第二节 函数的求导法则

一、和、差、积、商的求导法则

二、反函数的求导法则

三、复合函数的求导法则

四、基本求导公式

一、和、差、积、商的求导法则

定理1 如果 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在点 x 处可导，则它们的和、差、积、商(分母为零的点除外)都在点 x 处可导，且

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$； 证明

(2) $[u(x)\,v(x)]'=u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x)$； 证明

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0)$. 证明

这些法则可简记为

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \xrightarrow{\text{推广}} (u + v - w)' = u' + v' - w'$$

$$(u\,v)' = u'v + uv' \xrightarrow{v = C} (Cu)' = Cu' \ (C\text{ 为常数})$$

$$(u\,v)' = u'v + uv' \xrightarrow{\text{推广}} (uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \xrightarrow{u = 1} \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

例1 $y = 2x^5 - 3x^3 + 4x - 9$，求 y' .

解

例2 $f(x) = x^3 + 4\sin x - \cos 10$，求 $f'(x)$ 及 $f'(\pi)$.

解

例3 $y = e^x(\sin x + \cos x)$，求 y' .

解

例4 设 $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x^5-1}$，求$y'$.

解

例5 设 $y=\tan x$, 求 y' .

解 $(\tan x)'=\sec^2 x$, $(\cot x)'=-\csc^2 x$

例6 设 $y=\sec x$, 求 y' .

解 $(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$, $(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$

二、反函数的求导法则

定理2 如果函数 $x=f(y)$ 在区间 I_y 单调、可导且 $f'(y)\neq 0$，则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在区间

$$I_x=\{\,x\mid x=f(y)\,,y\in I_y\}$$

内也可导，且

$$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)} \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

证明

例7 求反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的导数．

解 $$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

例8 求反正切函数 $y=\arctan x$ 的导数．

解 $$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2},\ (\operatorname{arc}\cot x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

例9 求对数函数 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$的导数．

解 $$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a},\ (\ln x)'=\frac{1}{x}$$

三、复合函数的求导法则

定理3 如果函数 $u=g(x)$ 在点 x 可导，而 $y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x 可导且其导数为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot g'(x)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

证明

推广 设 $y=f(u)$, $u=\varphi(v)$, $v=\psi(x)$，则复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 的链导公式为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$.

例10 设 $y=\sin\frac{2x}{1+x^2}$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解

例11 设 $y=\ln\sin x$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解

例12 设 $y=\ln\cos(\mathrm{e}^x)$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解

例13 设 $y = e^{\sin\frac{1}{x}}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解

例14 设 $x > 0$，证明幂函数的导数公式

$$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}.$$

解

四、求导公式

(1) $(C)' = 0$,

(2) $(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$,

(3) $(\sin x)' = \cos x$,

(4) $(\cos x)' = -\sin x$,

(5) $(\tan x)' = \sec^2 x$,

(6) $(\cot x)' = -\csc^2 x$,

(7) $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$,

(8) $(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$,

(9) $(a^x)' = a^x \ln a \ (a > 0, a \neq 1)$,

(10) $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$,

(11) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} \ (a > 0, a \neq 1)$,

(12) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$,

(13) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

(14) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

(15) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,

(16) $(\operatorname{arc}\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

作业

P 94: 2(2 , 8 , 10) ; 3 (2 , 3) ;
4 ; 6 (6 ,8) ; 7 (3) , (7) , (10) ;
8 (4 , 5 , 8 , 10) ; 10; 11 (3 , 8 ,10)