数分（中）课堂笔记

TheUnknownThing

2025 年 3 月 5 日

1 多元函数的性质

1.1 $\mathbb{R}^n$ 的度量

有内积，就可以诱导（induce）出范数（norm）。通过内积诱导出范数可以这样做：

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

有范数，就可以诱导出度量（距离）。度量需要满足的性质是如下三条：

1. $d(x,y) \geq 0$; 且 $d(x,y) = 0$ iff $x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

但是并不一定需要有“范数”，只需要空间有度量即可。

Def (metric space)

设 X 为一集合，$d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.
称 (X,d) 为一度量空间, 若 d 满足:

(i) $\forall x, y \in X$, $d(x,y) \geq 0$; 且 $d(x,y) = 0$ iff $x = y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ $\forall x, y \in X$

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ $\forall x, y, z \in X$

有度量，就有邻域。

Def (邻域)

设 (X,d) metric space.
对 $a \in X$, $r > 0$, 称

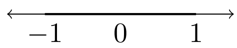
$$B_r(a) := \{x \in X \mid d(a,x) < r\} \quad (B(a,r))$$

为以 a 为中心, 以 r 为半径的开球, 或称为 a 的 r 邻域.

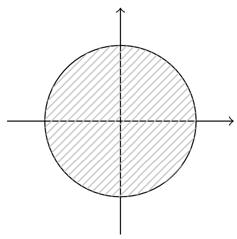
邻域长成什么样，跟度量有关系，图示两个例子给出不同度量下定义的邻域。

Example. $\mathbb{R}^n$, $B_1(0)$.

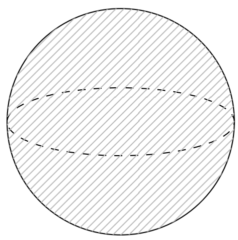
- $n=1$: $(-1,1)$



- $n=2$:



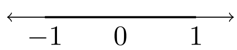
- $n=3$:



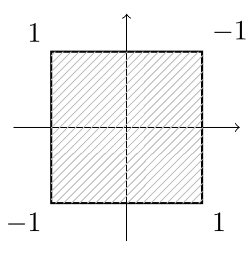
$(\mathbb{R}^n, d_\infty), d_\infty(x,y) = \max\limits_{1\le i\le n} |x^i - y^i|$

同样，我们考虑不同维数情况下 $B_1(0)$

- $n=1$: $(-1,1)$



- $n=2$:



- $n=3$: 一个边长为 1 的立方体。

$\diamond$

类似的，我们定义了度量，就可以定义极限。

Def

设 (X,d) metric space.

设 $\{x_k\} \subset X$, $a \in X$, 定义

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists K, \forall k > K : d(x_k, a) < \varepsilon$$

我们考虑 $\mathbb{R}^n$ 下，使用欧式度量定义的极限。那么我们可以思考：一个“点列”收敛到一个点，其分量是否收敛？不难想象，这个命题其实是平凡的。

Theorem

设 $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$.

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \iff \forall\, 1 \le j \le n, \lim_{k\to\infty} x_k^j = a^j$$

Proof.

$$|x_k^j - a^j| \le \|x_k - a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_k^i - a^i)^2} \le \sum_{i=1}^n |x_k^i - a^i|$$

□

也即，对 $\mathbb{R}^n$ 而言，点列收敛，等价于点列中每个分量作为数列收敛。那么刚才我们考虑了有限维，对于无限维呢？

Remark. $\ell^2(\mathbb{R}) := \{(x^1, x^2, \dots) \mid \sqrt{\sum_{i=1}^\infty (x^i)^2} < +\infty\}$，设 $\{x_k\} \subset \ell^2(\mathbb{R}), \forall j \in \mathbb{N}, \lim_{k\to\infty} x_k^j = a^j$

Question:

$$\lim_{k\to\infty} x_k \overset{?}{=} a$$

♢

Answer. 答案是否定的，反例：$x_i = (0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots)$. □

由于“点列收敛，等价于点列中每个分量作为数列收敛”，$\mathbb{R}$ 中数列极限的一些性质可以直接搬到 $\mathbb{R}^n$。

性质	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^n$
唯一性	✓	✓
有界性	✓	✓
保号性	✓	×
夹逼性	✓	×

定义 $\{x_k\}$ 有界: $\exists M>0, \forall k\in\mathbb{N}, \|x_k\|<M$.

1.2 $\mathbb{R}^n$ 的拓扑（开，闭）

目标：类比 (a,b) 开区间, $[a,b]$ 闭区间的高维情形.

(a,b): $\forall x\in(a,b)$, $\exists\delta>0$: $(x-\delta,x+\delta)\subset(a,b)$

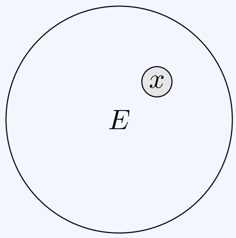
$[a,b]$: 对取极限封闭。(设 $\{x_k\}\subset[a,b]$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\xi$, 则 $\xi\in[a,b]$)

Def (点与集合的关系)

设 $E\subset\mathbb{R}^n$

1. 称 $x\in\mathbb{R}^n$ 为 E 的内点, 若 $\exists\delta>0$ s.t. $B_\delta(x)\subset E$ (interior point)

   记 E 的所有内点构成的集合为 E° (也记为 $\mathrm{int}(E)$)

2. 称 $x\in\mathbb{R}^n$ 为 E 的外点, 若 $\exists\delta>0$ s.t. $B_\delta(x)\cap E=\emptyset$ (即 x 是 E^c 的内点)

   记 E 的所有外点构成的集合为 $\mathrm{ext}(E)$ (即 $(E^c)^\circ$)

3. 称 x 为 E 的边界点, 若

$$\forall\delta>0,\quad B_\delta(x)\cap E\neq\emptyset\neq B_\delta(x)\cap E^c$$

   记 E 的所有边界点构成的集合为 ∂E。

$$\mathbb{R}^n=E^\circ\cup(E^c)^\circ\cup\partial E\quad(\text{无交并})$$

4. 称 x 为 E 的聚点 (accumulation point) (也称为极限点 (limiting point)), 若

$$\forall\delta>0:\#(B_\delta(x)\cap E)=\infty$$

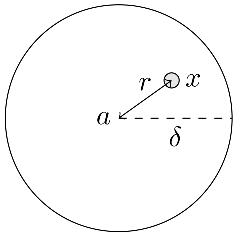
   记 E 的所有聚点构成的集合为 E'。

5. 称 x 为 E 的孤立点 (isolated point) , 若

$$\exists\delta>0,\text{s.t. } B_\delta(x)\cap E=\{x\}$$

Example.

1. $\mathbb{R}^n$, $E=B_\delta(a)$ $(\delta>0)$



Claim: $E^\circ = E$

证明. 设 $x \in B_\delta(a)$. 令 $r = \|a - x\|$, 则 $0 < r < \delta$.

取 $\rho = \dfrac{1}{4}\min\{r, \delta - r\} > 0$. 考虑 $B_\rho(x)$.

$y \in B_\rho(x) \implies \|x - y\| < \rho$

$\|y - a\| \le \|y - x\| + \|x - a\| < \rho + r \le \dfrac{\delta - r}{4} + r = \dfrac{\delta + 3r}{4} < \dfrac{\delta + 3\delta}{4} = \delta.$

因此, $y \in B_\delta(a)$. 所以 $B_\rho(x) \subset B_\delta(a) = E$. 因此 $x \in E^\circ$. 所以 $E \subset E^\circ$.

又因为 $E^\circ \subset E$ (根据定义), 所以 $E^\circ = E$. □

$\mathrm{ext}(E) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| > \delta\}$

$\partial E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| = \delta\}$

$E' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \le \delta\}$

2. $E = \mathbb{Q}^n$

   $E^\circ = \emptyset$

   $(E^c)^\circ = \emptyset$

   $E' = \mathbb{R}^n$

♢

Def ($\mathbb{R}^n$ 的拓扑：开集与闭集)

1. 称 G 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 若 $\forall x \in G$, x 是 G 的内点 (即 $G = G^\circ$)
2. 称 F 为 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集, 若 $\forall x \in F'$, $x \in F$ (即 $F \supset F'$)
3. 称 $\overline{E} := E \cup E'$ 为 E 的闭包 (closure)

Remark. 空集 $\emptyset$ 既是开集也是闭集。 ♢

思考题：证明

1. E° 是 E 中的最大开集 (即若 G 开且 $G \subset E$, 则 $G \subset E^\circ$)
2. $\overline{E}$ 是包含 E 的最小闭集 (即若 F 闭且 $F \supset E$, 则 $F \supset \overline{E}$)

3. 对 $\mathbb{R}^n$,

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) < r\}$$

$$\overline{B_r(a)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) \leq r\}$$

Q: 设 (X,d) metric space. 是否仍有

$$\overline{\{x \in X \mid d(x,a) < r\}} \stackrel{?}{=} \{x \in X \mid d(x,a) \leq r\}$$

Theorem

F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集 $\iff$ F^c 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集.

Proof. ($\Longrightarrow$) 设 $x \in F^c$, $x \notin F$, 因 F 闭, x 非 F 的聚点。

即 $\exists \delta > 0$ s.t. $B_\delta(x) \cap F = \emptyset$. 即 $B_\delta(x) \subset F^c$。

($\Longleftarrow$) 设 $x \in F'$, 反证, 若 $x \notin F$, 则 $x \in F^c$。

因 F^c 开, $\exists \delta > 0$: $B_\delta(x) \subset F^c$, 与 x 是 F 的聚点矛盾。(因为如果 x 是 F 的聚点，那么所有以 x 为中心的开球都应该与 F 有非空交集。但是，由于 F^c 是开集，我们找到了一个以 x 为中心的开球，它完全位于 F^c 中，与 F 没有任何交集。) □

Theorem

$\mathbb{R}^n$ 中的开、闭集具有以下性质:

(i) 任意个开集的并仍是开集.

(设 $\{G_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ 是一族开集, 则 $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ 是开集.)

(ii) 有限个开集的交仍是开集.

(iii) 任意个闭集的交仍是闭集.

(iv) 有限个闭集的并仍是闭集.

Proof. (i) 设 $x \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$, 则 $\exists \alpha_* \in \Lambda$,s.t.$x \in G_*$.

因 G_* 开, $\exists \delta > 0$,s.t.$B_\delta(x) \subset G_* \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$.

(ii) 设 $x \in \bigcap_{i=1}^{l} G_i$,

$\forall i = 1, \ldots, l$, $x \in G_i$. 因 G_i 开, $\exists \delta_i > 0$,s.t.$B_{\delta_i}(x) \subset G_i$.

取 $\delta := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_l\} > 0$, 有 $B_\delta(x) \subset G_i$, $(\forall i)$,

$\Rightarrow B_\delta(x) \subset \bigcap_{i=1}^{l} G_i$.

(iii) $\{F_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ 一族闭集.

则

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha \text{ 闭} \iff \left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha\right)^c \text{ 开 (de Morgan)} \iff \bigcup_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha^c \text{ 开}$$

□

Def (拓扑)

设 X 为一集合, $\tau = 2^X$, 称 (X, τ) 为一拓扑空间, 若 τ 满足:

(i) $\emptyset, X \in \tau$

(ii) 设 $G_\alpha \in \tau$ $(\forall \alpha \in \Lambda)$, 则 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha \in \tau$

(iii) 设 $G_1, G_2, \ldots, G_l \in \tau$, 则 $\bigcap\limits_{i=1}^{l} G_i \in \tau$.

将 τ 中的元素称为 X 中的开集.

设 $x \in X$, $\exists \tau \ni G \ni x$, 则称 G 是 x 的一个邻域.

Remark. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = A \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists K, \forall k > K$:

$$d(x_k, A) < \varepsilon$$

$$x_k \in B_\varepsilon(A)$$

在拓扑空间中 (X, τ)

$$\lim_{k\to\infty} x_k = A \overset{def}{\iff} \forall G \in \tau \ \ \& \ \ G \ni A \quad \exists K, \forall k > K : x_k \in G$$

$(X, d_X) \xrightarrow{f} (Y, d_Y)$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

◇

1.3 $\mathbb{R}^n$ 的基本定理

我们要考虑 $\mathbb{R}^n$ 的基本定理之前，我们先来看看我们 $\mathbb{R}$ 中基本定理是如何推导的。

$\mathbb{R}$ 的构造 $\Longrightarrow$ 确界存在 $\Longrightarrow$ 单调有界必收敛 $\Longrightarrow$ Bolzano-Weierstrass 定理

$\Downarrow$

闭区间套 $\Leftarrow$ Cauchy 收敛原理

当然上述的推导的路径只是其中的一条，你可以直接通过 B-W 推出闭区间套，也可以通过闭区间套推单调有界必收敛……但这个我们现在并不关心，我们关心的是，我们能不能把这个推导路径推广到 $\mathbb{R}^n$ 中。

但是和 $\mathbb{R}$ 中不同的是，$\mathbb{R}^n$ 无序结构。所以说“单调”就没有了，但是“有界”之类的还是存在的，所以说你可以期待 B-W，Cauchy 收敛原理，闭区间套这三个定理在 $\mathbb{R}^n$ 中的推广。

Bolzano-Weierstrass

$\mathbb{R}^n$ 中有界点列 $\{x_k\}$ 必有收敛子列.

Proof. 已知 $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ 中收敛 $\iff \forall j \in \{1, \dots, n\}, \{x_k^{(j)}\}$ (x_k 的第 j 个分量作为数列) 收敛

设 $\{x_k\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中有界点列.

则 $\{x_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$ 为有界数列, $j = 1, \dots, n$.

令 $j = 1, 2, \dots, n$, 利用 $\mathbb{R}$ 的 B-W 定理

依次取子列即可可得 $\{x_{k_l}\}$ 收敛子列. □

Cauchy

$\{x_k\}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中收敛 $\iff$ $\{x_k\}$ 是 Cauchy 列.

Proof.($\Longrightarrow$) 显然

$$\|x_k - x_l\| \le \|x_k - A\| + \|A - x_l\|$$

($\Longleftarrow$) 有两种方法:

1. 依照 $\mathbb{R}^n$ 的情形, 由 B-W 推出
2. $\{x_n\}$ Cauchy $\Longrightarrow$ $\{x_k^{(j)}\}$ Cauchy, $j = 1, \dots, n$

   $\{x_k^{(j)}\}$ 收敛, $j = 1, \dots, n$

□

Cantor 闭集套

设 $\{F_k, k \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一列非空闭集, 满足

(i) $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{diam}(F_k) = 0$

其中 $\operatorname{diam}(E) := \sup\limits_{x,y\in E} d(x, y)$.

则 $\exists!\ \xi \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$.

Proof. $\forall k \in \mathbb{N}_+$, 取 $x_k \in F_k$.

由闭集套的性质 (i), 有

$$\{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots\} \subset F_k \ (\forall k \in \mathbb{N}_+)$$

由性质 (ii), $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为一个 Cauchy 列, 则 $\exists\, \xi \in \mathbb{R}^n$,s.t. $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi\ (\forall k)$.

若 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 仅有有限个不同的点, 显然成立。

否则 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 中有无限个相同的点 ξ, 则 ξ 是 F_k 的聚点 $(\forall k)$, F_k 闭, 有 $\xi \in F_k\ (\forall k)$.

故 $\xi \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$. 唯一性显然. □

Remark. 思考：如何从闭集套推出 *B-W*？

一维情况下使用二分区间的方式证明，多维情况下如何证明？提示：二维四分，三维八分，n 维 2^n 分区间。维数有限非常重要。 ♢

接下来我们介绍 $\mathbb{R}^n$ 中有界闭集的一个等价刻画。

开覆盖

设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 若一族开集 $\{G_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ 满足

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha \supset E,$$

则称 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 E 的一个开覆盖.

紧集

称 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集 (Compact Set), 若 K 的任何一个开覆盖, 均存在有限子覆盖.

「也即：若 $\{G_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ 为 K 的一个开覆盖, 则一定存在 $G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_N}$,s.t. $\bigcup_{i=1}^{N} G_{\alpha_i} \supset K$.」

Heine-Borel 定理

$\mathbb{R}^n$ 中

$$K \text{ 紧} \iff K \text{ 有界闭集}$$

Proof.($\Longrightarrow$) 设 K 是紧集.

1. 证明 K 有界: 考虑开球族 $\{B(0,n) : n \in \mathbb{N}\}$, 显然 $\bigcup_{n=1}^{\infty} B(0,n) = \mathbb{R}^n \supset K$. 由于 K 是紧集, 存在有限子覆盖, 即存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $K \subset B(0,N)$. 因此, K 是有界的.
2. 证明 K 是闭集: 只需证明 K^c 是开集. 任取 $x \in K^c$, 对任意 $y \in K$, 由于 $x \neq y$, 存在开球 $U_y = B(y, r_y)$ 和 $V_y = B(x, r_y)$ 使得 $r_y = \frac{1}{2}|x-y|$ 且 $U_y \cap V_y = \emptyset$. 显然 $\{U_y : y \in K\}$ 构成 K 的一个开覆盖. 由于 K 是紧的, 存在有限子覆盖, 即存在 $y_1, \ldots, y_m \in K$, 使得 $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{y_i}$. 令 $V = \bigcap_{i=1}^{m} V_{y_i}$, 则 V 是 x 的一个开邻域, 且 $V \cap K = \emptyset$. 因此, $V \subset K^c$, 这表明 K^c 是开集, 从而 K 是闭集.

$(\Longleftarrow)$ 反证法。考虑 $n=2$ 的情形。

设 $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 为 K 的一个开覆盖, 但其不存在任何有限开子集可覆盖 K.

将 I 四等分, 则其中必有一块 (记为 I_1) 与 K 的交 $\{G_\alpha\}$ 有限覆盖.

再将 I_1 四等分, 则其中必有一块 (记为 I_2) 与 K 的交 $\{G_\alpha\}$ 有限覆盖.

继续可得一列闭矩形 $I_k, k = 1, 2, \ldots$

1. $\forall k$, $I_k \cap K$ 不能被 $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 的有限个覆盖.
2. $\lim\limits_{k \to \infty} \operatorname{diam}(I_k \cap K) = 0$.

由 Cantor 区间套定理知:

$$\exists! \xi \in \bigcap_{k=1}^{\infty} (I_k \cap K)$$

$$\xi \in K \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha \Rightarrow \exists G_*, \text{s.t.} \xi \in G_*$$

G_* 开 $\Rightarrow \exists \delta > 0, \text{s.t.} B_\delta(\xi) \subset G_*$.

由于 $\xi \in I_k \cap K (\forall k)$

$\lim\limits_{k \to \infty} \operatorname{diam}(I_k \cap K)$, 当 k 充分大时, 有 $I_k \cap K \subset B_\delta(\xi)$.

与 $I_k \cap K$ 不能被 $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 有限个覆盖矛盾.

□

设 $K \subset \mathbb{R}^n$, 则以下三个命题等价:
(1) K 有界闭.
(2) K 紧.
(3) K 中任何序列均有收敛子列, 且其极限 $\in K$. (自列紧)

Proof. (1) $\Longleftrightarrow$ (2) 已证.

(1) $\Longrightarrow$ (3) 显然. (B-W)

(3) $\Longrightarrow$ (1) 反证法. K 闭是显然的，因为要求聚点都在 K 中。

下面反证 K 有界. 设 K 无界, 则存在 $\{x_k\} \subset K$ 满足 $\|x_k\| > k$, 但 $\{x_k\}$ 不可能有收敛子列. $\square$

1.4 多元连续映射

多元连续映射

称 $f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$x \longmapsto f(x)$$

为 n 元 m 维向量值函数.

D 称为 f 的定义域.

$f(D) := \{f(x) \mid x \in D\}$ 称为 f 的像集.

$\mathrm{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$ 称为 f 的图像.

多元函数极限

设 $D \subset \mathbb{R}^n$, x_0 是 D 的一个聚点. $f: D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^m$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in B_\delta(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\}):$$

$$\|f(x) - A\| < \varepsilon$$

Remark. 极限存在意味着: 自变量无论以什么样趋近于 x_0 时, 对应的函数值均趋于 A.

所以, 若 x 沿某条曲线趋近于 x_0 时, 极限不存在, 或 x 沿某两条曲线趋近于 x_0 时, 得到不同的极限, 则 f 在 x_0 处极限不存在. $\diamondsuit$

E.g.

(1) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$.

(2) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$.

(1) 探讨 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 存在与否? 我们沿着 $y = kx$ 趋近于 $(0,0)$.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y=0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0.$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y=kx}} \frac{xkx}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$ 极限不存在.

(2) $k \neq 0$, 类似的, 我们沿着 $y = kx$ 趋近于 $(0,0)$. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y=kx}} \dfrac{x^2kx}{x^4+k^2x^2} = 0$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

与一元函数极限一样，多元函数极限同样拥有唯一性、局部有界性、夹逼性、局部保序性等性质，也同样可以进行四则运算。

也可引入另一种极限概念: 设 f 在 D 上有定义, 若 $\forall y \neq y_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = \varphi(y)$ 存在, 则可考虑 $\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y) = \lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$. （比如你可以先固定 x，然后让 y 趋近于 y_0，然后再让 x 趋近于 x_0）称为 f 在 (x_0, y_0) 处先 x 后 y 的累次极限.

Prop

设 f 在 (x_0, y_0) 的一个空心邻域上有定义,

设 $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = A$ 且 $\forall y \neq y_0$, 有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = \varphi(y)$ 存在,

则

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = A.$$

讨论完了极限，我们可以继续讨论连续性。

连续性

(1) 设 $f : D \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D$, 称 f 在 x_0 处连续, 若

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D :\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(2) 若 $\forall x \in D$, f 在 x 处连续, 则称 $f \in C(D, \mathbb{R}^m)$.

如果将定义拓展到度量空间上：设 (X, d_X), (Y, d_Y) 为两个度量空间, $f : X \to Y$.

设 $x_0 \in X$, 称 f 在 x_0 处连续, 若

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X, d_X(x, x_0) < \delta :\ d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Remark. 若 x_0 为 D 的孤立点, 则天然地 f 在 x 处连续; 若 x_0 是 D 的聚点, 则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. ♢

Prop

设 $D \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{R}^m$,

则 f 在 x_0 处连续 $\iff$ $f^i : D \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, m)$ 在 x_0 处连续.

思考题

$f \in C((X, d_X), (Y, d_Y)) \iff \forall$ Y 中的开集 V, 有 $f^{-1}(V)$ 在 X 中是开集. ($f^{-1}(V) = \{x \in X | f(x) \in V\}$)

同样，和一元函数一样，多元函数连续性也有四则运算，复合运算等性质。(设 $g: D \to \mathbb{R}^k$, $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$, 且 $g(D) \subset \Omega$. 设 g 在 x_0 处连续, f 在 $g(x_0)$ 处连续, 则 $f \circ g$ 在 x_0 处连续.)

1.5 连续映射的整体性质

我们这章节需要证明两个东西：

> 设 $k \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C(k, \mathbb{R}^m)$, 则 $f($ 紧集 $) =$ 紧, $f($ 连通 $) =$ 连通.

运用这个“高维”的视角再来看一元函数我们证明的结论，我们发现一元情形下是这个的特例。一元时：$[a,b]$ 紧，$f([a,b])$ 有界，有最值（相当于就在说 $f([a,b])$ 紧）；$[a,b]$ 连续，$f([a,b])$ 有介值定理（相当于就在说 $f([a,b])$ 连通）。

> 设 $k \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C(k, \mathbb{R}^m)$, 则 $f(k)$ 紧.

我们使用两种方法来证明。两种方法分别对应紧集的两个性质：自列紧和有限开覆盖。

Proof. 1. 设 $\{y_k\} \subset f(k)$

则 $\exists x_k \in K$,s.t.$f(x_k) = y_k$ $(\forall k)$

$\{x_k\} \subset K$, K 列紧 $\implies$ $\exists$ 子列 $\{x_{k_l}\} \to \xi \in K$

$f(k) \xleftarrow{f\text{ 在}\xi\text{ 处连续}} f(x_{k_l}) = y_{k_l}$

2. 设 $\{G_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ 为 $f(k)$ 的一个开覆盖.

由 f 的连续性, $f^{-1}(G_\alpha)$ 在 k 中开 $(\forall \alpha \in \Lambda)$

$(f^{-1}($ 开 $) =$ 开$)$ 且 $f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f^{-1}(G_\alpha) \supset K$

k 紧 $\implies$ $f^{-1}(G_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(G_{\alpha_l}) \supset K \implies G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_l} \supset f(k)$

$\square$

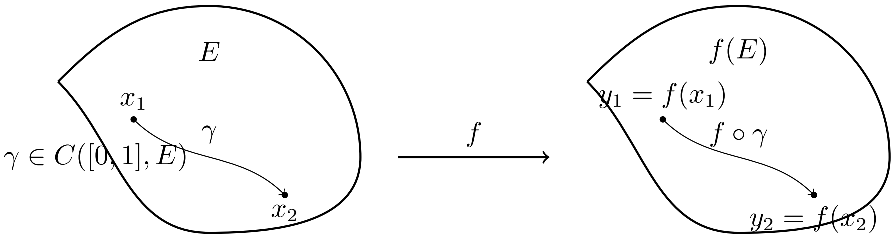
> **Cantor**
>
> 设 $f \in C(k, \mathbb{R}^m)$, $k \subset \mathbb{R}^n$ 紧, 则 f 在 k 上一致连续.
>
> 即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x_1, x_2 \in k$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$:
>
> $$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

> **连通**
>
> (1) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 设 $\gamma \in C([0,1], \mathbb{R}^n)$ 且 $\gamma([0,1]) \subset E$, 则称 γ 是 E 中从 $\gamma(0)$ 起至 $\gamma(1)$ 终的一条道路.
>
> (2) 称 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为 (道路) 连通集, 若 $\forall a, b \in E$, 存在 E 中一条道路以 a, b 为起止点.

Remark. $\mathbb{R}$ 中的道路连通集是区间. ◇

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 连通, $f \in C(E, \mathbb{R}^m)$, 则 $f(E)$ 连通.

证明.



$$f \circ \gamma \in C([0,1], \mathbb{R}^n)$$

$$f \circ \gamma([0,1]) \subset f(E)$$

$f \circ \gamma$ 是连接 y_1, y_2 的一条道路. □

2 多元函数的微分学

2.1 偏导数与微分

偏导数

设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 开, $f : D \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in D$, 称

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

为 f 在 (x_0, y_0) 处关于 x 的偏导数，也可记为 f_x.

$\forall (x, y) \in D$, f 在 (x, y) 处关于 x 的偏导数存在, 则

$$\frac{\partial f}{\partial x} : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}$$

称为 f 关于 x 的偏导函数.

Remark. (1) $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 可类似定义

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

(2) $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(X_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0^1, \cdots, x_0^{i-1}, x_0^i + h, x_0^{i+1}, \cdots, x_0^n) - f(X_0)}{h}$$

$\diamondsuit$

高阶偏导

设 $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 关于 x^i 可求偏导, 且 $\dfrac{\partial f}{\partial x^i} : D \to \mathbb{R}$ 关于 x^j 可继续求偏导, 称其关于 x^j 的偏导数为 f 关于 x^i, x^j 的二阶偏导, 记为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)$$

或

$$f_{x^i x^j} = (f_{x^i})_{x^j}$$

Example. $f(\vec{x}) = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n = \left(\sum_{k=1}^n (x^k - x_0^k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^n (x^k - x_0^k)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(x^i - x_0^i) = \frac{x^i - x_0^i}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right) = \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|}$$

$\diamondsuit$

Remark. $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\nabla f(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)(x)$$

称为 f 的梯度, $\mathrm{grad} f$. $\diamondsuit$

然而，偏导数存在并不意味着函数连续，比如 $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ 在 $(0, 0)$ 处的偏导数存在，但 f 在 $(0, 0)$ 处极限不存在。我们需要一个更强的性质来保证函数的连续性。

偏导数有界 $\Rightarrow$ 连续

设 f 在 (x_0, y_0) 的某个邻域内关于 x, y 偏导数均存在且有界, 则 f 在 (x_0, y_0) 处连续.

Proof.

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x, y) - f(x_0, y)| + |f(x_0, y) - f(x_0, y_0)|$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{A}{=} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1, y)\right| |x - x_0| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \xi_2)\right| |y - y_0| \\
&\le M\left(|x - x_0| + |y - y_0|\right)
\end{aligned}
$$

A: 一元函数微分中值定理. $\xi_1 \in (x_0, x)$, $\xi_2 \in (y_0, y)$. □

Remark. 这是一个充分条件，(而且是很强的一个，相当于是一个局部的 *Lipschitz* 条件) 但不是必要条件，比如 $\sqrt{x}$ 在 $x = 0$ 处的导数不存在，但是在 $x = 0$ 处连续。 ♢

方向导数

设 $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^n$, 定义 f 在 x_0 处沿 $\boldsymbol{V}$ 的方向导数为 (沿 $\boldsymbol{V}$ 正方向逼近)

$$
D_{\boldsymbol{V}} f(x_0) := \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t\boldsymbol{V}) - f(x_0)}{t}
$$

Remark. $\boldsymbol{V} = e_i = (0, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \cdots, 0)$ $D_{e_i} f(x_0) = -D_{-e_i}(x_0) \Rightarrow D_{e_i} f(x_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$. ♢

Example. $f = \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$
D_V f(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\|x + tV\| - \|x\|}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0} \|x + tV\|
$$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0} \left(\sum_{i=1}^{n} (x^i + tv^i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} (x^i + tv^i)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \sum_{i=1}^{n} (x^i + tv^i) v^i |_{t=0} = \frac{x \cdot V}{\|x\|} = \nabla f(x) \cdot V
$$

♢