第六节 函数图形的描绘

一、渐近线

二、绘图步骤

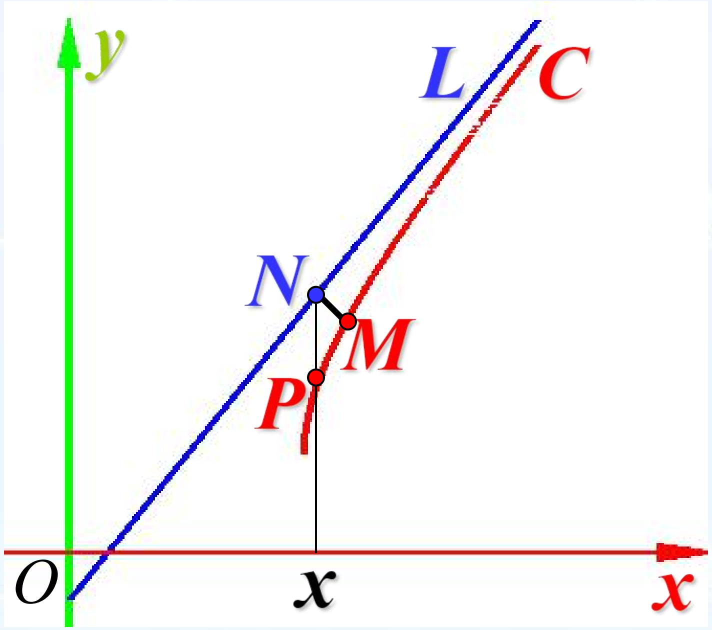
三、举例

一、渐近线

1. 定义

定义 若曲线 C 上的点 M 沿着曲线无限地远离原点时，点 M 与某一直线 L 的距离趋于 0，则称直线 L 为曲线 C 的**渐近线**．

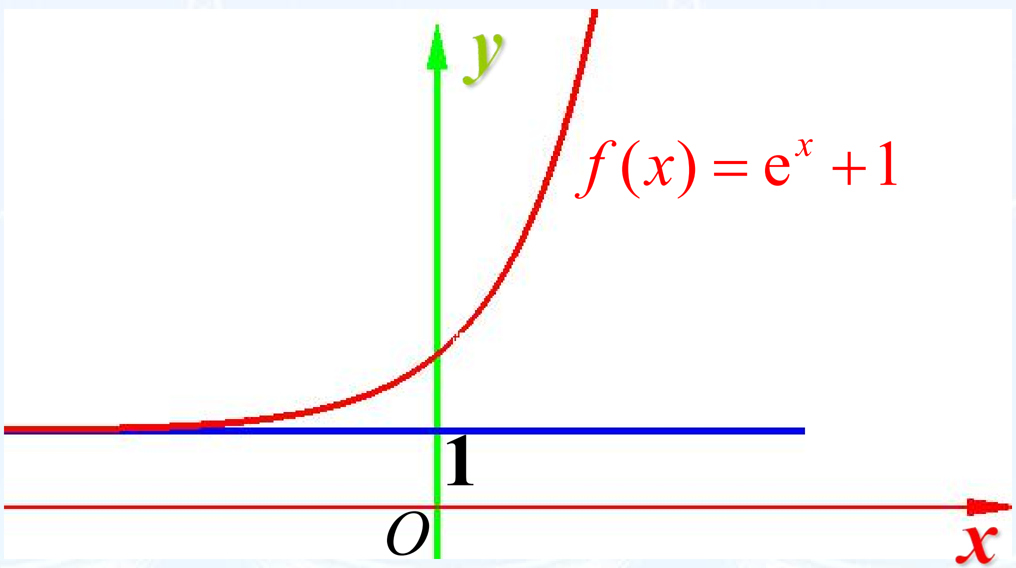
渐近线
- 水平渐近线
- 垂直渐近线
- 斜渐近线

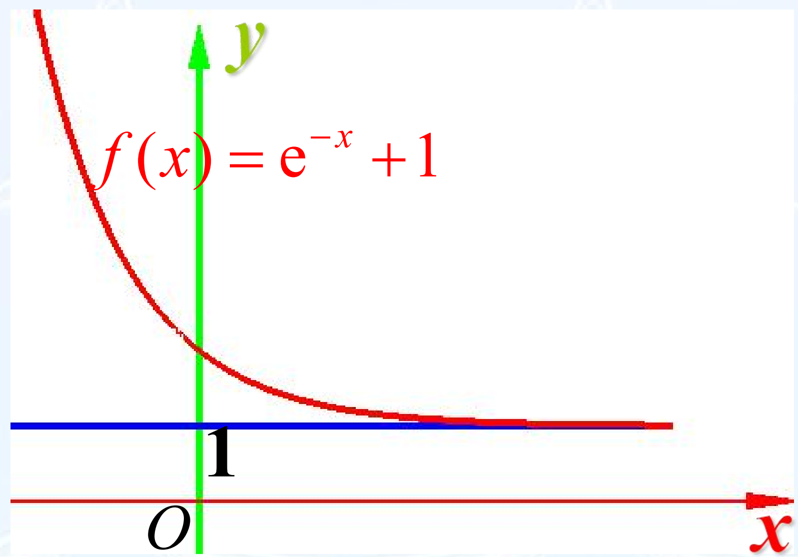


2. 水平渐近线与垂直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$，

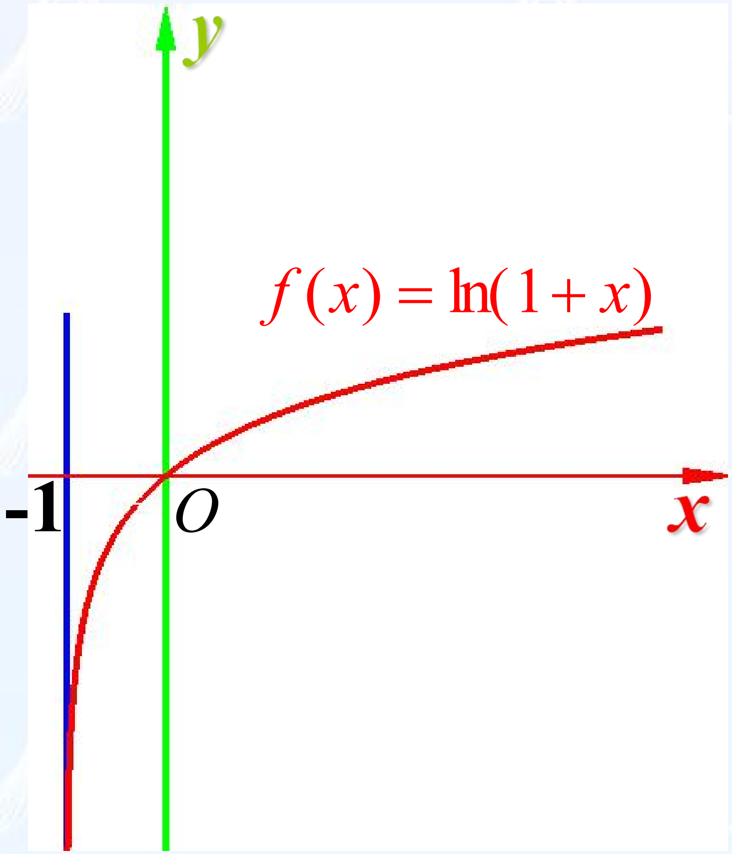
则 $y=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

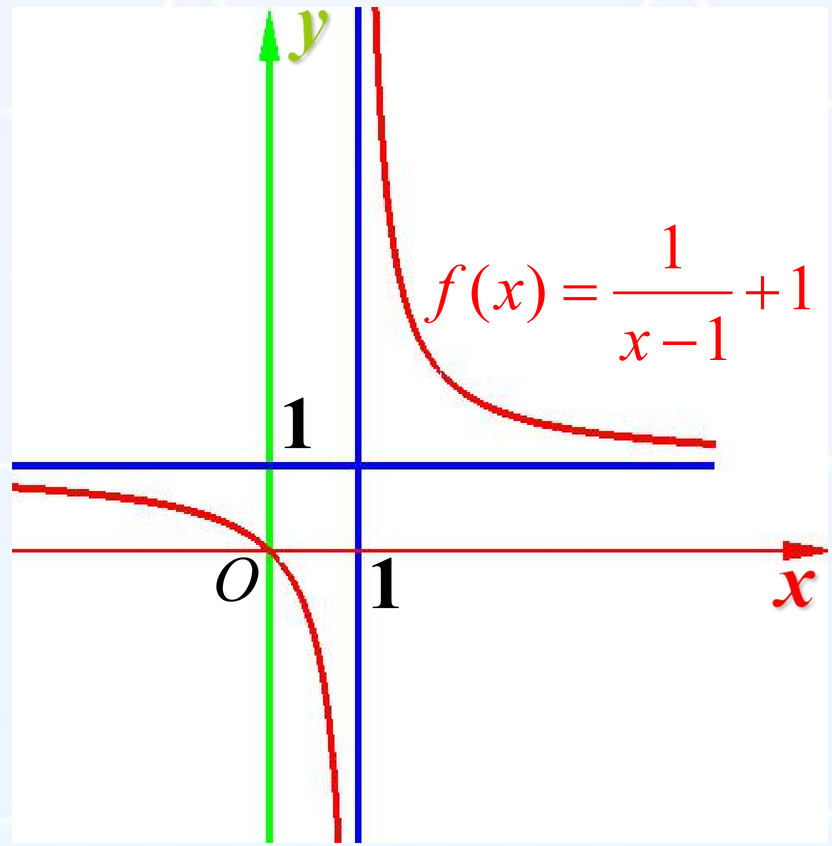




若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$,

则 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的**垂直渐近线**.





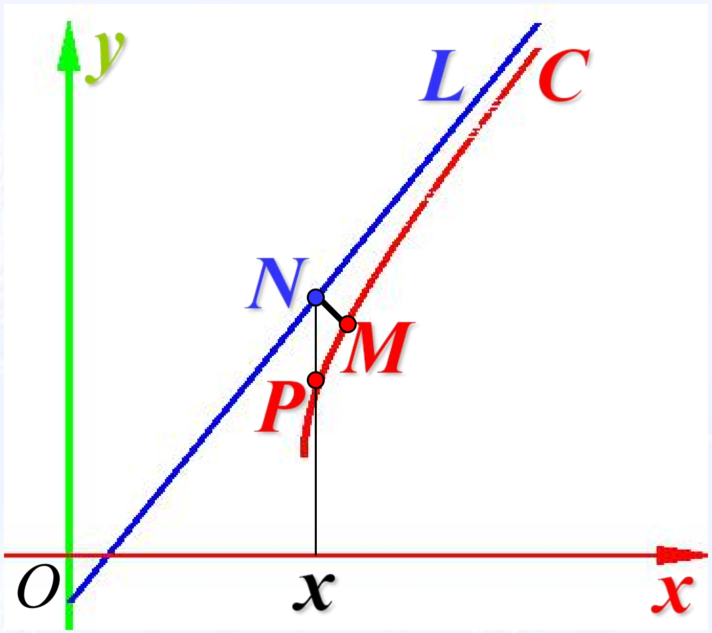
3. 斜渐近线

设曲线 C 的方程为 $y=f(x)$，

直线 L 的方程为 $y=ax+b\ (a\neq 0)$.

则直线 L 是曲线 C 的斜渐近线的

的充要条件为 $\lim\limits_{x\to\infty} MN=0$



$\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} NP=0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

$\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\dfrac{f(x)}{x}-a-\dfrac{b}{x}\right]=0$

$\Longrightarrow a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$， $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$.

当直线 $y = ax + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线时，有

$$f(x) = ax + b + o(1) \quad (x \to \infty,\ o(1) \text{ 表示无穷小}).$$

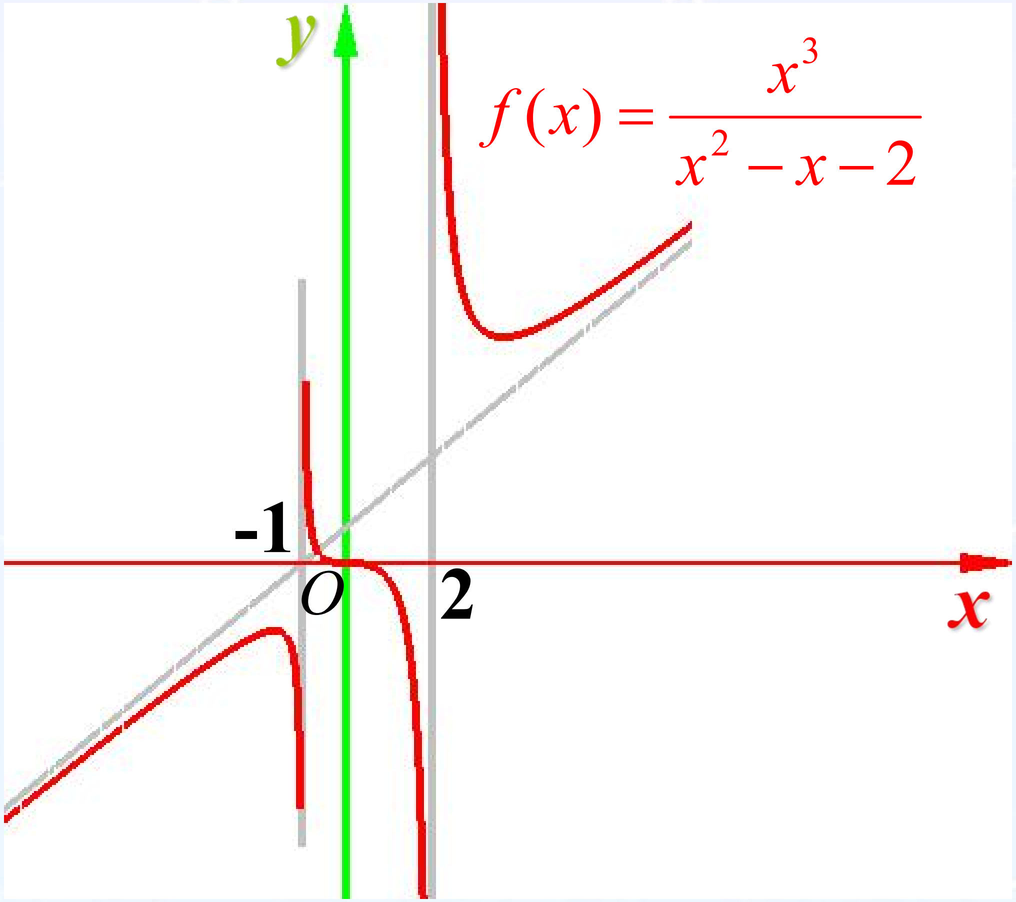
于是当 $|x|$ 充分大时，有近似公式

$$f(x) \approx ax + b\ .$$

实际上这也正是研究曲线渐近线的本意之一. 同时也为在某些问题中求渐近线提供了一种方法.

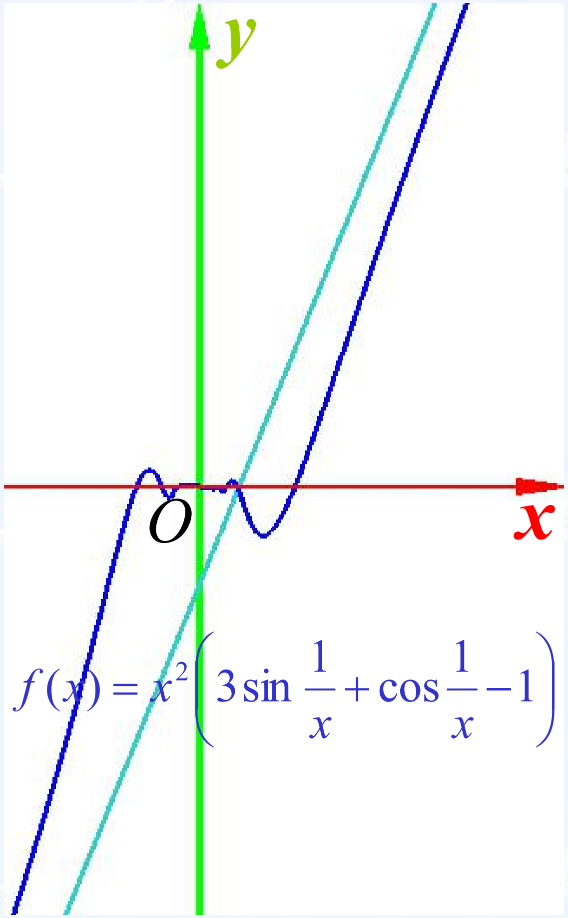
例1 求曲线 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-x-2}$ 的渐近线.

解



例2 求曲线 $f(x)=x^2\left(3\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)$ 的斜渐近线，并求 $f(100)$ 的近似值.

解



二、绘图步骤

Step1 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域及某些几何特性(如奇偶性、周期性)，求出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ ；

Step2 求出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在函数定义域内的全部零点及它们不存在的点， 并用它们把定义域分成几个部分区间;

Step3 确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号,并由此确定函数图形的升降和凹凸，极值与拐点;

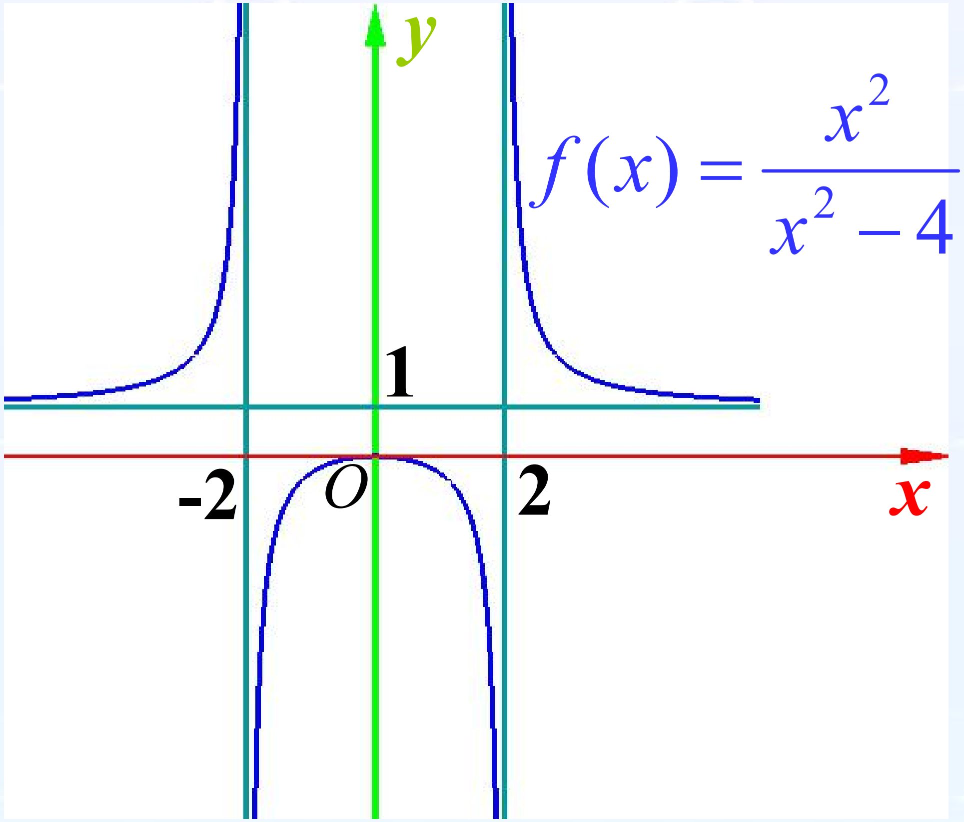
Step4 确定函数图形的水平、铅直及斜渐近线；

Step5 确定函数极值点、拐点在图形上的位置，必要时再在图形上补作几个点， 然后结合Step1、Step2中得到的结果，联结这些点画出图形.

三、举例

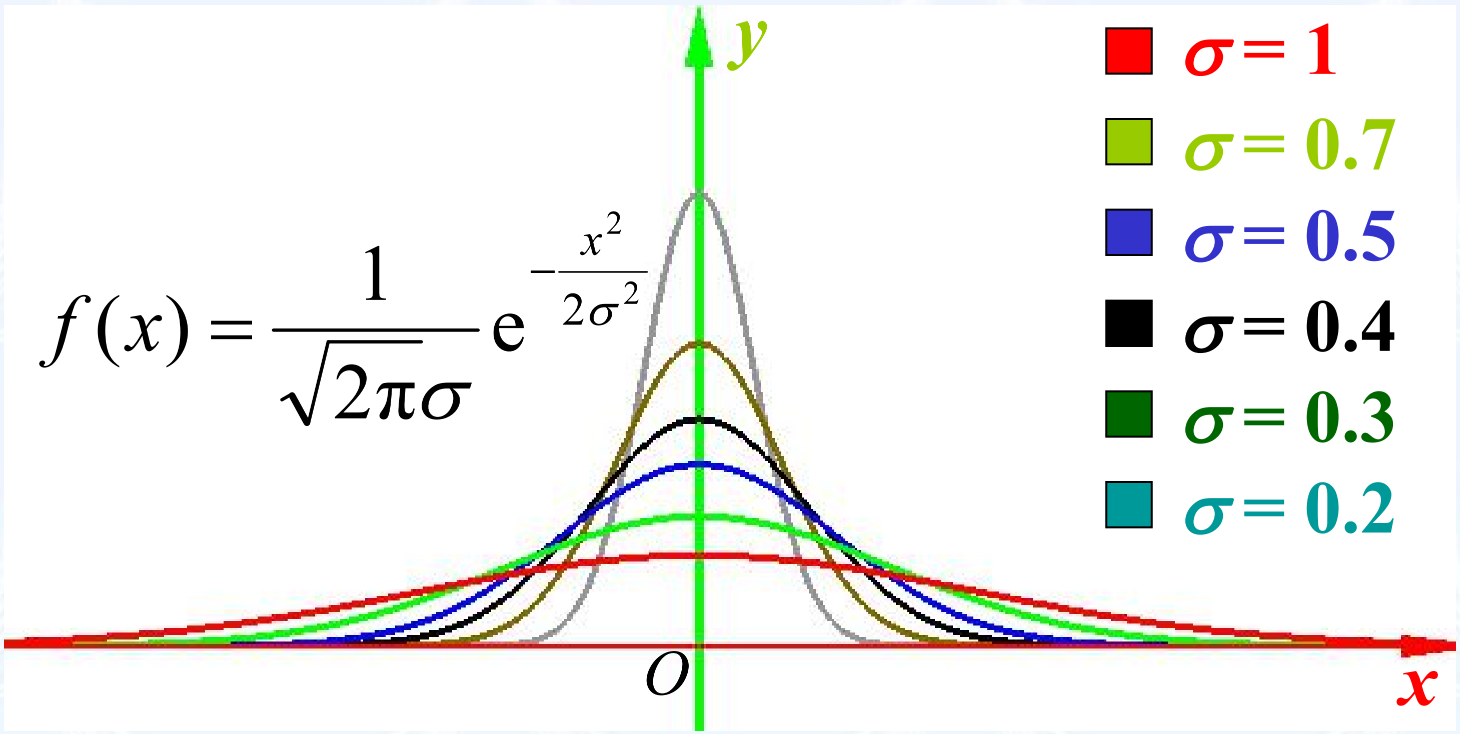
例3 画出函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$ 的图形.

解



例4 画出函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\ (\sigma>0)$ 的图形.

解



作业

P167：　1；2