数值分析实验报告 - Code 12

Chase Young

2024 年 5 月 13 日

1 实验目的

编写一个有限差分法求解线性两点边值问题的通用计算机程序，允许用户输入 a, α, b, β, n 以及函数 u, v, w，并对下面的例子测试：

(1) $\begin{cases} x'' = -x \\ x(0) = 3, \quad x(\dfrac{\pi}{2}) = 7 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x'' = 2\mathrm{e}^t - x \\ x(0) = 2, \quad x(1) = \mathrm{e} + \cos 1 \end{cases}$

此外，计算这两种测试情况中数值解的误差，取 $n = 10, 20, 40, 80, 160$，并计算收敛阶。

2 实验方法

对于线性两点边值问题：

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x') \\ x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta \end{cases}$$

均匀取点 $t_i = a + ih, \quad 0 \le i \le n+1, \quad h = \frac{b-a}{n+1}$。用 y_i 表示 $x(t_i)$ 的近似值，则可以将上述方程离散化为如下的线性方程组：

$$\begin{cases} y_0 = \alpha \\ h^{-2}\left(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}\right) = f\Big(t_i, y_i, (2h)^{-1}\left(y_{i+1} - y_{i-1}\right)\Big) \\ y_{n+1} = \beta \end{cases}$$

从而可以转化为形如 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的标准线性代数方程组的形式，这样就把常微分方程的求解转化为线性代数方程组的求解。

3 实验结果

分别对 (1)(2) 中的两个线性常微分方程的两点边值问题求解。由于 (1)(2) 的解析解分别为

$$x(t) = 3\cos t + 7\sin t$$

和

$$x(t) = \mathrm{e}^t + \cos t$$

我们可以通过离散 ℓ^∞ 模的方式计算误差，从而计算得到算法的收敛阶，结果如表 1所示。

n	问题 (1)ℓ^∞ 误差	收敛阶	问题 (2)ℓ^∞ 误差	收敛阶
10	4.72809e-3	-	2.44006e-4	-
20	1.29793e-3	1.86505	6.71202e-05	1.86210
40	3.40223e-4	1.93166	1.76067e-05	1.93062
80	8.71739e-5	1.96452	4.51145e-06	1.96447
160	2.20637e-5	1.98222	1.14188e-06	1.98217

表 1: 问题 (1)(2) 测试结果

可以看到，随着采样数 n 的增大，算法的收敛阶逐渐靠近 2，因而在这两个问题中，FDM 算法的收敛阶为 2.