Übungsblatt 4

(vollständige Induktion, Zahlbereiche)

Aufgabe 1
Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}^*$

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1$$

gilt.

Aufgabe 2 (Bernoullische Ungleichung)
Sei $x \in [-1, \infty)$. Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

gilt. An welcher Stelle haben Sie die Voraussetzung $x \geq -1$ verwendet?

Aufgabe 3
Schreiben Sie folgende Mengen als Intervalle oder Vereinigung von Intervallen.

(a) $A := \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{9\} : \dfrac{4}{x - 9} \leq 2\right\}$

(b) $B := \{x \in \mathbb{R} : |x + 4| \geq 6\}$

(c) $C := \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| \geq |x + 3|\}$

Aufgabe 4

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus

  (i) $\mathrm{ggT}(156, -64)$,

  (ii) $\mathrm{ggT}(-296, -96)$,

  (iii) $\mathrm{ggT}(34, 21)$. Was fällt auf?

(b) (Erweiterter euklidischer Algorithmus) Finden Sie Zahlen $s, t \in \mathbb{Z}$ so, dass

$$\mathrm{ggT}(156, -64) = s \cdot 156 + t \cdot (-64).$$

Hinweis: Gehen Sie Ihre Rechenschritte aus Teil (a)(i) in umgekehrter Reihenfolge durch.

Aufgabe 5
Welche Aussagen sind wahr?

(a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : y = x^2$

(b) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : y = x^2$

(c) $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : y = x^2$

(d) $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} : y = x^2$

(e) $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : y = x^2$

Aufgabe 6 (Wenn noch Zeit ist ...)

Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Desweiteren sei a_k für jedes $k \in \mathbb{N}^*$ eine reelle Zahl. Welche Gleichheiten gelten für jede Wahl von n und a_k?

(i) $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=2}^{n+1} (k+1)^3$$

(ii) $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{l=3}^{n+2} (l-2)^3$$

(iii) $$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

(iv) $$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \prod_{k=1}^{n} a_k^2$$

(v) $$4\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 4a_k$$

(vi) $$4\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} 4a_k$$