Adam Kapuściński | 229907
Damian Szczeciński | 230016

Przedmiot
Metody numeryczne i optymalizacyjne

Treść zadania 1

Celem zadania pierwszego jest zaimplementowanie i porównanie ze sobą dwóch metod rozwiązywania (znajdowania miejsca zerowego) równań nieliniowych. W naszym przypadku tymi metodami były:

1) ***Metoda stycznych*** – inaczej zwana Metodą Newtona jest algorytmem iteracyjnym mającym na celu przybliżenie wartości pierwiastka funkcji. Polega na prowadzeniu stycznych z osią OX dla kolejnych wartości $(x_i, f(x_i))$. W ten sposób otrzymujemy ciąg przybliżeń. Dla poprawnego działania tego algorytmu musimy założyć, że badana funkcja ma w przedziale ciągłą drugą pochodną, i że znak pierwszej jak i drugiej pochodnej są w tym samym przedziale stałe.

   W naszym przypadku:
   1. Wybierany jest punkt początkowy x_0, z którego następnie wyprowadzana jest styczna do wykresu funkcji,
   2. Punkt przecięcia z osią X jest naszym pierwszym przybliżeniem wartości pierwiastka funkcji,
   3. Jeżeli otrzymany wynik jest satysfakcjonujący program kończy działanie,
   4. W przeciwnym wypadku otrzymana wartość staje się kolejnym punktem początkowym algorytmu.

   Wzór, z którego skorzystaliśmy w naszym programie ma postać:

$$\boldsymbol{x_{i+1} = x - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

2) ***Reguła falsi*** – jest algorytmem rozwiązywania równań nieliniowych jednej zmiennej. Metoda ta bazuje na fałszywym przeświadczeniu, że na pewnym przedziale funkcja jest liniowa. Polega na wyznaczaniu coraz mniejszych przedziałów w poszukiwaniu miejsca zerowego.

   W naszym przypadku:
   1. Sprawdzane jest założenie, że znaki na krańcach przedziału są przeciwne,
   2. Jeżeli założenie jest spełnione przedział jest dzielony cięciwą łączącą krańce obecnego przedziału,
   3. Punkt przecięcia prostej z osią X jest przybliżeniem pierwiastka naszego równania,

4. Jeżeli wartość funkcji w wyznaczonym punkcie jest satysfakcjonująca to program kończy działanie,
5. W przeciwnym wypadku, jeżeli funkcja ma różne znaki dla początku przedziału i otrzymanego punktu, punkt ten staje się nowym końcem przedziału,
6. Inaczej zachodzi odwrotne działanie, czyli otrzymana wartość staje się nowym początkiem przedziału .

Wzór, z którego skorzystaliśmy w naszym programie ma postać:

$$\boldsymbol{x_0 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)}$$

gdzie: a – początek przedziału, b – koniec przedziału.

Spis funkcji dla których przeprowadziliśmy badania:

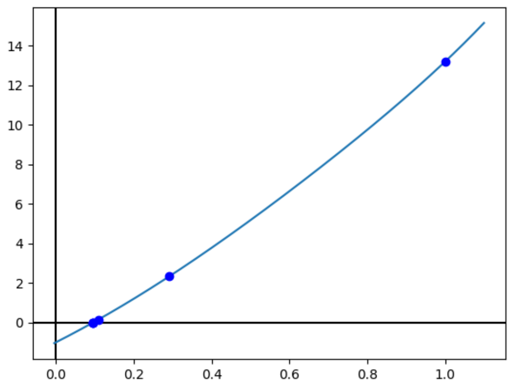
1. $\boldsymbol{f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 1.2x^3 + 5x^2 + 10x - 1}$
2. $\boldsymbol{f(x) = sin(5x) + ctg(x) - 15x^2 - 10x}$
3. $\boldsymbol{f(x) = cos(e^{-0.001*x^2}) - 0.6}$
4. $\boldsymbol{f(x) = sin(5x) + e^{ctg(x)}}$
5. $\boldsymbol{f(x) = arctan(20sin(x)) - 0,4}$

Wyniki

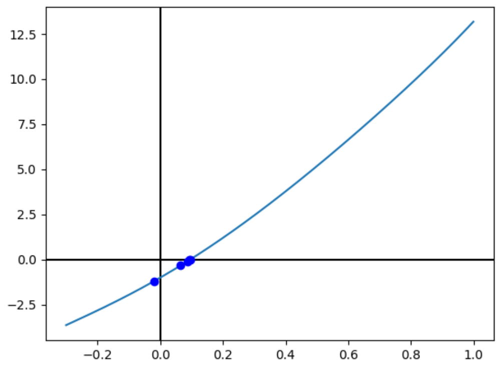
1. $\boldsymbol{f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 1.2x^3 + 5x^2 + 10x - 1}$

Ilość iteracji: $i = 5$

Metoda stycznych:
początkowy x: $x = 1$
$x = 0.09538566605790695$
$y = -1.1102230246251565 * 10^{-16}$
$|x_i - x_{i-1}| = 3.382939026130849 * 10^{-9}$
$|f(x)| = |y|$

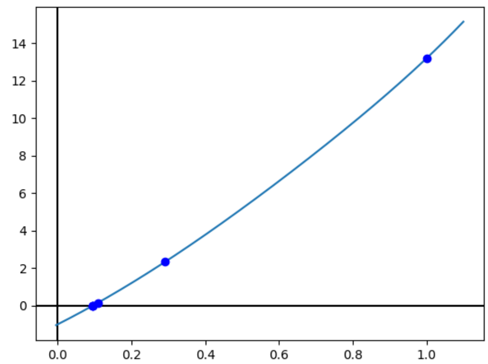


Reguła falsi:
początkowy przedział: $x \in (-0.3, 1)$
$x = 0.0949101968868531$
$y = -0.005214980202551844$
$|x_i - x_{i-1}| = 0.0014382695560574282$
$|f(x)| = |y|$

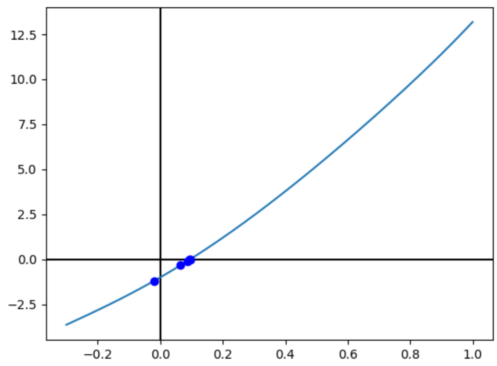


Błąd: $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$ *dla* $\varepsilon = 0.001$

Metoda stycznych:
początkowy x: $x = 1$
ilość iteracji: $i = 4$
$x = 0.09538566944084598$
$y = 3.711251750360134 * 10^{-8}$
$|x_i - x_{i-1}| = 8.53352717829492 * 10^{-5}$
$|f(x)| = |y|$

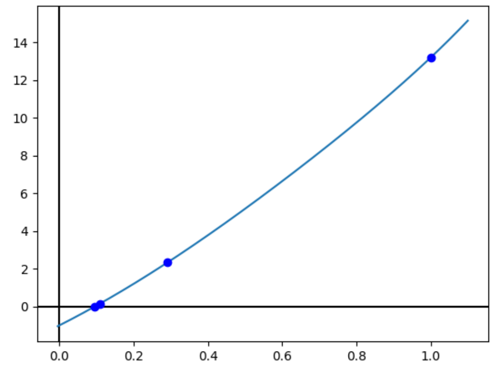


Reguła falsi
początkowy przedział: $x \in (-0.3, 1)$
ilość iteracji: $i = 6$
$x = 0.095267633355085$
$y = -0.0012948062347474254$
$|x_i - x_{i-1}| = 0.00035743646823190034$
$|f(x_i)| = |y|$

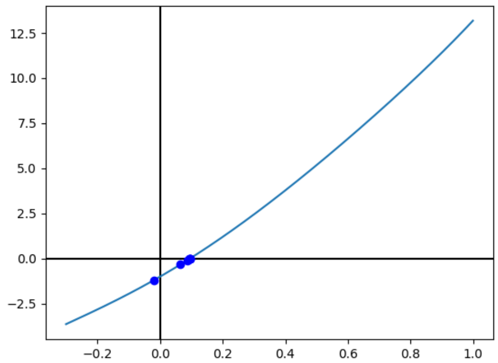


Błąd: $|f(x_i)| < \varepsilon$ *dla* $\varepsilon = 0.001$

Metoda stycznych:
początkowy x: $x = 1$
ilość iteracji: $i = 3$
$x = 0.09547100471262893$
$y = 0.000936244445436385$
$|x_i - x_{i-1}| = 0.013572265684282964$
$|f(x_i)| = |y|$



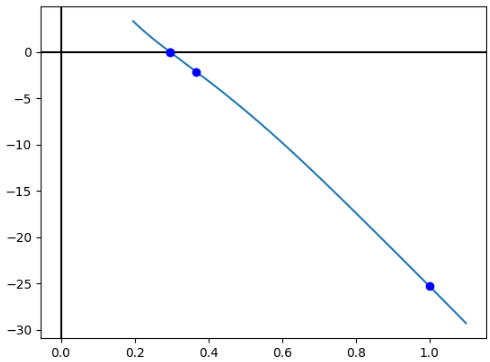
Reguła falsi:
początkowy przedział: $x \in (-0.3, 1)$
ilość iteracji: $i = 7$
$x = 0.095356371098337$
$y = -0.00032137584908109584$
$|x_i - x_{i-1}| = 8.8737743252007 * 10^{-5}$
$|f(x_i)| = |y|$



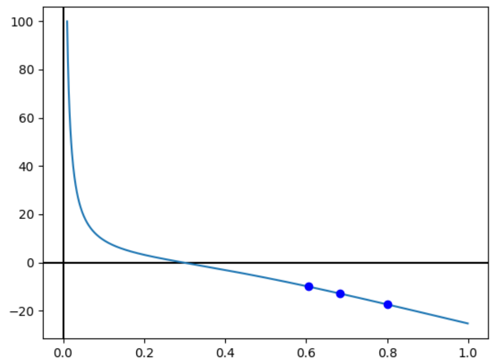
2. $f(x) = sin(5x) + ctg(x) - 15x^2 - 10x$

Ilość iteracji: $i = 3$

Metoda stycznych:
Początkowy x: $x = 1$
$x = 0.29602550801374405$
$y = 1.5783588858120368 * 10^{-6}$
$|x_i - x_{i-1}| = 0.00037914164194008393$
$|f(x_i)| = |y|$

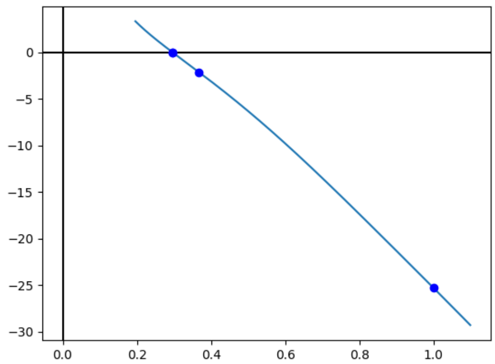


Reguła falsi:
Początkowy przedział: $x \in (0.01, 1)$
$x = 0.6061537221335093$
$y = -10.019708631969099$
$|x_i - x_{i-1}| = 0.07673091441164037$
$|f(x_i)| = |y|$

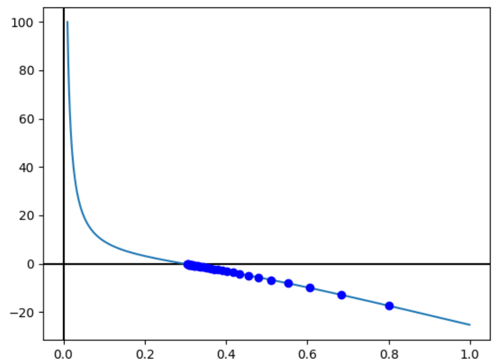


Błąd: $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$ *dla* $\varepsilon = 0.001$

Metoda stycznych:
początkowy x: $x = 1$
ilość iteracji: $i = 3$
$x = 0.29602550801374405$
$y = 1.5783588858120368 * 10^{-6}$
$|x_i - x_{i-1}| = 0.00037914164194008393$
$|f(x_i)| = |y|$

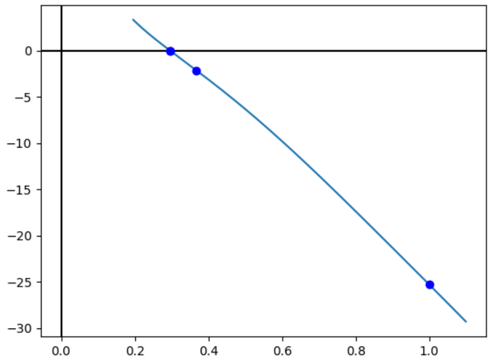


Reguła falsi:
początkowy przedział: $x \in (0.01, 1)$
ilość iteracji: $i = 34$
$x = 0.30534271570067606$
$y = -0.2803219256422771$
$|x_i - x_{i-1}| = 0.0009089393595952955$
$|f(x_i)| = |y|$

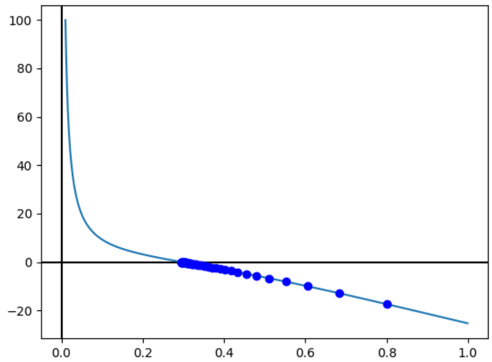


Błąd: $|f(x_i)| < \varepsilon$ *dla* $\varepsilon = 0.001$

Metoda stycznych:
początkowy x: $x = 1$
ilość iteracji: $i = 3$
$x = 0.29602550801374405$
$y = 1.5783588858120368 * 10^{-6}$
$|x_i - x_{i-1}| = 0.00037914164194008393$
$|f(x_i)| = |y|$



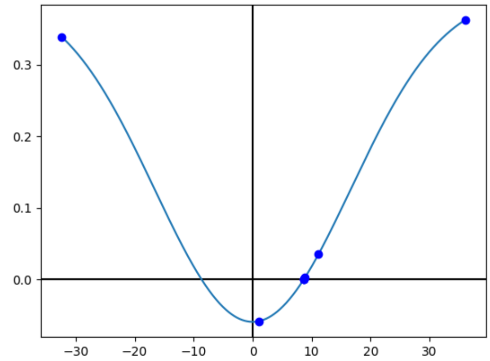
Reguła falsi:
początkowy przedział: $x \in (0.01, 1)$
ilość iteracji: $i = 97$
$x = 0.2960561487133207$
$y = -0.0009231099739355209$
$|x_i - x_{i-1}| = 2.8918407729561224 * 10^{-6}$
$|f(x_i)| = |y|$



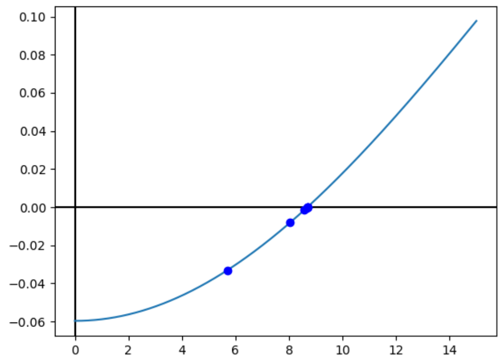
3. $\boldsymbol{f(x) = cos(e^{-0.001*x^2}) - 0.6}$

Ilość iteracji: 7

Metoda stycznych:
początkowy x: $x = 1$
$x = 8.688112458679658$
$y = 0.0$
$|x_i - x_{i-1}| = 7.646354838186653 * 10^{-8}$
$|f(x_i)| = |y|$

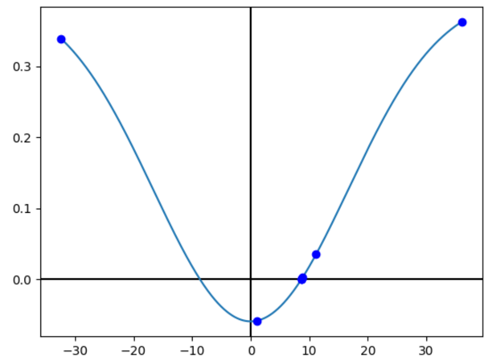


Reguła falsi:
początkowy przedział: $x \in (0, 15)$
$x = 8.688021685457937$
$y = -1.170090621060993 * 10^{-6}$
$|x_i - x_{i-1}| = 0.0004500889559047039$
$|f(x_i)| = |y|$

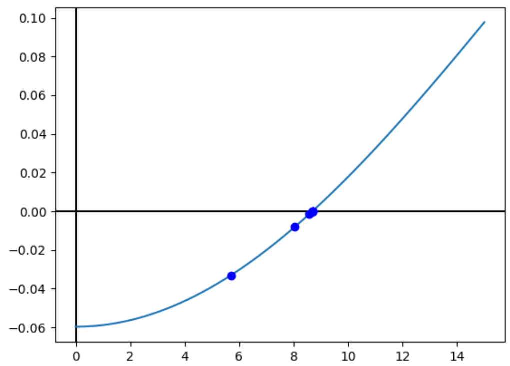


Błąd: $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$ *dla* $\varepsilon = 0.001$

Metoda stycznych:
początkowy x: $x = 1$
ilość iteracji: $i = 7$
$x = 8.688112458679658$
$y = 0.0$
$|x_i - x_{i-1}| = 7.646354838186653 * 10^{-8}$
$|f(x_i)| = |y|$

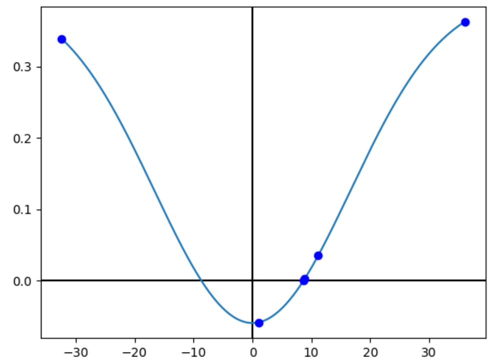


Reguła falsi:
początkowy przedział: $x \in (0, 15)$
ilość iteracji: $i = 7$
$x = 8.688021685457937$
$y = -1.170090621060993 * 10^{-6}$
$|x_i - x_{i-1}| = 0.0004500889559047039$
$|f(x_i)| = |y|$

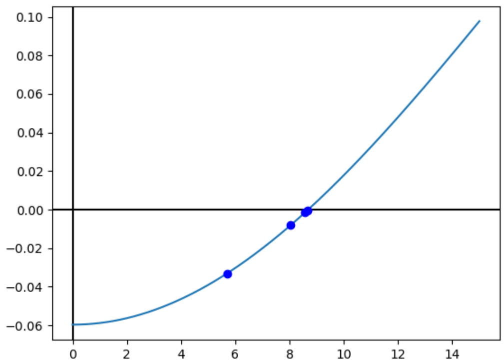


Błąd: $|f(x_i)| < \varepsilon$ *dla* $\varepsilon = 0.001$

Metoda stycznych:
początkowy x: $x = 1$
ilość iteracji: $i = 5$
$x = 8.689448909482968$
$y = 1.72282539194768 * 10^{-5}$
$|x_i - x_{i-1}| = 0.17786518774060767$
$|f(x_i)| = |y|$



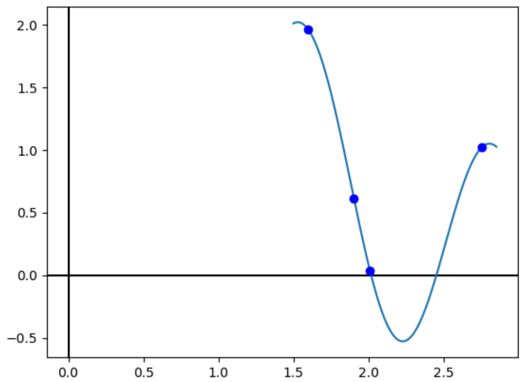
Reguła falsi:
początkowy przedział: $x \in (0, 15)$
ilość iteracji: $i = 4$
$x = 8.66894345422465$
$y = -0.0002468914919406817$
$|x_i - x_{i-1}| = 0.09401706265281184$
$|f(x_i)| = |y|$



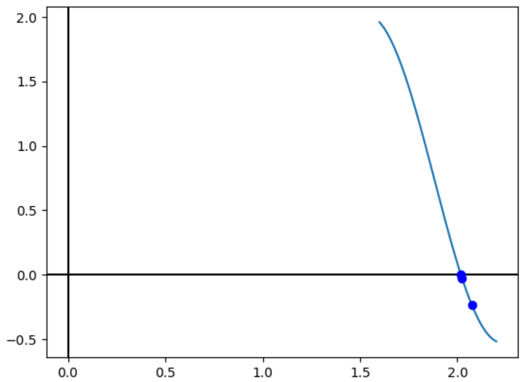
4. $f(x) = sin(5x) + e^{ctg(x)}$

Ilość iteracji: $i = 3$

Metoda stycznych:
początkowy x: $x = 1.6$
$x = 2.010134978603503$
$y = 0.0391948189889883434$
$|x_i - x_{i-1}| = 0.10616538240750417$
$|f(x)| = |y|$

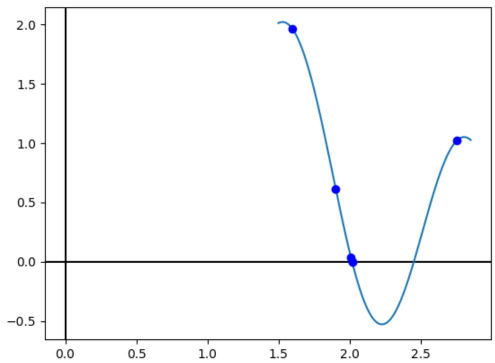


Reguła falsi:
początkowy przedział: $x \in (1.6, 2.2)$
$x = 2.01842366351267 35$
$y = -0.0001974540405863534$
$|x_i - x_{i-1}| = 0.00519004557114755$
$|f(x)| = |y|$

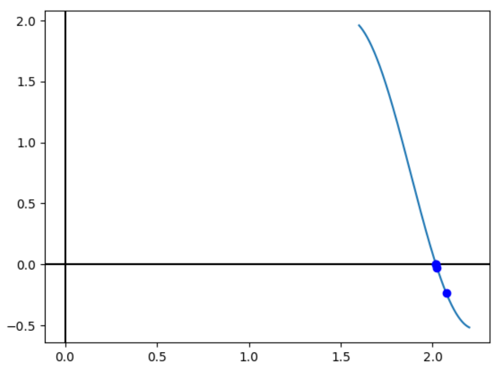


Błąd: $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$ *dla* $\varepsilon = 0.001$

Metoda stycznych:
początkowy x: $x = 1.6$
ilość iteracji: $i = 5$
$x = 2.0183815344920144$
$y = 8.94292916386874 * 10^{-8}$
$|x_i - x_{i-1}| = 0.00010684615969358546$
$|f(x)| = |y|$

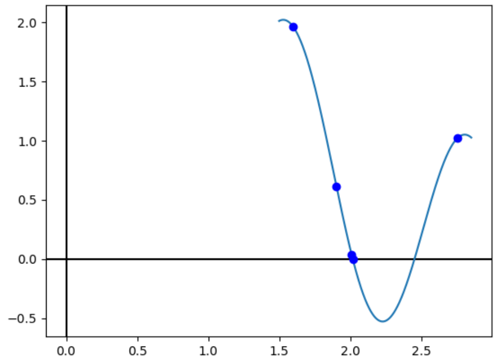


Reguła falsi
początkowy przedział: $x \in (1.6,2.2)$
ilość iteracji: $i = 4$
$x = 2.018381527208927$
$y = 1.2358217948982286 * 10^{-7}$
$|x_i - x_{i-1}| = 4.213630374660937 * 10^{-5}$
$|f(x_i)| = |y|$

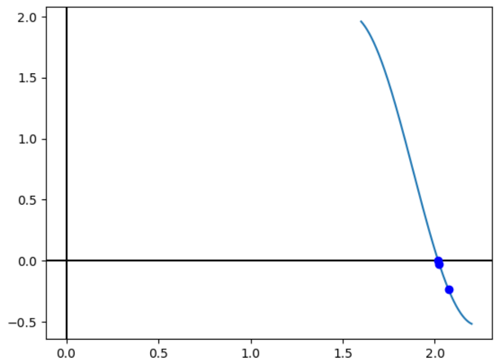


Błąd: $|f(x_i)| < \varepsilon$ *dla* $\varepsilon = 0.001$

Metoda stycznych:
początkowy x: $x = 1.6$
ilość iteracji: $i = 4$
$x = 2.0182746883323 21$
$y = 0.00050121704922 67876$
$|x_i - x_{i-1}| = 0.0081397097288 17834$
$|f(x_i)| = |y|$



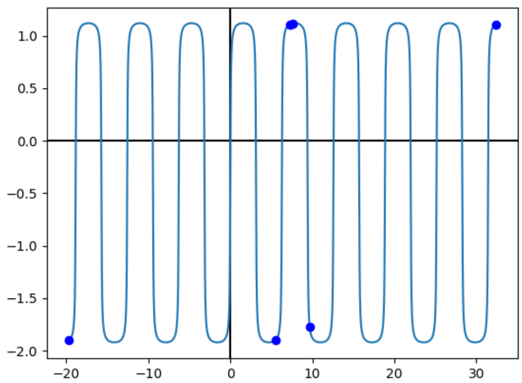
Reguła falsi:
początkowy przedział: $x \in (1.6, 2.2)$
ilość iteracji: $i = 3$
$x = 2.0184236635126735$
$y = -0.00019745404058 63534$
$|x_i - x_{i-1}| = 0.0051900455711 4755$
$|f(x_i)| = |y|$



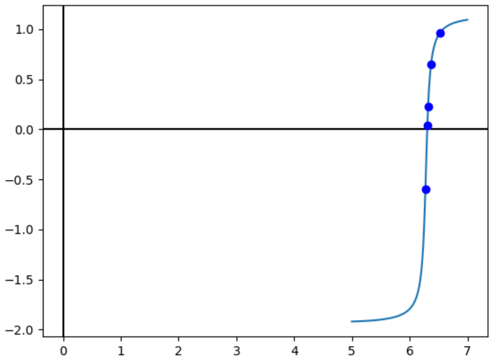
5. $f(x) = arctan(20sin(x)) - 0,4$

Ilość iteracji: $i = 5$

Metoda stycznych:
początkowy x: $x = 5.5$
$x = 7.626980187478768$
$y = 1.1195248082401021$
$|x_i - x_{i-1}| = 27.265075834046968$
$|f(x)| = |y|$

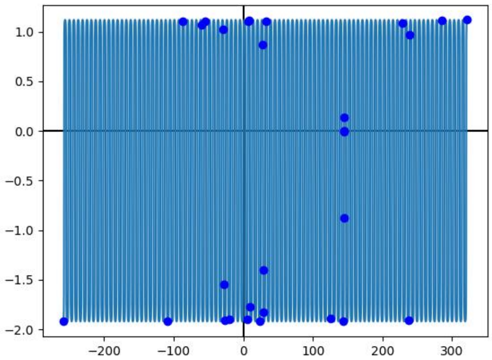


Reguła falsi:
początkowy przedział: $x \in (5,7)$
$x = 6.306742487106766$
$y = 0.04026149970183435$
$|x_i - x_{i-1}| = 0.01297944484822633$
$|f(x)| = |y|$

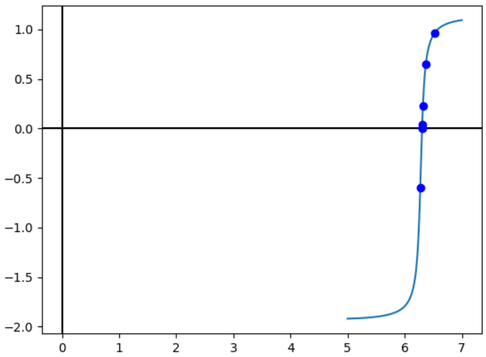


Błąd: $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$ *dla* $\varepsilon = 0.001$

Metoda stycznych:
początkowy x: x =5.5
ilość iteracji: $i = 28$
$x = 144.53440049041586$
$y = -4.7675717947948115 * 10^{-5}$
$|x_i - x_{i-1}| = 0.0006280948734627145$
$|f(x)| = |y|$

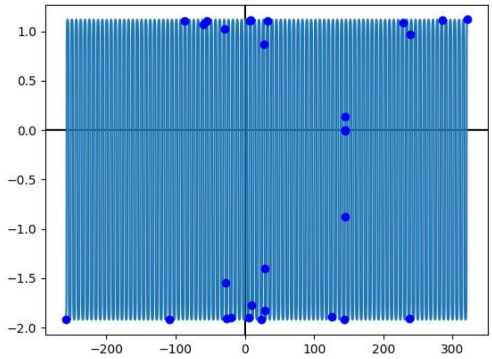


Reguła falsi
początkowy przedział: $x \in (5,7)$
ilość iteracji: $i = 7$
$x = 6.304361173949471$
$y = 0.0005873093074526547$
$|x_i - x_{i-1}| = 0.0002623468829501263$
$|f(x_i)| = |y|$

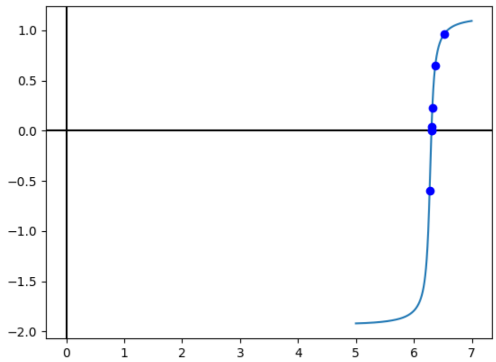


Błąd: $|f(x_i)| < \varepsilon$ *dla* $\varepsilon = 0.001$

Metoda stycznych:
początkowy x: $x = 5.5$
ilość iteracji: $i = 28$
$x = 144.53440049041586$
$y = -4.7675717947948115 * 10^{-5}$
$|x_i - x_{i-1}| = 0.0006280948734627145$
$|f(x_i)| = |y|$



Reguła falsi:
początkowy przedział: $x \in (5,7)$
ilość iteracji: $i = 7$
$x = 6.304361173949471$
$y = 0.0005873093074526547$
$|x_i - x_{i-1}| = 0.00026234688295012 63$
$|f(x_i)| = |y|$



Wnioski

1. ***Opis dokładności:***

   W przeprowadzonych przez nasz eksperymentach zauważyliśmy, że dla funkcji 1-3 metoda stycznych jest o kilka rzędów wielkości dokładniejsza od metody reguły falsi. Zaś dla funkcji 4-5 skuteczniejsza była reguła falsi, jednak nie była to duża przewaga (2-4 rzędy wielkości).

   Prawdopodobnie wynikiem takiego rezultatu jest postać wybranych przez nas funkcji. Dla wzorów 4-5 możemy powiedzieć, że pochodne tych funkcji nie są ciągłe, oraz nie mają stałego znaku. Z tego podstawowe założenia dla metody stycznych nie są spełnione, co powoduje problem w jej optymalnym działaniu.

   Metody Newtona była skuteczniejsza dla 1-3 z powodu spełnienia jej podstawowych założeń. Najlepiej widać to na wykresie przykładu 2., gdzie algorytm zawężał przedział zdecydowanie efektywniej w porównaniu do drugiej badanej przez nas metody. Dokładność jej jest większa o blisko 10 rzędów wielkości.

2. *Opis skuteczności:*

Skuteczność badanych metod określamy za pomocą sprawdzenia ilości iteracji potrzebnych do uzyskania podanej przez nas dokładności wyniku. Zauważyliśmy, że nie jesteśmy w stanie określić, która z badanych przez nas metod jest skuteczniejsza.

Dla funkcji 1-2 optymalniejszą okazała się metoda stycznych. Ilość iteracji dla nich okazała się nawet do 33 razy mniejsza od reguły falsi. Również jest to powodem lepszego zawężania przedziałów, które algorytm mógł uzyskać poprzez spełnienie założenia o ciągłości i niezmienności znaku w pochodnej.

Dla funkcji 4-5 optymalniejszą byłą metoda reguły falsi. Ilość iteracji jednak nie była tak wielka jak w przypadku konkurencyjnej metody. Maksymalnie uzyskaliśmy dla określonej dokładności do 5 razy mniejszą ilość iteracji. Powodem tego jest również problem ze spełnieniem podstawowych założeń algorytmy dla metody newtonowskiej.

Ciekawy wynik uzyskaliśmy dla wzory nr 3. Przy błędzie $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$ nie dało się stwierdzić lepszej metody a dla $|f(x_i)| < \varepsilon$ lepszą okazała się metoda reguły falsi, ale tylko o 1 iterację. Z tego powodu doszliśmy do wniosku, że mógł to być błąd wynikający z zaokrągleń, lub co wydaje się nam bardziej prawdopodobne wynika z własności badanej przez nas funkcji. Powodem takiego stanu rzeczy mogło się okazać miejsce zerowe występujące na badanym przedziale w pierwszej pochodnej.

3. *Opis specjalnych przypadków:*

W tym punkcie chcielibyśmy się skupić na funkcjach 3-5. Dla owych wzorów uzyskaliśmy interesujące wyniki dla metody stycznych.

Funkcji 3 poświęciliśmy już jeden akapit w punkcie 2. wniosków, jednak postanowiliśmy go tutaj rozszerzyć o tabelę kolejnych znalezionych przybliżeń miejsca zerowego. Zamieścimy również takie tabele dla wzorów 4 i 5:

Funkcja 3	
x	f(x)
1.0	-0.058856913763506435
36.030123089793626	0.36295799524518646
-32.38401326496493	0.3392408183389577
11.165247861870832	0.03499477824296948
8.867314097223575	0.0023275723148377114
8.689448909482968	$1.72282539194768 * 10^{-5}$

Funkcja 4	
x	f(x)
1.6	1.9605688138000916
2.7535882536034118	1.0191912167257748
1.9039695961959988	0.6125330443168564
2.010134978603503	0.039194818989988334
2.018274688332321	0.0005012170492267876

Funkcja 5	
x	f(x)
5.5	-1.9000469369496238
32.32685514038804	1.1075953454792735
9.679756026496662	-1.7750971638365036
7.254046639201824	1.110291545844869
-19.6380956465682	-1.9004231500814832
7.626980187478768	1.1195248082401021
-87.07075569754058	1.1067389309487705
-108.62843374004207	-1.9193221692188898
-258.9933951238775	-1.9199434171192942
-60.1974976953847	1.0682269486002847
-54.36888055131909	1.1099128340922966
-28.164734921180397	-1.54203446770009
-28.613504590153607	1.0216294103655499
-26.160965348879454	-1.9124774670365574
28.352590628531384	-1.4017845859366456
28.110416537847684	0.8734764847115027
28.62620219158944	-1.8267276571154745
23.90589126034601	-1.9177355577424628
124.99988187332909	-1.8898225240073079
143.33664305030322	-1.9166963416470955
228.6793559590646	1.0891014204038583
239.00585212054486	0.9673561459448624
237.78453359112146	-1.9105228323553858
284.80318124579674	1.1142176123885181
321.8882512402687	1.1204457617258958
144.48751723627993	-0.8754487678652363
144.5429103497204	0.1351668875589399
144.5337723955424	-0.01075052408414423
144.53440049041586	$-4.7675717947948115 * 10^{-5}$

Z powyżej zamieszonych tabel możemy wnioskować, że metoda stycznych dla funkcji niespełniających jej założeń radzi sobie jednoznacznie gorzej w porównaniu do metody reguły falsi. Algorytm metody newtona niestety nie sprawdza się w przypadku funkcji, dla których nie mamy wiedzy o ich pochodnych. Jeżeli mamy obliczyć miejsce zerowe dla takich wzorów skuteczniejszą i pewniejszą metodą okazuje się metoda reguły falsi.

4. Podsumowanie:

Poprzez wyniki naszych badań możemy stwierdzić, że lepszą, według nas, okazała się metoda reguły falsi. Pomimo tego, że wolno zbiega jest pewną i niezawodną metodą. Nie wymaga ona od osoby z niej korzystającej wiedzy na temat pochodnych, co jest konieczne dla metody stycznych.

Przy metodzie newtonowskiej możemy powiedzieć, że jest bardzo szybką i skuteczną metodą, ale tylko dla funkcji, które spełniają jej założenia. Z tego powodu ma ona dla nas mniejsze spektrum zastosowań w odróżnieniu do drugiej badanej przez nas metody.