

数值代数实验报告 7

Chase Young

2023 年 12 月 27 日

1 上机习题 1

1.1 问题描述

求实对称三对角阵的全部特征值和特征向量。

- (1) 用 C++ 编制利用过关 Jacobi 方法求实对称三对角阵全部特征值和特征向量的通用子程序。
- (2) 利用你所编制的子程序求 50, 60, 70, 80, 90, 100 阶矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

的全部特征值和特征向量。

1.2 程序介绍

本题主要使用过关 Jacobi 方法求解实对称三对角矩阵 \mathbf{A} 的全部特征值和特征向量。

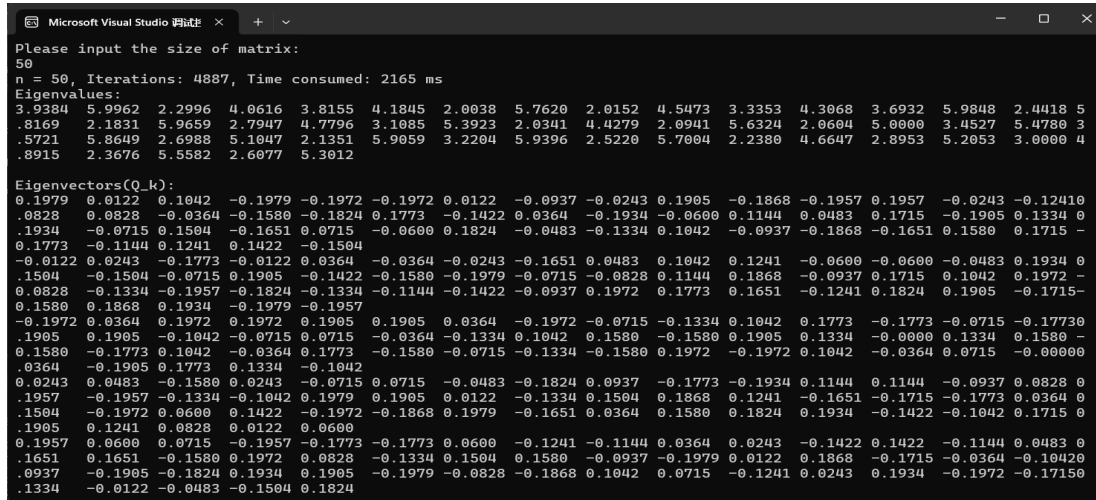
主要实现的函数有：

- `double nonDiagNorm(vector<vector<double>> > A);`
计算方阵 \mathbf{A} 的非对角“范数”，其定义见教材 P211
- `bool isPassed(vector<vector<double>> > A, double delta, int& p, int& q);`
判断过关 Jacobi 方法中，当前矩阵是否“过关”；p, q 用于存储绝对值超过关值的非对角元所在平面，若不存在则置为 -1
- `void rotateJacobi(vector<vector<double>> > A, int p, int q, double& c, double& s);`
计算 $\mathbf{J}(p, q, \theta)$ 中的 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ ，保存在 c, s 中
- `vector<vector<double>> leftJacobiMul(vector<vector<double>> > A, int p, int q, double c, double s);`
用 Jacobi 矩阵 $\mathbf{J}(p, q, \theta)$ 左乘矩阵 \mathbf{A} ，返回计算结果

- `vector<vector<double>> leftJacobiMul(vector<vector<double>> A, int p, int q, double c, double s);`
用 Jacobi 矩阵 $\mathbf{J}(p, q, \theta)$ 左乘矩阵 \mathbf{A} , 返回计算结果
- `vector<vector<double>> rightJacobiMul(vector<vector<double>> A, int p, int q, double c, double s);`
用 Jacobi 矩阵 $\mathbf{J}(p, q, \theta)$ 右乘矩阵 \mathbf{A} , 返回计算结果
- `void passingJacobiMethod(vector<vector<double>> A, vector<double>& EigenValues, vector<vector<double>>& EigenVectors, double sigma);`
过关 Jacobi 方法求对称矩阵的全部特征值和特征向量

1.3 实验结果

$n = 50$ 时的运行结果截图如图 1 所示。



```

Microsoft Visual Studio 调试
Please input the size of matrix:
50
n = 50, Iterations: 4887, Time consumed: 2165 ms
Eigenvalues:
3.9384 5.9962 2.2996 4.0616 3.8155 4.1845 2.0038 5.7620 2.0152 4.5473 3.3253 4.3068 3.6932 5.9848 2.4418 5
.8169 2.1831 5.9659 2.7947 4.7796 3.1085 5.3923 2.0341 4.4279 2.0941 5.6324 2.0604 5.0000 3.4527 5.4780 3
.5721 5.8649 2.6988 5.1047 2.1351 5.9059 3.2204 5.9396 2.5220 5.7004 2.2380 4.6647 2.8953 5.2053 3.0000 4
.8915 2.3676 5.5582 2.6077 5.3012

Eigenvectors(Q,k):
0.1979 0.0122 0.1042 -0.1979 -0.1972 -0.1972 0.0122 -0.0937 -0.0243 0.1905 -0.1868 -0.1957 0.1957 -0.0243 -0.1241 0
.0828 0.0828 -0.0364 -0.1580 -0.1824 0.1773 -0.1422 0.0364 -0.1934 -0.0600 0.1144 0.0483 0.1715 -0.1905 0.1334 0
.1934 -0.0715 0.1504 -0.1651 0.0715 -0.0600 0.1824 -0.0483 -0.1334 0.1042 -0.0937 -0.1868 -0.1651 0.1580 0.1715 -
0.1773 -0.1144 0.1241 0.1422 -0.1504
-0.0122 0.0243 -0.1773 -0.0122 0.0364 -0.0364 -0.0243 -0.1651 0.0483 0.1042 0.1241 -0.0600 -0.0600 -0.0483 0.1934 0
.1504 -0.1504 -0.0715 0.1905 -0.1422 -0.1580 -0.1979 -0.0715 -0.0828 0.1144 0.1868 -0.0937 0.1715 0.1042 0.1972 -
0.0828 -0.1334 -0.1957 -0.1824 -0.1334 -0.1144 -0.1422 -0.0937 0.1972 0.1773 0.1651 -0.1241 0.1824 0.1905 -0.1715-
0.1580 0.1868 0.1934 -0.1979 -0.1957
-0.1972 0.0364 0.1972 0.1972 0.1905 0.1905 0.0364 -0.1972 -0.0715 -0.1334 0.1042 0.1773 -0.1773 -0.0715 -0.1773 0
.1905 0.1905 -0.1042 -0.0715 0.0715 -0.0364 -0.1334 0.1042 0.1580 -0.1580 0.1905 0.1334 -0.0000 0.1334 0.1580 -
0.1580 -0.1773 0.1042 -0.0364 0.1773 -0.1580 -0.0715 -0.1334 -0.1580 0.1972 -0.1972 0.1042 -0.0364 0.0715 -0.0000 0
.0364 -0.1905 0.1773 0.1334 -0.1042
0.0243 0.0483 -0.1580 0.0243 -0.0715 0.0715 -0.0483 -0.1824 0.0937 -0.1773 -0.1934 0.1144 0.1144 -0.0937 0.0828 0
.1957 -0.1957 -0.1334 -0.1042 0.1979 0.1905 0.0122 -0.1334 0.1504 0.1868 0.1241 -0.1651 -0.1715 -0.1773 0.0364 0
.1504 -0.1972 0.0600 0.1422 -0.1972 -0.1868 0.1979 -0.1651 0.0364 0.1580 0.1824 0.1934 -0.1422 -0.1042 0.1715 0
.1905 0.1241 0.0828 0.0122 0.0600
0.1957 0.0600 0.0715 -0.1957 -0.1773 -0.1773 0.0600 -0.1241 -0.1144 0.0364 0.0243 -0.1422 0.1422 -0.1144 0.0483 0
.1651 0.1651 -0.1580 0.1972 0.0828 -0.1334 0.1504 0.1580 -0.0937 -0.1979 0.0122 0.1868 -0.1715 -0.0364 -0.1042 0
.0937 -0.1905 -0.1824 0.1934 0.1905 -0.1979 -0.0828 -0.1868 0.1042 0.0715 -0.1241 0.0243 0.1934 -0.1972 -0.1715 0
.1334 -0.0122 -0.0483 -0.1504 0.1824

```

图 1: $n = 50$ 时的运行结果 (图太大, 未截完整)

其中迭代次数为 4887 次, 计算所用时间为 2.165s。

$n = 50, 60, 70, 80, 90, 100$ 时的迭代次数和运行结果如表 1 所示, 按照从小到大顺序排列的特征值如表 2、3、4、5、6、7 所示。其中迭代停止的关值为 $\delta = 10^{-7}$ 。

1.4 结果分析

观察上述结果, 可知随着矩阵 \mathbf{A} 的阶数的增加, 过关 Jacobi 方法的迭代次数以二次函数的方式增加。是当矩阵 \mathbf{A} 为 100 阶时, 求解到 10^{-7} 精度所需的时间超过了 15s。

n	迭代次数	运行时间 (ms)
50	4887	2165
60	7964	3986
70	10548	5864
80	13391	8290
90	16607	11224
100	20784	15607

表 1: 不同 n 取值的迭代次数和运行时间

2.0038	2.0152	2.0341	2.0604	2.0941	2.1351	2.1831	2.2380	2.2996	2.3676
2.4418	2.5220	2.6077	2.6988	2.7947	2.8953	3.0000	3.1085	3.2204	3.3353
3.4527	3.5721	3.6932	3.8155	3.9384	4.0616	4.1845	4.3068	4.4279	4.5473
4.6647	4.7796	4.8915	5.0000	5.1047	5.2053	5.3012	5.3923	5.4780	5.5582
5.6324	5.7004	5.7620	5.8169	5.8649	5.9059	5.9396	5.9659	5.9848	5.9962

表 2: $n = 50$ 时, \mathbf{A} 的特征值 (从小到大排列)

2.0027	2.0106	2.0238	2.0423	2.0659	2.0947	2.1286	2.1674	2.2110	2.2594
2.3124	2.3699	2.4318	2.4977	2.5677	2.6415	2.7188	2.7996	2.8835	2.9704
3.0600	3.1522	3.2465	3.3429	3.4410	3.5406	3.6414	3.7432	3.8456	3.9485
4.0515	4.1544	4.2568	4.3586	4.4594	4.5590	4.6571	4.7535	4.8478	4.9400
5.0296	5.1165	5.2004	5.2812	5.3585	5.4323	5.5023	5.5682	5.6301	5.6876
5.7406	5.7890	5.8326	5.8714	5.9053	5.9341	5.9577	5.9762	5.9894	5.9973

表 3: $n = 60$ 时, \mathbf{A} 的特征值 (从小到大排列)

2.0020	2.0078	2.0176	2.0312	2.0487	2.0701	2.0952	2.1240	2.1565	2.1926
2.2323	2.2754	2.3219	2.3716	2.4246	2.4806	2.5396	2.6015	2.6661	2.7334
2.8031	2.8751	2.9493	3.0257	3.1039	3.1838	3.2654	3.3484	3.4327	3.5181
3.6044	3.6915	3.7792	3.8674	3.9558	4.0442	4.1326	4.2208	4.3085	4.3956
4.4819	4.5673	4.6516	4.7346	4.8162	4.8961	4.9743	5.0507	5.1249	5.1969
5.2666	5.3339	5.3985	5.4604	5.5194	5.5754	5.6284	5.6781	5.7246	5.7677
5.8074	5.8435	5.8760	5.9048	5.9299	5.9513	5.9688	5.9824	5.9922	5.9980

表 4: $n = 70$ 时, \mathbf{A} 的特征值 (从小到大排列)

2.0015	2.0060	2.0135	2.0240	2.0375	2.0539	2.0733	2.0955	2.1206	2.1486
2.1793	2.2127	2.2489	2.2877	2.3290	2.3729	2.4192	2.4679	2.5189	2.5721
2.6275	2.6850	2.7444	2.8057	2.8688	2.9336	3.0000	3.0679	3.1372	3.2078
3.2796	3.3525	3.4264	3.5011	3.5766	3.6527	3.7293	3.8064	3.8837	3.9612
4.0388	4.1163	4.1936	4.2707	4.3473	4.4234	4.4989	4.5736	4.6475	4.7204
4.7922	4.8628	4.9321	5.0000	5.0664	5.1312	5.1943	5.2556	5.3150	5.3725
5.4279	5.4811	5.5321	5.5808	5.6271	5.6710	5.7123	5.7511	5.7873	5.8207
5.8514	5.8794	5.9045	5.9267	5.9461	5.9625	5.9760	5.9865	5.9940	5.9985

表 5: $n = 80$ 时, \mathbf{A} 的特征值 (从小到大排列)

2.0012	2.0048	2.0107	2.0190	2.0297	2.0428	2.0581	2.0758	2.0958	2.1180
2.1425	2.1692	2.1981	2.2291	2.2622	2.2974	2.3347	2.3739	2.4150	2.4581
2.5030	2.5496	2.5980	2.6481	2.6998	2.7530	2.8077	2.8639	2.9214	2.9801
3.0401	3.1013	3.1635	3.2267	3.2908	3.3558	3.4215	3.4879	3.5550	3.6225
3.6905	3.7589	3.8276	3.8965	3.9655	4.0345	4.1035	4.1724	4.2411	4.3095
4.3775	4.4450	4.5121	4.5785	4.6442	4.7092	4.7733	4.8365	4.8987	4.9599
5.0199	5.0786	5.1361	5.1923	5.2470	5.3002	5.3519	5.4020	5.4504	5.4970
5.5419	5.5850	5.6261	5.6653	5.7026	5.7378	5.7709	5.8019	5.8308	5.8575
5.8820	5.9042	5.9242	5.9419	5.9572	5.9703	5.9810	5.9893	5.9952	5.9988

表 6: $n = 90$ 时, \mathbf{A} 的特征值 (从小到大排列)

2.0010	2.0039	2.0087	2.0155	2.0241	2.0347	2.0472	2.0616	2.0779	2.0960
2.1159	2.1377	2.1613	2.1867	2.2138	2.2426	2.2732	2.3054	2.3392	2.3747
2.4117	2.4503	2.4904	2.5319	2.5748	2.6192	2.6648	2.7118	2.7600	2.8094
2.8599	2.9116	2.9643	3.0180	3.0727	3.1282	3.1846	3.2418	3.2997	3.3583
3.4176	3.4774	3.5376	3.5984	3.6595	3.7210	3.7827	3.8446	3.9067	3.9689
4.0311	4.0933	4.1554	4.2173	4.2790	4.3405	4.4016	4.4624	4.5226	4.5824
4.6417	4.7003	4.7582	4.8154	4.8718	4.9273	4.9820	5.0357	5.0884	5.1401
5.1906	5.2400	5.2882	5.3352	5.3808	5.4252	5.4681	5.5096	5.5497	5.5883
5.6253	5.6608	5.6946	5.7268	5.7574	5.7862	5.8133	5.8387	5.8623	5.8841
5.9040	5.9221	5.9384	5.9528	5.9653	5.9759	5.9845	5.9913	5.9961	5.9990

表 7: $n = 100$ 时, \mathbf{A} 的特征值 (从小到大排列)

2 上机习题 2

2.1 问题描述

求实对称三对角阵的指定特征值及对应的特征向量。

- (1) 用 C++ 编制先利用二分法求实对称三对角阵指定特征值，再利用反幂法求对应特征向量的通用子程序。
- (2) 利用你所编制的子程序求 100 阶矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

的最大和最小特征值及对应的特征向量。

要求输出迭代次数，用时，特征值和特征向量。

2.2 程序介绍

本题分为两部分：使用二分法求特定的特征值、使用反幂法求某一特征值对应的特征向量。主要实现的函数有：

- `int changeSignNum(vector<vector<double>> A, double mu);`
计算对称三对角矩阵 \mathbf{A} 在 μ 处的变号数 $s_n(\mu)$
- `double bisectionMethod(vector<vector<double>> A, int m, double eps);`
使用二分法，求矩阵 \mathbf{A} 的第 m 小的特征值
- `vector<double> inversePowerMethod(vector<vector<double>> A, double lambda, double eps);`
使用反幂法求解矩阵 \mathbf{A} 的特征值 λ 对应的特征向量

2.3 实验结果

运行结果截图如图 2 所示。

其中，求解最大特征值时，二分法迭代次数为 27 次；用时 27ms；求出的最大特征值为 3.99903；对应的特征向量如图。

求解最小特征值时，二分法迭代次数为 27 次；用时 22ms；求出的最小特征值为 0.0010；对应的特征向量如图。

```
Microsoft Visual Studio 调试
Bisection Iterations: 27
Time consumed: 22 ms
Max Eigenvalue: 3.99903
Corresponding Eigenvector:
-0.0044 0.0088 -0.0131 0.0175 -0.0218 0.0261 -0.0304 0.0347 -0.0389 0.0431 -0.0472 0.0513 -0.0554 0.0594 -0.0633 0
.0672 -0.0710 0.0747 -0.0784 0.0820 -0.0855 0.0890 -0.0923 0.0956 -0.0987 0.1018 -0.1048 0.1076 -0.1104 0.1131 -
0.1156 0.1181 -0.1204 0.1226 -0.1247 0.1266 -0.1285 0.1302 -0.1318 0.1333 -0.1346 0.1358 -0.1369 0.1379 -0.1387 0
.1393 -0.1399 0.1403 -0.1406 0.1407 -0.1407 0.1406 -0.1403 0.1399 -0.1393 0.1387 -0.1379 0.1369 -0.1358 0.1346 -
0.1333 0.1318 -0.1302 0.1285 -0.1266 0.1247 -0.1226 0.1204 -0.1181 0.1156 -0.1131 0.1104 -0.1076 0.1048 -0.1018 0
.0987 -0.0956 0.0923 -0.0890 0.0855 -0.0820 0.0784 -0.0747 0.0710 -0.0672 0.0633 -0.0594 0.0554 -0.0513 0.0472 -
0.0431 0.0389 -0.0347 0.0304 -0.0261 0.0218 -0.0175 0.0131 -0.0087 0.0044

Bisection Iterations: 27
Time consumed: 22.0000 ms
Min Eigenvalue: 0.0010
Corresponding Eigenvector:
0.0044 0.0088 0.0131 0.0175 0.0218 0.0261 0.0304 0.0347 0.0389 0.0431 0.0472 0.0513 0.0554 0.0594 0.0633 0
.0672 0.0710 0.0747 0.0784 0.0820 0.0855 0.0890 0.0923 0.0956 0.0987 0.1018 0.1048 0.1076 0.1104 0.1131 0
.1156 0.1181 0.1204 0.1226 0.1247 0.1266 0.1285 0.1302 0.1318 0.1333 0.1346 0.1358 0.1369 0.1379 0.1387 0
.1393 0.1399 0.1403 0.1406 0.1407 0.1407 0.1406 0.1403 0.1399 0.1393 0.1387 0.1379 0.1369 0.1358 0.1346 0
.1333 0.1318 0.1302 0.1285 0.1266 0.1247 0.1226 0.1204 0.1181 0.1156 0.1131 0.1104 0.1076 0.1048 0.1018 0
.0987 0.0956 0.0923 0.0890 0.0855 0.0820 0.0784 0.0747 0.0710 0.0672 0.0633 0.0594 0.0554 0.0513 0.0472 0
.0431 0.0389 0.0347 0.0304 0.0261 0.0218 0.0175 0.0131 0.0087 0.0044

E:\大三课程学习\2023秋 数值代数\Homework\Numerical_Algebra\x64\Debug\Numerical_Algebra.exe (进程 16424)已退出, 代码为 0
按任意键关闭此窗口. . .
```

图 2: $n = 100$ 时, 最大、最小特征值以及对应的特征向量

2.4 结果分析

观察图 2 可知, 在当前求解精度 (10^{-7}) 下, 二分法迭代次数仅为 27 次。可见在求解实对称阵的指定特征值时, 二分法是一种高效的方法。