第四节 分块矩阵

矩阵可逆的判别

判别定理 $\boxed{n\text{阶方阵}A\text{可逆当且仅当} \ |A| \neq 0}$

推论：设A、B为同阶方阵，若 $AB = E$，
则方阵A和B都可逆，
且$A^{-1} = B$，$B^{-1} = A$

即：判断B是否为A的逆矩阵，
只需验证$AB = E$和$BA = E$中的一个即可

可逆矩阵运算性质：

若A 可逆

$$\left\{\begin{aligned}
&\left(A^{-1}\right)^{-1} = A \\
&(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1} \\
&\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T} \\
&\left(A^{*}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{*} = \frac{1}{|A|}A \\
&\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}
\end{aligned}\right.$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

逆矩阵的求法一：定义法

逆矩阵的求法二：伴随矩阵法

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}，\text{其中 } A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 A^*为A的伴随矩阵，

A_{ij}为行列式 $|A|$中元素 a_{ij}的代数余子式 .

逆矩阵的求法三：可逆变换法

矩阵方程	解
$AX = B$	$X = A^{-1}B$
$XA = B$	$X = BA^{-1}$
$AXB = C$	$X = A^{-1}CB^{-1}$

对于行数和列数较高的矩阵A，为了简化运算，经常采用分块法，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算. 具体做法是：将矩阵A用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为A的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

例 $A=\left(\begin{array}{cccc} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix},$

即 $A=\left(\begin{array}{cccc} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

即

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix},$$ 其中

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$ 其中

例：

$$A=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&0&2\\0&1&0&1&-3\\0&0&1&-1&0\\\hline 0&0&0&4&1\end{array}\right)$$

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad A_1=\begin{pmatrix}0&2\\1&-3\\-1&0\end{pmatrix}\quad \begin{matrix}0=\begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}\\[2ex] A_2=\begin{pmatrix}4&1\end{pmatrix}\end{matrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}E&A_1\\0&A_2\end{pmatrix}$$

一般的分块原则为：分块后出现特殊矩阵，例如单位阵、0矩阵、对角矩阵、三角形矩阵。

下述分块是无用的，也是错误的

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

可如下分块

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

二、分块矩阵的运算规则

(1) 设矩阵 A 与 B 的行数相同，列数相同，采用相同的分块法，有

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} \boxed{B_{11}} & \cdots & \boxed{B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中A_{ij}与B_{ij}的行数相同,列数相同,那么

$$A+B=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}+B_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}+B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}.$$

(2) 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，$\lambda$为数，那么

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

(3) 设A为$m\times l$矩阵，B为$l\times n$矩阵，分块成

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

其中$A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{it}$的列数分别等于$B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{tj}$的行数，那么

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 $C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}\quad (i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r).$

(4) 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, 则 $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$.

(5) 设A为n阶矩阵，若A的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块，其余子块都为零矩阵，且非零子块都是方阵；即

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix},$$

其中 $A_i\ (i=1,2,\cdots s)$ 都是方阵，那么称 A 为分块对角矩阵.

分块对角矩阵的行列式具有下述性质:

$$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|.$$

(6)设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix}$,

若 $|A_i| \neq 0 (i=1,2,\cdots,s)$,则 $|A| \neq 0$,并有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

特别有 $$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & & \\ & B^{-1} & \\ & & C^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

$$(7)\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sB_s \end{pmatrix}.$$

例1 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix},$$

求 AB.

解 把A,B分块成

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hline-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}E&O\\A_1&E\end{pmatrix},$$

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

则 $AB=\begin{pmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix}.$$

$$AB=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix}.$$

又 $$A_1B_{11}+B_{21}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1+B_{22}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

于是 $AB=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix}$

$$=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

例2　设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$,

$$B=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

求 $A+B$,　　ABA.

解 将 A, B 分块

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$ 其中

$$A_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix};$$

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix},$$ 其中

$$B_1=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix};$$

$$A+B=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & 0 \\ 0 & A_2+B_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1+B_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 2a \end{pmatrix},$$

$$A_2+B_2=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2b & 1 \\ 2 & 2b \end{pmatrix},$$

$$\therefore \quad A+B=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & 0 \\ 0 & A_2+B_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2b \end{pmatrix}.$$

$$ABA=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1B_1A_1 & 0 \\ 0 & A_2B_2A_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1B_1A_1=\begin{pmatrix} a^3+a & 2a^2+1 \\ a^2 & a^3+a \end{pmatrix},$$

$$A_2B_2A_2=\begin{pmatrix} b^3+2b & 2b^2+1 \\ 3b^2 & b^3+2b \end{pmatrix},$$

$$\therefore ABA = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1B_1A_1 & 0 \\ 0 & A_2B_2A_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^3+a & 2a^2+1 & 0 & 0 \\ a^2 & a^3+a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^3+2b & 2b^2+1 \\ 0 & 0 & 3b^2 & b^3+2b \end{pmatrix}.$$

例3 设 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

解 $A=\left(\begin{array}{c|cc}5&0&0\\\hline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$,

$A_1=(5)$, $A_1^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right)$; $A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$, $A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$;

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \end{pmatrix}; \qquad A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

比不分块简单

例4： 求 A^{-1}. $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&2&1\\0&0&5&3\end{pmatrix}$.

$|A_1|=3$, $|A_2|=1$, 故 A_1,A_2 可逆。

解： $A=\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&0&0\\0&3&0&0\\\hline 0&0&2&1\\0&0&5&3\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}$

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1/3\\0&1/3\end{pmatrix}$$

$$A_2^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&0\\0&A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1/3&0&0\\0&1/3&0&0\\0&0&3&-1\\0&0&-5&2\end{pmatrix}.$$

例5 设 $A=\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$,其中$B$和$C$都是可逆方阵，

证明A可逆,并求A^{-1}.

证 由B,C可逆，有$|A|=|B||C|\neq 0$，得A可逆.

设 $A^{-1}=\begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix}$，则$\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} BX+DW=E, \\ BZ+DY=O, \\ CW=O, \\ CY=E. \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} X=B^{-1}, \\ Y=C^{-1}, \\ Z=-B^{-1}DC^{-1}, \\ W=O. \end{cases}$$

因此 $A^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}.$

三、小结

在矩阵理论的研究中, 矩阵的分块是一种最基本, 最重要的计算技巧与方法.

分块矩阵之间的运算

分块矩阵之间与一般矩阵之间的运算性质类似

(1) 加法　同型矩阵 ,采用相同的分块法

(2) 数乘　数k乘矩阵A,需k乘A的每个子块

(3) 乘法

若A与B相乘,需A的列的划分与B的行的划分相一致

(4) 转置

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$$

(5) 分块对角阵的行列式与逆阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|.$$

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & O & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix}$$

A可逆 $\Leftrightarrow$ A_i可逆 $i=1,2,\cdots,s$且

$$A^{-1}=diag\left(A_1^{-1},A_2^{-1},\cdots,A_s^{-1}\right).$$