Adam Kapuściński | 229907
Damian Szczeciński | 230016

Przedmiot
Metody numeryczne i optymalizacyjne

Treść zadania 2

Celem zadania drugiego jest zaimplementowanie jednej z metod rozwiązywania układu N równań liniowych z N niewiadomymi. W naszym przypadku jest nią metoda iteracyjna Gaussa-Seidla

Metoda Iteracyjna Gaussa-Seidla – iteracyjna metoda numeryczna rozwiązywania układów równań liniowych. Polega na zmienianiu kolejnych składowych w ten sposób, aby coraz lepiej odpowiadały rzeczywistemu rozwiązaniu. Dokładniej jest to metoda bazująca na metodzie Jacobiego. Różnicą w ich działaniu jest stosowanie poprzez metodę Gaussa-Seidla ze wszystkich aktualnie dostępnych przybliżonych składowych rozwiązania.

W naszym przypadku:

1. Na początku sprawdzamy czy macierz spełnia warunki konieczne,
2. Jeżeli nie, próbuje naprawić macierz,
3. Jeżeli spełnia chociaż jeden warunek przechodzimy do właściwego algorytmu,
4. Wybierane jest początkowe przybliżenie $x = 0$,
5. Wyznaczana jest nowa macierz, na podstawie wyliczanych przybliżeń wektora argumentów
6. Na koniec iteracji sprawdzany jest przybliżenie, jeżeli otrzymany wynik jest satysfakcjonujący to program kończy pracę
7. W przeciwnym wypadku powtarza przechodzenie przez wszystkie wiersze macierzy w celu obliczenia przybliżenie wektora argumentów

Algorytm przyjmuje macierz współczynników, wraz z wektorem wyników, i szuka dla jakich x, spełniony jest układ. Np.:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 4 \\ -1x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases} => \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Początkowe wartości wszystkich x, program ustawia na 0 i rozpoczyna szukanie do spełnienia wybranego warunku stopu.

W ramach jednej iteracji nasz algorytm przechodzi przez wszystkie wiersze macierzy i oblicza kolejne przybliżenia wektora argumentów przez „przenoszenie" kolejnych argumentów na lewą stronę równania, a pozostałych elementów na prawą i podstawienie pod wszystkie x, poza szukanym, wartości które zostały obliczone do tej pory. Przykład jednej iteracji:

$$x_1 = \frac{1}{4}(4 + x_2 - x_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{6}(9 - x_1 - x_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{5}(2 + x_1 - 2x_2)$$

W naszym algorytmie zaimplementowaliśmy 3 warunki wystarczające. Dzięki nim jesteśmy w stanie określi czy podaną macierz można rozwiązać za pomocą algorytmu Gaussa-Seidla. Warunkami tymi są:

Kryterium słabej dominacji w rzędach:

- Wszystkie rzędy muszą spełniać ten warunek

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad gdzie \quad j\epsilon\{1,2,\ldots,n\}$$

Kryterium słabej dominacji w kolumnach:

- Wszystkie kolumny muszą spełniać ten warunek

$$|a_{jj}| \geq \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}| \quad gdzie \quad i\epsilon\{1,2,\ldots,n\}$$

Kryterium dodatniej określoności:

- W tym przypadku jeżeli macierz jest określona dodatnie, to nasza metoda jest zbieżna dla dowolnego wektora początkowego

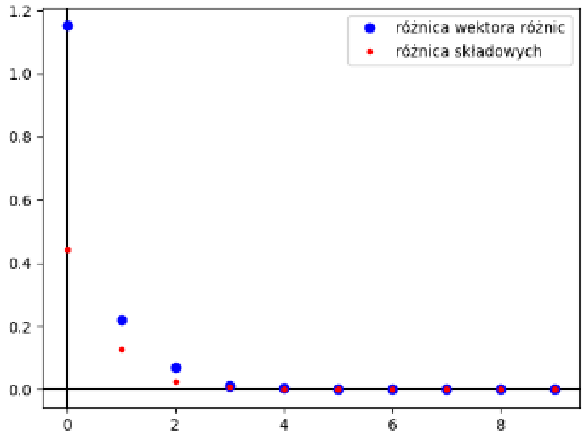
Złożoność obliczeniowa naszego algorytmu to $O(n) = n^2$

Macierze, wyniki i wykresy:

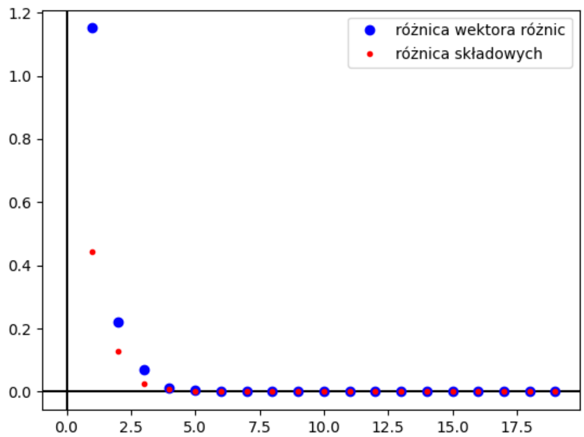
Macierz nr 1

$$\begin{bmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 0 & 13 & 20 \\ 2 & 1 & 37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

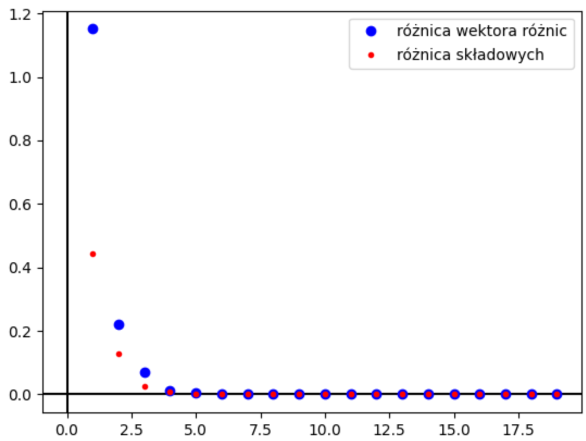
Wybrana metoda szukania	iteracyjnie
liczba iteracji	9
błąd zmian składowych	2,236e-06
błąd wektora różnic	2,361e-06
Wynik	0,334 -0,132 -0,014



Wybrana metoda szukania	śledzenie zmian składowych
liczba iteracji	19
epsilon	1e-10
błąd zmian składowych	1,818e-11
błąd wektora różnic	6,814e-11
Wynik	0,334 -0,132 -0,014



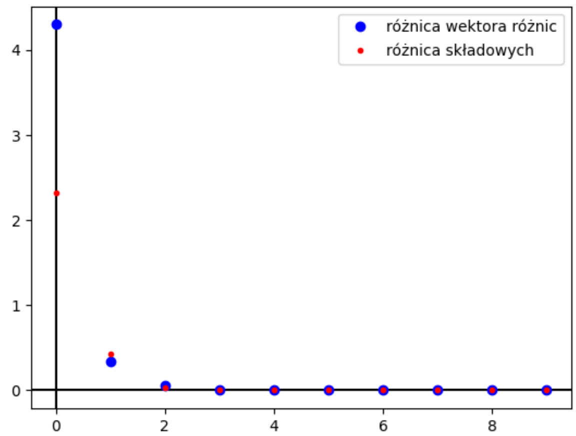
Wybrana metoda szukania	śledzenie wektora różnic
liczba iteracji	19
epsilon	1e-10
błąd zmian składowych	1,818e-11
błąd wektora różnic	6,814e-11
Wynik	0,334 -0,132 -0,014



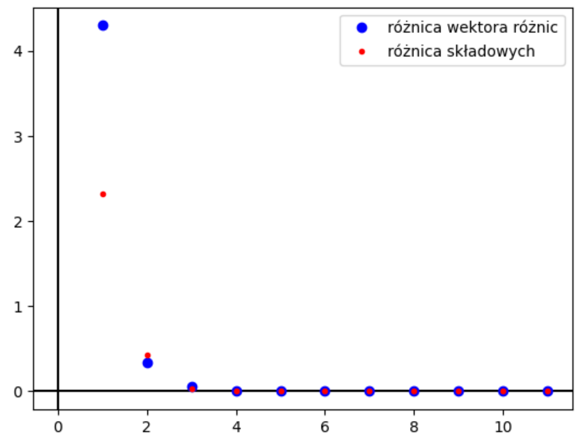
Macierz nr 2

$$\begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{bmatrix}$$

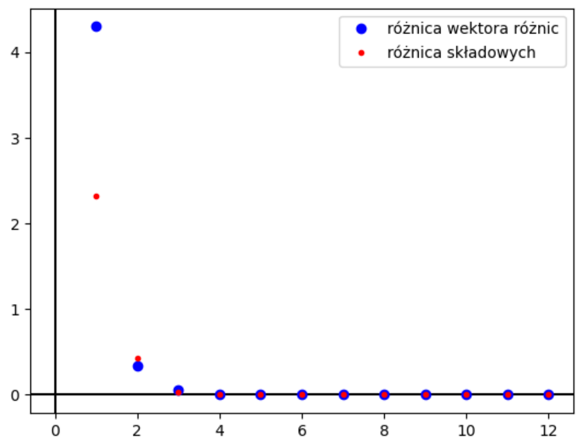
Wybrana metoda szukania	iteracyjnie
liczba iteracji	9
błąd zmian składowych	2,065e-09
błąd wektora różnic	1,389e-09
Wynik	1 2 -1 1



Wybrana metoda szukania	śledzenie zmian składowych
liczba iteracji	11
epsilon	1e-10
błąd zmian składowych	1,257e-10
błąd wektora różnic	1,572e-10
Wynik	1 2 -1 1



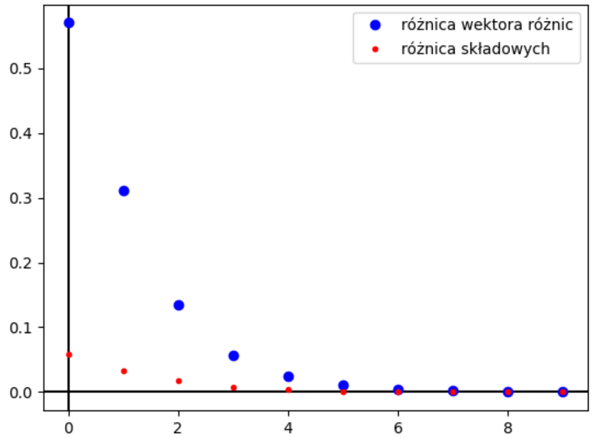
Wybrana metoda szukania	śledzenie wektora różnic
liczba iteracji	12
epsilon	1e-10
błąd zmian składowych	1,572e-11
błąd wektora różnic	2,682e-11
Wynik	1 2 -1 1



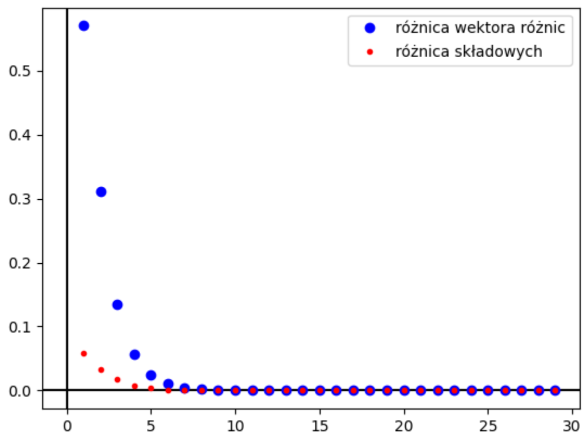
Macierz nr 3

$$\begin{bmatrix} 17 & 5 & -10 & 1 & 0 \\ 0 & 30 & 3 & 12 & -4 \\ 20 & -3 & 27 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & -4 & -80 & 1 \\ -7 & 2 & 4 & 32 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0{,}2 \\ 0,(3) \\ 2,(3) \\ 2 \end{bmatrix}$$

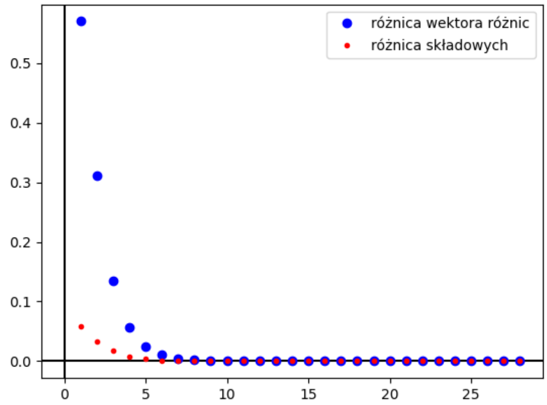
Wybrana metoda szukania	iteracyjnie
liczba iteracji	9
błąd zmian składowych	4,387e-05
błąd wektora różnic	3,313e-04
Wynik	-0,038 0,019 0,042 -0,033 0,026



Wybrana metoda szukania	śledzenie zmian składowych
liczba iteracji	29
epsilon	1e-10
błąd zmian składowych	1,060e-12
błąd wektora różnic	2,185e-11
Wynik	-0,038 0,019 0,042 -0,033 0,026



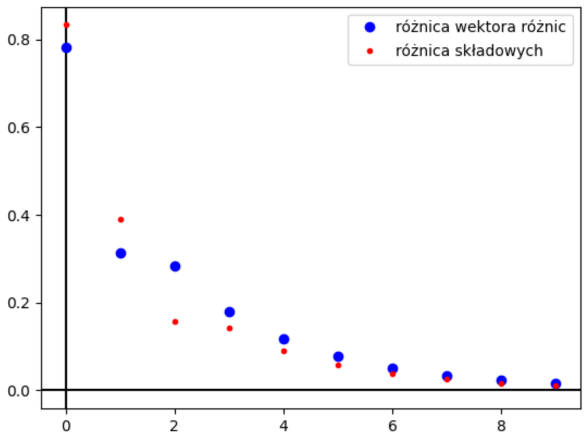
Wybrana metoda szukania	śledzenie wektora różnic
liczba iteracji	28
epsilon	1e-10
błąd zmian składowych	7,284e-12
błąd wektora różnic	5,202e-11
Wynik	-0,038 0,019 0,042 -0,033 0,026



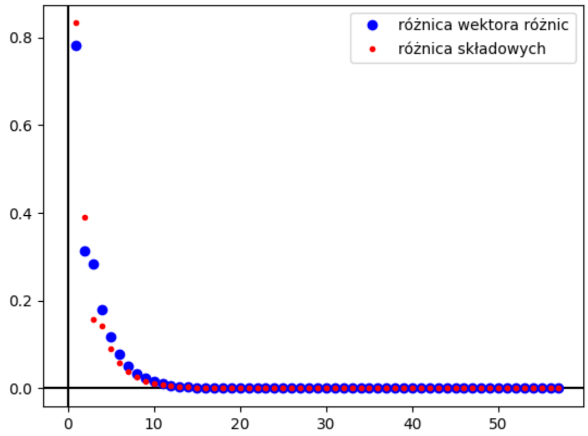
Macierz nr 4

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,(6) \\ 0,(6) \\ 3 \\ -1,(3) \\ -0,(3) \\ 1,(6) \end{bmatrix}$$

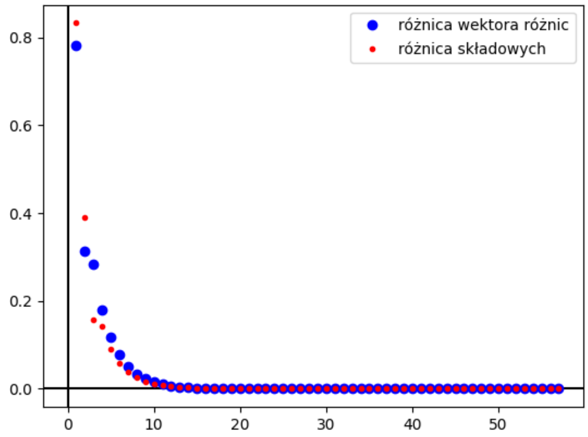
Wybrana metoda szukania	iteracyjnie
liczba iteracji	9
błąd zmian składowych	0,011
błąd wektora różnic	0,015
Wynik	-0,356 0,323 0,996 -0,656 -0,008 0,664



Wybrana metoda szukania	śledzenie zmian składowych
liczba iteracji	57
epsilon	1e-10
błąd zmian składowych	7,395e-11
błąd wektora różnic	9,903e-11
Wynik	-3,333e-01 3,333e-01 1,000 -6,667e-01 2,484e-07 6,667e-01



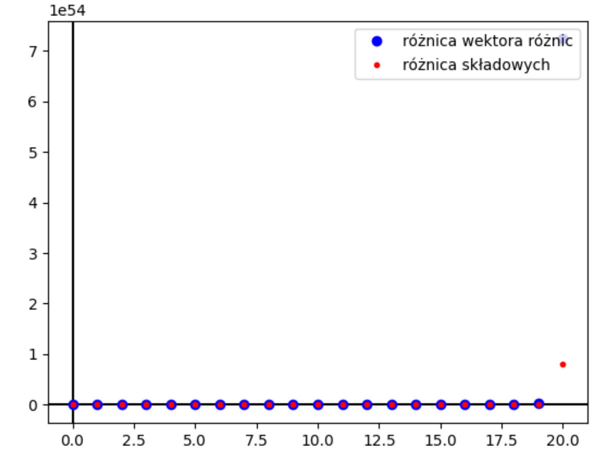
Wybrana metoda szukania	śledzenie wektora różnic
liczba iteracji	57
epsilon	1e-10
błąd zmian składowych	7,395e-11
błąd wektora różnic	9,903e-11
Wynik	-3,333e-01 3,333e-01 1,000 -6,667e-01 2,484e-07 6,667e-01



Macierz nr 5

$$\begin{bmatrix} 6{,}96 & 0{,}21 & 2{,}28 & 1{,}7 & -6{,}22 & -6{,}48 \\ -4{,}26 & 0{,}03 & 126 & 0{,}98 & -3{,}92 & -3{,}97 \\ -2{,}6 & -0{,}18 & -1{,}02 & 0{,}72 & -2{,}30 & -2{,}40 \\ -1{,}66 & 0{,}15 & 0{,}24 & 0{,}26 & -1{,}62 & -1{,}56 \\ -0{,}95 & 0{,}33 & 0{,}78 & 0{,}46 & 0{,}68 & -0{,}84 \\ -0{,}71 & 0{,}48 & -0{,}54 & -0{,}21 & -0{,}94 & 0{,}72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}07 \\ -9{,}87 \\ -7{,}78 \\ -4{,}71 \\ 0{,}2 \\ -1{,}2 \end{bmatrix}$$

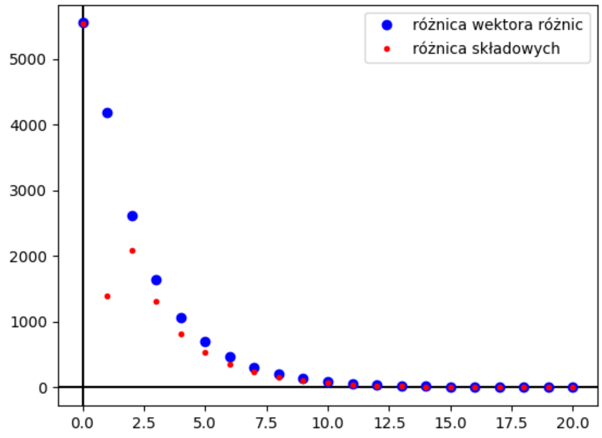
Wybrana metoda szukania	iteracyjnie
liczba iteracji	20
błąd zmian składowych	8,109e+53
błąd wektora różnic	7,233e+54
Wynik	-2,814e+51 -8,138e+53 1,576e+53 2,881e+53 -7,751e+53 -2,705e+53



Macierz nr 6

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 77 \\ 22163 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wybrana metoda szukania	iteracyjnie
liczba iteracji	20
błąd zmian składowych	8,109e+53
błąd wektora różnic	7,233e+54
Wynik	5822,220 3881,708 7112,903 3772,864 2515,369 2407,068



Wnioski

W przeprowadzonych przez nas eksperymentach zauważyliśmy, że metoda śledzenia wektora różnic praktycznie nie różni się od śledzenia zmian składowych. Takie wnioski mogliśmy wyciągnąć z wyników jakie zostały nam zwrócone przez własnoręcznie napisany program w języku Python. Jednak po przeanalizowaniu wykresów możemy stwierdzić, że bardziej „stabilną” metodą jest stosowane przez nas śledzenie wektora różnic. Wartości otrzymywane poprzez metodę śledzenia różnic składowych w początkowej fazie potrafią być skokowe, amplituda zmian wartości kolejnych punktów jest bardzo wysoka.

Prawdopodobnie powodem takiego rezultatu mogą być wartości wektora. Skoki były większe i bardziej widoczne, jeżeli jedna z wartości wektora było sporo większa lub mniejsza od pozostałych. Aby to lepiej uwidocznić przeprowadziliśmy eksperyment na Macierzy 4. Jako, że jest to macierz spełniająca kryterium dodatniej określoności mogliśmy bez żadnych przeciwskazań zmieniać wartości w naszym wektorze. Wynikiem naszego badań jest Macierz nr 6. Na wklejonym przez nas wykresie można zauważyć, że różnica składowych dla drugiego punktu odbiega od pozostałych wartości.

Wynika to ze sposobu wyznaczania tychże wartości. Bardziej skomplikowaną metodą pod względem obliczeń dla komputera jest śledzenie wektora różnic. Poprzez większą liczbę operacji jest w stanie wyznaczać wartości w mniej zróżnicowany sposób. Szybszą jak i mniej skomplikowaną metodą jest śledzenie zmian składowych. Jednak odbija się to na dokładności w początkowych etapach.

Przeprowadziliśmy także eksperyment dla macierzy nie spełniającej kryteriów do bycia rozwiązaną przez ten algorytm. Jest to Macierz nr 5. Niestety nie widać tego wyraźnie na wykresie (poza ostatnim punktem), jednak w przypadku tej macierzy błędy zamiast maleć, rosną. Przedstawia to poniższa tabela, kilku pierwszych wartości funkcji na wykresie:

Różnica wektora różnic	Różnica składowych
3,075e+03	3,508e+02
1,139e+06	1,277e+05
4,217e+08	4,727e+07
1,562e+11	1,751e+10
5,783e+13	6,483e+12
2,142e+16	2,401e+15

Mimo tego, że pojedyncza iteracja metody Gaussa-Seidla, ma złożoność obliczeniową $O(n) = n^2$, to dzięki temu, że metoda ta dynamicznie uwzględnia częściowe wyniki do szukania kolejnych przybliżeń pierwiastków równań, to nie wymaga ona wykonywania wielu tych iteracji, co przekłada się na stanowcze skrócenie czasu działania programu.