

# 数值分析实验报告 - Code 7

Chase Young

2024 年 4 月 15 日

## 1 实验目的

编写利用复化梯形公式和复化 3 点 Gauss 积分公式计算积分的通用程序，并计算下列积分：

$$(1) I_1 = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

$$(2) I_2 = \int_0^4 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$(3) I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos x} dx$$

取节点  $x_i, i = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$  为  $2^k, k = 1, 2, \dots, 7$ , 给出误差表格，并计算收敛阶。

## 2 实验方法

对于一般区间  $[a, b]$  上的复化梯形公式为：

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) [f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

复化 3 点 Gauss 积分公式为：

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{9} \sum_{k=0}^{2n-1} \left( 5 \left( f \left( \frac{x_k + x_{k+1}}{2} - h\sqrt{\frac{3}{5}} \right) + f \left( \frac{x_k + x_{k+1}}{2} + h\sqrt{\frac{3}{5}} \right) \right) + 8f \left( \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \right) \right)$$

利用上述公式即可计算上述积分的近似值。

## 3 实验结果

使用复化梯形公式计算得到的误差以及收敛阶如表 1, 2, 3所示。

观察上述结果，可知

- (1) 复化梯形公式的收敛阶数为 2；
- (2) 相比复化梯形公式，复化 Gauss 积分公式具有更高的收敛阶。其中收敛阶在  $N$  较大时的混乱情况是由已经达到机器精度导致的。

| $N$ | 复化梯形公式误差    | 收敛阶     | 复化 Gauss 公式 | 收敛阶      |
|-----|-------------|---------|-------------|----------|
| 2   | 1.54539e-02 | -       | 3.61106e-08 | -        |
| 4   | 3.84004e-03 | 2.00878 | 4.02153e-10 | 6.48853  |
| 8   | 9.58518e-04 | 2.00224 | 5.74241e-12 | 6.12994  |
| 16  | 2.39536e-04 | 2.00056 | 8.75966e-14 | 6.03464  |
| 32  | 5.98782e-05 | 2.00014 | 1.44329e-15 | 5.92344  |
| 64  | 1.49692e-05 | 2.00004 | 3.33067e-16 | 2.11548  |
| 128 | 3.74227e-06 | 2.00001 | 5.55112e-16 | -0.73697 |

表 1: 复化梯形公式和复化 Gauss 积分公式计算  $I_1$

| $N$ | 复化梯形公式误差    | 收敛阶      | 复化 Gauss 公式 | 收敛阶      |
|-----|-------------|----------|-------------|----------|
| 2   | 5.53307e-02 | -        | 1.22378e-03 | -        |
| 4   | 3.37104e-05 | 10.68067 | 7.57142e-07 | 10.65849 |
| 8   | 5.62127e-09 | 12.55001 | 5.30381e-12 | 17.12317 |
| 16  | 1.62798e-09 | 1.78781  | 1.05915e-13 | 5.64605  |
| 32  | 4.24848e-10 | 1.93807  | 1.77636e-15 | 5.89785  |
| 64  | 1.07406e-10 | 1.98388  | 0.00000e+00 | Inf      |
| 128 | 2.69275e-11 | 1.99592  | 1.11022e-16 | -Inf     |

表 2: 复化梯形公式和复化 Gauss 积分公式计算  $I_2$

| $N$ | 复化梯形公式误差    | 收敛阶      | 复化 Gauss 公式 | 收敛阶      |
|-----|-------------|----------|-------------|----------|
| 2   | 5.61191e-01 | -        | 6.11656e-03 | -        |
| 4   | 3.75927e-02 | 3.89997  | 7.38328e-04 | 3.05039  |
| 8   | 1.92788e-04 | 7.60729  | 4.32607e-06 | 7.41506  |
| 16  | 5.12258e-09 | 15.19979 | 1.15024e-10 | 15.19884 |
| 32  | 0.00000e+00 | Inf      | 2.66454e-15 | 15.39769 |
| 64  | 2.22045e-15 | -Inf     | 1.33227e-15 | 1.00000  |
| 128 | 8.88178e-16 | 1.32193  | 5.32907e-15 | -2.00000 |

表 3: 复化梯形公式和复化 Gauss 积分公式计算  $I_3$