Adam Kapuściński | 229907
Damian Szczeciński | 230016

Przedmiot

Metody numeryczne i optymalizacyjne

Treść zadania 5

Celem zadania jest stworzenie programu aproksymującego funkcje w oparciu o wielomiany Legendre'a

Aproksymacja funkcji oparta na wielomianach Legendre'a – kolejne współczynniki aproksymujące w tej metodzie wyznacza się używając kolejnych stopni wielomianu Legendre'a. W naszym programie implementacja tej metody wygląda następująco:

1. Wyznaczenie P_i – wielomianu Legendre'a,
2. Wyznaczenie c_i – współczynnika wielomianu,
3. Wyznaczenie błędu aproksymacji,
4. Jeżeli błąd aproksymacji jest niesatysfakcjonujący, zwiększ licznik i i wróć do punktu 1.

W poniższych wzorach przyjmujemy, że $f(x)$ jest funkcją działającą na przedziale $[-1, 1]$, bądź funkcją zeskalowaną na ten przedział.

Wzór na P_i:

$$P_1(x) = 1$$

$$P_2(x) = x$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k$$

Jest to jedno z przekształceń wzoru Rodrigues'a na wyznaczenie wielomianu Legendre'a. Wybraliśmy ten wzór z powodu napisanej i zaimplementowanej przez nas funkcji obliczającej symbol Newtona na podstawie trójkąta Pascala. Przy tym zachowuje wyznaczony trójkąt w pamięci. Według naszych testów sposób ten ogranicza obliczenia co najmniej 500 krotnie. Krotność zależy od stopnia szukanego wielomianu.

Wzór na C_i:

$$C_i = \frac{\int_{-1}^{1} f(x) P_i(x)}{\int_{-1}^{1} P_i^2(x)}$$

Gdzie z warunku ortogonalności dla wielomianów Legendre'a wiemy, że:

$$\int_{-1}^{1} P_i^2(x) = \left(i + \frac{1}{2}\right)^{-1}$$

Aproksymacje funkcji wyznaczamy następującym wzorem:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i P_i(x)$$

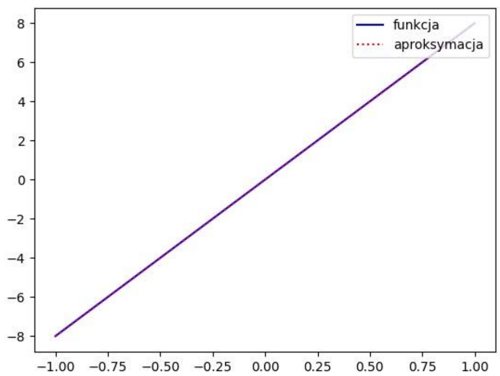
Natomiast błąd aproksymacji wyznaczamy w ten sposób:

$$err = \int_{-1}^{1} \left(f(x) - F(x)\right)^2 dx$$

Funkcje, wyniki i wykresy

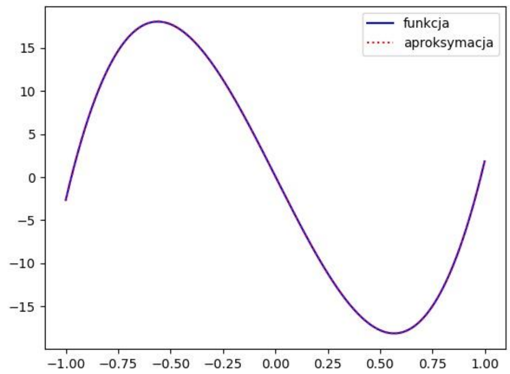
1 $f(x) = 2x + 4$ *dla* $x \in (-4.0,\ 0.0)$

Wielomian aproksymacji: $8.001x^1 - 0.0$
Błąd aproksymacji: $7.563e - 07$
Epsilon: 0.0001



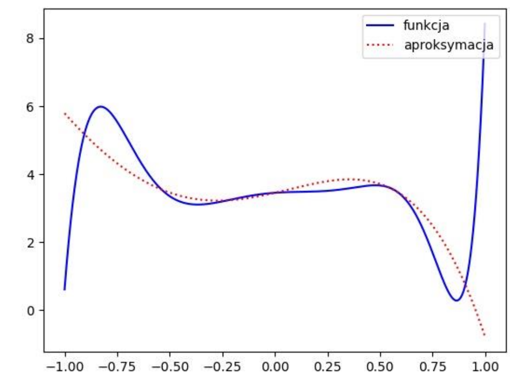
$$\mathit{2}\ f(x) = 0.3x^3 - 0.1x^2 - 3.7x + 0.4\ \mathit{dla}\ x \in (-3.5,\ 3.7)$$

Wielomian aproksymacji: $20.159x^3 - 0.311x^2 - 17.864x^1 - 0.049$
Błąd aproksymacji: $1.167e - 05$
Epsilon: 0.0001



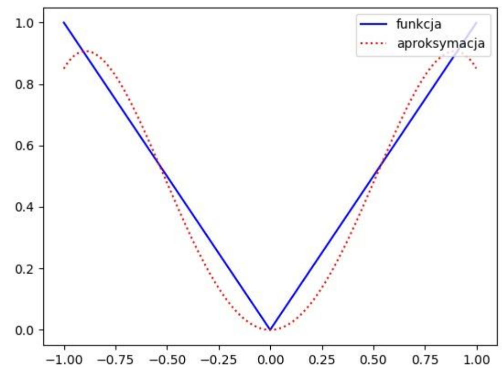
$$\mathit{3}\ f(x) = 0.4x^{10} + 0.8x^9 - 1.1x^8 - 1.4x^7 - 0.1x^6 + 1.7x^4 + 0.7x^3 - 0.7x^2 + 0.2x + 2.3\ \mathit{dla}\ x \in (-1.5,\ 1.5)$$

Wielomian aproksymacji: $-0.452x^4 - 1.891x^3 - 0.446x^2 - 1.399x^1 + 3.397$
Błąd aproksymacji: $6.758e - 07$
Epsilon: 0.0001



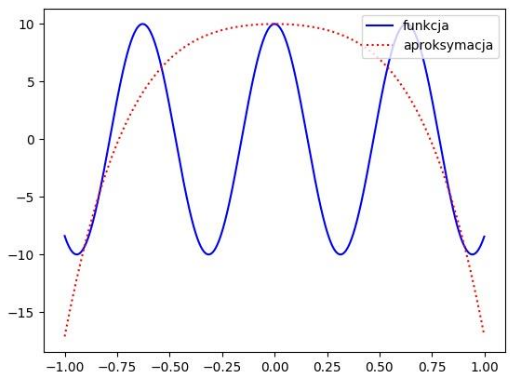
4 $f(x) = |x|\ dla\ x \in (-1,\ 1)$

Wielomian aproksymacji: $-0.324x^4 + 0.0x^3 + 0.702x^2 - 0.0x^1 + 0.472$
Błąd aproksymacji: $1.604e - 08$
Epsilon: 0.0001



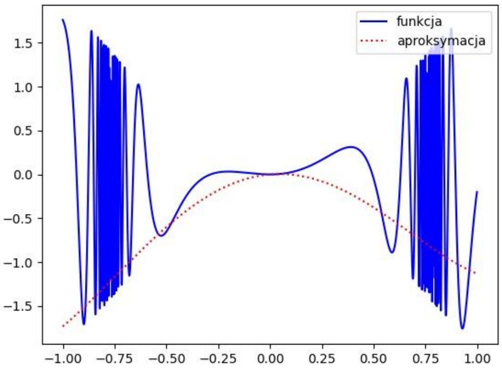
5 $f(x) = \cos(x)\ dla\ x \in (-10,\ 10)$

Wielomian aproksymacji: $-4.542x^4 + 0.002x^3 - 16.186x^2 - 0.0x^1 + 3.611$
Błąd aproksymacji: $2.134e - 06$
Epsilon: 0.0001



$$\mathbf{6}\ f(x) = \arctan\left(\cos\left(\left|\sin^2(x) * \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right)\right) * x^2 * \sin\left(26 + tan\left(\frac{sin(x)}{cos(1999)}\right)\right)\ dla\ x \in (-1.5,\ 1.5)$$

Wielomian aproksymacji: $0.159x^4 + 0.04x^3 - 1.021x^2 + 0.26x^1 - 0.57$
Błąd aproksymacji: $2.868e - 08$
Epsilon: 0.0001



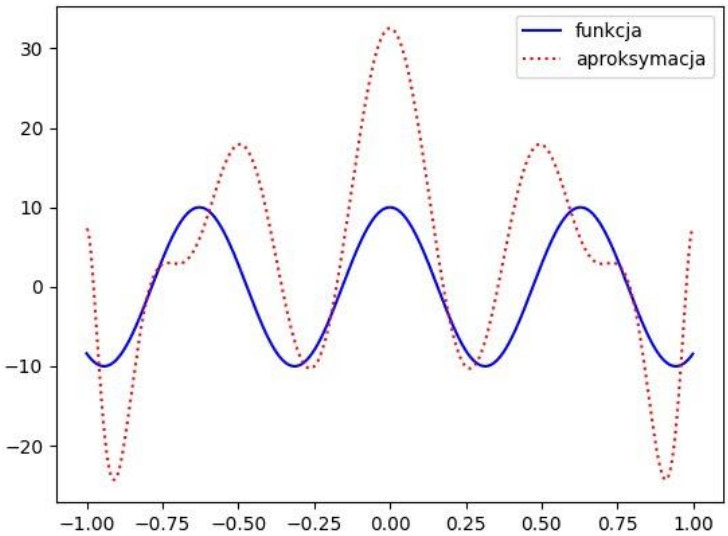
Wnioski

W przeprowadzonych przez nas eksperymentach zauważyliśmy, że metoda aproksymacji z wykorzystaniem wielomianów Legendre'a sprawdza się dobrze dla wielomianów niskiego stopnia lub funkcji im podobnych. Dobrym wykorzystaniem tej metody może być dzielenie funkcji na przedziały i ich aproksymacja.

W eksperymentach dla funkcji 1 oraz 2 aproksymacja praktycznie pokrywa się z zadaną funkcją. Błąd aproksymacji w otrzymanych dla obu eksperymentów wynikach był zdecydowanie zadowalający.

W przypadku funkcji będącej wielomianem wyższego stopnia (eksperyment nr 3) oraz funkcji moduł x (eksperyment nr 4) również otrzymujemy akceptowalne wyniki. Jednak sprawdzając wyrysowane wykresy możemy stwierdzić, że nie pokrywają się one adekwatnie do otrzymanych błędów aproksymacji. Dla wyniku tych eksperymentów możemy wnioskować, że wybrana przez nas metoda liczenia owego błędu może być niedoskonała.

Dobrym przedstawicielem tego zjawiska jest eksperyment przeprowadzany dla funkcji $\cos(x)$ (eksperyment nr 5), gdzie obliczony błąd jest bardzo niski, lecz aproksymacja w znacznym stopniu nie pokrywa się z oryginalną funkcją. Powinniśmy zwrócić tutaj uwagę na to, że otrzymana wartość jest mniejsza od wyniku dla eksperymentu nr 5, gdzie otrzymany wielomian na wykresie w sposób idealny dla ludzkiego oka odwzorował funkcję aproksymowaną. Dodatkowo, jeżeli sprawdzimy otrzymaną aproksymację dla $cos(x)$ na tym samym przedziale co w eksperymencie (5), ale dla wielomianu 15 stopnia, to otrzymamy błąd $\sim = 483.991$, natomiast wykres będzie wyglądał następująco:



Według nas wykres ten przedstawia aproksymację w znacznym stopniu lepszą niż dla eksperymentu (5), a mimo to uzyskujemy błąd ~ 240mln razy większy.

Podobnym przedstawia się sytuacja w eksperymencie nr 6. Mimo iż wyraźnie widać niedoskonałość aproksymacji, zwracany błąd jest zaskakująco niski.

Podsumowując zgromadzone w naszych badaniach wyniki możemy stwierdzić, że metoda aproksymacji funkcji oparta na wielomianach Legendre'a wydaje się być bardzo dokładna. Przy dobrej implementacji również bardzo szybka. Poddając aproksymacji funkcji kolejne przedziały, możemy uzyskać satysfakcjonujące wyniki. Jedyną wadą wydaje się być metoda obliczania błędu aproksymacji, gdzie wyrysowywany wykres może odstawać od naszego wyobrażenia dla otrzymanego błędu aproksymacji. Jednak może być to skutkiem naszej implementacji tego rozwiązania.