

# 数值代数实验报告 5

Chase Young

2023 年 11 月 30 日

## 1 上机习题 1

### 1.1 问题描述

考虑 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x, y), (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ u|_{\Gamma} = \varphi \end{cases}$$

其中  $\Gamma$  为正方形区域的边界。类似于模型问题，我们得到差分方程

$$\begin{cases} (1 + \frac{h^2}{4})u_{i,j} - \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}) = \frac{h^2}{4}f_{i,j}, i, j = 1, \dots, n-1 \\ u_{i,0} = \varphi_{i,0}, u_{i,n} = \varphi_{i,n}, i = 0, 1, \dots, n \\ u_{0,j} = \varphi_{0,j}, u_{n,j} = \varphi_{n,j}, j = 0, 1, \dots, n \end{cases}$$

按照自然顺序排列得到系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} S' & B & & & \\ B & S' & B & & \\ & B & S' & B & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & B & S' & B \\ & & & & B & S' \end{pmatrix}$$

其中  $B = -I/4$ ,  $I$  为  $n-1$  阶单位矩阵,  $S'$  是对角元均为  $1 + h^2/4$ , 次对角元均为  $-1/4$  的  $n-1$  阶对称三对角阵。对  $f(x, y) = \sin(xy)$ ,  $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $n = 20$ 。

用共轭梯度法求解差分方程, 要求输出迭代次数、求解所用时间和解向量, 迭代终止条件为  $\|x_{k+1} - x_k\|_{\infty} < 10^{-7}$ 。

### 1.2 程序介绍

本题主要用到了实用共轭梯度法, 即教材 P150 的算法 5.3.1. 具体实现为:

- void CGD(vector<vector<double>> &A, vector<double>& x, vector<double> b, double eps, int kmax);

其中  $A$  是系数矩阵,  $x$  是迭代初值,  $b$  是右端项,  $eps$  是停机条件,  $kmax$  是最大迭代次数; 求出的解存储在  $x$  中。

### 1.3 实验结果

运行截图如图 1 所示。

```
Microsoft Visual Studio 调试器
iteration: 55
Time consumed: 0.136seconds
solution:
0.8214 0.0484 0.0613 0.0852 0.1125 0.1436 0.1787 0.2178 0.2611 0.3085 0.3603 0.4163 0.4765 0.5409 0.6093
0.6817 0.7578 0.8372 0.9193 0.0404 0.0688 0.0973 0.1272 0.1591 0.1936 0.2311 0.2719 0.3160 0.3636 0.4147
0.4693 0.5274 0.5889 0.6536 0.7213 0.7916 0.8638 0.9371 0.0613 0.0973 0.1322 0.1673 0.2033 0.2411 0.2809
0.3232 0.3681 0.4158 0.4664 0.5199 0.5761 0.6350 0.6964 0.7599 0.8251 0.8912 0.9575 0.0852 0.1272 0.1673
0.2067 0.2464 0.2869 0.3288 0.3725 0.4182 0.4661 0.5163 0.5687 0.6233 0.6800 0.7385 0.7985 0.8594 0.9205
0.9811 0.1125 0.1591 0.2033 0.2464 0.2899 0.3319 0.3756 0.4205 0.4669 0.5150 0.5648 0.6165 0.6698 0.7246
0.7807 0.8377 0.8951 0.9522 1.0083 0.1036 0.1936 0.2411 0.2869 0.3319 0.3767 0.4219 0.4678 0.5148 0.5631
0.6127 0.6637 0.7159 0.7693 0.8235 0.8781 0.9327 0.9868 1.0394 0.1787 0.2311 0.2809 0.3288 0.3756 0.4219
0.4682 0.5150 0.5625 0.6109 0.6603 0.7108 0.7623 0.8145 0.8673 0.9202 0.9727 1.0244 1.0746 0.2178 0.2719
0.3232 0.3725 0.4205 0.4678 0.5150 0.5623 0.6102 0.6588 0.7081 0.7583 0.8092 0.8607 0.9124 0.9641 1.0153
1.0654 1.1139 0.2611 0.3160 0.3681 0.4182 0.4669 0.5148 0.5625 0.6102 0.6583 0.7070 0.7563 0.8063 0.8569
0.9080 0.9592 1.0102 1.0606 1.1099 1.1574 0.3085 0.3636 0.4158 0.4661 0.5150 0.5631 0.6109 0.6588 0.7070
0.7557 0.8051 0.8551 0.9057 0.9566 1.0077 1.0586 1.1088 1.1578 1.2051 0.3603 0.4147 0.4664 0.5163 0.5648
0.6127 0.6603 0.7081 0.7563 0.8051 0.8545 0.9047 0.9555 1.0067 1.0581 1.1093 1.1599 1.2094 1.2571 0.4163
0.4693 0.5199 0.5687 0.6165 0.6637 0.7108 0.7583 0.8063 0.8551 0.9047 0.9532 1.0064 1.0582 1.1103 1.1623
1.2139 1.2644 1.3134 0.4765 0.5274 0.5761 0.6233 0.6698 0.7159 0.7623 0.8092 0.8569 0.9057 0.9555 1.0064
1.0583 1.1109 1.1642 1.2176 1.2707 1.3230 1.3739 0.5409 0.5889 0.6350 0.6800 0.7246 0.7693 0.8145 0.8607
0.9080 0.9566 1.0067 1.0582 1.1109 1.1649 1.2196 1.2749 1.3302 1.3850 1.4385 0.6093 0.6536 0.6964 0.7385
0.7807 0.8235 0.8673 0.9124 0.9592 1.0077 1.0581 1.1103 1.1642 1.2196 1.2764 1.3341 1.3923 1.4502 1.5073
0.6817 0.7213 0.7599 0.7985 0.8377 0.8781 0.9202 0.9641 1.0102 1.0586 1.1093 1.1623 1.2176 1.2749 1.3341
1.3948 1.4564 1.5184 1.5800 0.7578 0.7916 0.8251 0.8594 0.8951 0.9327 0.9727 1.0153 1.0606 1.1088 1.1599
1.2139 1.2707 1.3302 1.3923 1.4564 1.5223 1.5893 1.6564 0.8372 0.8638 0.8912 0.9205 0.9522 0.9868 1.0244
1.0654 1.1099 1.1578 1.2094 1.2644 1.3239 1.3850 1.4502 1.5184 1.5893 1.6621 1.7362 0.9193 0.9371 0.9575
0.9811 1.0083 1.0394 1.0746 1.1139 1.1574 1.2051 1.2571 1.3134 1.3739 1.4385 1.5073 1.5800 1.6564 1.7362
1.8187
E:\大三课程学习\2023秋 数值代数\Homework\Numerical_Algebra\x64\Debug\Numerical_Algebra.exe (进程 11336) 已退出, 代码为 0
```

图 1: 第 1 题运行结果

其中迭代次数为 55 次，运行时间为 0.136s。

### 1.4 结果分析

为了评估上述求出的解的真实性，我们将其和用 MATLAB 求出的解进行对比 (见图 2)

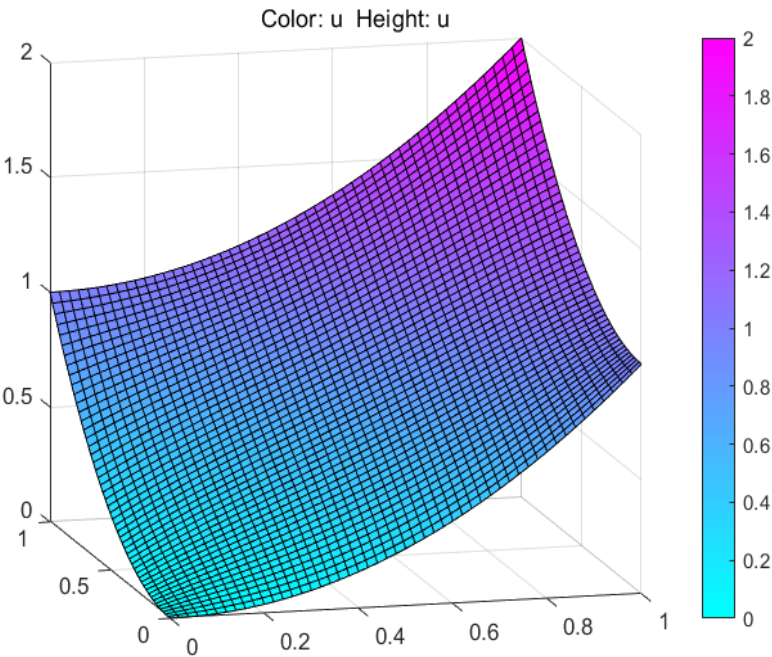


图 2: MATLAB 的求解结果

可以发现:

- 上述方法求出的解基本准确
- 由于网格数目较少，上述求出的解的细节不够充足

## 2 上机习题 2

### 2.1 问题描述

用 Hilbert 矩阵测试你所编写的共轭梯度法程序：

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j+1}, b_i = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n a_{ij}, 0 \leq i, j \leq n-1$$

对  $n = 20, 40, 60, 80$  分别求解，观察解是否准确，迭代停止条件自定，输出迭代次数、求解所用时间和解向量。

### 2.2 程序介绍

本题沿用第一题中的 CGD 函数。

### 2.3 实验结果

分别取  $n = 20, 40, 60, 80$ ，运行结果如图 3、4、5、6 所示。

```
Microsoft Visual Studio 调试 x + v
iteration: 7
Time consumed: 0.001seconds
solution:
0.3333 0.3336 0.3322 0.3340 0.3343 0.3337 0.3330 0.3326 0.3325 0.3327
0.3330 0.3334 0.3338 0.3340 0.3342 0.3341 0.3339 0.3334 0.3328 0.3320

E:\大三课程学习\2023秋 数值代数\Homework\Numerical_Algebra\x64\Debug\Numerical_Algebra.exe (进程 16268)已退出，代码为 0
。
按任意键关闭此窗口。 . . |
```

图 3:  $n = 20$  的运行结果

```
Microsoft Visual Studio 调试 x + v
iteration: 9
Time consumed: 0.001seconds
solution:
0.3334 0.3330 0.3345 0.3327 0.3324 0.3329 0.3335 0.3340 0.3341 0.3340
0.3338 0.3336 0.3333 0.3330 0.3328 0.3327 0.3327 0.3327 0.3327 0.3328
0.3330 0.3331 0.3332 0.3334 0.3336 0.3337 0.3339 0.3340 0.3340 0.3341
0.3340 0.3340 0.3339 0.3337 0.3336 0.3333 0.3331 0.3327 0.3324 0.3320

E:\大三课程学习\2023秋 数值代数\Homework\Numerical_Algebra\x64\Debug\Numerical_Algebra.exe (进程 27104)已退出，代码为 0
。
按任意键关闭此窗口。 . . |
```

图 4:  $n = 40$  的运行结果

```

Microsoft Visual Studio 调试
iteration: 9
Time consumed: 0.002seconds
solution:
0.3334 0.3325 0.3357 0.3331 0.3317 0.3318 0.3326 0.3334 0.3341 0.3345
0.3347 0.3346 0.3344 0.3341 0.3338 0.3334 0.3331 0.3328 0.3326 0.3324
0.3323 0.3322 0.3322 0.3322 0.3323 0.3323 0.3325 0.3326 0.3328 0.3330
0.3331 0.3333 0.3335 0.3337 0.3338 0.3340 0.3341 0.3342 0.3343 0.3344
0.3345 0.3345 0.3345 0.3345 0.3345 0.3344 0.3343 0.3342 0.3341 0.3339
0.3337 0.3335 0.3333 0.3330 0.3327 0.3324 0.3321 0.3317 0.3314 0.3310

E:\大三课程学习\2023秋 数值代数\Homework\Numerical_Algebra\x64\Debug\Numerical_Algebra.exe (进程 3764)已退出, 代码为 0。
按任意键关闭此窗口。 . . |

```

图 5:  $n = 60$  的运行结果

```

Microsoft Visual Studio 调试
iteration: 9
Time consumed: 0.002seconds
solution:
0.3335 0.3317 0.3369 0.3338 0.3315 0.3309 0.3315 0.3324 0.3334 0.3342
0.3348 0.3351 0.3352 0.3351 0.3349 0.3346 0.3342 0.3339 0.3335 0.3331
0.3328 0.3325 0.3323 0.3321 0.3319 0.3318 0.3318 0.3317 0.3318 0.3318
0.3319 0.3320 0.3321 0.3322 0.3324 0.3326 0.3327 0.3329 0.3331 0.3333
0.3335 0.3336 0.3338 0.3340 0.3341 0.3342 0.3344 0.3345 0.3346 0.3347
0.3348 0.3349 0.3349 0.3349 0.3350 0.3350 0.3349 0.3349 0.3348 0.3348
0.3347 0.3346 0.3345 0.3343 0.3342 0.3340 0.3338 0.3336 0.3334 0.3332
0.3329 0.3326 0.3324 0.3321 0.3318 0.3315 0.3311 0.3308 0.3304 0.3301

E:\大三课程学习\2023秋 数值代数\Homework\Numerical_Algebra\x64\Debug\Numerical_Algebra.exe (进程 28388)已退出, 代码为 0
按任意键关闭此窗口。 . . |

```

图 6:  $n = 80$  的运行结果

迭代次数和运行时间列表如下:

$n$	迭代次数	运行时间 (s)
20	7	0.001
40	9	0.001
60	9	0.002
80	9	0.002

表 1: 迭代次数、运行时间和  $n$  的关系

## 2.4 结果分析

观察上表可以发现, 在这一问题中, 共轭梯度法的迭代次数、运行时间随着  $n$  的增大变化缓慢, 这也说明了共轭梯度法的优良性态。

### 3 上机习题 3

#### 3.1 问题描述

分别用 Jacobi 迭代法, G-S 迭代法和共轭梯度法求解下述方程, 输出迭代次数、求解所用时间和解向量, 并对结果给出解释。

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 & -1 \\ 4 & -3 & -5 & -1 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -27 \\ 14 \\ -17 \\ 12 \end{pmatrix}$$

#### 3.2 程序介绍

本题使用到的函数有:

- void Jacobi\_preparation(vector<vector<double>>& A, vector<double>& b)

Jacobi 迭代的准备工作

- vector<double> Jacobi\_iteration(vector<double> x, vector<vector<double>> B, vector<double> g)

Jacobi 迭代

- vector<double> Gauss\_Seidel\_iteration(vector<double> x, vector<vector<double>> B, vector<double> g)

Gauss-Seidel 迭代

- void CGD(vector<vector<double>> A, vector<double>& x, vector<double> b, double eps, int kmax)

共轭梯度法

#### 3.3 实验结果

对上述方程分别使用 Jacobi 迭代、Gauss-Seidel 迭代、共轭梯度法求解, 结果分别如图 7、8、9 所示:

图 7: Jacobi 迭代的运行结果

```

Microsoft Visual Studio 调试
Please choose the solving method:
(1) Jacobi iteration    (2) Gauss-Seidel iteration    (3) Conjugate gradient
2
iteration: 43
Time consumed: 0 ms
solution:
1      -2      3      -2      1

E:\大三课程学习\2023秋 数值代数\Homework\Numerical_Algebra\x64\Debug\Numerical_Algebra.exe (进程 28448)已退出, 代码为 0
。
按任意键关闭此窗口。 . .]

```

图 8: Gauss-Seidel 迭代的运行结果

```

Microsoft Visual Studio 调试
Please choose the solving method:
(1) Jacobi iteration    (2) Gauss-Seidel iteration    (3) Conjugate gradient
3
iteration: 5
Time consumed: 0 ms
solution:
1      -2      3      -2      1

E:\大三课程学习\2023秋 数值代数\Homework\Numerical_Algebra\x64\Debug\Numerical_Algebra.exe (进程 23124)已退出, 代码为 0
。
按任意键关闭此窗口。 . .]

```

图 9: 共轭梯度法的运行结果

可将迭代次数和运行时间列表如下：

求解方法	迭代次数	运行时间 (ms)
Jacobi 迭代	78	1
GS 迭代	43	0
共轭梯度法	5	0

表 2: 用不同方法求解的迭代次数、运行时间

其中，GS 迭代法和共轭梯度法的运行时间低于测量精度。

### 3.4 结果分析

观察上述结果，可知 3 种方法求出的解相等，从而也验证了上述 3 种方法求解的正确性。