四川农业大学　彭杰

第四节　线性方程组解的结构

一、齐次线性方程组解的结构

1．解向量的概念

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

若记

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

则上述方程组（1）可写成向量方程

$$Ax=0 \qquad (2).$$

若 $x_1=\xi_{11}, x_2=\xi_{21}, \cdots, x_n=\xi_{n1}$ 为方程 $Ax=0$ 的

解，则

$$x = \xi_1 = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{n1} \end{pmatrix}$$

称为方程组(1) 的**解向量**，它也就是向量方程(2)的解.

２．齐次线性方程组解的性质

（1）若 $x=\xi_1, x=\xi_2$ 为 $Ax=0$ 的解，则

$$x=\xi_1+\xi_2$$

也是$Ax=0$ 的解.

证明 $\because A\xi_1=0, A\xi_2=0$

$$\therefore A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=0$$

故 $x=\xi_1+\xi_2$ 也是$Ax=0$的解.

（2）若 $x=\xi_1$ 为 $Ax=0$的解，k 为实数，则 $x=k\xi_1$ 也是 $Ax=0$ 的解.

证明 $A(k\xi_1)=kA(\xi_1)=k0=0.$

证毕.

由以上两个性质可知，方程组的全体解向量所组成的集合，对于加法和数乘运算是封闭的，因此构成一个向量空间，称此向量空间为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的**解空间**.

基础解系及其求法

1．基础解系的定义

$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$称为齐次线性方程组 $Ax=0$的基础解系,如果

(1)$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$是$Ax=0$的一组线性无关的解;

(2) $Ax=0$的任一解都可由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$线性表出.

如果 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一组基础解系，那么，$Ax=0$ 的通解可表示为

$$x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_t\eta_t$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 是任意常数.

2．齐次线性方程组基础解系的求法

设齐次线性方程组的系数矩阵为 A，并不妨设 A 的前 r 个列向量线性无关.于是 A 可化为

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$
Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n \end{cases}
$$

现对$x_{r+1},\cdots,x_n$取下列 $n-r$ 组数：

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

分别代入 $\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n \end{cases}$

依次得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix}.$

从而求得原方程组的 $n-r$ 个解:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以$\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$是齐次线性方程组解空间的一个基.

说明

1．齐次线性方程的基础解系不是唯一的.

2．方程组的基础解系即是解空间的基.

3．若$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是$Ax=0$ 的基础解系，则其通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}.$$

其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$是任意常数.

例1 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 7x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系与通解.

解 对系数矩阵A作初等行变换，变为行最简矩阵，有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/7 & -3/7 \\ 0 & 1 & -5/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

便得
$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_4, \\ x_2 = \frac{5}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4. \end{cases}$$

令$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，对应有$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{pmatrix}$，

即得基础解系$\xi_1 = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

并由此得到通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (c_1, c_2 \in R).$$

若令$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$，对应有$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$，

即得$\xi'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi'_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$也是所求方程组的基础解系

例2　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

解　对系数矩阵施行初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&-1&1&-3&1\\0&-2&2&-6&2\\0&-2&2&-6&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&-1&1&-3&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&2&1&-2\\0&-1&1&-3&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&1&-2\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 = x_3 - 3x_4 + x_5 \end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$ 代入 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 = x_3 - 3x_4 + x_5 \end{cases}$

依次得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

所以原方程组的一个基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

故原方程组的通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3$.

其中k_1,k_2,k_3为任意常数 .

例3：齐次方程组 $AX=0$ 的基础解系含有2个向量，求 a, b.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & -3 \\ 1 & 2 & b \end{pmatrix}$$

解：齐次线性方程组有3个变量，

基础解系中向量的个数 $2=3-r(A)$，

故 $r(A)=1$.

$$A\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & a+2 & 0 \\ 0 & 0 & b-3 \end{pmatrix}$$ 故 $a=-2$, $b=3$.

思考：能否由$|A|=0$来确定a,b?　不能

因为其结果包含了$r(A)=2$的情形.

二、非齐次线性方程组解的结构

1．非齐次线性方程组解的性质

(1)设$x=\eta_1$及$x=\eta_2$都是$Ax=b$的解,则$x=\eta_1-\eta_2$为对应的齐次方程 $Ax=0$的解.

证明　$\because A\eta_1=b,\quad A\eta_2=b$

$$\therefore A(\eta_1-\eta_2)=b-b=0.$$

即$x=\eta_1-\eta_2$满足方程$Ax=0.$

(2) 设$x=\eta$是方程 $Ax=b$的解, $x=\xi$是方程 $Ax=0$的解,则$x=\xi+\eta$仍是方程 $Ax=b$ 的解.

证明 $A(\xi+\eta)=A\xi+A\eta=0+b=b$,

所以$x=\xi+\eta$ 是方程 $Ax=b$的解.

证毕.

２．非齐次线性方程组的通解

非齐次线性方程组**Ax=b**的通解为

$$x = k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*.$$

其中 $k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$ 为对应齐次线性方程组的通解，η^* 为非齐次线性方程组的任意一个特解.

３．与方程组 $Ax=b$ 有解等价的命题

线性方程组 $Ax=b$ 有解

$\Leftrightarrow$

向量 b 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示；

$\Leftrightarrow$

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$ 等价;

$\Leftrightarrow$

矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 与矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b)$ 的秩相等.

４．线性方程组的解法

（1）应用克莱姆法则

特点：只适用于系数行列式不等于零的情形，计算量大，容易出错，但有重要的理论价值，可用来证明很多命题.

（2）利用初等变换

特点：适用于方程组有唯一解、无解以及有无穷多解的各种情形，全部运算在一个矩阵（数表）中进行，计算简单，易于编程实现，是有效的计算方法.

例4 求解方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2. \end{cases}$

解 对增广矩阵B施行初等行变换：

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见$R(A)=R(B)=2$,故方程组有解,并有

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2, \\ x_3 = \qquad 2x_4 + 1/2. \end{cases}$$

取 $x_2 = x_4 = 0$, 则 $x_1 = x_3 = \dfrac{1}{2}$,即得方程组的一个解

$$\eta^* = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

在对应的齐次线性方程 组$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4, \\ x_3 = \qquad 2x_4 \end{cases}$中,取

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{及} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 则} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{及} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

即得对应的齐次线性方 程组的基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

于是所求通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, (c_1, c_2 \in R).$$

例5　设有线性方程组 $\begin{cases} x_1 + a x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + (2a-1)x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + (a+3)x_3 = b \end{cases}$

(1) 问a,b为何值时,方程组有唯一解，无穷多解,无解;

(2) 当方程组有无穷多解时,求出全部解

解　对增广矩阵$\tilde{A}$作初等行变换化简,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 2a-1 & 3 & 1 \\ 1 & a & a+3 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & b-1 \end{pmatrix} = \tilde{B}.$$

当$a \neq 1$且$a \neq -1$时，$r_A = r_{\tilde{A}} = 3$　方程组有唯一解;

当a=1时，$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & b-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$

当a=1时，$\tilde{B}=\begin{pmatrix}1 & a & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & b-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & b-1\end{pmatrix}$

当$a=1, b\neq 1$时，$r_A=2\neq r_{\tilde{A}}=3$， 方程组无解；

当$a=1, b=1$时，$r_A=r_{\tilde{A}}=2$ 方程组有无穷多解；

$\tilde{B}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 全部解为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

k为任意数

$$\tilde{A} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & b-1 \end{pmatrix} = \tilde{B} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

同理,当$a=-1, b\neq 1$时 $r_A = 2 \neq r_{\tilde{A}} = 3$, 方程组无解;

当$a=-1, b=1$时,$r_A = r_{\tilde{A}} = 2$ 方程组有无穷多解;

$$\tilde{B} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 全部解为 $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

c为任意数

小结

1．齐次线性方程组基础解系的求法

（1）对系数矩阵 A 进行初等变换，将其化为最简形

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

（2）得出 $R(A)=r$，同时也可知方程组的一个基础解系含有$n-r$个线性无关的解向量.

由于 $Ax=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n \end{cases}$

令 $$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix},$

故 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$

为齐次线性方程组的一个基础解系.

2． 线性方程组解的情况

$Ax=0$一定有解

$R(A)=n \quad \Leftrightarrow \quad Ax=0$只有零解

$R(A)<n \quad \Leftrightarrow \quad Ax=0$有非零解

(此时基础解系中含有 $n-R(A)$个解向量)

$Ax=b$

$R(A)=R(B)=n \quad \Leftrightarrow \quad Ax=b$有唯一解.

$R(A)=R(B)<n \quad \Leftrightarrow \quad Ax=b$有无穷多解.

$R(A)\neq R(B) \quad \Leftrightarrow \quad Ax=b$无解.