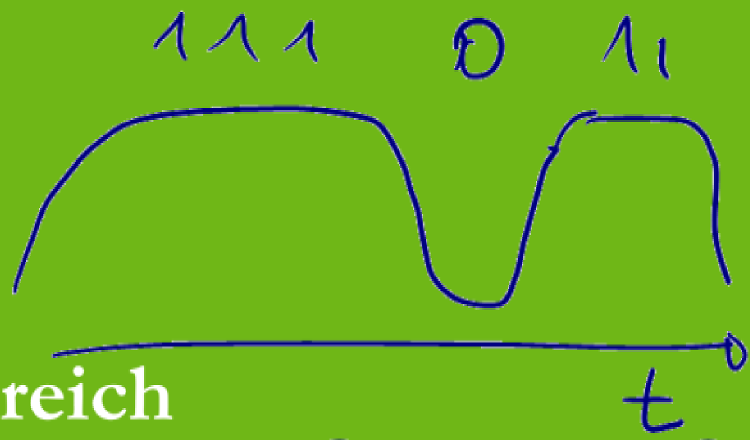
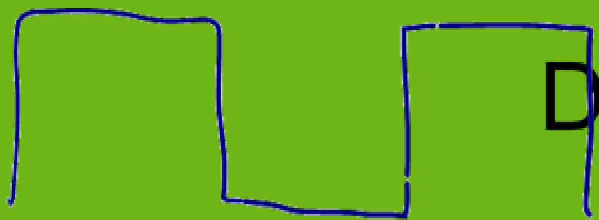
Hochschule Fulda
University of Applied Sciences

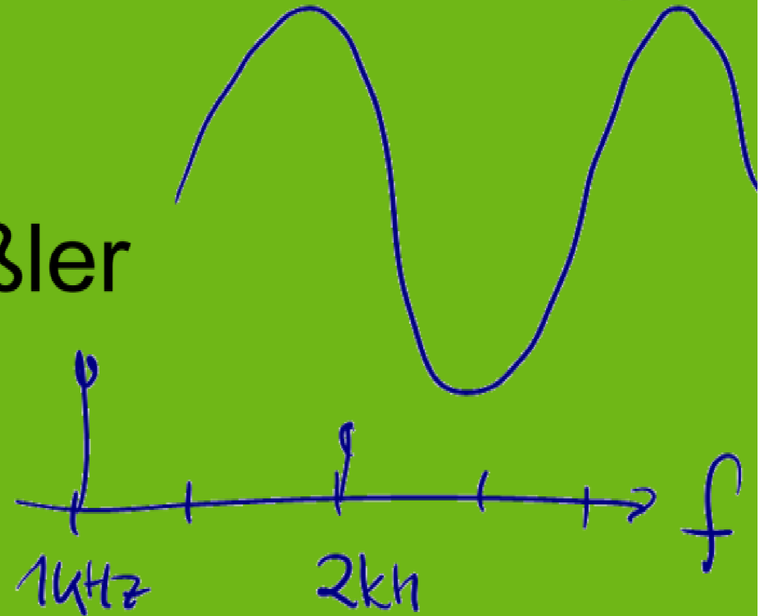
Technische Grundlagen der Informatik
WS 2023/24
Teil 2: Nachrichtentechnik

Kapitel 3:
Signale im Zeit- und Frequenzbereich



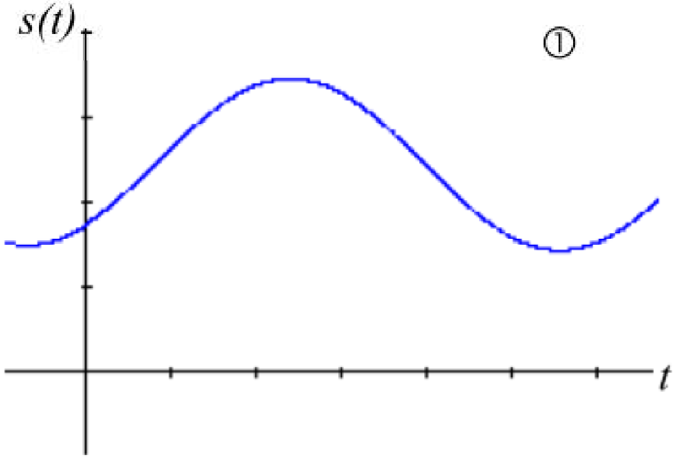


Dr. Solveig Schüßler

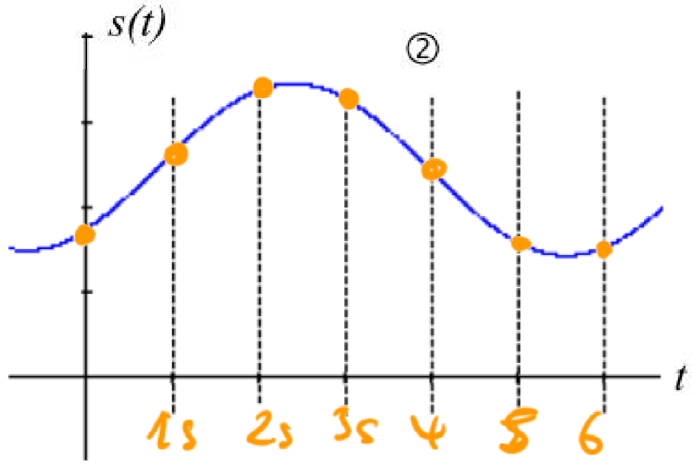


Einführung - Signalarten

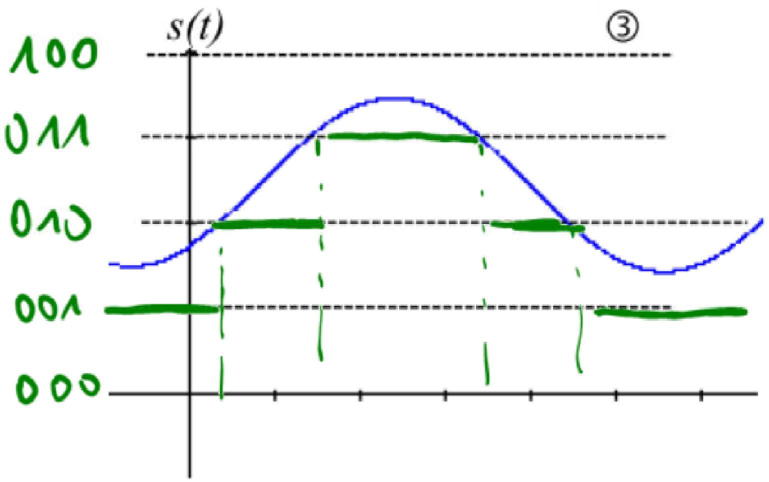
Hochschule Fulda
University of Applied Sciences
Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik



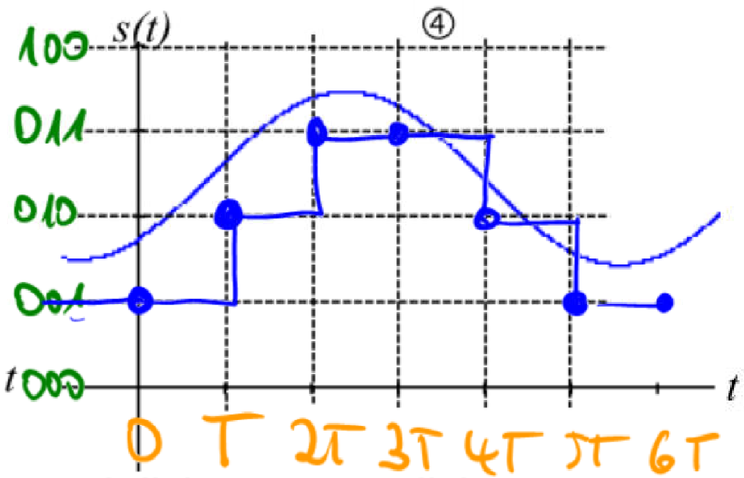
zeit- und wertekontinuierlich



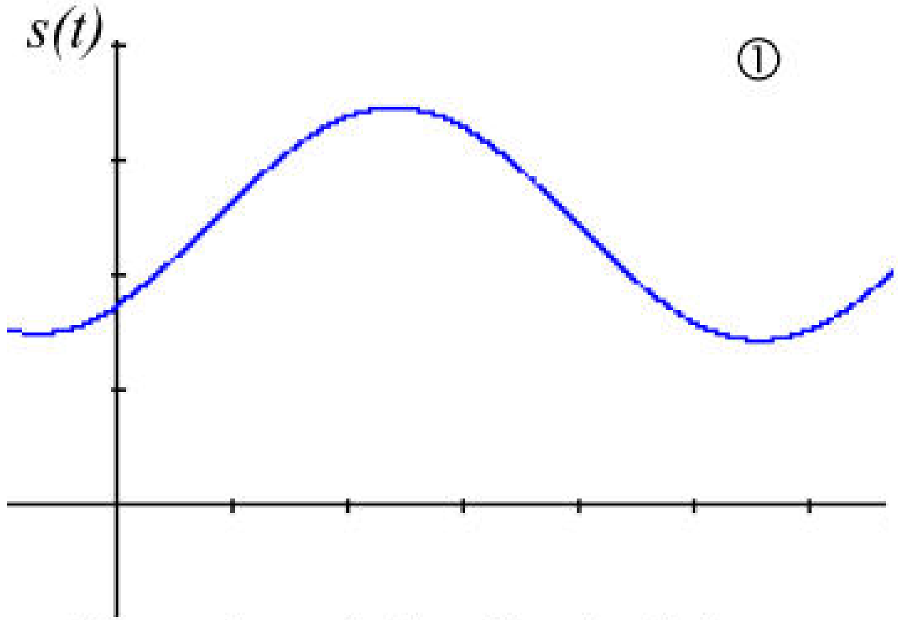
zeitdiskret , wertekontinuierlich
(Abtastung)



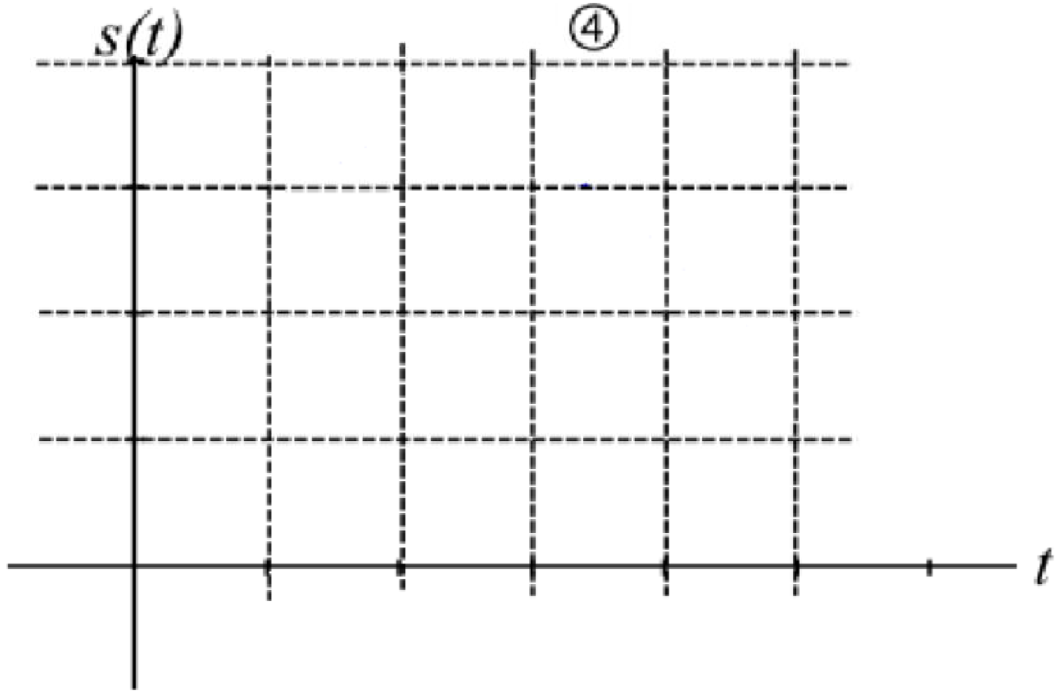
zeitkontinuierlich , wertediskret
(Quantisierung)



zeitdiskret , wertediskret



zeit- und wertekontinuierlich



zeitdiskret , wertediskret

Weitere Unterscheidungsmöglichkeiten

- Analog ↔ digital
- periodisch ↔ einmalig

  wiederholt sich
  ständig
- Deterministisch ↔ stochastisch

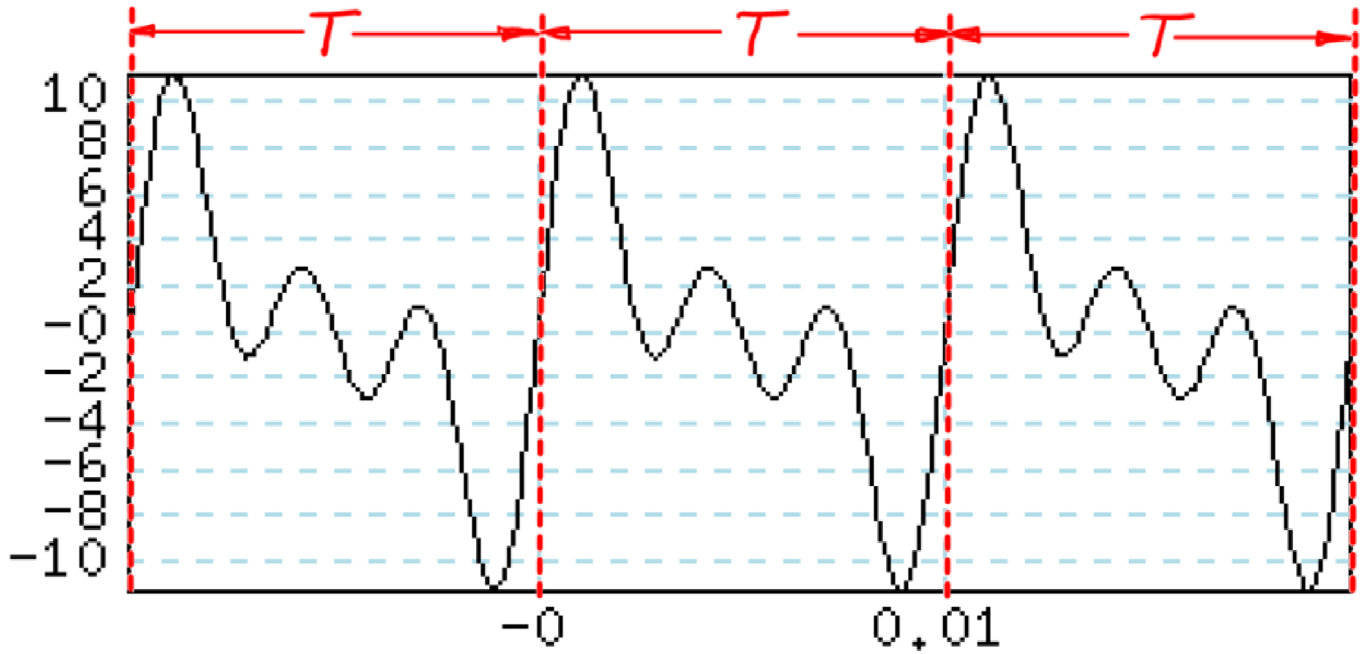
  feste, bekannte, reproduzierbare Signale
  z.B. Sprache

  nicht reproduzierbare Signale, zufällig
  z.B. Rauschen

Hochschule Fulda
University of Applied Sciences
Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik

Periodische Signale: Einordnung

- Signalfolge kehrt in signalspezifischem Zeitintervall stetig wieder. Kleinstes Zeitintervall für Periode = **Periodendauer T_0**



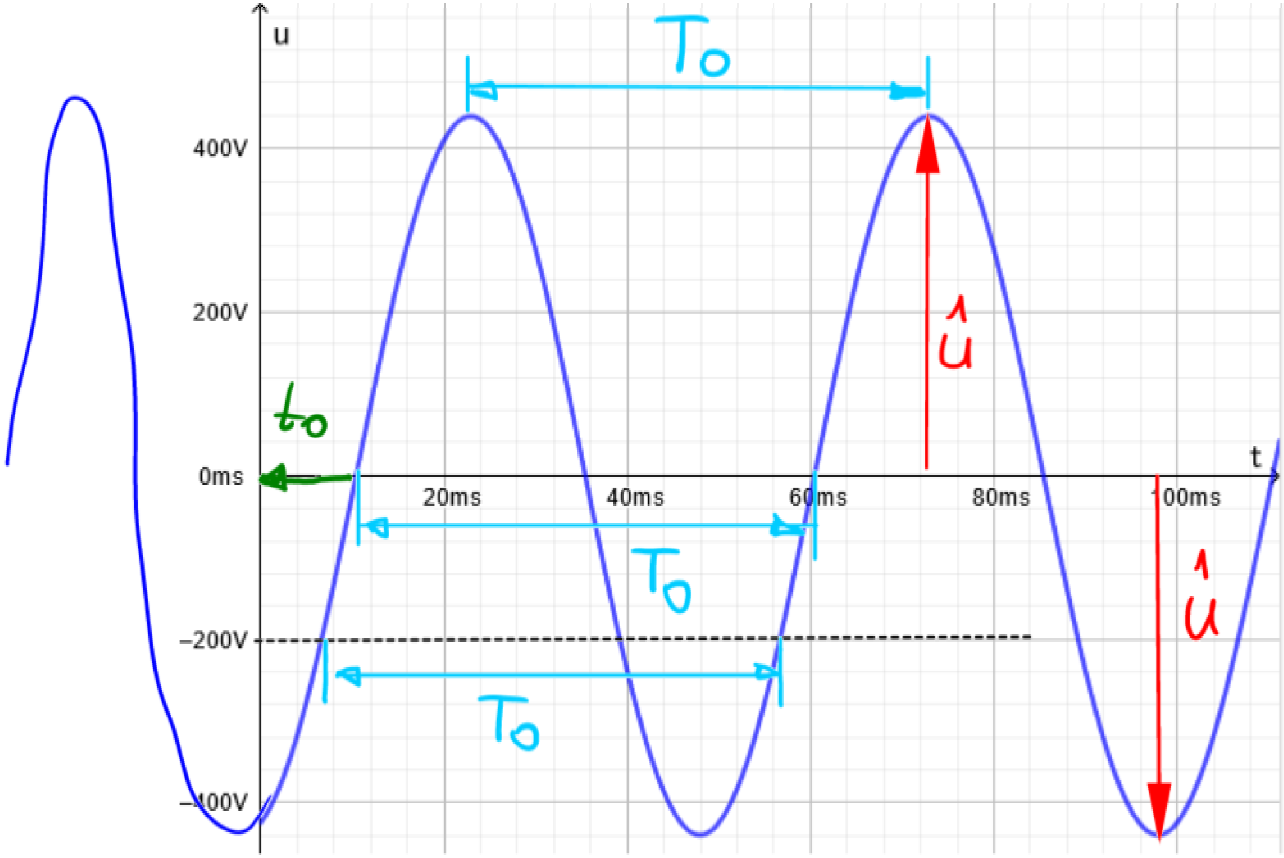
Nicht geeignet zur Informationsübertragung, da vorhersehbar

Periodische Signale: Einordnung

→ Besondere periodische Signale: harmonische Schwingungen
https://www.leifiphysik.de/mechanik/mechanische-schwingungen/grundwissen/harmonische-schwingungen

→ Sie haben besondere Bedeutung in der Nachrichtentechnik, da sich alle periodischen und nicht-periodischen Signale aus Summen und Integralen harmonischer Schwingungen darstellen lassen…

- Kurz: harmonische Schwingungen können durch eine Sinus-/ Cosinusfunktion beschrieben werden



Periodendauer T_0

Amplitude $\hat{u}$

oder Zeitverschiebung
~~Phasen~~verschiebung t_0

← negativ
→ positiv
(hier negativ)

Frequenz f_0

≙ Schwingungen pro Sekunde

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{T_0}}$$

$[f_0] = \text{Hz}$

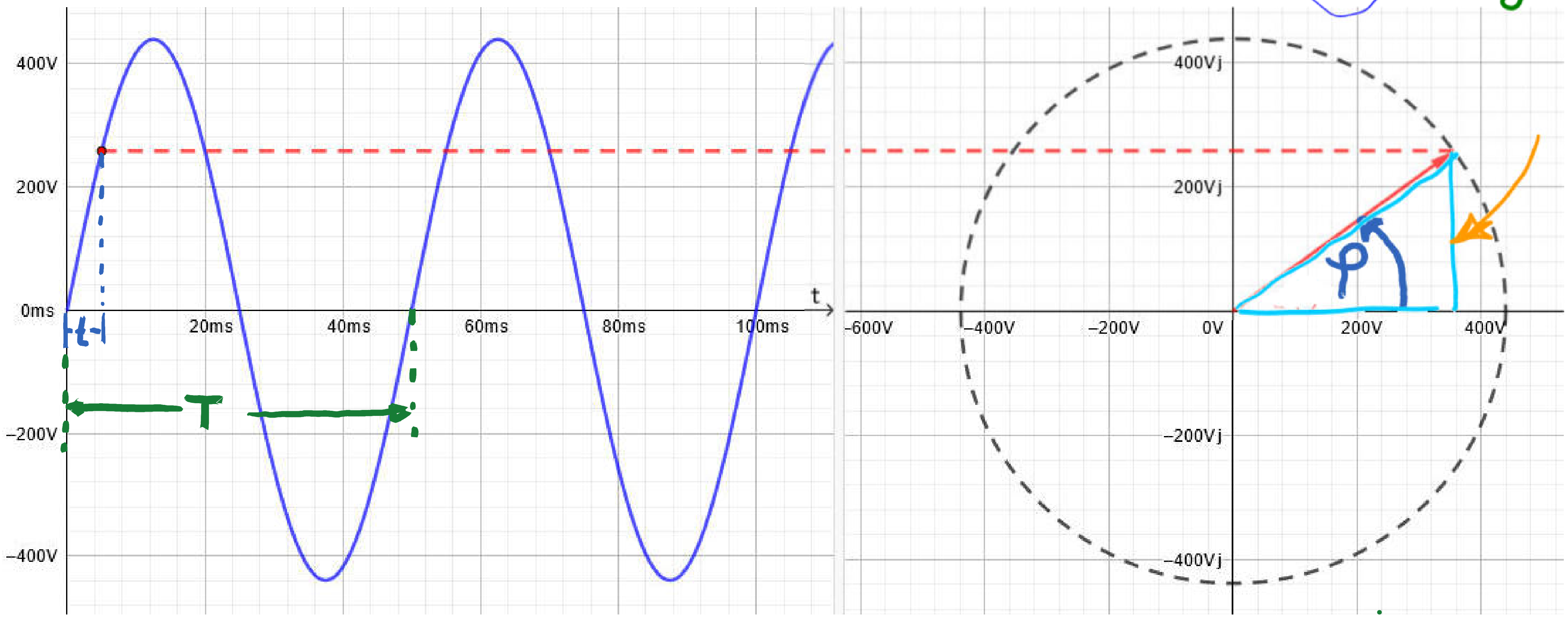
- Mathematische Beschreibung harmonischer Schwingungen durch Sinus-/ Cosinusfunktion

https://www.geogebra.org/m/ranr4swv

- Mathematische Beschreibung harmonischer Schwingungen durch Sinus-/ Cosinusfunktion

Winkelgeschwindigkeit

Kreisfrequenz $\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T_0}$



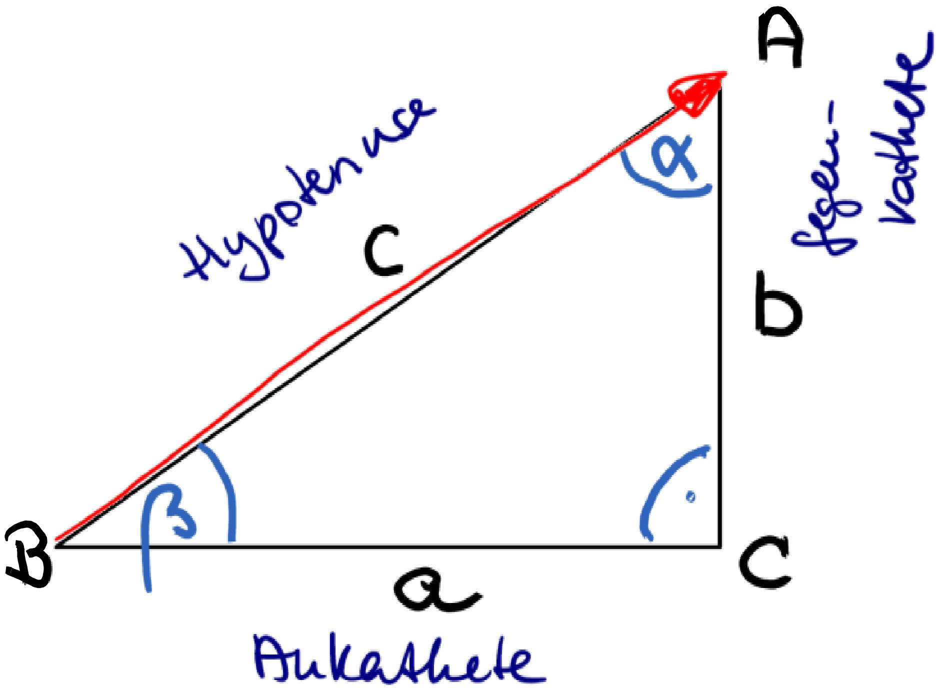
Kreisfrequenz ω : • gibt den überstrichenen Winkel pro Zeit an $\left(\omega = \frac{\varphi}{t}\right)$

• Berechnung: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$

ω_0, T_0 und f_0 beschreiben also alle auf ihre Weise, die gleiche Eigenschaft der Schwingung, nämlich wie schnell die Schwingung ist. Sie können also ineinander umgerechnet werden. Da sie etwas anderes beschreiben werden ω und f in unterschiedlichen Einheiten angegeben. $[\omega] = \frac{1}{s}$ $[f] = Hz$ wobei gilt $1Hz = \frac{1}{s}$

$$\boxed{\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \qquad f_0 = \frac{1}{T_0}}$$

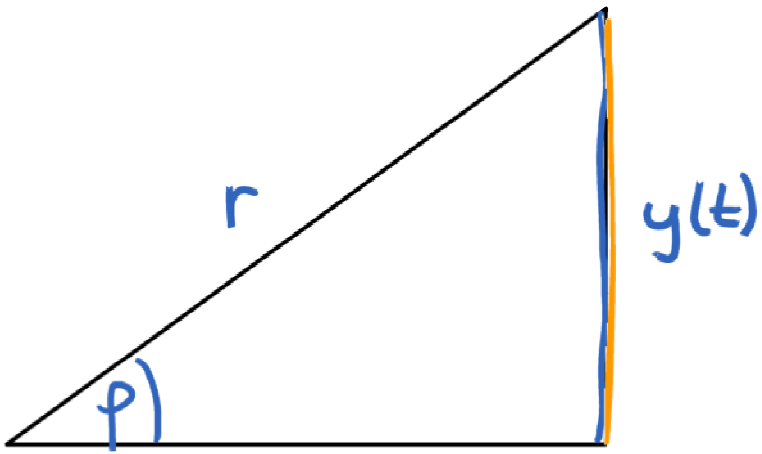
- Sinus-/ Cosinusfunktion

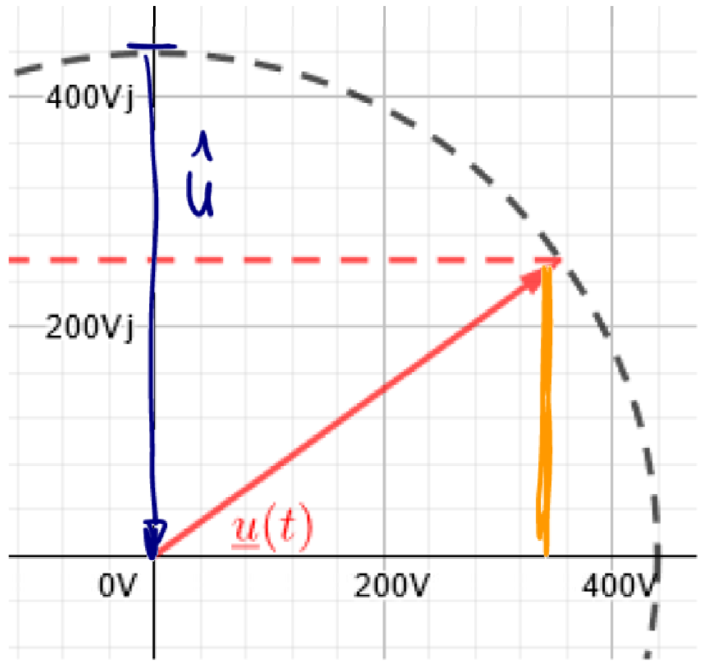


$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenk.}}{\text{Hyp.}}$$

$$\cos\beta = \frac{\text{Ankat.}}{\text{Hyp.}} = \frac{a}{c}$$

- Mathematische Beschreibung harmonischer Schwingungen durch Sinus-/ Cosinusfunktion





$$\sin\varphi = \frac{y(t)}{\hat{u}} \quad \text{mit} \quad \frac{\varphi}{t} = \omega$$

$$\Rightarrow \varphi = \omega \cdot t$$

Zeitfunktion $t_0 = 0$

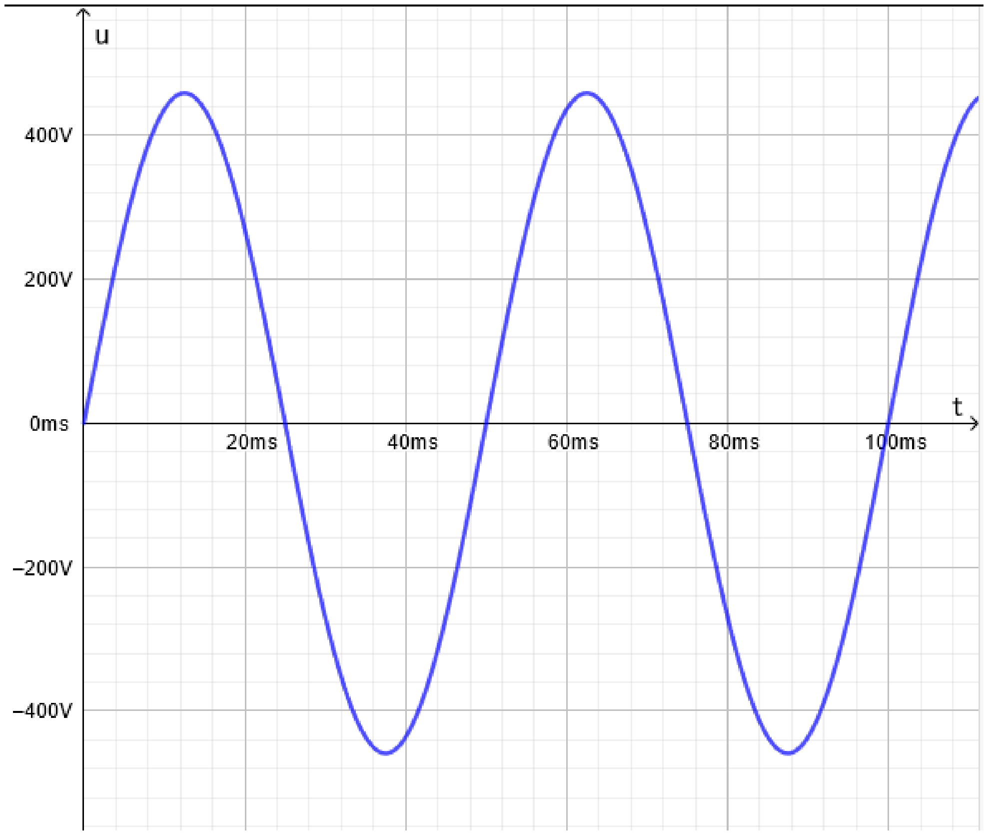
$$y(t) = \hat{u} \cdot \sin\varphi \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} y(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t) \\ y(t) = \hat{u} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right) \end{array}}$$

Zeitfunktion $t_0 \neq 0$

$$y(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega(t - t_0))$$

$$y(t) = \hat{u} \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right)$$

- harmonische Schwingungen können durch eine Sinus-/ Cosinusfunktion beschrieben werden



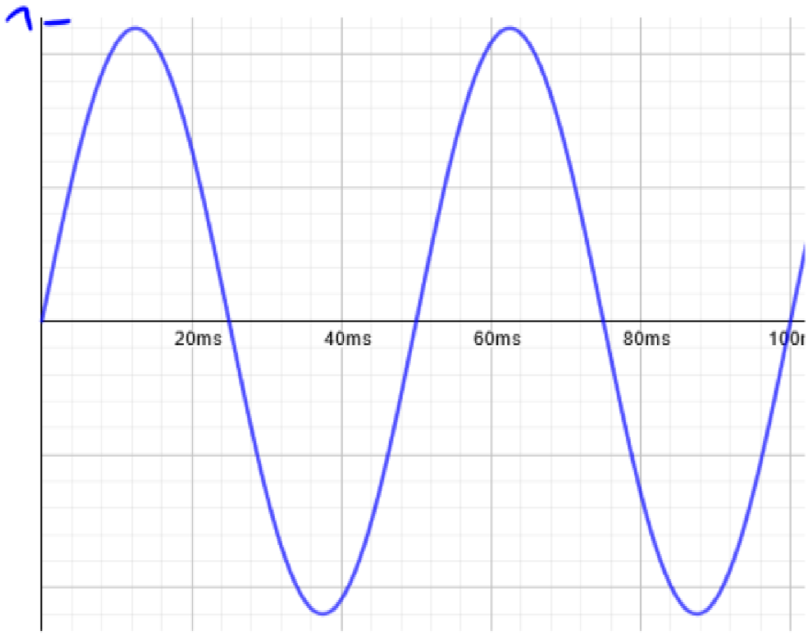
Periodendauer T_0

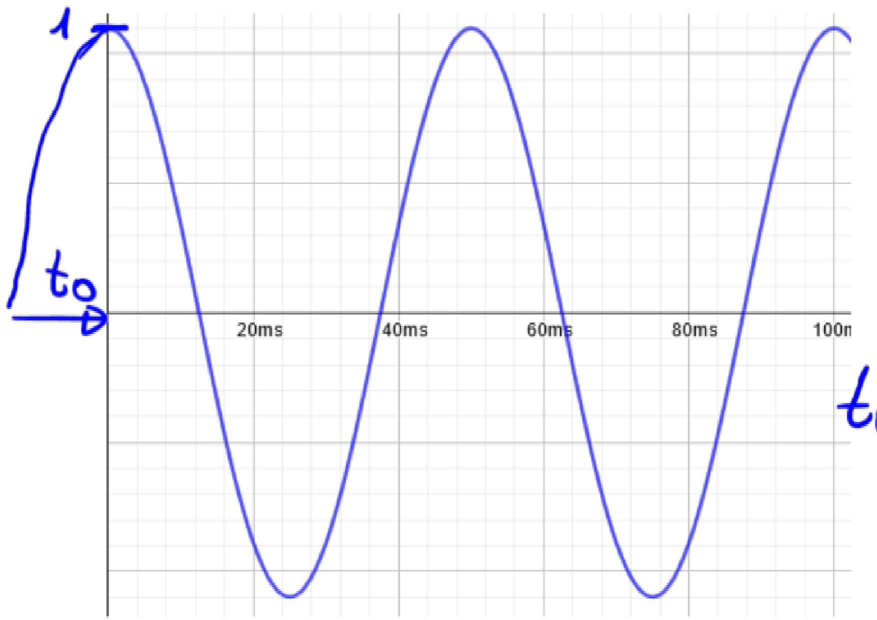
Amplitude $\hat{u}$

Phasenverschiebung t_0

Frequenz f_0

- Zusammenhang Sinus-/ Cosinusfunktion





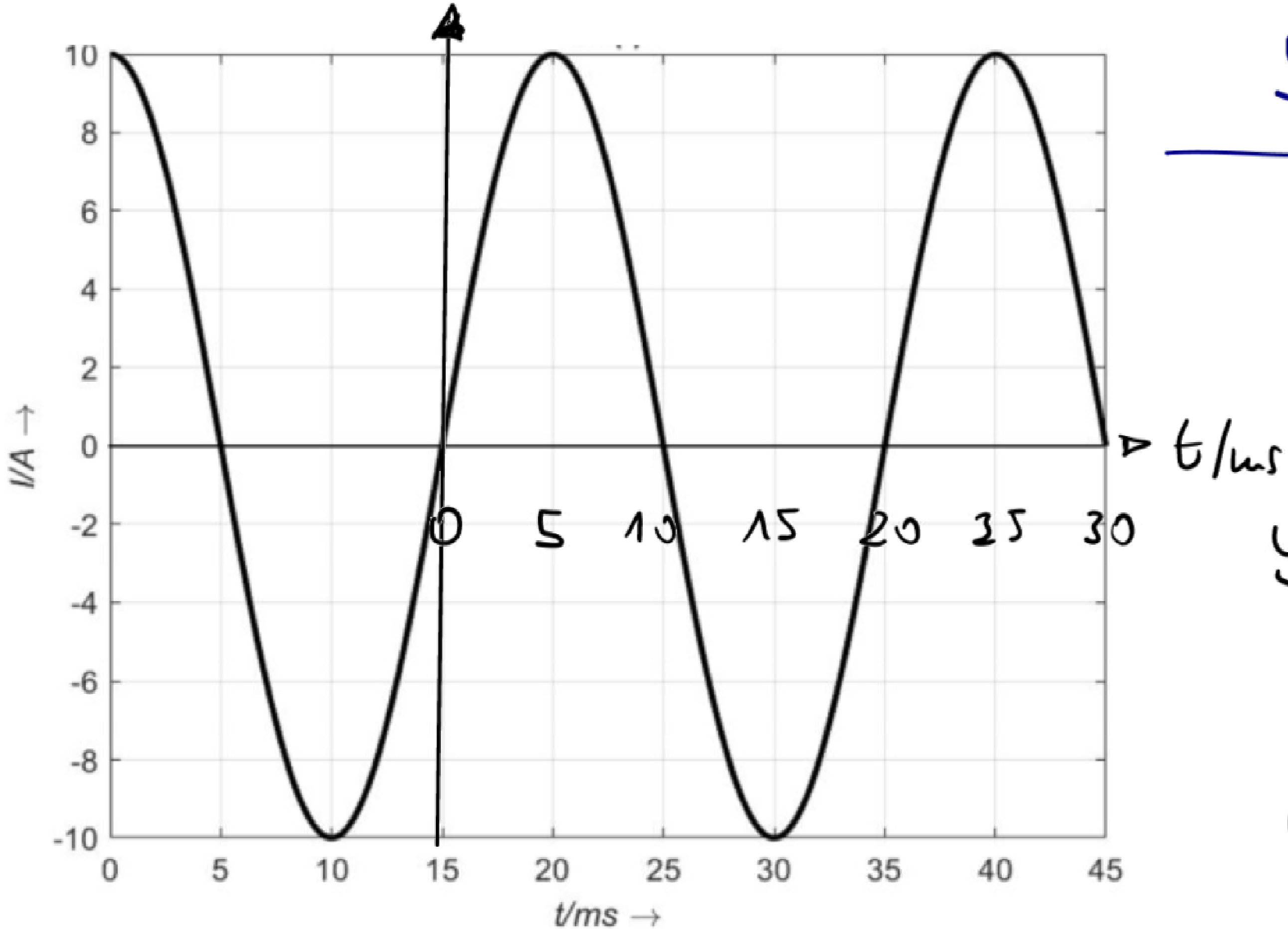
$t_0 = +\frac{T_0}{4}$

$y(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$

$$\boxed{\text{sinus und cosinus sind zueinander } \frac{T}{4} = 90° = \frac{\pi}{2} \text{ phasen verschoben!!}}$$

$$y(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$
$$= \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}(t+t_0)\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\left(t+\frac{T_0}{4}\right)\right)$$
$$= \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \frac{2\pi}{T_0}\cdot\frac{T_0}{4}\right)$$
$$= \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \frac{\pi}{2}\right)$$

- Gib eine Gleichung für den Zeitverlauf des Stromes an!



$$y(t) = \hat{y} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

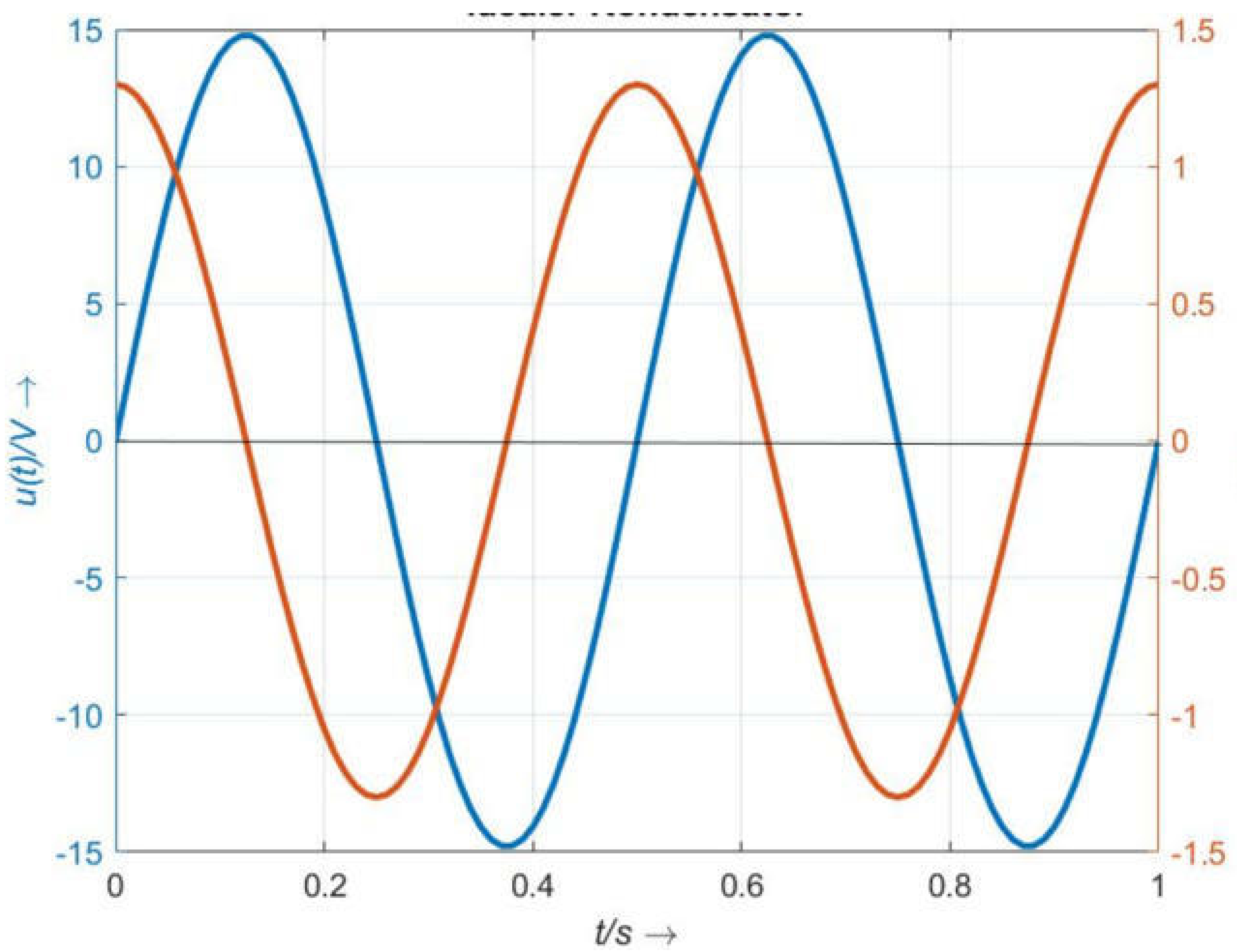
$$\hat{y} = 10\,A$$

$$T_0 = 20\,ms$$

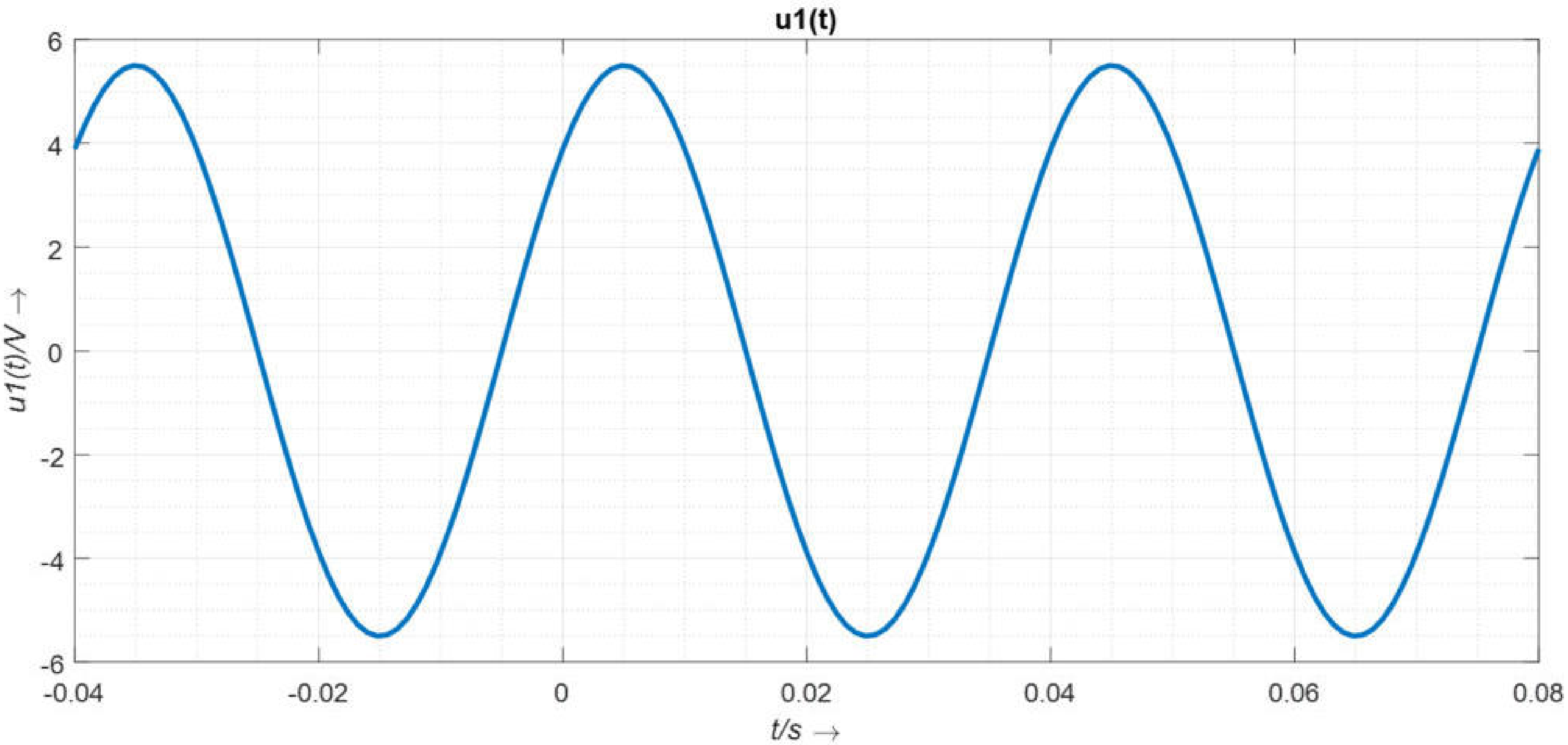
$$y(t) = 10A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{20ms} \cdot t\right)$$

$$f_0 = \frac{1}{20ms} = 0{,}05 \cdot 10^3\,Hz = 50\,Hz$$

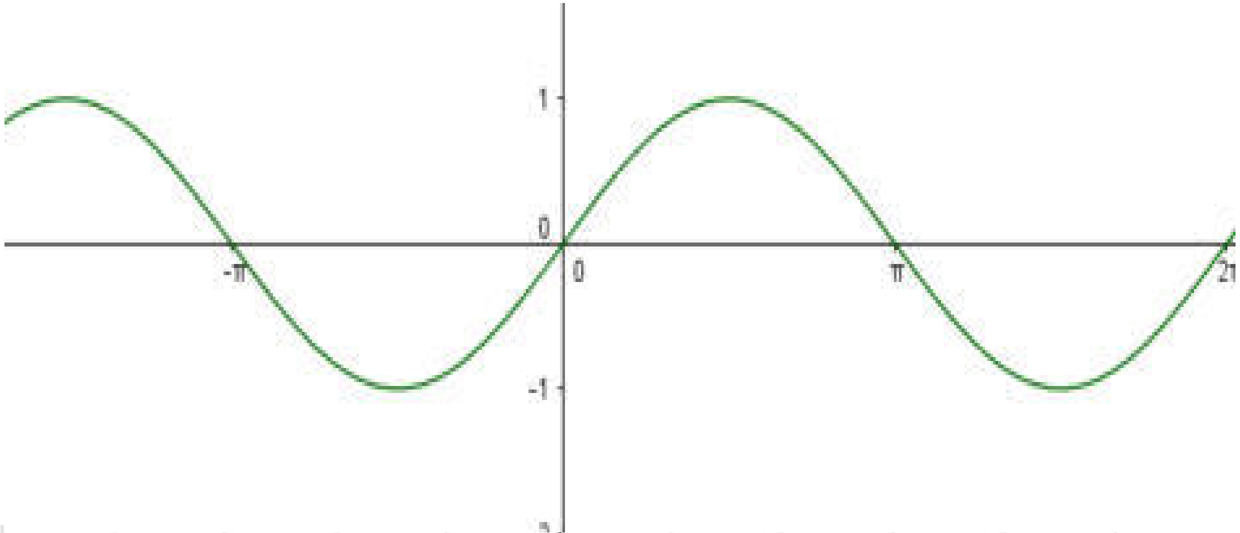
$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{20ms}$$

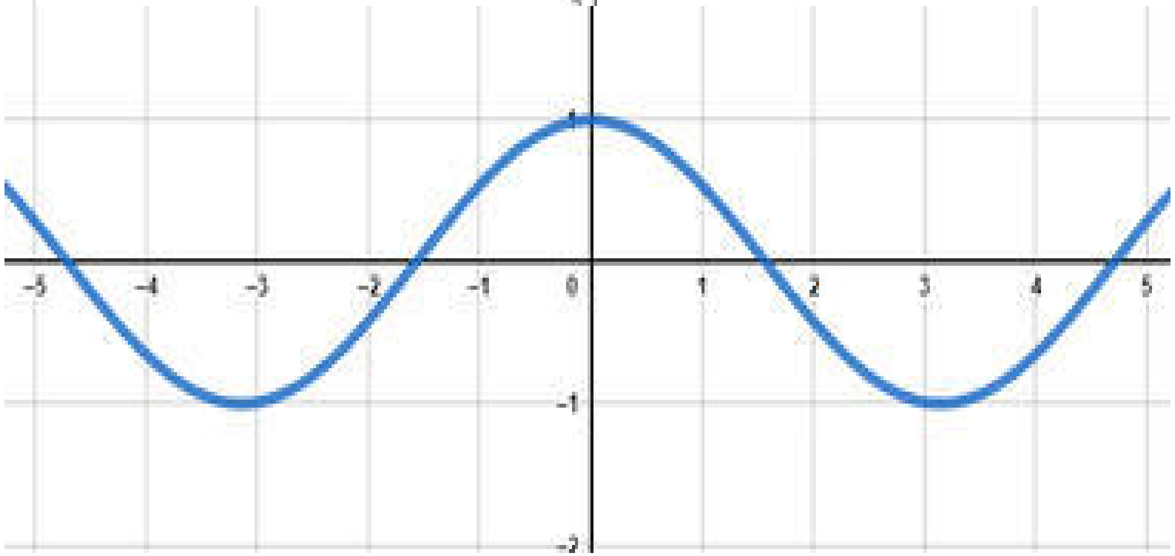

15
10
5
0
-5
-10
-15
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
$u(t)/V \rightarrow$
$i(t)/A \rightarrow$
$t/s \rightarrow$

am 7.12.


u1(t)
6
4
2
0
-2
-4
-6
u1(t)/V →
-0.04
-0.02
0
0.02
0.04
0.06
0.08
t/s →

Gerade – ungerade Funktion





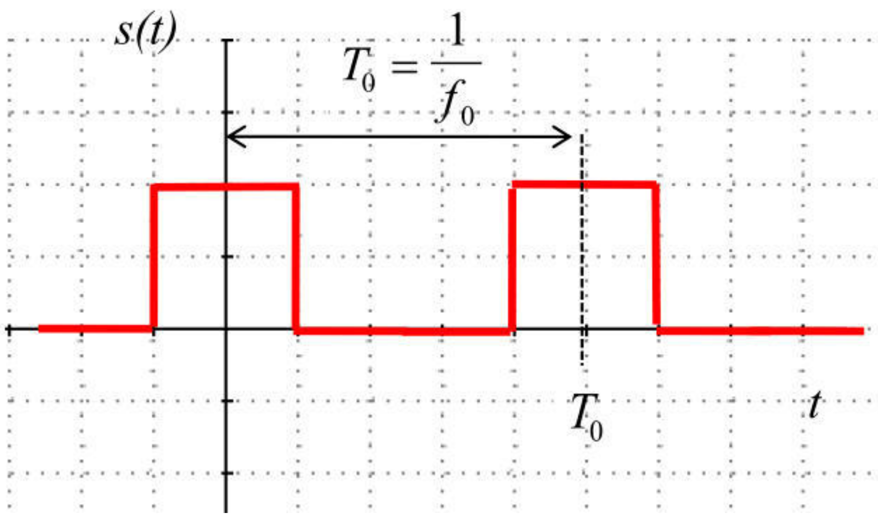
Periodische Signale: Einordnung

→ Besondere periodische Signale: harmonische Schwingungen
https://www.leifiphysik.de/mechanik/mechanische-schwingungen/grundwissen/harmonische-schwingungen

→ Sie haben besondere Bedeutung in der Nachrichtentechnik, da sich alle periodischen und nicht-periodischen Signale aus Summen und Integralen harmonischer Schwingungen darstellen lassen…

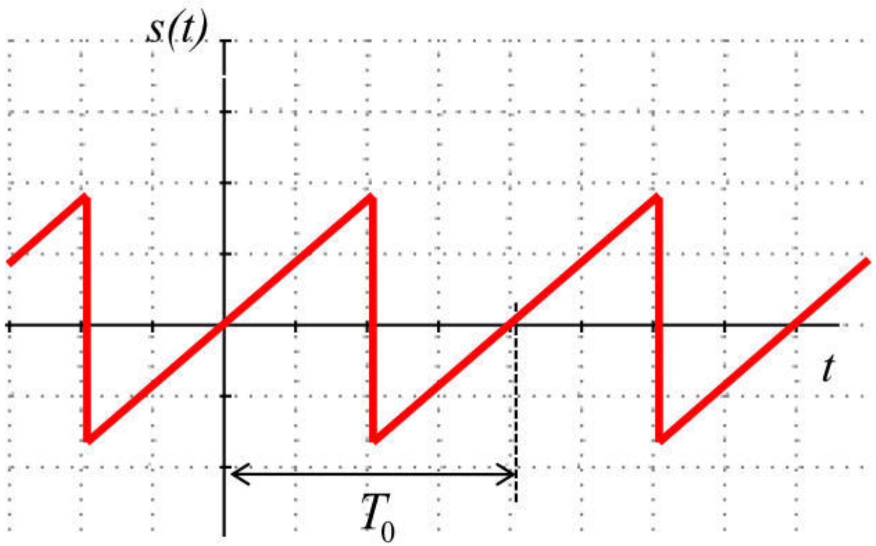
Beispiele für periodische Funktionen

Rechteckfunktion



$s(t) =$

Sägezahnfunktion



$s(t) =$

! Jede beliebige periodische Funktion lässt sich als Summe von Sinus- und Codinus-Funktionen darstellen!

Fourier-Reihe:

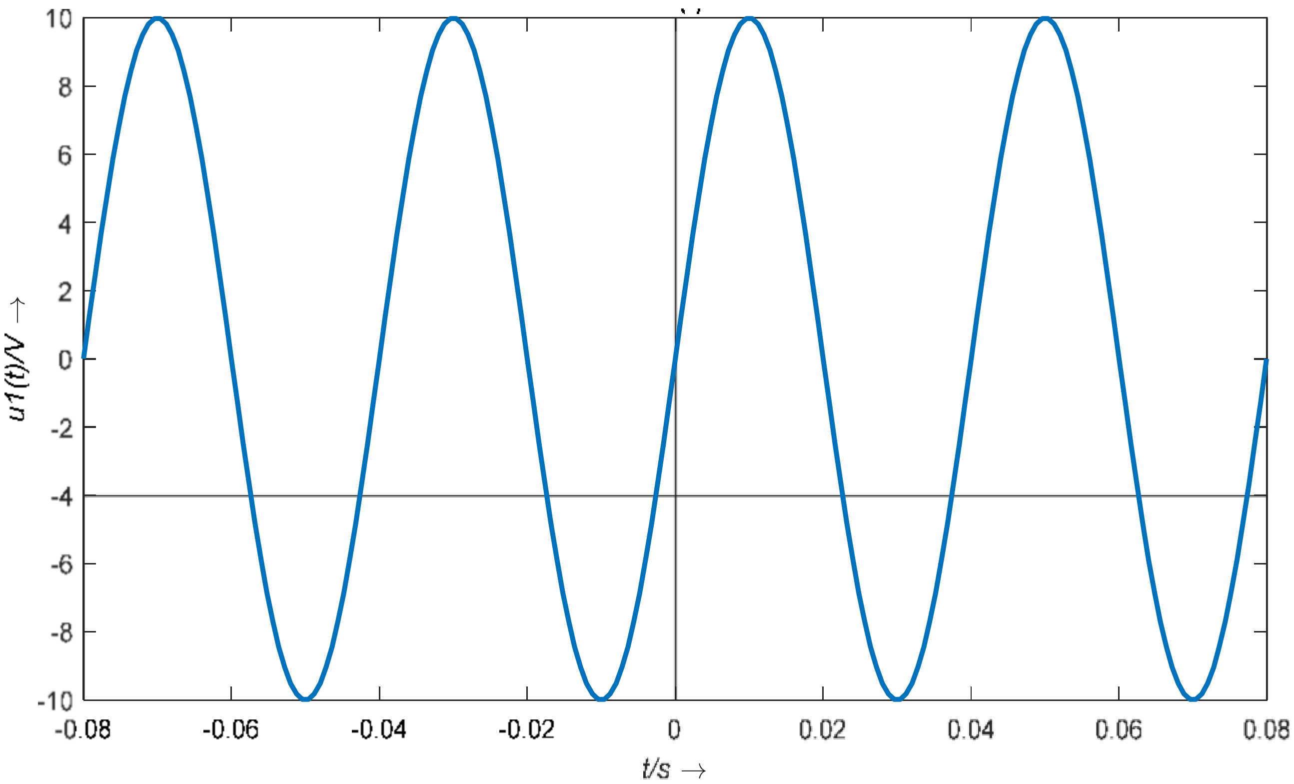
$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)\right]$$

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)\right]$$

$$\begin{aligned} s(t) = {} & \frac{1}{2}a_0 \\ & + a_1 \cdot \cos\omega_0 t + b_1 \cdot \sin\omega_0 t \\ & + a_2 \cdot \cos 2\omega_0 t + b_2 \cdot \sin 2\omega_0 t \\ & + a_3 \cdot \cos 3\omega_0 t + b_3 \cdot \sin 3\omega_0 t \\ & + \ldots \\ & + a_n \cdot \cos n\omega_0 t + b_n \cdot \sin n\omega_0 t \\ & + \ldots \end{aligned}$$

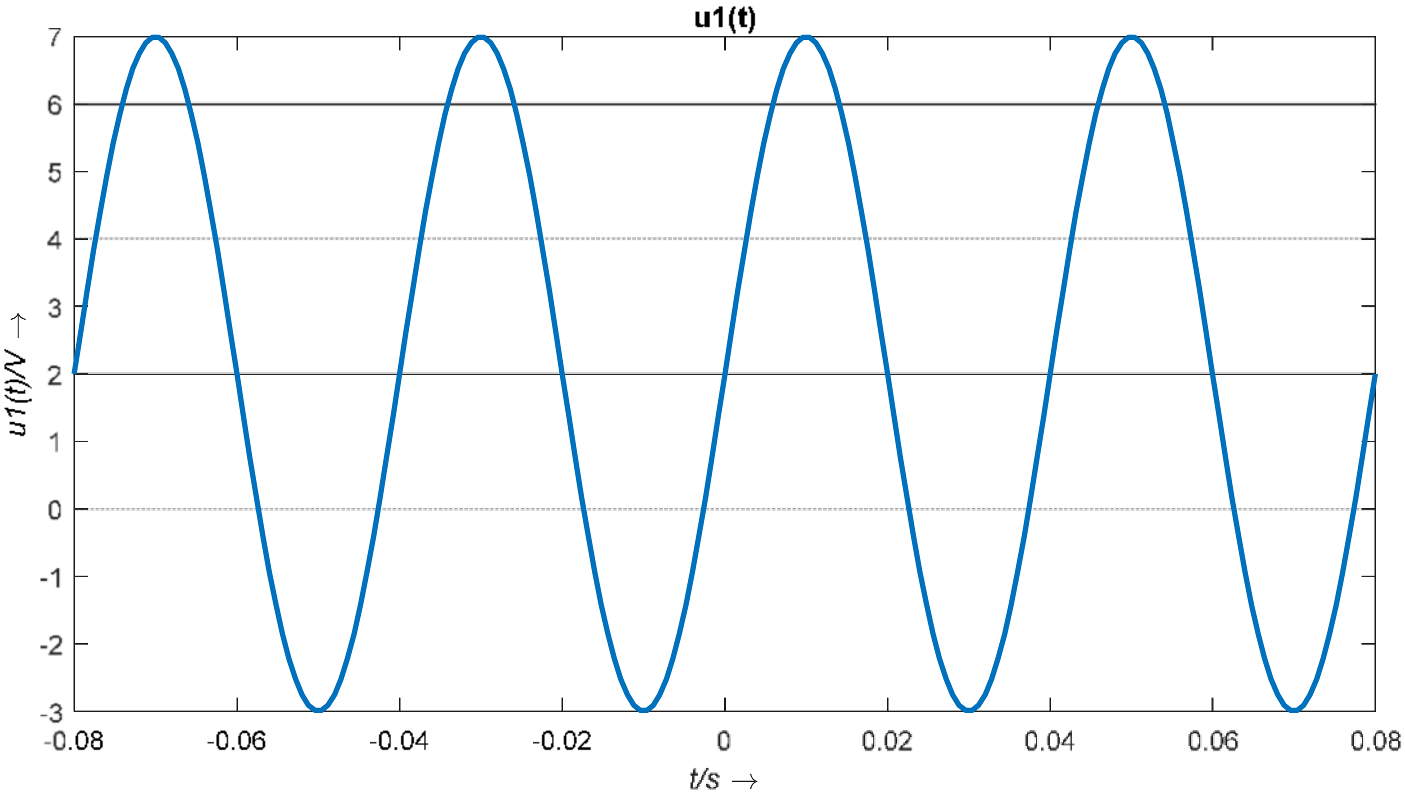
Entwicklung einfacher Funktionen

$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t) \right]$$



Entwicklung einfacher Funktionen

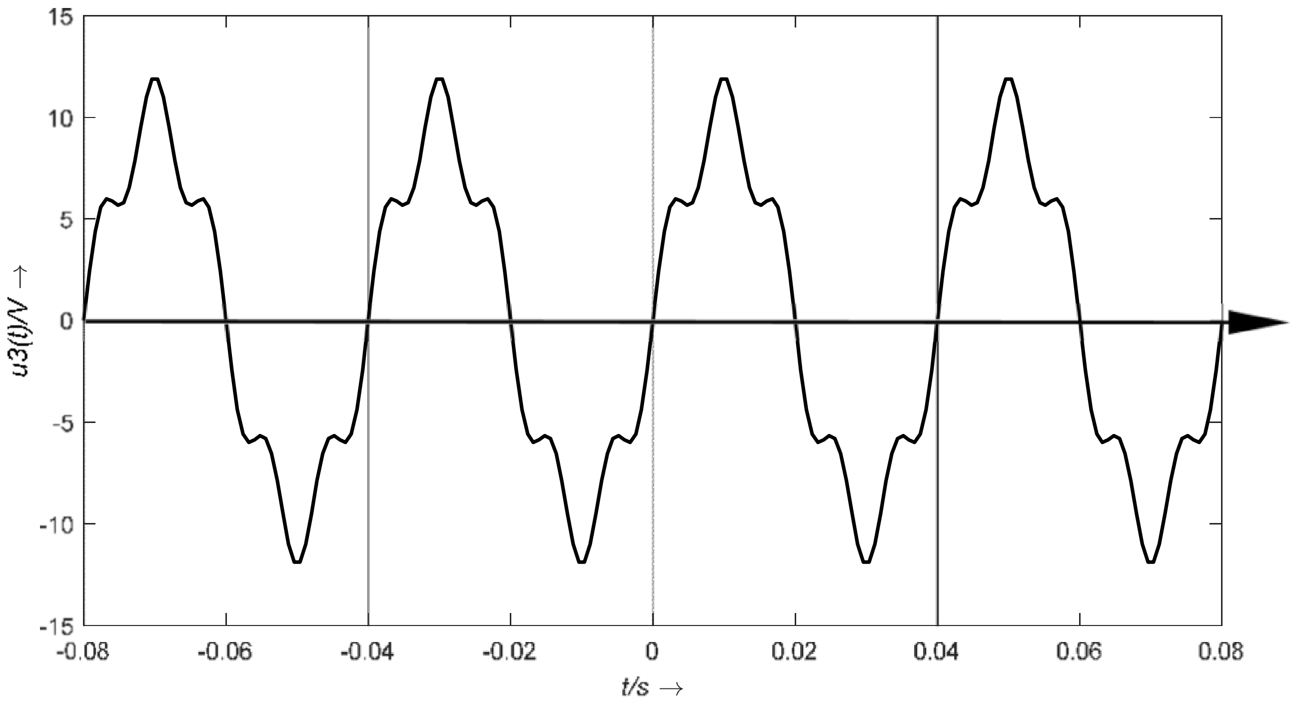
$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)\right]$$



$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)\right]$$

Entwicklung einfacher Funktionen

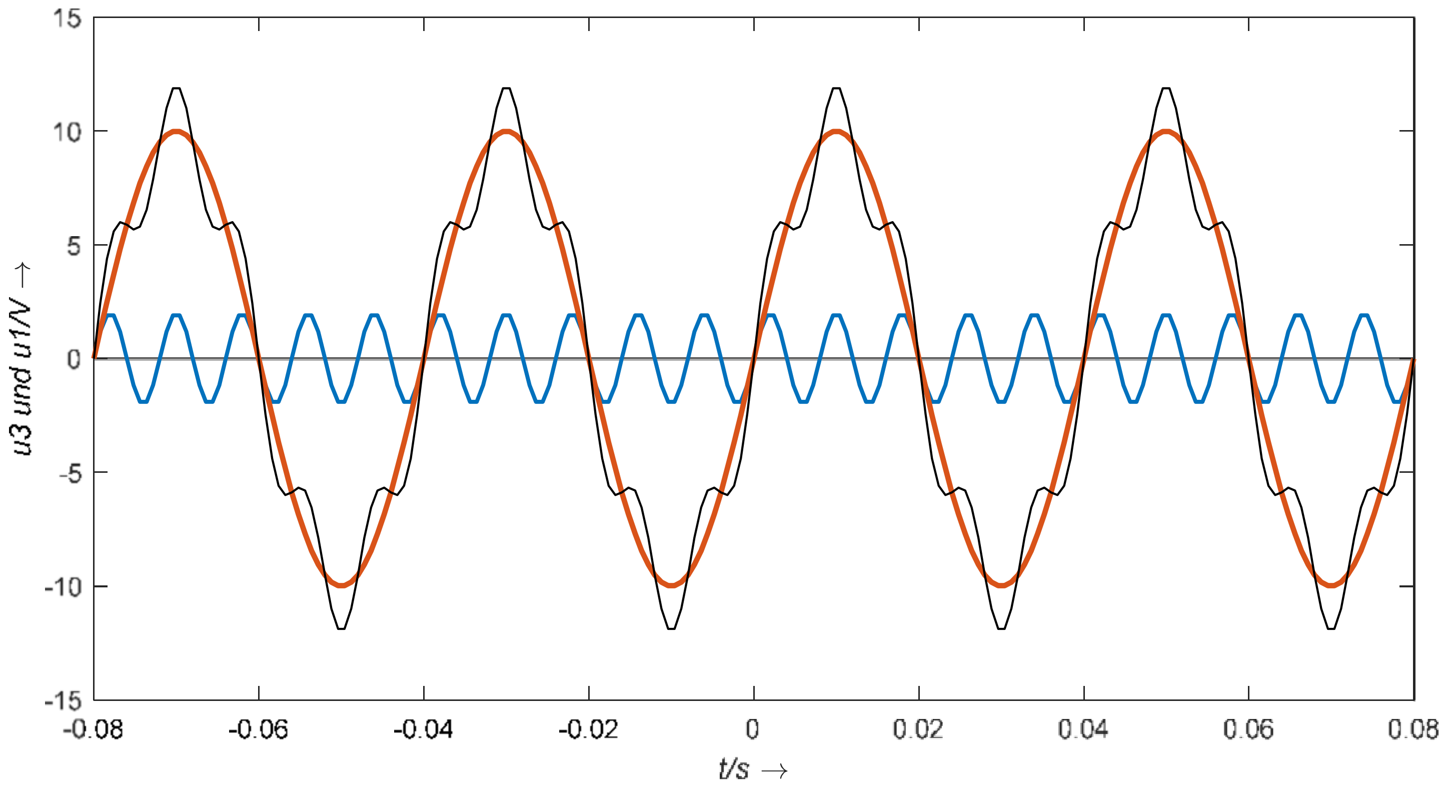
$$u3(t) = 10\text{V} \cdot \sin(2\pi \cdot 250Hz \cdot t) + 2V \cdot \sin(2\pi \cdot 1250Hz \cdot t)$$



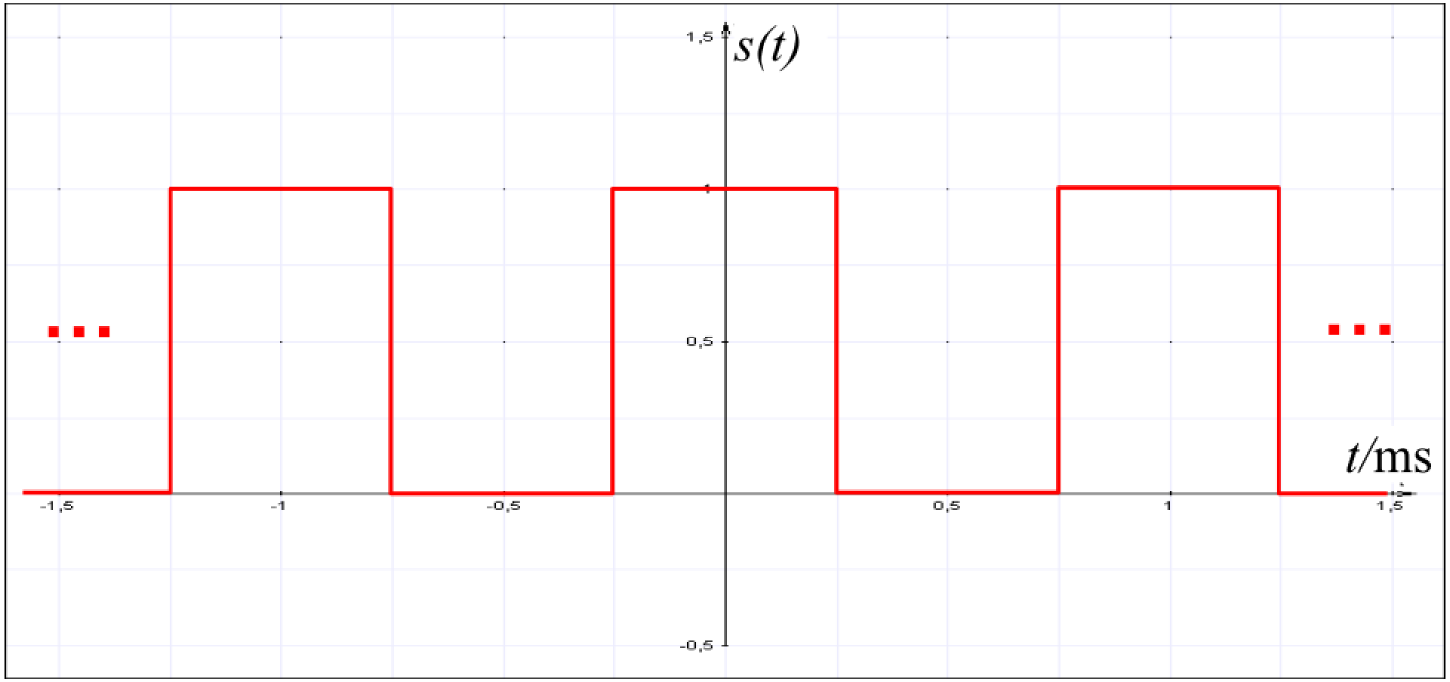
Hochschule Fulda
University of Applied Sciences
Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik

Die Teilfunktionen von u3(t)

$$u3(t) = 10\text{V} \cdot \sin(2\pi \cdot 250Hz \cdot t) + 2V \cdot \sin(2\pi \cdot 1250Hz \cdot t)$$



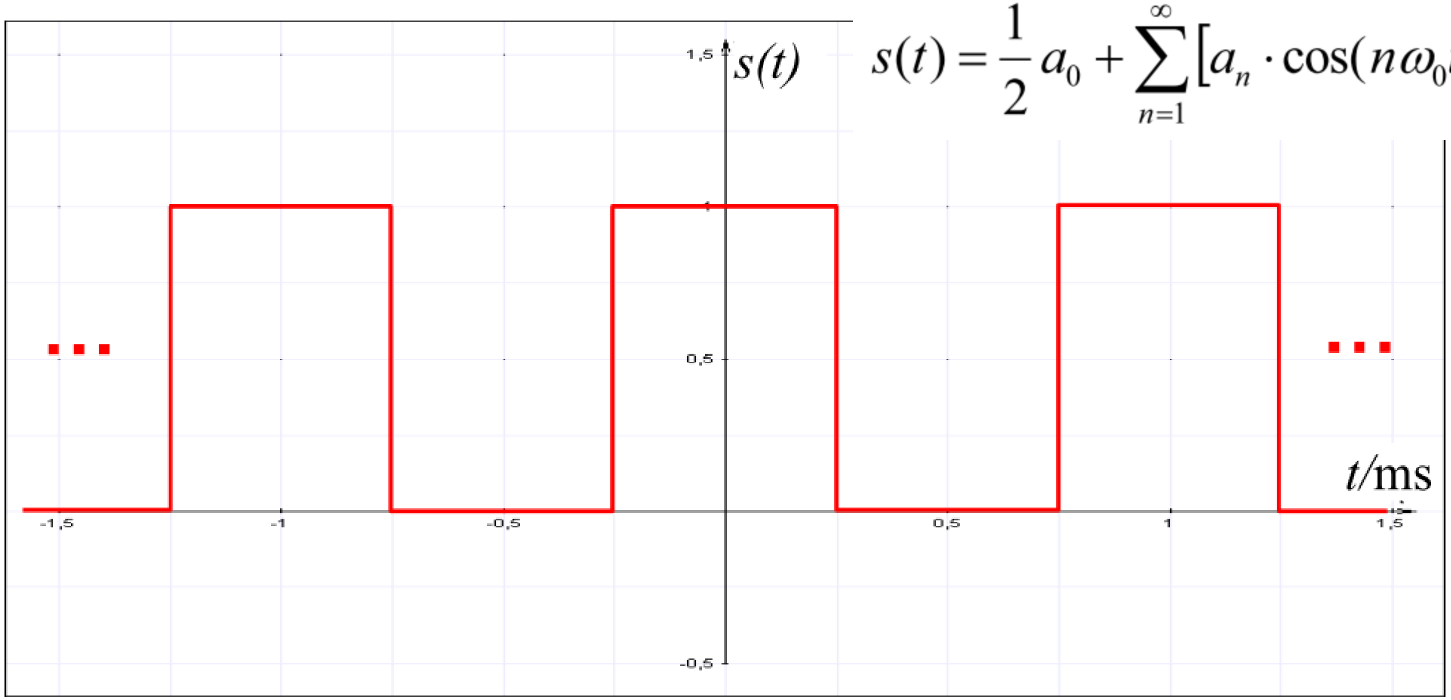
Entwicklung einer Rechteckfunktion



Ein Blick ins Skript …. Darstellung der Einzelsignale und ihrer Addition …
Ein Blick in den Signalgenerator siggen …

Entwicklung einer Rechteckfunktion

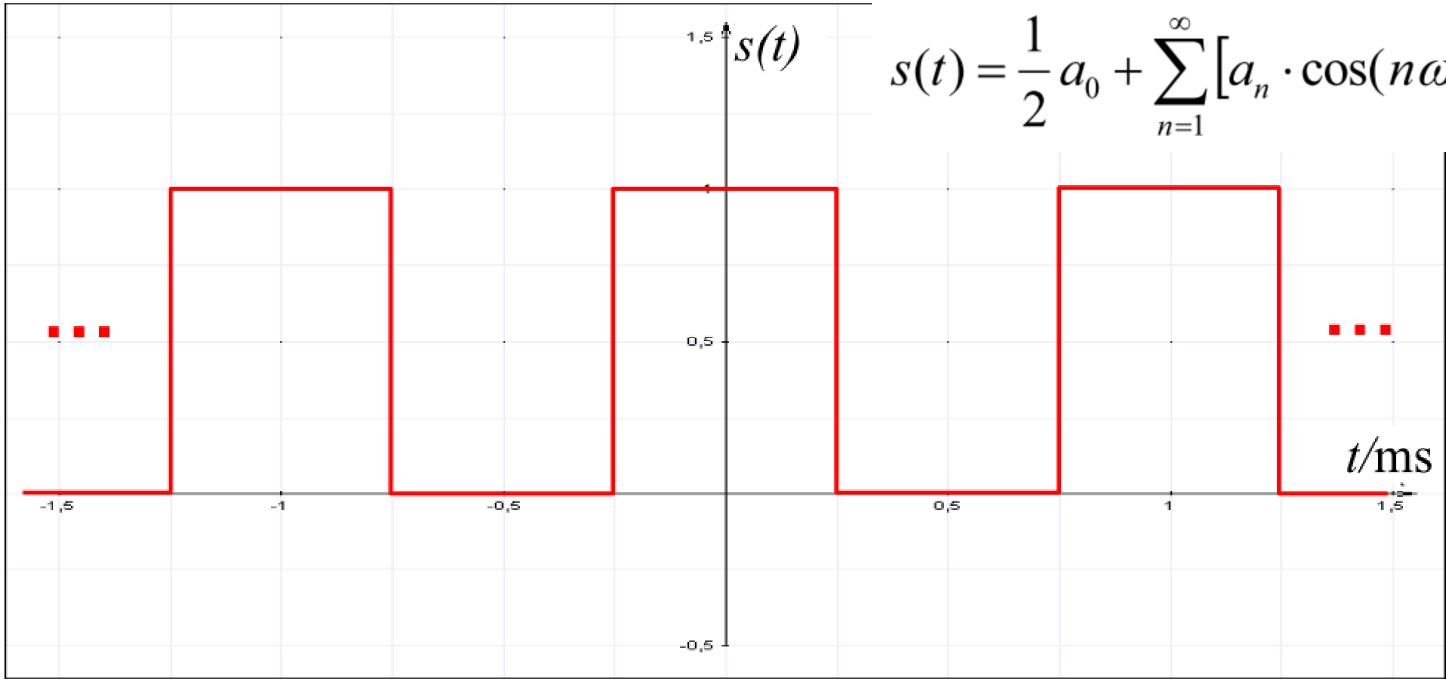
$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t) \right]$$



Was man ohne Rechnung ablesen kann:
Symmetrie:

Entwicklung einer Rechteckfunktion

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)\right]$$

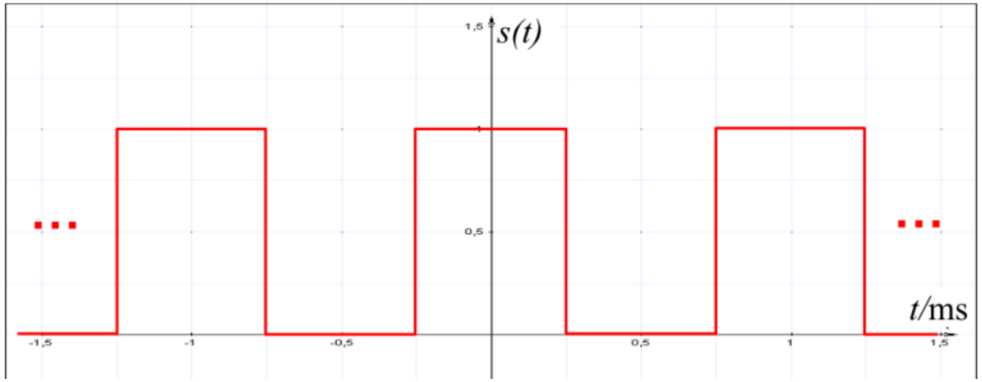


alle b_n=0 !

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a_n	1,0	2/π	0	-2/3π	0	2/5π	0	-2/7π	0	2/9π	0	-2/11π	0	2/13π	…
a_n	1,0	0,637	0	-0,212	0	0,127	0	-0,091	0	0,071	0	-0,058	0	0,049	…

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)\right]$$

Entwicklung einer Rechteckfunktion



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a_n	1,0	2/π	0	-2/3π	0	2/5π	0	-2/7π	0	2/9π	0	-2/11π	0	2/13π	…
a_n	1,0	0,637	0	-0,212	0	0,127	0	-0,091	0	0,071	0	-0,058	0	0,049	…

$$s(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(2\pi \cdot 1kHz \cdot t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3 \cdot 2\pi \cdot 1kHz \cdot t) + \frac{2}{5\pi}\cos(5 \cdot 2\pi \cdot 1kHz \cdot t) - \frac{2}{7\pi}\cos(7 \cdot 2\pi \cdot 1kHz \cdot t)$$

$$+ \frac{2}{9\pi}\cos(9 \cdot 2\pi \cdot 1kHz \cdot t) - \frac{2}{11\pi}\cos(11 \cdot 2\pi \cdot 1kHz \cdot t) + \frac{2}{13\pi}\cos(13 \cdot 2\pi \cdot 1kHz \cdot t) - \ldots$$

$$\approx 0{,}5 + 0{,}637\cos(2\pi \cdot 1kHz \cdot t) - 0{,}212\cos(3 \cdot 2\pi \cdot 1kHz \cdot t) + 0{,}127\cos(5 \cdot 2\pi \cdot 1kHz \cdot t)$$

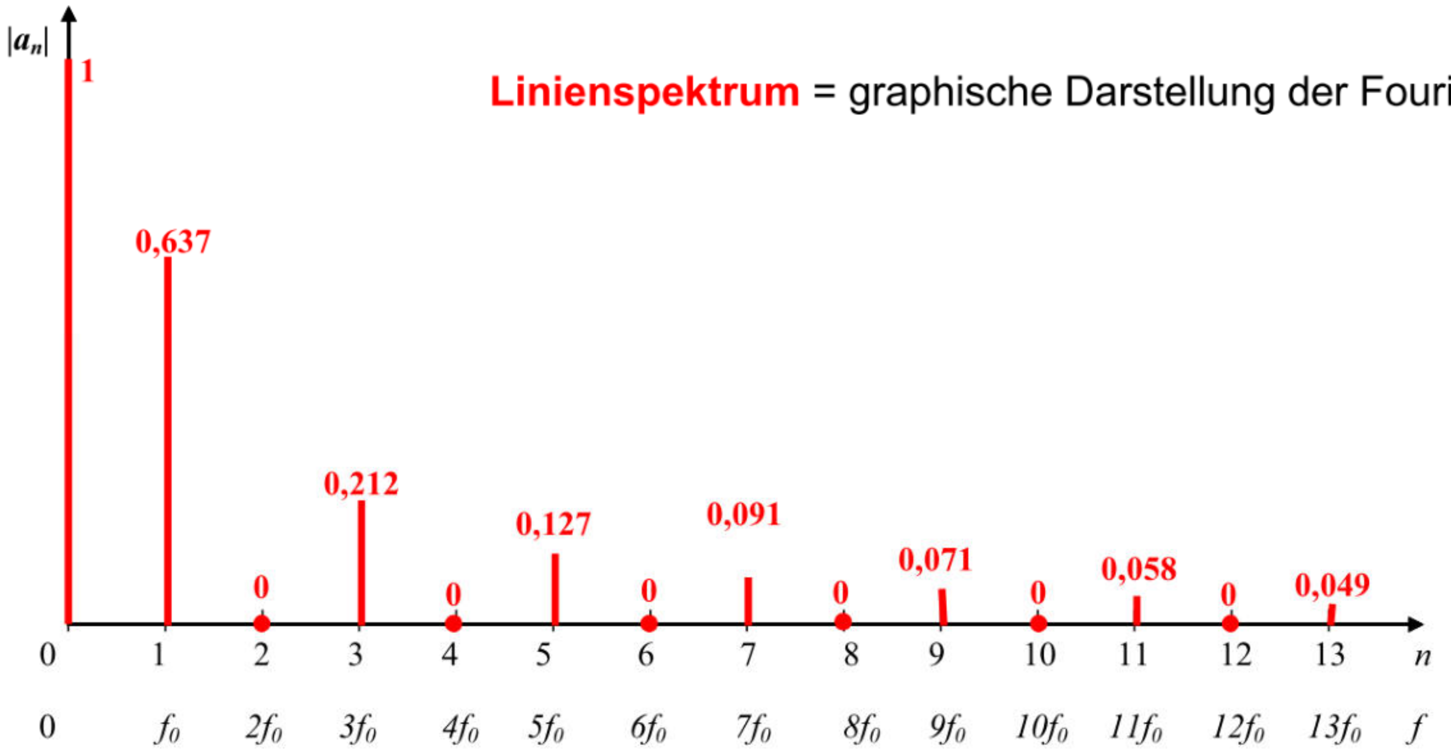
$$- 0{,}091\cos(7 \cdot 2\pi \cdot 1kHz \cdot t) + 0{,}071\cos(9 \cdot 2\pi \cdot 1kHz \cdot t) - 0{,}058\cos(11 \cdot 2\pi \cdot 1kHz \cdot t)$$

$$+ 0{,}049\cos(13 \cdot 2\pi \cdot 1kHz \cdot t) - \ldots$$

Grafische Darstellung der Koeffizienten der Fourierreihe

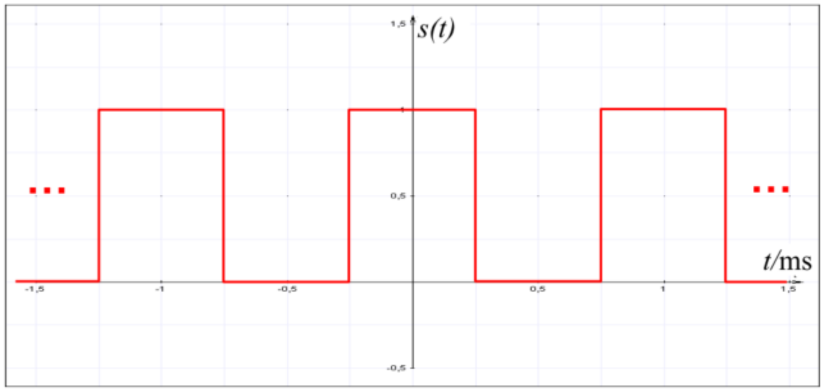
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a_n	1,0	2/π	0	-2/3π	0	2/5π	0	-2/7π	0	2/9π	0	-2/11π	0	2/13π	…
a_n	1,0	0,637	0	-0,212	0	0,127	0	-0,091	0	0,071	0	-0,058	0	0,049	…

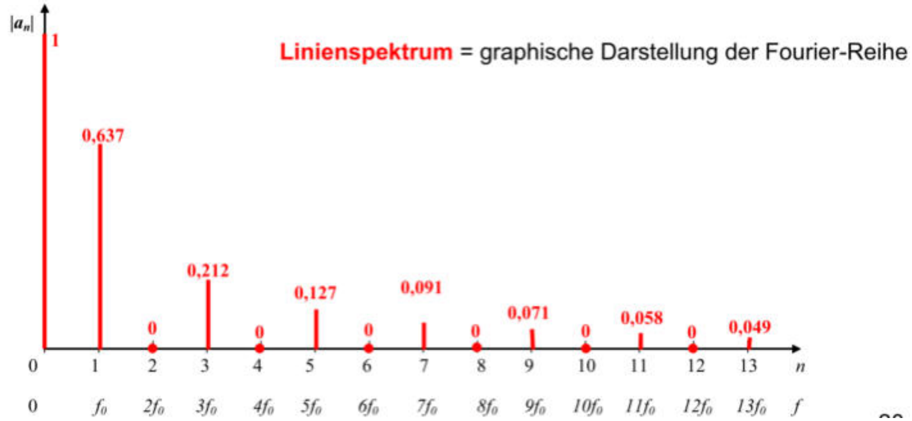
Linienspektrum = graphische Darstellung der Fourier-Reihe



Periodische Signale
Linienspektrum

- Das Linienspektrum stellt die Zeitfunktion s(t) im Frequenzbereich dar. Es ergibt sich eine Funktion in Abhängigkeit der Frequenz f (oder Kreisfrequenz ω). Beide Darstellungsformen sind äquivalent.
- Mathematisch führt man hier eine Fouriertransformation f(t)○—●F(w) durch.
  Das werden wir hier aber nicht näher behandeln!

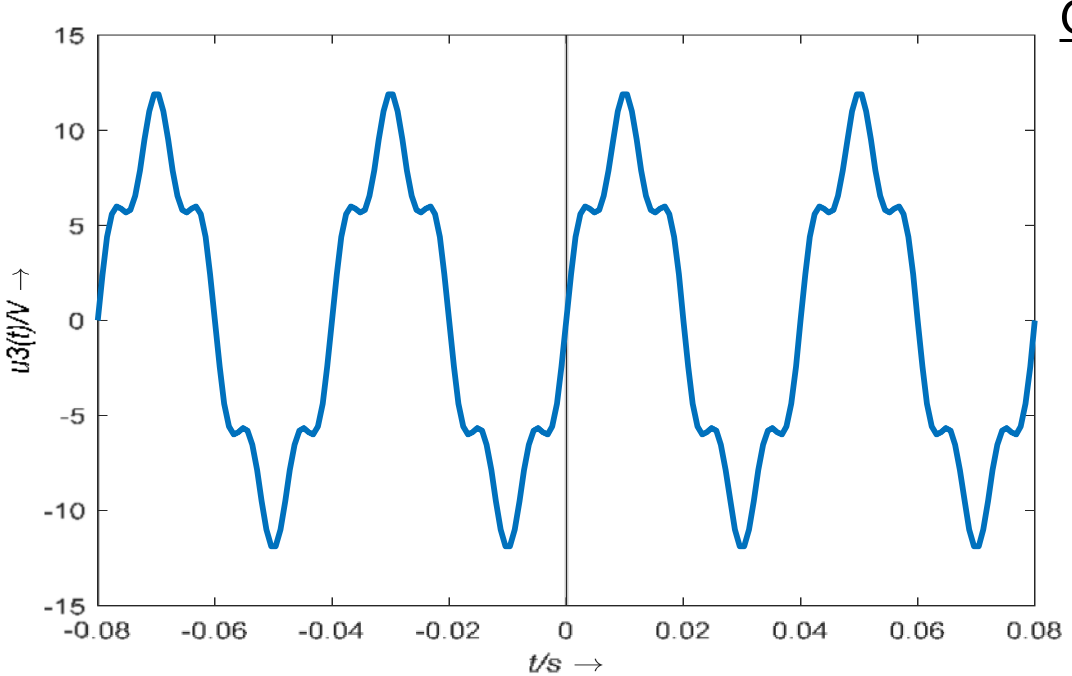




$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t) \right]$$

Grafische Darstellung der Koeffizienten der Fourier-Reihe

$$u3(t) = 10\mathrm{V} \cdot \sin(2\pi \cdot 250Hz \cdot t) + 2V \cdot \sin(2\pi \cdot 1250Hz \cdot t)$$



Grundfrequenz

$$f_0 = \frac{1}{4ms} = 250Hz$$

Koeffizienten

alle $a_n = 0$

$b_1 = 10$, $b_5 = 2$

alle anderen $b_n = 0$

- Ist die Zeitfunktion s(t) gegeben, können die Koeffizienten auch berechnet werden

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)\right]$$

$$a_0 = \frac{2}{T_0}\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t)dt = 2 \cdot \overline{s(t)}$$

doppelter Mittelwert (doppelter Gleichanteil)

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot \cos(n\omega_0 t)dt$$

n = 1, 2, 3, ...

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot \sin(n\omega_0 t)dt$$

n = 1, 2, 3, ...

Hochschule Fulda
University of Applied Sciences
Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik

- Bei der bisher gezeigten Form der Fourierreihe wird das Signal durch ein Sinusspektrum (a_n) und ein Cosinus-Spektrum (b_n) dargestellt.
- Es gibt aber auch eine Darstellung mittels Phasen- und Amplitudenspektrum.
  Hierbei nutzt man folgende Beziehung:

$$a \cdot \sin(\omega t) + b \cdot \cos(\omega t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega t - \psi)$$

Die Überlagerung einer Cosinus- und einer Sinus-Schwingung kann auch als phasenverschobene Cosinus-Schwingung dargestellt werden.

- Es ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{s}_n \cdot \cos(n\omega_0 t - \psi_n)$$

mit $\hat{s}_n = \sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2}$ und $\psi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n} \quad wenn\ \ a_n \geq 0$

$$\psi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n} + \pi \quad wenn\ \ a_n < 0$$

Hochschule Fulda

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)\right]$$

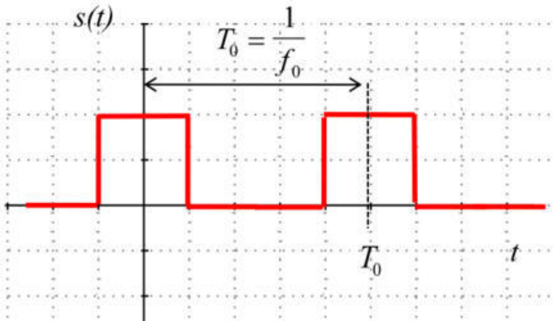
Wir fassen zusammen:

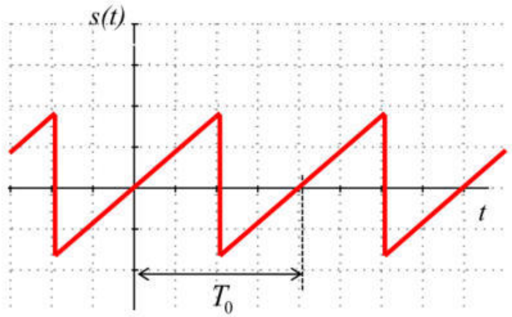
- Periodische Funktionen lassen sich als Fourier-Reihe, d.h. eine Summe aus Cosinus- und Sinusfunktionen + Gleichanteil darstellen.
- Die kleinste auftretende Frequenz wird Grundfrequenz genannt (f_0 / ω_0). Alle anderen Frequenzen sind ganzzahlige, positive Vielfache dieser Grundfrequenz (Faktor n)
- Die Amplituden jeder Teilschwingung sind die Koeffizienten a_n (Cosinus) und b_n (Sinus).
- Der Gleichanteil der Zeitfunktion ist $\frac{1}{2}\,a_0$
- Die in der Zeitfunktion enthaltenen Frequenzen können zusammen mit den zugehörigen Amplituden in einem Linienspektrum dargestellt werden.

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)\right]$$

Ausnutzen von Symmetrien zur Bestimmung des Spektrums:

- a_0=0 bei Zeitfunktionen ohne Gleichanteil
- alle b_n=0 für gerade Funktionen
- Alle an=0 (n>0) für ungerade Funktionen





Unsere Beobachtung bei der Erzeugung der Rechteckfunktion“:

- Je mehr Anteile mit hoher Frequenz aufaddiert werden, umso steiler wird der Anstieg der Flanke des angenäherten Rechtecksignals.
- Im Grenzfall einer unendlichen Reihe von Einzelschwingungen (Fourier-Reihe) wäre
die Flanke unendlich steil.

Grundgesetz der Nachrichtentechnik:

Je größer die maximale Frequenz,
umso kürzer die Anstiegszeit t_{AN}

$$f_G \sim \frac{1}{t_{AN}}$$