第三节 向量组的秩和极大线性无关组

向量组的极大无关组和秩

问题

（1）一个向量组（含有限多个向量，或无限多个向量）线性无关的向量最多有几个？

（2）如何找出这一组线性无关向量组？

（3）其余向量与这一组向量有何关系？

1. 向量组的线性表出

定义1 如果向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$ 中的每个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,p)$ 都可以由向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出，则称向量组A可由向量组B线性表出.

若向量组A和向量组B可相互线性表出，称向量组A与向量组B等价。

即

$$\alpha_i = k_{i1}\beta_1 + k_{i2}\beta_2 + \cdots + k_{it}\beta_t,\quad i=1,2,\cdots,p \quad (1)$$

$$\beta_i = l_{i1}\alpha_1 + l_{i2}\alpha_2 + \cdots + l_{ip}\alpha_p,\quad i=1,2,\cdots,t \quad (2)$$

定理

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 是两个向量组，如果

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出;

(2) $p > t$

则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 必线性相关。

（逆否命题）

推论1： 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出，并且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 线性无关，那么 $p \le t$.

推论2： 两个线性无关的等价的向量组，必包含相同个数的向量。

2. 极大线性无关组

定义2

向量组A，如果在A中有r个向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 满足:

（1）$A_0:\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关，

（2）A中的任意向量可由 A_0 线性表出.

则称部分组 A_0 为向量组A的一个极大线性无关组.

在条件（1）下，（2）等价于以下条件:

（2'）任意r＋1个向量都线性相关.

注:（1）只含零向量的向量组没有极大无关组.

（2）一个线性无关向量组的极大无关组为其本身.

例：在向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ 中，

首先 α_1,α_2 线性无关， 又 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，

所以 α_1,α_2 组成的部分组是极大无关组。

还可以验证 α_2,α_3 也是一个极大无关组。

注：一个向量组的极大无关组一般不是唯一的。

极大无关组的一个基本性质：

任意一个极大线性无关组都与向量组本身等价。

向量组的极大无关组不唯一，而每一个极大无关组都与向量组等价，所以：

向量组的任意两个极大无关组都是等价的。

由于等价的线性无关的向量组必包含相同个数的向量，可得

定理2： 一个向量组的任意两个极大无关组等价，且所含向量的个数相同。

3. 向量组的秩

定义3 向量组的极大无关组所含向量的个数，称为**向量组的秩**，记作 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p)$.

例：向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\\-1\end{pmatrix}$

秩为2.

关于向量组的秩的一些结论：

（1）零向量组的秩为0.

（2）向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 线性无关

$$\Leftrightarrow \ r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p)=p$$

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 线性相关

$$\Leftrightarrow \ r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p)<p$$

（3）若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出，则

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\le r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$$

（4）等价的向量组必有相同的秩。

注：两个有相同的秩的向量组不一定等价。

思考：两个向量组有相同的秩，并且其中一个可以被另一个线性表出，则这两个向量组等价.

4. 向量组的秩、极大无关组的求法

（1）向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 作列向量构成矩阵A.

（2）$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} B$ （阶梯形或行最简形矩阵）

r(A) = B的非零行的行数

（3）求出B的列向量组的极大无关组

（4）A中与B的列极大无关组相对应部分的列向量组即为A的极大无关组。

例：向量组 $\alpha_1=(-7,-2,1,-11)^T,\alpha_2=(1,-1,5,8)^T$

$\alpha_3=(3,1,-1,4)^T,\alpha_4=(5,3,-7,0)^T,$

$\alpha_5=(-4,-2,1,-11)^T$

求向量组的秩和一个极大无关组。

解：

$$A=\begin{pmatrix}-7&1&3&5&-4\\-2&-1&1&3&-2\\1&5&-1&-7&1\\-11&8&4&0&-11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&5&-1&-7&1\\-2&-1&1&3&-2\\-7&1&3&5&-4\\-11&8&4&0&-11\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&5&-1&-7&1\\0&9&-1&-11&0\\0&36&-4&-44&3\\0&63&-7&-77&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&5&-1&-7&1\\0&9&-1&-11&0\\0&0&0&0&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

$\therefore r(A)=3$

又因为B的1，2，5列是B的一个列极大无关组，

所以，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组.

考虑：是否还有其他的极大无关组？

$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$， $\alpha_1,\alpha_4,\alpha_5$

例：求行向量组

$$\alpha_1=(2,4,2),\alpha_2=(1,1,0),\alpha_3=(2,3,1),\alpha_4=(3,5,2)$$

的一个极大无关组，并用其线性表出其余向量。

解：
$$A=\begin{pmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&-1&-1&-1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&1&2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

则B的1,2列为极大无关组，且 $\beta_3=\frac{1}{2}\beta_1+1\beta_2,\beta_4=1\beta_1+1\beta_2$

所以 α_1,α_2 为所求的一个极大无关组，且

$$\alpha_3=\frac{1}{2}\alpha_1+1\alpha_2,\quad \alpha_4=1\alpha_1+1\alpha_2.$$