

数值代数实验报告 6

Chase Young

2023 年 12 月 12 日

1 上机习题 1

1.1 问题描述

此题要求多项式方程的模最大根。

(1) 用 C++ 编写利用幂法求多项式方程

$$f(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1x + \alpha_0 = 0$$

的模最大根的通用子程序。

(2) 利用你所编制的子程序求下列各高次方程的模最大根。

(i) $x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$;

(ii) $x^3 - 3x - 1 = 0$;

(iii) $x^8 + 101x^7 + 208.01x^6 + 10891.01x^5 + 9802.08x^4 + 79108.9x^3 - 99902x^2 + 790x - 1000 = 0$.

要求输出迭代次数，用时和最大根的值（注意正负）。

1.2 程序介绍

本题主要使用了幂法求矩阵 A 的模最大的特征值，即：

$$y_k = Au_{k-1}$$

$$\mu_k = \zeta_j^{(k)}$$

$$u_k = y_k / \mu_k$$

其中 $\zeta_j^{(k)}$ 是 y_k 的模最大分量， $u_0 \in \mathbb{C}^n$ 是任意给定的初始向量。

对于 (1) 中的多项式方程求模最大根的问题，可以转化为求如下矩阵的模最大特征值问题：

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_1 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

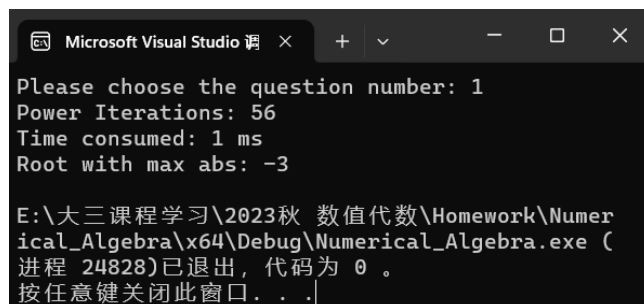
从而可以使用上述的幂法求解。

主要实现的函数有：

- `double powerIterationMaxEigenvalue(vector<vector<double>> A, vector<double> u)`
幂法求矩阵 A 的模最大的特征值，返回计算结果
- `double maxAbsRoot(vector<double> coef)`
使用幂法，计算并返回多项式方程的模最大的根

1.3 实验结果

对于 (2) 中的 3 个问题，运行结果分别如图 1、图 2、图 3 所示。



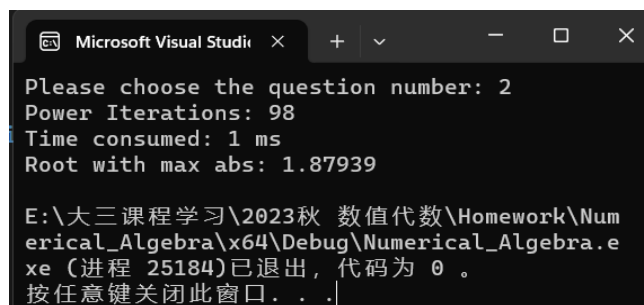
```

Microsoft Visual Studio 调 × + - □ ×
Please choose the question number: 1
Power Iterations: 56
Time consumed: 1 ms
Root with max abs: -3

E:\大三课程学习\2023秋 数值代数\Homework\Numerical_Algebra\x64\Debug\Numerical_Algebra.exe (进程 24828)已退出, 代码为 0。
按任意键关闭此窗口. . .|

```

图 1: 幂法求多项式方程 (i) 的模最大根



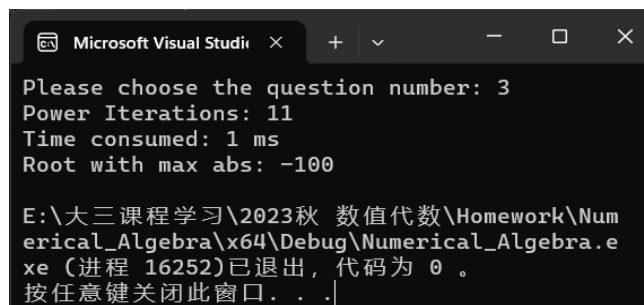
```

Microsoft Visual Studi × + - □ ×
Please choose the question number: 2
Power Iterations: 98
Time consumed: 1 ms
Root with max abs: 1.87939

E:\大三课程学习\2023秋 数值代数\Homework\Numerical_Algebra\x64\Debug\Numerical_Algebra.exe (进程 25184)已退出, 代码为 0。
按任意键关闭此窗口. . .|

```

图 2: 幂法求多项式方程 (ii) 的模最大根



```

Microsoft Visual Studi × + - □ ×
Please choose the question number: 3
Power Iterations: 11
Time consumed: 1 ms
Root with max abs: -100

E:\大三课程学习\2023秋 数值代数\Homework\Numerical_Algebra\x64\Debug\Numerical_Algebra.exe (进程 16252)已退出, 代码为 0。
按任意键关闭此窗口. . .|

```

图 3: 幂法求多项式方程 (iii) 的模最大根

将上述结果列表如下:

问题序号	迭代次数	计算用时 (ms)	模最大根
(i)	56	1	-3
(ii)	98	1	1.87939
(iii)	11	1	-100

表 1: 用幂法求解问题 (2) 中 3 个多项式方程模最大根的计算结果

1.4 结果分析

观察上述求解结果, 可以发现使用幂法求解模最大特征值的效率较高, 在上述 3 个例子中迭代次数均小于 100 次, 计算时间均为 1ms 左右。

2 上机习题 2

2.1 问题描述

此题要求实矩阵的全部特征值。

(1) 用 C++ 编制利用隐式 QR 算法 (课本算法 6.4.3) 求一个实矩阵的全部特征值的通用子程序。

(2) 利用你所编制的子程序计算方程

$$x^{41} + x^3 + 1 = 0$$

的全部根。

(3) 设

$$A = \begin{pmatrix} 9.1 & 3.0 & 2.6 & 4.0 \\ 4.2 & 5.3 & 4.7 & 1.6 \\ 3.2 & 1.7 & 9.4 & x \\ 6.1 & 4.9 & 3.5 & 6.2 \end{pmatrix}$$

求当 $x = 0.9, 1.0, 1.1$ 时 A 的全部特征值, 观察并在报告中叙述分析特征值实部、虚部和模长的变化情况。

要求输出迭代次数、用时和所有特征值, 复特征值用你认为合适的方式表示即可。

2.2 程序介绍

本题的目标是给定一个实方阵 A , 求出其所有特征值。使用隐式 QR 迭代求解的主要步骤如下:

Step 1. 使用 Householder 变换将原矩阵 A 约化为上 Hessenberg 矩阵, 对应于教材 P181 的算法 6.4.1

Step 2. 按照算法 6.4.3(3)(i) 的方式将次对角线上满足要求的元素置零

Step 3. 确定满足 (3)(ii) 中条件的最大非负整数 m 和最小非负整数 l

Step 4. 对 H_{22} 进行一步双重位移的 QR 迭代 (即算法 6.4.2), 并得到正交矩阵 P

Step 5. 更新 $H_{12} = H_{12}P$, $H_{23} = P^T H_{23}$

Step 6. 判断是否终止：若 $m = n$ ，则终止循环，否则回到 **Step 2**

上述过程完成后，即得到了矩阵 \mathbf{A} 的实 Schur 标准型，在其对角块中，大小为 1 的对角块对应 \mathbf{A} 的实特征值，大小为 2 的对角块对应 \mathbf{A} 的共轭复特征值。

具体而言，本题实现的函数有：

- `vector<vector<double>> eye(int n)`
生成一个 n 阶单位阵并返回
- `void mat_put_mat(vector<vector<double>>& A, vector<vector<double>> subMat, int i, int j)`
将矩阵 `subMat` 放入矩阵 \mathbf{A} 中，其中 `subMat[0][0]` 放在 `A[i][j]` 的位置
- `void upperHessenberg(vector<vector<double>>& A)`
矩阵 \mathbf{A} 的上 Hessenberg 化，对应于教材算法 6.4.1
- `void doubleShiftQR(vector<vector<double>>& H, vector<vector<double>>& P)`
Francis 双重步位移的 QR 迭代算法，对应于教材算法 6.4.2
- `vector<vector<double>> transpose(vector<vector<double>> A)`
返回矩阵 \mathbf{A} 的转置
- `bool isApproximable(vector<vector<double>> H)`
判断 Hessenberg 矩阵 \mathbf{H} 是否可约
- `bool isProposedUpTriMat(vector<vector<double>> H)`
判断 Hessenberg 矩阵 \mathbf{H} 是否是拟上三角阵
- `void find_m_l(vector<vector<double>> H, int& m, int& l)`
算法 6.4.3 的辅助函数，完成 (3)(ii) 的功能，即找到满足要求的最大的非负整数 m 和最小的非负整数 l
- `void implicitQR(vector<vector<double>>& A, double u)`
计算实矩阵 \mathbf{A} 的实 Schur 分解：隐式 QR 算法，对应于教材算法 6.4.3
- `void implicitQREigenvalue(vector<vector<double>> A, vector<double>& Re, vector<double>& Im)`
使用隐式 QR 迭代，计算矩阵 \mathbf{A} 的全部特征值

2.3 实验结果

对于 (2)，使用隐式 QR 迭代法计算得到的全部根如图 4 所示。其中迭代次数为 78 次，计算所需时间为 3171ms。

对于 (3)，分别取 $x = 0.9, 1.0, 1.1$ ，求出矩阵 A 的全部特征值，运行截图如如 5、图 6、图 7 所示。其中，3 种 x 不同取值时，迭代次数均为 4 次，运行时间均为 2ms。

```

Microsoft Visual Studio 调试
Please choose the question number: 1
Implicit QR Iterations: 70
Time consumed: 3171 ms
All roots:
1.0143 + 0.0809 i    1.0143 + -0.0809 i    0.9872 + 0.2404 i    0.9872 + -0.2404 i
0.9337 + 0.3925 i    0.9337 + -0.3925 i    0.8552 + 0.5326 i    0.8552 + -0.5326 i
0.7537 + 0.6554 i    0.7537 + -0.6554 i    0.6323 + 0.7534 i    0.6323 + -0.7534 i
0.5076 + 0.8106 i    0.5076 + -0.8106 i    0.4172 + 0.8711 i    0.4172 + -0.8711 i
0.2898 + 0.9464 i    0.2898 + -0.9464 i    0.1392 + 0.9925 i    0.1392 + -0.9925 i
-0.0197 + 1.0094 i    -0.0197 + -1.0094 i    -0.1802 + 0.9980 i    -0.1802 + -0.9980 i
-0.3370 + 0.9592 i    -0.3370 + -0.9592 i    -0.4853 + 0.8945 i    -0.4853 + -0.8945 i
-0.6207 + 0.8059 i    -0.6207 + -0.8059 i    -0.7391 + 0.6959 i    -0.7391 + -0.6959 i
-0.8369 + 0.5678 i    -0.8369 + -0.5678 i    -0.9105 + 0.4255 i    -0.9105 + -0.4255 i
-0.9563 + 0.2738 i    -0.9563 + -0.2738 i    -0.9681 + 0.1209 i    -0.9681 + -0.1209 i
-0.9525 + 0.0000 i
E:\大三课程学习\2023秋 数值代数\Homework\Numerical_Algebra\x64\Debug\Numerical_Algebra.exe (进程 21044)已退出，代码为 0
按任意键关闭此窗口. . .

```

图 4: 使用隐式 QR 迭代求出 (2) 中多项式方程的全部根

```

Microsoft Visual Studio
Please choose the question number: 2
Please input the value of x: 0.9
Implicit QR Iterations: 4
Time consumed: 2 ms
All eigenvalues:
17.4397 + 0.0000 i
2.8704 + 0.6429 i
2.8704 + -0.6429 i
6.8195 + 0.0000 i

E:\大三课程学习\2023秋 数值代数\Homework\Numerical_Algebra\x64\Debug\Numerical_Algebra.exe (进程 13452)已退出，代码为 0。
按任意键关闭此窗口. . .

```

图 5: (3) 中矩阵 A 的全部特征值， $x = 0.9$

将 (3) 的结果列表如下：

x 的取值	特征值 1	特征值 2	特征值 3	特征值 4	复特征值的模长
0.9	17.4397	$2.8704 + 0.6429i$	$2.8704 - 0.6429i$	6.8195	2.9415
1.0	17.4765	$2.8680 + 0.6887i$	$2.8680 - 0.6887i$	6.7875	2.9495
1.1	17.5130	$2.8655 + 0.7322i$	$2.8655 - 0.7322i$	6.7561	2.9576

表 2: 不同 x 取值对应的矩阵 A 的全部特征值

```
Microsoft Visual Studio x + - □ ×
Please choose the question number: 2
Please input the value of x: 1.0
Implicit QR Iterations: 4
Time consumed: 2 ms
All eigenvalues:
17.4765 + 0.0000 i
2.8680 + 0.6887 i
2.8680 + -0.6887 i
6.7875 + 0.0000 i

E:\大三课程学习\2023秋 数值代数\Homework\Num
erical_Algebra\x64\Debug\Numerical_Algebra.e
xe (进程 17844)已退出, 代码为 0 。
按任意键关闭此窗口. . .|
```

图 6: (3) 中矩阵 A 的全部特征值, $x = 1.0$

```
Microsoft Visual Studio x + - □ ×
Please choose the question number: 2
Please input the value of x: 1.1
Implicit QR Iterations: 4
Time consumed: 2 ms
All eigenvalues:
17.5130 + 0.0000 i
2.8655 + 0.7322 i
2.8655 + -0.7322 i
6.7561 + 0.0000 i

E:\大三课程学习\2023秋 数值代数\Homework\Num
erical_Algebra\x64\Debug\Numerical_Algebra.e
xe (进程 21752)已退出, 代码为 0 。
按任意键关闭此窗口. . .|
```

图 7: (3) 中矩阵 A 的全部特征值, $x = 1.1$

2.4 结果分析

观察表 2，可以发现 (3) 中随着 x 从 0.9 增大到 1.1，

- 矩阵 A 的实特征值 1 和共轭复特征值 2、3 的模长增大，实特征值 4 的模长减小
- 矩阵 A 的共轭复特征值 2 的实部减小，虚部增加