

Übungsblatt 11

(Reihen, Grenzwerte von Funktionen, Asymptotik)

Aufgabe 1

Welche der folgenden Reihen konvergieren?

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2} \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5}{(-4) \cdot k!} \quad (d) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1} \right)^k$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie folgende (eventuell uneigentliche) Grenzwerte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 4x^3 + 2}{x + 4x^4 + 7x^2} \quad (b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7 - x}{x - 3x^2}$$

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, & x \neq -1, \\ -100, & x = -1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} h(x), \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} h(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -1} h(x),$$

sofern die Grenzwerte existieren. Ist h stetig in -1 ?

Aufgabe 4

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|4-2x|}{x-2}, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$$

Überlegen Sie, welche der folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Ist f stetig in 2?

$$(a) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) \quad (b) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) \quad (c) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

Aufgabe 5

Betrachten Sie die Funktion $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \frac{x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1}.$$

- (a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D_f von f .
- (b) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion für $x \rightarrow \pm\infty$.
- (c) Ist f in $\pm\infty$ asymptotisch linear oder quadratisch? Bestimmen Sie die zugehörige asymptotische Gerade bzw. Parabel.

Aufgabe 6 (Wenn noch Zeit ist ...)

Seien nachfolgende Funktionen auf \mathbb{N} definiert.

(a) Welche Aussagen sind wahr?

(i) $n \in O(n^2)$ für $n \rightarrow \infty$.

(ii) $n + n^2 \in O(n^2)$ für $n \rightarrow \infty$.

(iii) $1000n^2 \in O(n^2)$ für $n \rightarrow \infty$.

(iv) $f(n) \in O(g(n))$ für $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow g(n) \in O(f(n))$ für $n \rightarrow \infty$.

(b) Seien $f(n) \in O(g(n))$ und $g(n) \in O(h(n))$ für $n \rightarrow \infty$. Gilt dann $f(n) \in O(h(n))$ für $n \rightarrow \infty$?