ALG

Serie 1

$\ulcorner$ UM = ({amplitud, fase}, $x(t) = a$)

1 $a = \alpha + j\beta$ $\qquad A = |a| \to \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$; $\qquad \phi = \measuredangle a \to \operatorname{atan2}(\beta, \alpha) = \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ $\quad -\pi < \phi \leq \pi \quad \phi > \pi \to -2\pi$

$+\pi$

2 $e^{j\Omega_0 n} = \cos(\Omega_0 n) + j\,\mathrm{sen}(\Omega_0 n)$

$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} m$

3 {Por convolución: Respuesta al impulso}, $\{h(t)\}$

4 $y[n] = h[n] * x[n]$

cerrada

si $x[n] = \delta[n-a]$

$\hookrightarrow x[n-b] = \delta[n-a-b]$

FIR

Arreglo

$h \circledast x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$ ($L_h - 1$, 0)

$h \circledast x = \{\ ,\ ,\ ,\ \} \to L_x, L_h, L_y = L_x + L_h - 1$

$h \quad x[n-k] \quad 0 \leq n < L_y$

$f[0] = (\ ,\ ,\ ,\ ) \cdot (\ ,\ ,\ ,\ ) = y[0]$

$f[1]$

$\vdots$

$f[L_y - 1]$

$x[n] = a\delta[n] + b\delta[n-1] + c\delta[n-2]$

$x[n] = \{a, b, c\}$

Desplazamiento con el impulso unitario desplazado

$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$

Asociatividad con el escalamiento en amplitud

$(\alpha x_1) * (\beta x_2) = \alpha\beta(x_1 * x_2)$

sistema discreto

5-6 LTI IIR por ec. en diferencias

({y[n]} {x[n] = {0, 1, 2, 3, ..., n}}, EDL}

- Reescribir en su forma recursiva

$\_\,y[n] + \_\,y[n-a] + \ldots = \_\,x[n - \_\,] +$

$\hookrightarrow y[n] = \_\,x[n-a] + \_\,x[n-b] + \ldots$

$+ \_\,y[n-A] + y[n-B] + \ldots$

CONTINUA

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$, $\quad \omega_0 = 2\pi f_0 \left[\frac{rad}{s}\right]$

A: amplitud

f_0: frecuencia en Hertz

ω_0: frecuencia angular $\left[\frac{rad}{s}\right]$

ϕ: fase en radianes

$$\sum_{n=0}^{N} b^n = \frac{1 - b^{N+1}}{1 - b} \quad b \in \mathbb{C},\ b \neq 1$$

Periódica con periodo fundamental

$T_0 = \frac{1}{f_0}$ [s]

$f_0 = \frac{1}{T_0} \left[\frac{1}{s}\right]$

$\nabla x[n] = \frac{\Delta x}{\Delta n} = x[n] - x[n-1]$

Como es LTI, CI = 0: $y[a] = 0, \ \forall a < 0$

Ejemplo

$n = 0$

$y[0] = \cancel{11\,x[-1]}^{\,0} + 4\,x[0]$ sí

$n = 1$

$\vdots$

$n = 2$

$\vdots$

$n = n$

Discreta

Secuencia

$x[n] = A\cos(\Omega_0 n + \phi)$

A: Amplitud

Ω_0: frecuencia angular en radianes

ϕ: fase en radianes

Periódica con periodo fundamental

$N \in \mathbb{Z}^+$

$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} m$

$\frac{m}{N}$: número racional irreducible

$\underset{\text{entrada}}{x} \to \boxed{T\{\cdot\}} \to \underset{\text{salida o respuesta}}{y = T\{x\}}$

$\to$ transforma $\to$

3 maneras de modelar un sistema

1 $x(t),\ x[n] \to \boxed{h(t) \quad h[n] \text{ respuesta al impulso}} \to y(t),\ x[n]$

$y(t) = h(t) * x(t)$

$y[n] = h[n] * x[n]$

$x \to \boxed{EDL \ \ CI=0} \to y$

A continuo

B Discreto

$\mathcal{Z}^{-1}$ $\qquad \mathcal{Z}^{-1}$ $\qquad \mathcal{Z}$ $\qquad \mathcal{Z}$

$X(s)$, $X(z) \to$ $H(s)$, $H(z)$ $\to$ $Y(s)$, $Y(z)$

en el dominio de $\mathcal{L}$aplace / $\mathcal{Z}$ (continua / discreta)

7,8

Continuo

A $\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s)$

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\,Y(s) = X(s)\,P(s)\}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{l=0}^{m} b_l \frac{d^l y(t)}{dt^l}$$

Discreto

B [{sistema LTI discreto : h[n]}, {EDL (discreto)}]

Proceso similar pero en discreta

CUIDAR: que las potencias de z sean negativas αz^{-1}

9-13 $S = \{$ **Estabilidad** $\}$

Analizar Q para determinar estabilidad

	Continuo	Discreto
Estable	$Re\{P_{1,2,\ldots,n}\} < 0$	$\lvert P_{1,\ldots,n} \rvert < 1$

De Calc. Integral:

$$\frac{\ldots x + \ldots}{(x+a)(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b}$$

$$\frac{\ldots x^2 + \ldots}{x(x+a)(x+b)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+a} + \frac{C}{x+b}$$

$$\frac{\ldots x + \ldots}{(x+a)^2} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{(x+a)^2}$$

$$\frac{\ldots x^2 + x + \ldots}{(\ldots x+a)(\ldots x^2+b)} = \frac{A}{(\ldots x+a)} + \frac{Bx + C}{(\ldots x^2+b)}$$

9-13 **Respuesta del sistema**

$Y(s) = H(s)X(s)$

$Y(z) = H(z)X(z)$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{Y = \frac{P}{Q} X\right\}$$

$y = R$

abs integrable

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt < \infty$$

abs sumable

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

continua: $Y(s) = H(s)X(s)$

discreta: $Y(z) = H(z)X(z)$ $\to$ Función de Transferencia $H = \frac{Y}{X} = \frac{P}{Q}$

A: Está punteado, porque la $T\{\cdot\}$ resulta ser la misma que $h(t)$, solo que en el dominio de $\mathcal{L}$aplace

Principales propiedades de la transformada de Laplace		
Propiedad	Señales causales	T. de Laplace
	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$X(s)$ $X_1(s)$ $X_2(s)$
Linealidad	$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(s)+bX_2(s)$
Convolución	$x_1(t)*x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$
Diferenciación en el dominio del tiempo	$\frac{d^n}{dt^n}x(t)$	$s^nX(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-1-k}\frac{d^kx(0)}{dt^k}$
Desplazamiento en s	$e^{at}x(t)$	$X(s-a)$
Diferenciación en el dominio de s	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$

Transformadas de Laplace de funciones elementales		
Señales causales	T. de Laplace	ROC
$\delta(t)$	1	El plano s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$Re\{s\}>0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re\{s\}>-a$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$Re\{s\}>-a$
$e^{-at}\cos(\omega_0 t)\,u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+{\omega_0}^2}$	$Re\{s\}>-a$
$e^{-at}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)\,u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+{\omega_0}^2}$	$Re\{s\}>-a$

Transformada inversa útil en el método de expansión en fracciones parciales, válida cuando $s^2+\beta s+\gamma$ tiene raíces complejas conjugadas (i.e. $\beta^2-4\gamma<0$):

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Bs+C}{s^2+\beta s+\gamma}\right\}=e^{-at}[A_1\cos(\omega_0 t)+A_2\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)]u(t)$$

Donde

$$a=0.5\beta,\qquad \omega_0=0.5\sqrt{4\gamma-\beta^2}$$

y

$$A_1=B,\qquad A_2=\frac{2C-B\beta}{2\omega_0}$$

Transformada Z inversa útil en el método de expansión en fracciones parciales, válida cuando $z^2+\beta z+\gamma$ tiene raíces complejas conjugadas (i.e. $\beta^2-4\gamma<0$):

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{Bz^2+Cz}{z^2+\beta z+\gamma}\right\}=r^n[A_1\cos(\Omega_0 n)+A_2\,\mathrm{sen}(\Omega_0 n)]u[n]$$

Donde

$$r=\sqrt{\gamma},\qquad \Omega_0=\cos^{-1}\left(\frac{-\beta}{2\sqrt{\gamma}}\right)$$

y

$$A_1=B,\qquad A_2=\frac{2C-B\beta}{2r\,\mathrm{sen}\Omega_0}$$

Principales propiedades de la transformada Z		
Propiedad	Secuencia	Transformada Z
	$x[n]$ $x_1[n]$ $x_2[n]$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$
Linealidad	$ax_1[n]+bx_2[n]$	$aX_1(z)+bX_2(z)$
Convolución	$x_1[n]*x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$
Desplazamiento en n	$x[n-a]$	$z^{-a}X(z)$
Escalamiento en Z	$a^nx[n]$	$X(a^{-1}z)$
Diferenciación en Z	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$

Transformadas Z de secuencias elementales		
Secuencia	Transformada Z	ROC
$\delta[n]$	1	El plano z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert>1$
$a^nu[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$na^nu[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$r^n\cos(\Omega_0 n)\,u[n]$	$\frac{1-(r\cos\Omega_0)z^{-1}}{1-(2r\cos\Omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>r$
$r^n\,\mathrm{sen}(\Omega_0 n)\,u[n]$	$\frac{(r\,\mathrm{sen}\Omega_0)z^{-1}}{1-(2r\cos\Omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>r$

Transformadas Z de secuencias elementales		
Secuencia	Transformada Z	ROC
$\delta[n]$	1	El plano z
$u[n]$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert>1$
$a^nu[n]$	$\frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$na^nu[n]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$r^n\cos(\Omega_0 n)\,u[n]$	$\frac{z^2-(r\cos\Omega_0)z}{z^2-(2r\cos\Omega_0)z+r^2}$	$\lvert z\rvert>r$
$r^n\,\mathrm{sen}(\Omega_0 n)\,u[n]$	$\frac{(r\,\mathrm{sen}\Omega_0)z}{z^2-(2r\cos\Omega_0)z+r^2}$	$\lvert z\rvert>r$