作业解答. 试从 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y'}$ 导出 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$.

解：$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=\underline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y'}\right)}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

$$=-\frac{y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}$$

一、隐函数的导数

二、由参数方程所确定的函数的导数

三、相关变化率

一、隐函数的导数

1. 定义

定义 由 $y = f(x)$ 表示的函数称为显函数，其特点是法则 f 为已知，即对定义域内的任一 x，通过该法则可计算出相应的 y； 二元方程 $F(x, y) = 0$ 在一定的条件下能确定一个以 x 为自变量以 y 为因变量的函数，称之为隐函数. 如果能从方程 $F(x, y) = 0$ 中解出因变量 y，则称该隐函数能显化.

例如，

$$y = \sin x, \quad y = \ln x + \sqrt{1 - x^2}, \quad y = \sqrt{x \ln x \sqrt{1 - \sin x}}$$

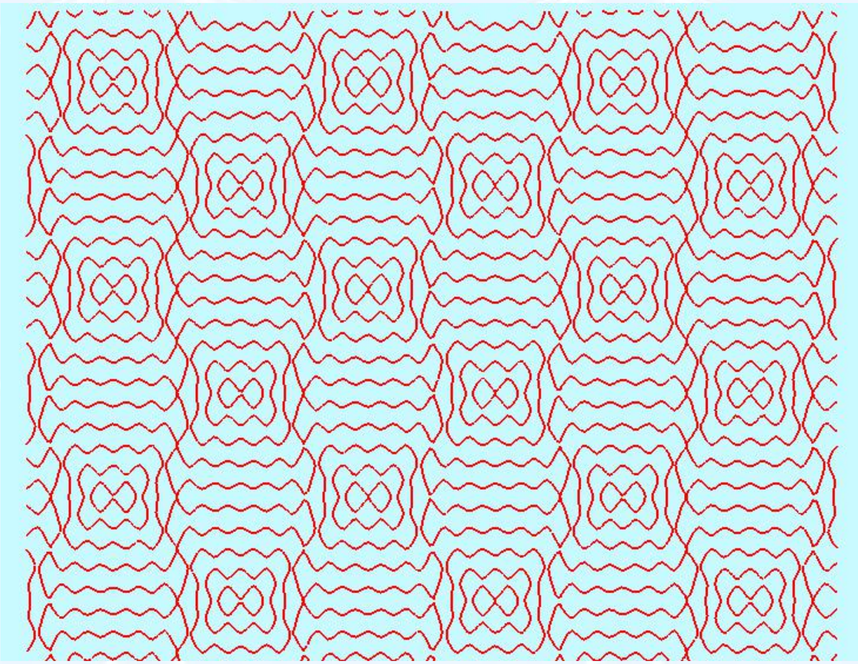
都是显函数.

方程 $x + y^3 - 1 = 0$ 能确定一个隐函数 $y = y(x)$，它能显化：$y = \sqrt[3]{1 - x}$.

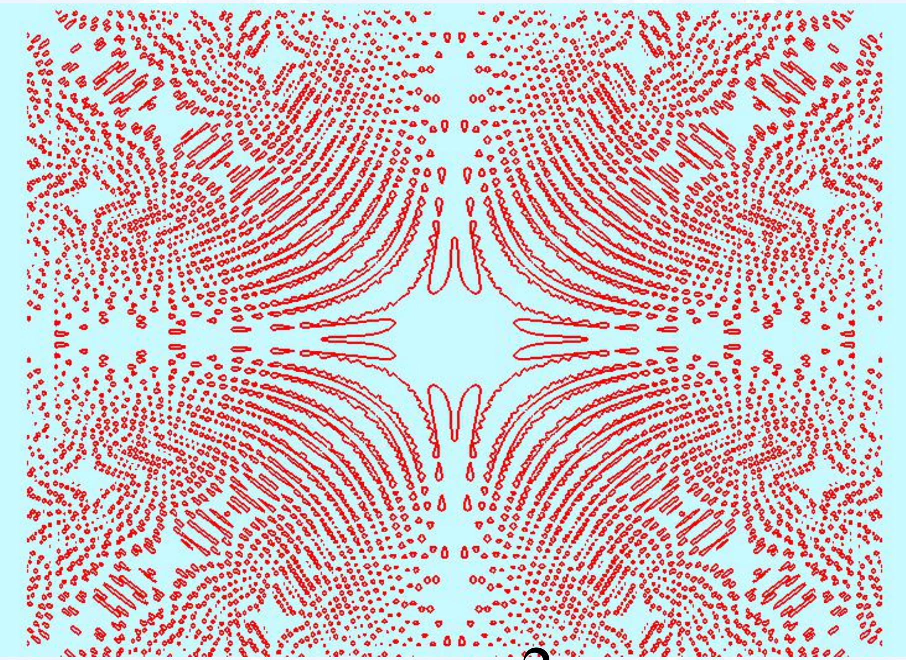
方程 $y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 - 12 = 0$ 能确定一个隐函数$y = y(x)$ 但它不能显化.

2. 隐函数的图形

二元方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的一元隐函数的图形比一元显函数的图形更复杂更漂亮.

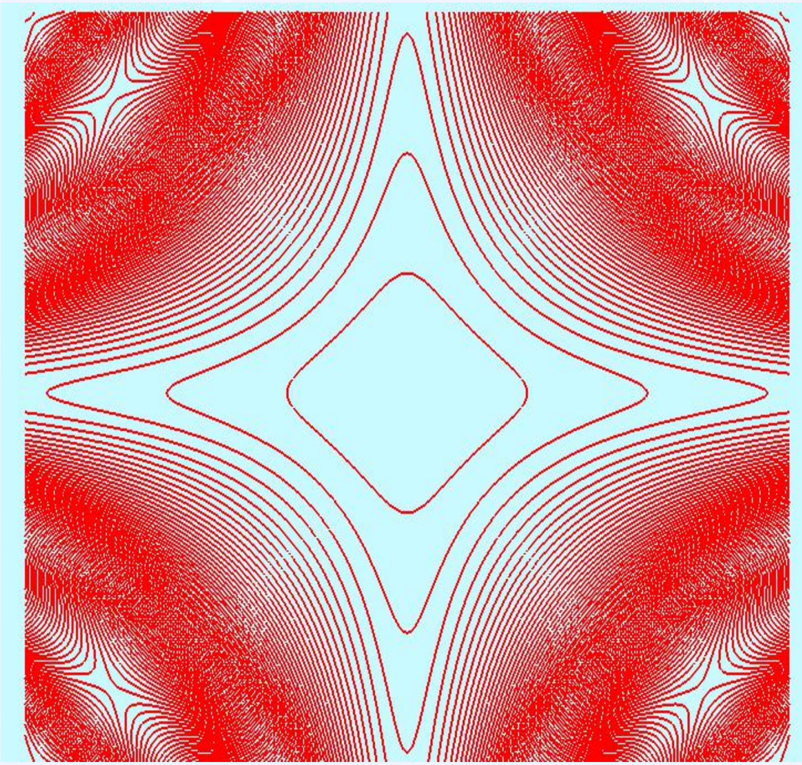


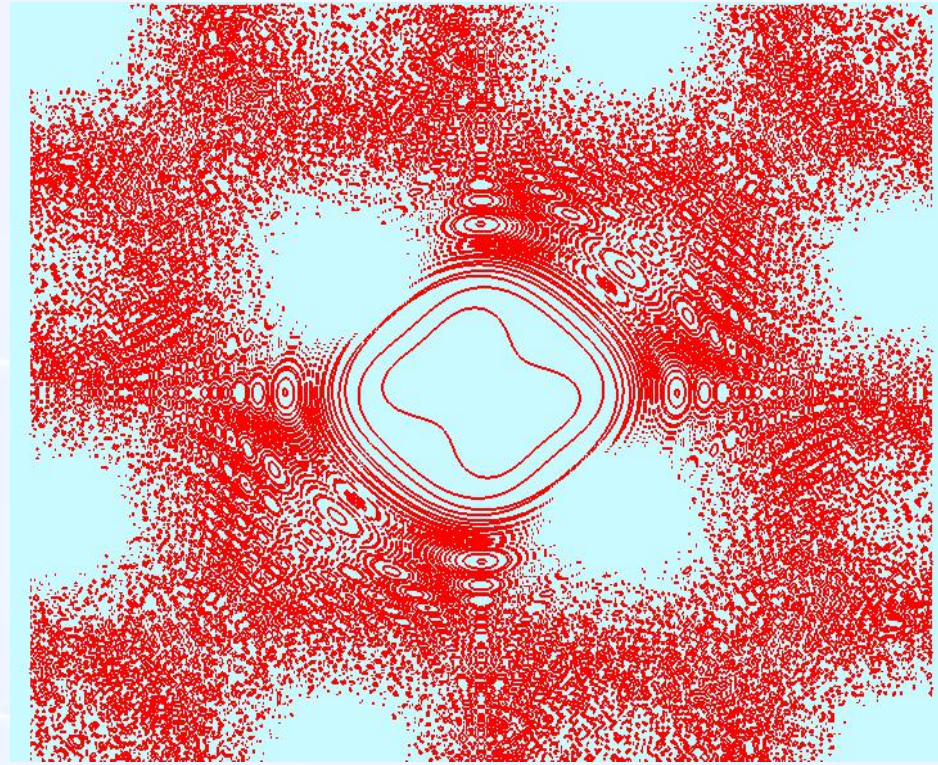
$$\sin^2 5x - \sin^2 2y + \sin x \sin 5y = 0$$



$$(x^2 + y^2)^2 - \frac{2xy}{\sin 40xy} = 1$$

第四节 隐函数及参数方程所确定函数的导数





$$\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}+0.1x^2y^2\right)=0 \qquad \sin\left((x^2+y^2)^3-(x^2-y^2)^2\right)+\sin x\sin y=0.25$$

3. 隐函数的求导方法

由二元方程 $F(x, y)=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数的计算方法：

$$F(x,y)=0$$

$\Downarrow$ 两边对 x 求导(注意 $y=y(x)$)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y)=0$$ (含导数 y' 的方程)

例1 求由方程$e^x + xy - e = 0$所确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

解

例2 求由方程 $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$ 所确定的隐函数在 $x = 0$ 处的导数 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解

例3 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 在点(x_0, y_0) 处的切线方程.

解

例4 求由方程 $x^4 + y^4 = 1$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

解

3. 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy = e$ 确定，求 $y'(0)$, $y''(0)$.

解：方程两边对 x 求导，得

$$e^y y' + y + xy' = 0 \quad ①$$

再求导，得

$$e^y y'^2 + (e^y + x)y'' + 2y' = 0 \quad ②$$

当 $x = 0$ 时，$y = 1$，故由 ① 得

$$y'(0) = -\frac{1}{e}$$

再代入 ② 得 $y''(0) = \dfrac{1}{e^2}$

4. 显函数的对数求导方法

对幂指函数 $y = u^v$, 其中$u = u(x), v = v(x)$, 可用对数求导法求导：

$$\ln y = v \ln u$$

$$\frac{1}{y} y' = v' \ln u + \frac{u' v}{u}$$

$$y' = u^v \left(v' \ln u + \frac{u' v}{u} \right)$$

注意: $y' = \underline{u^v \ln u \cdot v'} + \underline{v u^{v-1} \cdot u'}$

按指数函数求导公式　　按幂函数求导公式

例5 求 $y = x^{\sin x}\ (x > 0)$ 的导数.

解

例6 求 $y = \sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数.

解

练习， $y=\left(\frac{a}{b}\right)^{x}\left(\frac{b}{x}\right)^{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{b}\quad (a>0,b>0,\frac{a}{b}\neq 1)$

两边取对数

$$\ln y = x\ln\frac{a}{b} + a[\ln b-\ln x]+b[\ln x-\ln a]$$

两边对 x 求导

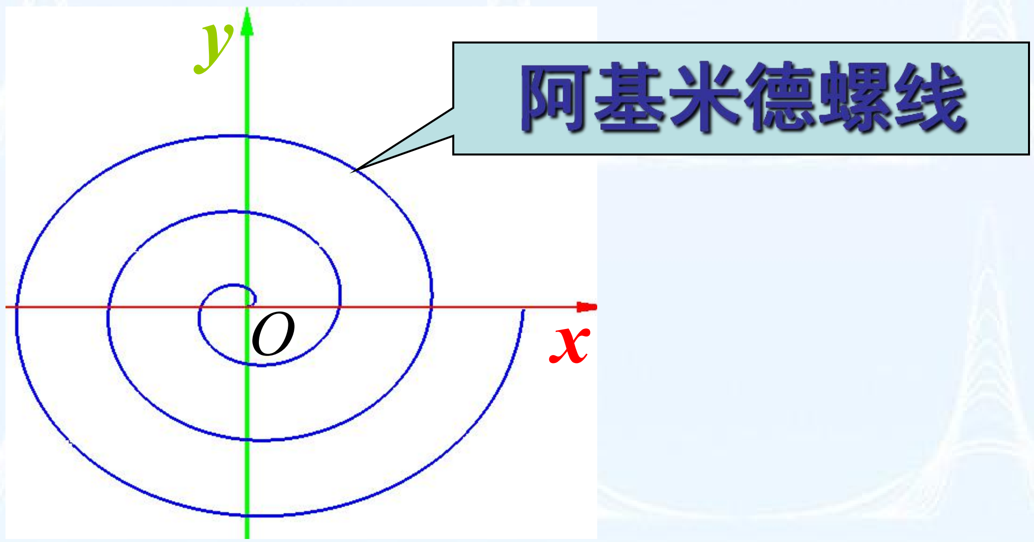
$$\frac{y'}{y}=\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}$$

$$y'=\left(\frac{a}{b}\right)^{x}\left(\frac{b}{x}\right)^{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{b}\left(\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}\right)$$

二、由参数方程所确定的函数的导数

定义 若参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定 y 与 x 之间的函数关系，则称此函数为**由参数方程所确定的函数**.

例如，$\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的图形如下:



设函数 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 都二阶可导，并且 $\varphi'(t)\neq 0$,

则由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的一阶导数和二阶导数的计算公式分别为

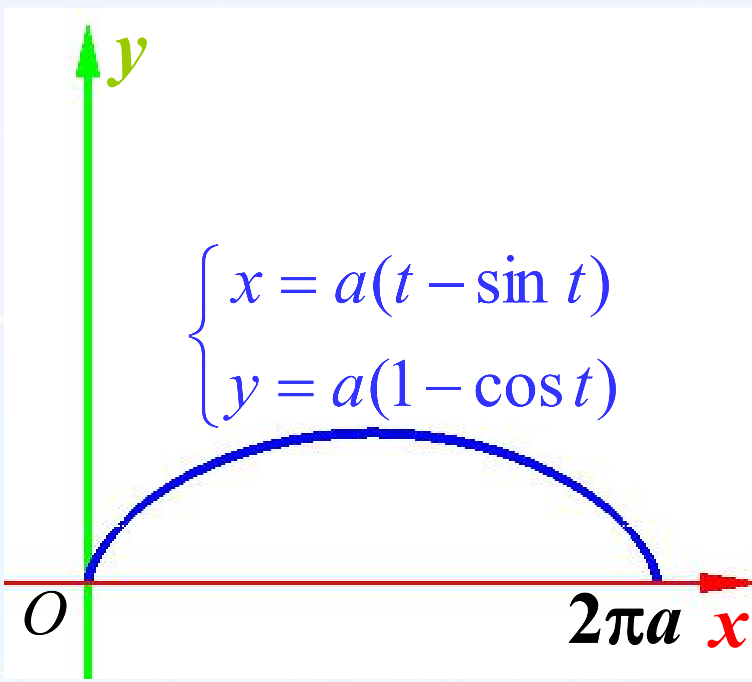
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

例7 计算由摆线的参数方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

所确定的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数.

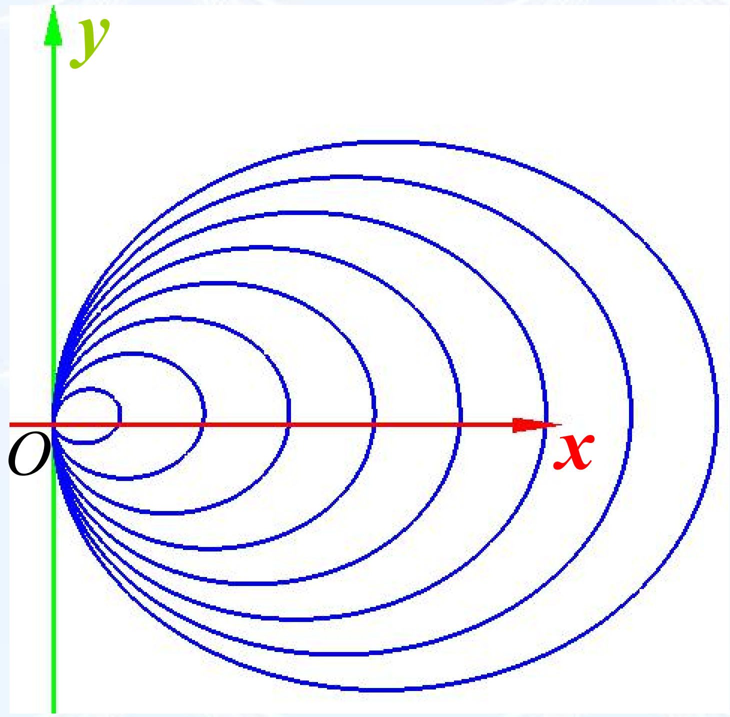
解



摆线动画

例8 求曲线 $\begin{cases} x = \theta(1 - \sin 2\theta), \\ y = \theta\cos 2\theta \end{cases}$ 在对应于参数 $\theta = \pi$ 的点处的切线方程．

解



练习 设由方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \varepsilon \sin y = 1 \end{cases}$ $(0 < \varepsilon < 1)$

确定函数 $y = y(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解：方程组两边对 t 求导，得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t + 2 \\ 2t - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \varepsilon \cos y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2(t+1) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2t}{1 - \varepsilon \cos y} \end{cases}$$

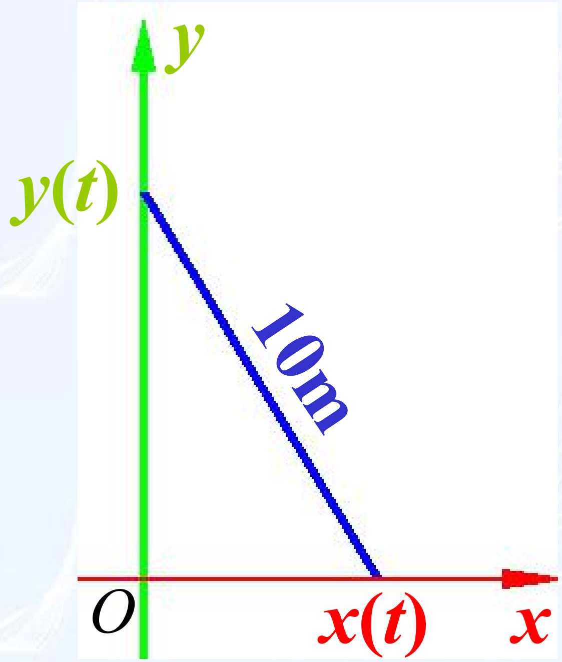
故 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t}{(t+1)(1 - \varepsilon \cos y)}$$

三*、相关变化率

设 $x=x(t)$ 及 $y=y(t)$ 都是可导函数，而变量 x 与 y 间存在某种关系，从而变化率 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 及 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 间也存在一定关系这两个相互依赖的变化率称为**相关变化率**．相关变化率问题就是研究这两个变化率之间的关系，以便从其中一个变化率求出另一个变化率.

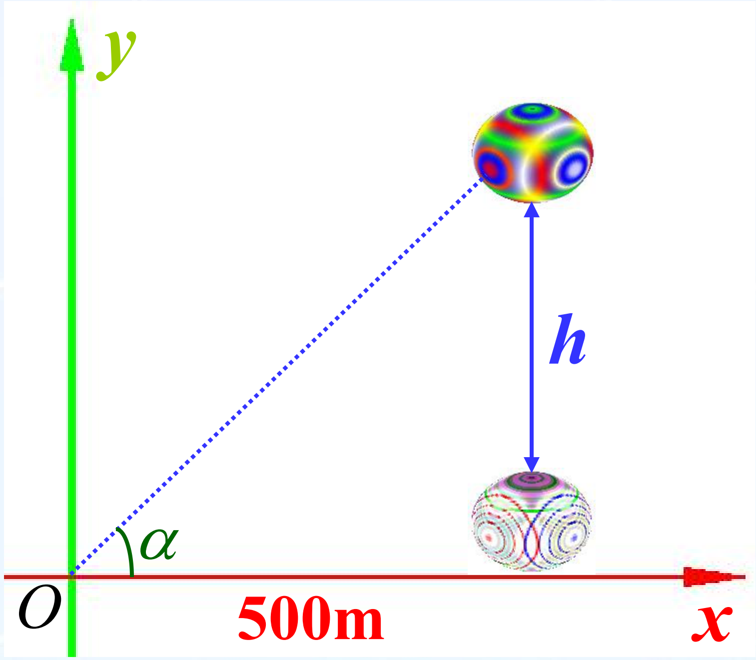
例10 一梯子长10m，上端靠边墙，下端着地，梯子顺墙下滑，当梯子下端离墙6m时，沿着地面以2m/s 的速度离墙，问这时梯子上端下降的速度是多少？

解



例11 一气球从离开观察员500m处离地面铅直上升，当气球高度为500m时，其速率为140m/min. 求此时观察员视线的仰角增加的速率是多少？

解



作业

P 108: 1, 2, 3, 4, 5，6, 8