

数值代数实验报告 8

Chase Young

2024 年 1 月 2 日

1 上机习题

1.1 问题描述

参考课本 7.6.2 节 (P234-240)SVD 迭代完成 SVD 算法 7.6.3, 并对附件 svddata.txt 中的矩阵作 SVD 分解 $\mathbf{A} = \mathbf{U}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}$ 。并计算 $\mathbf{U}^T \mathbf{U} - \mathbf{I}$, $\mathbf{V} \mathbf{V}^T - \mathbf{I}$, $\mathbf{U}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{V} - \mathbf{A}$ 的绝对值最大的元素, 依次用 eU, eV, eS 表示。

要求输出迭代次数, 从小到大排序的所有奇异值以及上面要求的三个值。

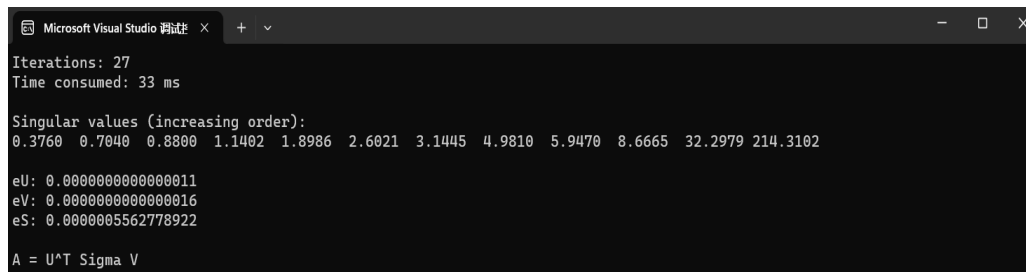
1.2 程序介绍

本部分主要实现的函数有:

- `vector<vector<double>> xyT(vector<double> x, vector<double> y);`
计算矩阵 \mathbf{xy}^T , 其中 \mathbf{x}, \mathbf{y} 为行向量, 大小分别为 m, n
- `vector<vector<double>> biDiagonalization(vector<vector<double>> A, vector<vector<double>> &U, vector<vector<double>> &V);`
对矩阵 \mathbf{A} 用 Householder 变换做二对角化
- `void givens(double& c, double& s, double a, double b);`
找 Givens 变换中的 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$, 分别保存在 c, s 中
- `vector<vector<double>> WilkinsonSVD(vector<vector<double>> B, vector<vector<double>> &P, vector<vector<double>> &Q);`
带 Wilkinson 位移的 SVD 迭代
- `void find_p_q(vector<vector<double>> B, int& p, int& q);`
算法 7.6.3 中的辅助程序, 找满足要求的 p 和 q
- `void SVD(vector<vector<double>> A, vector<vector<double>> &U, vector<vector<double>> &Sigma, vector<vector<double>> &V, double eps);`
矩阵 \mathbf{A} 的 SVD 分解, 其中 \mathbf{A} 的大小为 $b \times n$, $m \geq n$
- `double maxAbs(vector<vector<double>> A);`
返回矩阵 \mathbf{A} 中模最大的元素

1.3 实验结果

运行结果截图如图 1 所示。



```
Microsoft Visual Studio 调试 x + -
Iterations: 27
Time consumed: 33 ms

Singular values (increasing order):
0.3760 0.7040 0.8800 1.1402 1.8986 2.6021 3.1445 4.9810 5.9470 8.6665 32.2979 214.3102

eU: 0.0000000000000011
eV: 0.0000000000000016
eS: 0.000005562778922

A = U^T Sigma V
```

图 1: 运行结果 (部分)

出于图片尺寸考虑, 分解得到的矩阵 U, V, Σ 没有在上图中截出 (见程序的输出结果)。

其中, 奇异值从小到大排列为:

0.3760 0.7040 0.8800 1.1402 1.8986 2.6021 3.1445 4.9810 5.9470 8.6665 32.2979 214.3102

相关误差项为:

$$\begin{aligned}eU &= \max |U^T U - I| = 1.1 \times 10^{-15} \\eV &= \max |V V^T - I| = 1.6 \times 10^{-15} \\eS &= \max |U^T \Sigma V - A| = 5.56 \times 10^{-7}\end{aligned}$$

迭代次数为 27 次, 计算用时 33ms。

1.4 结果分析

观察上述结果可知, 3 个误差项 eU, eV, eS 均小于 10^{-6} , 因而计算结果是可靠的。