CURSO DE SEÑALES Y SISTEMAS

Elaborado por:
Edgar Tello Paleta

OBJETIVO

Aprender las técnicas fundamentales para la comprensión y el análisis de los sistemas lineales que se encuentran en el campo de las comunicaciones, el procesamiento de datos y el control.

TEMARIO

1. Señales y sistemas
2. Sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI)
3. Análisis de sistemas LTI, continuos y discretos, mediante las transformaciones de Laplace y Z.
4. Fundamentos de modelado de sistemas físicos.
5. Características dinámicas de los sistemas LTI.
6. Respuesta en frecuencia.

EVALUACIÓN

$$CS = 0.8(CE) + 0.1(CT) + 0.1(CL)$$

CA = CS para alumnos exentos con $CS \geq 8.0$ y $FA \leq 5$

Los alumnos no exentos o que quieran mejorar su CA

$$CA = CEF1$$

Y en caso de no aprobar el primer examen final

$$CA = CEF2$$

CS: Calificación del semestre
CE: Calificación en exámenes
CT: Calificación de tareas
CL: Calificación del laboratorio

CA: Calificación en actas
CEF1: Calif. 1er final
CEF2: Calif 2do final

FA: Faltas (Inasistencias).

EVALUACIÓN

Escala de Calificación en Acta (CA)

$$6.0 \leq 6 < 6.5$$
$$6.5 \leq 7 < 7.5$$
$$7.5 \leq 8 < 8.5$$
$$8.5 \leq 9 < 9.5$$
$$9.5 \leq 10 \leq 10$$

Habrá dos exámenes parciales:

1er. Parcial: correspondiente a los temas 1, 2 y 3

2er. Parcial: correspondiente a los temas 4, 5 y 6

BIBLIOGRAFÍA PRINCIPAL

OPPENHEIM, A. V., et al.
Señales y Sistemas
México
Prentice Hall Hispanoamericana, 1998

RODRÍGUEZ RAMÍREZ, Francisco
Dinámica de sistemas
México
Trillas, 1994

1. SEÑALES Y SISTEMAS

Señales continuas, discretas y digitales

En general, una señal es una función de una o más variables independientes que transmite información. Por ejemplo se tienen:

- Señales eléctricas: variaciones de voltajes y corrientes en un circuito eléctrico en función del tiempo.
- Señal sonora: variación de presión acústica en función del tiempo.
- Señales de velocidad, fuerza o temperatura, en función del tiempo.
- Señal de video monocromático: variación de intensidad (o brillo) en función de dos variables espaciales (en cada imagen fija) y el tiempo (al ir cambiando cada imagen fija).

Este curso se enfoca en señales de 1 sola variable independiente que se denominará "tiempo". Por su representación matemática se tienen:

Señales de tiempo continuo

Estas señales se representan mediante funciones reales (o complejas) de variable real. Por ejemplo:

$$x(t) = e^{-t}\cos(t)\,, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Señales de tiempo discreto (o secuencias)

Estas señales se representan mediante funciones reales (o complejas) de variable entera. Por ejemplo:

$$x[n] = 0.5^{n}\cos(n)\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

Señales digitales

Una señal digital es una representación cuantizada (o aproximada) de una secuencia $x[n]$. Para esta representación se utiliza algún código binario.

Sistema

Un sistema es una interconexión de componentes, que transforma señales de entrada en señales de salida. Este curso se enfoca en sistemas de 1 entrada y 1 salida (o respuesta).

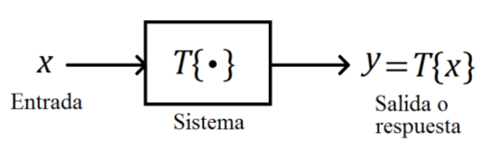


Figura. Representación entrada-salida de un sistema T.

- **Sistema continuo**: $x(t)$ e $y(t)$ son señales de TC.
- **Sistema discreto**: $x[n]$ e $y[n]$ son señales de TD.

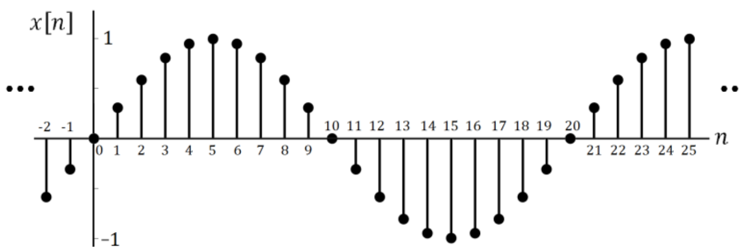
Señales de tiempo discreto (secuencias)

- Representación en forma cerrada: $x[n] = sen\left(\frac{2\pi}{20}n\right)$
- Representación como arreglo ordenado de números:

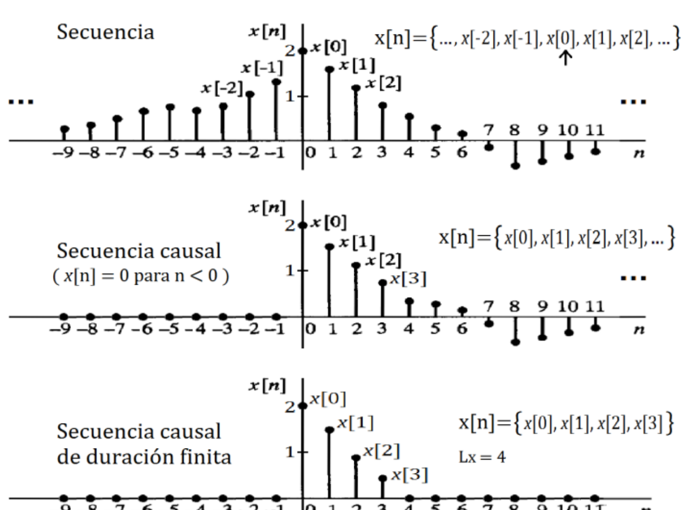
$$x[n] = \{\dots,\ \underset{\uparrow}{x[0]},\ x[1],\ x[2],\ x[3],\ x[4],\ x[5], \dots\}$$

$$\approx \{\dots, \underset{\uparrow}{0.00},\ 0.31,\ 0.59,\ 0.81,\ 0.95,\ 1.00, \dots\}$$

- Representación gráfica:



Señales de tiempo discreto (secuencias)



Señales periódicas y aperiódicas

- Una señal $x(t)$ es periódica con periodo T, si T es un $\mathbb{R}^+$ tal que

$$x(t+T) = x(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

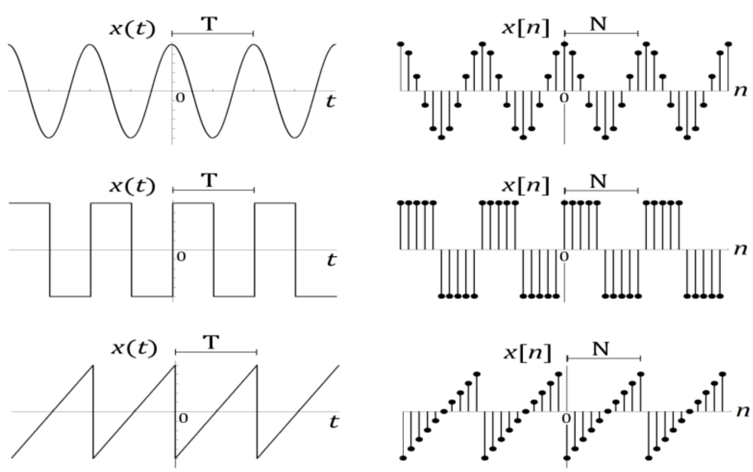
El periodo fundamental es el menor de los T.

- Una secuencia $x[n]$ es periódica con periodo N, si N es un $\mathbb{Z}^+$ tal que

$$x[n+N] = x[n], \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

El periodo fundamental es el menor de los N.

- Una señal o secuencia no periódica es aperiódica.



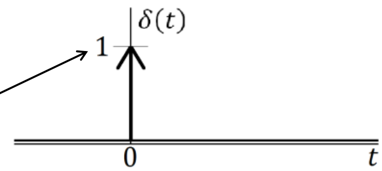
Ejemplos de señales y secuencias periódicas

Señales básicas de tiempo continuo (TC) y t discreto (TD)

<u>Señal impulso unitario</u>

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0\,, & t \neq 0 \end{cases}$$

con $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$



-Propiedad de muestreo

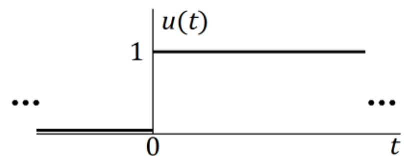
$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

-Prop. de escalamiento (y simetría)

$$\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t) \quad \alpha \in \mathbb{R} \;\; \alpha \neq 0$$

<u>Señal escalón unitario</u>

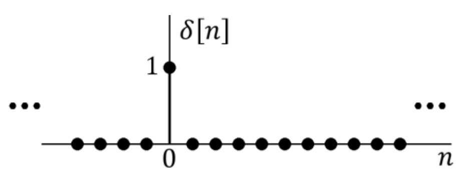
$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



<u>Secuencia impulso unitario</u>

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$= \{\, 1 \,\}$$



-Propiedad de muestreo

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$

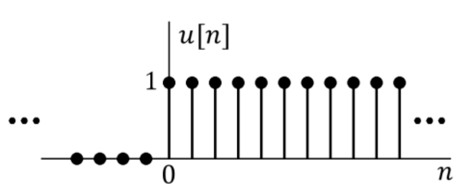
-Propiedad de simetría

$$\delta[-n] = \delta[n]$$

<u>Secuencia escalón unitario</u>

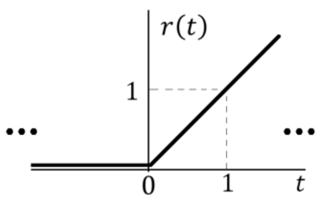
$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$= \{\, 1,1,1,1, \dots \}$$



Señal rampa unitaria

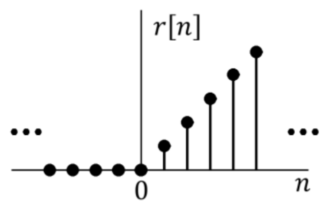
$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Secuencia rampa unitaria

$$r[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$= \{0,1,2,3,4,5, \dots\}$$

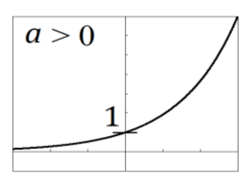


Señal exponencial real

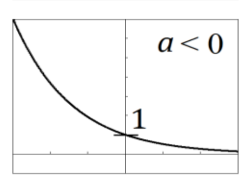
$$x(t) = e^{at}$$

Donde $a \in \mathbb{R}$ diferente de cero.

$a > 0$: exponencial creciente

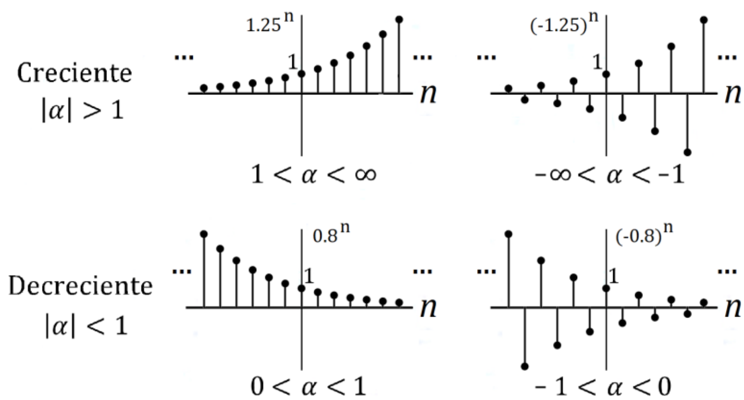


$a < 0$: exponencial decreciente



Secuencia exponencial real

$$x[n] = \alpha^n, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \neq 0 \ \text{ y } \ \alpha \neq 1$$



Señal sinusoidal

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi), \qquad \omega_0 = 2\pi f_0$$

Donde

A : amplitud

f_0 : frecuencia en Hertz

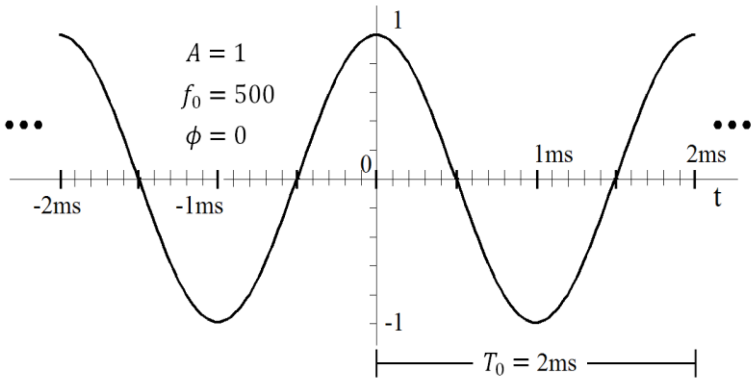
ω_0 : frecuencia angular en radianes sobre segundo

ϕ : fase en radianes

Una señal sinusoidal es periódica con periodo fundamental:

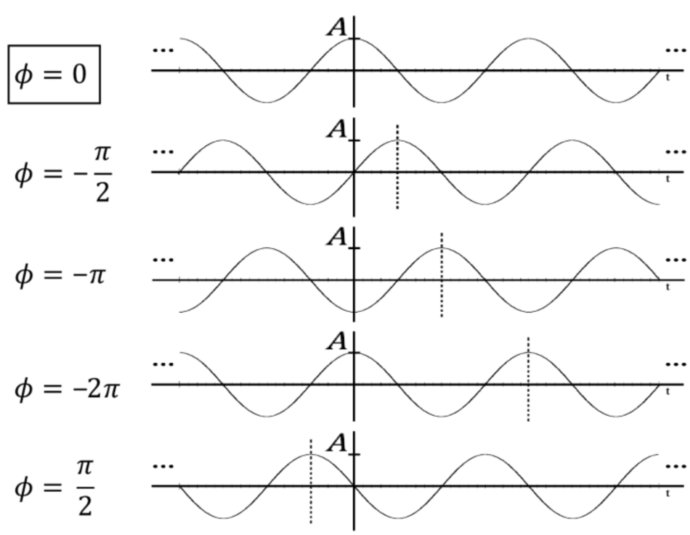
$$T_0 = \frac{1}{f_0}$$

$$x(t) = Acos(2\pi f_0 t + \phi)$$



Señal sinusoidal $x(t) = \cos(1000\pi t)$

$$x(t) = Acos(\omega_o t + \phi)$$

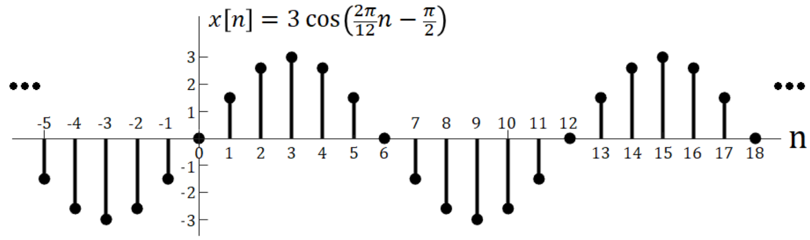


Secuencia sinusoidal

$$x[n] = A cos(\, \Omega_0 n + \phi \,)$$

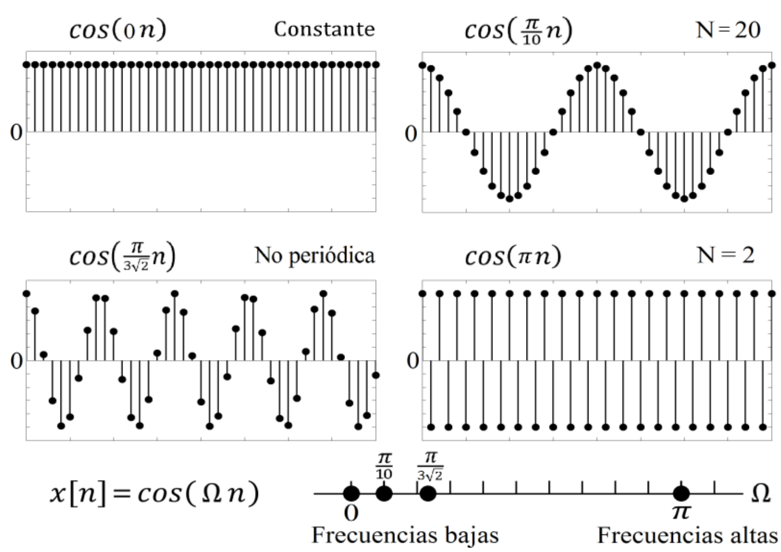
Donde A es la amplitud, Ω_0 es la frecuencia angular en radianes y, ϕ es la fase en radianes.

$x[n]$ es periódica con periodo fundamental $N \in \mathbb{Z}^+$ cuando $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} m$, siendo $\frac{m}{N}$ un número racional en su forma irreducible.

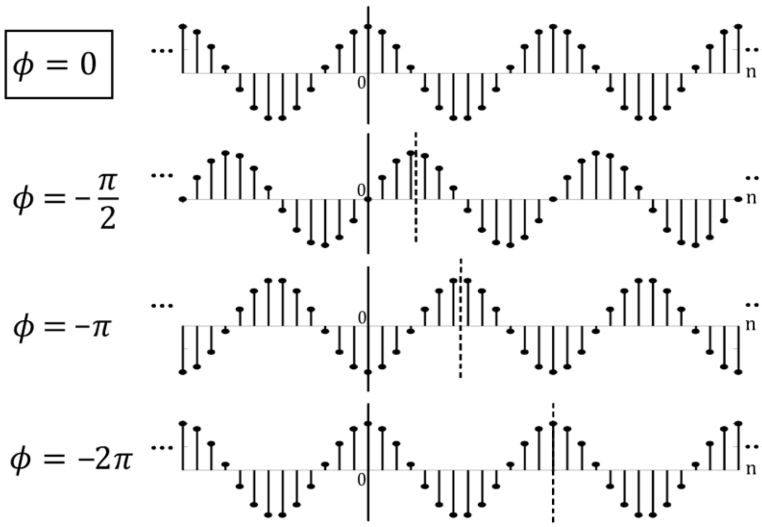


$x[n] = \{\ldots, -3, -2.6, -1.5, \boxed{0, 1.5, 2.6, 3, 2.6, 1.5, 0, -1.5, -2.6, -3, -2.6, -1.5,} 0, 1.5, 2.6, 3, 2.6, 1.5, 0, \ldots\}$

Periodicidad en el tiempo de la secuencia sinusoidal



$$x[n] = cos\left(\frac{2\pi}{13}n + \phi\right)$$

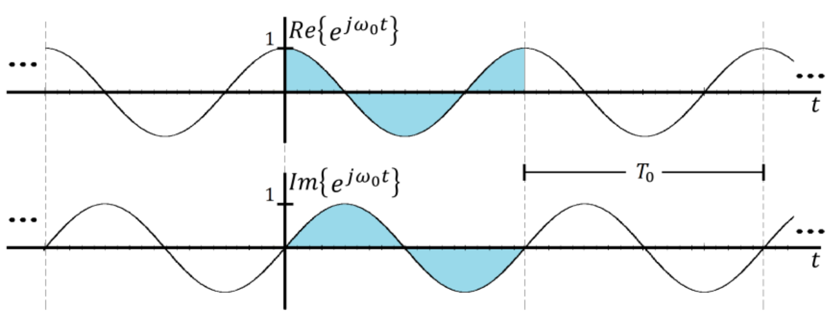


<u>Señal exponencial compleja</u>

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + jsen(\omega_0 t)$$

Donde $\omega_0 = 2\pi f_0$ es su frecuencia angular en radianes sobre seg. y f_0 es su frecuencia en Hertz.

La señal $e^{j\omega_0 t}$ es periódica con periodo fundamental $T_0 = 1/f_o$.



Ejemplo
Demostrar que la señal exponencial compleja, $x(t) = e^{j\omega_0 t}$, es periódica con periodo $T_0 = 1/f_o$.

Solución
Recordando que una señal es periódica con periodo T_0 si se cumple que $x(t+T_0) = x(t),\ \forall\ t \in \mathbb{R}$; entonces para $e^{j\omega_0 t}$ se tiene que:

$$e^{j\omega_0(t+T_0)} = e^{j\omega_0 t + j\omega_0 T_0} = e^{j\omega_0 t}e^{j\omega_0 T_0} = e^{j\omega_0 t}e^{j2\pi f_0 T_0}$$

$$= e^{j\omega_0 t}e^{j2\pi} = e^{j\omega_0 t}\left(\cos(2\pi) + jsen(2\pi)\right)$$

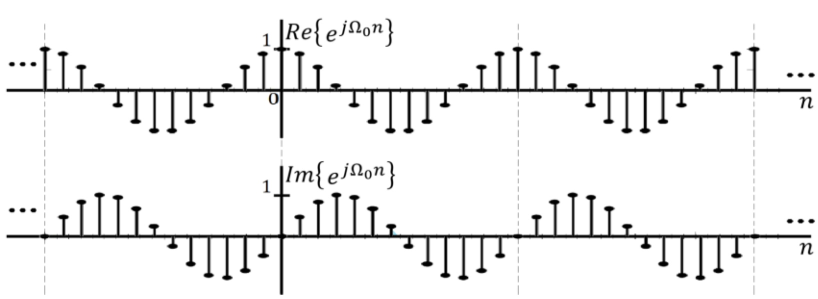
$$= e^{j\omega_0 t} \quad \therefore QED.$$

Secuencia exponencial compleja

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} = \cos(\Omega_0 n) + jsen(\Omega_0 n)$$

1) $x[n]$ es periódica con periodo fundamental $N \in \mathbb{Z}^+$ cuando $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}m$, siendo $\frac{m}{N}$ un número racional en su forma irreducible.

2) $e^{j\Omega_0 n} = e^{j(\Omega_0 + 2\pi)n}$ (periódica en el dominio de la frecuencia).



Operaciones y transformaciones de señales

Suma, escalamiento en amplitud, combinación lineal y producto de señales

Para cualesquiera señales f, g y constantes α, β se define

- Suma: $(f+g)(t) = f(t) + g(t)\,, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$
- Escalamiento: $(\alpha f)(t) = \alpha f(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$
- Combinación lineal:

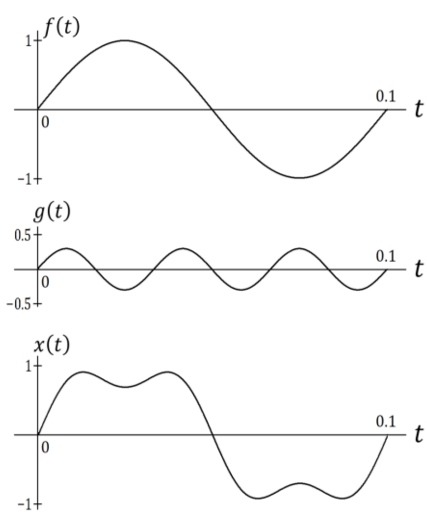
$$(\alpha f + \beta g)(t) = \alpha f(t) + \beta g(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

- Producto: $(f \cdot g)(t) = f(t)g(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$

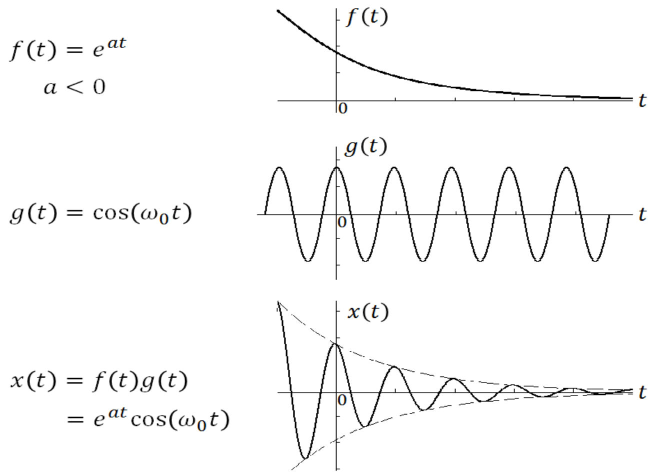
$f(t) = \cos(2\pi 10 t - \frac{\pi}{2})$

$g(t) = 0.3\cos(2\pi 30 t - \frac{\pi}{2})$

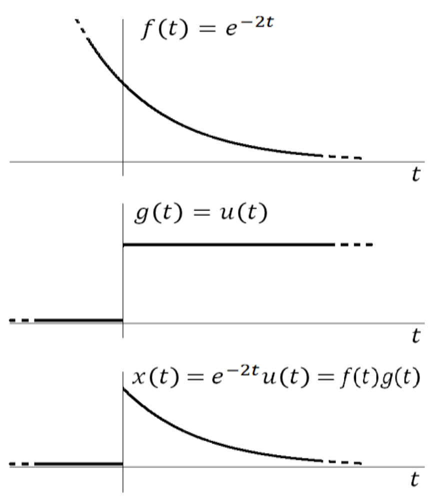
$x(t) = f(t) + g(t)$



Suma de señales



Producto de señales



Producto de señales

Suma, escalamiento en amplitud, combinación lineal y producto de secuencias

Para cualesquiera secuencias f, g y constantes α, β se define

- Suma: $(f+g)[n] = f[n] + g[n], \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$
- Escalamiento: $(\alpha f)[n] = \alpha f[n], \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$
- Combinación lineal:

  $$(\alpha f + \beta g)[n] = \alpha f[n] + \beta g[n] \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

- Producto: $(f \cdot g)[n] = f[n]g[n], \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$

$f[n] = \cos(\frac{\pi}{10}n - \frac{\pi}{2})$

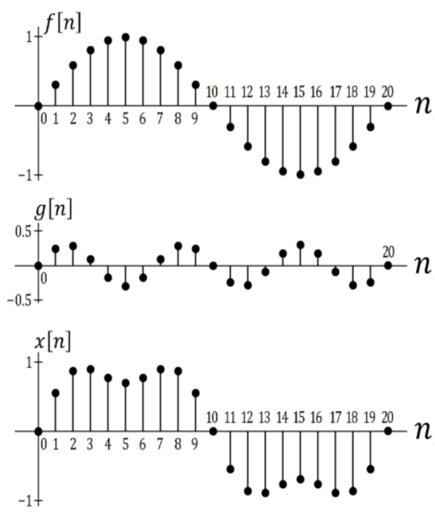
$=\{\ldots, \underset{\uparrow}{0}, 0.31, 0.59, 0.81, \ldots\}$

$g[n] = 0.3\cos(3\frac{\pi}{10}n - \frac{\pi}{2})$

$=\{\ldots, \underset{\uparrow}{0}, 0.24, 0.28, 0.09, \ldots\}$

$x[n] = f[n] + g[n]$

$=\{\ldots, \underset{\uparrow}{0}, 0.55, 0.87, 0.9, \ldots\}$



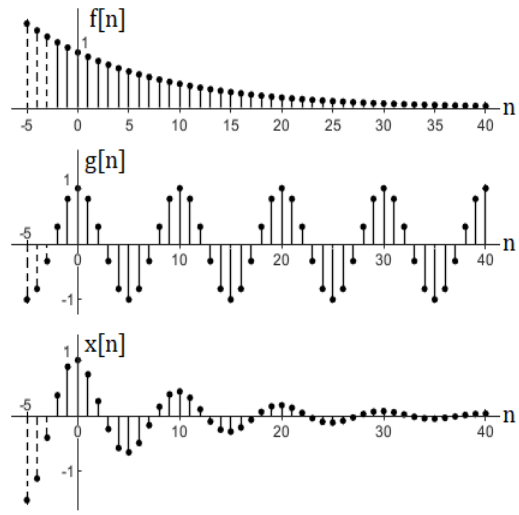
Suma de secuencias

$f[n] = 0.92^n$

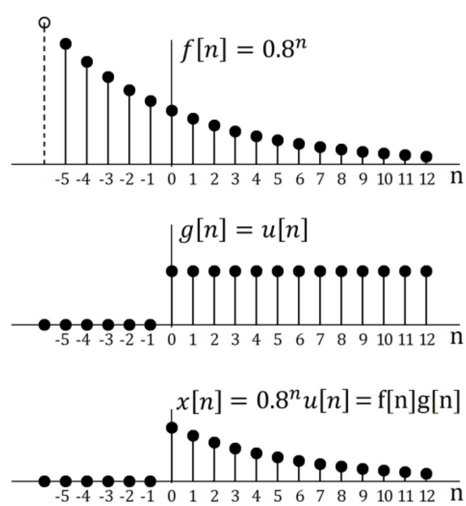
$g[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{10}n\right)$

$x[n] = f[n]g[n]$

$= 0.92^n \cos\left(\frac{2\pi}{10}n\right)$

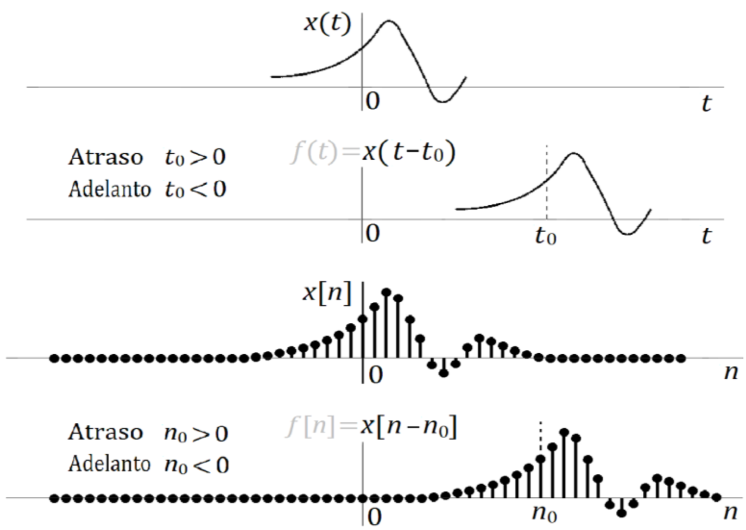


Producto de secuencias

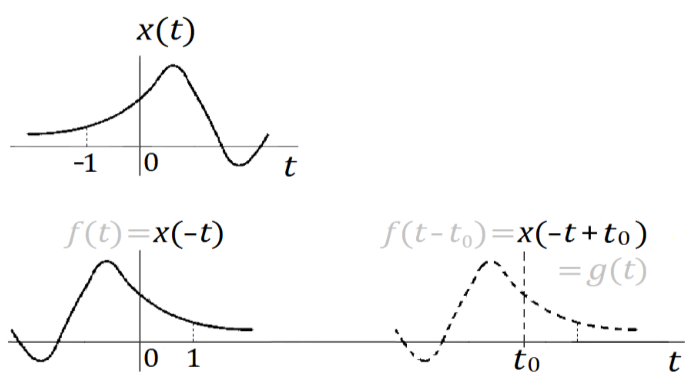


Producto de secuencias

Desplazamiento en el tiempo



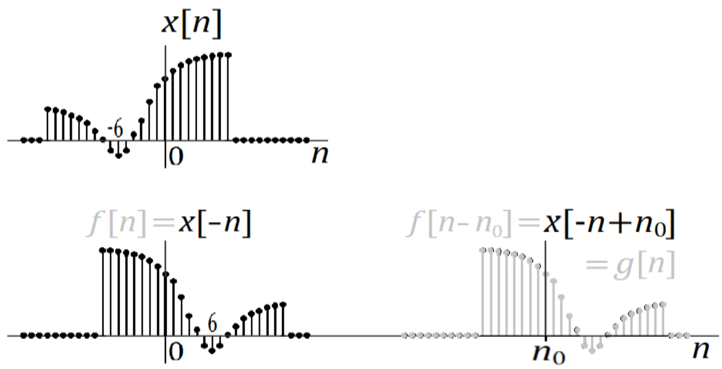
Inversión y desplazamiento en el tiempo continuo



Inversión

Inversión y luego desplazamiento
($t_0 > 0$ atraso, $t_0 < 0$ adelanto)

Inversión y desplazamiento en el tiempo discreto



Inversión

Inversión y luego desplazamiento
($n_0 > 0$ atraso, $n_0 < 0$ adelanto)

Ejemplo de desplazamiento en el tiempo discreto

$$x[n] = \{ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 9\}$$

$$f[n] = x[n-1] = \{ 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 9\}$$

$$f[n] = x[n-2] = \{ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 9\}$$

Ejemplo de inversión y desplazamiento en el tiempo discreto

$$x[n] = \{ 1,\ 2,\ 3,\ 5\}$$

$$f[n] = x[-n] = \{ 5,\ 3,\ 2,\ \underset{\uparrow}{1},\ 0,\ 0,\ 0\}$$

$$g[n] = x[-n+1] = \{ 0,\ 5,\ 3,\ \underset{\uparrow}{2},\ 1,\ 0,\ 0\}$$

$$g[n] = x[-n+2] = \{ 0,\ 0,\ 5,\ \underset{\uparrow}{3},\ 2,\ 1,\ 0\}$$

$$g[n] = x[-n+3] = \{ 0,\ 0,\ 0,\ \underset{\uparrow}{5},\ 3,\ 2,\ 1\}$$

$$g[n] = x[-n+4] = \{ 0,\ 0,\ 0,\ \underset{\uparrow}{0},\ 5,\ 3,\ 2,\ 1\}$$

$$g[n] = x[-n+5] = \{ 0,\ 0,\ 0,\ \underset{\uparrow}{0},\ 0,\ 5,\ 3,\ 2,\ 1\}$$

La integral y la derivada de una señal continua son las definidas en el cálculo diferencial e integral.

La suma de $x[n]$ en el intervalo $a \leq n \leq b$ se define como:

$$\sum_{n=a}^{b} x[n] = x[a] + x[a+1] + x[a+2] \cdots x[b-1] + x[b]$$

Suma útil:

$$\sum_{n=0}^{N} b^n = \frac{1-b^{N+1}}{1-b} \quad \text{con} \quad b \in \mathbb{C} \ \text{ y } \ b \neq 1 \qquad (a)$$

La diferencia hacia atrás de $x[n]$ se define como la secuencia:

$$\nabla x[n] = \frac{\Delta x}{\Delta n} = x[n] - x[n-1]$$

Ecuación en diferencias lineal

La versión en tiempo discreto del concepto de ec. diferencial lineal de coeficientes constantes de orden N, es la ec. en diferencias lineal de coeficientes constantes de orden N.

Ejemplo

Obtener la forma "estandar" de la sig. ec. en diferencias de orden 2:

$$3\nabla^2 y[n] + 4\nabla y[n] + 2y[n] = \nabla x[n] \qquad (a1)$$

Sol.

$$\nabla y[n] = y[n] - y[n-1] \qquad (a2)$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 y[n] &= \nabla(\nabla y[n]) = \nabla(y[n] - y[n-1]) \\ &= \nabla y[n] - \nabla y[n-1] \\ &= (y[n] - y[n-1]) - (y[n-1] - y[n-2])\end{aligned}$$

$$\nabla^2 y[n] = y[n] - 2y[n-1] + y[n-2] \qquad (a3)$$

Entonces, sustituyendo las ecuaciones $a2$ y $a3$ en la ec. $a1$ se obtiene:

$$3(y[n]-2y[n-1]+y[n-2])+4(y[n]-y[n-1])+2y[n]=x[n]-x[n-1]$$

$$(3+4+2)y[n]+(-6-4)y[n-1]+3y[n-2]=x[n]-x[n-1]$$

Finalmente, se obtiene la siguiente ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes orden $N=2$:

$$9y[n]-10y[n-1]+3y[n-2]=x[n]-x[n-1]$$

A continuación se muestra la forma general de una ec. en diferencias lineal de coeficientes constantes de orden N:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Convolución

Integral de convolución

La operación convolución entre cualesquiera señales $f(t)$ y $g(t)$, da como resultado otra señal y se define como:

$$y(t)=f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)d\tau \qquad (1)$$

Suma de convolución

La operación convolución entre cualesquiera secuencias $f[n]$ y $g[n]$, da como resultado otra secuencia y se define como:

$$y[n]=f[n]*g[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k]g[n-k] \qquad (2)$$

Propiedades de la convolución

Para cualesquiera señales (o secuencias) $x_1,\ x_2,\ x_3,$ y constantes $\alpha,\ \beta,\ t_0 \in \mathbb{R}$ y $n_0 \in \mathbb{Z}$; la convolución tiene las propiedades:

1) Conmutativa $x_1 * x_2 = x_2 * x_1$
2) Asociativa $(\ x_1 * x_2\ ) * x_3 = x_1 * (\ x_2 * x_3)$
3) Distributiva $x_1 * (x_2 + x_3) = x_1 * x_2 + x_1 * x_3$
4) Asociativa con el escalamiento en amplitud
$$(\alpha x_1) * (\beta x_2) = \alpha\beta(x_1 * x_2)$$
5) Desplazamiento con el impulso unitario desplazado
$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$
$$x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$$

Ejemplo

Para las funciones $f(t) = e^{-t^2}$ y $g(t) = \delta(t + 4) + \delta(t - 4)$, obtener $y(t) = f(t) * g(t)$.

Solución

$$y(t) = f(t) * g(t) = e^{-t^2} * \big(\delta(t + 4) + \delta(t - 4)\big)$$

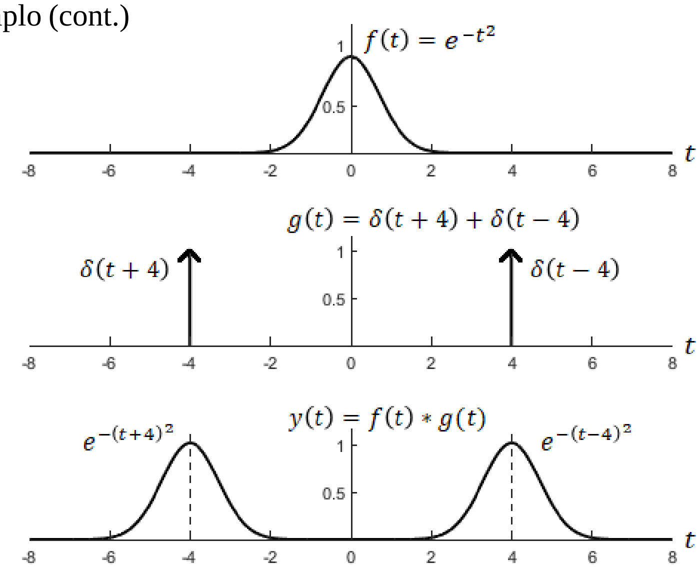
Por la propiedad distributiva de la convolución se tiene que:

$$y(t) = e^{-t^2} * \delta(t + 4) + e^{-t^2} * \delta(t - 4)$$

Por la prop. de desplazamiento con el impulso unitario se tiene que:

$$y(t) = e^{-(t+4)^2} + e^{-(t-4)^2}$$

Ejemplo (cont.)



Energía de una señal

La energía de una señal se define como:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

La energía de una secuencia se define como:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

A una señal (o secuencia) con energía finita (i.e. $0 < E_x < \infty$) se le clasifica como una señal (o secuencia) de energía.

Potencia promedio de una señal

La potencia promedio de una señal se define como:

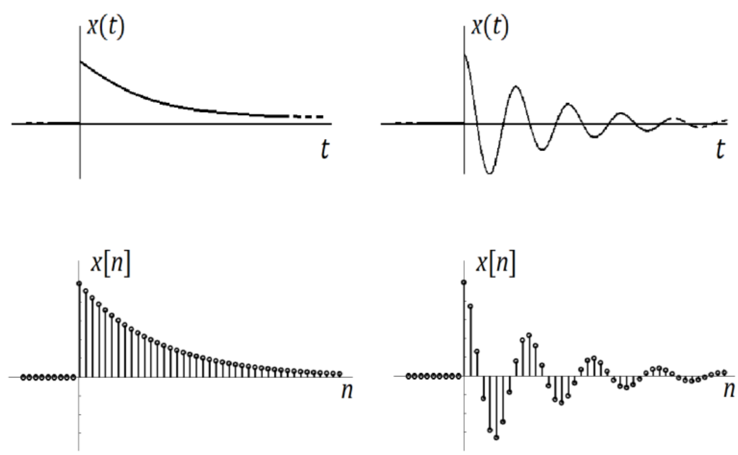
$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 \, dt$$

La potencia promedio de una secuencia se define como:

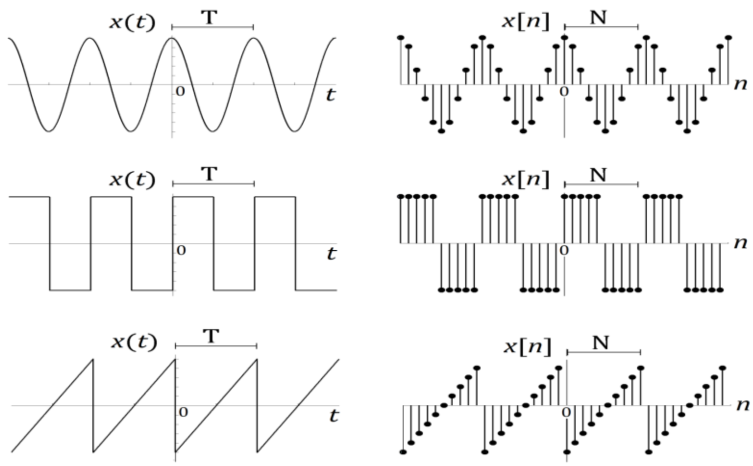
$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2$$

A una señal (o secuencia) con pot. promedio finita (i.e. $0 < P_x < \infty$) se le clasifica como una señal (o secuencia) de potencia.

Se puede demostrar que una señal de potencia tiene energía infinita.



Ejemplos de señales y secuencias de energía



Ejemplos de señales y secuencias de potencia (periódicas)

Muestreo es el proceso de convertir una señal $x_c(t)$, en su representación mediante una secuencia $x[n]$. Con muestreo periódico, $x[n]$ se obtiene al tomar muestras de $x_c(t)$ cada T segundos, esto es:

$$x[n] = x_c(nT), \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

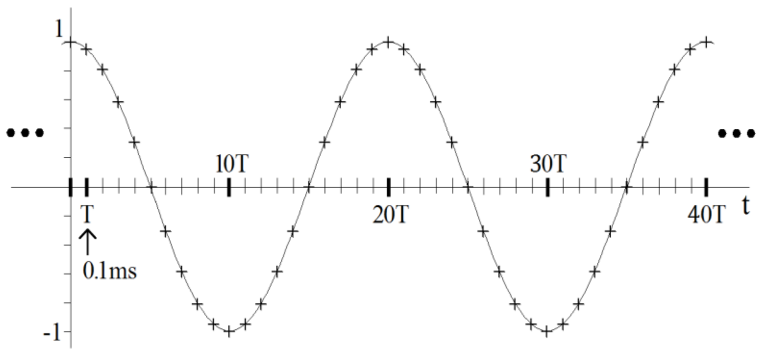
A T, en segundos, se le denomina periodo de muestreo. $F_s = 1/T$ es la frecuencia de muestreo medida en muestras/segundo ($1/s$ ó Hertz).

De acuerdo con el análisis de Fourier, una señal se puede considerar como una "suma" de componentes sinusoidales cuyas amplitudes y fases son función de la frecuencia. Teniendo en cuenta lo anterior, es posible enunciar el teorema de muestreo:

Teorema de Muestreo: Si la frecuencia más alta contenida en una señal $x_c(t)$ es F_{max}, y la señal se muestrea con una frecuencia de muestreo $F_s > 2F_{max}$, entonces la señal $x_c(t)$ puede ser reconstruida exactamente a partir de su secuencia de muestras $x[n]$, mediante interpolación ideal de banda limitada (solo posible en teoría).

Ejemplo de muestreo de una señal sinusoidal

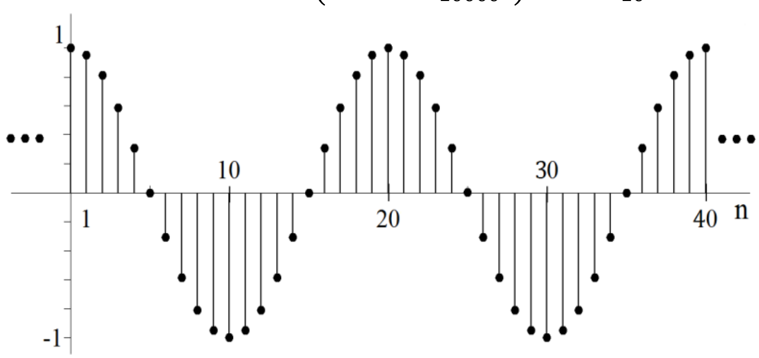
$$x_c(t) = \cos(2\pi 500t)$$



Considerando la fig. anterior, si se toman muestras de la señal $x_c(t)$ cada $T = \frac{1}{10000}\,[s]$ (es decir, si se toman $F_s = \frac{1}{T} = 10000\,\left[\frac{muestras}{s}\right]$);

entonces se obtiene la secuencia:

$$x[n] = x_c(nT) = \cos\left(2\pi 500\left(n\frac{1}{10000}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{10}n\right)$$



En este caso $F_{max} = 500\,[\text{Hz}]$ y $F_s = 10000\,[\text{Hz}]$. Como $F_s > 2F_{max}$, de acuerdo con teorema de muestreo, $x_c(t)$ puede ser reconstruido exactamente a partir de su secuencia de muestras $x[n]$.

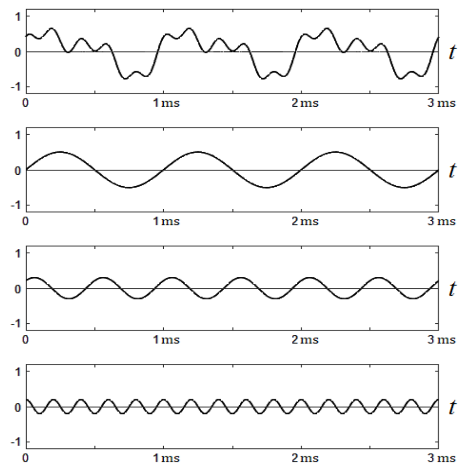
Ejemplo

$$x_c(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_0(t) = 0.5\cos(2\pi F_0 t - \pi/2)$$
$$F_0 = 1000$$

$$x_1(t) = 0.3\cos(2\pi F_1 t - \pi/4)$$
$$F_1 = 2000$$

$$x_2(t) = 0.2\cos(2\pi F_2 t)$$
$$F_2 = 5000$$



En esta figura $F_{max} = 5000$, entonces debe cumplirse que $F_s > 10000$ para que $x_c(t)$ pueda ser reconstruida exactamente a partir de $x[n]$.

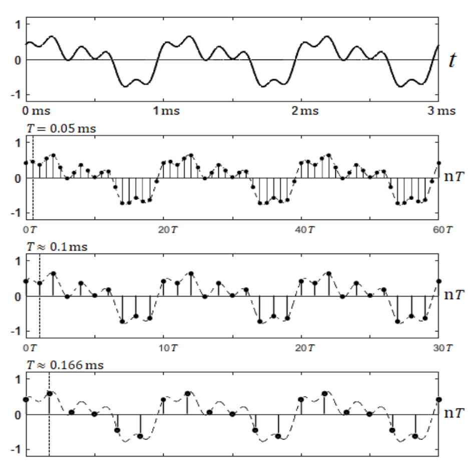
Ejemplo (continuación)

$x_c(t)$
$F_{max} = 5000$
Teorema de muestreo
$F_s > 10000$

$x[n] = x_c(nT)$
Con $F_s = 20000 > 2F_{max}$
si se cumple con el teorema de muestreo al obtener x[n]

$x[n] = x_c(nT)$
Con $F_s = 10000.1 > 2F_{max}$
si se cumple con el teorema de muestreo al obtener x[n]

$x[n] = x_c(nT)$
Con $F_s = 6000 < 2F_{max}$
no se cumple con el teorema de muestreo al obtener x[n]



$x[n] = x_c(nT)$ son las muestras de $x_c(t)$ tomadas a una tasa de F_s[Hz], Cuando $F_s > 2F_{max}$, $x_c(t)$ puede ser reconstruido a partir de $x[n]$.

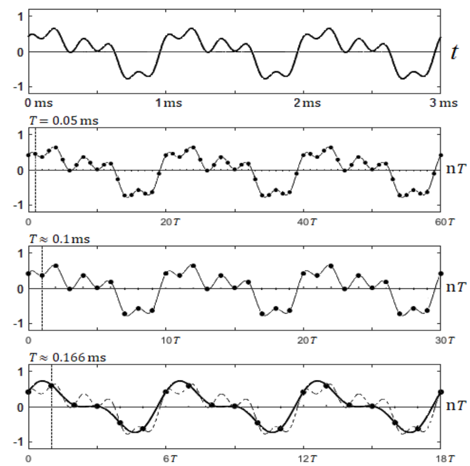
Ejemplo (continuación)

$x_c(t)$
$F_{max} = 5000$
Teorema de muestreo
$F_s > 10000$

$x_r(t) = x_c(t)$
$F_s = 20000 > 2F_{max}$

$x_r(t) = x_c(t)$
$F_s = 10000.1 > 2F_{max}$

$x_r(t) \neq x_c(t)$
$F_s = 6000 < 2F_{max}$



$x_r(t)$ es la señal reconstruida a partir de $x[n]$ mediante interpolación ideal.

Convertidor análogo-digital

Mediante transductores (dispositivos que convierten señales de un tipo de energía en otra), es posible representar distintos tipos de señales de tiempo continuo (e.g. señales de sonido, fuerza, velocidad, temperatura, etc…) como una señal eléctrica $x_c(t)$. En la práctica, el muestreo de una señal eléctrica $x_c(t)$ se lleva a cabo, de manera aproximada, mediante un dispositivo electrónico llamado convertidor análogo-digital (o ADC por sus siglas en inglés).

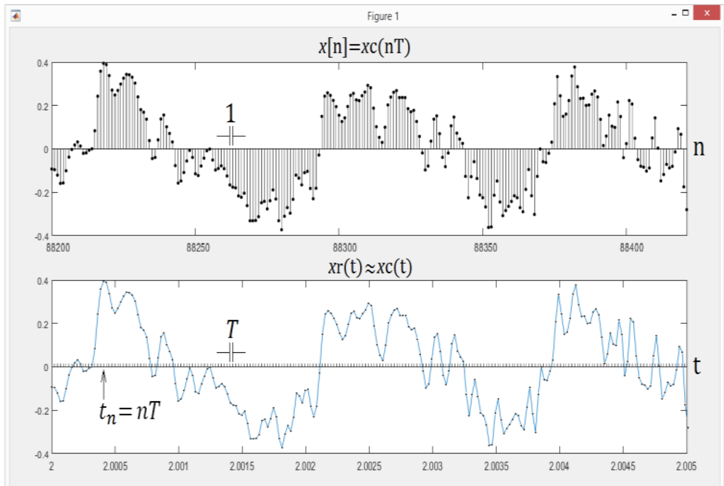
Convertidor digital-analógico

En la práctica, la interpolación de una secuencia $x[n]$ se lleva a cabo mediante un dispositivo electrónico llamado convertidor digital-analógico (o DAC por sus siglas en inglés). Utilizando un DAC es posible obtener una señal de tiempo continuo $x_r(t)$, que es aproximadamente igual a la señal original $x_c(t)$. Para procesar señales de tiempo continuo utilizando computadoras digitales, es necesario convertir señales continuas a señales discretas, y señales discretas a continuas.

Tarjeta de audio USB UCA222, con ADC y DAC estéreo

```
[xLR,Fs] = audioread('x_kitt.wav');           %formato wav,mp3,m4a
x = mean(xLR,2).';   %obtención x[n]=xc(nT) monoaural. 2=>prom cols

Lx = length(x);               %num de muestras en x[n]
n = 0:1:Lx-1;                 %Arreglo de indices de tiempo discreto
t1 = 2;                       %Instante inicial a desplegar en [seg]
t2 = t1 + 5/1000;             %Instante final a desplegar en [seg]
figure
subplot(2,1,1)
stem(n,x,'filled','k','MarkerSize',3,'LineWidth',1)
xlim( round([t1,t2]*Fs) )     %Limita grafica al intervalo [n1,n2]
title('x[n] = xc(nT)')
subplot(2,1,2)
plot( n*(1/Fs), x )           %T=1/Fs Periodo de muestreo en [seg]
xlim( [t1,t2] )               %Limita grafica al intervalo [t1,t2]
title('xr(t)')

%La tarjeta de sonido interpola a:
player = audioplayer( x, Fs );
playblocking(player);               %x[n] para reproducir xr(t)
```

Código de Matlab para leer $x[n] = x_c(nT)$ de un archivo de audio.



5ms de una señal de audio con $F_{max} = 22\,\text{kHz}$ y $Fs = 44.1\,\text{kHz}$

Principales propiedades de los sistemas

- Linealidad

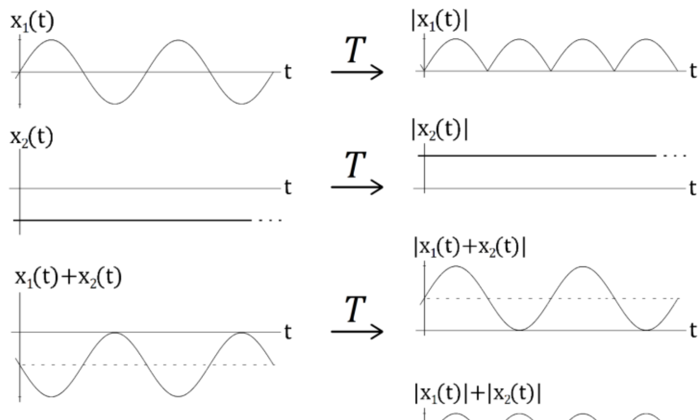
Un sistema continuo (o discreto) T es lineal, si y sólo si cumple con el principio de superposición:

$$T\{\, a_1 x_1 + a_2 x_2 \,\} = a_1 T\{x_1\} + a_2 T\{x_2\}$$

Para cualesquiera señales (o secuencias) de entrada x_1 y x_2, y cualesquiera constantes arbitrarias a_1 y a_2.

Ejemplo

Verificar que el sistema $T\{x(t)\} = |x(t)|$ no es lineal:



$|x_1(t)+x_2(t)| \neq |x_1(t)|+|x_2(t)|$

$\therefore$ T es no lineal

- Invariancia en el tiempo

Un sistema T continuo es invariante en el tiempo, si y sólo si

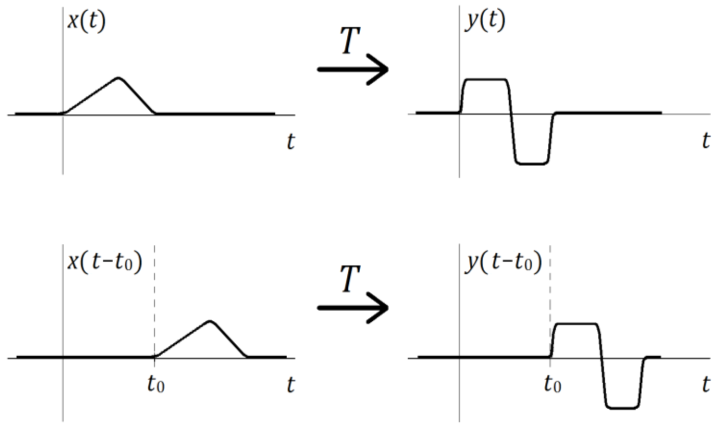
$$T\{\, x(t)\,\} = y(t) \quad \Longrightarrow \quad T\{\, x(t-a)\,\} = y(t-a)$$

para toda señal de entrada $x(t)$ y todo desplazamiento $a \in \mathbb{R}$ en el tiempo.

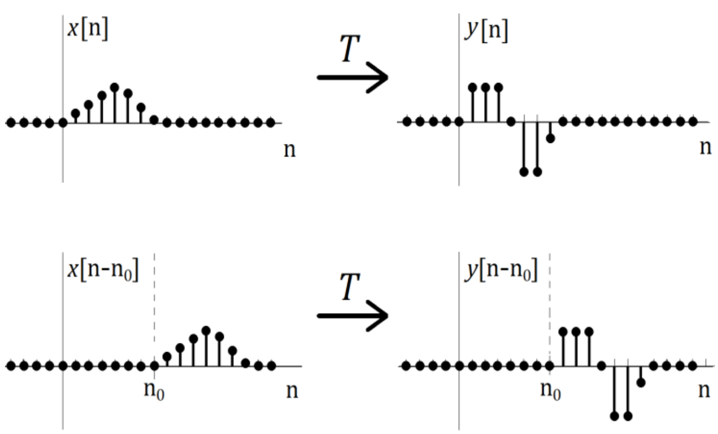
Un sistema T discreto es invariante en el tiempo, si y sólo si

$$T\{\, x[n]\,\} = y[n] \quad \Longrightarrow \quad T\{\, x[n-k]\,\} = y[n-k]$$

para toda secuencia de entrada $x[n]$ y todo desplazamiento $k \in \mathbb{Z}$ en el tiempo.



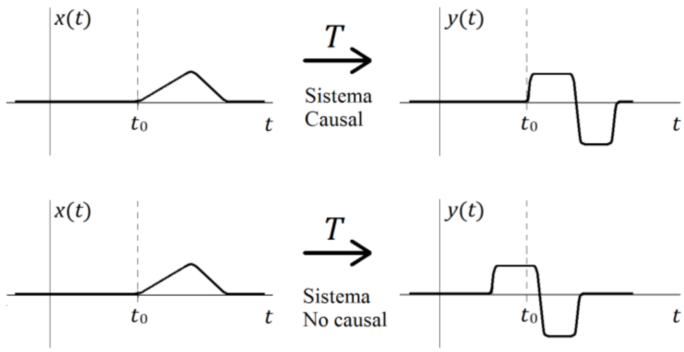
Invariancia en el tiempo continuo



Invariancia en el tiempo discreto

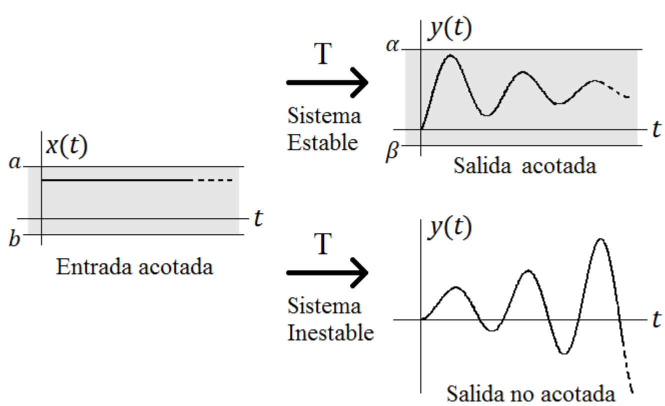
- Causalidad

Un sistema causal o no anticipativo es aquel responde después de que se presenta la señal de entrada y no antes.



- Estabilidad

Un sistema es estable en el sentido de entrada acotada-salida acotada (estable BIBO), si toda entrada acotada produce una salida acotada.



2. SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES EN EL TIEMPO

- Definición

Un sistema lineal e invariante en el tiempo (sistema LTI) continuo o discreto es aquel que posee las propiedades de linealidad e invariancia en el tiempo. De aquí en adelante, el curso solo se enfocará en el análisis de este tipo de sistemas.

Modelado de sistemas LTI en el dominio del tiempo

Las características de cualquier **Sistema $\boldsymbol{T}$** LTI están completamente determinadas por su respuesta al impulso unitario $h(t) = T\{\delta(t)\}$ cuando T es continuo, y $h[n] = T\{\delta[n]\}$ cuando T es discreto:

Sistema LTI continuo

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = x(t) \underbrace{* \, h(t)}_{T}$$

Sistema LTI discreto

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = x[n] \underbrace{* \, h[n]}_{T}$$

Ejemplo

Dado un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = 2e^{-2t}u(t)$, determinar la respuesta del sistema a la entrada $x(t) = u(t)$.

Solución

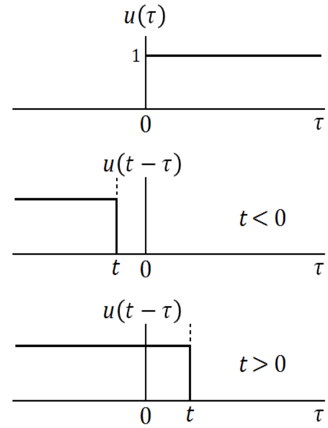
$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 2e^{-2\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2e^{-2\tau}\ 0d\tau = 0 \ \text{ para } \ t < 0$$

$$y(t) = \int_{0}^{t} 2e^{-2\tau}\ 1d\tau \ \text{ para } \ t \geq 0$$

$$= [-e^{-2\tau}]_{\tau=0}^{t} \ = -e^{-2t} + 1$$



Finalmente: $y(t) = [1 - e^{-2t}]u(t)$ para $-\infty < t < +\infty$

Ejemplo (continuación)

Dado un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n] = 0.5^n u[n]$, determinar la respuesta del sistema a la entrada $x[n] = u[n]$.

Solución

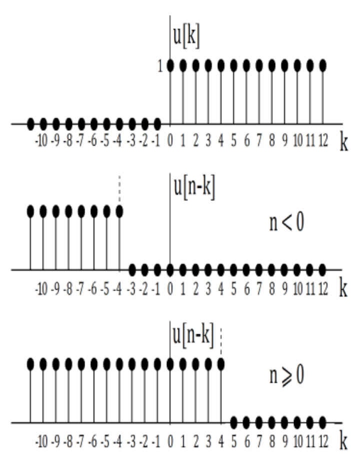
$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 0.5^k u[k]u[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 0.5^k 0 = 0 \ \text{ para } \ n < 0$$

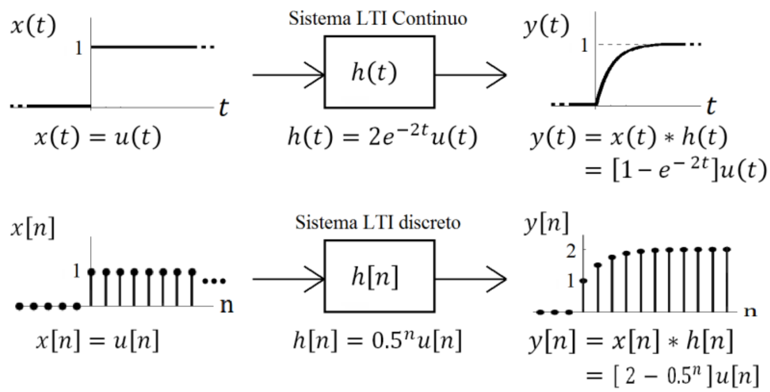
$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} 0.5^k = \frac{1 - 0.5^{n+1}}{1 - 0.5} \quad n \geq 0$$

$$= 2[1 - 0.5(0.5^n)] \ \text{ para } \ n \geq 0$$



Finalmente: $y[n] = [2 - 0.5^n]u[n]$ para $-\infty < n < +\infty$

Ejemplo (continuación)



En el tema 3, utilizando la transformada de Laplace (transformada Z), se verá un método muy eficiente para determinar $y(t) = x(t) * h(t)$ ($y[n] = x[n] * h[n]$).

Para la respuesta de un sistema LTI continuo o discreto se tiene que:

$$y = y_p + y_h$$

y_p es la respuesta permanente del sistema y persiste mientras dure la entrada.
y_h es la respuesta transitoria del sistema y tiende a 0 conforme t ó n tiende a infinito, cuando el sistema es estable.

Ejemplo
Para las respuestas de los sistemas LTI en el ejemplo anterior se tiene que:

$$y(t) = \underbrace{u(t)}_{y_p(t)} + \underbrace{-e^{-2t}u(t)}_{y_h(t)}$$

$$y[n] = \underbrace{2u[n]}_{y_p[n]} + \underbrace{-0.5^n u[n]}_{y_h[n]}$$

Causalidad en términos de la respuesta al impulso

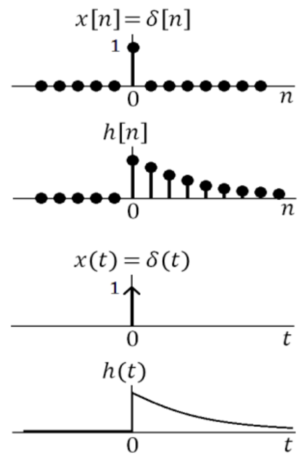
Para que un sistema LTI sea causal, su respuesta al impulso debe ser causal, i.e:

$$h[n] = 0, \text{ para } n < 0$$

en el caso discreto, y

$$h(t) = 0, \text{ para } t < 0$$

en el caso continuo.



Estabilidad en términos de la respuesta al impulso

Para que un sistema LTI sea estable (BIBO), en el caso continuo su respuesta al impulso, $h(t)$, debe ser absolutamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

Mientras que en el caso discreto su respuesta al impulso, $h[n]$, debe ser absolutamente sumable:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$$

En el tema 3 se verá un método muy eficiente para determinar la estabilidad de un sistema LTI, utilizando la T. de Laplace de $h(t)$ en el caso continuo, y utilizando la T. Z de $h[n]$ en el caso discreto.

a)

b)

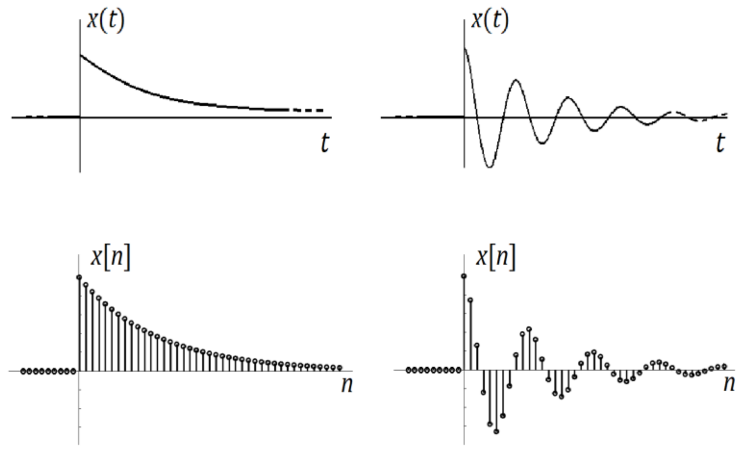


Figura. a) Ejemplos de señales absolutamente integrables.
b) Ejemplos de secuencias absolutamente sumables.

Relación entre la respuesta al impulso y la respuesta al escalón

Caso continuo

Si $y_u(t)$ es la respuesta al escalón unitario de un sistema LTI, entonces la respuesta al impulso de dicho sistema, esta dada por:

$$h(t) = \frac{dy_u(t)}{dt}$$

Caso discreto

Si $y_u[n]$ es la respuesta al escalón unitario de un sistema LTI, entonces la respuesta al impulso de dicho sistema, esta dada por:

$$h[n] = y_u[n] - y_u[n-1]$$

Sistemas LTI continuos representados mediante EDLs

Una ecuación diferencial lineal (EDL) de coeficientes constantes de orden N junto con condiciones iniciales nulas ($\mathrm{CI} = 0$), también describe un sistema LTI causal:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{EDL}\\ \text{CI=0}\end{array}} \longrightarrow y(t)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \qquad (3)$$

$$\text{CI nulas} \quad \frac{d^k y(0)}{dt^k} = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

En un sistema modelado por una EDL junto con CI=0, a $y(t)$ se le conoce como respuesta forzada del sistema.

Ejemplo

Obtener la respuesta al escalón unitario, del sistema LTI causal representado por la siguiente EDL de orden 1:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2x(t)$$

Sol.

Si $x(t) = 1u(t)$, al resolver la EDL anterior se obtiene la sol. general:

$$y(t) = [\underbrace{1}_{y_p(t)} + \underbrace{C_1 e^{-2t}}_{y_h(t)}]\, u(t)$$

Considerando CI nulas ($y(0) = 0$), de la ec. anterior se tiene que:

$$0 = 1 + C_1 e^{-2\times 0} \;\Rightarrow\; C_1 = -1$$

Entonces, la resp. del sistema a la entrada $x(t) = u(t)$, está dada por:

$$y(t) = [1 - e^{-2t}]\, u(t)$$

Sistemas discretos FIR

Son sistemas discretos LTI con respuesta al impulso de duración finita. En la práctica se implementan mediante la suma de convolución.

Ejemplo

Dado el sistema LTI FIR con respuesta al impulso $h[n]=\{4,2,1\}$, determinar la respuesta del sistema a la entrada $x[n]=\{1,2,3,5\}$.

Solución

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{Lh-1} h[k]x[n-k]$$

$h[n] = \{4,2,1\}$ de $L_h = 3$ y $x[n] = \{1,2,3,5\}$ de $L_x = 4$,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{L_h-1} h[k]x[n-k]$$

$$y[0] = \overbrace{(4,2,1)}^{h[k]} \cdot \overbrace{(1,0,0)}^{x[n-k]} = 4 \quad \text{para } 0 \leq k \leq L_h - 1$$

$$y[1] = (4,2,1) \cdot (2,1,0) = 10$$

$$y[2] = (4,2,1) \cdot (3,2,1) = 17$$

$$y[3] = (4,2,1) \cdot (5,3,2) = 28$$

$$y[4] = (4,2,1) \cdot (0,5,3) = 13$$

$$y[5] = (4,2,1) \cdot (0,0,5) = 5$$

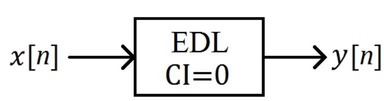
$$y[n] = \{\, 4, 10, 17, 28, 13, 5 \,\} \quad \text{de} \quad L_y = L_h + L_x - 1 = 6$$

```
function y = f_conv(h,x)   %Calcula y[n] = h[n]*x[n]
    Lh = length(h);         %Longitud de h[n]
    Lx = length(x);         %Longitud de x[n]
    Ly = Lx+Lh-1;           %Longitud de y[n]
    xn_k = zeros(1,Lh);     %xn_k = [0,...,0], de duración Lh
    x = [x,zeros(1,Lh-1)]; %x = [x[0],...,x[Lx-1], Lh-1 0s]
    y = zeros(1,Ly);        %y = [0,0,0,...,0]

    for n = 1 : 1 : Ly
        xn_k(1) = x(n);
        for k = 1 : 1 : Lh
            y(n) = y(n) + h(k)*xn_k(k);
        end
        for k = Lh :-1 : 2
            xn_k(k) = xn_k( k-1 );
        end
    end
end
```

Función en Matlab para calcular la convolución.

Sistemas discretos IIR

Son sistemas discretos LTI con respuesta al impulso de duración infinita. Un sistema IIR causal también se puede describir mediante una ecuación en diferencias lineal (EDL) de coeficientes constantes de orden $N > 0$, junto con condiciones iniciales nulas ($\mathrm{CI} = 0$):



$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad (4)$$

CI nulas $y[-1] = y[-2] = \cdots = y[-N] = 0$

Con $N > 0$, la ec. (4) puede reescribirse en su forma recursiva como:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right), \qquad (5)$$

La ecuación (5) expresa el valor de la salida en el instante n, en función de la señal de entrada y de N valores previos de la señal de salida.

En la práctica, los sistemas IIR se implementan mediante ecuaciones en diferencias en su forma recursiva.

Ejemplo

Para el sistema LTI descrito por la EDL de orden 2

$$y[n] + 0.2y[n-1] + 0.1y[n-2] = 0.5x[n] + 0.3x[n-1]$$

Considerando la entrada $x[n] = \{\, 2, 9 \,\}$, obtener $y[n]$ para n = 0, 1, 2, 3, 4.

Sol.

Primero se reescribe la ec. en diferencias en su forma recursiva:

$$y[n] = 0.5x[n] + 0.3x[n-1] - 0.2y[n-1] - 0.1y[n-2]$$

Como el sistema es LTI se consideran CI nulas: $y[-1] = y[-2] = 0$.

Entonces se procede a obtener $y[n]$ para n = 0, 1, 2, 3, 4:

$$y[n] = 0.5x[n] + 0.3x[n-1] - 0.2y[n-1] - 0.1y[n-2]$$

$$\begin{aligned} y[0] &= 0.5x[0] + 0.3x[-1] - 0.2y[-1] - 0.1y[-2] \\ &= 0.5 \times 2 + 0.3 \times 0 - 0.2 \times 0 - 0.1 \times 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[1] &= 0.5x[1] + 0.3x[0] - 0.2y[0] - 0.1y[-1] \\ &= 0.5 \times 9 + 0.3 \times 2 - 0.2 \times 1.0 - 0.1 \times 0 = 4.9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[2] &= 0.5x[2] + 0.3x[1] - 0.2y[1] - 0.1y[0] \\ &= 0.5 \times 0 + 0.3 \times 9 - 0.2 \times 4.9 - 0.1 \times 1 = 1.62 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[3] &= 0.5x[3] + 0.3x[2] - 0.2y[2] - 0.1y[1] \\ &= 0.5 \times 0 + 0.3 \times 0 - 0.2 \times 1.62 - 0.1 \times 4.9 = -0.814 \end{aligned}$$

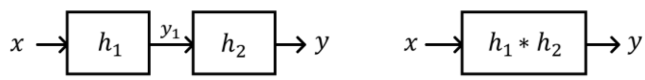
$$\begin{aligned} y[4] &= 0.5x[4] + 0.3x[3] - 0.2y[3] - 0.1y[2] \\ &= 0.5 \times 0 + 0.3 \times 0 - 0.2 \times (-.814) - 0.1 \times 1.62 = 0.0008 \end{aligned}$$

$$y[n] = \{\mathbf{1}, \mathbf{4.9}, \mathbf{1.62}, \mathbf{-0.814}, 0.0008, 0.081, -0.016, -0.005, 0.002, \ldots\}$$

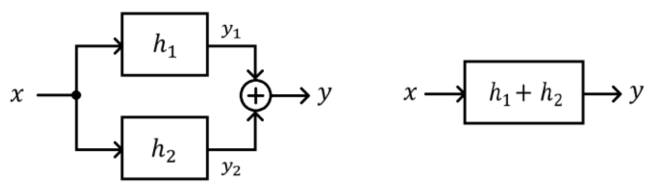
```
%y = f_recN2(a,b,x)  resuelve de forma recursiva la EDL
%    a0y[n]+a1y[n-1]+a2y[n-2] = b0x[n]+b1x[n-1]+b2x[n-2]
%Recibe a = [ a0  a1  a2 ], b = [ b0  b1  b2 ],
%Recibe x[n] de longitud Lx y devuelve y[n] de longitud Lx

function y = f_recN2(a,b,x)
   xn_1 = 0;  % x[n] casual
   xn_2 = 0;  % x[n] casual
   yn_1 = 0;  % sistema LTI causal => CIs=0
   yn_2 = 0;  % sistema LTI causal => CIs=0
   Lx = length(x);    % Longitud de la secuencia x[n]
   y = zeros(1,Lx);   % para los PRIMEROS Lx VALORES de y[n]

   for n = 1 : 1 : Lx
      y(n)=b(1)*x(n)+b(2)*xn_1+b(3)*xn_2-a(2)*yn_1-a(3)*yn_2;
      y(n) = (1/a(1))*y(n); % división entre coeficiente a0

      yn_2 = yn_1;
      yn_1 = y(n);
      xn_2 = xn_1;
      xn_1 = x(n);
   end
end
```

Función en Matlab que implementa la ec. (5) para $N = 2$.

Conexión en cascada (o serie) de sistemas LTI



Conexión en paralelo de sistemas LTI



3. ANÁLISIS DE SISTEMAS LTI, MEDIANTE LAS TRANSFORMACIONES DE LAPLACE Y Z

Representación de los sistemas LTI continuos mediante la transformada de Laplace

Transformada de Laplace (unilateral)

La transformada de Laplace de una señal $x(t)$ se define como:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt \qquad (6)$$

$X(s)$ es una función de la variable compleja $s = \sigma + j\omega$. La relación entre $x(t)$ y $X(s)$ tambien se puede denotar como:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$$

Para la transformada inversa de Laplace se tiene la expresión

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)\, e^{st}ds$$

Principales propiedades de la transformada de Laplace		
Propiedad	Señales causales	T. de Laplace
	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$X(s)$ $X_1(s)$ $X_2(s)$
Linealidad	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$
Diferenciación en el dominio del tiempo	$\frac{d^n}{dt^n}x(t)$	$s^nX(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k}\frac{d^k x(0)}{dt^k}$
Desplazamiento en s	$e^{at}x(t)$	$X(s-a)$
Diferenciación en el dominio de s	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$

Transformadas de Laplace de funciones elementales		
Señales causales	T. de Laplace	ROC
$\delta(t)$	1	El plano s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$Re\{s\} > 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re\{s\} > -a$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$Re\{s\} > -a$
$e^{-at}\cos(\omega_0 t)\,u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+{\omega_0}^2}$	$Re\{s\} > -a$
$e^{-at}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)\,u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+{\omega_0}^2}$	$Re\{s\} > -a$

Transformada inversa útil en el método de expansión en fracciones parciales, válida cuando $s^2 + \beta s + \gamma$ tiene raíces complejas conjugadas (i.e. $\beta^2 - 4\gamma < 0$):

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Bs+C}{s^2+\beta s+\gamma}\right\} = e^{-at}[A_1\cos(\omega_0 t) + A_2\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)]u(t)$$

Donde

$$a = 0.5\beta, \qquad \omega_0 = 0.5\sqrt{4\gamma - \beta^2}$$

y

$$A_1 = B, \qquad A_2 = \frac{2C - B\beta}{2\omega_0}$$

Función de transferencia de sistemas continuos LTI

Como ya se estudió, para un sistema LTI continuo, con respuesta al impulso $h(t)$, se tiene en el dominio del tiempo que:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Aplicando la T. de Laplace y su propiedad de convolución a la ec. anterior, se tiene en el dominio de la transformada que:

$$X(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y(s)$$

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

$\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ es la función de transferencia del sistema.

Ejemplo
Dado un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = 2e^{-2t}u(t)$, determinar la respuesta del sistema a la entrada $x(t) = u(t)$.

Sol.
De tablas de la transformada de Laplace tiene que:

$$X(s) = \frac{1}{s} \quad \text{y} \quad H(s) = 2\frac{1}{s+2}$$

Entonces

$$Y(s) = X(s)H(s) = \left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{2}{s+2}\right)$$

Como $Y(s)$ es un función racional propia, para obtener $y(t)$ mediante el uso de tablas de la T. de Laplace, se procede a realizar la expansión en fracciones parciales de $Y(s)$:

$$\frac{2}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$$

Multiplicando ambos lados de la ec. anterior por $s(s+2)$ se obtiene:

$$2 = A(s+2) + Bs$$

De la ec. anterior

con $\quad s = 0, \qquad 2 = A(2) \quad \Rightarrow \quad A = 1$

con $\quad s = -2, \qquad 2 = B(-2) \quad \Rightarrow \quad B = -1$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}$$

Aplicando la T. Inversa a la ec. anterior, "por tablas", se obtiene:

$$y(t) = u(t) - e^{-2t}u(t) = [1 - e^{-2t}]u(t)$$

Ejemplo
Dado un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = 2e^{-2t}u(t)$, obtener la EDL que también modela al sistema en el dominio del tiempo.

Solución: de tablas de la transformada de Laplace tiene que:

$$H(s) = 2\frac{1}{s+2}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2}{s+2} \quad \Rightarrow \quad (s+2)Y(s) = 2X(s)$$

O bien $\quad sY(s) + 2Y(s) = 2X(s)$

Aplicando la T. de Fourier inversa, de la ec. anterior se tiene que

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2x(t)$$

Para obtener $H(s)$ en el caso de un sistema LTI continuo representado mediante una EDL junto con CI nulas, se realiza lo siguiente:

Se aplica la T. de Laplace a ambos lados de la EDL (3)

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}$$

Utilizando las propiedades de linealidad y de diferenciación de la T. de Laplace en ambos lados de la ecuación anterior se obtiene:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X(s)$$

o bien $$Y(s)\sum_{k=0}^{N} a_k s^k = X(s)\sum_{k=0}^{M} b_k s^k$$

Finalmente, de la ec. anterior se obtiene la siguiente función racional:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k = P(s)}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k = Q(s)}$$

Las raíces del polinomio $P(s)$ se conocen como los ceros del sistema. Las raíces del polinomio $Q(s)$ se conocen como los polos del sistema. En el plano $\boldsymbol{s}$, cada cero se representa con una "o" y cada polo se representa con una "×".

Teorema de estabilidad

Un sistema LTI causal continuo con $H(s)$ racional es estable, si y solo si todos los polos de $H(s)$ se ubican en la parte izquierda del plano $\boldsymbol{s}$ (i.e. todos los polos tienen parte real negativa).

Ejemplo:
Dado el sistema LTI causal representado por la siguiente EDL de orden $N = 3$.

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 4\frac{dy(t)}{dt} - 4y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

Obtener $H(s)$ y determinar si el sistema es estable.

Primero

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 4\frac{dy(t)}{dt} - 4y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} + x(t)\right\}$$

De las propiedades de linealidad y de diferenciación se obtiene

$$s^3Y(s) + s^2Y(s) - 4sY(s) - 4Y(s) = s^2X(s) + 2sX(s) + X(s)$$

O bien $\quad (s^3 + s^2 - 4s - 4)\,Y(s) = (s^2 + 2s + 1)X(s)$

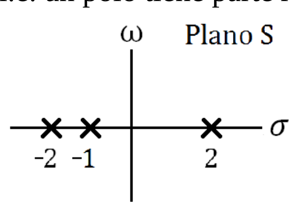
Finalmente

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + s^2 - 4s - 4}$$

Para este sistema $Q(s) = s^3 + s^2 - 4s - 4$, y sus polos son:

$$P_1 = -2,\ P_2 = -1,\ P_3 = 2$$

el sistema no es estable, ya que un polo de $H(s)$ cae en la parte derecha del plano s (i.e. un polo tiene parte real positiva).



Ejemplo:
Dado el sistema LTI causal representado por la siguiente EDL de orden $N = 2$.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = 12x(t)$$

Obtener $H(s)$, determinar si el sistema es estable, y obtener la respuesta del sistema a $x(t) = u(t)$.

Primero

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t)\right\} = \mathcal{L}\{12x(t)\}$$

De las propiedades de linealidad y de diferenciación se obtiene

$$s^2Y(s) + sY(s) - 2Y(s) = 12X(s)$$

O bien $$(s^2 + s - 2)\,Y(s) = 12X(s)$$

Finalmente

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{12}{s^2 + s - 2}$$

Para este sistema $Q(s) = s^2 + s - 2 = as^2 + bs + c$, y sus polos son:

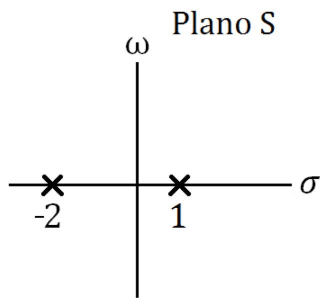
$$P_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$$

$$P_1 = 1, \qquad P_2 = -2$$

Entonces

$$H(s) = \frac{12}{s^2 + s - 2} = \frac{12}{(s-1)(s+2)}$$

el sistema no es estable, ya que un polo de $H(s)$ cae en la parte derecha del plano s (i.e. un polo tiene parte real positiva).



Para obtener la respuesta del sistema a $x(t) = u(t)$:

Primero, de tablas se obtiene que $X(s) = \frac{1}{s}$, luego se tiene que:

$$Y(s) = X(s)H(s) = \left(\frac{1}{s}\right)\frac{12}{(s-1)(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{12}{s(s-1)(s+2)}$$

Como es un función racional propia, es posible realizar la expansión en fracciones parciales de $Y(s)$:

$$\frac{12}{s(s-1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+2}$$

Multiplicando ambos lados de la ec. anterior por $s(s-1)(s+2)$ se obtiene:

$$12 = A(s-1)(s+2) + Bs(s+2) + Cs(s-1)$$

De la ec. anterior

con $s = 0$, $\quad 12 = A(-1)(2) \quad \Rightarrow \quad A = -6$

con $s = 1$, $\quad 12 = B(1)(3) \quad \Rightarrow \quad B = 4$

con $s = -2$, $\quad 12 = C(-2)(-3) \quad \Rightarrow \quad C = 2$

$$Y(s) = -\frac{6}{s} + \frac{4}{s-1} + \frac{2}{s+2}$$

Aplicando la T. Inversa de Laplace a la ecuación anterior se obtiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{6}{s} + \frac{4}{s-1} + \frac{2}{s+2}\right\}$$

$$y(t) = -6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

Mediante tablas

$$y(t) = -6u(t) + 4e^{t}u(t) + 2e^{-2t}u(t)$$

$$y(t) = [-6 + 4e^{t} + 2e^{-2t}]u(t)$$

Ejemplo:
Dado el sistema LTI causal con función de transferencia

$$H(\underline{s}) = \frac{5}{\underline{s}^2 + 2\underline{s} + 5}$$

determinar si el sistema es estable y obtener la respuesta del sistema a la entrada $x(t) = u(t)$.

Para este sistema $Q(\underline{s}) = \underline{s}^2 + 2\underline{s} + 5 = a\underline{s}^2 + b\underline{s} + c$, y sus polos son:

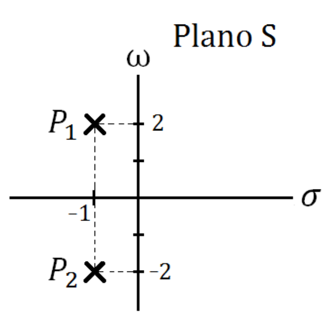
$$P_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm 4j}{2}$$

$$P_{1,2} = -1 \pm 2j$$

Entonces

$$H(s) = \frac{5}{\underline{s}^2 + 2\underline{s} + 5} = \frac{5}{(\underline{s} - P_1)(\underline{s} - P_2)}, \qquad P_{1,2} = -1 \pm 2j$$

el sistema es estable, ya que los 2 polos de $H(\underline{s})$ caen en la parte izquierda del plano s (los 2 polos tienen parte real negativa (-1)).



Para obtener la respuesta del sistema a $x(t) = u(t)$:

Primero, de tablas se obtiene que $X(\underline{s}) = \frac{1}{\underline{s}}$, luego se tiene que:

$$Y(\underline{s}) = X(\underline{s})H(\underline{s}) = \left(\frac{1}{\underline{s}}\right)\left(\frac{5}{\underline{s}^2 + 2\underline{s} + 5}\right)$$

$$Y(\underline{s}) = \frac{5}{\underline{s}(\underline{s}^2 + 2\underline{s} + 5)}$$

Entonces, se realiza expansión en fracciones parciales de $Y(s)$:

$$\frac{5}{\underline{s}(\underline{s}^2 + 2\underline{s} + 5)} = \frac{A}{\underline{s}} + \frac{B\underline{s} + C}{\underline{s}^2 + 2\underline{s} + 5}$$

Multiplicando ambos lados de la ec. anterior por $\underline{s}(\underline{s}^2 + 2\underline{s} + 5)$ se obtiene:

$$5 = A(\underline{s}^2 + 2\underline{s} + 5) + \underline{s}(B\underline{s} + C)$$

con $s = 0$, $\quad 5 = A(5) \quad \Rightarrow \quad A = 1$

con $s = 1$, $\quad 5 = 1(8) + 1(B + C\ ) \ \Rightarrow \ B + C = -3$

con $s = -1$, $\quad 5 = 1(4) - (-B + C) \ \Rightarrow \ B - C = \ 1$

$$B = -1, \qquad C = -2$$

Entonces

$$Y(s) = \frac{1}{\underline{s}} + \frac{-\underline{s} - 2}{\underline{s}^2 + 2\underline{s} + 5}$$

O bien

$$Y(s) = \frac{1}{\underline{s}} - \frac{\underline{s} + 2}{\underline{s}^2 + 2\underline{s} + 5}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Bs+C}{s^2+\beta s+\gamma}\right\} = e^{-at}[A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t)]u(t)$$

$$a = 0.5\beta = 0.5(2) = 1$$

$$\omega_0 = 0.5\sqrt{4\gamma - \beta^2} = 0.5\sqrt{4(5) - (2)^2} = 2$$

$$A_1 = B = 1, \qquad A_2 = \frac{2C - B\beta}{2\omega_0} = \frac{2(2) - (1)(2)}{2(2)} = 0.5$$

Aplicando a $Y(s)$ la T. de Laplace inversa "por tablas", se obtiene:

$$y(t) = u(t) - e^{-t}\left[\cos(2t) + \tfrac{1}{2} sen(2t)\right]u(t)$$

Ejemplo:
Dado el sistema LTI causal con función de transferencia

$$H(s) = \frac{2s^2 + 10s + 9}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

determinar si el sistema es estable y obtener $h(t)$.

Para este sistema se tiene que

$$\begin{aligned} Q(s) &= s^3 + 5s^2 + 8s + 4 \\ &= (s+1)(s+2)^2 \end{aligned}$$

y sus polos son:

$$P_1 = -1, \qquad P_2 = P_3 = -2$$

Como todos los polos tienen parte real negativa, el sistema es estable.

Expansión en fracciones parciales de $H(s)$:

$$\frac{2s^2 + 10s + 9}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}$$

Se puede comprobar que (tarea moral):

$$A = 1, \qquad B = 1, \qquad C = 3$$

Por lo que

$$H(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \frac{3}{(s+2)^2}$$

y de tablas

$$h(t) = [e^{-t} + e^{-2t} + 3te^{-2t}]u(t)$$

Ejemplo (con CI no nulas)
Dado el sistema representado por la siguiente EDL de orden $N = 1$

$$y'(t) + 2y(t) = 2x(t)$$

con condiciones iniciales no nulas, $y(0) \neq 0$. Obtener la respuesta del sistema a $x(t) = u(t)$.

Aplicando la T. de Laplace y su propiedad de linealidad se obtiene

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} + 2\mathcal{L}\{y(t)\} = 2\mathcal{L}\{x(t)\}$$

Aplicando la propiedad de diferenciación en el tiempo de la T. de Laplace (unilateral) se obtiene

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = 2X(s)$$

$$sY(s) + 2Y(s) = 2X(s) + y(0)$$

$$(s+2)Y(s) = 2X(s) + y(0)$$

$$Y(s) = \frac{2}{s+2}X(s) + \frac{1}{s+2}y(0)$$

De tablas, para $x(t) = u(t)$ se tiene que $X(s) = \frac{1}{s}$ y

$$Y(s) = \frac{2}{(s+2)s} + y(0)\frac{1}{s+2}$$

Entonces donde sea necesario, se procede a realizar la expansión en fracciones parciales de los sumandos de $Y(s)$:

$$\frac{2}{(s+2)s} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s}$$

Multiplicando ambos lados de la ec. anterior por $(s+2)s$ se obtiene:

$$2 = As + B(s+2)$$

con $s = 0, \quad 2 = B(2) \quad \Rightarrow \quad B = 1$

con $s = -2, \quad 2 = A(-2) \quad \Rightarrow \quad A = -1$

De esta forma se obtiene que

$$Y(s) = \frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s} + y(0)\frac{1}{s+2}$$

Aplicando la T. de Laplace inversa por tablas se obtiene

$$y(t) = -e^{-2t}u(t) + u(t) + y(0)e^{-2t}u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{[1 - e^{-2t}]u(t)}_{y_{zs}(t)\ \text{res. de estado 0}} + \underbrace{y(0)e^{-2t}u(t)}_{y_{zi}(t)\ \text{res. de entrada 0}}$$

Representación de los sistemas LTI discretos mediante la transformada Z

Transformada Z

La transformada Z de una secuencia $x[n]$ se define como:

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} \qquad (7)$$

$X(z)$ es una función de la variable compleja $z = re^{j\Omega}$. La relación entre $x[n]$ y $X(z)$ tambien se puede denotar como:

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)$$

Para la transformada Z inversa se tiene la expresión

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$$

Ejemplo:
Obtener la transformada Z de $x[n] = a^n u[n]$, $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{a^n u[n]}_{x[n]} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (az^{-1})^n$$

como $\sum_{n=0}^{N} b^n = \dfrac{1-b^{N+1}}{1-b} \quad b \neq 1 \quad b \in \mathbb{C}$ entonces

$$X(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{1-(az^{-1})^{N+1}}{1-az^{-1}} = \frac{1}{1-az^{-1}}, \qquad |az^{-1}| < 1$$

$$\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \qquad |z| > |a| \quad \text{(ROC)}$$

ROC: región de convergencia de la T. Z (en el plano Z).

Principales propiedades de la transformada Z		
Propiedad	Secuencia	Transformada Z
	$x[n]$ $x_1[n]$ $x_2[n]$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$
Linealidad	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
Convolución	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$
Desplazamiento en n	$x[n-a]$	$z^{-a}X(z)$
Escalamiento en Z	$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$
Diferenciación en Z	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$

Transformadas Z de secuencias elementales		
Secuencia	Transformada Z	ROC
$\delta[n]$	1	El plano z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$r^n \cos(\Omega_0 n)\, u[n]$	$\frac{1-(r\cos\Omega_0)z^{-1}}{1-(2r\cos\Omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
$r^n \operatorname{sen}(\Omega_0 n)\, u[n]$	$\frac{(r\operatorname{sen}\Omega_0)z^{-1}}{1-(2r\cos\Omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$

Transformadas Z de secuencias elementales		
Secuencia	Transformada Z	ROC
$\delta[n]$	1	El plano z
$u[n]$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n u[n]$	$\frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$na^n u[n]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$r^n \cos(\Omega_0 n)\, u[n]$	$\frac{z^2-(r\cos\Omega_0)z}{z^2-(2r\cos\Omega_0)z+r^2}$	$\lvert z\rvert > r$
$r^n \operatorname{sen}(\Omega_0 n)\, u[n]$	$\frac{(r\operatorname{sen}\Omega_0)z}{z^2-(2r\cos\Omega_0)z+r^2}$	$\lvert z\rvert > r$

Transformada Z inversa útil en el método de expansión en fraccio-nes parciales, válida cuando $z^2+\beta z+\gamma$ tiene raíces complejas conjugadas (i.e. $\beta^2-4\gamma<0$):

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{Bz^2+Cz}{z^2+\beta z+\gamma}\right\} = r^n[A_1\cos(\Omega_0 n)+A_2\operatorname{sen}(\Omega_0 n)]u[n]$$

Donde

$$r=\sqrt{\gamma}, \qquad \Omega_0=\cos^{-1}\left(\frac{-\beta}{2\sqrt{\gamma}}\right)$$

y

$$A_1=B, \qquad A_2=\frac{2C-B\beta}{2r\operatorname{sen}\Omega_0}$$

Función de transferencia de sistemas discretos LTI

Como ya se estudió, para un sistema LTI discreto, con respuesta al impulso $h[n]$, se tiene en el dominio del tiempo que:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Aplicando la transformada Z y su propiedad de convolución a la ec. anterior, se tiene en el dominio de la transformada que:

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z)$$

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

$\mathcal{Z}\{h[n]\} = H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ es la función de transferencia del sistema.

Ejemplo
Dado un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n] = 0.5^n u[n]$, determinar la respuesta del sistema a la entrada $x[n] = u[n]$.

Sol.
De tablas de la transformada Z se tiene que:

$$X(z) = \frac{z}{z-1} \quad \text{y} \quad H(z) = \frac{z}{z-0.5}$$

Entonces

$$Y(z) = X(z)H(z) = \left(\frac{z}{z-1}\right)\left(\frac{z}{z-0.5}\right)$$

Como $Y(z)/z$ es una función racional propia, para obtener $y[n]$ mediante el uso de tablas de la T.Z, se procede a realizar la expansión en fracciones parciales de:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)}$$

$$\frac{z}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0.5}$$

Multiplicando ambos lados de la ec. anterior por $(\mathrm{z}-1)(z-0.5)$ se obtiene:

$$z = A(z-0.5) + B(z-1)$$

De la ec. anterior

con $z = 1$, $1 = A(0.5)$ $\Rightarrow$ $A = 2$

con $z = 0.5$, $0.5 = B(-0.5)$ $\Rightarrow$ $B = -1$

$$Y(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5}$$

Aplicando la T. Z. inversa a la ec. anterior, "por tablas", se obtiene:

$$y[n] = 2u[n] - 0.5^n u[n] = \underline{[2-0.5^n]u[n]}$$

Ejemplo

Dado un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n] = 0.5^n u[n]$, obtener la ec. en diferencias que también modela al sistema en el dominio del tiempo discreto.

Solución: de tablas de la transformada de Z tiene que:

$$H(z) = \frac{z}{z-0.5} = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad (1-0.5z^{-1})Y(z) = X(z)$$

O bien $Y(z) - 0.5Y(z) = X(z)$

Aplicando la T. de Z inversa, de la ec. anterior se tiene que

$$y[n] - 0.5y[n] = x[n]$$

Para obtener $H(z)$ en el caso de un sistema LTI discreto representado mediante una EDL junto con CI nulas, se realiza lo siguiente:

Se aplica la transformada Z a ambos lados de la EDL (4)

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]\right\} = \mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]\right\}$$

Utilizando las propiedades de linealidad y de desplazamiento en n de la transformada Z en ambos lados de la ec. anterior se obtiene:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

o bien $$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

Finalmente, de la ecuación anterior se obtiene:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{z^N \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = P(z)}{z^N \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = Q(z)}$$

Cuando el sist. representado por $H(z)$ es causal se tiene que $N \geq M$, lo que implica que $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios. Las raíces de $P(z)$ se conocen como los ceros del sistema. Las raíces de $Q(z)$ se conocen como los polos del sistema. En el plano $\boldsymbol{z}$, cada cero se representa con una "o" y cada polo se representa con una "×".

Teorema de estabilidad

Un sistema LTI causal discreto con $H(z)$ racional es estable, si y solo si todos los polos de $H(z)$ se ubican dentro del círculo unitario del plano $\boldsymbol{z}$ (i.e. todos los polos tienen magnitud menor a 1).

Ejemplo:
Dado el sistema LTI causal representado por la siguiente EDL de orden $N = 3$.

$$y[n] + 0.5y[n-1] - 4y[n-2] - 2y[n-3] = x[n] + x[n-1]$$

Obtener $H(z)$ y determinar si el sistema es estable.

Primero

$$\mathcal{Z}\{y[n] + 0.5y[n-1] - 4y[n-2] - 2y[n-3]\} = \mathcal{Z}\{x[n] + x[n-1]\}$$

De las propiedades de linealidad y de desplazamiento en el tiempo se obtiene

$$Y(z) + 0.5z^{-1}Y(z) - 4z^{-2}Y(z) - 2z^{-3}Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z)$$

O bien $$(1 + 0.5z^{-1} - 4z^{-2} - 2z^{-3})\, Y(z) = (1 + z^{-1})X(z)$$

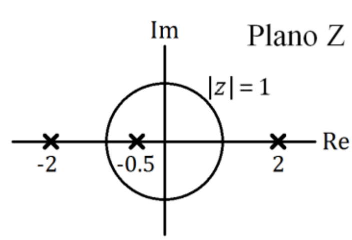
Finalmente

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1} - 4z^{-2} - 2z^{-3}} = \frac{z^3 + z^2}{z^3 + 0.5z^2 - 4z - 2}$$

Para este sistema $Q(z) = z^3 + 0.5z^2 - 4z - 2$, y sus polos son:

$$P_1 = -2,\ P_2 = -0.5,\ P_3 = 2$$

el sistema no es estable, ya que los polos P_1 y P_3 de $H(z)$ caen fuera del círculo unitario.



Ejemplo:
Dado el sistema LTI causal representado por la siguiente EDL de orden N=2

$$y[n] + 2.5y[n-1] + y[n-2] = 9x[n-1] + 9x[n-2]$$

Obtener $H(z)$, determinar si el sistema es estable, y obtener la respuesta del sistema a $x[n] = u[n]$.

Primero

$$\mathcal{Z}\{y[n] + 2.5y[n-1] + y[n-2]\} = \mathcal{Z}\{9x[n-1] + 9x[n-2]\}$$

Utilizando las propiedades de linealidad y desplazamiento en el tiempo se obtiene

$$Y(z) + 2.5z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) = 9z^{-1}X(z) + 9z^{-2}X(z)$$

O bien

$$(1 + 2.5z^{-1} + z^{-2})Y(z) = (9z^{-1} + 9z^{-2})X(z)$$

Finalmente

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{9z^{-1} + 9z^{-2}}{1 + 2.5z^{-1} + z^{-2}} = \frac{9z + 9}{z^2 + 2.5z + 1}$$

Para este sistema $Q(z) = z^2 + 2.5z + 1 = az^2 + bz + c$, y sus polos son:

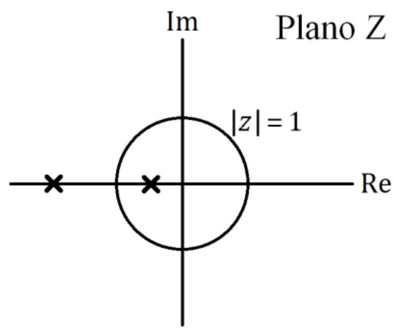
$$P_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2.5 \pm \sqrt{(2.5)^2 - 4}}{2(1)} = \frac{-2.5 \pm 1.5}{2}$$

$$P_1 = -0.5, \qquad P_2 = -2$$

Entonces

$$H(z) = \frac{9z + 9}{z^2 + 2.5z + 1} = \frac{9z + 9}{(z + 0.5)(z + 2)}$$

El sistema no es estable ya que uno de sus polos cae fuera del circulo unitario.



Para obtener la respuesta del sistema a $x[n] = u[n]$:

Primero, de tablas se obtiene que $X(z) = \frac{z}{z-1}$, luego se tiene que:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{9z + 9}{(z + 0.5)(z + 2)}\left(\frac{z}{z - 1}\right)$$

Entonces, para garantizar que se trabaja con una función racional propia, se procede a realizar la expansión en fracciones parciales de

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{9z + 9}{(z + 0.5)(z + 2)(z - 1)}$$

$$\frac{9z+9}{(z+0.5)(z+2)(z-1)} = \frac{A}{z+0.5} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{z-1}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $(z+0.5)(z+2)(z-1)$ se obtiene:

$$9z+9 = A(z+2)(z-1) + B(z+0.5)(z-1) + C(z+0.5)(z+2)$$

con $z = -0.5,\quad 4.5 = A(1.5)(-1.5) \quad\Rightarrow\quad A = -2$

con $z = -2,\quad -9 = B(-1.5)(-3) \quad\Rightarrow\quad B = -2$

con $z = 1,\quad 18 = C(1.5)(3) \quad\Rightarrow\quad C = 4$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{-2}{z+0.5} + \frac{-2}{z+2} + \frac{4}{z-1}$$

entonces

$$Y(z) = -2\frac{z}{z+0.5} - 2\frac{z}{z+2} + 4\frac{z}{z-1}$$

aplicando a $Y(z)$ la T. Z inversa "por tablas", se obtiene:

$$y[n] = -2(-0.5)^n u[n] - 2(-2)^n u[n] + 4u[n]$$

$$y[n] = [\ 4 - 2(-0.5)^n - 2(-2)^n\ ]u[n]$$

Ejemplo:
Dado el sistema LTI causal representado por la siguiente EDL de orden N=1

$$y[n] - 0.3y[n-1] = x[n]$$

Obtener $H(z)$, determinar si el sistema es estable, y obtener la respuesta del sistema a $x[n] = 0.3^n u[n]$.

Primero

$$\mathcal{Z}\{y[n] - 0.3y[n-1]\} = \mathcal{Z}\{x[n]\}$$

Utilizando las propiedades de linealidad y desplazamiento en el tiempo se obtiene

$$Y(z) - 0.3z^{-1}Y(z) = X(z)$$

O bien

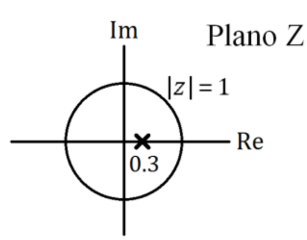
$$(1 - 0.3z^{-1})Y(z) = X(z)$$

Finalmente

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0.3z^{-1}} = \frac{z}{z - 0.3}$$

Para este sistema $Q(z) = z - 0.3$, y su polo es $P_1 = 0.3$

El sistema es estable ya que su polo se encuentra dentro del circulo unitario.



Para obtener la respuesta del sistema a $x[n] = 0.3^n u[n]$:

Primero, de tablas se tiene que $X(z) = \frac{z}{z-0.3}$, luego se tiene que:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{z}{z-0.3}\left(\frac{z}{z-0.3}\right)$$

Entonces, para garantizar que se trabaja con una función racional propia, se procede a realizar la expansión en fracciones parciales de

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-0.3)^2}$$

$$\frac{z}{(z-0.3)^2} = \frac{A}{z-0.3} + \frac{B}{(z-0.3)^2}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $(z-0.3)^2$ se obtiene:

$$z = A(z-0.3) + B$$

con $z = 0.3$, $\quad 0.3 = B$

con $z = 0$, $\quad 0 = A(-0.3) + 0.3 \quad \Rightarrow \quad A = 1$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z-0.3} + \frac{0.3}{(z-0.3)^2}$$

entonces

$$Y(z) = \frac{z}{z-0.3} + \frac{0.3z}{(z-0.3)^2}$$

aplicando a $Y(z)$ la T. Z inversa "por tablas", se obtiene:

$$y[n] = (0.3)^n u[n] + n(0.3)^n u[n]$$

$$y[n] = [\,(0.3)^n + n(0.3)^n]\, u[n]$$

Ejemplo:
Dado el sistema LTI causal con función de transferencia

$$H(z) = \frac{3z+2}{z^2 - z + 0.5}$$

determinar si el sistema es estable y obtener su respuesta al escalón.

Para este sistema $Q(z) = z^2 - z + 0.5 = az^2 + bz + c$, y sus polos son:

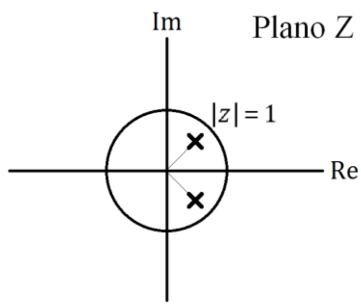
$$P_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1-2}}{2(1)} = \frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}$$

$$P_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm\frac{j\pi}{4}}$$

Entonces

$$H(z) = \frac{3z+2}{z^2 - z + 0.5}, \qquad P_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm\frac{j\pi}{4}}$$

Este sistema es estable ya que los dos polos de $H(z)$ caen dentro del círculo unitario (i.e. los 2 polos tienen magnitud menor a 1).



Para obtener la respuesta del sistema a $x[n] = u[n]$:

Primero, de tablas se obtiene que $X(z) = \frac{z}{z-1}$, luego se tiene que:

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z}{z-1}\left(\frac{3z+2}{z^2 - z + 0.5}\right)$$

Entonces, se procede a realizar la expansión en fracciones parciales de

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{3z+2}{(z-1)(z^2 - z + 0.5)}$$

$$\frac{3z+2}{(z-1)(z^2-z+0.5)} = \frac{A}{z-1} + \frac{Bz+C}{z^2-z+0.5}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $(z-1)(z^2-z+0.5)$ se obtiene:

$$3z+2 = A(z^2-z+0.5) + (Bz+C)(z-1)$$

con $z=1$, $\quad 5 = A(0.5) \quad \Rightarrow \quad A = 10$

con $z=0$, $\quad 2 = 10(0.5) + C(-1) \quad \Rightarrow \quad C = 3$

con $z=-1$, $\quad -1 = 10(2.5) + (-B+3)(-2) \quad \Rightarrow \quad B = -10$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{10}{z-1} + \frac{-10z+3}{z^2-z+0.5}$$

$$Y(z) = 10\frac{z}{z-1} - \frac{10z^2-3z}{z^2-z+0.5}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{Bz^2+Cz}{z^2+\beta z+\gamma}\right\} = r^n[A_1\cos(\Omega_0 n) + A_2\,\mathrm{sen}(\Omega_0 n)]u[n]$$

$$r = \sqrt{\gamma} = \sqrt{0.5}, \quad \Omega_0 = \cos^{-1}\left(\frac{-\beta}{2\sqrt{\gamma}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{0.5}}\right) = \frac{\pi}{4},$$

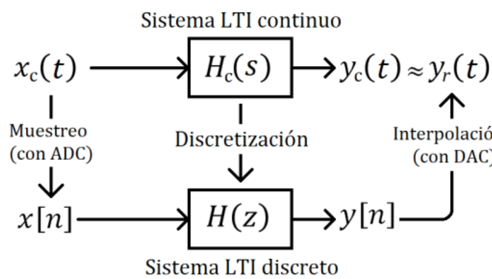
$$A_1 = B = 10, \quad A_2 = \frac{2C-B\beta}{2r\,\mathrm{sen}\Omega_0} = \frac{2(-3)-(10)(-1)}{2\sqrt{0.5}sen(\pi/4)} = \frac{4}{1} = 4$$

Aplicando a $Y(z)$ la T. Z inversa "por tablas", se obtiene:

$$y[n] = \left[10 - \left(\sqrt{0.5}\right)^n\left[10\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right]\right]u[n]$$

Discretización de sistemas LTI mediante la transformación bilineal entre los planos S y Z

La discretización de un sistema se puede definir como el proceso de convertir un sistema LTI continuo con función de transferencia $H_c(s)$, en su representación mediante un sistema LTI discreto con función de transferencia $H(z)$, de tal forma que para una secuencia de entrada $x[n] = x_c(nT)$, el sistema discreto responda con una secuencia de salida $y[n] \approx y_c(nT)$. Lo anterior se ilustra en la siguiente figura:



Una forma de discretizar un sistema LTI continuo con función de transferencia $H_c(s)$, hacia un sistema LTI discreto con función de transferencia $H(z)$, es mediante el empleo de la ecuación

$$H(z) = H_c(s)\Big|_{s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$$

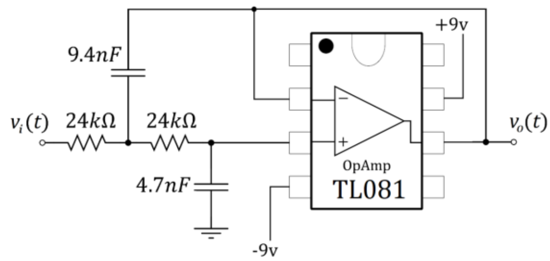
Donde T es el periodo de muestreo utilizado, y

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

es la **Transformada bilineal** entre los planos **S** y **Z**. Utilizando integración numérica trapezoidal, la transformada bilineal aproxima en tiempo discreto y en el dominio de la trasformada Z, a la operación derivada del tiempo continuo que es representada en el dominio de Laplace por el producto con la variable $\boldsymbol{S}$, de acuerdo con la ecuación:

$$Y_c'(s) = \boldsymbol{s}Y_c(s)$$

Ejemplo



El circuito eléctrico mostrado en la figura anterior implementa un sistema LTI continuo (filtro paso-bajas Butterworth de orden 2 con frecuencia de corte $F_c = 1000$[Hz]) con función de transferencia:

$$H_c(s) = \frac{a^2}{s^2 + \sqrt{2}\, a\, s + a^2}, \qquad a = 2\pi 1000$$

Con $F_s = 44.1[k\text{Hz}]$, discretizar el sistema anterior utilizando la transformada bilineal y obtener la EDL correspondiente.

Solución

Con la transformada bilineal es posible discretizar un sistema LTI continuo hacia un sistema discreto LTI IIR mediante la ecuación:

$$H(z) = H_c(s)\Big|_{s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}$$

Para el problema a resolver:

$$H(z) = \frac{a^2}{s^2 + \sqrt{2}\, a\, s + a^2}\Bigg|_{s = 2F_s\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}$$

$$H(z) = \frac{a^2}{\left(2F_s\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right)^2 + \sqrt{2}\, a\, \left(2F_s\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right) + a^2}$$

$$H(z) = \frac{a^2(z+1)^2}{4F_s^2(z-1)^2 + 2\sqrt{2}aF_s(z-1)(z+1) + a^2(z+1)^2}$$

$$= \frac{a^2(z^2+2z+1)}{4F_s^2(z^2-2z+1) + 2\sqrt{2}aF_s(z^2-1) + a^2(z^2+2z+1)}$$

$$= \frac{z^2+2z+1}{\frac{4F_s^2}{a^2}(z^2-2z+1) + \frac{2\sqrt{2}F_s}{a}(z^2-1) + \ (z^2+2z+1)}$$

$$= \frac{z^2+2z+1}{\left(\frac{4F_s^2}{a^2} + \frac{2\sqrt{2}F_s}{a} + 1\right)z^2 + \left(2 - \frac{8F_s^2}{a^2}\right)z + \left(\frac{4F_s^2}{a^2} - \frac{2\sqrt{2}F_s}{a} + 1\right)}$$

Como $Fs = 44100$ y $a = 2\pi 1000$, la ec. anterior se reduce a

$$H(z) = \frac{z^2+2z+1}{218z^2 - 392z + 178.2}$$

A continuación se obtiene la ecuación en diferencias correspondiente a $H(z)$:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{218 - 392z^{-1} + 178.2z^{-2}}$$

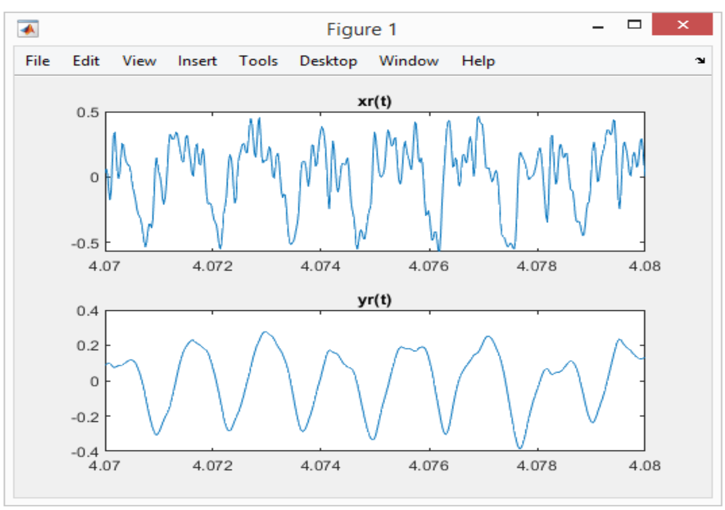
$$(218 - 392z^{-1} + 178.2z^{-2})Y(z) = (1 + 2z^{-1} + z^{-2})X(z)$$

O bien

$$218y[n] - 392y[n-1] + 178.2y[n-2] \ = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

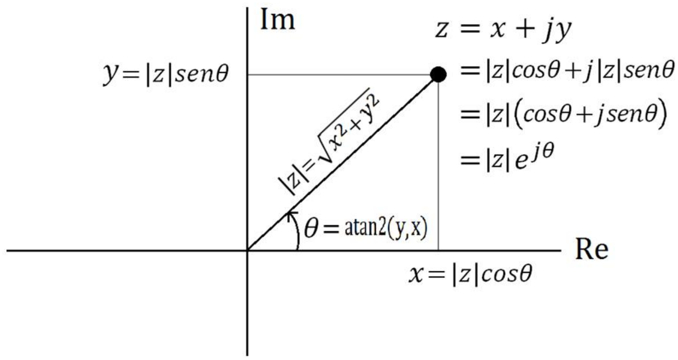
```
[xLR,Fs] = audioread('x_kitt.wav');            %formato wav,mp3,m4a
x = mean(xLR,2).';   %obtención x[n]=xc(nT) monoaural. 2=>prom cols

ak = [ 218, -392, 178.2 ];
bk = [ 1, 2, 1 ];
y = f_recN2(ak,bk,x);           %aplicación de un sistema IIR, N=2

Lx = length(x);               %num de muestras en x[n]
n = 0:1:Lx-1;                 %Arreglo de indices de tiempo discreto
t1 = 4.07;                    %Instante inicial a desplegar en [seg]
t2 = t1 + 10/1000;            %Instante final a desplegar en [seg]
figure
subplot(2,1,1)
plot( n*(1/Fs), x )             %T=1/Fs Periodo de muestreo en [seg]
xlim( [t1,t2] )
title('xr(t)')
subplot(2,1,2)
plot( n*(1/Fs), y(1:Lx) )       %T=1/Fs Periodo de muestreo en [seg]
xlim( [t1,t2] )
title('yr(t)')

%La tarjeta de sonido interpola a:
player = audioplayer( x, Fs );
playblocking(player);               %x[n] para reproducir xr(t)
player = audioplayer( y, Fs );
playblocking(player);               %y[n] para reproducir yr(t)
```

Código de Matlab que aplica a una señal de audio el sistema IIR:
$218y[n] - 392y[n-1] + 178.2y[n-2] \; = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$



Señales de audio muestreadas a $\mathrm{Fs} = 44100[\mathrm{Hz}]$

Forma magnitud y fase de un número complejo



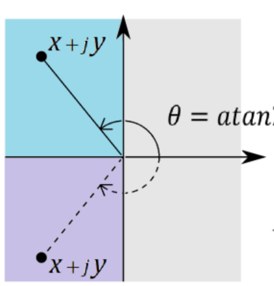
Donde

j : es la unidad imaginaria y se cumple que $j^2 = -1$

$e^{j\theta} = \cos\theta + j\text{sen}\theta$: es la formula de Euler

atan2 : es la función arcotangente de dos argumentos.

Función arcotangente de dos argumentos



$$\theta = atan2(y,x) = \begin{cases} \tan^{-1}(y/x) & si\ x \geq 0, y \neq 0 \\ \tan^{-1}(y/x) + \pi & si\ x < 0, y \geq 0 \\ \tan^{-1}(y/x) - \pi & si\ x < 0, y < 0 \end{cases}$$

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

Al analizar sistemas LTI es útil que para $Z, Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}$ se tiene que:

$$Z = Z_1 Z_2 \qquad |Z| = |Z_1||Z_2| \qquad \sphericalangle Z = \sphericalangle Z_1 + \sphericalangle Z_2$$

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} \qquad |Z| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} \qquad \sphericalangle Z = \sphericalangle Z_1 - \sphericalangle Z_2$$