

数值分析实验报告 - Code 4

Chase Young

2024 年 4 月 1 日

1 实验目的

编程实现用 Richardson 外推计算 $f'(x)$ 的值, $h = 1$ 。函数 $f(x)$ 分别取

- $\ln x, x = 3, M = 3$
- $\tan x, x = \sin^{-1}(0.8), M = 4$
- $\sin(x^2 + \frac{1}{3}x), x = 0, M = 5$

并输出相应的三角阵列。

2 实验方法

对于给定的函数 f , 定义函数 $\varphi(x) = \frac{1}{2h}(f(x+h) - f(x-h))$, 由 Richardson 外推公式, 先计算初值:

$$D(n, 0) = \varphi(h/2^n), n = 0, 1, \dots, M$$

然后执行下列公式:

$$D(n, k) = \frac{4^k}{4^k - 1} D(n, k-1) - \frac{1}{4^k - 1} D(n-1, k-1), k = 1, 2, \dots, M; n = k, k+1, \dots, M$$

最终得到的 $D(M, M)$ 即为要求的结果。

具体实现见函数

- **function** D = Richardson(f, x, m)

3 实验结果

运行脚本 code_4.m, 计算对于要求的 3 种函数的 Richardson 外推结果, 输出的三角阵列如(1), (2), (3)所示。

$$\begin{array}{cccc} 0.3465736 & & & \\ 0.3364722 & 0.3331051 & & \\ 0.3341082 & 0.3333201 & 0.3333345 & \\ 0.3335264 & 0.3333325 & 0.3333333 & 0.3333333 \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{cccccc}
-1.3061863 & & & & & \\
6.4653364 & 9.0558439 & & & & \\
3.2090999 & 2.1236878 & 1.6615440 & & & \\
2.8729801 & 2.7609402 & 2.8034236 & 2.8215487 & & \\
2.8009018 & 2.7768757 & 2.7779381 & 2.7775336 & 2.7773609 &
\end{array} \tag{2}$$

$$\begin{array}{cccccc}
0.1767840 & & & & & \\
0.3214776 & 0.3697088 & & & & \\
0.3322976 & 0.3359042 & 0.3336506 & & & \\
0.3331962 & 0.3334958 & 0.3333352 & 0.3333302 & & \\
0.3333067 & 0.3333435 & 0.3333333 & 0.3333333 & 0.3333333 & \\
0.3333271 & 0.3333340 & 0.3333333 & 0.3333333 & 0.3333333 & 0.3333333
\end{array} \tag{3}$$

由上述结果可见,

- (1) 对于 $\ln x, x = 3, M = 3$ 的 Richardson 外推, 最终计算结果为 0.3333333, 和精确结果 $f'(3) = \frac{1}{3}$ 相符合
- (2) 对于 $\tan x, x = \sin^{-1}(0.8), M = 4$ 的 Richardson 外推, 最终计算结果为 2.7773609, 和精确结果 $f'(\sin^{-1}(0.8)) = 2.77778$ 较为接近
- (3) 对于 $\sin(x^2 + \frac{1}{3}x), x = 0, M = 5$ 的 Richardson 外推, 最终计算结果为 0.3333333, 和精确结果 $f'(0) = \frac{1}{3}$ 相符合

4 后续讨论

从上述结果中可知, 在当前的计算字长下, 随着阶数 M 的增大, Richardson 外推的计算结果精度变高。