Hochschule Fulda
Fachbereich Angewandte Informatik
Prof. Dr. A. Radl

Wintersemester 2023/2024
Mathematische Grundlagen – AI1004
Besprechung: 21.12.2023–09.01.2024

# Übungsblatt 9

(Folgen, Reihen, Dezimalzahlen)

---

**Aufgabe 1**
Betrachten Sie die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}$, wobei

(a) $x_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$, (b) $x_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$, (c) $x_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$,

(d) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, (e) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$, (f) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$.

Welche dieser Folgen konvergieren? Im Falle von Konvergenz bestimmen Sie den Grenzwert.

Hinweis zu (c): Bernoullische Ungleichung und Sandwichtheorem.
Hinweis zu (f): Gaußsche Summenformel

**Aufgabe 2**
Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_0 := 1 \quad \text{und} \quad x_{n+1} := \sqrt{2 + x_n},\ n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$x_{n+1} \geq x_n$$

gilt.

(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x_n \leq 2$$

gilt.

(c) Schließen Sie nun auf die Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für eine konvergente Folge $(y_n)$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ auch $\lim_{n\to\infty} \sqrt{y_n} = \sqrt{y}$ gilt.

**Aufgabe 3**
Sei $q \in (-1, 1)$. In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, dass

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n$$

gilt. Bestimmen Sie nun

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)^3$$

mit Hilfe des Cauchy-Produktes für Reihen.

Hinweis: Denken Sie an die Gaußsche Summenformel $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

**Aufgabe 4**

(a) Geben Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen an:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 5 \left(\frac{1}{2}\right)^k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=2}^{\infty} (-0.4)^k .$$

(b) Geben Sie zunächst den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

an. Was ist der Grenzwert der Reihe, wenn jeder zweite Summand ein Minuszeichen führt?

**Aufgabe 5** (Wenn noch Zeit ist ...)

Eine Dezimalzahl $r \geq 0$ ist von der Form

$$z, a_1 a_2 a_3 \cdots$$

mit $z \in \mathbb{N}$ und $a_k \in \{0, \ldots, 9\}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Diese Schreibweise bedeutet die Zahl

$$z + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{10^k}.$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Majorantenkriteriums, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{10^k}$$

konvergiert.

(b) Welche rationale Zahl wird durch die Dezimalzahl

$$2,2222 \cdots$$

dargestellt?

(c) Welche rationale Zahl wird durch die Dezimalzahl

$$9,0909090909 \cdots$$

dargestellt?