

数值分析实验报告 - Code 10

Chase Young

2024 年 5 月 5 日

1 实验目的

应用 RKF45 或 RKF54 方法，设计实现自适应方法，求解如下常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} y' = e^{yx} + \cos(y - x) \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

初始步长取为 $h = 0.01$ 。要求在解溢出前终止，并且要求先求出解的范围，提示用户输入一个介于上述范围内的值，应用简单的两点线性插值计算对应的函数值。

2 实验方法

实验中使用 RKF54 方法。对于一般的 ODE 初值问题：

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

令

$$\begin{aligned} F_1 &= hf(x, y) \\ F_2 &= hf\left(x + \frac{1}{4}h, y + \frac{1}{4}F_1\right) \\ F_3 &= hf\left(x + \frac{3}{8}h, y + \frac{3}{32}F_1 + \frac{9}{32}F_2\right) \\ F_4 &= hf\left(x + \frac{12}{13}h, y + \frac{1932}{2197}F_1 - \frac{7200}{2197}F_2 + \frac{7296}{2197}F_3\right) \\ F_5 &= hf\left(x + h, y + \frac{439}{216}F_1 - 8F_2 + \frac{3680}{513}F_3 - \frac{845}{4104}F_4\right) \\ F_6 &= hf\left(x + \frac{1}{2}h, y - \frac{8}{27}F_1 + 2F_2 - \frac{3544}{2565}F_3 + \frac{1859}{4104}F_4 - \frac{11}{40}F_5\right) \end{aligned}$$

则 RKF54 的迭代格式为

$$y(x+h) = y(x) + \frac{16}{135}F_1 + \frac{6656}{12825}F_3 + \frac{28561}{56430}F_4 - \frac{9}{50}F_5 + \frac{2}{55}F_6$$

实验中使用如下方式自适应地调节步长 h :

(1) 每步采用如下方式计算截断误差 e :

$$e = \frac{1}{360}F_1 - \frac{128}{4275}F_3 - \frac{2197}{75240}F_4 + \frac{1}{50}F_5 + \frac{2}{55}F_6$$

(2) 按照下述公式更新步长 h :

$$h = 0.9h \left(\frac{\delta}{|e|} \right)^{\frac{1}{1+p}}$$

其中 δ 是事先指定的容限，实验中取为 $1e-7$ ； p 是一对 Runge-Kutta 方法中第一个公式的阶。

此外，实验中还设置了最小步长 h_{\min} ，在 (2) 中更新后的步长不能小于这个最小值。

本部分代码见函数 `adaptiveRKF.m`。

3 实验结果

对题中的算例进行测试，绘制解曲线如图 1所示。

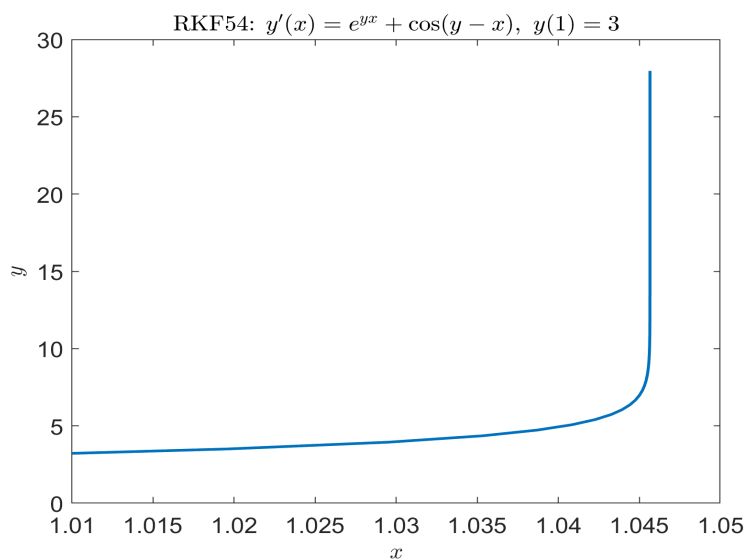


图 1: 使用 RKF54 方法计算得到的解曲线

程序计算得到解的存在区间为 $[1, 1.04564]$ 。用户可以在给定的范围内输入自变量的值，程序通过简单的线性插值得到该点处的近似函数值，如图 2所示。

```
>> code_10
Please enter a number between 1 and 1.04564: 1.04551
Value at 1.04551 is: 8.48950
```

图 2: 用户交互示范