

数值分析实验报告 - Code 6

Chase Young

2024 年 4 月 7 日

1 实验目的

对函数 $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$, $x \in [-1, 1]$ 构造 Lagrange 插值多项式 $p_L(x)$, 插值节点取为:

(1) $x_i = 1 - \frac{2}{N}i$, $i = 0, 1, \dots, N$;

(2) $x_i = -\cos\left(\frac{i+1}{N+2}\pi\right)$, $i = 0, 1, \dots, N$

利用 $\int_{-1}^1 p_L(x) dx$ 计算积分 $\int_{-1}^1 f(x) dx$ 的近似值, 并计算如下误差

$$\left| \int_{-1}^1 p_L(x) dx - \int_{-1}^1 f(x) dx \right|$$

对 $N = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$ 比较以上两组节点的结果。

2 实验方法

对于函数 $f(x)$, 给定节点 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ 的数值积分公式具有如下形式:

$$\int_a^b f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \dots + A_N f(x_N)$$

且此式对次数小于等于 N 的多项式精确成立。由于系数 A_0, A_1, \dots, A_N 具有唯一性, 我们可以取 $f(x) = x^k$, $k = 0, 1, \dots, N$, 获得 $N+1$ 个线性方程, 求解这个线性方程组, 即可得到系数 A_0, A_1, \dots, A_N , 从而得到函数 $f(x)$ 的数值积分。

3 实验结果

对 $N = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$, 依次根据插值多项式计算函数 $f(x)$ 的数值积分, 其中节点分别取等距节点和 Chebyshev 点, 得到的结果如表 1, 2所示。

观察表 1, 2, 可知基于多项式插值的数值积分在等距节点处工作得并不好, 这是由于随着节点数量增加, Runge 现象越发显著导致的。而对于 Chebyshev 节点, 由其最优性, 在这些节点上做的数值积分精度较高, 可以达到 10^{-6} 。

N	$\int_{-1}^1 p_L(x) dx$	$\int_{-1}^1 f(x) dx$	$ \int_{-1}^1 p_L(x) dx - \int_{-1}^1 f(x) dx $
5	-4.615385e-01	5.493603e-01	1.010899e+00
10	-9.346601e-01	5.493603e-01	1.484020e+00
15	-8.311118e-01	5.493603e-01	1.380472e+00
20	5.369910e+00	5.493603e-01	4.820550e+00
25	5.399863e+00	5.493603e-01	4.850503e+00
30	-1.537939e+02	5.493603e-01	1.543433e+02
35	-1.736183e+02	5.493603e-01	1.741677e+02
40	1.294138e+02	5.493603e-01	1.288645e+02

表 1: 等距节点处的数值积分结果

N	$\int_{-1}^1 p_L(x) dx$	$\int_{-1}^1 f(x) dx$	$ \int_{-1}^1 p_L(x) dx - \int_{-1}^1 f(x) dx $
5	3.984577e-01	5.493603e-01	1.509026e-01
10	5.732322e-01	5.493603e-01	2.387185e-02
15	5.461245e-01	5.493603e-01	3.235788e-03
20	5.498082e-01	5.493603e-01	4.479219e-04
25	5.492995e-01	5.493603e-01	6.077695e-05
30	5.493685e-01	5.493603e-01	8.223698e-06
35	5.493593e-01	5.493603e-01	1.038367e-06
40	5.493590e-01	5.493603e-01	1.349386e-06

表 2: Chebyshev 节点处的数值积分结果

4 后续讨论

从上述结果可知, 随着节点数量的增加, 由于 Runge 现象的存在, 等距节点处的数值积分结果并不理想; 因此, 当节点数量较多时, 使用 Chebyshev 节点做数值积分更加合适。