数值分析实验报告 - Code 11

Chase Young

2024 年 5 月 5 日

1 实验目的

使用 Adams-Bashforth 公式计算如下的 ODE 初值问题在 $t=1$ 处的数值解：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{t-\mathrm{e}^{-t}}{x+\mathrm{e}^{x}} \\ x\left(0\right)=0 \end{cases}$$

要求使用 Runge-Kutta 格式得到初值，取节点 $x_i, i=0,1,,\ldots,N$, N 为 $2^k, k=3,4,\ldots,8$，并计算收敛阶。

2 实验方法

对于一般的 ODE 初值问题：

$$\begin{cases} x' = f\left(t,x\right) \\ x\left(t_0\right)=x_0 \end{cases}$$

5 阶 Adams-Bashforth 公式如下：记等距节点 $t_i=t_0+ih$，$f_i=f\left(t_i,x_i\right)$，并假设已经计算得到 $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}, x_{n-4}$，则可由下面的公式计算 x_{n+1}

$$x_{n+1}=x_n+\frac{h}{720}\left(1901f_n-2774f_{n-1}+2616f_{n-2}-1274f_{n-3}+251f_{n-4}\right)$$

其中，启动步骤中的 x_0 由初值得到，x_1,x_2,x_3,x_4 可由 Runge-Kutta 格式得到。

本部分的代码实现见函数 AdamsBashforth.m。

3 实验结果

对题中的算例进行测试，绘制解曲线如图 1所示。

计算结果表明，$k=3,4,\ldots,8$ 时，对应的误差均为 0。这是由于 Adams-Bashforth 算法收敛到原问题的解 $x\left(t\right)=-t$，这是一个关于 t 的一次多项式，注意到实验中使用的 Adams-Bashforth 算法具有 5 阶收敛性，因而误差均为 0. 也因为如此，无法有效计算该算法的收敛阶。

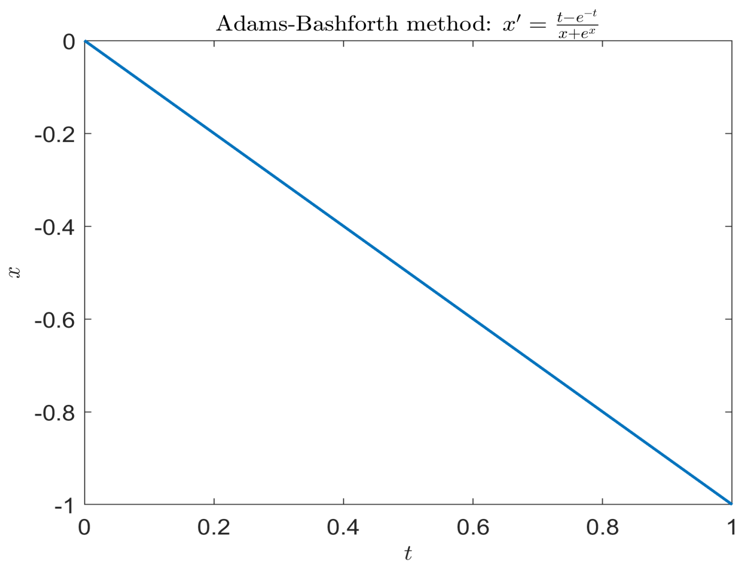

图 1: Adams-Bashforth 算法得到的解曲线