数值分析实验报告 - Code 9

Chase Young

2024 年 4 月 22 日

1 实验目的

使用四阶 Runge-Kutta 方法和各种 λ 值（5，-5，10），数值求解下列初值问题：

$$\begin{cases} x' = \lambda x + \cos t - \lambda \sin t \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

在区间 $\{0, 5\}$ 上比较数值解和解析解，利用步长 $h = 0.01$，并分析 λ 对数值准确性的影响。

2 实验方法

四阶 Runeg-Kutta 方法求解一阶 ODE 的初值问题计算公式如下：

设所求的初值问题为

$$\begin{cases} x' = f(t, x),\ x[a, b] \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

选定步长 $h > 0$ 后则有如下的显示迭代格式：

$$x(t + h) = x(t) + \frac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)$$

其中

$$\begin{cases} F_1 = hf(t, x) \\ F_2 = hf\left(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}F_1\right) \\ F_3 = hf\left(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}F_2\right) \\ F_4 = hf(t + h, x + F_3) \end{cases}$$

本实验中 4 阶 Runeg-Kutta 方法的实现见函数 RK4.m。

3 实验结果

分别对 $\lambda = 5, -5, -10$，使用 4 阶 Runge-Kutta 方法，求解题中的一阶 ODE 的初值问题。注意到此初值问题有解析解 $x(t) = \sin t$，从而可以计算出数值解的误差。输出 k, t, x 和误差 e 如表1所示：

分别绘制不同 λ 取值下对应的误差曲线，如图 1所示。

观察上述结果，可以看出：

表 1: 不同 λ 取值下 4 阶 Runge-Kutta 方法的求解结果

k	t	x	e
1	0.000	0.000	0.000e+00
2	0.010	0.010	8.432e-12
3	0.020	0.020	1.600e-11
4	0.030	0.030	2.267e-11
5	0.040	0.040	2.838e-11
⋮	⋮	⋮	⋮
497	4.960	17.594	1.856e+01
498	4.970	18.548	1.951e+01
499	4.980	19.551	2.052e+01
500	4.990	20.606	2.157e+01
501	5.000	21.714	2.267e+01

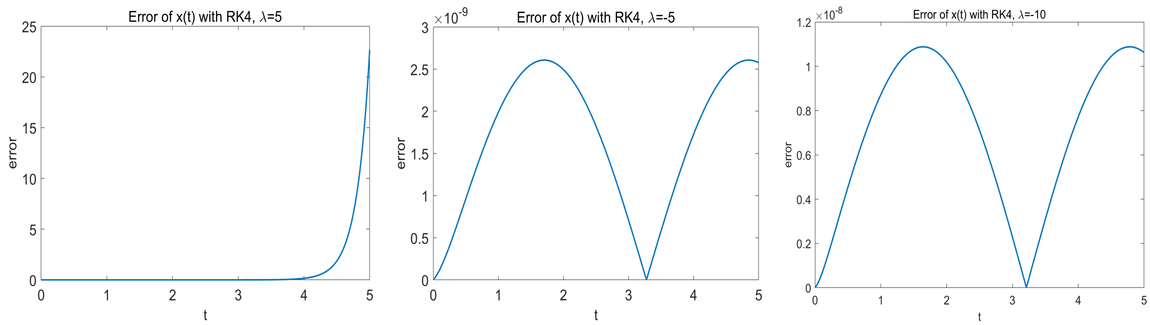
(a) $\lambda = 5$

k	t	x	e
1	0.000	0.000	0.000e+00
2	0.010	0.010	8.859e-12
3	0.020	0.020	1.858e-11
4	0.030	0.030	2.912e-11
5	0.040	0.040	4.043e-11
⋮	⋮	⋮	⋮
497	4.960	-0.970	2.589e-09
498	4.970	-0.967	2.586e-09
499	4.980	-0.964	2.583e-09
500	4.990	-0.962	2.579e-09
501	5.000	-0.959	2.576e-09

(b) $\lambda = -5$

k	t	x	e
1	0.000	0.000	0.000e+00
2	0.010	0.010	3.642e-11
3	0.020	0.020	7.976e-11
4	0.030	0.030	1.294e-10
5	0.040	0.040	1.847e-10
⋮	⋮	⋮	⋮
497	4.960	-0.970	1.071e-08
498	4.970	-0.967	1.069e-08
499	4.980	-0.964	1.067e-08
500	4.990	-0.962	1.065e-08
501	5.000	-0.959	1.062e-08

(c) $\lambda = -10$



(a) $\lambda = 5$ (b) $\lambda = -5$ (c) $\lambda = -10$

图 1: 不同 λ 取值下对应的误差曲线

(1) 当 $\lambda > 0$ 时，4 阶 Runge-Kutta 方法的误差随着前进步数的增加而显著增加，此时迭代格式可能是不稳定的；

(2) 当 $\lambda < 0$ 时，误差随着前进步数呈周期性变化，但总体保持在一个较低水平。