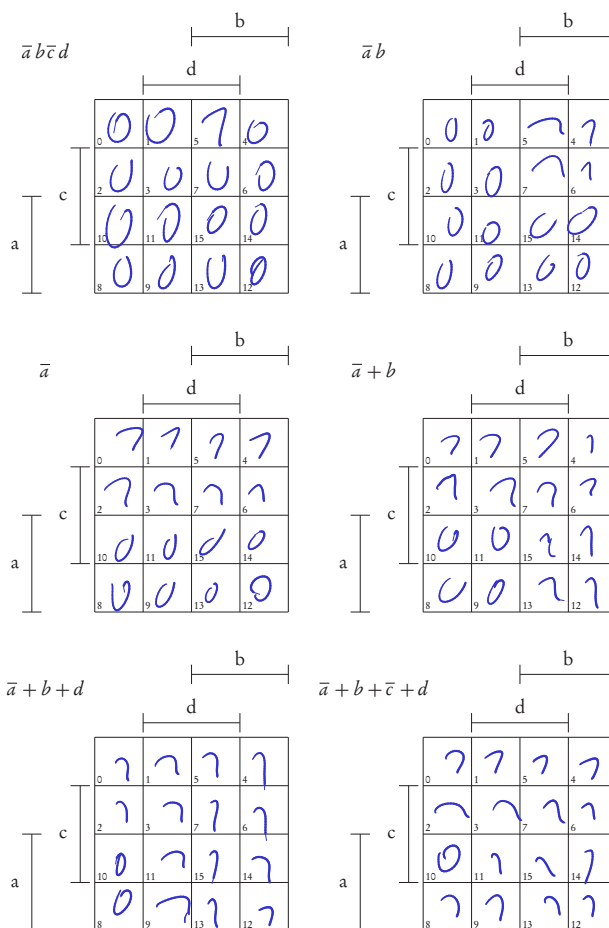
6. Übungsblatt - KV-Minimierung I

Digitaltechnik und Rechnersysteme • Wintersemester 2023/2024

1 Gruppenübung

1.1 KV-Diagramm

Zeichnen Sie die folgenden Terme in die zugehörigen KV-Diagramme von vier Variablen a , b , c und d :



1.2 Synthese einer NAND-Schaltung

Gegeben sei eine boolesche Funktion f in vier Variablen durch ihre Dezimaläquivalentdarstellung

$$f(a, b, c, d) = \{0, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 15\}$$

mit den Wertigkeiten $a = 2^3$, $b = 2^2$, $c = 2^1$, $d = 2^0$.

In der Dezimaläquivalentdarstellung werden die '1'-Stellen der Funktion durch die Dezimalzahlen der Eingabe (entsprechend ihrer Wertigkeiten) angegeben. Beispiel: Hat eine Funktion $g(a, b, c, d)$ eine '1' für $g(0, 0, 1, 1)$, so lautet das Dezimaläquivalent für die oben angegebenen Wertigkeiten entsprechend $0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 3_{10}$.

Es soll die kostengünstigste NAND-Realisierung entwickelt werden. Gehen Sie dazu nach den Teilaufgaben vor und machen Sie sich klar, warum die Teilschritte notwendig sind.

- Erstellen Sie die Wahrheitstabelle (Wertigkeit: $a = 2^3$, $b = 2^2$, $c = 2^1$, $d = 2^0$).
- Zeichnen Sie das KV-Diagramm der Funktion.
- Bestimmen Sie alle Primimplikanten und deren Typ (KPI, AI, oder REPI, siehe Definitionen unten).
- Finden Sie die kostengünstigste DNF mit Hilfe der Primimplikanten.
- Entwickeln Sie aus der DNF die kostengünstigste NAND-Realisierung der Funktion und zeichnen Sie die resultierende Schaltung.

Definitionen:

- Als Primimplikant** werden die größten zusammenhängenden Minterme (oder Maxterme) bezeichnet, die in Gruppen von $1, 2, 4, \dots, 2^N$ Elementen ($N \in \mathbb{Z}_0$) im KV-Diagramm zusammengefasst werden können.
- Kernprimimplikanten (KPI)** sind Primimplikanten, die Minterme (oder Maxterme) überdecken, die von keinem anderen Primimplikanten überdeckt werden.
- Absolut eliminierbare Primimplikanten (AI)** sind Primimplikanten, deren Minterme (oder Maxterme) alle von Kernprimimplikanten überdeckt werden.
- Alle weiteren Primimplikanten sind relativ eliminierbare Primimplikanten (REPI).**

Hinweis: Um eine Funktion nur mit NAND-Gattern zu realisieren, versuchen Sie die AND/OR-Realisierung durch mittels Involution und dem Satz von De Morgan umzuformen.

1.3 Synthese einer minimierten Schaltung

Gegeben sei die Boolesche Funktion $f(a, b, c, d)$.

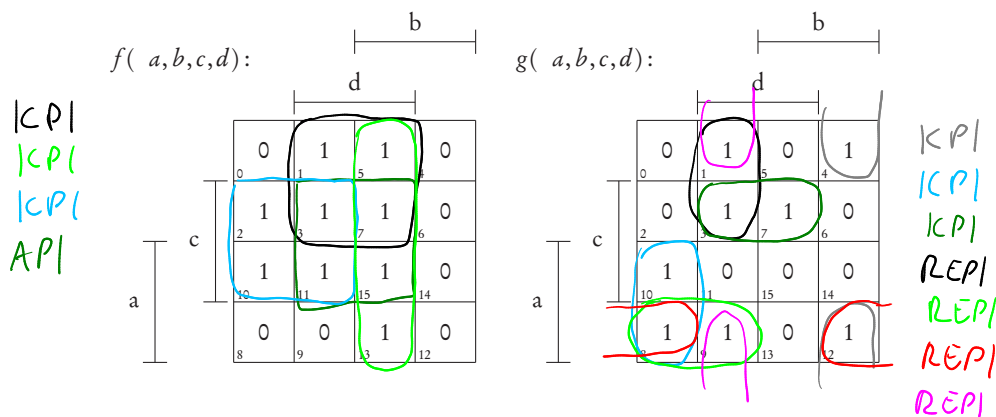
$$f(a, b, c, d) = \bar{a}\bar{b}c + b\bar{c}d + acd + a\bar{b}d + \bar{a}bd + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + a\bar{b}c\bar{d}$$

- Zeichnen Sie das KV-Diagramm der Funktion (möglichst ohne eine Wahrheitstabelle zu verwenden).
- Bestimmen Sie alle Primimplikanten aus den Mintermen sowie den Maxtermen und geben Sie deren Typ an (Beachten Sie die Definitionen aus Aufgabe 1.2).
- Bestimmen Sie die minimale/ kostengünstigste DNF und KNF durch Ablesen aus dem KV-Diagramm.
- Zeichnen Sie die Schaltung der minimalen DNF und KNF als zweistufige AND/OR bzw. OR/AND Realisierung der Funktion.

2 Hausübung

2.1 Typisierung von Primimplikanten (2 Punkte)

Markieren Sie die Primimplikanten im folgenden KV-Diagramm und geben Sie deren Typ an (KPI: Kernprimimplikant, ~~AI~~: Absolut eliminierbarer Primimplikant, REPI: Relativ eliminierbarer Primimplikant).

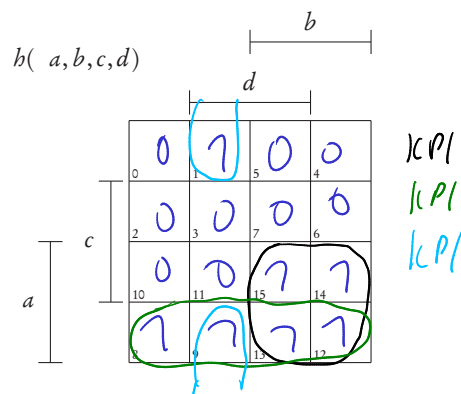


2.2 Minimierung mit KV-Diagrammen (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$h(a, b, c, d) = abc + a\bar{b} + a\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}c$$

- a) Ermitteln Sie das KV-Diagramm der Funktion $h(a, b, c, d)$ und markieren Sie alle Primimplikanten. Verwenden Sie die folgende Variablenanordnung im KV-Diagramm:

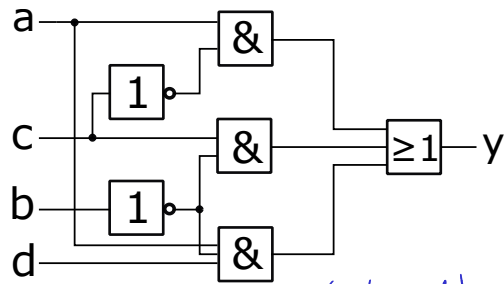


- b) Geben Sie den Typ aller Primimplikanten an (KPI, ~~AI~~, REPI)

- c) Geben Sie die minimierte Funktion als DNF an. $h(a, b, c, d) = \bar{a}b + a\bar{c} + \bar{b}\bar{c}d$

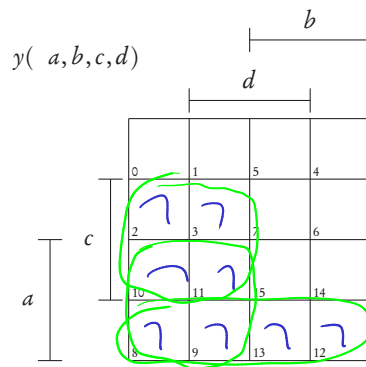
2.3 Schaltungsvereinfachung (4 Punkte)

Vereinfachen Sie folgende Schaltung mithilfe eines KV-Diagramms.



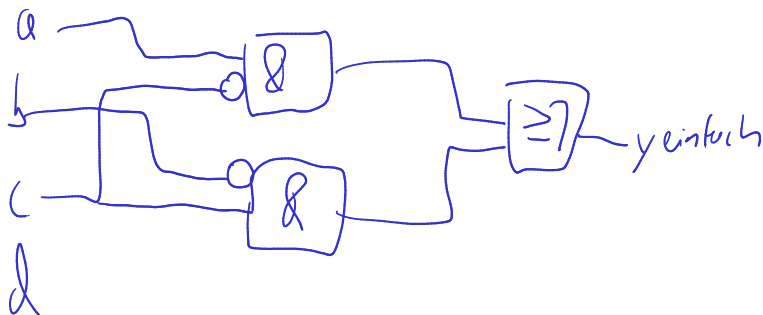
$$y(a,b,c,d) = a\bar{c} + \bar{b}c + a\bar{b}d$$

Verwenden Sie die folgende Variablenanordnung:



$$y_{\text{einfach}}(a,b,c,d) = \underline{\underline{a\bar{c} + \bar{b}c}}$$

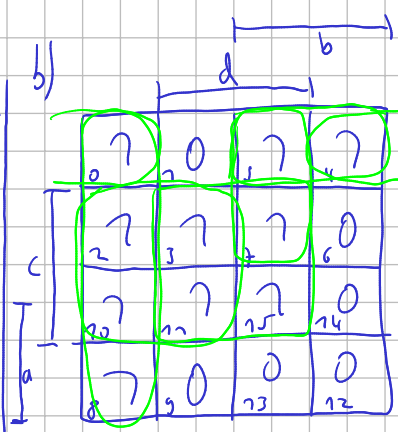
Zeichnen Sie das Schaltbild (auf Gatterebene) der vereinfachten Schaltung.



7.2

a)

a	b	c	d	$f(a,b,c,d)$	Σ
0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	2
0	0	1	1	1	3
0	1	0	0	1	4
0	1	0	1	1	5
0	1	1	0	0	6
0	1	1	1	1	7
1	0	0	0	1	8
1	0	0	1	0	9
1	0	1	1	1	10
1	1	0	0	0	11
1	1	0	1	0	12
1	1	1	0	0	13
1	1	1	1	0	14
1	1	1	1	1	15



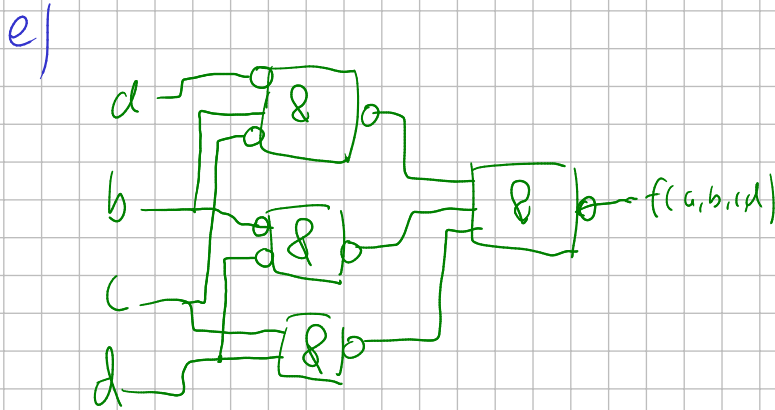
c) DPs: $cd, c\bar{b}, \bar{b}\bar{d}, \bar{a}bd, \bar{a}b\bar{c}, \bar{a}\bar{c}\bar{d}$
 KPI: $cd, c\bar{b}, \bar{b}\bar{d}, \bar{a}bd, \bar{a}b\bar{c}, \bar{a}\bar{c}\bar{d}$

d)

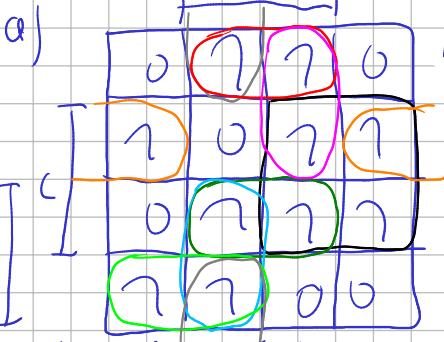
$$f(a,b,c,d) = cd + \bar{b}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}$$

$$= \overline{cd + \bar{b}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}}$$

$$= \overline{cd \cdot \bar{b}\bar{d} \cdot \bar{a}b\bar{c}}$$

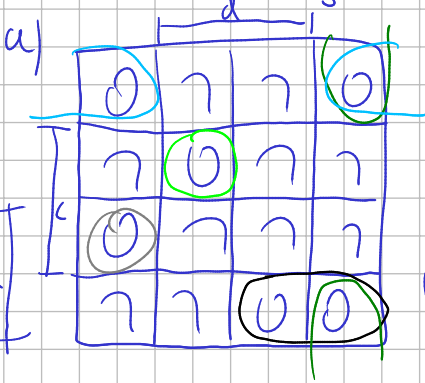


7.3



b) $bc \rightarrow KPI$
 $acd \rightarrow RPI$
 $a\bar{b}d \rightarrow RPI$
 $\bar{a}\bar{b}\bar{c} \rightarrow KPI$
 $\bar{b}\bar{c}d \rightarrow RPI$

c) DNF: $f(a,b,c,d) = bc + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{c}\bar{d} + acd + \bar{a}\bar{c}d$

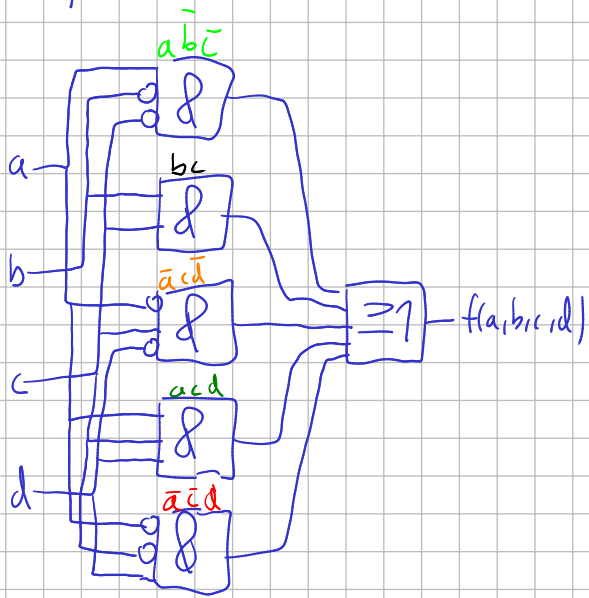


$\bar{a}\bar{c}d \rightarrow RPI$
 $\bar{a}bd \rightarrow RPI$
 $\bar{a}\bar{c}\bar{d} \rightarrow KPI$

b) $a\bar{b} + \bar{c} \rightarrow KPI$
 $\bar{c} + b + d \rightarrow RPI$
 $\bar{a} + \bar{c} + d \rightarrow KPI$
 $\bar{a} + c + d + b \rightarrow KPI$
 $a\bar{b} + c + d \rightarrow KPI$

c) CNF: $f(a,b,c,d) = (a + b + \bar{c}) \cdot (\bar{a} + \bar{c} + d) \cdot (\bar{b} + c + d) \cdot (a + \bar{b} + \bar{c})$

2/ ONF



KNF

