

Übungsblatt 2

(Logik, Quantoren, Summen- und Produktzeichen)

Aufgabe 1

Seien A und B mathematische Aussagen. Füllen Sie nachstehende Wahrheitstafel aus und überlegen Sie anschließend, welche Spalten übereinstimmen. Beachten Sie, dass „ \neg “ stärker bindet als „ \wedge “ bzw. „ \vee “, das heißt, „ $\neg A \wedge \neg B$ “ bedeutet „ $(\neg A) \wedge (\neg B)$ “ und „ $\neg A \vee \neg B$ “ bedeutet „ $(\neg A) \vee (\neg B)$ “.

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg A \vee \neg B$
w	w				
w	f				
f	w				
f	f				

Aufgabe 2

Sei $z \in \mathbb{Z}$. Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr? Schreiben Sie die Aussagen zunächst mit Hilfe von „ \Rightarrow “, „ \Leftarrow “ oder „ \Leftrightarrow “.

- (a) Es gilt genau dann $z^2 \geq 0$, wenn $z \geq 0$ ist.
- (b) Eine hinreichende Bedingung dafür, dass z durch 2 ohne Rest teilbar ist, ist die Teilbarkeit von z durch 4 ohne Rest.
- (c) Eine notwendige Bedingung dafür, dass z durch 2 ohne Rest teilbar ist, ist die Teilbarkeit von z durch 4 ohne Rest.

Aufgabe 3

Welche der nachfolgenden Aussagen sind äquivalent zu der Aussage: „Wenn das Wetter schön ist, dann kommt Maxi Musterfrau mit dem Fahrrad an die Hochschule.“

(Hinweis: Schreiben Sie die Aussagen zunächst mit Hilfe von „ \Rightarrow “, „ \Leftarrow “ oder „ \Leftrightarrow “.)

- (a) Wenn das Wetter nicht schön ist, dann kommt Maxi Musterfrau nicht mit dem Fahrrad an die Hochschule.
- (b) Wenn das Wetter nicht schön ist, dann kommt Maxi Musterfrau mit dem Fahrrad an die Hochschule.
- (c) Das Wetter ist nicht schön oder Maxi Musterfrau ist mit dem Fahrrad an der Hochschule.
- (d) Wenn Maxi Musterfrau ohne Fahrrad an der Hochschule ist, dann ist das Wetter nicht schön.

Aufgabe 4

Betrachten Sie die Menge $M := \{3, 6, 9\}$.

- (a) Sei $A(x)$ der Ausdruck: „ x ist ungerade und x ist durch 3 teilbar.“

Formulieren Sie

$$(\star) \quad \forall x \in M : A(x)$$

in Worten.

Ist (\star) wahr oder falsch? Formulieren Sie die Negation von (\star) in Symbolen und in Worten.

- (b) Formulieren Sie

$$(\star\star) \quad \exists x \in M \forall y \in M : x \geq y$$

in Worten.

Ist $(\star\star)$ wahr oder falsch? Formulieren Sie die Negation von $(\star\star)$ in Symbolen und Worten.

Aufgabe 5

Verneinen Sie folgende Aussagen:

- (a) „In jeder Stadt gibt es einen Einwohner, der raucht.“
(b) „Es gibt eine Stadt, in der alle Einwohner rauchen.“
(c) „In jeder Stadt rauchen alle Einwohner.“

Aufgabe 6

Welche Aussagen sind wahr?

- (a) $\forall n \in \mathbb{Z} \forall m \in \mathbb{Z} : n = m$
(b) $\forall n \in \mathbb{Z} \exists m \in \mathbb{Z} : n = 2m$
(c) $\exists n \in \mathbb{Z} \forall m \in \mathbb{Z} : n + m = 0$
(d) $\forall n \in \mathbb{Z} \exists m \in \mathbb{Z} : n = m + 1$
(e) $\exists n \in \mathbb{Z} \exists m \in \mathbb{Z} : n \cdot m = n + m$.

Aufgabe 7

- (a) Bestimmen Sie folgende Summen und Produkte:

$$(i) \sum_{s=1}^3 s^3 \quad (ii) \prod_{m=1}^3 m^3 \quad (iii) \prod_{s=0}^{10} (s-3)^2$$

- (b) Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

$$(i) \prod_{l=1}^{100} \frac{l+1}{l} \quad (ii) \sum_{r=2}^{40} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r-1} \right)$$

- (c) Seien $m, n \in \mathbb{N}, n \geq m$ und sei a_k für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl. Wie viele Summanden hat die Summe

$$\sum_{k=m}^n a_k ?$$

- (d) Bestimmen Sie

$$\sum_{l=7}^{326} 2.$$