Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2023/2024

KAPITEL II: Zahlbereiche

4. Reelle Zahlen

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl

Email: agnes.radl@informatik.hs-fulda.de

Menge der reellen Zahlen

Erinnerung

$\mathbb{R}$ = Menge aller Dezimalzahlen „Menge der reellen Zahlen"

Beispiel

- $6,345 = 6 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$
- $53,742\cdots = 5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + \cdots$
- $-53,742\cdots = -\left(5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + \cdots\right)$

Menge der reellen Zahlen

Bemerkung (ohne Beweis)

- Mit einer Dezimalzahl

$$x = \pm\, a_{-m} \cdots a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots$$

wobei $a_k \in \{0, \ldots, 9\}$, ist der „Grenzwert der unendlichen Reihe“

$$\pm \sum_{k=-m}^{\infty} a_k 10^{-k}$$

gemeint. ($\to$ später)

- Eine reelle Zahl kann beliebig gut durch eine rationale Zahl approximiert werden.
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

wichtige Eigenschaften / Rechenregeln in $\mathbb{R}$

Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gelten:

- Summe $x + y$, Differenz $x - y$, Produkt $x \cdot y$ und Quotient $\frac{x}{y}$, $y \neq 0$, ergeben wieder reelle Zahlen.
- $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (Assoziativität)
- $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$ (Kommutativität)
- $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (Distributivität)
- $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$
- $x \cdot y = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $y = 0$
- Notation (falls $x \neq 0$): $x^{-1} = \frac{1}{x}$.
- Notation: $xy = x \cdot y$ (Der Malpunkt kann weggelassen werden.)

Anordnung der reellen Zahlen

Trichotomie

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Beziehungen

$$x < y \quad \text{oder} \quad x > y \quad \text{oder} \quad x = y.$$

Anschaulich:
$x < y$ bedeutet, dass x auf der Zahlengeraden links von y liegt.

Weitere Festlegungen

Für zwei reelle Zahlen x und y schreibe

$$\begin{aligned} x \le y \quad &\text{falls} \quad x < y \text{ oder } x = y; \\ x \ge y \quad &\text{falls} \quad x > y \text{ oder } x = y. \end{aligned}$$

Rechenregeln für Ungleichungen

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Dann gilt:

1. **Addieren einer Zahl** auf beiden Seiten ändert nichts, d.h. $x + z < y + z$;
2. **Multiplizieren mit einer positiven Zahl** ändert nichts, d.h. $xz < yz$ falls $z > 0$;
3. **Multiplizieren mit einer negativen Zahl** ändert die Richtung der Ungleichung, d.h. $xz > yz$ falls $z < 0$;
4. **Multiplizieren mit einer Unbekannten** erfordert daher eine Fallunterscheidung;
5. **Kehrwertbildung** ist komplizierter:
   5.1 Ist $0 < x < y$ oder $x < y < 0$, so gilt $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$;
   5.2 Ist $x < 0 < y$, so ist jedoch $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$.

Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2023/2024

KAPITEL II: Zahlbereiche

5. Beträge von Zahlen

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl

Email: agnes.radl@informatik.hs-fulda.de

Absolutbetrag

Definition

Für $x \in \mathbb{R}$ ist der (Absolut-)Betrag definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Anschaulich: Für $x \in \mathbb{R}$ ist $|x|$ der *Abstand* zwischen x und 0 auf der Zahlengeraden, und für $x, y \in \mathbb{R}$ ist $|x - y|$ der Abstand zwischen x und y.

Absolutbetrag

Definition

Für $x \in \mathbb{R}$ ist der (Absolut-)Betrag definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Rechenregeln

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $|x| \geq 0$, sowie $|x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$;
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ (Multiplikativität);
3. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, falls $y \neq 0$;
4. $|-x| = |x|$
5. Sei $C \in \mathbb{R}, C \geq 0$. Dann gilt $-C \leq x \leq C$ genau dann, wenn $|x| \leq C$.

Dreiecksungleichung

Satz

Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x+y| \leq |x| + |y| .$$

Beweis.

Da $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$ gilt, folgt mit den Rechenregeln für reelle Zahlen

$$x + y \leq |x| + |y| . \tag{1}$$

Desweiteren gelten $-x \leq |-x| = |x|$ und $-y \leq |-y| = |y|$ und deshalb auch

$$-(x+y) = -x + (-y) \leq |x| + |y| . \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. $\square$

Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2022/2023

KAPITEL III: Relationen und Abbildungen

1. Grundbegriffe

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl

Email: agnes.radl@informatik.hs-fulda.de

Binäre Relationen

Erinnerung: Sind A und B Mengen und $R \subseteq A \times B$, so bezeichnet man R als binäre oder zweistellige Relation zwischen A und B.

Definition

Eine binäre Relation $R \subseteq A \times B$ heißt

- linkstotal, falls für alle $x \in A$ ein $y \in B$ existiert mit $(x, y) \in R$.
- rechtstotal, falls für alle $y \in B$ ein $x \in A$ existiert mit $(x, y) \in R$.
- linkseindeutig, falls für alle $x_1, x_2 \in A$ und für alle $y \in B$ aus $(x_1, y), (x_2, y) \in R$ folgt, dass $x_1 = x_2$.
- rechtseindeutig, falls für alle $x \in A$ und für alle $y_1, y_2 \in B$ aus $(x, y_1), (x, y_2) \in R$ folgt, dass $y_1 = y_2$.

Funktionen

Definition

Seien A und B Mengen. Eine Relation $R \subseteq A \times B$ ist eine Abbildung oder Funktion, falls sie

- linkstotal

und

- rechtseindeutig

ist.

Bemerkung

Das heißt, *jedem* Element in A wird *genau ein* Element in B zugeordnet.

Funktionen (informell)

Seien A und B Mengen.

Eine Abbildung oder Funktion von A nach B ist eine Vorschrift f, die jedem $x \in A$ genau ein Element $f(x) \in B$ zuordnet.

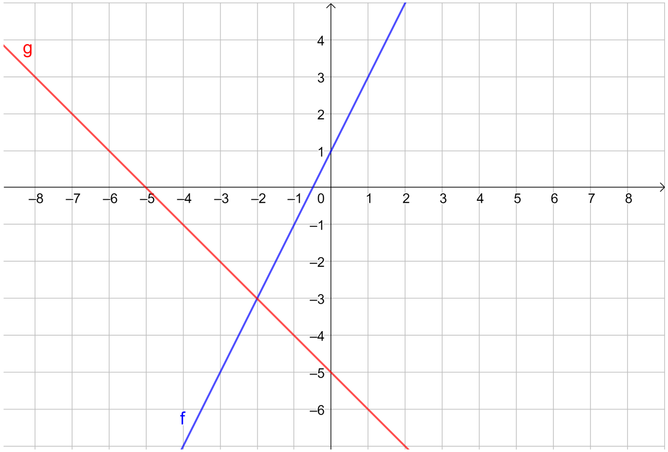
Notation: $f : A \to B, x \mapsto f(x)$.

- A ist der Definitionsbereich von f.
- B ist die Zielmenge.
- $G(f) := \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq A \times B$ ist der Graph von f.

Beispiele zur Visualisierung von Graphen

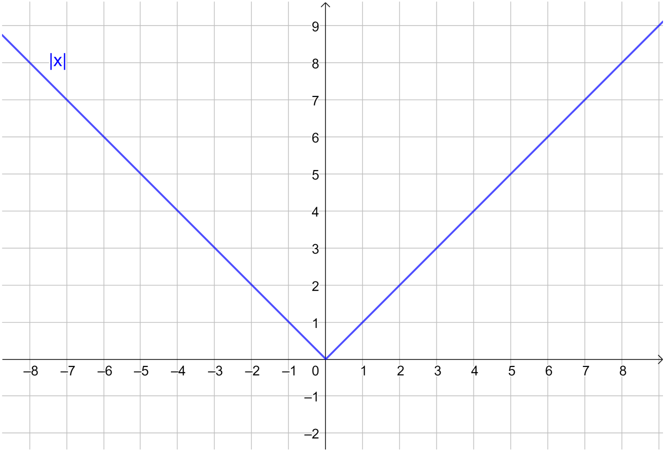
Graph von Geraden

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x + 1$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -x - 5$$



Graph der Betragsfunktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|\,, \text{ wobei } |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$



Graph von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

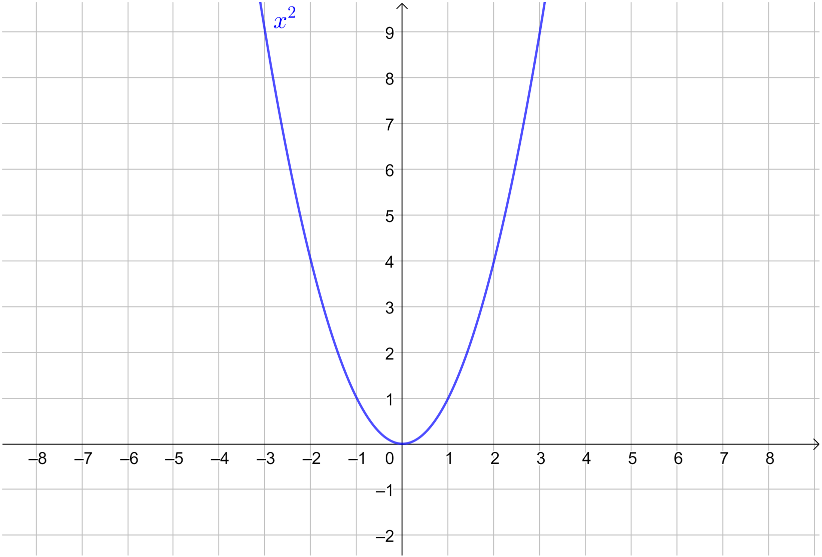


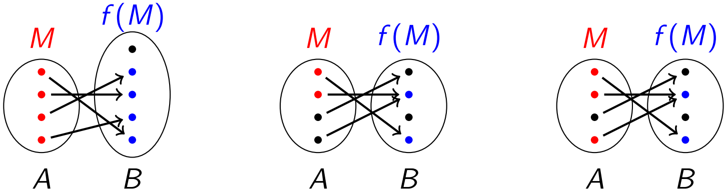
Bild und Urbild einer Abbildung

Seien A und B Mengen und sei $f : A \to B$ eine Abbildung.

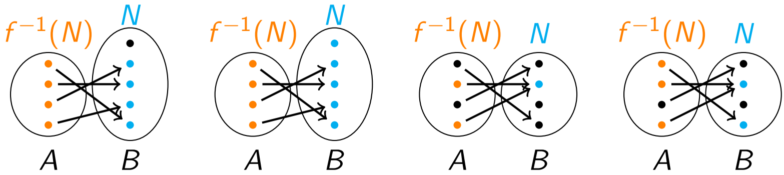
- Für $M \subseteq A$ ist $f(M) := \{f(x) : x \in M\} \subseteq B$ das Bild von M unter f.
- Für $N \subseteq B$ ist $f^{-1}(N) := \{x \in A : f(x) \in N\} \subseteq A$ das Urbild von N unter f.

Beispiele (Bild, Urbild)

Bild von M unter f

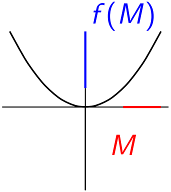


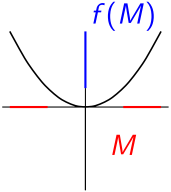
Urbild von N unter f



Beispiele (Bild, Urbild)

Bild





Urbild