数值代数实验报告 2

Chase Young

2023 年 10 月 24 日

1　上机习题 1

1.1　问题描述

根据算法 2.5.1 实现对矩阵的无穷范数条件数的估计，并完成以下任务：

(1) 估计 5 到 20 阶 Hilbert 矩阵的无穷范数条件数并输出

(2) 设

$$\mathbf{A}_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ -1 & \dots & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n} \tag{1}$$

随机地选取 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，计算出 $\boldsymbol{b}=\mathbf{A}_n\boldsymbol{x}$，然后用列主元 Gauss 消去法求解此线性方程组，对 n 从 5 到 30 依次估计计算解的精度，并与真实的相对误差作比较。要求输出真实相对误差和估计的相对误差上界.

1.2　程序介绍

对于 (1)，使用算法 2.5.1 估计矩阵 $\mathbf{A}_n^{-1}$ 的无穷范数，再根据无穷范数意义下的条件数的定义

$$\kappa_\infty\left(\mathbf{A}_n\right)=\left\|\mathbf{A}_n\right\|_\infty\cdot\left\|\mathbf{A}_n^{-1}\right\|_\infty \tag{2}$$

可以估计出 5 到 20 阶 Hilbert 矩阵的无穷范数条件数.

对于 (2)，计算解记为 $\hat{\boldsymbol{x}}$. 定义 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{b}-\mathbf{A}_n\hat{\boldsymbol{x}}$. 利用式 (2)，可得在无穷范数意义下的计算精度的上界可以根据下式来估计

$$\tilde{\rho}=\kappa_\infty\left(\mathbf{A}\right)\frac{\|\boldsymbol{r}\|_\infty}{\|\boldsymbol{b}\|_\infty} \tag{3}$$

具体实现的函数有：

- void mat_mul_vec(vector<vector<double> > A, vector<double> x, vector<double>& b); 计算矩阵 $\mathbf{A}$ 和向量 $\boldsymbol{x}$ 的乘积，计算结果存在向量 $\boldsymbol{b}$ 中

- void sol_eqs_col_LU(vector<vector<double> > A, vector<double> b, vector<double>& sol); 使用列主元 Gauss 消去法求解线性方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，计算结果存在向量 $\boldsymbol{sol}$ 中

- double vec_1_norm(vector<double> w); 计算向量 $\boldsymbol{w}$ 的 1 范数

- double vec_infty_norm(vector<double> z, int& j); 计算向量 $\boldsymbol{z}$ 的无穷范数，其中 j 用于保存使得 $|z_j| = \|\boldsymbol{z}\|_\infty$ 的最小下标 j

- double vec_inner_prod(vector<double> x, vector<double> y); 计算两个相同大小的向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 的内积

- void transpose(vector<vector<double> > A, vector<vector<double> >& At); 计算矩阵 $\mathbf{A}$ 的转置，计算结果存在矩阵 $\mathbf{At}$ 中

- void vec_sign(vector<double> w, vector<double>& v); 计算向量 $\boldsymbol{w}$ 的符号函数并保存在向量 $\boldsymbol{v}$ 中，即 $\boldsymbol{v}_j = \operatorname{sgn} \boldsymbol{w}_i, i = 1, 2, \ldots, n$

- double inv_mat_infty_norm(vector<vector<double> > A); 使用算法 2.5.1 估计矩阵 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵的无穷范数

- double mat_infty_norm(vector<vector<double> > A); 计算矩阵 $\mathbf{A}$ 的无穷范数

- double kappa_infty(vector<vector<double> > A); 计算矩阵 A 的无穷范数意义下的条件数

- void print_mat(vector<vector<double> > A); 格式化打印矩阵 $\mathbf{A}$

- void print_vec(vector<double> b); 格式化打印向量 $\boldsymbol{b}$

- double precision(vector<vector<double> > A, vector<double> b, vector<double> x); 使用上述计算的矩阵 A 的无穷范数下的条件数，估计线性方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的计算精度 $\tilde{\rho}$

和第一章的上机程序一样，我们将上述函数编写在文件 Function.cpp 中，并相应地在头文件 Function.h 中声明；在 Exercise.cpp 中给出了题目的具体实现，并调用上述函数完成任务，相应的声明在头文件 Exercise.h 中；main 函数在 Homework.cpp 中，调用 Exercise.cpp 中的函数，求解相应的题目.

1.3 实验结果

在 main 函数中运行 exercise_2_1_1()，求解问题 (1)，运行结果如图 1(a) 所示.

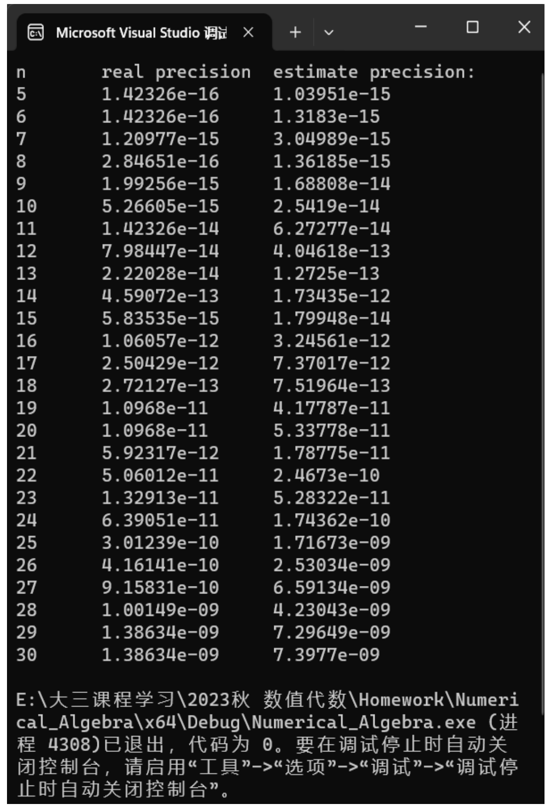
在 main 函数中运行 exercise_2_1_2()，求解问题 (2)，运行结果如图 1(b) 所示.

1.4 结果分析

观察图 1 中的运行结果，可以发现：

(1) Hilbert 矩阵的条件数非常大，这也解释了第一章习题中对以 Hilbert 矩阵为系数的线性方程组的求解误差较大的原因；

(a) (1) 运行截图



(b) (2) 运行截图

图 1: 运行截图

(2) 上述的条件数是在无穷范数意义下的，而我们知道取定空间维数后，各个范数都等价，从而 Hilbert 矩阵在其他范数意义下的条件数增长也非常快，因此，作为线性方程组的系数而言，Hilbert 矩阵是十分病态的矩阵；

(3) 对 (2) 中的矩阵 $\mathbf{A}_n$，从图 1(b) 可以看出，在阶数 5 到 30 的范围内，计算解的相对误差不超过 10^{-8}，因此使用列主元 Gauss 消去法求解这个方程组是可靠的；

(4) 观察图 1(b)，可以看出在当前范围内，计算解的相对误差的估计值和真实值相差不大，从而基于算法 2.5.1 的无穷范数意义下的条件数的计算是可靠的.