Adam Kapuściński | 229907
Damian Szczeciński | 230016

Przedmiot

Metody numeryczne i optymalizacyjne

Treść zadania 4

Celem zadania jest stworzenie programu implementującego dwie metody całkowania numerycznego: złożoną kwadraturę Newtona-Cotesa opartą na trzech węzłach (wzór Simpsona) oraz przydzielony przez prowadzącego wariant kwadratury Gaussa tj. całkowanie na przedziale [a,b) (wielomian Legendre'a) całek postaci:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Kwadratura złożona Newtona-Cotesa oparta na wzorze Simpsona – jest to metoda całkowania numerycznego wykorzystująca wielomiany stopnia drugiego. Zwana jest metodą parabol. W naszym przypadku algorytm przybliżania wartości całki oznaczonej funkcji rzeczywistej wygląda w następujący sposób:

1. Podzielenie otrzymanego przedziału na określoną podaną liczbę podzbiorów,
2. Sumowanie otrzymanych wyników x dla każdego podzbioru,
3. Jeżeli różnica sumy obecnej i poprzedniej jest mniejsza od dokładności podanej prze użytkownika zakończ algorytm,
4. Jeżeli nie, zwiększ dwukrotnie ilość przedziałów i powtórz operację wyznaczania przybliżenia wartości całki oznaczonej.

Kwadratura Gaussa oparta na wielomianie Legendre'a – jest to metoda całkowania numerycznego polegająca na odpowiednim wyborze wag i węzłów interpolacji aby otrzymać najlepsze przybliżenie całki. W naszym przypadku algorytm przybliżania wartości całki oznaczonej funkcji rzeczywistej wygląda w następujący sposób:

1. Współczynniki oraz wartości wag dla pierwszych 6 interpolacji mamy zapisane w programie jako znane ich przybliżenia.
2. Obliczanie polega na dodaniu do siebie m iloczynów odpowiednich współczynników i wartości funkcji dla zadanych wartości wag.

3. Funkcje dekorowane są klasą która pozwala na zeskalowanie przedziału z podanego przez użytkownika do [-1, 1].
4. Na końcu sumowania iloczynów wynik mnożony jest razy $\frac{b-a}{2}$, co także jest częścią skalowania przedziału.

Metoda Newtona-Cotesa oparta o wzór Simpsona

Ogólna postać wzoru pozwalająca na wyznaczenie przybliżonej wartości całki oznaczonej funkcji rzeczywistej wygląda w następujący sposób:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}))}{3}$$

Gdzie:

$$h = \frac{b-a}{N}, \qquad x_i = a + hi, \qquad b > a.$$

N – liczba wielomianów, a – początek przedziału, b – koniec przedziału

W celu zmniejszenia ilości operacji i skrócenia czasu wykonywania naszego programu skorzystaliśmy z niżej przekształconego wzoru:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_{2N}) + 4\sum_{i=0}^{N-1} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=0}^{N-2} f(x_{2i+2})\right)$$

Kwadratura Gaussa oparta na wielomianie Legendre'a

Wzór pozwalający przybliżyć wartość całki:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h\big(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\big)}{3}$$

Gdzie $h = \frac{b-a}{N}$, $x_i = a + hi$, a – początek przedziału, b – koniec przedziału, N – liczba wielomianów przez które będzie przybliżana całka.

W programie użyliśmy jednak przekształcenia tego wzoru który pozwala na znaczną redukcję wykonywanych operacji arytmetycznych:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} * \left(f(x_0) + f(x_{2N}) + 4\sum_{i=0}^{N-1} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=0}^{N-2} f(x_{2i+2})\right)$$

W dalszej części sprawozdania będziemy zamieszczać porównanie obu metod z wynikiem otrzymanym za pomocą programu *Wolfram Alpha* (kontrolna wartość całki)

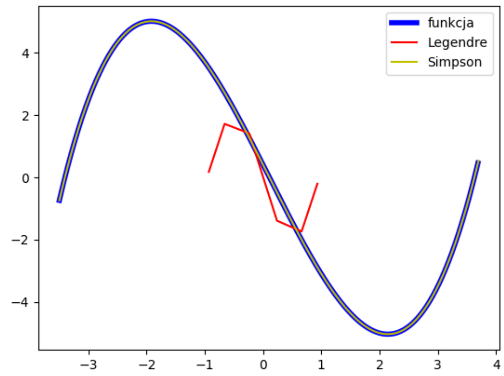
Funkcje, wyniki i wykresy

1 $f(x) = 0.3x^3 - 0.1x^2 - 3.7x + 0.4$ *dla* $x \in (-3.5,\ 3.7)$

Wartość całki wg wielomianów Legendre'a
dla 2 węzłów wartość całki wynosi: -0.1000
dla 3 węzłów wartość całki wynosi: -0.1000
dla 4 węzłów wartość całki wynosi: -0.1000
dla 5 węzłów wartość całki wynosi: -0.1000
dla 6 węzłów wartość całki wynosi: -0.1000

Wartość całki wg metody Newtona-Cotesa
Wartość: -0.1001
iteracji: 18
wielomianów: 131072
epsilon: 0.0001

Kontrolna wartość całki: -1.000

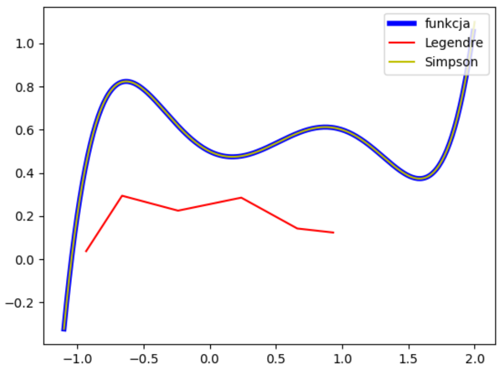


2 $f(x) = 0.4x^5 - x^4 + 0.1x^3 + 0.9x^2 - 0.3x + 0.5$ *dla* $x \in (-1.1,\ 2)$

Wartość całki wg wielomianów Legendre'a
dla 2 węzłów wartość całki wynosi: 1.8797
dla 3 węzłów wartość całki wynosi: 1.7206
dla 4 węzłów wartość całki wynosi: 1.7206
dla 5 węzłów wartość całki wynosi: 1.7206
dla 6 węzłów wartość całki wynosi: 1.7206

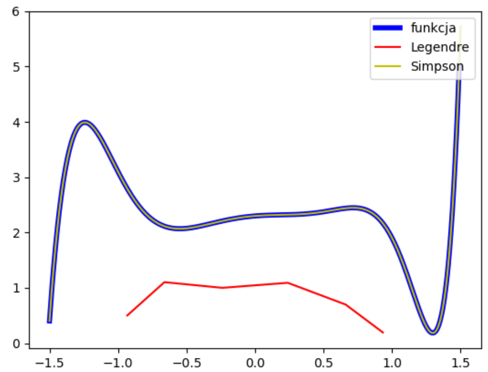
Wartość całki wg metody Newtona-Cotesa
Wartość: 1.7206
iteracji: 17
wielomianów: 65536
epsilon: 0.0001

Kontrolna wartość całki: 1.7206



3 $f(x) = 0.4x^{10} + 0.8x^9 - 1.1x^8 - 1.4x^7 - 0.1x^6 + 1.7x^4 + 0.7x^3 - 0.7x^2 + 0.2x + 2.3$ *dla* $x \in (-1.5,\ 1.5)$

Wartość całki wg wielomianów Legendre'a
dla 2 węzłów wartość całki wynosi: 7.3078
dla 3 węzłów wartość całki wynosi: 6.9786
dla 4 węzłów wartość całki wynosi: 6.4929
dla 5 węzłów wartość całki wynosi: 6.7926
dla 6 węzłów wartość całki wynosi: 6.8940

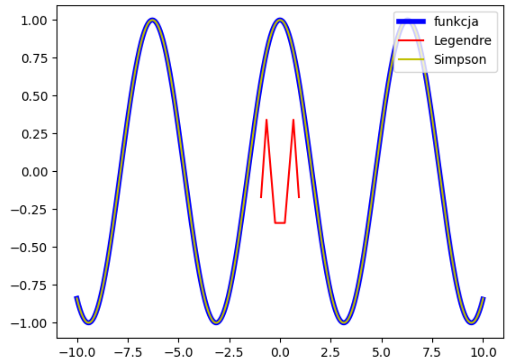


Wartość całki wg metody Newtona-Cotesa
Wartość: 6.8939
iteracji: 18
wielomianów: 131072
epsilon: 0.0001

Kontrolna wartość całki: 6.8940

4 $f(x) = cos(x)$ *dla* $x \in (-10,\ 10)$

Wartość całki wg wielomianów Legendre'a
dla 2 węzłów wartość całki wynosi: 17.4579
dla 3 węzłów wartość całki wynosi: 10.0867
dla 4 węzłów wartość całki wynosi: −17.3901
dla 5 węzłów wartość całki wynosi: 7.2207
dla 6 węzłów wartość całki wynosi: −3.3936

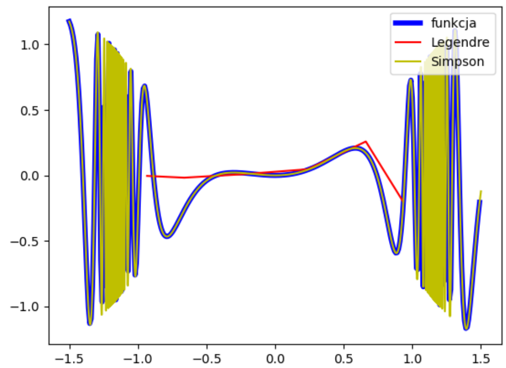


Wartość całki wg metody Newtona-Cotesa
Wartość: −1.0881
iteracji: 18
wielomianów: 131072
epsilon: 0.0001

Kontrolna wartość całki: −1.0880

5 $f(x) = \arctan\left(\frac{7}{4}e^{sin(0.555x)}\right) + \tan(7x) + 17$ *dla* $x \in (-1.5,\ 1.5)$

Wartość całki wg wielomianów Legendre'a
dla 2 węzłów wartość całki wynosi: -1.1418
dla 3 węzłów wartość całki wynosi: 0.0932
dla 4 węzłów wartość całki wynosi: 0.7872
dla 5 węzłów wartość całki wynosi: -1.1400
dla 6 węzłów wartość całki wynosi: 0.1404

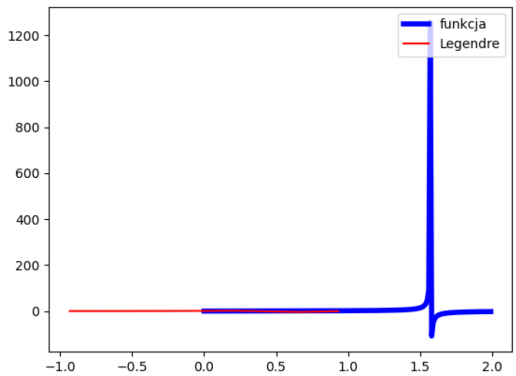


Wartość całki wg metody Newtona-Cotesa
Wartość: -0.0993
iteracji: 20
wielomianów: 524288
epsilon: 0.0001

Kontrolna wartość całki: -0.0995

6 $f(x) = \tan(x)$ *dla* $x \in (0, 2)$

Wartość całki wg wielomianów Legendre'a
dla m=2 wartość całki wynosi: -152.1342
dla m=3 wartość całki wynosi: -1.1763
dla m=4 wartość całki wynosi: 2.1655
dla m=5 wartość całki wynosi: 15.2671
dla m=6 wartość całki wynosi: -2.4910



Wartość całki wg metody Newtona-Cotesa
Wartość: brak
iteracji: brak
wielomianów: brak
epsilon: 0.0001

Kontrolna wartość całki: 0.8767

Wnioski

W przeprowadzonych przez nas eksperymentach zauważyliśmy, że metoda Newtona-Cotesa oparta o wzór Simpsona sprawdza się lepiej od Kwadratura Gaussa oparta na wielomianie Legendre'a. Korzystając z drugiej metody wyniki pokrywały się z wartościami referencyjnymi w sposób satysfakcjonujący. Wyniki otrzymane dla funkcji trygonometrycznych czy złożonych pozostawiały jednak niezgodne z wartościami kontrolnymi.

Kwadratura Gaussa oparta na wielomianie Legendre'a prawdopodobnie powodem dla którego metoda ta nie daje satysfakcjonujących wyników dla funkcji których wykresy są bardziej złożone jest to, że używaliśmy maksymalnie 6 węzłów do wyliczenia całki. Zwiększenie ich liczby polepszyłoby precyzję, jednak w przypadku funkcji tak skomplikowanych jak funkcja piąta, liczba węzłów musiałaby być niewspółmiernie duża i trudna do oszacowania, a wyznaczenie współczynników oraz wag wymagałoby dużej ilości obliczeń. Metoda ta natomiast wyróżnia się niezwykłą prostotą implementacji oraz zrozumienia (pod warunkiem znajomości współczynników i wag).

Metoda Newtona-Cotesa oparta o wzór Simpsona poradziła sobie w naszych eksperymentach zdecydowanie lepiej. Poprzez zastosowanie w algorytmie dążenia do wskazanej dokładności otrzymywaliśmy wyniki praktycznie pokrywające się z naszymi wartościami referencyjnymi. Metoda ta nie poradziła sobie jedynie przy obliczeniach dla funkcji posiadającej na badanym przedziale asymptotę pionową. W skutek próby wyznaczenia pola dla nieskończonej ilości punktów program nie jest w stanie otrzymać wystarczającej dokładności wskazanej przez użytkownika.

Mimo prostoty i łatwości implementacji kwadratury Gaussa opartej na wielomianie Legendre'a lepszym wyborem jest stosowanie metody Newtona-Cotesa opartej o wzór Simpsona. Pomimo dłuższego czasu działania i większej ilości przeprowadzanych operacji jest ona zdecydowanie dokładniejsza od drugiej badanej przez nas metody. Przyczyną tego jest różnica w ilości węzłów, gdzie dla wielomianów Legendre'a jesteśmy ograniczeni poprzez treść zadania do 6, w przeciwieństwie do metody opozycyjnej.