

Übungsblatt 2

(komplexe Zahlen)

Hinweis:

Winkel φ im Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(\varphi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(\varphi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Winkel φ im Bogenmaß	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\sin(\varphi)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos(\varphi)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Aufgabe 1

Veranschaulichen Sie nachfolgende Mengen in der komplexen Zahlenebene:

(a) $H := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - 2i| < 2\}$

(b) $B := \{z \in \mathbb{C} : |z + 1 - i| > 1\}$

(c) $C := \{z \in \mathbb{C} : |z| = |z - 1|\}$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die folgenden Beträge:

(a) $\left| \left(\frac{2+2i}{1-i} \right)^6 \right|$, (b) $|(6+2i)(2+i)|$, (c) $\left| \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^{15} \right|$.

Hinweis: Denken Sie an die Rechenregeln von Seite 10 der Vorlesung.

Aufgabe 3

Skizzieren Sie die folgenden Zahlen zunächst in der Gaußschen Zahlenebene. Bestimmen Sie dann die Polardarstellung der jeweiligen Zahl.

(a) $z_1 = -2 - 2i$ (b) $z_2 = -3i$ (c) $z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ (d) $z_4 = 1 - \sqrt{3}i$

Aufgabe 4

Skizzieren Sie die folgenden Zahlen zunächst in der Gaußschen Zahlenebene. Bestimmen Sie dann die kartesische Darstellung $x + yi$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) der jeweiligen Zahl.

(a) $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ (b) $z_2 = 2e^{2\pi i}$ (c) $z_3 = e^{i\frac{15\pi}{4}}$ (d) $z_4 = 3e^{-i\frac{7\pi}{2}}$

Aufgabe 5

Führen Sie folgende Multiplikationen komplexer Zahlen durch.

(a) $3e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot 2e^{i\frac{5\pi}{6}},$

(b) $e^{i\pi} \cdot e^{3\pi i},$

(c) $2e^{i\frac{\pi}{9}} \cdot 4e^{-i\frac{\pi}{9}}.$

Aufgabe 6

(a) Geben Sie sämtliche komplexe Lösungen der Gleichung $z^4 = 16$ an und skizzieren Sie die Lösungen in der komplexen Zahlenebene.

(b) Geben Sie sämtliche $z \in \mathbb{C}$ an mit $z^2 = i$.

Aufgabe 7 (Wenn noch Zeit ist ...)

(a) Sei $\varphi \in [0, 2\pi)$. Was passiert anschaulich bei der Multiplikation einer komplexen Zahl z mit der komplexen Zahl $e^{i\varphi}$ bzw. $e^{-i\varphi}$, also wo liegen dann $e^{i\varphi}z$ und $e^{-i\varphi}z$ in der komplexen Zahlenebene verglichen mit z ?

(b) Drehen Sie unter Verwendung Ihrer Überlegungen aus Teil (a) die komplexe Zahl $z = -1 + 2i$ um $\frac{\pi}{2}$ gegen den Uhrzeigersinn und im Uhrzeigersinn um 0 in der komplexen Zahlenebene und schreiben Sie Ihr Ergebnis jeweils wieder in der Form $x + yi$.