数值分析实验报告 - Code 1

Chase Young

2024 年 2 月 28 日

1 实验目的

对函数

$$f\left(x\right)=\frac{1}{1+x^2},x\in\left[-5,5\right]$$

构造 Lagrange 插值多项式 $p\left(x\right)$，其中插值结点为：

(1) 等间距网格点：$x_i=5-\frac{10}{N}$，$i=0,1,\ldots,N$;

(2) Chebyshev 网格点：$x_i=-5\cos\left(\frac{2i+1}{2N+2}\pi\right)$，$i=0,1,\ldots,N$

并计算如下误差：

$$error=\max_i\left\{\left|f\left(y_i\right)-p\left(y_i\right)\right|,y_i=\frac{i}{10}-5,i=0,1,\ldots,100\right\}.$$

分别对 $N=5,10,20,40$ 比较上述两组节点的结果，并在绘制 $N=10$ 时两种插值方案的计算结果。

2 实验方法

我们根据 Lagrange 插值的公式，在 $x_1,x_2,\ldots,x_N$ 点处，得到插值多项式的表达式

$$p\left(x\right)=\sum_{i=0}^{N}f\left(x_i\right)\ell_i\left(x\right), \tag{1}$$

其中

$$\ell_i\left(x\right)=\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j},i=0,1,\ldots,N.$$

分别对 $N=5,10,20,40$ 和要求的两组插值点进行计算，得到插值多项时后，在 $y_i=\frac{i}{10}-5,i=0,1,\ldots,100$ 处计算 $p\left(x\right)-f\left(x\right)$ 的离散无穷模，作为插值精确度的度量。

具体而言，定义了函数

- **function** y = interpolate_l(xx, yy, x)

其中 xx 和 yy 是插值所用的节点对，计算并返回插值函数在 x 点处的函数值 y。相关代码见脚本 interpolate_l.m。

对于要求的不同的 N，分别产生插值节点对 xx 和 yy，并计算在 y_i 处的插值函数与 $f\left(x\right)$ 的差的绝对值；遍历所有 i，得到上述绝对值的最大值；绘制 $N=10$ 时两组插值节点处的插值函数的图像。相关代码见脚本 code_1.m。

3 实验结果

经过计算，两组插值节点得到的插值函数在 $y_i, i = 0, 1, \ldots, 100$ 处的离散无穷模如图 1所示。

```
命令行窗口
>> code_1
N=5
Max Error of grid (1): 0.432692
Max Error of grid (2): 0.555911
N=10
Max Error of grid (1): 1.915643
Max Error of grid (2): 0.108929
N=20
Max Error of grid (1): 58.278125
Max Error of grid (2): 0.015325
N=40
Max Error of grid (1): 78689.037485
Max Error of grid (2): 0.000274
```

图 1: 两组插值节点处的插值函数精度比较

当 $N = 10$ 时，分别绘制两组插值点处的插值多项式和函数 $f(x)$ 的图像，如图 2所示。

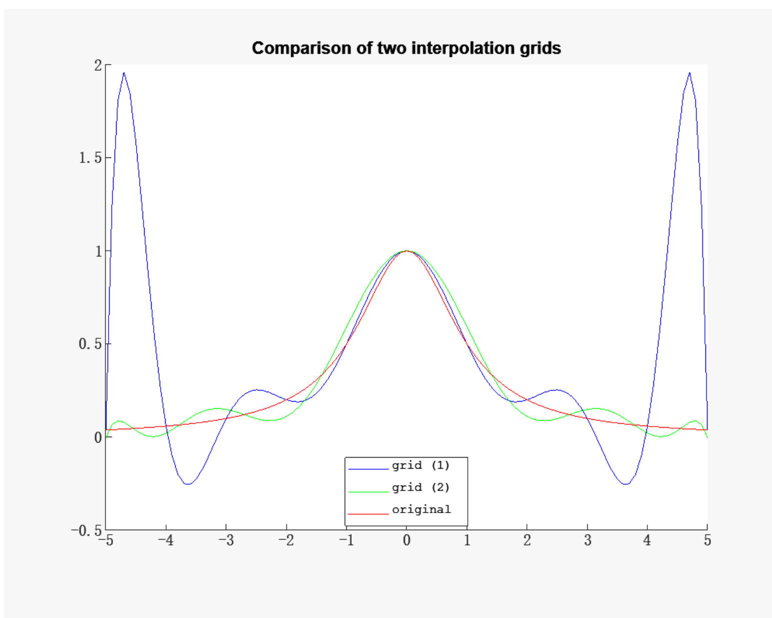

图 2: 两组插值节点处的插值函数与 $f(x)$ 的图像

4 后续讨论

从上述实验结果中可以看出，无论是从数值上来看，还是从图像上来看，在插值节点 (2) 上计算得到的插值多项式都比在插值节点 (1) 上计算得到的插值多项式更精确，即能够更好地逼近原来的函数 $f(x)$。这也与“Chebyshev 点是最佳结点”这一结论相吻合。

A 代码

本部分包含了主要用到的代码。

interpolate_l.m

```
function y = interpolate_l(xx, yy, x)
    % Lagrange插值，返回x处的插值函数值
    n = length(xx);
    l = ones(n, 1);
    for i = 1:n
        for j = 1:n
            if j ~= i
                l(i) = l(i) * (x-xx(j)) / (xx(i)-xx(j));
            end
        end
    end
    y = dot(yy, l);
end
```

code_1.m

```
% 拉格朗日插值
NList = [5, 10, 20, 40];
error1 = zeros(4, 1);
error2 = zeros(4, 1);
for k = 1:length(NList)
    N = NList(k);
    x1 = 5 - (0:10/N:10);
    y1 = 1 ./ (1+x1.^2);
    x2 = (1/(2*N+2)):(1/(N+1)):((2*N+1)/(2*N+2));
    x2 = -5*cos(pi*x2);
    y2 = 1 ./ (1+x2.^2);

    yTest = (0:0.1:10) - 5;
    p1 = zeros(length(yTest), 1);
    p2 = p1;
    for i = 1:length(yTest)
        p1(i) = interpolate_l(x1, y1, yTest(i));
        p2(i) = interpolate_l(x2, y2, yTest(i));
    end
    error1(k) = max(abs(p1' - (1./(1+yTest.^2))));
    error2(k) = max(abs(p2' - (1./(1+yTest.^2))));

    if N == 10
        plot(yTest, p1, 'b');
        hold on;
        plot(yTest, p2, 'g');
        hold on;
        xx = -5:0.1:5;
```

```
        yy = 1./(1+xx.^2);
        plot(xx, yy, 'r');
        legend('grid (1)', 'grid (2)', 'original','Location', 'south');
        title("Comparison of two interpolation grids");
    end
end

for k = 1:length(NList)
    fprintf("N=%d\n", NList(k));
    fprintf("Max Error of grid (1): %.6f\n", error1(k));
    fprintf("Max Error of grid (2): %.6f\n", error2(k));
end
```
