Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2023/2024

KAPITEL II: Zahlbereiche

2. Die ganzen Zahlen und der euklidische Algorithmus

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl

Email: `agnes.radl@informatik.hs-fulda.de`

Menge der ganzen Zahlen

Erinnerung

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ „Menge der ganzen Zahlen“

Teilbarkeit

Definition

$a \in \mathbb{Z}$ heißt durch $b \in \mathbb{Z}$ teilbar, beziehungsweise b teilt a, falls es ein $z \in \mathbb{Z}$ gibt mit $a = z \cdot b$.

Notation: $\begin{cases} b \mid a, & \text{falls } a \text{ durch } b \text{ teilbar,} \\ b \nmid a, & \text{sonst.} \end{cases}$

Division mit Rest

Bemerkung

- Sind $a \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}^*$, so gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q \in \mathbb{Z}$ und $r \in \{0, \dots, m-1\}$, so dass

  $$a = q \cdot m + r.$$

  Dabei ist r der Rest.

  Notation: $r = a \bmod m$
- Beachten Sie, dass der Rest nicht negativ ist!

größter gemeinsamer Teiler

Definition

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und a und b nicht beide $= 0$.

(a) Der größte gemeinsame Teiler $\mathrm{ggT}(a, b)$ von a und b ist die größte Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $k|a$ und $k|b$.

(b) Ist $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$, so heißen a und b teilerfremd.

Bemerkung

- $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(b, a)$
- $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(|a|, |b|)$

Wie findet man den ggT?

Problem:

Gegeben: $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Gesucht: $\mathrm{ggT}(a, b)$

Euklidischer Algorithmus

Satz

Seien $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Folgendes Verfahren endet nach einer endlichen Anzahl von Schritten und liefert $\mathrm{ggT}(a, b)$:

Schritt 0:

$$\begin{cases} a_0 := |a|, \quad a_1 := |b|, & \text{falls } |a| > |b|; \\ a_0 := |b|, \quad a_1 := |a|, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Schritt $k, k \geq 1$:

(„Führe so lange Division mit Rest aus, bis Rest 0 auftaucht.“)

- Bestimme $q_{k-1} \in \mathbb{N}, a_{k+1} \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a_k$, so dass $a_{k-1} = q_{k-1} a_k + a_{k+1}$.
- Ist $a_{k+1} = 0$, dann ist $\mathrm{ggT}(a, b) = a_k$ und das Verfahren endet.
- Ist $a_{k+1} \neq 0$, dann weiter mit Schritt $k + 1$.

Wieso funktioniert der euklidische Algorithmus?

Beobachtung

- Da die Reste immer kleiner werden und nicht negativ sind $(0 \leq r < |b|)$, endet der Algorithmus nach endlich vielen Schritten.
- Da
$$\mathrm{ggT}(|a|, |b|) = \mathrm{ggT}(|b|, r)$$
gilt, liefert der euklidische Algorithmus tatsächlich den $\mathrm{ggT}(a, b)$.

Satz von Lamé (1844)

Satz

Seien mit F_k die Fibonacci-Zahlen bezeichnet, das heißt,
$F_0 = 0, F_1 = 1, F_k = F_{k-1} + F_{k-2}, k \geq 2$.

Falls der euklidische Algorithmus angewandt auf $a > b \geq 1$ insgesamt $n \in \mathbb{N}^*$ Schritte benötigt, dann ist $b \geq F_{n+1}$ und $a \geq F_{n+2}$.

Bemerkung

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht! Aus $a \geq F_{n+2}, b \geq F_{n+1}$ folgt im Allgemeinen nicht, dass n Schritte nötig sind.

Beispiel: $a = 2000, b = 1000$; im ersten Schritt erhält man $2000 = 2 * 1000 + 0$, und das Verfahren endet.

Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2023/2024

KAPITEL II: Zahlbereiche

3. Rationale Zahlen

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl

Email: agnes.radl@informatik.hs-fulda.de

rationale Zahlen

Erinnerung

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ „Menge der rationalen Zahlen“

Bemerkung (ohne Beweis)

- Jede rationale Zahl lässt sich als
    - Dezimalzahl mit endlicher Ziffernfolge

  oder als
    - periodische Dezimalzahl

  darstellen.
- Umgekehrt ist jede Dezimalzahl mit endlicher Ziffernfolge und jede periodische Dezimalzahl eine rationale Zahl.

Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2023/2024

KAPITEL II: Zahlbereiche

4. Reelle Zahlen

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl

Email: agnes.radl@informatik.hs-fulda.de

Menge der reellen Zahlen

Erinnerung

$\mathbb{R} =$ Menge aller Dezimalzahlen „Menge der reellen Zahlen“

Beispiel

- $6,345 = 6 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$
- $53,742\cdots = 5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + \cdots$
- $-53,742\cdots =$
  $-\big(5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + \cdots\big)$

Menge der reellen Zahlen

Bemerkung (ohne Beweis)

- Mit einer Dezimalzahl

  $$x = \pm\, a_{-m} \cdots a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots$$

  wobei $a_k \in \{0, \dots, 9\}$, ist der „Grenzwert der unendlichen Reihe“

  $$\pm \sum_{k=-m}^{\infty} a_k 10^{-k}$$

  gemeint. ($\to$ später)
- Eine reelle Zahl kann beliebig gut durch eine rationale Zahl approximiert werden.
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

wichtige Eigenschaften / Rechenregeln in $\mathbb{R}$

Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gelten:

- Summe $x + y$, Differenz $x - y$, Produkt $x \cdot y$ und Quotient $\frac{x}{y}$, $y \neq 0$, ergeben wieder reelle Zahlen.
- $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (Assoziativität)
- $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$ (Kommutativität)
- $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (Distributivität)
- $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$
- $x \cdot y = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $y = 0$
- Notation (falls $x \neq 0$): $x^{-1} = \frac{1}{x}$.
- Notation: $xy = x \cdot y$ (Der Malpunkt kann weggelassen werden.)

Anordnung der reellen Zahlen

Trichotomie

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Beziehungen

$$x < y \quad \text{oder} \quad x > y \quad \text{oder} \quad x = y.$$

Anschaulich:
$x < y$ bedeutet, dass x auf der Zahlengeraden links von y liegt.

Weitere Festlegungen

Für zwei reelle Zahlen x und y schreibe

$$\begin{aligned} x \leq y &\quad \text{falls} \quad x < y \text{ oder } x = y; \\ x \geq y &\quad \text{falls} \quad x > y \text{ oder } x = y. \end{aligned}$$

Rechenregeln für Ungleichungen

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Dann gilt:

1. **Addieren einer Zahl** auf beiden Seiten ändert nichts, d.h. $x + z < y + z$;
2. **Multiplizieren mit einer positiven Zahl** ändert nichts, d.h. $xz < yz$ falls $z > 0$;
3. **Multiplizieren mit einer negativen Zahl** ändert die Richtung der Ungleichung, d.h. $xz > yz$ falls $z < 0$;
4. **Multiplizieren mit einer Unbekannten** erfordert daher eine Fallunterscheidung;
5. **Kehrwertbildung** ist komplizierter:
   5.1 Ist $0 < x < y$ oder $x < y < 0$, so gilt $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$;
   5.2 Ist $x < 0 < y$, so ist jedoch $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$.

Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2023/2024

KAPITEL II: Zahlbereiche

5. Beträge von Zahlen

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl

Email: agnes.radl@informatik.hs-fulda.de

Absolutbetrag

Definition

Für $x \in \mathbb{R}$ ist der (Absolut-)Betrag definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Anschaulich: Für $x \in \mathbb{R}$ ist $|x|$ der *Abstand* zwischen x und 0 auf der Zahlengeraden, und für $x, y \in \mathbb{R}$ ist $|x - y|$ der Abstand zwischen x und y.

Absolutbetrag

Definition

Für $x \in \mathbb{R}$ ist der (Absolut-)Betrag definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Rechenregeln

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $|x| \geq 0$, sowie $|x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$;
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ (Multiplikativität);
3. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, falls $y \neq 0$;
4. $|-x| = |x|$
5. Sei $C \in \mathbb{R}, C \geq 0$. Dann gilt $-C \leq x \leq C$ genau dann, wenn $|x| \leq C$.

Dreiecksungleichung

Satz

Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x + y| \leq |x| + |y| \,.$$

Beweis.

Da $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$ gilt, folgt mit den Rechenregeln für reelle Zahlen

$$x + y \leq |x| + |y| \,. \tag{1}$$

Desweiteren gelten $-x \leq |-x| = |x|$ und $-y \leq |-y| = |y|$ und deshalb auch

$$-(x + y) = -x + (-y) \leq |x| + |y| \,. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. $\square$