四川农业大学　彭杰

第二节　矩阵的运算

一、矩阵的加法

1、定义

设有两个$m\times n$矩阵 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$，那么矩阵 A 与 B 的和记作$A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

说明 只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

例如
$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12+1 & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2、 矩阵加法的运算规律

$(1)\ A+B=B+A;$

$(2)\ (A+B)+C=A+(B+C).$

$$(3)\ -A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}=\left(-a_{ij}\right),$$

称为矩阵A的**负矩阵**.

$(4)\ A+(-A)=0,\ A-B=A+(-B).$

注意：

不是任意两个矩阵都能够相加。

若两个矩阵的行数不同，则不能相加；

若列数不同，也不能相加。

只有在两个矩阵的类型（即大小）相同时，这两个矩阵才能相加。

例：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+5 & 1+6 \\ 2+7 & 3+8 \\ 4+9 & 5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 11 \\ 13 & 5 \end{pmatrix}.$$

二、数与矩阵相乘

1、定义

数λ与矩阵A的乘积记作λA或$A\lambda$,规定为

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2、数乘矩阵的运算规律

（设 A、B为 $m \times n$ 矩阵，λ, μ为数）

$(1)\ (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A);$

$(2)\ (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A;$

$(3)\ \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$

矩阵相加与数乘矩阵合起来, 统称为矩阵的线性运算.

例：

$$3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 0 & 3\times 1 \\ 3\times 2 & 3\times 3 \\ 3\times 4 & 3\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 9 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}.$$

例：

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & 15 & 12 \\ 3 & 18 & 9 \end{pmatrix} \cancel{=} 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & 15 & 12 \\ 3 & 18 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & 15 & 12 \\ 3 & 18 & 9 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

例：求矩阵 X, 使得 $2X+A=B$.

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 5 & 7 & 9\\ 2 & 4 & 6 & 8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}7 & 5 & -2 & 4\\ 5 & 1 & 9 & 7\\ 3 & 2 & -1 & 6\end{pmatrix}$$

解：$$X=\frac{1}{2}(B-A)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & 6 & -4 & 4\\ 4 & -4 & 2 & -2\\ 1 & -2 & -7 & -2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 3 & -2 & 2\\ 2 & -2 & 1 & -1\\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{7}{2} & -1\end{pmatrix}$$

三、矩阵的乘法

1、定义

设$A=\left(a_{ij}\right)$是一个$m\times s$ 矩阵,$B=\left(b_{ij}\right)$是一个$s\times n$ 矩阵，那末规定矩阵A与矩阵B的乘积是一个$m\times n$矩阵$C=\left(c_{ij}\right)$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$\left(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n\right),$$

并把此乘积记作 $C=AB.$

例：$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -7 & -6\\ -3 & 0 & -3\\ 5 & -7 & -9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\times1+3\times2 & 2\times(-2)+3\times(-1) & 2\times(-3)+3\times0\\ 1\times1+(-2)\times2 & 1\times(-2)+(-2)\times(-1) & 1\times(-3)+(-2)\times0\\ 3\times1+1\times2 & 3\times(-2)+1\times(-1) & 3\times(-3)+1\times0\end{pmatrix}$$

例

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}_{2\times 2}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}_{2\times 2}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}_{2\times 2}$$

?

例　　设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -1 & 4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

解 $\because A=\left(a_{ij}\right)_{3\times 4}, \quad B=\left(b_{ij}\right)_{4\times 3},$

$\therefore C=\left(c_{ij}\right)_{3\times 3}.$

故 $C=AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 10 & 2 & -6 \\ -2 & 17 & 10 \end{pmatrix}.$

注意　只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$ 不存在.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{1\times 3} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 1\times 3 + 2\times 2 + 3\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \end{pmatrix}.$$

例 计算下列乘积：

(1) $$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

解 (1) $$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times 1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}_{1\times 2} = \begin{pmatrix} 2\times 1 & 2\times 2 \\ 2\times 1 & 2\times 2 \\ 3\times 1 & 3\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$(2)\ \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

解 $$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_1+a_{21}b_2+a_{31}b_3 & a_{12}b_1+a_{22}b_2+a_{32}b_3 & a_{13}b_1+a_{23}b_2+a_{33}b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}b_1^2 + a_{22}b_2^2 + a_{33}b_3^2 + 2a_{12}b_1b_2 + 2a_{13}b_1b_3 + 2a_{23}b_2b_3.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \end{pmatrix}_{1\times 1}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

则 $AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$,

故 $AB \neq BA$.

注意 矩阵不满足交换律，即：

$AB \neq BA$,

但也有例外，比如设

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

则有 $AB=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix},$

$$BA=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AB=BA.$$

例：$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

矩阵可交换定义

两个矩阵 A, B,

若 $AB=BA$, 则称 A, B 可交换；

若 $AB\neq BA$, 则称 A, B 不可交换。

例：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\neq 0, B\neq 0 \not\longrightarrow AB\neq 0$$

例：
$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix},$$

$$AC=\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$BC=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$AC=BC,\ C\neq 0 \not\longrightarrow A=B.$$

消去律不成立

矩阵乘法的运算规律

结合律： $(AB)C=A(BC)$.

分配律： $(A+B)C=AC+BC$.

$$A(B+C)=AB+AC.$$

数乘结合律： $k(AB)=(kA)B=A(kB)$.

$$AE=EA=A$$

矩阵的幂

设A 是n 阶方阵，定义A 的幂：

$$A^1 = A，A^2 = A.A ，\ldots \qquad A^{k+1} = A^k \cdot A$$

其中k是正整数。

$$A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{n个}$$

性质 $A^k A^l = A^{k+l} \qquad (A^k)^l = A^{kl}$

注意：

(1) $(AB)^k \neq A^k B^k$

$$(AB)^2 = (AB)(AB) = ABAB \neq A^2B^2$$

(2) $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

(3) $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

若*A*与*B*可交换 (即*AB*=*BA*)，
则以上不等式将变成等式

线性方程组的矩阵表示

例：
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X = b$$

例：
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

则方程组可写作矩阵形式：$AX = b$

A 称为线性方程组的系数矩阵

矩阵方程

例： 求 X. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

解： 先判断出 X 为 2×2 矩阵。设 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$

故 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

即 $\begin{pmatrix} 2x_{11}+x_{21} & 2x_{12}+x_{22} \\ x_{11}+2x_{21} & x_{12}+2x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

比较左右两边的矩阵可得线性方程组：

$$\begin{cases} 2x_{11}+x_{21}=1 \\ x_{11}+2x_{21}=-1 \\ 2x_{12}+x_{22}=2 \\ x_{12}+2x_{22}=4 \end{cases} \xRightarrow{\text{解线性方程组可得}} \begin{cases} x_{11}=1 \\ x_{21}=-1 \\ x_{12}=0 \\ x_{22}=2 \end{cases}$$

故 $X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

例4 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$ 求 A^k.

解

$$A^2=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

由此归纳出

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \quad (k \geq 2)$$

四、转置矩阵与对称方阵

转置矩阵

定义4　把矩阵 A 的行换成同序数的列得到的新矩阵，叫做 A 的转置矩阵，记作 A^T.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

例

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\4 & 5 & 8\end{pmatrix},\qquad A^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 5\\2 & 8\end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix}18 & 6\end{pmatrix},\qquad B^T=\begin{pmatrix}18\\6\end{pmatrix}.$$

转置矩阵的运算性质

$$(1)\left(A^T\right)^T = A;$$

$$(2)(A+B)^T = A^T + B^T;$$

$$(3)(\lambda A)^T = \lambda A^T;$$

$$(4)(AB)^T = B^T A^T.$$

例 已知

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},\text{ 求 }(AB)^T.$$

解法1 $\because AB=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}0 & 14 & -3\\ 17 & 13 & 10\end{pmatrix},$$

$$\therefore (AB)^T=\begin{pmatrix}0 & 17\\ 14 & 13\\ -3 & 10\end{pmatrix}.$$

例 已知

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \text{求}\ (AB)^T.$$

解法2 $(AB)^T=B^TA^T$

$$=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 7 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 17\\ 14 & 13\\ -3 & 10\end{pmatrix}.$$

注意，一般来说：$(AB)^T \neq A^T B^T$

例：$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \Rightarrow (AB)^T = 5.$$

$$A^T B^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

例：求 $(A^{\mathrm{T}}B)^6$. $A=(1 \quad 2 \quad 3), B=(1 \quad 1 \quad 1)$.

解：$$(A^T B)^6 = \underbrace{(A^T B)(A^T B)\cdots(A^T B)}_{6个}$$

结合律 $$A^T \underbrace{(BA^T)(BA^T)\cdots(BA^T)}_{5个} B$$

$$= A^T (BA^T)^5 B \qquad BA^T = (1 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 6$$

$$\Rightarrow (A^T B)^6 = A^T 6^5 B = 6^5 A^T B$$

$$= 6^5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \quad 1 \quad 1) = 6^5 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

对称矩阵

定义 设 A 为 n 阶方阵，如果满足 $A = A^T$，即

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1,2,\cdots,n)$$

那么 A 称为对称矩阵.

例如 $A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 为对称阵.

说明 对称阵的元素以主对角线为对称轴对应相等

如果满足 $A = -A^T$，则 A 称为反对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 6 & 0 & 7 \\ -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

反对称矩阵

性质：若A,B 对称，则 $A+B$ 对称。

注意：A,B是n阶对称阵 $\not\Rightarrow$ AB 是对称阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 4 & 2 & 6 \\ -5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

对称矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -4 & 2 & 6 \\ 5 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

不是反对称矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & 6 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

反对称矩阵

例

证明：设 A 与 B 为两个 n 阶矩阵，A 为反对称矩阵，B 为对称矩阵，则 $AB-BA$ 为对称矩阵。

证：$A^T=-A, B^T=B$

$$(AB-BA)^T=(AB)^T-(BA)^T$$

$$=B^TA^T-A^TB^T$$

$$=B(-A)-(-A)B$$

$$=AB-BA$$

例 设列矩阵 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 满足 $X^TX=1$，E 为 n 阶单位矩阵，$H=E-2XX^T$，证明 H 是对称矩阵，且 $HH^T=E$.

证明 $\because H^T=(E-2XX^T)^T=E^T-2(XX^T)^T$

$$=E-2XX^T=H,$$

$\therefore H$ 是对称矩阵.

$$HH^T=H^2=(E-2XX^T)^2$$

$$=E-4XX^T+4(XX^T)(XX^T)=E-4XX^T+4X(X^TX)X^T$$

$$=E-4XX^T+4XX^T=E.$$

例 设A是方阵：

(1) 验证:$A+A^T$是对称阵，$A-A^T$是反对称阵；

(2) 证明：A可以表示成一个对称阵与一个 反对称阵的和。

解 (1) $(A+A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$

所以，$A+A^T$是对称阵

$$(A-A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A-A^T)$$

所以，$A-A^T$是反对称阵

例 设A是方阵：

(1) 验证:$A+A^T$是对称阵，$A-A^T$是反对称阵；

(2) 证明：A可以表示成一个对称阵与一个 反对称阵的和。

(2) 由（1）$\frac{1}{2}(A+A^T)$和$\frac{1}{2}(A-A^T)$

分别是对称阵和反对称阵

$$而A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$$

所以任何方阵A都可以表示成一个对称阵与一个反对称阵的和

五、方阵的行列式

定义 由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式，叫做方阵 A 的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det A$.

运算性质 (1) $|A^T| = |A|^T = |A|$; (2) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$;

$$(3)\ |AB| = |A||B|; \quad \Rightarrow |AB| = |BA|.$$

推广： $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是 n 阶方阵

$$\Rightarrow |A_1 A_2 \cdots A_k| = |A_1||A_2| \cdots |A_k|$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix},$$

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 6\end{vmatrix}=1\times 4\times 6=24.$$

矩阵与行列式是不同的数学对象。

行列式是一个数，而矩阵是一个表。

- 例

$$\text{矩阵:}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{行列式:}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 24 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

方阵数乘的行列式:

若A为n阶方阵，则$|kA| = k^n|A|$.

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 \end{vmatrix}$$

$$= k^2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 \end{vmatrix} = k^3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

知识点比较

$$\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$$

知识点比较

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$ 有意义.

只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}_{3\times 3}$$ 没有意义.

例：方阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&3\\4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&9\\17&23\end{pmatrix}$

方阵$B=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&8&11\\9&14&19\end{pmatrix}$

计算行列式$|A|$, $|B|$.

答案：$|A|=8$, $|B|=0$.

矩阵B的第3行=第1行×2+第2行

例 设 A 和 B 是 5 阶矩阵，且 $|A|=4, |B|=3$

求 (1) $|AB|$; (2) $||A|B|$;

解 (1) $|AB|=|A||B|=4\times 3=12$

(2) $||A|B|=|A|^5|B|=4^5\times 3=3072$

例 设A，B均为四阶方阵，且$|A|=-2, |B|=1$

计算$\left|-2A^T(B^TA)^2\right|$

解 由方阵的行列式的运算规律，

$$\left|-2A^T(B^TA)^2\right| = (-2)^4\left|A^T\right|\left|(B^TA)^2\right|$$

$$=16|A|\left|(B^TA)\right|^2$$

$$=16|A||B|^2|A|^2$$

$$=-128$$

例 设A和B是n阶矩阵, 判断下列等式的正确性

(1) $|AB|=|BA|$ True $|AB| = |A||B| = |BA|$

(2) $|A+B|=|A|+|B|$ False

(3) $|kA|=k|A|$ False $|kA|=k^n|A|$

(4) $|kA|=|k||A|$ False

(5) $||A|B|=|A||B|$ False $||A|B| = |A|^n|B|$

(6) $|A^k|=|A|^k$ True

(7) $|(AB)^k|=|A|^k|B|^k$ True $|(AB)^k|= |(AB)|^k=(|A||B|)^k$

(8) $|(AB)^T|=|A^T||B^T|$ True $|(AB)^T|=|AB|=|A||B|=|A^T||B^T|$

五、小结

矩阵运算

- 加法
- 数与矩阵相乘
- 矩阵与矩阵相乘
- 转置矩阵
- 对称阵
- 方阵的行列式

注意

（1）只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

（2）只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘,且矩阵相乘不满足交换律.

（3）矩阵的数乘运算与行列式的数乘运算不同.

思考题

设A与B为n阶方阵,问等式

$$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$$

成立的充要条件是什么?

答 $\because (A+B)(A-B)=A^2+BA-AB-B^2,$

故 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ 成立的充要条件为

$$AB=BA.$$