

数值代数实验报告 3

Chase Young

2023 年 11 月 5 日

问题要求：将 QR 分解算法编写成通用的子程序，并编写求解线性方程组和线性最小二乘问题的子程序，然后用编写的程序完成以下上机习题 1、2、3:

1 上机习题 1

1.1 问题描述

求解第一章上机习题的三个方程组，并比较计算结果，并评述各方法的优劣。要求输出计算结果和准确解的误差以及运行时间。

1.2 程序介绍

本题要求用 QR 方法求解线性方程组。一般地，设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 可逆， $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ，对于线性方程组

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (\text{LE})$$

可以采用如下的 QR 方法求解：

- (1) 计算矩阵 \mathbf{A} 的 QR 分解 $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ ，其中 \mathbf{Q} 是 n 阶正交阵， \mathbf{R} 是对角元非负的上三角阵；其中 QR 分解可以根据算法 3.3.1，借助 Householder 变换实现。
- (2) 原方程转化为 $\mathbf{QRx} = \mathbf{b}$ ，两边左乘 \mathbf{Q}^T ，将原方程转化为 $\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^T \mathbf{b}$ 。
- (3) 计算 $\mathbf{c} = \mathbf{Q}^T \mathbf{b}$ ，用回代法求解上三角方程 $\mathbf{Rx} = \mathbf{c}$ ，得到计算解 $\tilde{\mathbf{x}}$ 。

将计算解 $\tilde{\mathbf{x}}$ 和精确解 \mathbf{x}_0 比较，根据

$$\text{error} = \|\mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}\|_2$$

可以得出计算解和精确解之间的二范数误差 error 。

具体实现的函数有：

- `double householder(vector<double> x, vector<double>& v);`
计算向量 \mathbf{x} 的 Householder 变换，记录用于表示 Householder 变换的向量 \mathbf{v} ，返回 β 值
- `vector<double> mat_slice_vec(vector<vector<double>> A, int i, int j, int k);`
将矩阵 \mathbf{A} 切片，返回向量 $\mathbf{A}(i:j, k)$

- `vector<vector<double> > mat_slice_mat(vector<vector<double> > A, int i1, int i2, int j1, int j2);`

- `vector<vector<double> > mat_sub(vector<vector<double> > A, vector<vector<double> > B);`

- `vector<vector<double> > mat_I_sub_beta_vvT(double beta, vector<double> v);`

- `vector<vector<double>> mat_mul_mat(vector<vector<double>> A, vector<vector<double>> B);`

- `vector<double> QR_decomp_householder(vector<vector<double> >& A);`

- `void QR_solver(vector<vector<double> > A, vector<double>& b);`

1.3.1 1.1 中的方程组

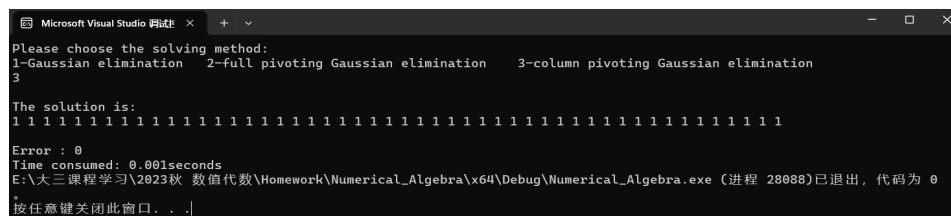


图 1: 列主元 Gauss 消去法求解 1.1 中的方程组

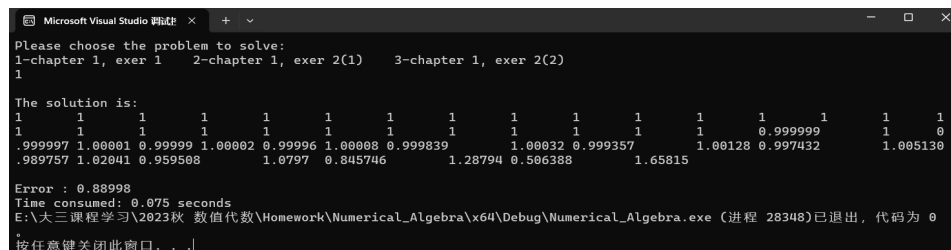


图 2: QR 方法求解 1.1 中的方程组

QR 方法求解的二范数误差为 0.88998, 用时 0.075s.

对于 1.2(1) 中的方程组, 将改进平方根法和 QR 方法的求解结果进行对比, 如图 3、图 4 所示.

图 3: 改进平方根法求解 1.2(1) 中的方程组

图 4: QR 方法求解 1.2(1) 中的方程组

QR 方法求解的二范数误差为 1.87754×10^{-14} , 用时 0.757s.

对于 1.2(2) 中的方程组, 分别采用改进平方根法和 QR 方法求解, 结果如图 5、图 6 所示. 改进平方根法求解的二范数误差为 17234.2828, 用时 0.008s.

QR 方法求解的二范数误差为 456.562, 用时 0.051s.

```

Microsoft Visual Studio 调试
Please choose the solving method:
1-Cholesky decomposition      2-modified Cholesky decomposition
2

1.0000  0.9949  1.2002 -2.2584 27.1908
-104.4194 147.9846 396.6089 -1891.0789 2621.0348
-804.5170 174.3342 -2800.9137 937.8118 3240.1666
1201.7032 -1723.2248 -6837.1780 4279.3248 -856.2116
7574.2449 -4346.3180 -2330.1762 1450.9201 -1525.8589
411.3671 1415.3080 -3264.2418 5006.0238 -1051.1372
-4128.5010 3052.7916 3279.7740 -3579.8147 -1404.7850
-486.2368 1820.3468 2397.9051 -3053.4641 792.2994
Error: 17234.2828

Time consumed: 8.0000 ms

E:\大三课程学习\2023秋 数值代数\Homework\Numerical_Algebra\x64\Debug\Numerical_Algebra.exe (进程 24240)已退出, 代码为 0
按任意键关闭此窗口. . .

```

图 5: 改进平方根法求解 1.2(2) 中的方程组

```

Microsoft Visual Studio 调试
Please choose the problem to solve:
1-chapter 1, exer 1  2-chapter 1, exer 2(1)  3-chapter 1, exer 2(2)
3

The solution is:
1      0.99987 1.00527 0.910382      1.77715 -2.64583      9.56842 -3.15522      -23.3848      45.3508 6.63131-
49.0252 -53.3069      148.006 7.80653 -135.91 -33.9773      168.689 -45.7906      3.03258 -10.2317      -133.032
96.3374 9.27811 128.892 -53.5723      -45.2509      -45.3267      26.1772 -113.755      35.7125 141.719 32.61694
1.9715 -123.143      -39.3886      -72.8184      113.132 51.2495 -48.148

Error : 456.562
Time consumed: 0.051 seconds
E:\大三课程学习\2023秋 数值代数\Homework\Numerical_Algebra\x64\Debug\Numerical_Algebra.exe (进程 10660)已退出, 代码为 0
要在调试停止时自动关闭控制台, 请启用“工具”->“选项”->“调试”->“调试停止时自动关闭控制台”。
按任意键关闭此窗口. . .

```

图 6: QR 方法求解 1.2(2) 中的方程组

1.4 结果分析

将上述结果总结如表 1、表 2、表 3 所示.

	二范数误差	运行时间
列主元 Gauss 消去法	0	0.001s
QR 方法	0.88998	0.075s

表 1: 问题 1.1

	二范数误差	运行时间
改进平方根法	0	0.0030s
QR 方法	1.87754×10^{-14}	0.757s

表 2: 问题 1.2(1)

	二范数误差	运行时间
改进平方根法	17234.2828	0.008s
QR 方法	456.562	0.051s

表 3: 问题 1.2(2)

可以看出, 对于一般的线性方程组, 列主元 Gauss 消去法和改进的平方根法无论在求解精度还是运行效率上都优于 QR 方法; 但是对于一些病态的方程组, 比如 1.2(2) 中的方程组, QR 方法可能在求解精度上更高.

2 上机习题 2

2.1 问题描述

求二次多项式 $y = at^2 + bt + c$, 使得残向量在二范数最小的意义下拟合第二题数据 (见教材 P99 表 3.2)。要求输出计算结果, 残向量的二范数以及运行时间。

2.2 程序介绍

对于最小二乘问题 $\min \|Ax - b\|_2$, 可以采用如下的 QR 方法求解:

- (1) 计算矩阵 A 的 QR 分解 $A = QR$.
- (2) 计算 $c = Q^T b = (c_1^T, c_2^T)^T$.
- (3) 用回代法求解上三角方程 $Rx = c_1$, 得到最小二乘解 x , 计算最小二乘的值 $\|c_2\|_2$.

具体实现的函数有

- `double vec_2_norm(vector<double> x);`

计算向量 x 的二范数

- `double QR_LS(vector<vector<double>> A, vector<double> b, vector<double>& x);`

用 QR 方法求解最小二乘问题 $\min \|Ax - b\|_2$, 将最小二乘解保存在向量 x 中, 返回最小二乘的值.

2.3 实验结果

实验结果如图 7 所示.

```

Microsoft Visual Studio 调试 x + v
optimal coef:
a      b      c
1      1      1
2 norm of the error vector: 2.7894e-16
Time consumed: 0 seconds
E:\大三课程学习\2023秋 数值代数\Homework\Numerical_Algebra\x64\Debug\Numerical_Algebra.exe (进程 12780)已退出, 代码为 0
。
按任意键关闭此窗口。 . . |

```

图 7: QR 方法求解最小二乘问题 2

也即所求的二次多项式为

$$y = t^2 + t + 1.$$

二范数意义下的误差为 2.7894×10^{-16} , 运行时间少于 1ms.

2.4 结果分析

事实上, 本问题中, 由系数矩阵 A 决定的线性方程组

$$Ax = b$$

恰好有唯一解 $x = (1, 1, 1)^T$, 这也印证了上述计算结果.

3 上机习题 3

3.1 问题描述

采用线性模型 $y = x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{11}x_{11}$ 拟合第三题数据 (见教材 P99 表 3.3、表 3.4)。求出模型中参数的最小二乘结果。要求输出计算结果, 残向量的二范数以及运行时间。

3.2 程序介绍

和上机习题 2 类似, 仍然采用 QR 方法求解最小二乘问题 $\min \|Ax - b\|_2$.

3.3 实验结果

实验结果如图 8 所示.

```

Microsoft Visual Studio 调试 x + v
optimal coef:
x0      x1      x2      x3      x4      x5      x6      x7      x8      x9      x10     x11
2.0775  0.7189  9.6882  0.1535  13.6796  1.9868  -0.9582  -0.4840  -0.0736  1.0187  1.4435  2.9028
2 norm of the error vector: 16.3404
Time consumed: 0.0070 seconds
E:\大三课程学习\2023秋 数值代数\Homework\Numerical_Algebra\x64\Debug\Numerical_Algebra.exe (进程 18968)已退出, 代码为 0
。
按任意键关闭此窗口。 . . |

```

图 8: QR 方法求解最小二乘问题 3

最小二乘解如图所示. 残量的二范数为 16.3404, 运行时间为 0.0070s.

3.4 结果分析

计算得到的残量的二范数为 16.3404，是一个较小的值，这印证了求解的正确性.