Adam Kapuściński | 229907
Damian Szczeciński | 230016

czwartek 14:00 – 15:30
16.04.2021

Przedmiot

Metody numeryczne i optymalizacyjne

Treść zadania 3

Celem zadania jest zaimplementowanie dwóch metod interpolacji. W naszym przypadku są to interpolacja Newtona dla węzłów równoodległych i nierównych odstępów argumentów.

Interpolacja Newtona – jest procesem dopasowywania funkcji ciągłej do zestawu dyskretnych punktów danych w celu oszacowania wartości pośrednich. Interpolacja wielomianowa polega na dopasowaniu określonego stopnia wielomianu, który przechodzi przez $n + 1$ punktów danych. Istnieje kilka metod, które mogą być używane do określania unikalnej postaci interpolacji wielomianowej, ale my skupimy się tylko na dwóch:

Metoda interpolacji Newtona dla węzłów losowych – W tej metodzie wykorzystujemy losowo wygenerowane węzły do obliczenia kolejnych współczynników stojących przy ilorazach różnicowych. W naszym przypadku algorytm tworzenia takiej interpolacji wygląda w następujący sposób:

1. Generujemy losowo argumenty w podanym przedziale i wyliczamy dla nich wartości,
2. Tworzymy obiekt z wygenerowanymi punktami
3. Wyliczamy współczynniki używając schematu ilorazów i zapisujemy je
4. Wielomian jest gotowy, i przy obliczaniu dowolnej jego wartości korzystamy ze schematu Hornera

Metoda interpolacji Newtona dla węzłów równoodległych – jest to metoda interpolacyjna, która wyróżnia się równą odległością punktów, dzięki czemu można zastosować szybszy i mniej obciążający dla komputera wzór. W naszym przypadku algorytm tworzenia takiej interpolacji wygląda w następujący sposób:

1. Generujemy argumenty równoodległe od siebie i wyznaczamy dla nich wartości,

2. Tworzymy trójkąt Pascala, który następnie wykorzystujemy do obliczania współczynników,
3. Następnie otrzymane współczynniki wykorzystujemy przy wyznaczaniu wartości naszego wielomianu.

Metoda wykorzystana dla węzłów losowych

Ogólna forma wielomianu ma postać:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i n_i(x)$$

Szczególną cechą wielomianu Newtona jest to, że współczynniki można określić za pomocą bardzo prostej procedury matematycznej.

W naszym przypadku pierwszym krokiem było wyznaczenie losowych atrybutów i wyliczenie dla nich wartości. Następnie stworzyliśmy tabelę podzielonych różnic. W naszym przypadku generowana jest ona w taki sposób:

$$\begin{bmatrix} y_0 & f[x_1, x_0] & f[x_2, x_1, x_0] \\ y_1 & f[x_2, x_1] & 0 \\ y_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Skorzystaliśmy w tym momencie z zależności, że współczynnik a_i można wyznaczyć za pomocą łatwej metody matematycznej:

$$f(x_0) = a_0 = y_0$$

I skoro

$$f(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1$$

To w takim układzie

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f[x_1, x_0]$$

W taki sposób można w łatwy sposób wyznaczyć wszystkie niezbędne współczynniki potrzebne do wyznaczenia naszego szukanego wielomianu.

W naszym kodzie pętla odpowiedzialna za ich wyznaczanie ma postać (pierwsza kolumna *coef* jest wypełniona wartościami funkcji dla wyznaczonych argumentów):

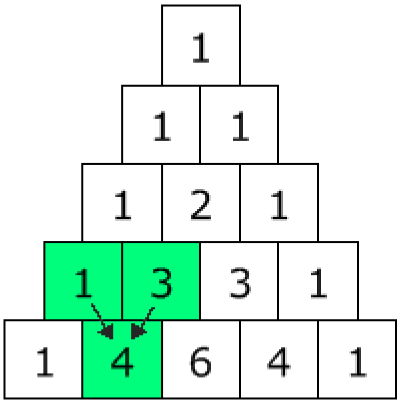
```
for j in range(1,n):
    for i in range(n-j):
        coef[i][j] = (coef[i+1][j-1] - coef[i][j-1]) / (x[i+j] - x[i])
```

Następnie wyznaczamy nasz wielomian podstawiając otrzymane a_i gdzie $i \epsilon N$ do wzoru:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0) \dots (x - x_n)$$

Metoda wykorzystana dla węzłów równoodległych

Przy wyliczaniu współczynników funkcji korzystaliśmy ze wzoru $a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!}$. Gdzie $\Delta^k y_0 = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}y_i$ nazywany jest różnicą progresywną. Przed obliczeniem owych różnic utworzyliśmy trójkąt Pascala, dla łatwego obliczania dwumianu Newtona. W ten sposób ominęliśmy liczenie wielu silni, a więc i wielu mnożeń. Przy liczeniu kolejnych różnic progresywnych liczyliśmy kolejne wartości silni, od razu dzieląc pierwsze przez drugie, otrzymując w ten sposób gotowy współczynnik.



Tworzenie trójkąta Pascala:

```
pascal_triangle = np.zeros([n,n])
pascal_triangle[:, 0] = 1
np.fill_diagonal(pascal_triangle, 1)

# tworzenie trójkąta Pascala
for i in range(2, n):
    for j in range(1, i+1):
        pascal_triangle[i][j] = pascal_triangle[i-1][j-1] + pascal_triangle[i-1][j]
```

W pomarańczowym kwadracie znajduje się liczenie różnic progresywnych, natomiast w zielonym liczenie współczynnika oraz silni

```
coef = []
coef.append(y[0])
strong = 1
for k in range(1, n):
    total = 0
    for i in range(k+1):
        tmp = y[i]*pascal_triangle[k][i]
        if (k-i) % 2 == 1: tmp*=-1
        total += tmp
    coef.append(total/strong)
    strong *= k+1
```

Przy obliczaniu dowolnej wartości dla podanego x korzystamy z różnicowej postaci wzoru Newtona:

$$w_n(t) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}t + \dots + \frac{\Delta^k y_0}{k!}t(t-1)\dots(t-k+1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t-1)\dots(t-n+1)$$

Gdzie $t = \frac{x-x_0}{h}$, a h to odległość między węzłami, co my w programie wyrażamy za pomocą $h = x_1 - x_0$.

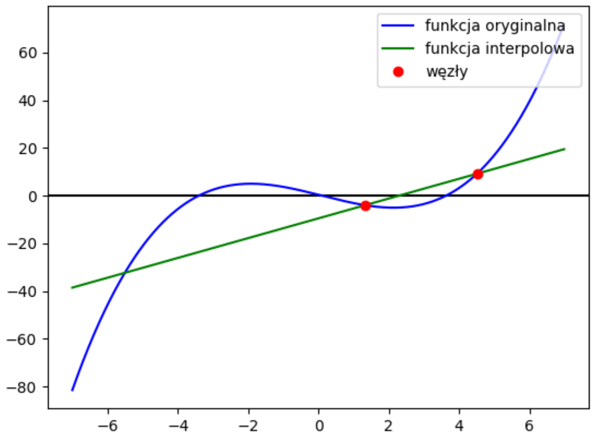
Funkcje, wyniki i wykresy

$$1\ f(x) = 0{,}3x^3 - 0{,}1x^2 - 3{,}7x + 0{,}4 \text{ dla } x \in (-5, 5)$$

Liczba węzłów: 2

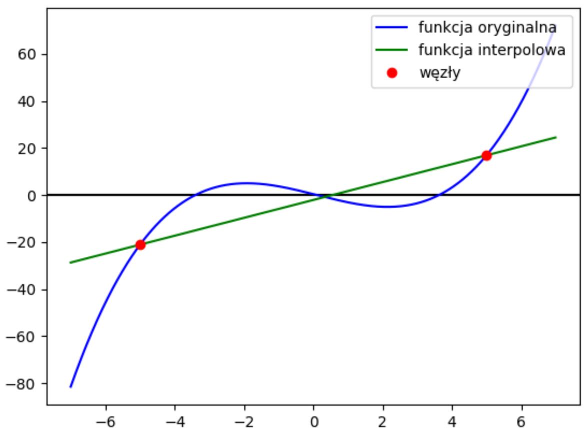
Interpolacja losowa
Współczynniki:
- -3,992
- 4,148

Węzły:
- (1,33; -3,992)
- (4,51; 9,199)



Interpolacja równoodległa
Współczynniki:
- -21,1;
- 38,0

Węzły:
- (-5,0 ; -21,1),
- (5,0 ; 16,9)



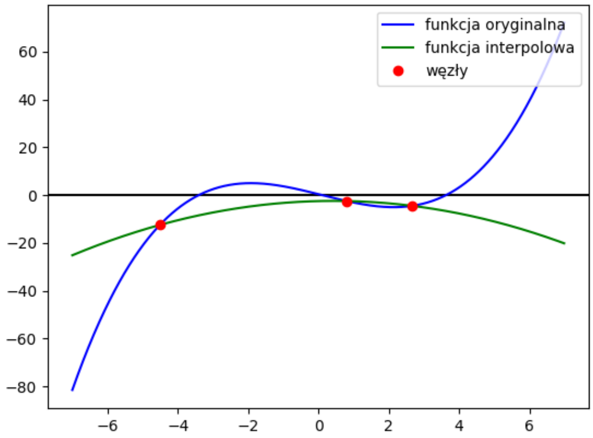
Liczba węzłów: 3

Interpolacja losowa
Współczynniki:

- -12,467
- 1,883
- -0,412

Węzły:

- (-4,51; -12,467)
- (0.8; -2,47)
- (2,67; -4,482)

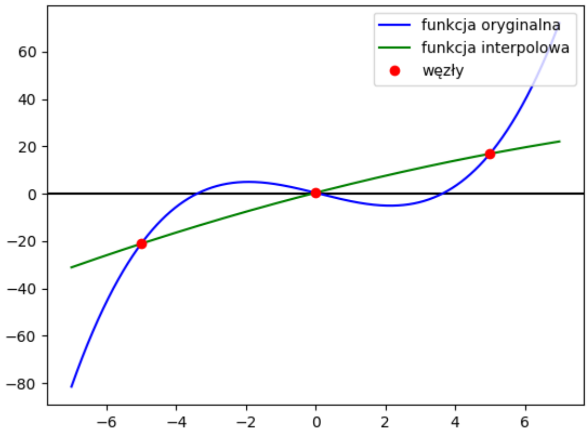


Interpolacja równoodległa
Współczynniki:

- -21,1
- 21,5
- -2,5

Węzły:

- (-5,0 ;-21,0)
- (0,0 ; 0,4)
- (5,0 ; 16,9)



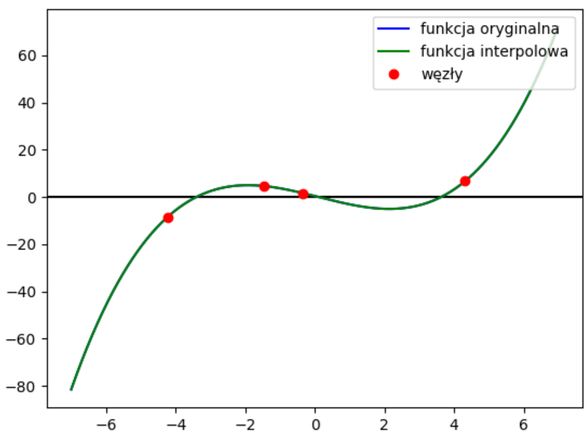
Liczba węzłów: 4

Interpolacja losowa
Współczynniki:

- -8,444
- 4,729
- -1,909
- 0,3

Węzły:

- (-4,23; -8,444)
- (-1,46; 4,655)
- (-0,34; 1,635)
- (4,32; 6,736)

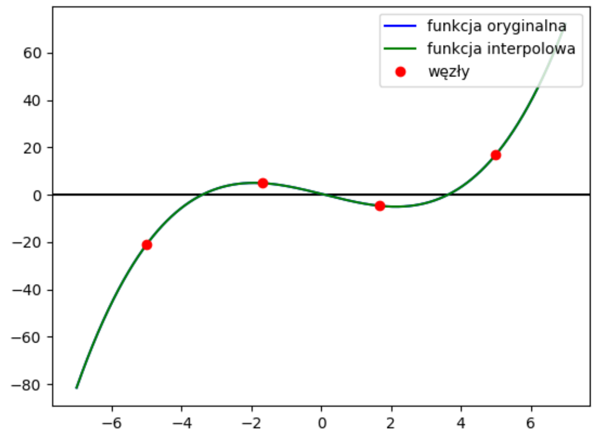


Interpolacja równoodległa
Współczynniki:

- -21,1
- 26,0
- -17,778
- 11,111

Węzły:

- (-5,0 ; -21,1)
- (-1,667 ; 4,9)
- (1,667 ; -4,656)
- (5,0 ; 16,9)



2 $f(x) = 2x + 5$ *dla* $x \in (-5, 5)$

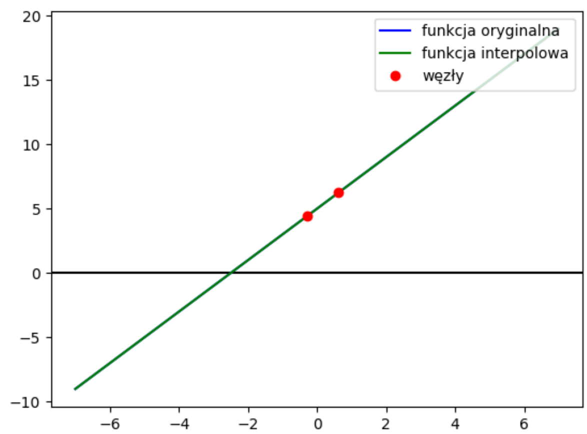
Liczba węzłów: 2

Interpolacja losowa
Współczynniki:

- 4,46
- 2,0

Węzły:

- (-0,27 ; 4,46)
- (0,62 ; 6,24)

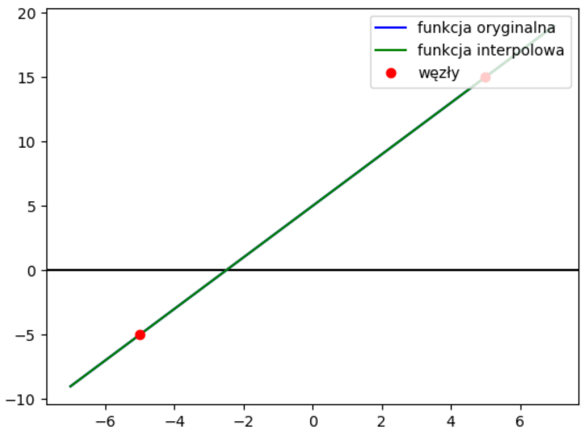


Interpolacja równoodległa
Współczynniki:

- -5.0
- 20.0

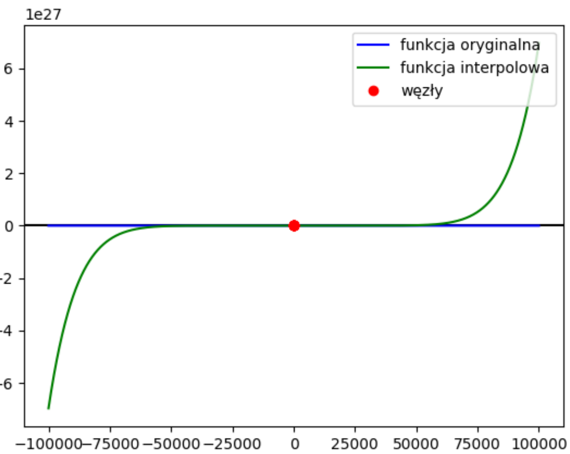
Węzły:

- (-5,0 ; 5,0)
- (-5,0 ; 15,0)

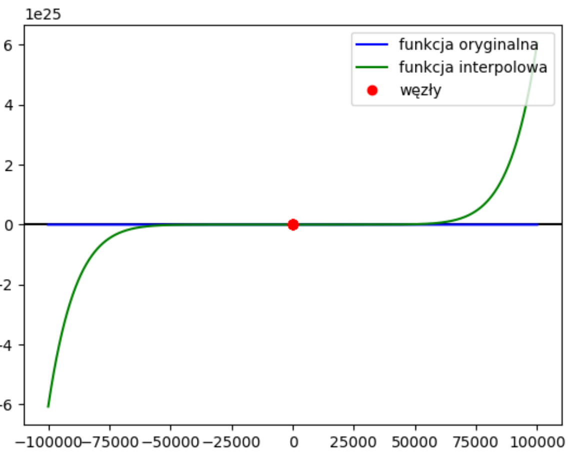


Liczba węzłów: 10 w oddaleniu ~100000

Interpolacja losowa



Interpolacja równoodległa



3 $f(x) = |x|$ *dla* $x \in (-5; 5)$

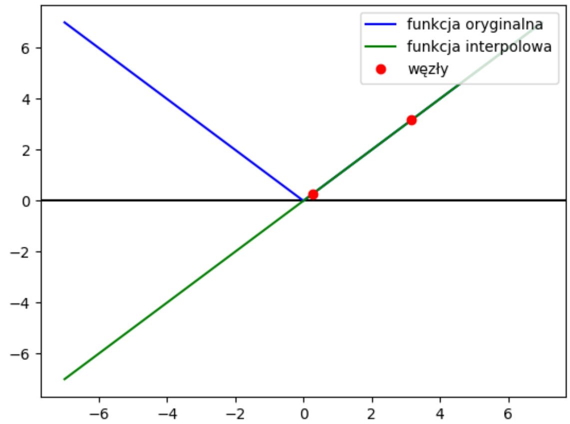
Liczba węzłów: 2

Interpolacja losowa
Współczynniki:

- 0,28
- 1,0

Węzły:

- (0,28 ; 0,28)
- (3,17 ; 3,17)

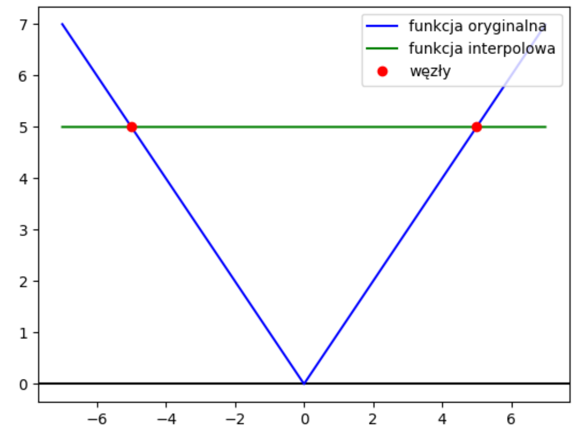


Interpolacja równoodległa
Współczynniki:

- 5,0
- 0,0

Węzły:

- (-5,0 ; 5,0)
- (5,0 ; 5,0)



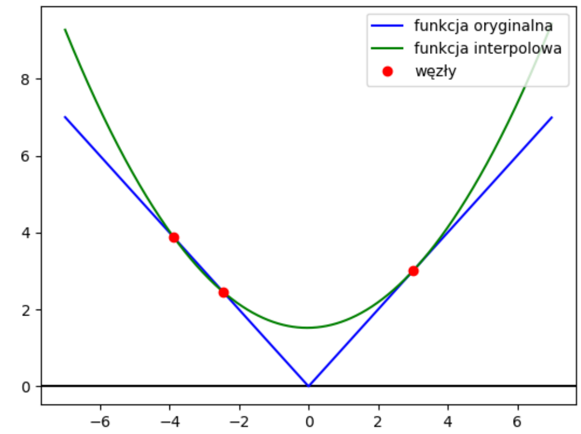
Liczba węzłów: 3

Interpolacja losowa
Współczynniki:

- 3,87
- -1,0
- 0,16

Węzły:

- (-3,87 ; 3,87)
- (-2,46 ; 2,46)
- (3,02 ; 3,02)

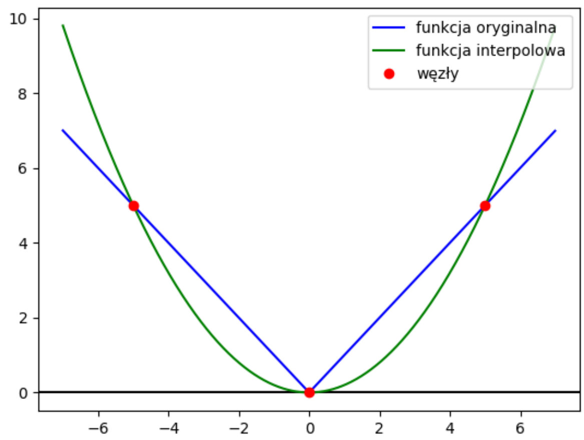


Interpolacja równoodległa
Współczynniki:

- 5,0
- -5,0
- 5,0

Węzły:

- (-5,0 ; 5,0)
- (0,0 ; 0,0)
- (5,0 ; 5,0)



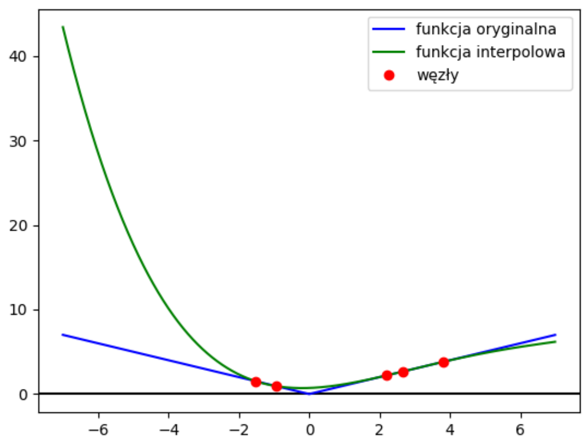
Liczba węzłów: 5

Interpolacja losowa
Współczynniki:

- 1,53
- -1,0
- 0,377
- -0,05
- 0,003

Węzły:

- (-1,53 ; 1,53)
- (-0,93 ; 0,93)
- (2,19 ; 2,19)
- (2,65 ; 2,65)
- (3,82 ; 3,82)

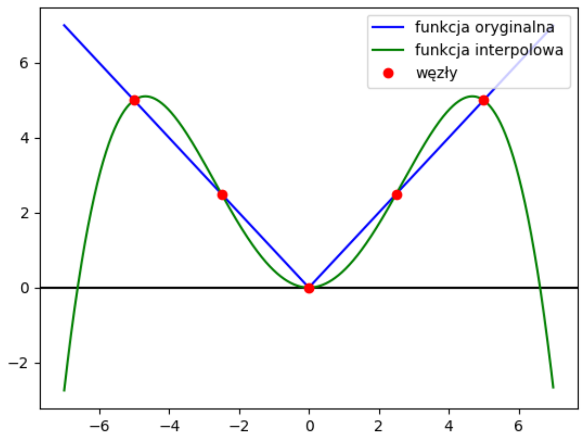


Interpolacja równoodległa
Współczynniki:

- 5,0
- -2,5
- 0,0
- 0,833
- -0,417

Węzły:

- (-5,0 ; 5,0)
- (-2,5 ; 2,5)
- (0,0 ; 0,0)
- (2,5 ; 2,5)
- (5,0 ; 5,0)



4 $f(x) = \sin(x)$ *dla* $x \in (0;\ 9{,}42)$

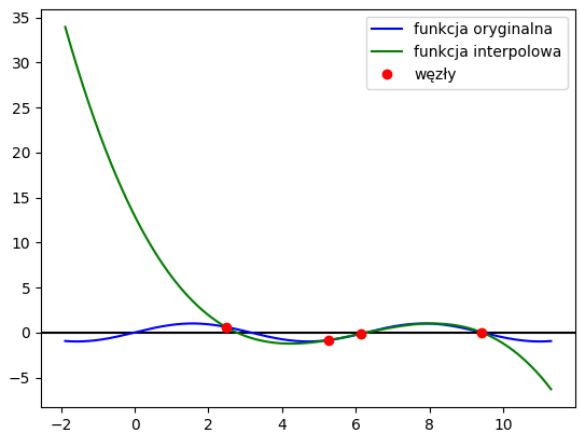
Liczba węzłów: 4

Interpolacja losowa
Współczynniki:

- 0,622
- -0,529
- 0,364
- -0,079

Węzły:

- (2,47 ; 0,622)
- (5,26 ; -0,854)
- (6,14 ; -0,143)
- (9,41 ; 0,015)

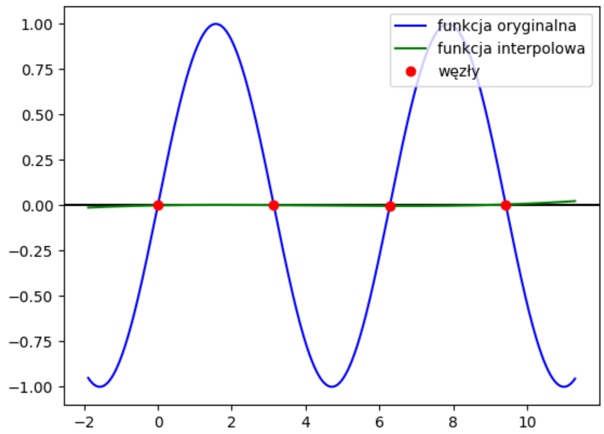


Interpolacja równoodległa
Współczynniki:

- 0,0
- 0,002
- -0,003
- 0,003

Węzły:

- (0,0 ; 0,0)
- (3,14 ; 0,002)
- (6,28 ; -0,003)
- (9,42 ; 0,005)



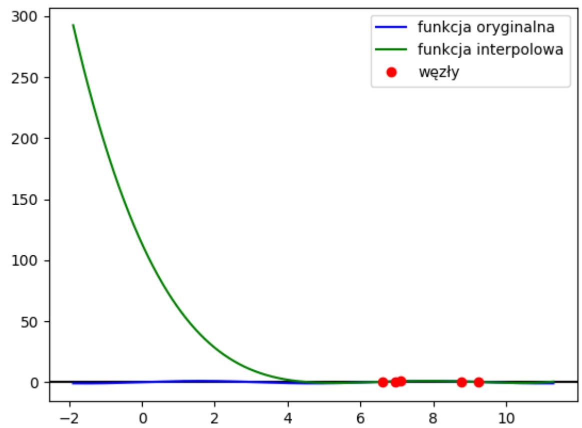
Liczba węzłów: 5

Interpolacja losowa
Współczynniki:

- 0,321
- 0,872
- -0,284
- -0,074
- 0,038

Węzły:

- (6,61 ; 0,321)
- (6,96 ; 0,626)
- (7,1 ; 0,729)
- (8,78 ; 0,601)
- (9,24 ; 0,184)

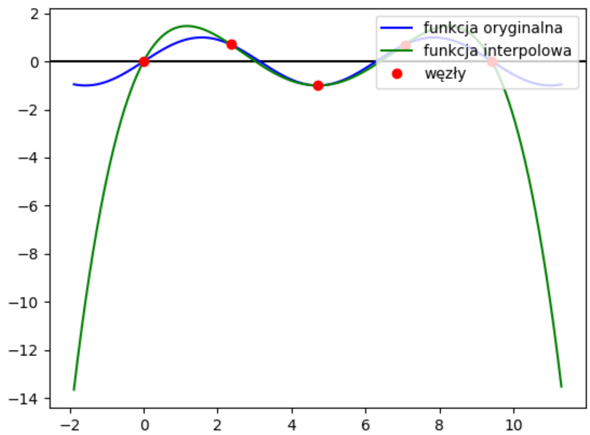


Interpolacja równoodległa
Współczynniki:

- 0,0
- 0,708
- -1,208
- 0,971
- -0,485

Węzły:

- (0,0 ; 0,0)
- (2,355 ; 0,708)
- (4,71 ; -1,0)
- (7,065 ; 0,705)
- (9,42 ; 0,005)



$$5\ f(x) = \arctan\left(\frac{7}{4} e^{sin(0,555x)}\right) + \tan(7x) + 17\ dla\ x \in (0;\ 1)$$

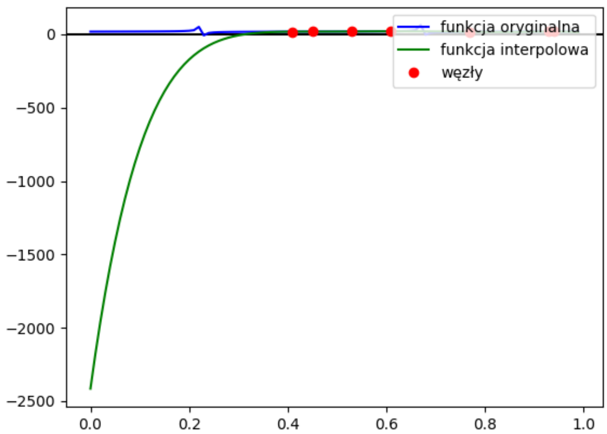
Liczba węzłów: 7

Interpolacja losowa
Współczynniki:

- 17,476
- 7,441
- 5,874
- 299,421
- -2826,578
- 10899,96
- -40539,948

Węzły:

- (0,41 ; 17,476)
- (0,45 ; 17,774)
- (0,53 ; 18,425)
- (0,61 ; 19,919)
- (0,77 ; 16,606)
- (0,93 ; 18,118)
- (0,94 ; 18,196)

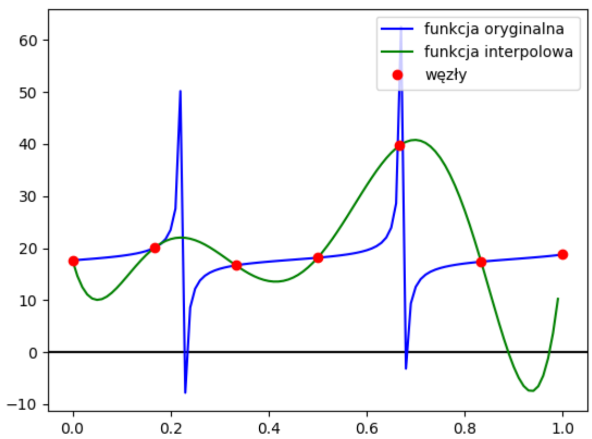


Interpolacja równoodległa
Współczynniki:

- 17,644
- 2,383
- -2,861
- 1,755
- 0,197
- -0,699
- 0,409

Węzły:

- (0,0 ; 17,644)
- (0,167 ; 20,027)
- (0,333 ; 16,687)
- (0,5 ; 18,153)
- (0,667 ; 39,678)
- (0,833 ; 17,381)
- (1,0 ; 18,775)



6 $f(x) = \arctan\left(cos\left(\left|sin^2(x) * tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right)\right) \sin\left(tan\left(\frac{sin(x)}{cos(1999)}\right) + 26\right) x^2$ *dla* $x \in (-5;\ 5)$

Liczba węzłów: 5

Interpolacja losowa
Współczynniki:

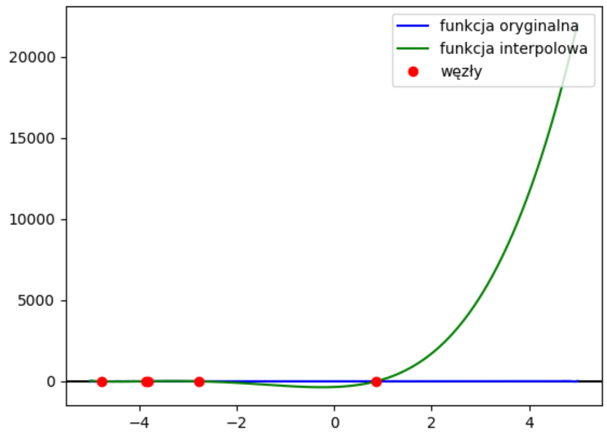
- -0,279
- 1,381
- 37,621
- -36,938
- 7,939

Węzły:

- (-4,77 ; -0,279)

(-3,86 ; 0
)

- ,978)
- (-3,81 ; 2,853)
- ()
- (-2,77 ; 0,752)
- (0,86 ; -0,546)

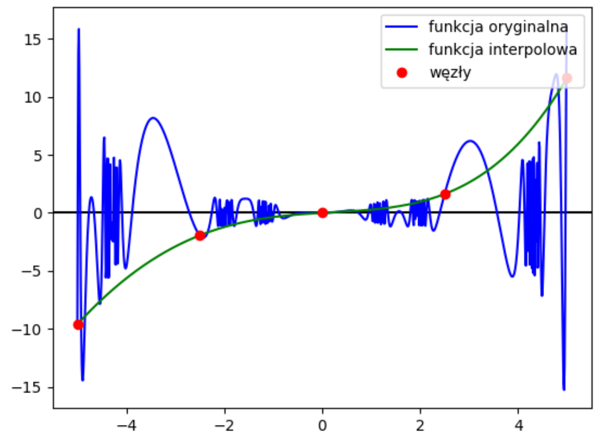


Interpolacja równoodległa
Współczynniki:

- -9,596
- 7,657
- -2,859
- 0,901
- 0,137

Węzły:

- (-5,0 ; -9,596)
- (-2,5 ; -1,939)
- (0,0 ; 0,0)
- (2,5 ; 1,625)
- (5,0 ; 11,624)



Wnioski

1. *Funkcja liniowa*

Wnioskując z przeprowadzonych przez nas badań możemy wskazać, że dla funkcji liniowej większa niż 2 liczba węzłów nie jest wskazana dla każdej z badanych przez nas metod. Poprzez zwiększenie liczby węzłów tracimy dokładność. Wykazaliśmy to poprzez wyznaczenie funkcji dla 10 węzłów. Poprzez odpowiednie oddalenie mogliśmy pokazać, że otrzymana funkcja nie pokrywa się z funkcją pierwotną na innych niż podany przez nas przedział. Owe zjawisko opisuje efekt Rungego oznaczający pogorszenie jakości interpolacji wielomianowej, mimo zwiększenie liczby jej węzłów.

2. *Funkcja wielomianowa*

W przeprowadzonych przez nas eksperymentach doszliśmy do wniosków, że niezalenie od stosowanej przez nas metody otrzymujemy takie same rezultaty. Funkcja pokrywa się wystarczająco dopiero dla liczby węzłów o jeden większej od stopnia szukanego wielomianu. Mimo stosowania metody losowych punktów, nie udało nam się uzyskać dla takiej ilości węzłów niesatysfakcjonującego wykresu.

3. *Funkcja |x|*

Dla wskazanej funkcji przeprowadziliśmy eksperymenty z ilością węzłów 2, 3 i 5. Z otrzymanych wyników i wykresów możemy wywnioskować, że pierwsza ilość węzłów jest niewystarczająca dla otrzymania satysfakcjonujących wyników. Dla kolejnych wartości możemy wskazać, że wykresy pokrywały się wystarczająco. Dla metody równoodległych punktów otrzymane grafy pokrywają się lepiej niż dla drugiej przez nas badanej interpolacji. W zależności od otrzymanych punktów przez wspomnianą metodę interpolacji Newtona dla punktów losowych możemy uzyskać szkice bardziej lub mniej dokładne. Przykładem może być losowanie punktów dla 5 węzłów, gdzie ich zagęszczenie było większe po prawej stronie przedziału. W takim układzie uzyskany wykres dla atrybutów dodatnich nie był satysfakcjonujący.

4. *Funkcja trygonometryczna*

W przeprowadzanych przez nas eksperymentach zdecydowaliśmy się na wykorzystanie przedziału od 0 do 9,41. Jest to przez nas znany i wiemy, że funkcji sinusa ma na nim 4 maksymalne jej wychylenia. Dla parzystej wartości liczby węzłów metoda interpolacji Newtona dla punktów losowych poradziła sobie znacznie lepiej od drugiej przez nas badanej. Jest to skutkiem rozmieszczenia równoodległych atrybutów. Poprzez takie działanie otrzymaliśmy je wszystkie w linii prostej, przez co nie mogliśmy uzyskać satysfakcjonującego wyniku. Sytuacja jednak wygląda inaczej dla nieparzystej liczby węzłów. W naszym przypadku pięciu. Dla takiej ilości atrybutów metoda oparta na punktach losowych zdecydowanie poradziła sobie gorzej. Było to skutkiem zagęszczenia punktów tylko w jednym obszarze naszej funkcji. Pojawiła się tutaj zaleta metody interpolacji newtona dla równoodległych punktów. Poprzez równomierne rozmieszczenie punktów na badanym przedziale, nie dopuszcza do znacznych odstępstw.

5. *Funkcje złożone*

Na podstawie eksperymentów przeprowadzonych dla funkcji 5 i 6 możemy zauważyć, że w zależności od stopnia skomplikowania funkcji na badanym przedziale, teoretycznie da się uzyskać efekty satysfakcjonujące. Niestety jednak, dobór odpowiedniego przedziału, ilości węzłów oraz tego gdzie się znajdują musi być podyktowany znajomością przebiegu oryginalnej funkcji, ponieważ ciężko jest dobrać odpowiedni przedział „losowo”. Dobieranie punktów równoodległych jest lepszym sposobem, jednak wciąż dalekim od ideału. Dodatkowo wielomian zachowuje się „właściwie” tylko i wyłącznie między pierwszym a ostatnim węzłem, a poza nimi, praktycznie od razu interpolacja nie ma najmniejszego pokrycia z funkcją interpolowaną.

6. *Podsumowanie*

Poprzez przeprowadzone przez nas badania na wyżej wymienionych rodzajach funkcji możemy powiedzieć, że obie metody mają swoje wady i zalety. Zaletą metody interpolacji Newtona dla równoodległych punktów jest niewątpliwie ich rozmieszczenie. Dzięki równomiernemu rozłożeniu argumentów na podamy przez nas przedziale unikamy sytuacji dopasowania szukanej przez nas funkcji wielomianowej tylko do pewnego fragmentu, niepokrywającego się z podaną przez nas przestrzenią. Jednak takie działanie metody interpolacji Newtona dla punktów losowych ma swoje zalety. Przykładem to pokazującym jest nasza funkcja sinus dla 4 węzłów. Poprzez zróżnicowane odległości między nimi uzyskaliśmy lepsze odwzorowanie funkcji pierwotnej. Jednak każda z tych metod jest obarczona efektem Rungego.