kartesisches Produkt

Seien A und B Mengen.

Kartesisches[1] Produkt von A und B:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

Beispiel

- $A = \{2, 5\}, \quad B = \{1, 2, 3\},$
  $A \times B = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$
- $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$: $\quad A \times B = \emptyset$

Bemerkung

Eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$ nennt man eine binäre oder zweistellige Relation.

[1] René Descartes (1596–1650); französischer Mathematiker

Bemerkung

- Durchschnitt und Vereinigung der Mengen $A_1, \ldots, A_n$:

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap \cdots \cap A_n = \{x : x \in A_1 \text{ und } \ldots \text{ und } x \in A_n\},$$

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup \cdots \cup A_n = \{x : x \in A_1 \text{ oder } \ldots \text{ oder } x \in A_n\},$$

- Das kartesische Produkt der Mengen $A_1, \ldots, A_n$:

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n\}.$$

Eine Teilmenge $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$ nennt man eine *n-stellige Relation*.

Potenzmenge

Sei A eine Menge.

Potenzmenge von A:

$$\mathbb{P}(A) = \{M : M \subseteq A\}$$

„Menge aller Teilmengen von A“

Beispiel

- $A = \{2, 5\}, \quad \mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{5\}, \{2, 5\}\}$
- $\mathbb{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\{1, 3, 7\} \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$, $\{3n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$

Endliche Mengen

- Eine Menge A ist endlich, falls $A = \emptyset$ oder die Elemente in A durchnummeriert werden können bis zu einer Zahl $n \in \mathbb{N}$.
- Dabei bezeichnet $|A|$ die Anzahl der Elemente in A.
- Ist A keine endliche Menge so besitzt A unendlich viele Elemente. Notation in diesem Fall: $|A| = \infty$.

Beispiele:

- $|\{1, 7, 11\}| = 3$,
- $|\{1, 2, 2\}| = 2$,
- $|\emptyset| = 0$,
- $|\mathbb{N}| = \infty$.

Wichtige Mengen: Die Zahlbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$ „Menge der natürlichen Zahlen“
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ „Menge der ganzen Zahlen“
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ „Menge der rationalen Zahlen“
- $\mathbb{R} =$ Menge aller Dezimalzahlen „Menge der reellen Zahlen“

Es gilt

$$\mathbb{N}^* \subsetneq \mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

Wichtige Mengen: Intervalle in $\mathbb{R}$

Definition

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Dann definiere

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, (abgeschlossenes Intervall)

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, (offenes Intervall)

- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, (nach rechts halboffenes Intervall)

- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, (nach links halboffenes Intervall)

Intervalle in $\mathbb{R}$ (Fortsetzung)

- a und b sind die Randpunkte des Intervalls.
- $b - a$ ist die Länge des Intervalls.

Uneigentliche Intervalle

Definition

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann definiere

- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$,

- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$,

- $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$,

- $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$,

- $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$.

Notation

Für offene Intervallenden werden statt runden Klammern oft auch eckige Klammern verwendet, also

- $(a, b) =]a, b[$,
- $[a, b) = [a, b[$,
- $(a, b] =]a, b]$,
- $[a, \infty) = [a, \infty[$,
- $(a, \infty) =]a, \infty[$,
- $(-\infty, b] =]-\infty, b]$,
- $(-\infty, b) =]-\infty, b[$,
- $(-\infty, \infty) =]-\infty, \infty[$.

Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2023/2024

KAPITEL 1: Grundlagen

2. Logik

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl

Email: `agnes.radl@informatik.hs-fulda.de`

Aussagen und ihre Verknüpfungen

Eine mathematische Aussage beschreibt einen mathematischen Sachverhalt, dem ein Wahrheitswert wahr (w) oder falsch (f) zugeordnet werden kann.

Beispiel
A: „2 ist eine gerade Zahl.“ (w)
B: „2 ist eine ungerade Zahl.“ (f)

Aus mathematischen Aussagen A und B kann man mit Hilfe von

$\neg$ („nicht“)

$\wedge$ („und“)

$\vee$ („oder“)

neue mathematischen Aussagen bilden, deren Wahrheitswerte von den Wahrheitswerten von A und B abhängen. Die Wahrheitswerte der neuen Aussagen sind in nachfolgenden Tabellen („Wahrheitstafeln“) definiert.

Aussagen und ihre Verknüpfungen

Negation: $\neg A$

Sprechweise: „A gilt nicht.“

A	$\neg A$
w	f
f	w

Beispiel
A: „2 ist eine gerade Zahl.“ (w)
$\neg A$: „Es gilt nicht, dass 2 eine gerade Zahl ist.“ (f)

Aussagen und ihre Verknüpfungen

Konjunktion (und): $A \wedge B$

Sprechweise „A und B (gelten)."
„Sowohl A gilt als auch B."

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Beispiel

A: „2 ist eine gerade Zahl." (w)

B: „3 ist eine gerade Zahl." (f)

$A \wedge B$: „2 ist eine gerade Zahl und 3 ist eine gerade Zahl." (f)

Aussagen und ihre Verknüpfungen

Disjunktion (oder): $A \vee B$

Sprechweise: „A (gilt) oder B (gilt)."

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Beachte: Dies ist kein ausschließendes „oder". Auch wenn A und B beide wahr sind, ist $A \vee B$ wahr.

Beispiel

A: „2 ist eine gerade Zahl." (w)
B: „3 ist eine gerade Zahl." (f)
C: „4 ist eine gerade Zahl." (w)
$A \vee B$: „2 ist eine gerade Zahl oder 3 ist eine gerade Zahl." (w)
$A \vee C$: „2 ist eine gerade Zahl oder 4 ist eine gerade Zahl." (w)

Aussagen und ihre Verknüpfungen

Implikation: $A \Rightarrow B$

Sprechweise: „Wenn A (gilt), dann (gilt auch) B."
„Aus A folgt B." „A impliziert B."
„A ist hinreichend/eine hinreichende Bedingung für B."
„B ist notwendig/eine notwendige Bedingung für A."
„Nur wenn B, dann A."

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Beispiel

„Wenn $2+2=4$ ist, dann ist $2+3=5$." (w)
„Wenn $2+2=4$ ist, dann ist $2+3=100$." (f)
„Wenn $2+2=3$ ist, dann ist $2+3=100$." (w)
„Wenn $2+2=3$ ist, dann ist $2+3=5$." (w)

Aussagen und ihre Verknüpfungen

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

Beachten Sie, dass sich $A \Rightarrow B$ auch durch $\neg A \vee B$ bzw. $\neg B \Rightarrow \neg A$ ausdrücken lässt, da die Wahrheitstafeln übereinstimmen.

Diese Formeln nennt man dann (semantisch) äquivalent und drückt dies mit dem Symbol „$\equiv$“ aus:

- $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$,
- $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$.

Mathematische Sätze

Mathematische Sätze sind oft von der Form

Satz: Wenn A, dann B.

In Symbolen: $A \Rightarrow B$

Beispiel

Satz: Wenn n eine gerade Zahl ist, dann ist auch n^2 eine gerade Zahl.

In Symbolen: $\underbrace{n \text{ gerade}}_{A} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{n^2 \text{ gerade}}_{B}$

In einem Beweis wird gezeigt, dass die Aussage $A \Rightarrow B$ wahr ist.

Wahrheitstafel von $A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Idee:
Um den Satz

„Aus A folgt B."

zu beweisen, setze A voraus und schließe auf B.

Beweis von $A \Rightarrow B$ durch direkten Beweis

Beispiel

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n gerade ist, dann ist auch n^2 gerade.

Beweis: Sei n gerade. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2m$. Wir erhalten

$$n^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2 \cdot 2m^2.$$

Somit ist n^2 gerade. $\square$

Wahrheitstafeln von $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

Idee:
Um den Satz

„Aus A folgt B."

zu beweisen, beweise seine Kontraposition

$$\neg B \Rightarrow \neg A.$$

Beweis von $A \Rightarrow B$ durch Beweis seiner Kontraposition

Beispiel

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n^2 gerade ist, dann ist n gerade.

Beweis: (Wir zeigen die Kontraposition: n nicht gerade $\Rightarrow$ n^2 nicht gerade.)
Sei n nicht gerade. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2m+1$.
Wir erhalten

$$n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = \underbrace{2 \cdot (2m(m+1))}_{\text{gerade}} + 1.$$

Somit ist n^2 ungerade. $\square$

Beweis von $A \Rightarrow B$ durch Widerspruch

Idee:
Nimm an, dass $A \wedge \neg B$ wahr ist, und führe dies auf einen Widerspruch der Form „$C \wedge \neg C$ ist wahr“ für eine mathematische Aussage C.

- Da $C \wedge \neg C$ nicht wahr sein kann, muss unsere Annahme $A \wedge \neg B$ falsch gewesen sein.
- Dann ist aber $\neg(A \wedge \neg B)$ wahr.

A	B	$\neg(A \wedge \neg B)$	$A \Rightarrow B$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

- $\neg(A \wedge \neg B)$ ist genau dann wahr, wenn $A \Rightarrow B$ wahr ist.

Widerspruchsbeweis – Beispiel

Satz: („$\sqrt{2}$ ist nicht rational“) Seien $p, q \in \mathbb{N}$. Wenn p und q teilerfremd sind, dann ist $\left(\frac{p}{q}\right)^2 \neq 2$.

Beweis: Wir nehmen an, dass p und q teilerfremd sind und dass $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ gilt. Dann ist

$$p^2 = 2q^2. \qquad (1)$$

Also ist p^2 gerade. Nach vorigem Satz ist auch p gerade, das heißt, es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $p = 2m$. Setzt man dies in (1) ein, so erhält man

$$4m^2 = 2q^2 \quad \text{bzw.} \quad 2m^2 = q^2.$$

Also ist nach vorigem Satz auch q gerade. Damit besitzen p und q den gemeinsamen Teiler 2 $\lightning$ (im Widerspruch zu deren Teilerfremdheit). $\square$

Aussagen und ihre Verknüpfungen

Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$ (das heißt $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$)

Sprechweise: „A (gilt) genau dann, wenn B (gilt)."
„A (gilt) dann und nur dann, wenn B (gilt)."
„A ist notwendig und hinreichend für B."
„A und B sind äquivalent."

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w

Beispiel

Wir haben soeben für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gezeigt:
„n ist genau dann gerade, wenn n^2 gerade ist."

Normalformen

Bemerkung

Seien $A_1, A_2, A_3, \ldots$ mathematische Aussagen. Man kann jede logische Formel F in disjunktiver Normalform schreiben, also

$$F \equiv (L_{1,1} \wedge \ldots \wedge L_{1,m_1}) \bigvee \ \ldots \ \bigvee (L_{n,1} \wedge \ldots \wedge L_{n,m_n})$$

und in konjunktiver Normalform, also

$$F \equiv (L_{1,1} \vee \ldots \vee L_{1,m_1}) \bigwedge \ \ldots \ \bigwedge (L_{n,1} \vee \ldots \vee L_{n,m_n}),$$

wobei $L_{i,j} \in \{A_1, \neg A_1, A_2, \neg A_2, A_3, \neg A_3, \ldots\}$.

- Mehr dazu in der Veranstaltung „Digitaltechnik und Rechnersysteme“.

Boolesche Algebra

Eine boolesche Algebra $\mathcal{B} = (B, 0, 1, \oplus, \odot, ^{-})$ ist gegeben durch eine Menge B mit $0, 1 \in B$ (dem Null- und Einselement) und den „zweistelligen Verknüpfungen" „$\odot$" und „$\oplus$" (ergeben angewendet auf zwei Elemente aus B wieder ein Element aus B) und der „einstelligen Verknüpfung" „$^{-}$"(ergibt angewendet auf ein Element aus B wieder ein Element aus B), so dass für alle $a, b, c \in B$ gilt:

1. $a \oplus b = b \oplus a$ und $a \odot b = b \odot a$ (Kommutativgesetze)
2. $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ und $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$ (Assoziativgesetze)
3. $a \oplus (b \odot c) = (a \oplus b) \odot (a \oplus c)$ und $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$ (Distributivgesetze)
4. $a \oplus 0 = a$ und $a \odot 0 = 0$
   $a \oplus 1 = 1$ und $a \odot 1 = a$ (Eigenschaften von 0 und 1)
5. $a \oplus \overline{a} = 1$ und $a \odot \overline{a} = 0$ (Eigenschaften von „$^{-}$")
6. $a \oplus (a \odot b) = a$ und $a \odot (a \oplus b) = a$ (Absorption)

Beispiele

- $(\{w, f\}, w, f, \vee, \wedge, \neg)$ ist eine boolesche Algebra.
- $(\{0, 1\}, 0, 1, +, \cdot, \overline{})$ mit
  - $0 + 0 = 0, 1 + 0 = 0 + 1 = 1 + 1 = 1,$
  - $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 1 = 1$
  - $\overline{0} = 1, \overline{1} = 0$

  ist eine boolesche Algebra.
  Sie ist „isomorph" zu $(\{w, f\}, w, f, \vee, \wedge, \neg)$.
- Sei X eine nicht-leere Menge. Dann ist $(\mathbb{P}(X), \emptyset, X, \cup, \cap, \overline{})$, wobei „$\overline{}$" die Komplementbildung in X bezeichnet, eine boolesche Algebra.
- $(\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, \overline{})$ mit üblicher Addition und Multiplikation kann keine boolesche Algebra sein, egal wie „$\overline{}$" definiert ist.

De Morgansche Regeln

Aus den Eigenschaften einer booleschen Algebra kann man folgenden Satz herleiten:

Satz

Sei $\mathcal{B} = (B, 0, 1, \oplus, \odot, ^{-})$ eine boolesche Algebra. Dann gilt für alle $a, b \in B$

$$\overline{a \oplus b} = \overline{a} \odot \overline{b},$$
$$\overline{a \odot b} = \overline{a} \oplus \overline{b}.$$