第一节 方阵的特征值与特征向量

主要内容

- 引例
- 特征值与特征向量的概念
- 特征值与特征向量的求法
- 特征值与特征向量的性质

一、引例

工程技术中的一些问题，如振动问题和稳定性问题，常可归结为求一个方阵的特征值和特征向量的问题．数学中诸如方阵的对角化及解微分方程组等问题，也都要用到特征值的理论．

特征值与特征向量的概念

定义 设 A 是 n 阶方阵，如果数 λ 和 n 维非零列向量 x 使关系式

$$Ax = \lambda x \tag{1}$$

成立，那么，这样的数 λ 称为方阵 A 的**特征值**，非零向量 x 称为 A 的对应于特征值 λ 的**特征向量**.

（1）式也可写成

$$(A-\lambda E)x=0\,, \tag{2}$$

这是 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组, 它有非零解的充要条件是系数行列式

$$|A-\lambda E|=0\,,$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

$$f(\lambda)=|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

上式是以 λ 为未知数的一元 n 次方程，称为方阵 A 的**特征方程**. 其左端 $|A-\lambda E|$ 是 λ 的 n 次多项式，记作 $f(\lambda)$, 称为方阵 A 的**特征多项式**. 显然，A 的特征值就是特征方程的解. 特征方程在复数范围内恒有解，其个数为方程的次数（重根按重数计算），因此，n 阶方阵 A 在复数范围内有 n 个特征值.

多项式方程的重根

例： $(\lambda-1)^3(\lambda+1)^2(\lambda+2)=0$

$\lambda_1=1$ 为3重根，

$\lambda_2=-1$ 为2重根，

$\lambda_3=-2$ 为1重根，即单根.

特征值与特征向量的求法

求矩阵 A 的特征值与特征向量的步骤如下：

步骤 1： 计算 A 的特征多项式，并求出特征方程的所有根. 设矩阵 A 有 s 个不同的特征值

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s.$$

步骤 2： 对 A 的每个特征值 $\lambda_i\ (i = 1, 2, \cdots, s)$, 求解齐次线性方程组 $(A - \lambda_i E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$，该方程组的全部解即为矩阵 A 的对应于 λ_i 的全部特征向量.

例1 求$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解 A的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1$$

$$=8-6\lambda+\lambda^2=(4-\lambda)(2-\lambda)$$

所以A的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=4.$

当$\lambda_1=2$时,对应的特征向量应满足

$$\begin{pmatrix}3-2 & -1\\ -1 & 3-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

即 $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$

解得 $x_1 = x_2$，所以对应的基础解系可取为 $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$kp_1 (k \neq 0)$ 是对应于特征值2的所有特征向量

当 $\lambda_2 = 4$ 时，由

$$\begin{pmatrix} 3-4 & -1 \\ -1 & 3-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{即} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

解得 $x_1 = -x_2$，所以对应的基础解系可 取为

$$p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$kp_2 (k \neq 0)$ 是对应于特征值 4的所有特征向量

例 2 求矩阵$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解 A的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda&1&0\\-4&3-\lambda&0\\1&0&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)^2,$$

所以A的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1.$

当$\lambda_1=2$时,解方程$(A-2E)x=0$.由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-3&1&0\\-4&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

所以$kp_1(k\neq 0)$是对应于$\lambda_1=2$的全部特征向量

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时,解方程$(A-E)x=0$.由

$$A-E=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $$p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以 $k p_2 (k \neq 0)$ 是对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的全部特征向量

例３ 设$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$,求A的特征值与特征向量.

解

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -4 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2,$$

令 $-(\lambda+1)(\lambda-2)^2=0$

得A的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2.$

当$\lambda_1=-1$时，解方程$(A+E)x=0$.由

$$A+E=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ -4 & 1 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$,

故对应于 $\lambda_1=-1$的全体特征向量为

$$k\,p_1 \qquad (k\neq 0).$$

当$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$时，解方程$(A-2E)x=0$.由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系为：

$$p_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix},\qquad p_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 4\end{pmatrix},$$

所以对应于$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$的全部特征向量为：

$$k_2 p_2 + k_3 p_3 \quad (k_2, k_3 \text{不同时为 } 0).$$

例4

求矩阵$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\8&2&4\\8&3&3\end{pmatrix}$的特征值与特征向量.

解：A的特征方程

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&0\\-8&\lambda-2&-4\\-8&-3&\lambda-3\end{vmatrix}=0$$

$$(\lambda+1)(\lambda^2-5\lambda-6)=0$$

A的特征值为$\lambda_1=-1$(二重)，$\lambda_2=6$。

当$\lambda=-1$时，解方程组$(-E-A)X=0$，

$$-E-A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -8 & -3 & -4 \\ -8 & -3 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -8 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

根据非零首元的位置可知，自由未知量为x_2,x_3，分别令$x_2=8,x_3=0$和$x_2=0,x_3=2$，得基础解系

$$X_1=\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

属于-1的全部特征向量为$k_1X_1+k_2X_2$，

（k_1,k_2为不全为零的常数）。

当$\lambda=6$时，解$(6E-A)X=0$,

$$6E-A=\begin{pmatrix}7 & 0 & 0\\ -8 & 4 & -4\\ -8 & -3 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

令$x_3=1$，得$X_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，所以属于6的全部特征

向量为kX_3,k是非零的任意常数。

例5

设λ_0是矩阵A的特征值，k是任意常数，则$k\lambda_0$是矩阵kA的特征值.

证明：存在$X_0 \neq 0$，使得$AX_0 = \lambda_0 X_0$，而

$$(kA)X_0 = k(AX_0) = k(\lambda_0 X_0) = (k\lambda_0)X_0,$$

所以$k\lambda_0$是矩阵kA的特征值。

例6 证明：若λ是矩阵A的特征值，x是A的属于λ的特征向量，则

(1) λ^m是A^m的特征值 (m是正整数).

(2) 当A可逆,λ^{-1}是A^{-1}的特征值.

证明 (1) $\because Ax=\lambda x$

$$\therefore A(Ax)=A(\lambda x)=\lambda(Ax)=\lambda(\lambda x)\Rightarrow A^2x=\lambda^2x$$

再继续施行上述步骤 $m-2$次，就得 $A^m x=\lambda^m x$

故λ^m是矩阵A^m的特征值,且x是A^m对应于λ^m的特征向量.

(2) 当A可逆时，$\lambda \neq 0$,

由$Ax = \lambda x$可得

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}(\lambda x) = \lambda A^{-1}x$$

$$\Rightarrow A^{-1}x = \lambda^{-1}x$$

故λ^{-1}是矩阵A^{-1}的特征值，且x是A^{-1}对应于λ^{-1}的特征向量.

一般地：$\varphi(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A + a_n E$

$$\varphi(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

若λ是矩阵A的特征值，则$\varphi(\lambda)$是$\varphi(A)$的特征值

定理2 n阶方阵A与A^T的特征值相同.

证明 $\because$ A的特征多项式为 $|\lambda E - A|$

又 $|\lambda E - A| = |(\lambda E - A)^T| = |\lambda E - A^T|$

$\therefore$ A与A^T的特征多项式相同

$\therefore$ A与A^T的特征方程相同

$\therefore$ A与A^T的特征值相同

定理3 设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，

则有 (1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$.

方阵A的主对角线上元素的和称为方阵A的迹，记作 $Tr(A)$; 即：$Tr(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

例：若三阶方阵A的特征值为1,2,3

(1). 证明：A可逆

证明 $\because |A|=1\times2\times3=6\neq0$

$\therefore A$可逆

特征值与特征向量的性质

定理 6 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是方阵 A 的 m 个特征值，$p_1, p_2, \cdots, p_m$ 依次是与之对应的特征向量. 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 各不相等，则 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 线性无关.

例 设 λ_1, λ_2 为方阵 A 的互异的特征值，X_i 为 A 的属于特征值 $\lambda_i (i = 1, 2)$ 的特征向量，则 $X_1 + X_2$ 不是 A 的特征向量.

证 由定义知: $AX_1 = \lambda_1 X_1, AX_2 = \lambda_2 X_2$.

用反证法证.若存在 λ_0 使得

$$A(X_1 + X_2) = \lambda_0 (X_1 + X_2),$$

则 $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = \lambda_0 X_1 + \lambda_0 X_2,$

即 $(\lambda_0 - \lambda_1) X_1 + (\lambda_0 - \lambda_2) X_2 = 0$ （1）

有 $\lambda_1 = \lambda_2$，这就矛盾了

$\therefore X_1 + X_2$ 不是 A 的特征向量.

小结：特征值与特征向量的计算步骤

(1) 求特征多项式，亦即计算行列式 $|\lambda E\text{-}A|$.

(2) 求多项式$|\lambda E\text{-}A|=0$的根，设为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m (m\le n)$.

(3) 对每个 λ_i, 解齐次线性方程组 $(\lambda_i E\text{-}A)X=0$.

求出其基础解系，设为 $X_1, X_2, \ldots, X_{ir_i}$.

故 λ_i 对应的全部特征向量为：

$$c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_{ir_i}X_{ir_i}$$

其中系数 $c_1, c_2, \ldots, c_{ir_i}$ 不全为0.