Pascalsches Dreieck

$$
\begin{array}{l|ccccccccc}
n=0 & & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
n=1 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
n=2 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
n=3 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
n=4 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\vdots & & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

Pascalsches Dreieck

Erinnerung: $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, $n, k \in \mathbb{N}$ geeignet.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2023/2024

KAPITEL II: Zahlbereiche

1. Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl

Email: agnes.radl@informatik.hs-fulda.de

Peano[1]-Axiome

Peano-Axiome zur Charakterisierung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$:

$$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to \ \cdots$$

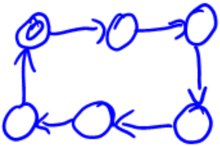
[1] Giuseppe Peano (1858–1932), italienischer Mathematiker

Peano[1]-Axiome

Peano-Axiome zur Charakterisierung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$:

1. 0 ist eine natürliche Zahl.

2. Jede natürliche Zahl besitzt genau einen Nachfolger.

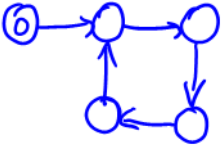


[1] Giuseppe Peano (1858–1932), italienischer Mathematiker

Peano[1]-Axiome

Peano-Axiome zur Charakterisierung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$:

1. 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl besitzt genau einen Nachfolger.
3. Es gibt keine natürliche Zahl mit dem Nachfolger 0.

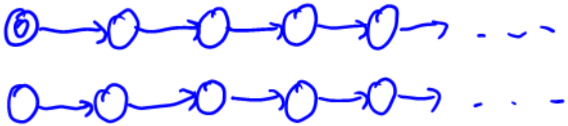


[1] Giuseppe Peano (1858–1932), italienischer Mathematiker

Peano[1]-Axiome

Peano-Axiome zur Charakterisierung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$:

1. 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl besitzt genau einen Nachfolger.
3. Es gibt keine natürliche Zahl mit dem Nachfolger 0.
4. Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.



[1] Giuseppe Peano (1858–1932), italienischer Mathematiker

Peano[1]-Axiome

Peano-Axiome zur Charakterisierung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$:

1. 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl besitzt genau einen Nachfolger.
3. Es gibt keine natürliche Zahl mit dem Nachfolger 0.
4. Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.
5. $\mathbb{N}$ selbst ist die einzige Teilmenge von $\mathbb{N}$, die die 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n' enthält.

$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \bigcirc \to \ldots$

[1]Giuseppe Peano (1858–1932), italienischer Mathematiker

Problem

Sei $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage.

Frage

Wie zeigt man, dass $A(n)$ für *jedes* $n \in \mathbb{N}$ wahr ist?

Idee:

Dazu genügt es, folgende zwei Aussagen zu zeigen:

- $A(0)$ ist wahr. (Induktionsanfang (IA))
- Für jedes $n \in \mathbb{N}$, für das $A(n)$ wahr ist, ist auch $A(n+1)$ wahr. (Induktionsschritt (IS))

Dies ist das Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

Bemerkung

Dies funktioniert auch, wenn man $A(n)$ für alle $n \geq m$, ($m \in \mathbb{N}$), zeigen möchte - beim Induktionsanfang ist dann $A(m)$ zu zeigen.

Beispiel: Gaußsche[2] Summenformel

Satz

Für jedes $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, gilt $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}}$.

[2] Carl Friedrich Gauß (1777–1855), deutscher Mathematiker

Beispiel: Gaußsche[2] Summenformel

Satz

Für jedes $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, gilt $\overbrace{\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}}}^{A(n)}$.

Bsp.: $n = 5$

l.S. $\sum_{k=1}^{5} k = 1+2+3+4+5 = 15$

r.S. $\frac{5 \cdot (5+1)}{2} = 15$

Beweis des Satzes durch vollständige Induktion:

IA: $n=1$ (zu zeigen: $\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$)

l.S. $\sum_{k=1}^{1} k = 1$

r.S. $\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$

[2] Carl Friedrich Gauß (1777–1855), deutscher Mathematiker

L.S. und r.S. stimmen überein.
Also gilt $A(1)$.

IV (Induktionsvoraussetzung)

<u>I.S:</u> $n \to n+1$ (Zu zeigen: Falls $\underbrace{A(n)}_{\text{IV}}$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr.)

Angenommen, $A(n)$ ist wahr. (IV)
zu zeigen ist, dass $A(n+1)$ wahr ist, also dass

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)\cdot(n+1+1)}{2}$$ gilt.

Überlegung:

$$\text{L.S.:} \quad \sum_{k=1}^{n+1} k = \overbrace{\sum_{k=1}^{n} k}^{\overset{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2}} + n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

$$= \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2}$$

$$= \frac{n^2+3n+2}{2}$$

$n=5$

$$\sum_{k=1}^{5+1} k = 1+2+3+4+5+6$$

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1+2+3+4+5$$

r. S.: $\frac{(n+1)\cdot(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2+2n+n+2}{2}$

$$= \frac{n^2+3n+2}{2}$$

l. S. und r. S. stimmen überein,
Also gilt $A(n+1)$. $\square$

$$\left.\begin{array}{ccccccl} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \rightsquigarrow & \sum_{k=1}^{n} k \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 & \rightsquigarrow & \sum_{k=1}^{n} k \end{array}\right\} 2\sum_{k=1}^{n} k$$

$$\begin{array}{ccccccl} n+1 & n+1 & n+1 & \cdots & n+1 & \rightsquigarrow & n(n+1) \end{array}$$

d.h. $\quad n(n+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k$

bzw. $\quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beispiel: Geometrische Summenformel

Satz

Sei $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.}$$

Beispiel: Geometrische Summenformel

Satz

Sei $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.}$$

Bem.: $x = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} 1^k = 1^0 + 1^1 + \dots + 1^n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{(n+1)\text{-mal}} = n+1$$

Beispiel: Geometrische Summenformel

Satz

Sei $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\overbrace{\boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.}}^{A(n)}$$

Beweis durch vollständige Induktion:

I.A.: $n = 0$

l.S. $\sum_{k=0}^{0} x^k = x^0 = 1$

r.S. $\frac{1 - x^{0+1}}{1 - x} = \frac{1 - x}{1 - x} = 1$

l.S. und r.S. stimmen überein. Also gilt $A(0)$.

I.S.: $n \to n+1$

Angenommen, es gilt $A(n)$, also $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. (IV).

(Zu zeigen ist, dass dann auch $A(n+1)$ gilt, also

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1-x^{n+1+1}}{1-x}.)$$

Es ist

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} x^k}_{\overset{(IV)}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1}$$

$$= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{(1-x)\,x^{n+1}}{1-x}$$

$$= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x\cdot x^{n+1}}{1-x}$$

$$= \frac{1-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+1+1}}{1-x}.$$

Also gilt $A(n+1)$.

$\square$

Beispiel: Binomischer Satz

Satz

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.}$$

Beispiel: Binomischer Satz

Satz

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\underbrace{\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.}}_{A(n)}$$

Bemerkung:

$n = 2$

l.S.: $(a+b)^2$

r.S.: $\sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k} b^k = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

Fazit: Für $n=2$ ist dies gerade die 1. binom. Formel.

$$\underbrace{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.}_{A(n)}$$

Beweis durch vollständige Induktion:

I.A: $n=0$

l.S. $(a+b)^0 = 1$

r.S. $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$

l.S. und r.S. stimmen überein. Also gilt $A(0)$.

I.S.: $n \to n+1$.

Angenommen, $A(n)$ gilt, (IV)

zu zeigen ist dann, dass dann auch $A(n+1)$ gilt, also

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k. \qquad (*)$$

Umformen der linken Seite von $(*)$ ergibt

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$$

$$= a(a+b)^n + b(a+b)^n$$

$$\underset{\text{IV}}{=} a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

„a und b reinmultiplizieren."

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k$$

Indexshift bei 2. Summe