数值代数实验报告 1

Chase Young

2023 年 10 月 4 日

1 上机习题 1

1.1 问题描述

习题 1 要求用 C++ 实现不选主元的 Gauss 消去法、全主元 Gauss 消去法、列主元 Gauss 消去法求解方程的通用子程序，并分别用上述 3 种方法求解如下的 84 阶方程组：

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & & & & & \\ 8 & 6 & 1 & & & & \\ & 8 & 6 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 8 & 6 & 1 & \\ & & & & 8 & 6 & 1 \\ & & & & & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{82} \\ x_{83} \\ x_{84} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 15 \\ \vdots \\ 15 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix} \tag{1}$$

并要求将计算结果和方程组的精确解 $(1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$ 进行比较，计算 L^2 意义下的误差；记录上述 3 种方法的运行时间，比较其运行效率.

1.2 程序介绍

本题主要实现的函数有：

- void forward_subs(vector<vector<double> >& L, vector<double>& b): 前代法求解下三角形方程组 $Lx = b$，对应于算法 1.1.1；L 是非奇异下三角方阵，b 是右端项；解出的 x 存在 b 中.
- void forward_subs1(vector<vector<double> >& L, vector<double>& b): 前代法求解下三角形方程组 $Lx = b$，这里的 L 是单位下三角方阵，其余同上.
- void back_subs(vector<vector<double> >& U, vector<double>& y): 回代法求解上三角形方程组 $Ux = y$，对应于算法 1.1.2；U 是非奇异上三角方阵，b 是右端项；解出的 x 存在 b 中.
- void back_subs1(vector<vector<double> >& U, vector<double>& y): 回代法求解下三角形方程组 $Lx = b$，这里的 U 是单位上三角方阵，其余同上.
- void gauss_elim(vector<vector<double> >& A): 不选主元的 Gauss 消去法求解方程组 $Ax = b$，对应于算法 1.1.3；这里 A 是非奇异方阵；解出的 x 存在 b 中.

- void gauss_elim_full_pivoting(vector<vector<double> >& A, vector<int>& u, vector<int>& v): 全主元 Gauss 消去法求解方程组 $Ax = b$，对应于算法 1.2.1；这里 A 是非奇异方阵，解出的 x 存在 b 中.

- void gauss_elim_col_pivoting(vector<vector<double> >& A, vector<int>& u): 列主元 Gauss 消去法求解方程组 $Ax = b$，对应于算法 1.2.2；这里 A 是非奇异方阵，解出的 x 存在 b 中.

- void vector_pb(vector<int>& u, vector<double>& b): 计算置换矩阵 P 和向量 b 的乘积，结果保存在 b 中.

- void vector_qb(vector<int>& v, vector<double>& b): 计算置换矩阵 Q 和向量 b 的乘积，结果保存在 b 中.

除此之外，函数 void exercise_1() 将本题汇总，通过选取参数 mode 的值控制求解的方法：

- mode=1-不选主元的 Gauss 消去法
- mode=2-全主元 Gauss 消去法
- mode=3-列主元 Gauss 消去法

1.3 实验结果

如图 1 所示，输入参数 1，选择用不选主元的 Gauss 消去法求解方程组 (1)，解如下图所示：

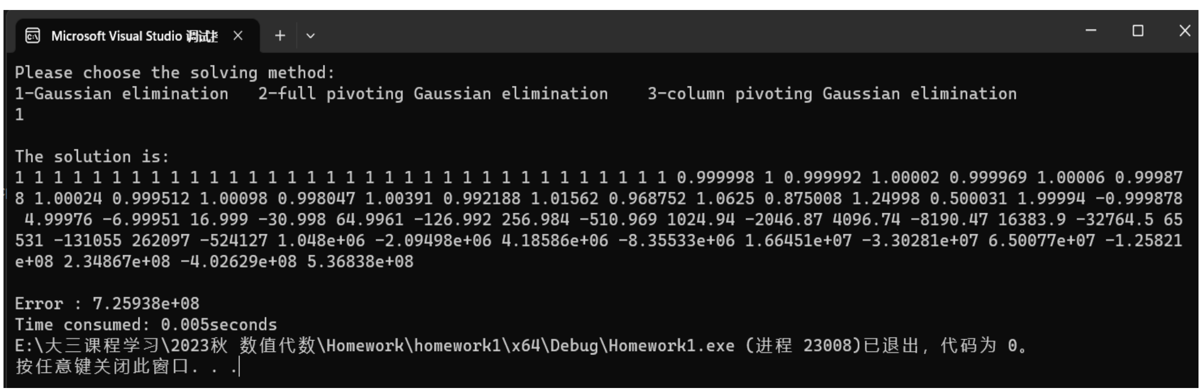


图 1: 不选主元的 Gauss 消去法

L^2 意义下的误差为

$$err = \sqrt{\sum_{k=1}^{84} (x_k - 1)^2} = 7.25938 \times 10^8$$

计算过程用时 0.005s.

如图 2 所示，输入参数 2，选择用全主元 Gauss 消去法求解方程组 (1)，解如下所示：
L^2 意义下的误差为 3.78284×10^{-6}.
计算过程用时 0.006s.

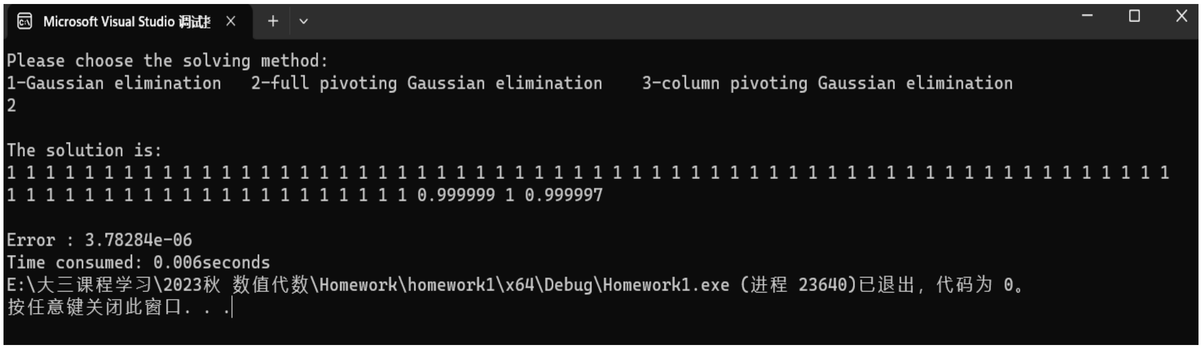


图 2: 全主元 Gauss 消去法

如图 3 所示，输入参数 3，选择用列主元 Gauss 消去法求解方程组 (1)，解如下所示：

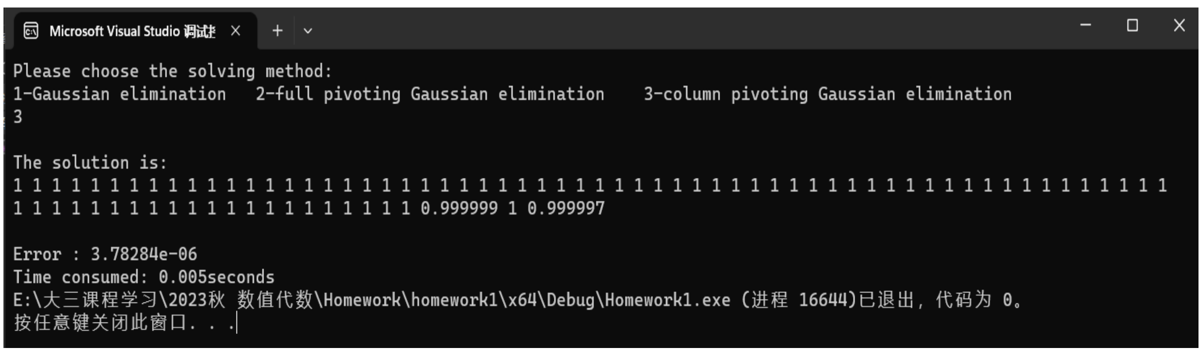


图 3: 列主元 Gauss 消去法

L^2 意义下的误差为 3.78284×10^{-6}.

计算过程用时 0.005s.

1.4 结果分析

采用上述 3 种方法求解方程组 (1) 的误差和用时汇总如表 1 所示：

	不选主元的 Gauss 消去法	全主元 Gauss 消去法	列主元 Gauss 消去法
L^2 误差	7.25938×10^8	3.78284×10^{-6}	3.78284×10^{-6}
计算过程用时	0.005s	0.006s	0.005s

表 1: 3 种方法的比较

可以看出，不选主元的 Gauss 消去法的精度无法得到有效保证；全主元 Gauss 消去法和列主元 Gauss 消去法的求解精度较好，但列主元 Gauss 消去法的运行时间更短，这也印证了列主元 Gauss 消去法在选取主元时只在当前列中搜索模长最大的元素作为主元，而全主元 Gauss 消去法需要在余下的整个矩阵中搜索.

综上可见，列主元 Gauss 消去法是求解中小型线性方程组的较优的方法.

2 上机习题 2

2.1 问题描述

实现对称正定阵的 Cholesky 分解和 LDL^{T} 分解的通用子程序，并分别用平方根法和改进的平方根法求解对称正定方程组 $Ax = b$. 其中

(1) b 随机选取，系数矩阵 A 为 100 阶矩阵：

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & & & & & \\ 1 & 10 & 1 & & & & \\ & 1 & 10 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 10 & 1 & \\ & & & & 1 & 10 & 1 \\ & & & & & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

(2) 系数矩阵为 10 阶 Hilbert 矩阵，即

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$$

b 的第 i 个分量为

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1}$$

2.2 程序介绍

本题中主要实现了如下几个函数：

- void cholesky_decomp(vector<vector<double> >& A): 实现对称正定阵 A 的 Cholesky 分解: $A = LL^{\mathrm{T}}$，其中下三角阵 L 保存在 A 的下三角部分，并将 A 的上三角部分赋值为 L^{T}.
- void modified_cholesky_decomp(vector<vector<double> >& A): 实现对称正定阵的 LDL^{T} 分解: $A = LDL^{\mathrm{T}}$；其中单位下三角阵 L 保存在 A 的严格下三角元中，对角阵 D 保存在 A 的对角元中.
- void matrix_DLT(vector<vector<double> >& A): 用于使用 LDL^{T} 分解方法求解对称正定方程组，具体而言，此函数计算对角阵 D 和单位上三角阵 L^{T} 的乘积，结果保存在 A 的上三角元中.

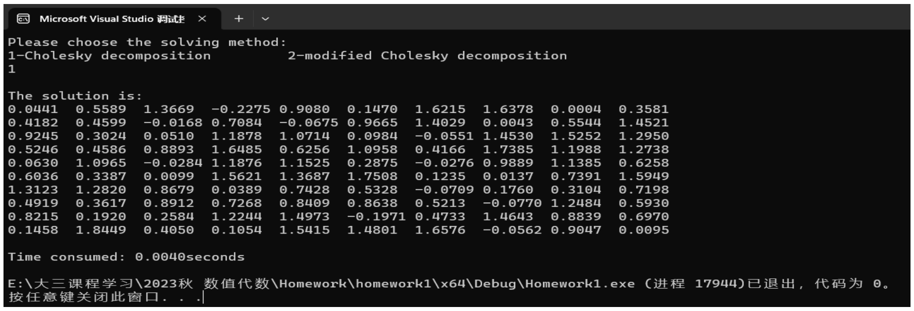
除此之外，函数 void exercise_2_1(), void exercise_2_2() 调用上述函数，分别求解了 (1), (2) 中给定的方程组.

和习题 1 一样，这里通过输入参数 mode 的值控制选择求解方法：

- mode=1-Cholesky 分解
- mode=2-LDL^{T} 分解

2.3 实验结果

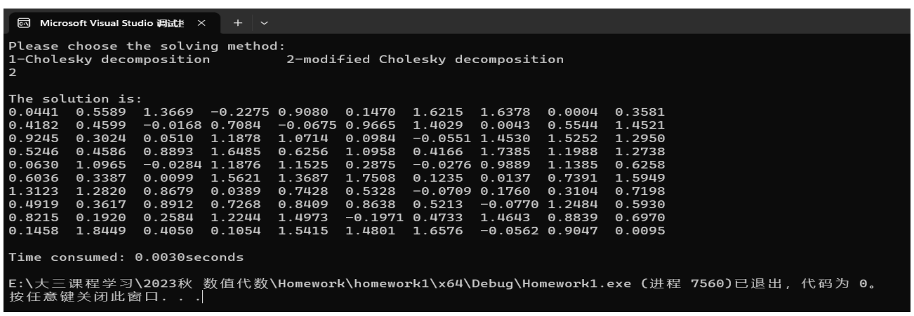
运行 Homework1.cpp 中的 exercise_2_1()，输入参数 1，使用 Cholesky 分解方法求解问题 (1)，计算用时 0.004s；求出的解如图 4 所示：



```
Microsoft Visual Studio 调试
Please choose the solving method:
1-Cholesky decomposition         2-modified Cholesky decomposition
1

The solution is:
0.0441  0.5589  1.3669  -0.2275 0.9080  0.1470  1.6215  1.6378  0.0004  0.3581
0.4182  0.4599  -0.0168 0.7084  -0.0675 0.9665  1.4029  0.0043  0.5544  1.4521
0.9245  0.3024  0.0510  1.1878  1.0714  0.0984  -0.0551 1.4530  1.5252  1.2950
0.5246  0.4586  0.8893  1.6485  0.6256  1.0958  0.4166  1.7385  1.1988  1.2738
0.0630  1.0965  -0.0284 1.1876  1.1525  0.2875  -0.0276 0.9889  1.1385  0.6258
0.6036  0.3387  0.0099  1.5621  1.3687  1.7508  0.1235  0.0137  0.7391  1.5949
1.3123  1.2820  0.8679  0.0389  0.7428  0.5328  -0.0709 0.1760  0.3104  0.7198
0.4919  0.3617  0.8912  0.7268  0.8409  0.8638  0.5213  -0.0770 1.2484  0.5930
0.8215  0.1920  0.2584  1.2244  1.4973  -0.1971 0.4733  1.4643  0.8839  0.6970
0.1458  1.8449  0.4050  0.1054  1.5415  1.4801  1.6576  -0.0562 0.9047  0.0095

Time consumed: 0.0040seconds

E:\大三课程学习\2023秋 数值代数\Homework\homework1\x64\Debug\Homework1.exe (进程 17944)已退出，代码为 0。
按任意键关闭此窗口. . .
```

图 4: Cholesky 分解求解问题 (1)

输入参数 2，使用改进的 Cholesky 分解方法求解问题 (2)，计算用时 0.003s；求出的解如图 5 所示：



```
Microsoft Visual Studio 调试
Please choose the solving method:
1-Cholesky decomposition         2-modified Cholesky decomposition
2

The solution is:
0.0441  0.5589  1.3669  -0.2275 0.9080  0.1470  1.6215  1.6378  0.0004  0.3581
0.4182  0.4599  -0.0168 0.7084  -0.0675 0.9665  1.4029  0.0043  0.5544  1.4521
0.9245  0.3024  0.0510  1.1878  1.0714  0.0984  -0.0551 1.4530  1.5252  1.2950
0.5246  0.4586  0.8893  1.6485  0.6256  1.0958  0.4166  1.7385  1.1988  1.2738
0.0630  1.0965  -0.0284 1.1876  1.1525  0.2875  -0.0276 0.9889  1.1385  0.6258
0.6036  0.3387  0.0099  1.5621  1.3687  1.7508  0.1235  0.0137  0.7391  1.5949
1.3123  1.2820  0.8679  0.0389  0.7428  0.5328  -0.0709 0.1760  0.3104  0.7198
0.4919  0.3617  0.8912  0.7268  0.8409  0.8638  0.5213  -0.0770 1.2484  0.5930
0.8215  0.1920  0.2584  1.2244  1.4973  -0.1971 0.4733  1.4643  0.8839  0.6970
0.1458  1.8449  0.4050  0.1054  1.5415  1.4801  1.6576  -0.0562 0.9047  0.0095

Time consumed: 0.0030seconds

E:\大三课程学习\2023秋 数值代数\Homework\homework1\x64\Debug\Homework1.exe (进程 7560)已退出，代码为 0。
按任意键关闭此窗口. . .
```

图 5: 改进的 Cholesky 分解求解问题 (1)

运行 Homework1.cpp 中的 exercise_2_2()，输入参数 1，使用 Cholesky 分解方法求解问题 (2)，计算用时 10ms；求出的解如图 6 所示：

```
Microsoft Visual Studio 调试
Please choose the solving method:
1-Cholesky decomposition         2-modified Cholesky decomposition
1

-nan(ind)       -nan(ind)       -nan(ind)       -nan(ind)       -nan(ind)
-nan(ind)       -nan(ind)       -nan(ind)       -nan(ind)       -nan(ind)
-nan(ind)       -nan(ind)       -nan(ind)       -nan(ind)       -nan(ind)
-nan(ind)       -nan(ind)       -nan(ind)       -nan(ind)       -nan(ind)
-nan(ind)       -nan(ind)       -nan(ind)       -nan(ind)       -nan(ind)
-nan(ind)       -nan(ind)       -nan(ind)       -nan(ind)       -nan(ind)
-nan(ind)       -nan(ind)       -nan(ind)       -nan(ind)       -nan(ind)
-nan(ind)       -nan(ind)       -nan(ind)       -nan(ind)       -nan(ind)

Time consumed: 10.0000 ms

E:\大三课程学习\2023秋 数值代数\Homework\homework1\x64\Debug\Homework1.exe (进程 12604)已退出，代码为 0。
按任意键关闭此窗口. . .
```

图 6: Cholesky 分解求解问题 (2)

输入参数 2，使用改进的 Cholesky 分解方法求解问题 (2)，计算用时 7ms；求出的解如图 7 所示：

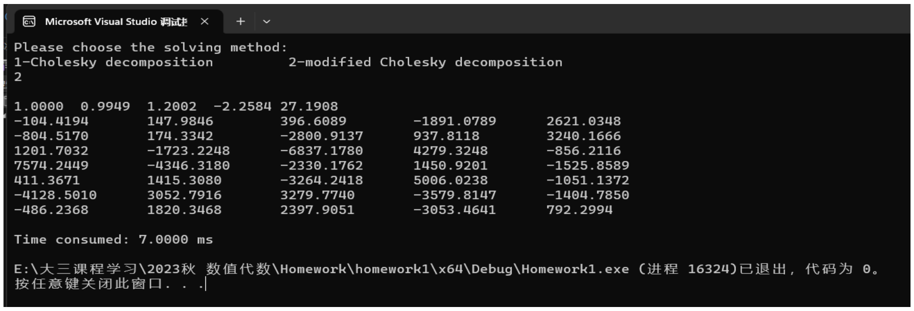


图 7: 改进的 Cholesky 分解求解问题 (2)

2.4 结果分析

观察图 4 和图 5，不难发现通过 Cholesky 分解和改进的 Cholesky 分解求解问题 (1) 得到的结果一致，这也验证了算法的正确性.

观察图 6 和图 7，可以发现这两种方法求解问题 (2) 的结果均和精确解 $x = (1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$ 偏差很大，Cholesky 分解方法甚至不能对其求解. 可知 Hilbert 矩阵是一个极其病态的矩阵，以之为系数的方程组难以使用 Cholesky 分解或改进的 Cholesky 分解方法求解.

3 上机习题 3

3.1 问题描述

用第 1 题的程序求解第 2 题的两个方程组，比较所有的计算结果，然后评论各方法的优劣.

3.2 程序介绍

本题主要使用了习题 1 的函数，除此之外，还编写了：

- void exercise_3_1(): 调用问题 1 中的函数，分别使用不选主元的 Gauss 消去法、全主元 Gauss 消去法、列主元 Gauss 消去法求解习题 2(1) 中的方程组，并记录运行时间.
- void exercise_3_2(): 调用问题 1 中的函数，分别使用不选主元的 Gauss 消去法、全主元 Gauss 消去法、列主元 Gauss 消去法求解习题 2(2) 中的方程组，并记录运行时间.

和习题 1 一样，这里通过输入参数 mode 的值来选择求解方式，具体对应规则同习题 1.

3.3 实验结果

运行 exercise_3_1()，输入参数 1，使用不选主元的 Gauss 消去法求解习题 2(1) 中的方程组，运行时间为 0.006s，求出的解如图 8 所示.

输入参数 2，使用全主元 Gauss 消去法求解习题 2(1) 中的方程组，运行时间为 0.01s，求出的解如图 9 所示.

输入参数 3，使用列主元 Gauss 消去法求解习题 2(1) 中的方程组，运行时间为 0.007s，求出的解如图 10 所示.

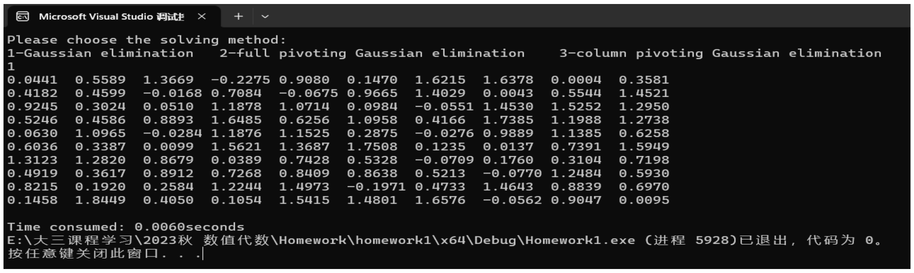


图 8: 不选主元的 Gauss 消去法求解习题 2 问题 (1)

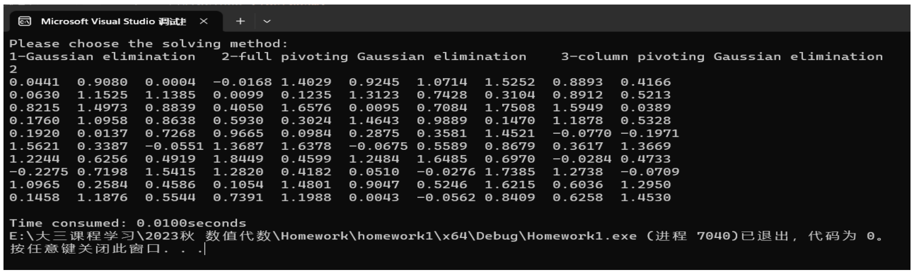


图 9: 全主元 Gauss 消去法求解习题 2 问题 (1)

运行 exercise_3_2()，输入参数 1，使用不选主元的 Gauss 消去法求解习题 2(2) 中的方程组，运行时间为 1ms，求出的解如图 11 所示.

输入参数 2，使用全主元 Gauss 消去法求解习题 2(2) 中的方程组，运行时间少于 1ms，无法用 clock() 测量，求出的解如图 12 所示.

输入参数 3，使用列主元 Gauss 消去法求解习题 2(2) 中的方程组，运行时间为 1ms，求出的解如图 13 所示.

3.4 结果分析

将 3 种方法求解的时间汇总为表 2 所示.

运行时间	问题 (1)	问题 (2)
不选主元的 Gauss 消去法	0.006s	1ms
全主元 Gauss 消去法	0.01s	少于 1ms
列主元 Gauss 消去法	0.007s	1ms

表 2: 使用习题 1 中的 3 中方法求解习题 2 的运行时间

可以看出，从运行时间来看，全主元 Gauss 消去法的运行时间比其他两种方法稍长 (问题 (2) 中运行时间不足 ms 量级，不能作为有效数据).

从求解精度来看，对于问题 (1)，3 种方法求出的解相差不大；对于问题 (2)，3 种方法求出的解却都和精确解 $x = (1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$ 相差甚远，这再一次说明了 Hilbert 矩阵是一个极其病态的矩阵.

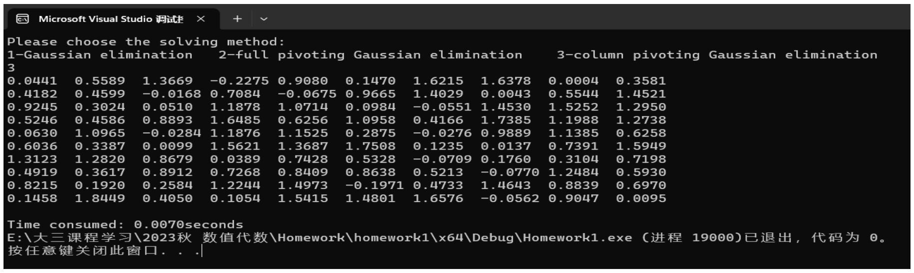


图 10: 列主元 Gauss 消去法求解习题 2 问题 (1)

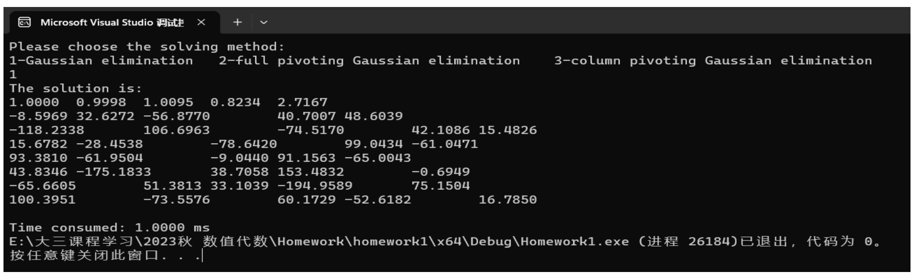


图 11: 不选主元的 Gauss 消去法求解习题 2 问题 (2)

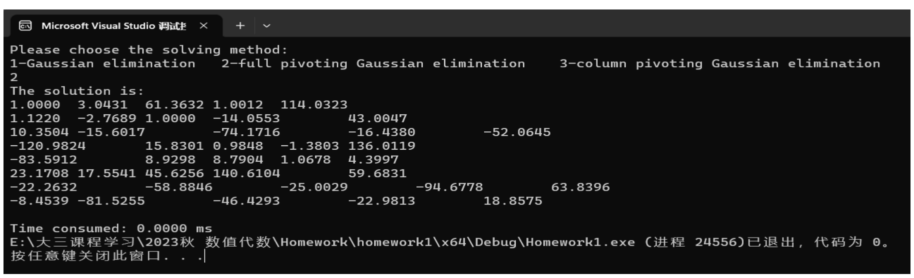


图 12: 全主元 Gauss 消去法求解习题 2 问题 (2)

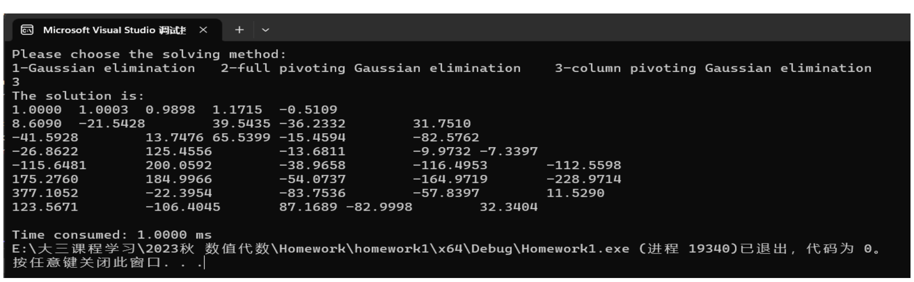


图 13: 列主元 Gauss 消去法求解习题 2 问题 (2)