# Übungsblatt 7

(geometrische Summenformel, Folgen)

---

**Aufgabe 1**

Bestimmen Sie mit Hilfe der geometrischen Summenformel (siehe Kapitel II.1) folgende Summen:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^k$, (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^k$, (c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^k$,

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10}(-1)^k$, (e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{11}(-1)^k$, (f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2}3^k$.

**Aufgabe 2**

(a) Geben Sie zu nachstehenden Folgen jeweils die Abbildungsvorschrift $\mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto x_n$ an:

(i) $(x_n) = (0, 3, 6, 9, 12, \ldots)$, (ii) $(x_n) = (-4, -1, 2, 5, 8, \ldots)$,

(iii) $(x_n) = (0, -1, 2, -3, 4, \ldots)$, (iv) $(x_n) = (0, 1, -2, 3, -4, \ldots)$,

(v) $(x_n) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots)$, (vi) $(x_n) = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{15}, \frac{1}{31}, \ldots)$.

(b) Die Folge $(a_n)$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 := 2, \quad a_{n+1} := \frac{2a_n}{2 + a_n}.$$

Bestimmen Sie $a_1, a_2$ und $a_3$.

**Aufgabe 3**

Finden Sie jeweils Folgen $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ und $(y_n) \subseteq \mathbb{R}$, so dass nachfolgende Eigenschaften erfüllt sind.

(a) Mindestens eine der Folgen $(x_n)$ bzw. $(y_n)$ divergiert, aber die Folge $(x_n + y_n)$ konvergiert.

(b) Mindestens eine der Folgen $(x_n)$ bzw. $(y_n)$ divergiert, aber die Folge $(x_n \cdot y_n)$ konvergiert.

(c) Die Folgen $(x_n)$ und $(y_n)$ konvergieren, und es ist $x_n < y_n$ für alle $n$, aber es gilt *nicht* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

(d) Die Folge $(x_n)$ divergiert, aber die Folge $(|x_n|)$ konvergiert.

**Aufgabe 4**

Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$, falls

(a) $x_n = \dfrac{3n^2 + 4n + 20}{4n^3 + 1000}$ (b) $x_n = \dfrac{2n^3 + 7n^2 + 12}{5n^3 - n + 3}$ (c) $x_n = \left(2 + \dfrac{3}{n}\right)^5$

**Aufgabe 5** (Teil (b) wenn noch Zeit ist ...)
Für $n \in \mathbb{N}^*$ sei $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

(a) Geben Sie zu $\varepsilon = 10$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ und $\varepsilon = \frac{1}{10^6}$ jeweils ein $N \in \mathbb{N}$ an, so dass $|x_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist.

(b) Zeigen Sie direkt mit der Definition von „Konvergenz gegen $x$“, dass

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$$

gilt.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Wurzelfunktion monoton ist, das heißt, für $x, y \in [0, \infty)$ mit $x \leq y$ gilt auch $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$.