CURSO DE SEÑALES Y SISTEMAS

Elaborado por:
Edgar Tello Paleta

PAGINA INTENSIONALMENTE
DEJADA EN BLANCO

Discretización de la derivada mediante la diferencia hacia atrás

La derivada de una señal $y_c(t)$ se puede aproximar como:

$$y_c{}'(t) \approx \frac{y_c(t) - y_c(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

Mediante muestreo con periodo $T = \Delta t$, de la expr. anterior se tiene que:

$$y_c{}'(nT) \approx \frac{y_c(nT) - y_c(nT - T)}{T}$$

Tolerando el error en el que se incurre y considerando la notación $x[n] = x_c(nT)$, la expresión anterior se puede reescribir como:

$$y'[n] = \frac{y[n] - y[n-1]}{T}$$

La secuencia $y'[n]$ es la diferencia hacia atrás de $\frac{1}{T}y[n]$ y es una aprox. en tiempo discreto de $y_c{}'(t)$, la derivada de la señal $y_c(t)$.

Además, aplicando la T. Z a ambos lados de la ec. anterior se tiene que:

$$Y'(z) = \frac{Y(z) - z^{-1}Y(z)}{T} = \frac{1 - z^{-1}}{T} Y(z)$$

O bien

$$Y'(z) = \frac{z-1}{Tz}\, Y(z) \qquad \text{(d0)}$$

La ecuación anterior aproxima en tiempo discreto y en el dominio de la transformada Z, a la operación derivada del tiempo continuo que es representada en el domino de Laplace mediante la ecuación:

$$Y_c{}'(s) = sY_c(s)$$

Nótese que para $y''[n]$, la sec. de muestras de $y_c{}''(t)$, se tiene que:

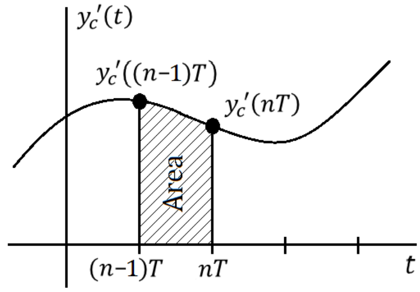
$$\mathcal{Z}\{y''[n]\} = Y''(z) = \frac{z-1}{Tz}\left(\frac{z-1}{Tz} Y(z)\right) = \left(\frac{z-1}{Tz}\right)^2 Y(z)$$

Discretización de la derivada mediante integración núm. trapezoidal

Area del trapecio

A=(b+B)h/2

b: base menor
B: base mayor
h: altura



De la regla de Barrow:

$$\int_{(n-1)T}^{nT} y_c{}'(t)dt = y_c(nT) - y_c\big((n-1)T\big) \qquad \text{(d1)}$$

Aproximando la integral anterior de forma trapezoidal se obtiene:

$$\int_{(n-1)T}^{nT} y_c{}'(t)dt \approx \frac{T}{2}\big[y_c{}'(nT) + y_c{}'\big((n-1)T\big)\big] \qquad \text{(d2)}$$

Tolerando el error en el que se incurre, se iguala (d1) con (d2):

$$y_c(nT) - y_c\big((n-1)T\big) = \frac{T}{2}\big[y_c{}'(nT) + y_c{}'\big((n-1)T\big)\big] \qquad \text{(d3)}$$

Considerando un periodo de muestreo T, a partir de la señales $y_c(t)$ y $y_c{}'(t)$ es posible obtener sus versiones discretas, las secuencias

$$y[n] = y_c(nT) \quad y \quad y'[n] = y_c{}'(nT)$$

Considerando las 2 ec. anteriores, la ec. (d3) se puede reescribir como:

$$y[n] - y[n-1] = \frac{T}{2}(y'[n] + y'[n-1])$$

Aplicando la T. Z a ambos lados de la ec. anterior se tiene que:

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = \frac{T}{2}[Y'(z) + z^{-1}Y'(z)]$$

O bien

$$Y(z)[1 - z^{-1}] = \frac{T}{2}Y'(z)[1 + z^{-1}]$$

Es decir

$$Y(z)[z - 1] = \frac{T}{2}Y'(z)[z + 1]$$

De la ecuación anterior se tiene que:

$$Y'(z) = \frac{2}{T}\frac{z - 1}{z + 1}Y(z) \qquad \text{(d4)}$$

La ecuación anterior aproxima en tiempo discreto y en el dominio de la transformada Z, a la operación derivada del tiempo continuo que es representada en el domino de Laplace mediante la ecuación:

$$Y_c{}'(s) = sY_c(s)$$

Nótese que para $y''[n]$, la secuencia de muestras de $y_c{}''(t)$, aplicando nuevamente la ecuación (d4) se tiene que:

$$\mathcal{Z}\{y''[n]\} = Y''(z) = \frac{2}{T}\frac{z - 1}{z + 1}Y'(z)$$

$$= \frac{2}{T}\frac{z - 1}{z + 1}\left(\frac{2}{T}\frac{z - 1}{z + 1}Y(z)\right) = \left(\frac{2}{T}\frac{z - 1}{z + 1}\right)^2 Y(z)$$

Y para $y^{(k)}[n]$, la secuencia de muestras de $y_c{}^{(k)}(t) = \frac{d^k y_c(t)}{dt^k}$, aplicando sucesivamente la ecuación (d4) se puede demostrar que:

$$\mathcal{Z}\{y^{(k)}[n]\} = Y^{(k)}(z) = \left(\frac{2}{T}\frac{z - 1}{z + 1}\right)^k Y(z) \qquad \text{(d5)}$$

Discretización de sistemas LTI mediante la Transformada Bilineal

Un sistema LTI continuo se puede representar mediante una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes de orden N junto con condiciones iniciales nulas ($\mathrm{CI}=0$), que en notación de Lagrange se puede escribir como:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k {y_c}^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k {x_c}^{(k)}(t) \qquad \text{(d6)}$$

Usando integración numérica trapezoidal como aproximación discreta de la derivada, a continuación se procede a obtener la función de transferencia $H(z)$ del sistema LTI discreto, que aproxima al sistema LTI continuo definido por la ecuación diferencial (d6).

Discretización es el proceso de representar funciones, modelos, variables y ecuaciones continuas mediante contrapartes discretas.

Muestreando las señales en la ecuación (d6) con un periodo de muestreo T, se obtiene:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k {y_c}^{(k)}(nT) = \sum_{k=0}^{M} b_k {x_c}^{(k)}(nT)$$

Considerando la notación $f[n] = f_c(nT)$, la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{(k)}[n]$$

Aplicando la T. Z a ambos lados de la ec, anterior se tiene que:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k Y^{(k)}(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k X^{(k)}(z)$$

Utilizando la ecuación (d5), de la ecuación anterior se tiene que:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right)^k Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k \left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right)^k X(z)$$

Entonces, de la ecuación anterior se tiene que:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k \left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right)^k} \qquad \text{(d7)}$$

Por otro lado, utilizando la transformada de Laplace y sus propiedades, de la ecuación (d6) se tiene que:

$$H_c(s) = \frac{Y_c(s)}{X_c(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

Al comparar la ecuación anterior con la ecuación (d7) se tiene que:

$$H(z) = H_c(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} \qquad \text{(d8)}$$

En la expresión anterior, a la ecuación:

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \qquad \text{(d9)}$$

Se le conoce como la <u>Transformada bilineal</u> entre los planos **s** y **z**.

Si se aproxima la derivada de una señal $x_c(t)$ mediante la primera diferencia hacia atrás de su secuencia de muestras $x[n]$, es posible obtener otra discretización de la operación derivada dada por la ec:

$$s = \frac{z-1}{Tz}$$

que se conoce como la <u>T. salto hacia atrás</u> entre los planos **s** y **z**.