Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2023/2024

KAPITEL III: Relationen und Abbildungen

3. Abzählbar – überabzählbar

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl

Email: `agnes.radl@informatik.hs-fulda.de`

Abzählbar und überabzählbar

Definition

Eine Menge M heißt abzählbar, falls $M = \emptyset$ oder falls es eine surjektive Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to M$$

gibt, (also $f(\mathbb{N}) = M$).

Ansonsten heißt M überabzählbar.

Bemerkung

Mit dieser Definition sind endliche Mengen abzählbar. (Manche Autor*innen unterscheiden nicht nur

- „abzählbar“– „überabzählbar“,

sondern

- „endlich“– „abzählbar“– „überabzählbar“.)

Beispiele

Abzählbare Mengen sind zum Beispiel:

- $\mathbb{N}$,
- $\mathbb{Z}$,
- $\mathbb{Q}$,
- $\bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$, wobei M_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ abzählbar.

Überabzählbare Mengen sind zum Beispiel:

- $(0, 1)$,
- $\mathbb{R}$,
- $\mathbb{P}(\mathbb{N})$.

Bemerkung

Sind M und N Mengen, zwischen denen es eine bijektive Abbildung gibt, so besitzen sie dieselbe Kardinalität. Wir schreiben dann $|M| = |N|$.

Beispiel

- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$,
- $|(0, 1)| = |\mathbb{R}|$,
- $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.

Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2023/2024

KAPITEL IV: Kombinatorik

1. Permutationen, Variationen und Kombinationen

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl

Email: `agnes.radl@informatik.hs-fulda.de`

Permutationen

Definition

Eine Permutation einer n-elementigen Menge $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ist eine bijektive Abbildung

$$\pi : X \to X.$$

Notationen

- $\pi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \pi(x_1) & \pi(x_2) & \cdots & \pi(x_n) \end{pmatrix}$,
- $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(x_1) & \pi(x_2) & \cdots & \pi(x_n) \end{pmatrix}$,
- $\pi = (\pi(x_1), \pi(x_2), \ldots, \pi(x_n))$.

Anzahl Anordnungen

Frage

Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine n-elementige Menge anzuordnen?
Für eine n-elementige Menge X ist also die Anzahl $P(n)$ der Elemente der Menge

$$\{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in X \text{ und } a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j\}$$

gesucht.

Bemerkung

Eine derartige Anordnung wird ebenfalls als eine „Permutation“ bezeichnet.

Beispiele: Permutationen

- $M = \{a, b\}$ mit $a \neq b$, also $n = 2$.
  Mögliche Anordnungen: (a, b), (b, a)
  $P(2) = 2$
- $M = \{a, b, c\}$ mit $a \neq b, b \neq c, a \neq c$, also $n = 3$.
  Mögliche Anordnungen:
  $(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$
  $P(3) = 6$
- Wie viele Sitzordnungen gibt es in einer Vorlesung mit 150 Studierenden in einem Hörsaal mit 150 Plätzen?
  Es gibt $P(150)$ Sitzordnungen.

Anzahl Anordnungen einer n-elementigen Menge

Satz

Sei $n \geq 1$. Es gibt $n!$ bijektive Abbildungen zwischen zwei n-elementigen Mengen $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$.

Folgerung

Es gilt

$$\boxed{P(n) = n!}.$$

Es gibt also $n!$ verschiedene Möglichkeiten, eine n-elementige Menge anzuordnen.

Variation ohne Wiederholung

Frage

Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus einer n-elementigen Menge eine k-elementige Teilmenge auszuwählen und anzuordnen?

Für eine n-elementige Menge X ist also die Anzahl $V(n, k)$ der Elemente der Menge

$$\{(a_1, \ldots, a_k) : a_i \in X \text{ und } a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j\}$$

gesucht.

Bemerkung

Eine derartige Anordnung nennt man eine „Variation ohne Wiederholung“ oder eine „k-Permutation von n Objekten“.

Beispiele: Variation ohne Wiederholung

- $M = \{a, b, c\}$ mit $a \neq b, b \neq c, a \neq c$, also $n = 3$.
  Mögliche Anordnungen der 2-elementigen Teilmengen:
  $(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)$.
  Also ist $V(3, 2) = 6$.
- Wie viele „Wörter“ aus 3 verschiedenen Buchstaben kann man bilden?
  Es gibt $V(26, 3)$ Wörter.
- Ziehe aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln k Kugeln ohne Zurücklegen und unter Beachtung der Reihenfolge.
  Es gibt $V(n, k)$ Möglichkeiten.

Anzahl Variationen ohne Wiederholung

Satz

Sei $1 \leq k \leq n$. Es gibt $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ injektive Abbildungen zwischen einer k-elementigen Menge X und einer n-elementigen Menge Y.

Folgerung

Es gilt

$$\boxed{V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}}.$$

Es gibt also $\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten, aus einer n-elementigen Menge eine k-elementige Teilmenge auszuwählen und anzuordnen.

Variation mit Wiederholung

Frage

Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus einer n-elementigen Menge k Elemente anzuordnen, wobei Elemente mehrfach auftauchen dürfen?

Für eine n-elementige Menge X ist also die Anzahl $V^*(n, k)$ der Elemente der Menge

$$\{(a_1, \ldots, a_k) : a_i \in X\}$$

gesucht.

Bemerkung

Eine derartige Anordnung nennt man eine „Variation mit Wiederholung“.

Beispiele: Variation mit Wiederholung

- Zahlenschloss mit 4 Zahlenrädern von 0 bis 9
  Es gibt $V^*(10,4)$ verschiedene Zahlenkombinationen.
- $M = \{a, b, c\}$ mit $a \neq b, b \neq c, a \neq c$, also $n = 3$.
  Mögliche Anordnungen von 2 nicht notwendigerweise unterschiedlichen Elementen dieser Menge:
  $(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)$.
  Also ist $V^*(3,2) = 9$.
- Ziehe aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln k Mal eine Kugel und lege sie nach jedem Zug wieder zurück, wobei die Reihenfolge der Ziehung beachtet wird.
  Es gibt $V^*(n,k)$ verschiedene Ausgänge der Ziehungen.

Anzahl Variationen mit Wiederholung

Satz

Seien $n, k \geq 1$. Es gibt n^k Abbildungen zwischen einer k-elementigen Menge X und einer n-elementigen Menge Y.

Folgerung

Es gilt

$$\boxed{V^*(n, k) = n^k}.$$

Es gibt also n^k Möglichkeiten, k nicht notwendigerweise verschiedene Elemente einer n-elementigen Menge anzuordnen.

Kombination ohne Wiederholung

Frage

Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus einer n-elementigen Menge eine k-elementige Teilmenge auszuwählen?

Für eine n-elementige Menge X ist also die Anzahl $C(n,k)$ der Elemente der Menge $\{M \in \mathbb{P}(X) : |M| = k\}$ gesucht.

Bemerkung

Eine derartige Auswahl nennt man eine „Kombination ohne Wiederholung“.

Beispiele: Kombination ohne Wiederholung

- $M = \{a, b, c\}$ mit $a \neq b, b \neq c, a \neq c$, also $n = 3$.
  2-elementigen Teilmengen: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$.
  Also ist $C(3, 2) = 3$.
- Lottoziehung „6 aus 49“:
  Es gibt $C(49, 6)$ mögliche Ausgänge.
- Eine Skathand besteht aus 10 von 32 Karten.
  Es gibt $C(32, 10)$ verschiedene Skathände.
- Ziehe aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln k Kugeln ohne Beachtung der Reihenfolge.
  Es gibt $C(n, k)$ verschiedene Möglichkeiten.

Anzahl Kombinationen ohne Wiederholung

- Jede k-elementige Teilmenge kann auf $P(k) = k!$ Arten angeordnet werden.
- $V(n,k)$ erhält man, indem man zu jeder k-elementigen Teilmenge die möglichen Anordnungen mitzählt, also

$$\begin{aligned} V(n,k) = {} & \begin{array}{c}\#k\text{-elementige}\\ \text{Teilmengen}\end{array} \cdot \begin{array}{c}\#\text{ Anordnungen einer}\\ k\text{-elementigen Teilmenge}\end{array} \\ = {} & \quad C(n,k) \quad \cdot \quad P(k) \end{aligned}$$

- Damit ist $C(n,k) = \frac{V(n,k)}{P(k)} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Fazit

Es gilt

$$\boxed{C(n,k) = \binom{n}{k}}.$$

Eine n-elementige Menge besitzt also $\binom{n}{k}$ verschiedene k-elementige Teilmengen, wobei $0 \leq k \leq n$.

Weitere Beispiele – Binomischer Lehrsatz

- $(a+b)^n = ?$
  $$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)}_{\text{Klammer1}}\ \underbrace{(a+b)}_{\text{Klammer 2}} \ldots \underbrace{(a+b)}_{\text{Klammer } n}$$
- Beim Ausmultiplizieren wählt man in jeder Klammer entweder a oder b.
- Wenn man aus k Klammern a wählt und aus den verbleibenden $n-k$ Klammern b, so erhält man $a^k b^{n-k}$.
- Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus k verschiedenen Klammern a auszuwählen, so dass der Ausdruck $a^k b^{n-k}$ beim Ausmultiplizieren $\binom{n}{k}$ Mal auftaucht.

Diese Überlegung führt auf den binomischen Lehrsatz, siehe Kapitel II.1:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}} \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Weitere Beispiele – Anzahl der Elemente der Potenzmenge

Sei M eine Menge mit $|M| = n$.

Frage

Wie groß ist $|\mathbb{P}(M)|$?

Überlegung

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}(M)| &= \sum_{k=0}^{n} \#k\text{-elementige Teilmengen von } M \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} \overset{\substack{\text{binom.}\\ \text{Lehrsatz}}}{=} (1+1)^n = 2^n.
\end{aligned}$$

Kombination mit Wiederholung

Frage

Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus einer n-elementigen Menge eine k Elemente auszuwählen, wobei Elemente mehrfach ausgewählt werden dürfen.

Die Anzahl der Möglichkeiten bezeichnen wir mit $C^*(n, k)$.

Bemerkung

Eine derartige Auswahl nennt man eine „Kombination mit Wiederholung“.

Beispiele: Kombination mit Wiederholung

- Ziehe aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln k Mal eine Kugel und lege sie nach jedem Zug wieder zurück, wobei die Reihenfolge egal ist.
  Es gibt $C^*(n, k)$ mögliche Ausgänge.
- Wurf mit 3 (nicht unterscheidbaren) Würfeln
  Es gibt $C^*(6, 3)$ verschiedene Ausgänge.

Anzahl Kombinationen mit Wiederholung

Mit Hilfe des vorigen Beispiels aus der Vorlesung kommen wir auf die folgende Idee:

$$\begin{aligned} C^*(n,k) &= \#\text{ Möglichkeiten, } k \text{ Häkchen auf } n-1+k \text{ Positionen} \\ &\qquad \text{zu verteilen} \\ &= \#\text{ Möglichkeiten, aus einer } (n-1+k)\text{-elementigen} \\ &\qquad \text{Menge eine } k\text{-elementige Menge auszuwählen} \\ &= C(n-1+k,k) = \binom{n-1+k}{k}. \end{aligned}$$

Fazit

Seien $n, k \geq 1$. Es gilt

$$\boxed{C^*(n,k) = \binom{n-1+k}{k}}.$$

Variation und Kombination

Bemerkung

- Eine Variation ist eine Anordnung von Objekten in einer bestimmten Reihenfolge.
- Eine Kombination ist eine Auswahl von Elementen (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge).

Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2023/2024

KAPITEL IV: Kombinatorik

2. Urnenmodelle

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl

Email: agnes.radl@informatik.hs-fulda.de

Zusammenfassung Urnenmodelle

- Urne mit $n \geq 1$ verschiedenen Kugeln
- Ziehung von $k \geq 1$ Kugeln

	Berücksichtigung der Reihenfolge	Reihenfolge egal
ohne Wiederholung	$V(n,k) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$C(n,k) = \dbinom{n}{k}$
mit Wiederholung	$V^*(n,k) = n^k$	$C^*(n,k) = \dbinom{n-1+k}{k}$