Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2023/2024

KAPITEL III: Relationen und Abbildungen

1. Grundbegriffe

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl

Email: agnes.radl@informatik.hs-fulda.de

Binäre Relationen

Erinnerung: Sind A und B Mengen und $R \subseteq A \times B$, so bezeichnet man R als binäre oder zweistellige Relation zwischen A und B.

Definition

Eine binäre Relation $R \subseteq A \times B$ heißt

- linkstotal, falls für alle $x \in A$ ein $y \in B$ existiert mit $(x, y) \in R$.
- rechtstotal, falls für alle $y \in B$ ein $x \in A$ existiert mit $(x, y) \in R$.
- linkseindeutig, falls für alle $x_1, x_2 \in A$ und für alle $y \in B$ aus $(x_1, y), (x_2, y) \in R$ folgt, dass $x_1 = x_2$.
- rechtseindeutig, falls für alle $x \in A$ und für alle $y_1, y_2 \in B$ aus $(x, y_1), (x, y_2) \in R$ folgt, dass $y_1 = y_2$.

<u>Bsp.:</u> $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6\}$

1.) $R_1 = \{(1,4),(2,4),(2,5),(2,6)\}$
- nicht linkstotal
- rechtstotal
- nicht linkseindeutig
- nicht rechtseindeutig

2.) $R_2 = \{(3,6),(1,4),(2,5)\}$
- linkstotal
- rechtstotal
- linkseindeutig
- rechtseindeutig

3.) $R_3 = \{(1,4),(1,5),(1,6)\}$
- linkseindeutig
- nicht rechtseindeutig

4.) $A = B = \mathbb{R}$

$R_{\leq} = \{(x,y) : x \leq y\}$

Bsp.: $(1,1), (2,3), (-10,-1) \in R_{\leq}$; $(3,2) \notin R_{\leq}$

- linkstotal ✓ $(x,x) \in R_{\leq}$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- rechtstotal ✓
- nicht linkseindeutig (z.B. $(2,3), (1,3) \in R_{\leq}$)
- nicht rechtseindeutig (z.B. $(1,2), (1,4) \in R_{\leq}$)

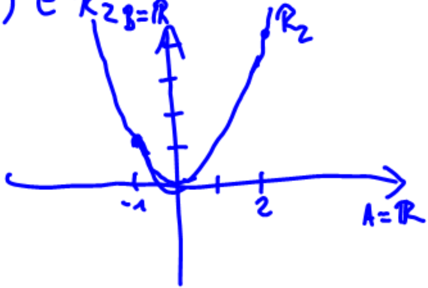
5.) $A = B = \mathbb{R}$

$R_2 = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$

- linkstotal ✓
- nicht rechtstotal (auf rechter Seite stehen nie negative Zahlen)
- nicht linkseindeutig ($(-3,9), (3,9) \in R_2$)

• rechtseindeutig

$(2,4), \; (\sqrt{2},2), \; (-1,1) \in R_2$



Funktionen

Definition

Seien A und B Mengen. Eine Relation $R \subseteq A \times B$ ist eine Abbildung oder Funktion, falls sie

- linkstotal

und

- rechtseindeutig

ist.

<u>Bsp.:</u> R_2 von oben ist eine Funktion.

Funktionen

Definition

Seien A und B Mengen. Eine Relation $R \subseteq A \times B$ ist eine Abbildung oder Funktion, falls sie

- linkstotal

und

- rechtseindeutig

ist.

Bemerkung

Das heißt, *jedem* Element in A wird *genau ein* Element in B zugeordnet.

Funktionen (informell)

Seien A und B Mengen.

Eine Abbildung oder Funktion von A nach B ist eine Vorschrift f, die jedem $x \in A$ genau ein Element $f(x) \in B$ zuordnet.

Notation: $f : A \to B, x \mapsto f(x)$.

Bsp.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$

Funktionen (informell)

Seien A und B Mengen.

Eine Abbildung oder Funktion von A nach B ist eine Vorschrift f, die jedem $x \in A$ genau ein Element $f(x) \in B$ zuordnet.

Notation: $f : A \to B, x \mapsto f(x)$.

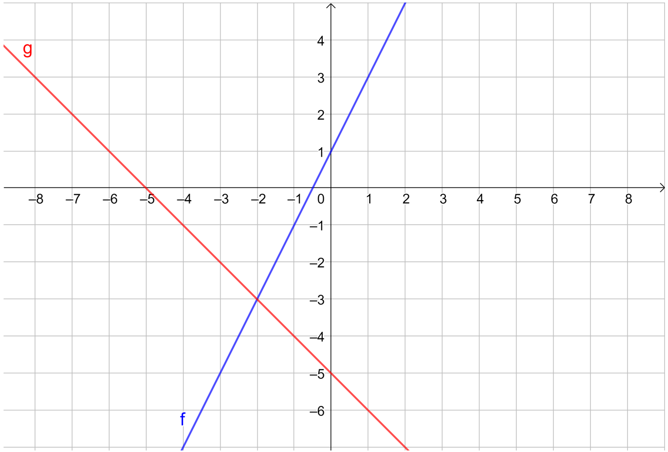
- A ist der Definitionsbereich von f.
- B ist die Zielmenge.
- $G(f) := \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq A \times B$ ist der Graph von f.

$\{(x,x^2) : x \in A\}$ in dem Beispiel oben ist der Graph.

Beispiele zur Visualisierung von Graphen

Graph von Geraden

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x + 1$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -x - 5$$



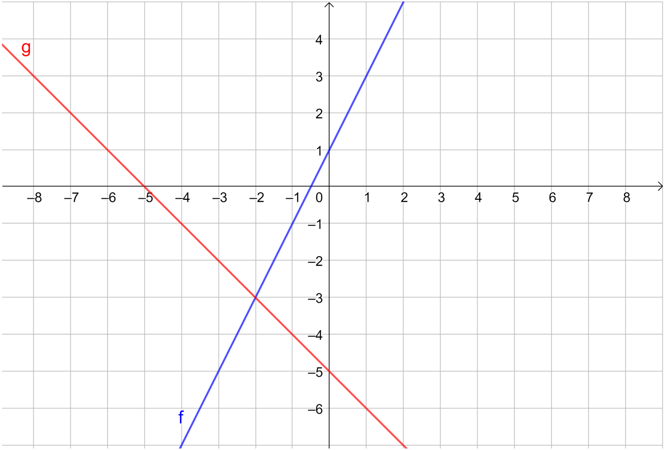
Graph von Geraden

$G(f) = \{(x, 2x+1) : x \in \mathbb{R}\}$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x + 1$$

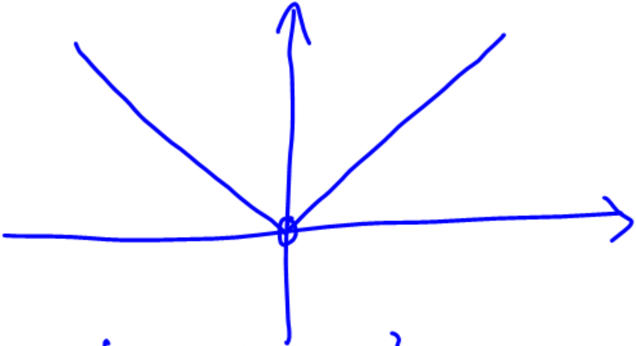
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -x - 5$$

$G(g) = \{(x, -x-5) : x \in \mathbb{R}\}$



Graph der Betragsfunktion

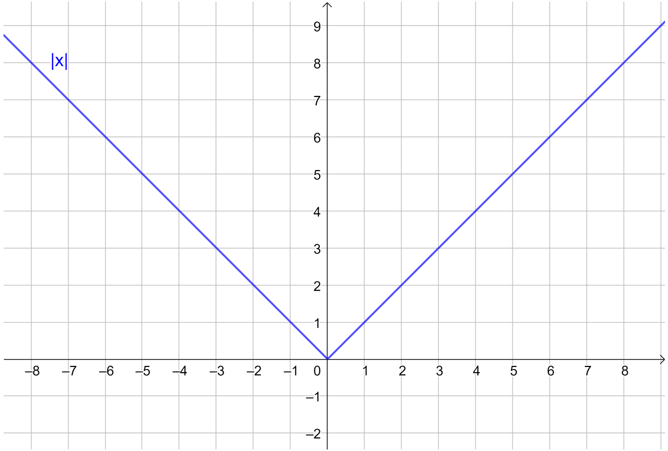
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|\,, \text{ wobei } |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$



$$G(f) = \{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}\}$$

Graph der Betragsfunktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|\,, \text{ wobei } |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$



Graph von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

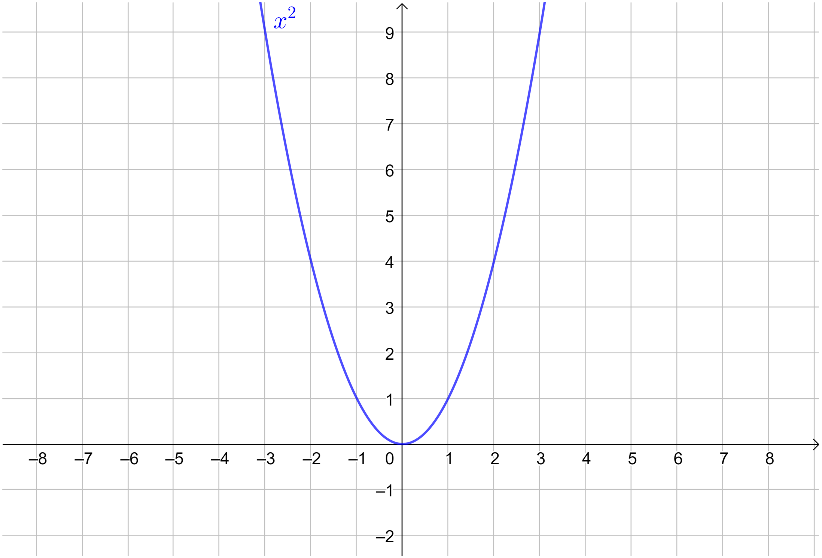


Bild und Urbild einer Abbildung

Seien A und B Mengen und sei $f : A \to B$ eine Abbildung.

- Für $M \subseteq A$ ist $\overbrace{f(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Menge}}}{M})}^{\text{Menge}} := \{f(x) : x \in M\} \subseteq B$ ist das Bild von M unter f.

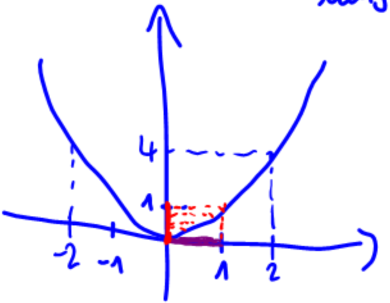
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$

$f([0,1]) = \{x^2 : x \in [0,1]\}$
$= [0,1]$

$f([0,2]) = [0,4]$

$f([-2,0]) = [0,4]$

$f([-2,2]) = [0,4]$



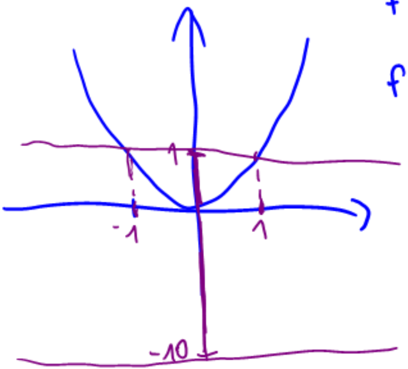
$f(\mathbb{R}) = [0,\infty)$
$= \{x^2 : x \in \mathbb{R}\}$

Bild und Urbild einer Abbildung

Seien A und B Mengen und sei $f : A \to B$ eine Abbildung.

- Für $M \subseteq A$ ist $f(M) := \{f(x) : x \in M\} \subseteq B$ das Bild von M unter f.
- Für $N \subseteq B$ ist $f^{-1}(N) := \{x \in A : f(x) \in N\} \subseteq A$ das Urbild von N unter f.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$



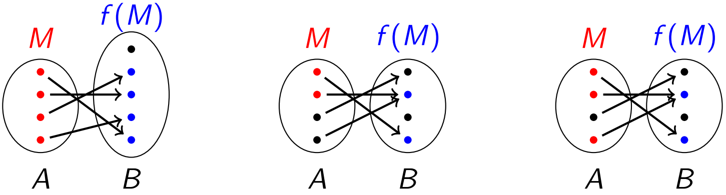
$f^{-1}([0,1]) = [-1,1]$

$f^{-1}([-10,1]) = [-1,1]$

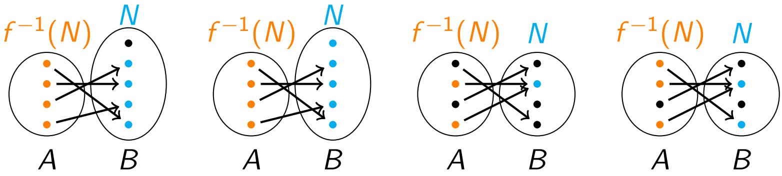
$f^{-1}([0,4]) = [-2,2]$

Beispiele (Bild, Urbild)

Bild von M unter f

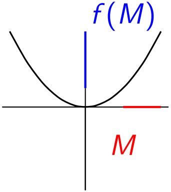


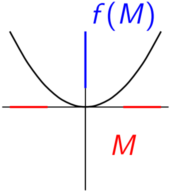
Urbild von N unter f



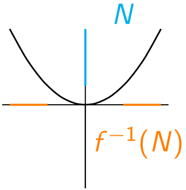
Beispiele (Bild, Urbild)

Bild





Urbild



Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2023/2024

KAPITEL III: Relationen und Abbildungen

2. Injektiv, surjektiv, bijektiv

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl

Email: agnes.radl@informatik.hs-fulda.de

injektiv, surjektiv, bijektiv

Definition

Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

- injektiv, falls für alle $x_1, x_2 \in A$ aus $f(x_1) = f(x_2)$ stets $x_1 = x_2$ folgt.
  Die zu Grunde liegende Relation ist also linkseindeutig.

$$\forall x_1, x_2 \in A: \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\forall x_1, x_2 \in A: \quad \neg(x_1 = x_2) \Rightarrow \neg\big(f(x_1) = f(x_2)\big)$$

$$\forall x_1, x_2 \in A: \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\forall x_1, x_2 \in A: \quad \neg\big(f(x_1) = f(x_2)\big) \vee x_1 = x_2$$

$$\forall x_1, x_2 \in A: \quad f(x_1) \neq f(x_2) \vee x_1 = x_2$$

Negation:

$$\exists x_1, x_2 \in A: \quad f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2$$

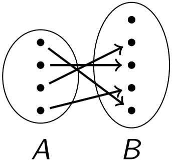
injektiv, surjektiv, bijektiv

Definition

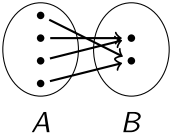
Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

- injektiv, falls für alle $x_1, x_2 \in A$ aus $f(x_1) = f(x_2)$ stets $x_1 = x_2$ folgt. „Auf jedes Element in B wird höchstens einmal abgebildet."
  Die zu Grunde liegende Relation ist also linkseindeutig.
- surjektiv, wenn es für alle $y \in B$ ein $x \in A$ gibt mit $y = f(x)$, (d. h. f(A)=B). „Auf jedes Element in B wird mindestens einmal abgebildet."
  Die zu Grunde liegende Relation ist also rechtstotal.
- bijektiv, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.
  „Auf jedes Element in B wird genau einmal abgebildet."

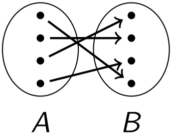
injektiv



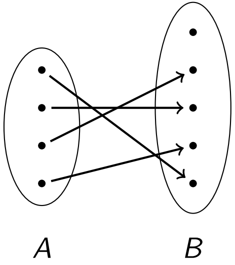
surjektiv



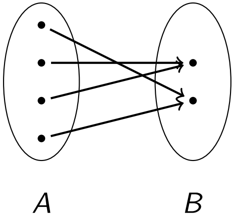
bijektiv



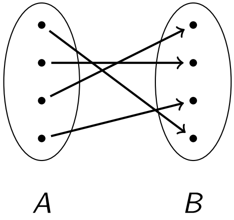
injektiv, surjektiv, bijektiv



injektiv
nicht surjektiv
nicht bijektiv



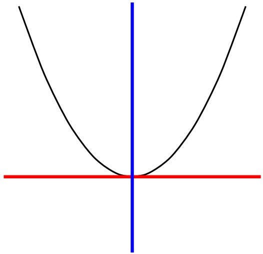
nicht injektiv
surjektiv
nicht bijektiv



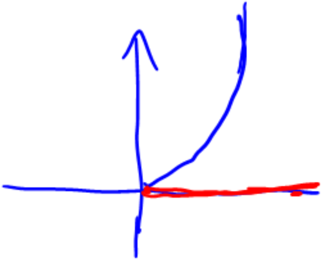
injektiv
surjektiv
bijektiv

Beispiel: $x \mapsto x^2$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



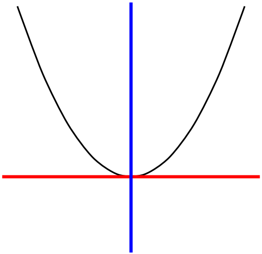
nicht injektiv
nicht surjektiv
nicht bijektiv



$$f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

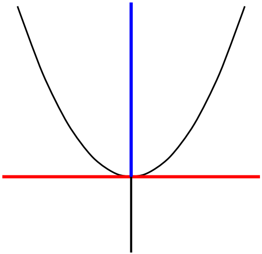
Beispiel: $x \mapsto x^2$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



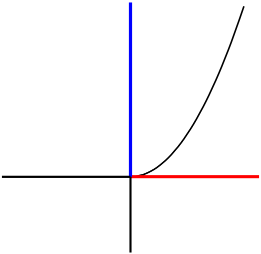
nicht injektiv
nicht surjektiv
nicht bijektiv

$f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$



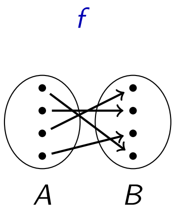
nicht injektiv
surjektiv
nicht bijektiv

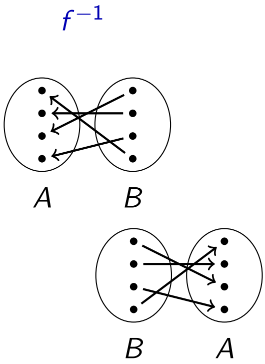
$f : [0, \infty) \to [0, \infty)$



injektiv
surjektiv
bijektiv

Umkehrfunktion





Ist f bijektiv, so besitzt f eine Umkehrfunktion oder Inverse

$$f^{-1} : B \to A,$$

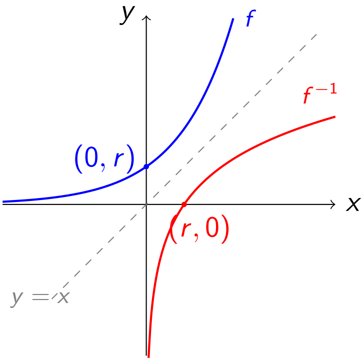
wobei $f^{-1}(y) = x$ genau dann, wenn $f(x) = y$.

Graph der Umkehrfunktion

Ist f bijektiv, so besitzt f eine Umkehrfunktion oder Inverse

$$f^{-1} : B \to A,$$

wobei $f^{-1}(y) = x$ genau dann, wenn $f(x) = y$.



Bemerkung

Zeichnerisch erhält man den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} durch Spiegelung des Graphen von f an der 1. Winkelhalbierenden.

Komposition

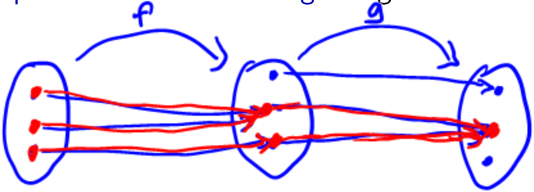
Definition

Sind $f : A \to B$ und $g : C \to D$ Funktionen mit $f(A) \subseteq C$, so ist

$$g \circ f : A \to D, \quad x \mapsto g(f(x))$$

Sprich: „g nach f"

die Komposition oder Verkettung von g und f.



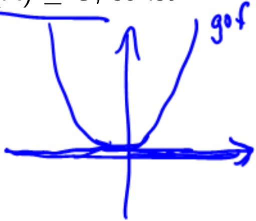
Komposition

Definition

Sind $f : A \to B$ und $g : C \to D$ Funktionen mit $f(A) \subseteq C$, so ist

$$g \circ f : A \to D, \quad x \mapsto g(f(x))$$

die Komposition oder Verkettung von g und f.



$f(A) = [0, \infty) \subseteq C = \mathbb{R}$ ✓

Beispiel

$f : \overset{A}{\mathbb{R}} \to \overset{B}{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto x^2, \qquad g : \overset{C}{\mathbb{R}} \to \overset{D}{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto x^3,$

$g \circ f : \overset{A}{\mathbb{R}} \to \overset{D}{\mathbb{R}},$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^3 = (x^2)^3 = x^6$

$(g \circ f)(\mathbb{R}) = [0, \infty)$

$(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(1) = 1^3 = 1$

Bsp.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto 1, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^3$

$f(\mathbb{R}) = \{1\} \subseteq \mathbb{R}$ ✓

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1) = 1^3 = 1$

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto 1$

Komposition

Definition

Sind $f : A \to B$ und $g : C \to D$ Funktionen mit $f(A) \subseteq C$, so ist

$$g \circ f : A \to D, \quad x \mapsto g(f(x))$$

die Komposition oder Verkettung von g und f.

Beispiel

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2, \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3,$
$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^3 = (x^2)^3 = x^6$

Bemerkung

Mit id_X bezeichnen wir die Identität auf X: $\mathrm{id}_X : X \to X, x \mapsto x$.

Ist $f : A \to B$ bijektiv, so ist

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A \quad \text{und} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B.$$

Komposition

Definition

Sind $f : A \to B$ und $g : C \to D$ Funktionen mit $f(A) \subseteq C$, so ist

$$g \circ f : A \to D, \quad x \mapsto g(f(x))$$

die Komposition oder Verkettung von g und f.

Beispiel

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2, \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3,$
$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^3 = (x^2)^3 = x^6$

Bemerkung

Mit id_X bezeichnen wir die Identität auf X: $\quad \mathrm{id}_X : X \to X, x \mapsto x$.

Ist $f : A \to B$ bijektiv, so ist

$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$

$f(x) = y$

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A \quad \text{und} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B.$$

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$