Algebraische Grundlagen der Informatik

SoSe 2024

KAPITEL I: Komplexe Zahlen

1. Grundlagen

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl

Email: agnes.radl@informatik.hs-fulda.de

Erinnerung: bisherige Zahlbereiche

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ „Menge der natürlichen Zahlen“
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ „Menge der ganzen Zahlen“
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ „Menge der rationalen Zahlen“
- $\mathbb{R} =$ Menge aller Dezimalzahlen „Menge der reellen Zahlen“

Bemerkung

- Die Gleichung $x + 2 = 1$ ist nicht in $\mathbb{N}$ lösbar, aber in $\mathbb{Z}$.
- Die Gleichung $2x = 1$ ist nicht in $\mathbb{Z}$ lösbar, aber in $\mathbb{Q}$.
- Die Gleichung $x^2 = 2$ ist nicht in $\mathbb{Q}$ lösbar, aber in $\mathbb{R}$.
- Die Gleichung $x^2 = -1$ ist nicht in $\mathbb{R}$ lösbar.

Komplexe Zahlen

Definition

Unter der Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ versteht man die Menge

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Die Addition „$+$“, Subtraktion „$-$“ und Multiplikation „$\cdot$“ zweier komplexer Zahlen (x, y) und (u, v) sind definiert durch

- $(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)$,
- $(x, y) - (u, v) := (x - u, y - v)$,
- $(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu)$.

Beobachtungen

- Addition, Multiplikation sind kommutativ. ($\rightarrow$ nachrechnen)
- Es gelten Assoziativ- und Distributivgesetz. ($\rightarrow$ nachrechnen)
- $(0, 0)$ ist das „Neutralelement“ der Addition, denn

$$(x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y).$$

- $(1, 0)$ ist das „Neutralelement“ der Multiplikation, denn

$$(x, y) \cdot (1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y).$$

Division in $\mathbb{C}$

Beobachtung

Falls $(x, y) \neq (0, 0)$, dann ist

$$
\begin{aligned}
&(x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \\
= \; &\left(x \frac{x}{x^2 + y^2} - y \frac{-y}{x^2 + y^2}, x \frac{-y}{x^2 + y^2} + y \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \\
= \; &(1, 0).
\end{aligned}
$$

Damit definiere nun die Division:

Definition

Falls $(u, v), (x, y) \in \mathbb{C}$ und $(x, y) \neq (0, 0)$, so definiert man

$$
\frac{(u, v)}{(x, y)} := (u, v) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).
$$

Einbettung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$

Beobachtung

Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

- $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$
- $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$

Komplexe Zahlen der Form $(x, 0)$ werden also wie reelle Zahlen addiert und multipliziert.

Fazit

Jede reelle Zahl x kann also als komplexe Zahl $(x, 0)$ aufgefasst werden. In diesem Sinn ist

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Andere Notation für komplexe Zahlen

Wir verwenden meistens folgende Notation:

- x statt $(x, 0)$
- i statt $(0, 1)$

Wegen

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + \mathrm{i}\, y$$

schreiben wir

- $x + \mathrm{i}\, y$ statt (x, y).

Beispiele

- $\mathrm{i}^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$
- $$\begin{aligned} (1+2\,\mathrm{i})(2+3\,\mathrm{i}) &\overset{\text{Distr.}}{=} 1\cdot(2+3\,\mathrm{i}) + 2\,\mathrm{i}\cdot(2+3\,\mathrm{i}) \\ &= 2+3\,\mathrm{i}+4\,\mathrm{i}+6\,\mathrm{i}^2 \\ &= -4+7\,\mathrm{i} \end{aligned}$$
- Darstellung von $\frac{1+2\,\mathrm{i}}{2-3\,\mathrm{i}}$ in der Form $x+\mathrm{i}\,y$, $x,y\in\mathbb{R}$:

$$\frac{1+2\,\mathrm{i}}{2-3\,\mathrm{i}} = \frac{1+2\,\mathrm{i}}{2-3\,\mathrm{i}}\cdot\frac{2+3\,\mathrm{i}}{2+3\,\mathrm{i}} = \frac{-4+7\,\mathrm{i}}{13} = -\frac{4}{13}+\frac{7}{13}\,\mathrm{i}\,.$$

wichtige Begriffe

Definition

Sei $z := x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$.

- $\mathrm{Re}(z) := x$ ist der Realteil von z.
- $\mathrm{Im}(z) := y$ ist der Imaginärteil von z.
- $\overline{z} := x - \mathrm{i}\, y$ ist die zu z konjugiert komplexe Zahl.
- $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ ist der Betrag von z.

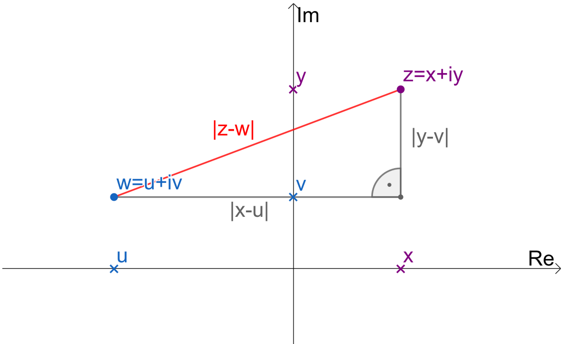
Abstand von z zu w

Bemerkung

Für $z = x + \mathrm{i}\, y$, $w = u + \mathrm{i}\, v$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ wird $|z - w|$ interpretiert als der Abstand von z zu w, denn

$$|z - w| = \sqrt{(\mathrm{Re}(z - w))^2 + (\mathrm{Im}(z - w))^2} = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$

Skizze:



Rechenregeln

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. Ist $z = x + \mathrm{i}\, y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so ist $|z|^2 = z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$.
4. Falls $z \neq 0$, dann ist $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.
5. $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}(z - \overline{z})$
6. $|z| = |\overline{z}|$
7. $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$
8. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ falls $w \neq 0$

Beweisidee:
1.–8. kann man direkt nachprüfen.

Dreiecksungleichung

Satz

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z + w| \leq |z| + |w| .$$

Algebraische Grundlagen der Informatik

SoSe 2024

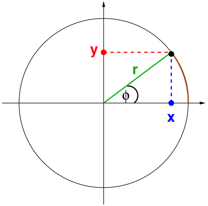
KAPITEL I: Komplexe Zahlen

2. Polardarstellung

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl

Email: `agnes.radl@informatik.hs-fulda.de`

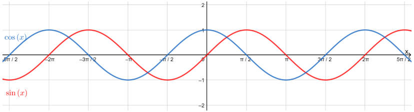
Erinnerung (WiSe 2022/2023): Sinus und Kosinus

- 

$$\varphi = \frac{\text{Länge des Kreisbogens}}{r}$$
$$\sin(\varphi) = \frac{y}{r}$$
$$\cos(\varphi) = \frac{x}{r}$$
Kreiszahl $\pi = 3,141...$

Kreisumfang $2\pi r$

- $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ und $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ sind 2π-periodisch, das heißt, für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt:
  $\sin(\varphi + 2\pi) = \sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi + 2\pi) = \cos(\varphi)$.



	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1

- $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$, $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$
- Trigonometrischer Pythagoras: $\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$.

Additionstheoreme

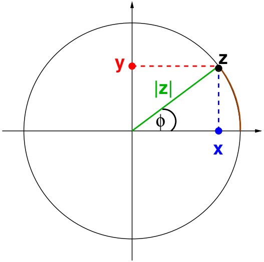
Für alle $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ gelten:

- $\sin(\varphi + \psi) = \sin(\varphi)\cos(\psi) + \cos(\varphi)\sin(\psi)$,
- $\cos(\varphi + \psi) = \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi)$.

Trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen

Eine komplexe Zahl $0 \neq z = x + \mathrm{i}\, y, x, y \in \mathbb{R}$ lässt sich nun schreiben als

$$\begin{aligned} z =& x + \mathrm{i}\, y \\ =& |z| \frac{x}{|z|} + \mathrm{i}\, |z| \frac{y}{|z|} \\ =& |z| \left(\frac{x}{|z|} + \mathrm{i}\, \frac{y}{|z|} \right) \\ =& |z| \left(\cos(\varphi) + \mathrm{i} \sin(\varphi) \right), \end{aligned}$$



wobei $\varphi \in \mathbb{R}$ bis auf Vielfache von 2π festgelegt ist. Oft fordert man $\varphi \in [0, 2\pi)$, um Eindeutigkeit zu erhalten.

Polardarstellung komplexer Zahlen

Definition

Für $\varphi \in \mathbb{R}$ definiere

$$e^{\mathrm{i}\,\varphi} := \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi).$$

Bemerkung

Jedes $z \in \mathbb{C}$ besitzt eine Darstellung (die so genannte „Polardarstellung“) der Form

$$\boxed{z = re^{\mathrm{i}\,\varphi}} \qquad \text{mit } r \in [0, \infty) \text{ und } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist $r = |z|$.
Falls $z \neq 0$, dann wird φ als *ein* Argument von z bezeichnet und ist bis auf Addition von $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, eindeutig bestimmt.

Beispiele zur Polardarstellung

- $\mathrm{i} = 1 \cdot e^{\mathrm{i}\,\pi/2} \quad (= \underbrace{\cos(\pi/2)}_{=0} + \mathrm{i}\underbrace{\sin(\pi/2)}_{=1})$
- $-1 = 1 \cdot e^{\mathrm{i}\,\pi} \quad (= \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \mathrm{i}\underbrace{\sin(\pi)}_{=0})$

Umrechnung: Polardarstellung $\to$ kartesische Form

Umrechnung von Polardarstellung in kartesische Form

Sei $z = re^{\mathrm{i}\varphi} \in \mathbb{C}$, wobei $r \in [0, \infty), \varphi \in \mathbb{R}$.

1.) $x = r\cos(\varphi)$

2.) $y = r\sin(\varphi)$

Kartesische Form von z: $\quad z = x + y\,\mathrm{i}$.

Umrechnung: kartesische Form $\to$ Polardarstellung

Umrechnung von kartesischer Form in Polardarstellung

Sei $z = x + y\,\mathrm{i} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$.

1.) $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

2.) $\varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{|z|}, & \text{falls } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{|z|}, & \text{falls } y < 0 \end{cases}$

Polardarstellung von z: $\quad z = re^{\mathrm{i}\,\varphi}$

Multiplikation komplexer Zahlen

Satz

Seien $z, w \in \mathbb{C}$ mit Polardarstellungen

$$z = r\,e^{\mathrm{i}\,\varphi}, w = s\,e^{\mathrm{i}\,\psi}, \qquad \text{wobei } r, s \in [0,\infty), \varphi, \psi \in \mathbb{R}.$$

Dann ist

$$z\,w = r\,s\,e^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)}.$$

Bemerkung

Bei der Multiplikation komplexer Zahlen werden die Beträge multipliziert und die Argumente/Winkel addiert.

Beweis des Satzes.

$$\begin{aligned}
z\,w =& r\,(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))\,s\,(\cos(\psi) + \mathrm{i}\sin(\psi)) \\
=& rs(\underbrace{\cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi)}_{\overset{\text{Add.thm.}}{=}\cos(\varphi+\psi)} + \mathrm{i}(\underbrace{\sin(\varphi)\cos(\psi) + \cos(\varphi)\sin(\psi)}_{\overset{\text{Add.thm.}}{=}\sin(\varphi+\psi)})) \\
=& r\,s\,(\cos(\varphi+\psi) + \mathrm{i}\sin(\varphi+\psi)) = r\,s\,e^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)}
\end{aligned}$$

Algebraische Grundlagen der Informatik

SoSe 2024

KAPITEL I: Komplexe Zahlen

3. Komplexe Wurzeln

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl

Email: `agnes.radl@informatik.hs-fulda.de`

Lösungen der Gleichung $z^n = w$

Problem

Für $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, finde alle $z \in \mathbb{C}$ mit

$$\boxed{z^n = w}.$$

Lösungen der Gleichung $z^n = w$

Seien $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$ und $w = r \cdot e^{i\varphi}$. Dann gibt es n verschiedene komplexe Lösungen von

$$z^n = w,$$

nämlich

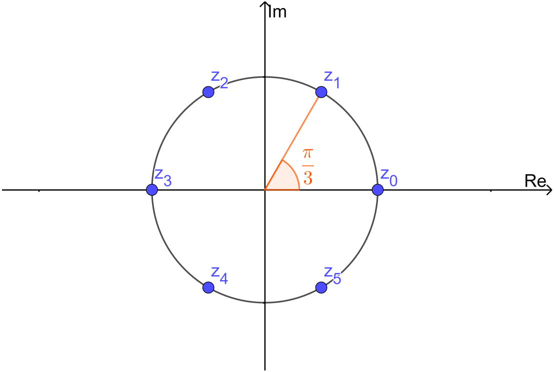
$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{\mathrm{i}\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Einheitswurzeln

Speziell für $w = 1 = 1 \cdot e^{\mathrm{i} \cdot 0}$ erhält man die n-ten Einheitswurzeln

$$z_k = e^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Beispiel: $(n = 6)$



$$z_0 = 1, \quad z_1 = e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}, \quad z_2 = e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{3}}, \quad z_3 = -1, \quad z_4 = e^{\mathrm{i}\,\frac{4\pi}{3}}, \quad z_5 = e^{\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{3}}$$