Digitaltechnik & Rechnersysteme

Schaltnetze

Martin Kumm

Hochschule Fulda
University of Applied Sciences

AI | Angewandte Informatik

WiSe 2023/2024

Was bisher geschah...

Angewandte Informatik

- Zahlencodierung, Stellenwertsystem
- Vorzeichenbehaftete Zahlen
  - Vorzeichen-Betrag: Vorzeichenbit + Betrag separat codiert
  - Zweierkomplement: negative Zahlen bitweise invertiert + 1
- Kommazahlen
  - Festkommazahlen: Nachkommastellen mit codiert
  - Gleitkommazahlen: Zahlen werden zu $\pm 1.m \cdot 2^e$ normalisiert; Komponenten werden gespeichert als
    1. Vorzeichen (s)
    2. Exponent (e)
    3. Mantisse (m)

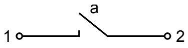
Inhalte

Angewandte Informatik

Informationsverarbeitung mit Schaltern

Angewandte Informatik

Symbolische Darstellung eines Schalters:



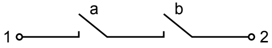
Eingang *a* besagt ob Schalter offen oder geschlossen:

Schalter *a* geschlossen	Verbindung 1↔2?
nein	nein
ja	ja

🤔 Aber wie lassen sich damit Informationen verarbeiten?

Informationsverarbeitung mit Schaltern

Serienschaltung zweier Schalter:



Schalter a geschlossen	Schalter b geschlossen	Verbindung $1 \leftrightarrow 2$?
nein	nein	nein
nein	ja	nein
ja	nein	nein
ja	ja	ja

Logische Abstraktion über binäre Variablen:

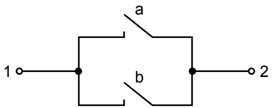
- Schalter offen/geschlossen: 0/1
- Verbindung vorhanden nein/ja: 0/1

a	b	$1 \leftrightarrow 2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Informationsverarbeitung mit Schaltern

Angewandte Informatik

Parallelschaltung zweier Schalter:



Vorlesungsaufgabe: Wie lautet die Wahrheitstabelle?

a	b	$1 \leftrightarrow 2$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Komplexe Informationsverarbeitung

🤔 Aber wie lassen sich damit komplexe Informationen verarbeiten?

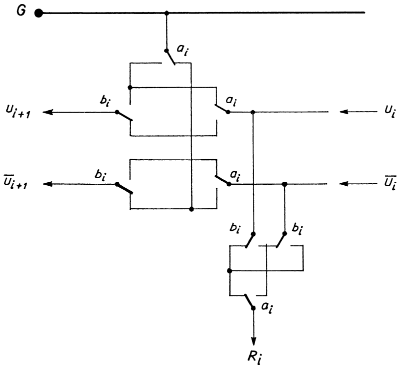
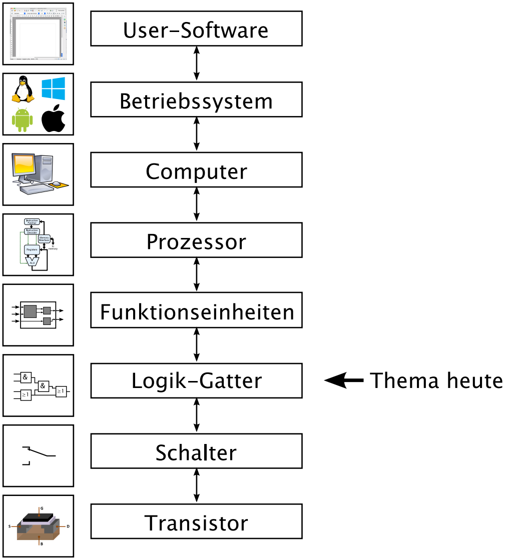


Bild 16. Einschrittige Addierschaltung für eine Binärstelle. Sie enthält nur Kontakte a_i und b_i der beiden Summanden. Es gibt zwei Übertragungsketten u und $\overline{u}$. („Es wird übertragen“ und „es wird nicht übertragen“)

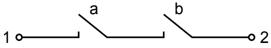
Schalter-Realisierung einer 1-Bit Addierschaltung des Z1 / Z3 Computers
(Quelle: Konrad Zuse, ≫Der Computer, mein Lebenswerk≪)

Die Macht der Abstraktion

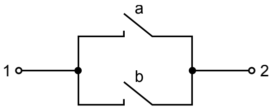


Schaltalgebra

Angewandte Informatik



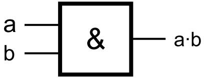
Reihenschaltung



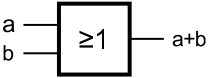
Parallelschaltung

Abstraktion:

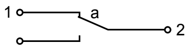
UND-Verknüpfung



ODER-Verknüpfung



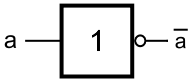
NICHT-Verknüpfung/Negation



a	$1 \leftrightarrow 2$
0	1
1	0

Abstraktion:

NICHT-Verknüpfung/Negation



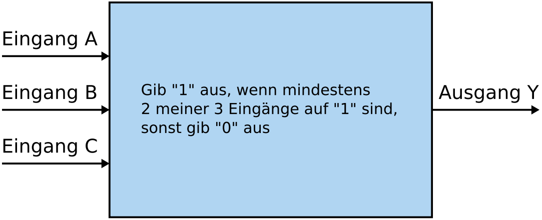
Ein digitales Verarbeitungselement

Angewandte Informatik

Ein Schaltnetz oder auch kombinatorische Schaltung ist eine Zusammenschaltung von Logik-Gattern mit

- einem oder mehreren digitalen Eingängen
- einem oder mehreren digitalen Ausgängen
- einer funktionalen Spezifikation, die für jede mögliche Kombination von Eingaben die Ausgabe angibt

Beispiel:

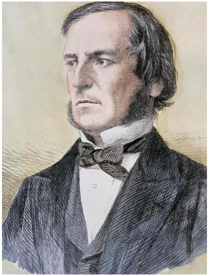


🤔 Wie konstruiert man so ein Schaltnetz?

Boolesche Algebra

Angewandte Informatik

- Der Entwurf und die Analyse von Systemen, die binäre Signale verarbeiten erfolgt mit Hilfe der Booleschen Algebra
- Die Boolesche Algebra ist ein Teilgebiet der Algebra und behandelt mengentheoretische und logische Verknüpfungen zwischen den Elementen einer Menge
- Uns interessiert hier nur die zweielementige Boolesche Algebra auf der Menge $\{0, 1\}$
- Die Boolesche Algebra findet u.A. Anwendung in der Aussagenlogik und der Schaltalgebra



George Boole
(um 1860)

Schaltalgebra

Eine Schaltalgebra ist eine Boolesche Algebra mit

- einer binären Trägermenge $B = \{0, 1\}$
- der Konjunktion/UND-Verknüpfung »·« (auch: $\wedge$; &)
- der Disjunktion/ODER-Verknüpfung »+« (auch: $\vee$)
- der Negation/NICHT-Verknüpfung »$\overline{}$« (auch $\neg$)
- den beiden neutralen Elementen 0 und 1.

Wir verwenden hier die »·«, »+« und »$\overline{}$« für die UND-, ODER und NICHT-Verknüpfung, da viele Regeln (z.B. Punkt vor Strichrechnung) ähnlich sind.

Wie bei der gewöhnlichen Multiplikation kann der »·« weggelassen werden, also $a \cdot b \cdot c = abc$

NICHT-Verknüpfung / Negation

Angewandte Informatik

Funktionsweise: Das Ergebnis der Negation ist 1 wenn der Eingang 0 ist und 0 wenn der Eingang 1 ist.

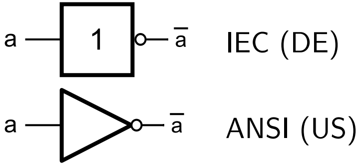
Die Schaltungsrealisierung wird als NICHT-Gatter, NOT-Gate oder als Inverter bezeichnet.

Boolescher Ausdruck: $y = \overline{a}$, (alt. $y = \neg a$)

Wahrheitstabelle:

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

Schaltsymbole:



UND-Verknüpfung / Konjunktion

Funktionsweise: Das Ergebnis der UND-Verknüpfung ist genau dann 1 wenn alle Eingänge 1 sind

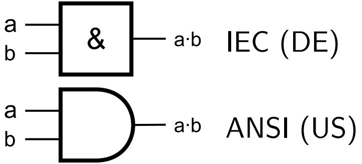
Die Schaltungsrealisierung wird als UND-Gatter oder AND-Gate bezeichnet.

Boolescher Ausdruck: $y = a \cdot b$, kurz $y = ab$ (alt. $y = a \wedge b$)

Wahrheitstabelle:

a	b	a · b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Schaltsymbole:



ODER-Verknüpfung / Disjunktion

Angewandte Informatik

Funktionsweise: Das Ergebnis der ODER-Verknüpfung ist genau dann 1 wenn mindestens ein Eingang 1 ist

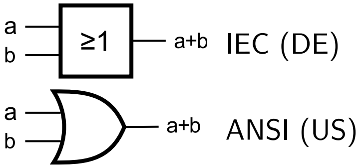
Die Schaltungsrealisierung wird als ODER-Gatter oder OR-Gate bezeichnet.

Boolescher Ausdruck: $y = a + b$ (alt. $y = a \vee b$)

Wahrheitstabelle:

a	b	a + b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Schaltsymbole:



Boolesche Funktionen

Angewandte Informatik

Zur Beschreibung kombinatorischer Schaltungen sind Boolesche Funktionen (auch Schaltfunktionen oder logische Funktionen genannt) geeignet.

Das sind Ausdrücke in denen Variablen und Konstanten durch Boolesche Operatoren verknüpft werden.

Durch Auswertung der Ausdrücke ergibt sich der Funktionswert.

Beispiel: $f(a,b,c) = (a + \overline{b}) \cdot \overline{c} + \overline{b + a}$

Reihenfolge der Operatoren bei der Auswertung:

1. Klammerausdrücke
2. Negation (ist äquivalent zu Klammer)
3. Konjunktion (UND)
4. Disjunktion (ODER)

Darstellung von Booleschen Funktionen

Angewandte Informatik

Darstellung durch **Wertetabellen**

Index	x_{n-1}	x_{n-2}	$\ldots$	x_2	x_1	x_0	$y = f(x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0)$
0	0	0	$\ldots$	0	0	0	$f(0,0,\ldots,0,0,0)$
1	0	0	$\ldots$	0	0	1	$f(0,0,\ldots,0,0,1)$
2	0	0	$\ldots$	0	1	0	$f(0,0,\ldots,0,1,0)$
3	0	0	$\ldots$	0	1	1	$f(0,0,\ldots,0,1,1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2^n-2	1	1	$\ldots$	1	1	0	$f(1,1,\ldots,1,1,0)$
2^n-1	1	1	$\ldots$	1	1	1	$f(1,1,\ldots,1,1,1)$

Wertetabelle einer Funktion

Beispiel:

$$f(x_0, x_1) = \overline{x_0}\, x_1 + x_0 \overline{x_1}$$

x_0	x_1	$f(x_0, x_1)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$\Rightarrow$ Exklusiv-Oder (*Exclusive Or*, XOR): $f(x_0, x_1) = x_0 \oplus x_1$
(Genau dann "1", wenn eine Variable exklusiv "1" ist.)

Vorlesungsaufgabe

Angewandte Informatik

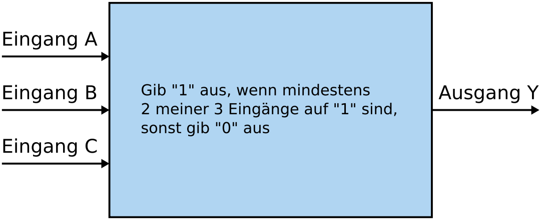
Bestimmen Sie die Wertetabelle der Funktion
$g(x_0, x_1) = (x_0 + x_1) \cdot (\overline{x_0} + \overline{x_1})$

x_0	x_1	$g(x_0, x_1)$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Funktion einer Wahrheitstabelle?

🤔 Wie bekomme ich die Boolesche Funktion aus einer Wahrheitstabelle?

Für unser Beispiel-Schaltnetz:



A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Funktion durch Minterme

Ein Minterm ist in genau einer Zeile der Wahrheitstabelle »1«

Jede Zeile der Wahrheitstabelle lässt sich ein Minterm zuordnen:

x_2	x_1	x_0	Minterm
0	0	0	$\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$
0	0	1	$\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,x_0$
0	1	0	$\overline{x_2}\,x_1\overline{x_0}$
0	1	1	$\overline{x_2}\,x_1x_0$
1	0	0	$x_2\overline{x_1}\,\overline{x_0}$
1	0	1	$x_2\overline{x_1}\,x_0$
1	1	0	$x_2x_1\overline{x_0}$
1	1	1	$x_2x_1x_0$

Durch ODER-Verknüpfung der passenden Minterme lässt sich eine (mögliche) Boolesche Funktion aus der Tabelle ablesen

Funktion durch Minterme

Beispiel:

x_2	x_1	x_0	$f(x_0, x_1, x_2)$	Minterm
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	$\overline{x_2}\, x_1 \overline{x_0}$
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	1	$x_2 \overline{x_1}\, x_0$
1	1	0	1	$x_2 x_1 \overline{x_0}$
1	1	1	0	

Die Funktion lautet: $f(x_0, x_1, x_2) = \overline{x_2}\, x_1 \overline{x_0} + x_2 \overline{x_1}\, x_0 + x_2 x_1 \overline{x_0}$

Funktion durch Maxterme

Angewandte Informatik

Ein Maxterm ist in genau einer Zeile der Wahrheitstabelle »0«

Jede Zeile der Wahrheitstabelle lässt sich ein Maxterm zuordnen:

x_2	x_1	x_0	Maxterm
0	0	0	$x_2 + x_1 + x_0$
0	0	1	$x_2 + x_1 + \overline{x_0}$
0	1	0	$x_2 + \overline{x_1} + x_0$
0	1	1	$x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0}$
1	0	0	$\overline{x_2} + x_1 + x_0$
1	0	1	$\overline{x_2} + x_1 + \overline{x_0}$
1	1	0	$\overline{x_2} + \overline{x_1} + x_0$
1	1	1	$\overline{x_2} + \overline{x_1} + \overline{x_0}$

Durch UND-Verknüpfung der passenden Maxterme lässt sich eine (andere) Boolesche Funktion aus der Tabelle ablesen

Darstellung durch Maxterme

Angewandte Informatik

Beispiel Maxterme:

x_2	x_1	x_0	$f(x_0, x_1, x_2)$	Maxterm
0	0	0	0	$x_2 + x_1 + x_0$
0	0	1	0	$x_2 + x_1 + \overline{x_0}$
0	1	0	1	
0	1	1	0	$x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0}$
1	0	0	0	$\overline{x_2} + x_1 + x_0$
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	0	$\overline{x_2} + \overline{x_1} + \overline{x_0}$

Die Funktion lautet:

$$f(x_0, x_1, x_2) = (x_2 + x_1 + x_0) \cdot (x_2 + x_1 + \overline{x_0}) \cdot (x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0}) \cdot \ldots$$
$$\ldots + (\overline{x_2} + x_1 + x_0) \cdot (\overline{x_2} + \overline{x_1} + \overline{x_0})$$

Min- und Maxterme

Angewandte Informatik

Definition

Ein **Minterm** (**Maxterm**) von n Variablen ist ein Ausdruck, in dem alle Variablen genau einmal auftreten (negiert oder nicht-negiert) und **konjunktiv** (**disjunktiv**) verknüpft sind.

Eigenschaften

- Ein **Minterm** ist für genau eine bestimmte Variablenkombination 1, für alle anderen 0
- Ein **Maxterm** ist für genau eine bestimmte Variablenkombination 0, für alle anderen 1
- Jeder Zeile einer Wahrheitstabelle kann genau ein Minterm und genau ein Maxterm zugeordnet werden

Kanonische Form: Hauptsatz

Angewandte Informatik

Hauptsatz der Schaltalgebra:

Jede beliebige Schaltfunktion $y = f(x_n, \ldots, x_1)$ lässt sich als Disjunktion von Mintermen (Konjunktion von Maxtermen) eindeutig darstellen. In der Disjunktion (Konjunktion) treten genau diejenigen Minterme (Maxterme) auf, die zu den Einsstellen (Nullstellen) der Schaltfunktion gehören.

Eine so dargestellte Funktion nennt man kanonische Disjunktive (Konjunktive) Normalform **KDNF** (**KKNF**).

Treten nicht alle Variablen in den Mintermen (Maxtermen) auf, spricht man von der (nicht-kanonischen) Disjunktiven (Konjunktiven) Normalform **DNF** (**KNF**).

Äquivalenz von Schaltfunktionen

Angewandte Informatik

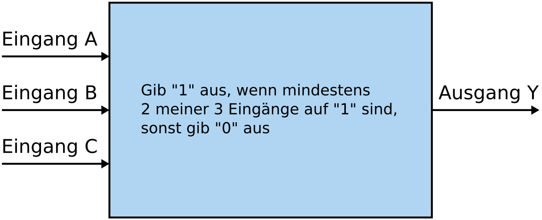
Zwei Schaltfunktionen sind **genau dann äquivalent**, wenn sie in ihren **kanonischen Normalformen (KDNF oder KKNF) übereinstimmen**.

Das ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass sie in ihren Wertetabellen übereinstimmen.

Beschreibung durch Schaltfunktion

Angewandte Informatik

Beispiel:



A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Vorlesungsaufgabe: Bestimmen Sie die zugehörige Schaltfunktion je als KDNF und KKNF.

Ergebnis Vorlesungsaufgabe

Boolesche Gesetze mit einer Variable

Identität

$$x + 0 = x$$
$$x \cdot 1 = x$$

Eins/Null Element

$$x + 1 = 1$$
$$x \cdot 0 = 0$$

Idempotenz

$$x + x = x$$
$$x \cdot x = x$$

Boolesche Gesetze mit einer Variablen

Angewandte Informatik

Involution

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Komplement

$$x + \overline{x} = 1$$

$$x \cdot \overline{x} = 0$$

Kommutativität

Angewandte Informatik

Kommutativität (Vertauschung)

$$x + y = y + x$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

$\Rightarrow$ Die Reihenfolge der Variablen spielt keine Rolle

Vorlesungsaufgabe

Wenden Sie die oben genannten Regeln auf den folgenden Booleschen Ausdruck an um diesen zu vereinfachen:

$$y = \left((a+1)b + \overline{a}(0+a) + \overline{b}\right)(b + a \cdot \overline{a})$$

Boolesche Gesetze (bisher)

	Disjunktives Gesetz	Konjunktives Gesetz
Identität	$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$
Eins/Null	$x + 1 = 1$	$x \cdot 0 = 0$
Idempotenz	$x + x = x$	$x \cdot x = x$
Involution	$\overline{\overline{x}} = x$	
Komplement	$x + \overline{x} = 1$	$x \cdot \overline{x} = 0$
Kommutativität	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$

Vorlesungsaufgabe Lösung

Angewandte Informatik