第五节 函数的微分

一、微分的定义

二、微分的几何意义

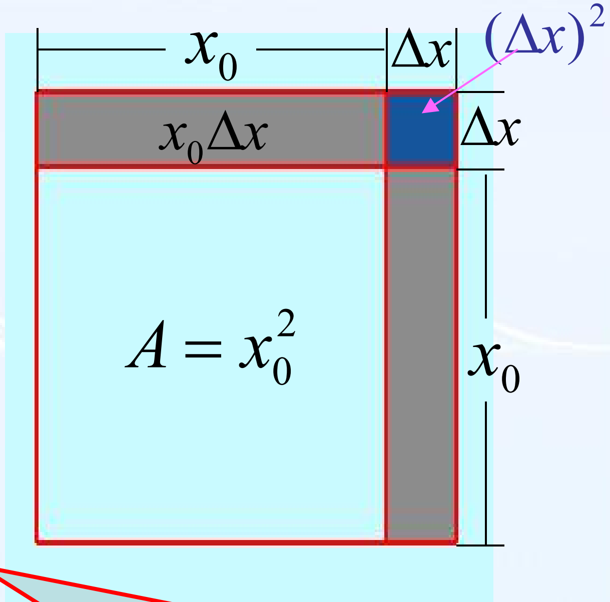
三、微分的运算法则

四、微分在近似计算中的应用

一、微分的定义

1. 引例

一块正方形金属薄片受温度变化的影响，其边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$，问此薄片的面积改变了多少？



面积的改变量

$$\Delta A = (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2 = \boxed{2x_0\Delta x} + \boxed{(\Delta x)^2}.$$

关于Δx的线性函数

关于Δx的高阶无穷小

那么，对于任意函数 $y=f(x)$，是否也有

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\boxed{A\Delta x}+\boxed{o(\Delta x)}.$$

关于Δx的线性主部

关于Δx的高阶无穷小

本节将研究这一问题.

2. 定义

定义 设函数$y=f(x)$在某区间内有定义，x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在这区间内，如果函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可表示为

$$\Delta y = A\,\Delta x + o(\Delta x),$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是可微的，而$A\,\Delta x$叫做函数$y=f(x)$在 x_0 处的微分，记作 $\mathrm{d}y$，即

$$\mathrm{d}y = A\,\Delta x\,.$$

3. 函数可微的充要条件

定理 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，并且 $dy = f'(x_0)\,\Delta x$.

证明

因为 $dx = \Delta x$，所以 $dy = f'(x)\,\Delta x$ 可写成

$$dy = f'(x)dx\,,$$

由此可得

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

导数也叫“微商”

例1 求函数 $y = x^2$ 在 $x = 1$ 和 $x = 3$ 处的微分.

解

例2 求函数 $y = \sqrt{x}$ 当 $x_0 = 4$, $\Delta x = 0.03$ 时的增量和微分.

解

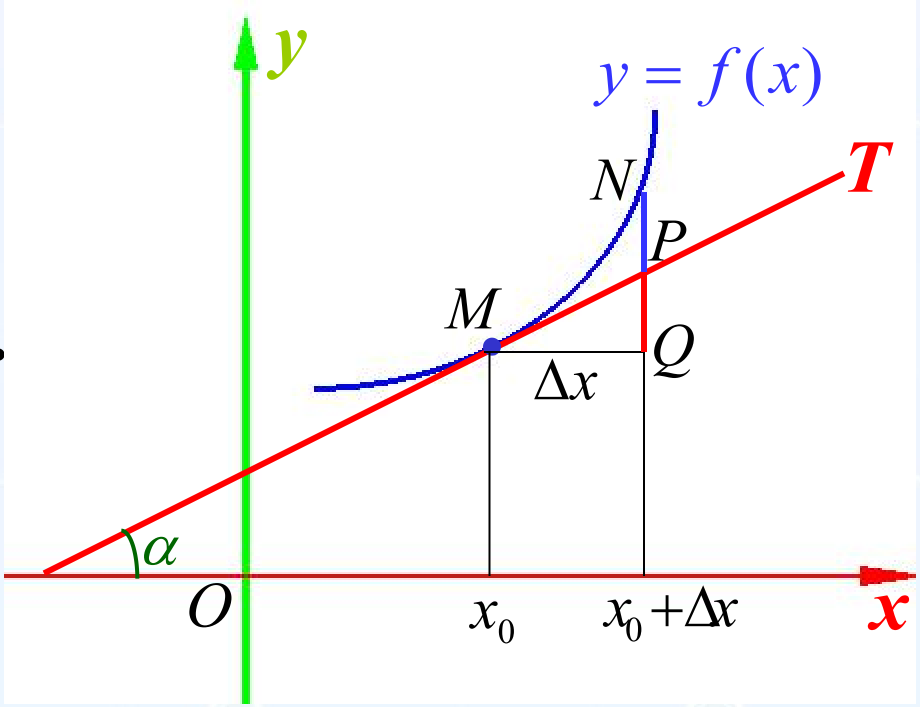
在例2中，$\Delta y = 0.007486$，$\mathrm{d}y = 0.0075$，所以$\Delta y \approx \mathrm{d}y$.

一般地，若 $y = f(x)$ 在 x_0 处可微，且 $|\Delta x|$ 很小，则

$$\Delta y = \mathrm{d}y + o(\mathrm{d}y) \Longrightarrow \Delta y \approx \mathrm{d}y .$$

二、微分的几何意义

如图所示，设 $M(x_0, y_0)$, $N(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 为曲线 $y=f(x)$ 上的两点，且函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可微，则曲线在 M 处有切线，设为 MT.



于是有

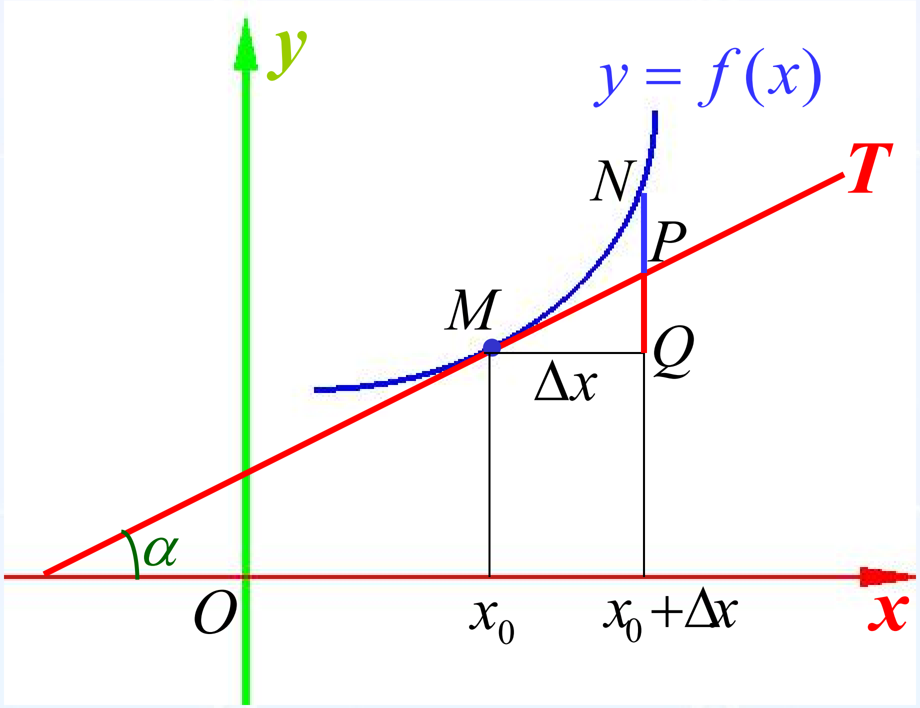
$$MQ = \Delta x\,,\, QN = \Delta y\,.$$

$$QP = MQ \cdot \tan\alpha = \Delta x \cdot f'(x_0)\,,$$ 即 $$\mathrm{d}y = QP\,.$$

$$MQ = \Delta x\,,\ QN = \Delta y\,.\quad \mathrm{d}y = QP\,.$$

由此可知，当Δy是曲线上的点的纵坐标的增量时，

微分 $\mathrm{d}y$ 就是曲线的切线上点的纵坐标的相应增量．当 $|\Delta x|$ 很小时，$|\Delta y - \mathrm{d}y|$ 比 $|\Delta x|$ 更小．因此在 M 的邻近可以用切线段来近似代替



曲线段．这就是“以直代曲”的原理．

三、微分的运算法则

1. 基本初等函数的微分公式

导数公式	微分公式
$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$	$\mathrm{d}(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$
$(\sin x)' = \cos x$	$\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\mathrm{d}x$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\mathrm{d}(\cos x) = -\sin x\mathrm{d}x$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$\mathrm{d}(\tan x) = \sec^2 x\mathrm{d}x$
$(\cot x)' = -\csc^2 x$	$\mathrm{d}(\cot x) = -\csc^2 x\mathrm{d}x$

导数公式	微分公式
$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$	$\mathrm{d}(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x\mathrm{d}x$
$(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$	$\mathrm{d}(\csc x) = -\csc x \cdot \cot x\mathrm{d}x$
$(a^x)' = a^x \ln a \ (a > 0, a \neq 1)$	$\mathrm{d}(a^x) = a^x \ln a\mathrm{d}x \ (a > 0, a \neq 1)$
$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} \ (a > 0, a \neq 1)$	$\mathrm{d}(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a}\mathrm{d}x \ (a > 0, a \neq 1)$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$\mathrm{d}(\ln x) = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$

导数公式	微分公式
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}dx$
$(\mathrm{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$d(\mathrm{arc}\cot x) = -\frac{1}{1+x^2}dx$

2. 函数和、差、积、商的微分法则

求导法则	微分法则
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$
$(Cu)' = Cu'$	$\mathrm{d}(Cu) = C\mathrm{d}u$
$(uv)' = u'v + uv'$	$\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}\ (v \neq 0)$	$\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}\ (v \neq 0)$

3. 复合函数的微分法则

设函数 $y=f(u)$ 及 $u=g(x)$ 都是可导函数，则

$$y'=[f(g(x))]'=f'(u)\cdot g'(x),$$

于是有微分公式

$$dy=f'(u)\cdot g'(x)\,dx.$$

$$du=g'(x)\,dx$$

$$dy=f'(u)du.$$

微分形式不变性

例3 $y = \sin(x^2 + 1)$，求 $\mathrm{d}y$.

解

例4 $y = \ln(1 + \mathrm{e}^{x^2})$，求 $\mathrm{d}y$.

解

四、微分在近似计算中的应用

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)\neq 0$，则当 $|\Delta x|$ 很小时有近似公式

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x\,.$$

$$\Updownarrow$$

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x\,.$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x\,.$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)\,.$$

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

上述近似计算公式的意义在于：$f(x_0+\Delta x)$ 不易计算，而 $f(x_0)$，$f'(x_0)$ 都容易计算，则可用该近似计算公式计算 $f(x_0+\Delta x)$ 的近似值.

在上述近似计算公式中，若令 $x_0=0$，则

$$f(\Delta x)\approx f(0)+f'(0)\Delta x,$$

或者写成

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x.\quad (|x|\text{很小})$$

当 $|x|$ 很小时，有以下几个常用的近似计算公式：

(1) $\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{1}{n}x$；

(2) $\sin x \approx x$；

(3) $\tan x \approx x$；

(4) $e^x \approx 1+x$；

(5) $\ln(1+x) \approx x$.

例5 利用微分近似计算 $\sin 30^\circ 30'$.

解

例6 利用微分近似计算 $\sqrt[3]{1.06}$.

解

例7 有一批半径为 1cm 的球，为了提高球面的光洁度，要镀上一层铜，厚度为 0.01cm．估计一下每只球需要用铜多少 g(克)(铜的密度是8.9 g/cm^2)?

解

例8 圆的近似方程问题.

解

作业：

P120 3（2,4,6,8,9），4（2,4,6,8）,8