第五章 定积分

一、定积分问题举例

二、定积分定义

三、定积分的近似计算

四、定积分的性质

农耕社会测绘土地

解决问题的思想

初等方法

分割

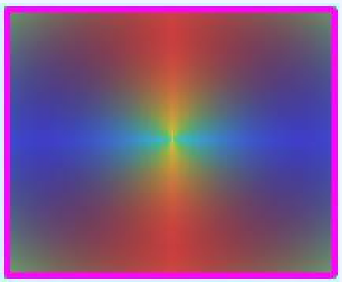
近似代替

求和

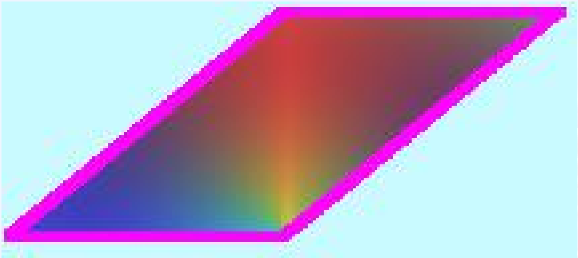
一、定积分问题举例

1. 曲边梯形的面积

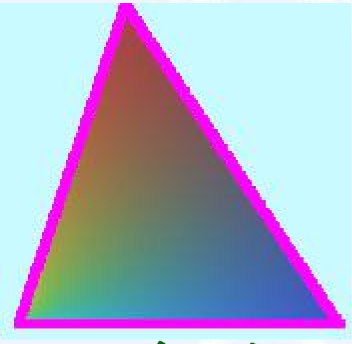
我们已经会求规则平面图形的面积，如



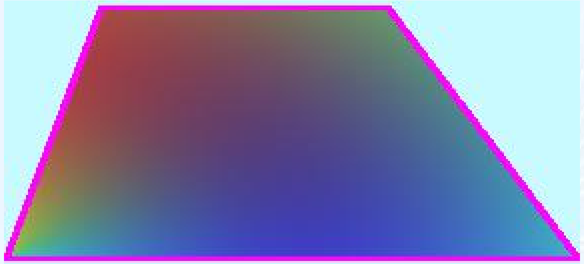
矩形



平行四边形

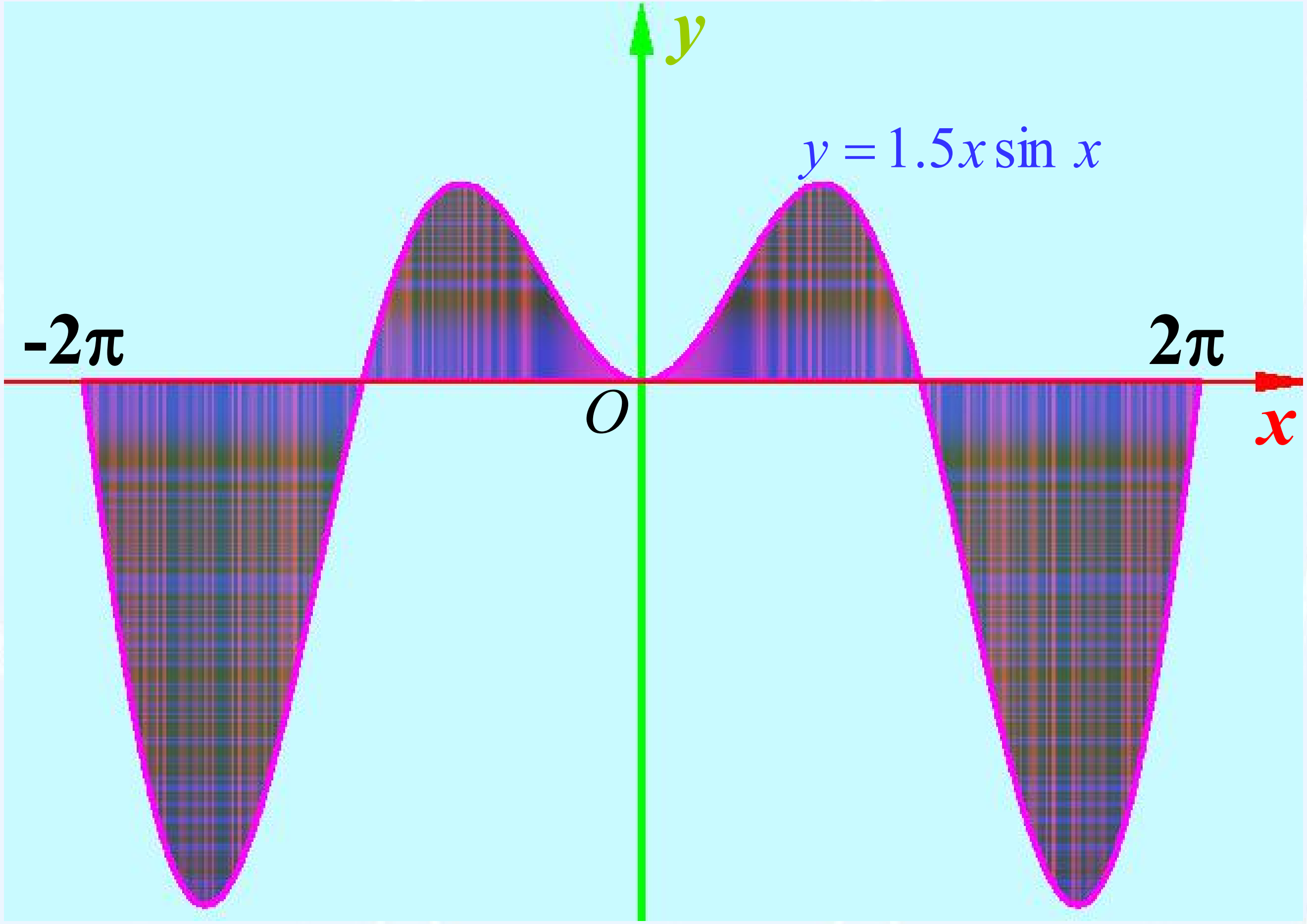


三角形



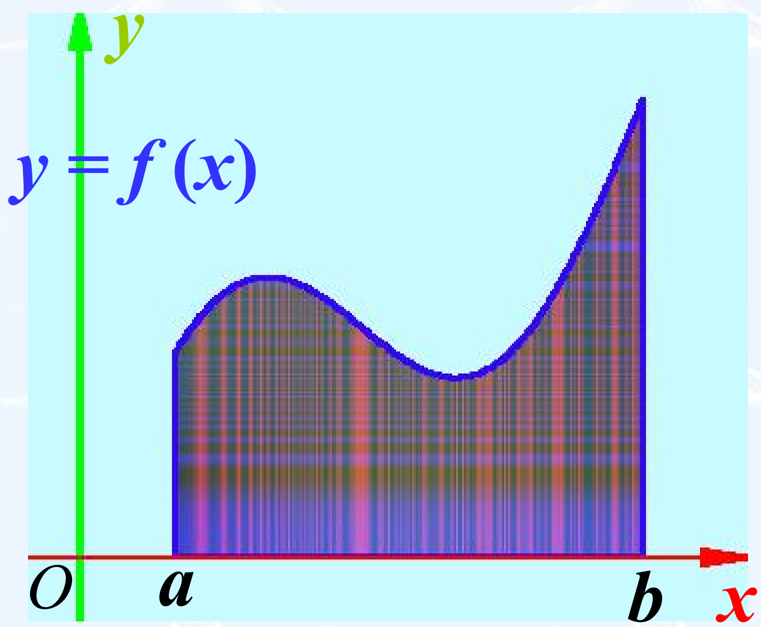
梯形

那么如何求不规则平面图形的面积呢？如

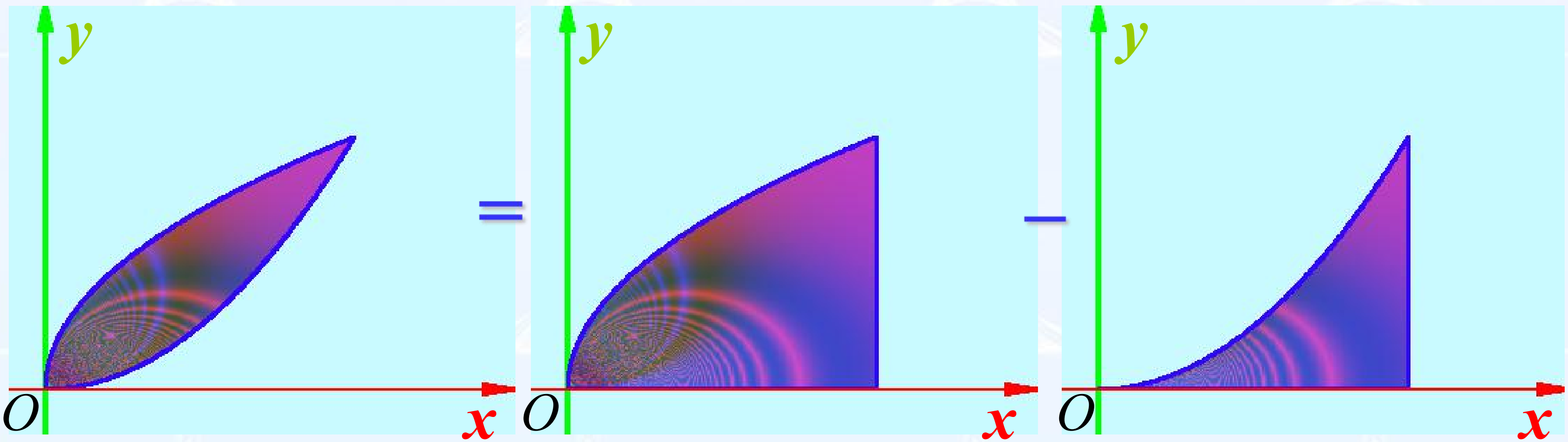


下面来研究这个问题.

设 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上非负、连续，由直线 $x=a$, $x=b$, $y=0$ 及曲线 $y=f(x)$ 所围成的图形称为**曲边梯形**.



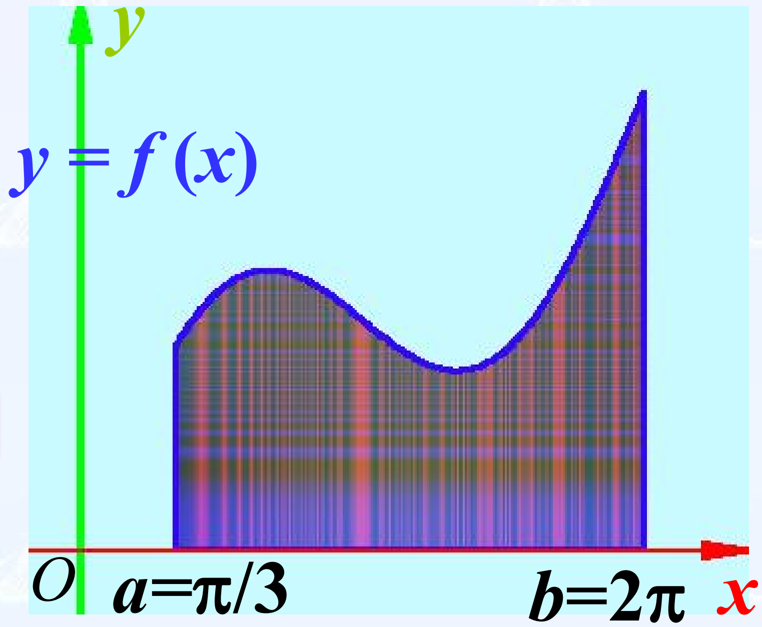
对任意不规则的平面图形，在求其面积时，总可将其分割成若干个曲边梯形，其面积等于这些曲边梯形面积的代数和．如



因此，只要会求曲边梯形的面积，即能求任意平面图形的面积．

下面来求如图所示的曲边梯形的面积. 求解思路是:

将曲边梯形分割成若干个小的曲边梯形，每个小曲边梯形用对应的小矩形近似，于是便可得曲边梯形面积的近似值，当分割数趋于无穷大时便得精确值.

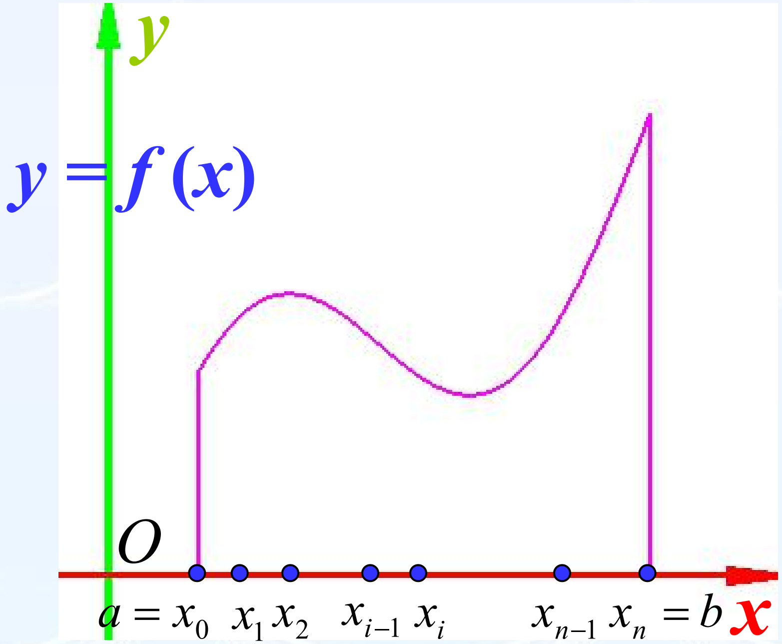


具体步骤如下:

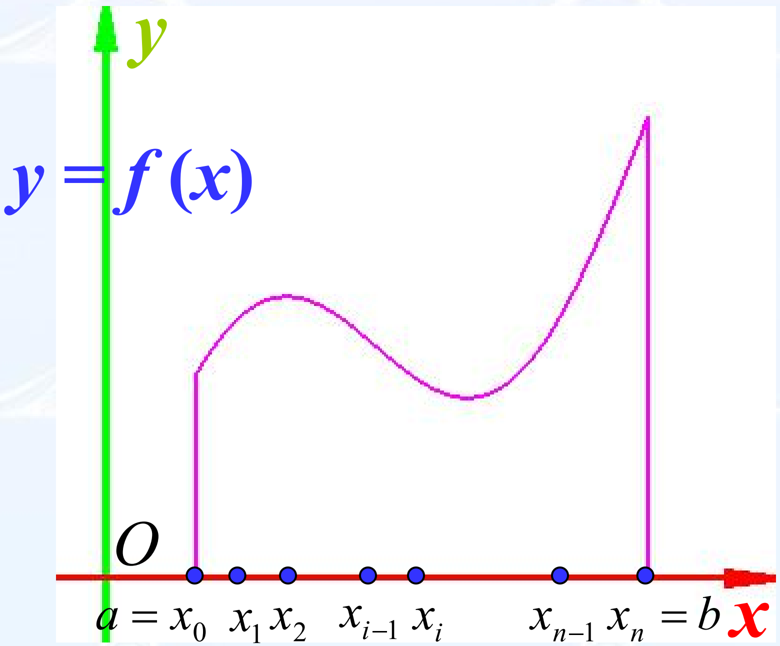
Step1 分割 将区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间，分点为

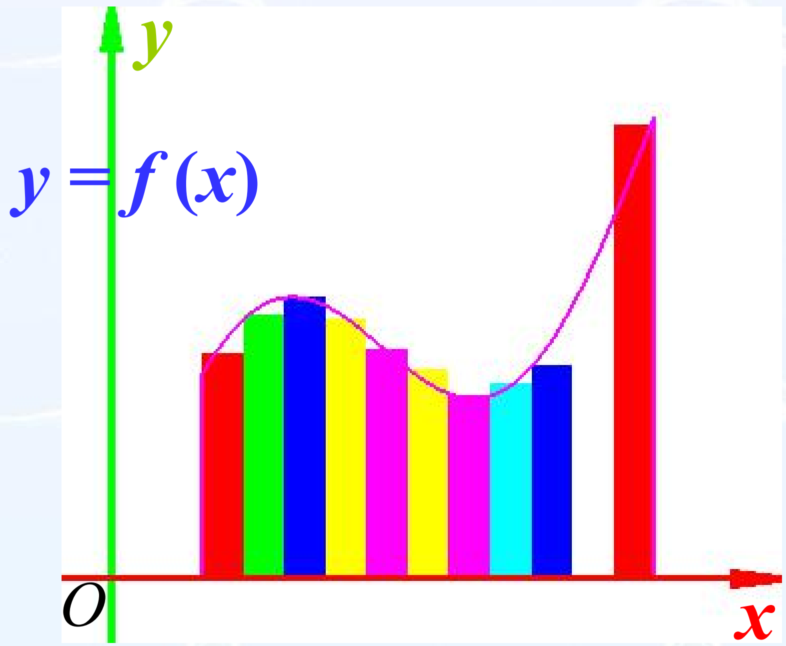
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

第 i 个小区间记为 $\Delta x_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)$，它也表示区间的长度.



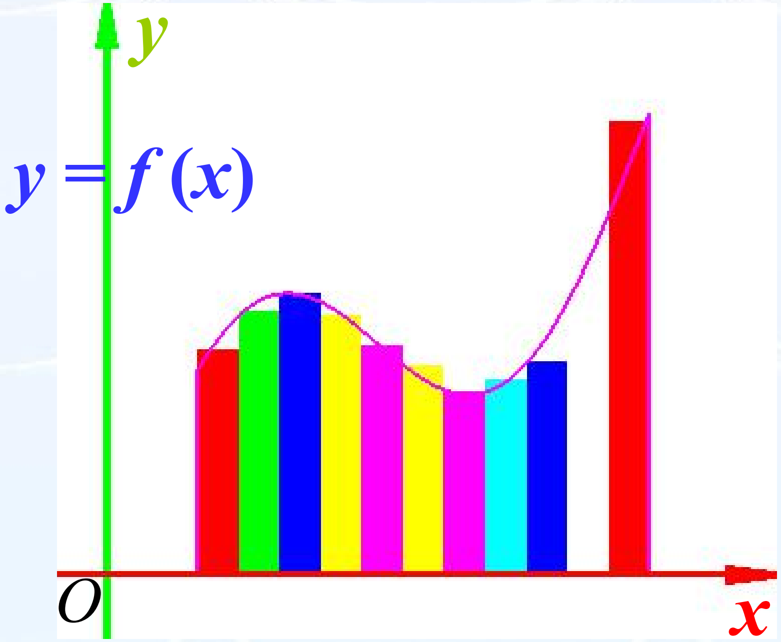
Step2 近似 以每个小区间为底，以 $f(\xi_i)\,(\xi_i \in \Delta x_i)$ 为高作矩形， 并以矩形来近似相应的小曲边梯形.





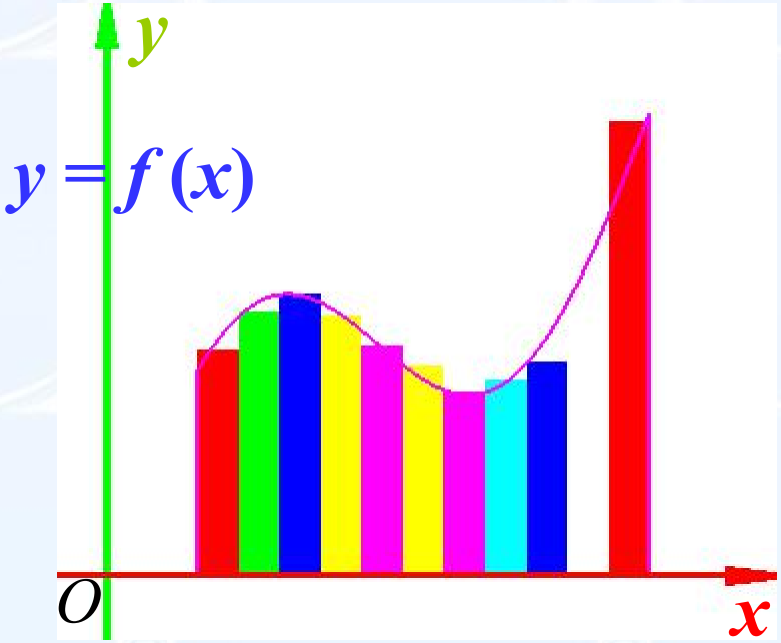
Step3 求和 第 i 个小矩形的面积为 $\Delta A_i = f(\xi_i)\Delta x_i$,

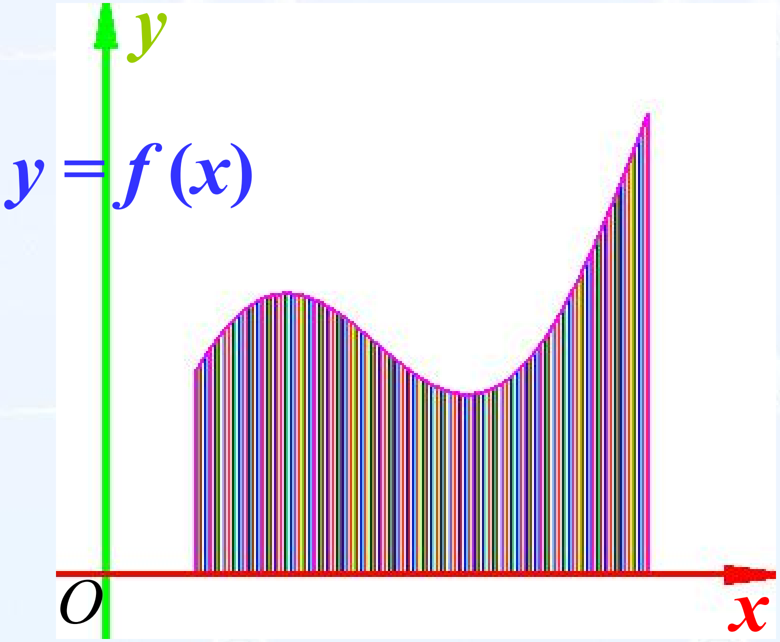
曲边梯形面积的近似值为 $A \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.



Step4 取极限 $A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$,

其中 λ 为 n 个小区间长度中的最大值.





2. 变速直线运动的路程

设某物体作直线运动，已知速度 $v = v(t)$ 是时间间隔 $[T_1, T_2]$ 上的连续函数，且 $v(t) \geq 0$，计算在这段时间内物体所经过的路程.

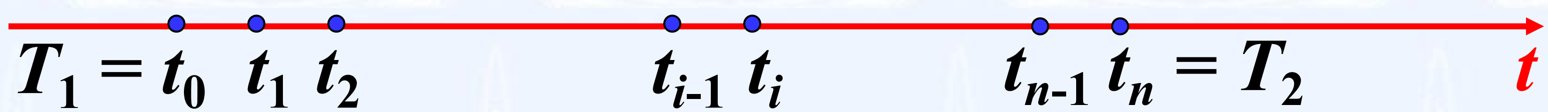
等速直线运动时有公式

路程 = 速度 × 时间.

因为速度是连续函数，所以当时间间隔很小时，速度的变化不大，可以近似看成等速运动．于是仍可用类似于

求曲边梯形面积的方法来计算路程．具体步骤仍为以下四步：

Step1 分割 将时间间隔任意分成 n 个小的时间间隔



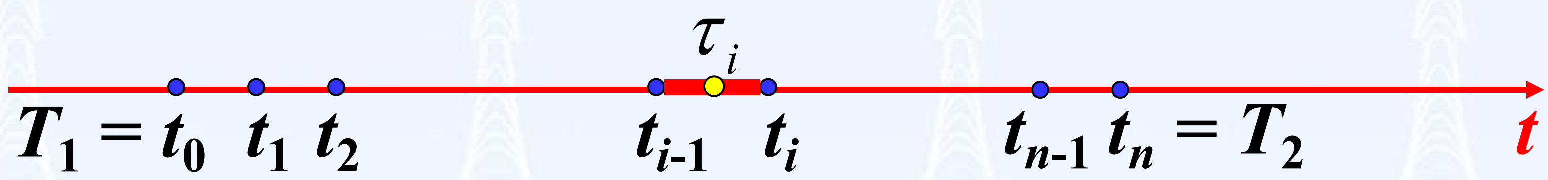
第 i 个小时间间隔记为

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

相应的，在第 i 个小时间间隔上的路程记为

$$\Delta s_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Step2 近似 在时间间隔 Δt_i 上任取一时刻 $\tau_i \in \Delta t_i$，



把物体近似看成以 $v(\tau_i)$ 为速度作匀速运动，于是路程

$$\Delta s_i \approx v(\tau_i)\Delta t_i \ (i = 1,2,\cdots,n).$$

Step3 求和

$$s = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i .$$

Step4 取极限 $s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i$,

其中 λ 为 n 个小时间间隔长度中的最大值.

上述两个问题的共性:

(1) 解决问题的方法步骤相同:

分割、近似、求和、取极限;

(2) 所求量计算公式的结构相同:

面积 $A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$, 路程 $s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i$

都是一个特殊和式的极限.

二、定积分的定义

1. 定义

定义 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，在 $[a, b]$ 中任意插入若干个分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$，

把 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$，

第 i 个小区间的长度记为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1,2,\cdots n)$.

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任意取一点 ξ_i，作乘积

$f(\xi_i)\Delta x_i \ (i = 1,2,\cdots,n)$，并作和 $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

记 $\lambda=\max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，如果不论对 $[a, b]$ 怎样划分，也不论在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上点 ξ_i 怎样选取，只要当 $\lambda\to 0$ 时，和 S 总趋于确定的极限 I，那么称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的**定积分**，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

第一节 定积分的概念与性质

积分上限

被积函数

$$\int_a^b \boxed{f(x)\mathrm{d}x} = \lim_{\lambda \to 0} \boxed{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$$

积分下限

积分变量

积分和

被积表达式

几点说明

(1) 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分存在，那么称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上**可积**.

(2) 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u .$$

与积分变量的记号无关

(3) 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则对积分区间可以进行特殊划分，小区间上的点也可以取特殊的点.

2. 可积的条件

定理1 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

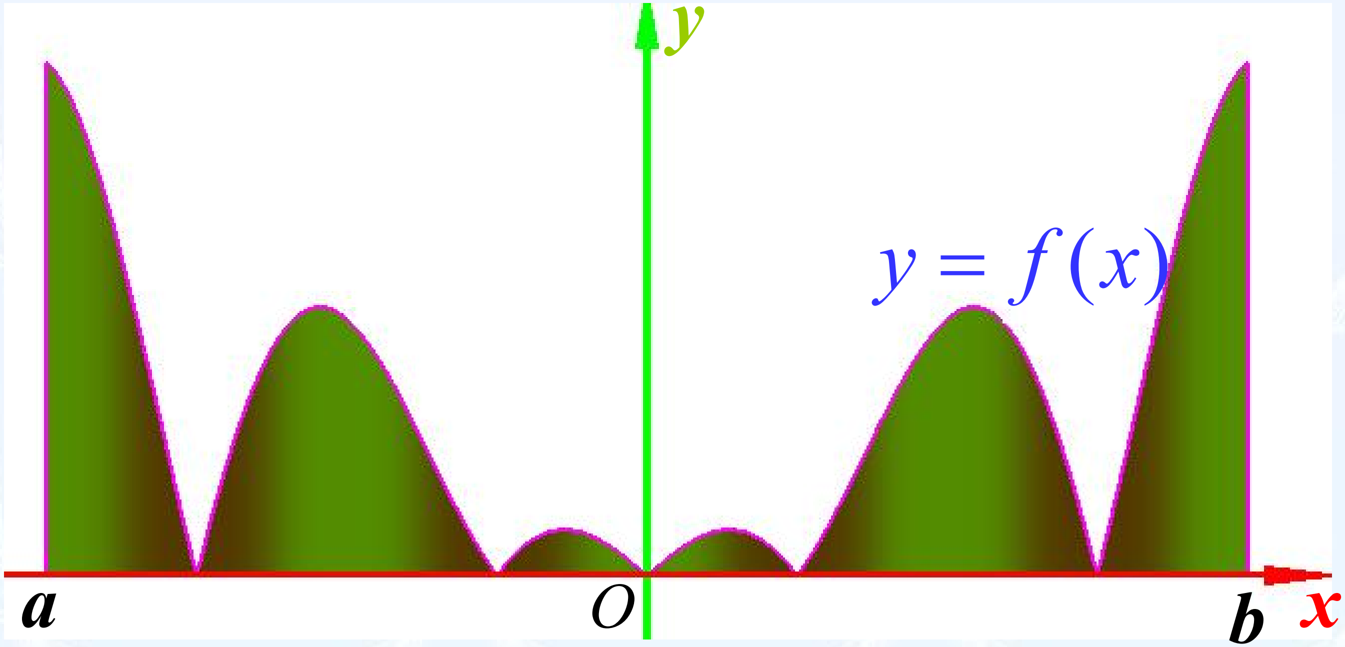
简单地说就是：连续一定可积.

定理1中的连续这一条件可以减弱，这就是下面的定理2：

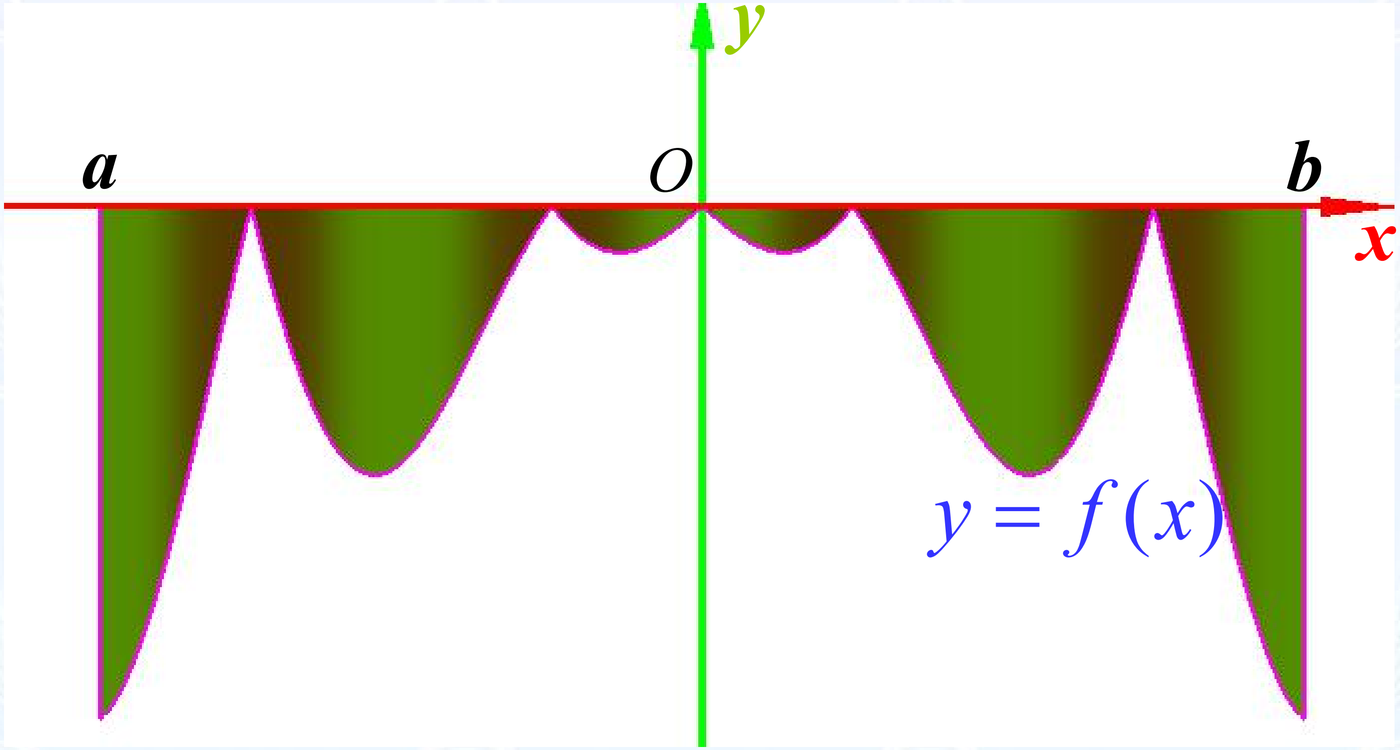
定理2 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

3. 定积分的几何意义

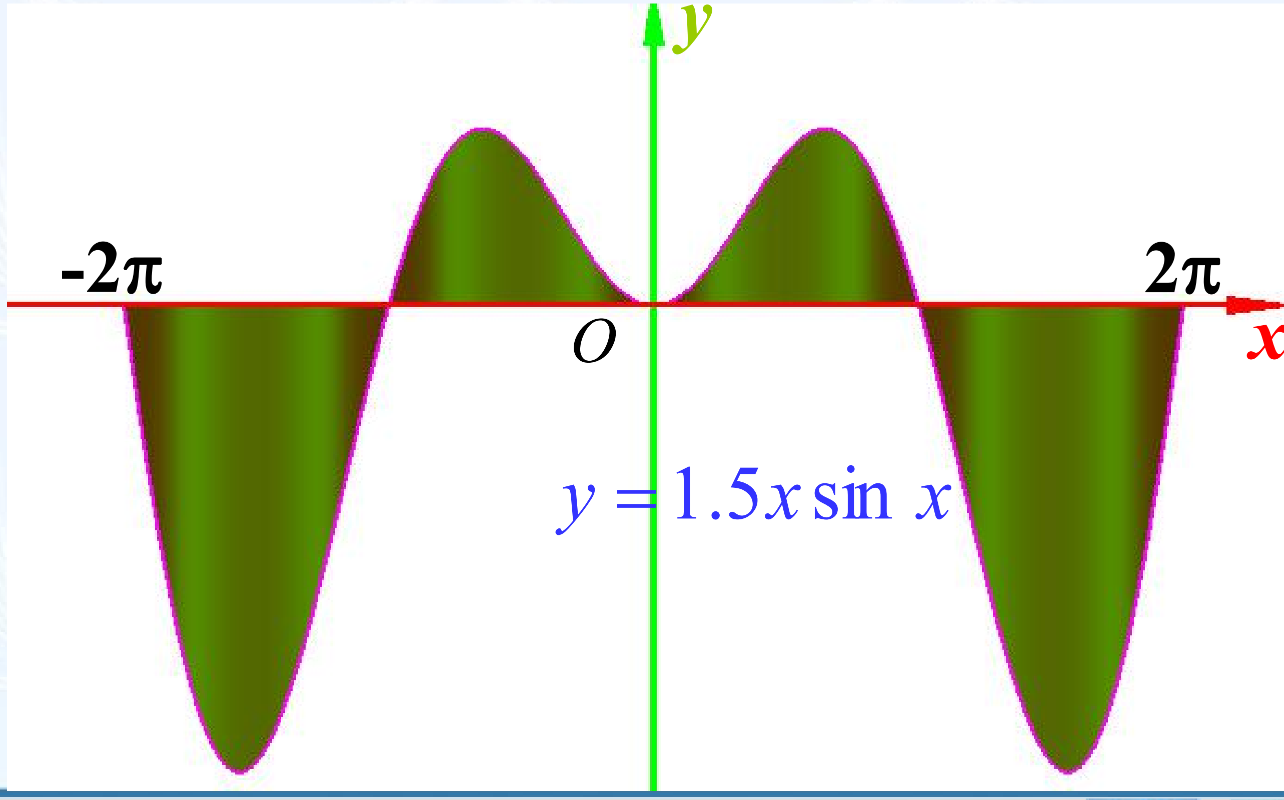
(1) $f(x)>0$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$， A 为下图所示的曲边梯形的面积.



(2) $f(x)<0$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-A$，$A$ 为下图所示的曲边梯形的面积.

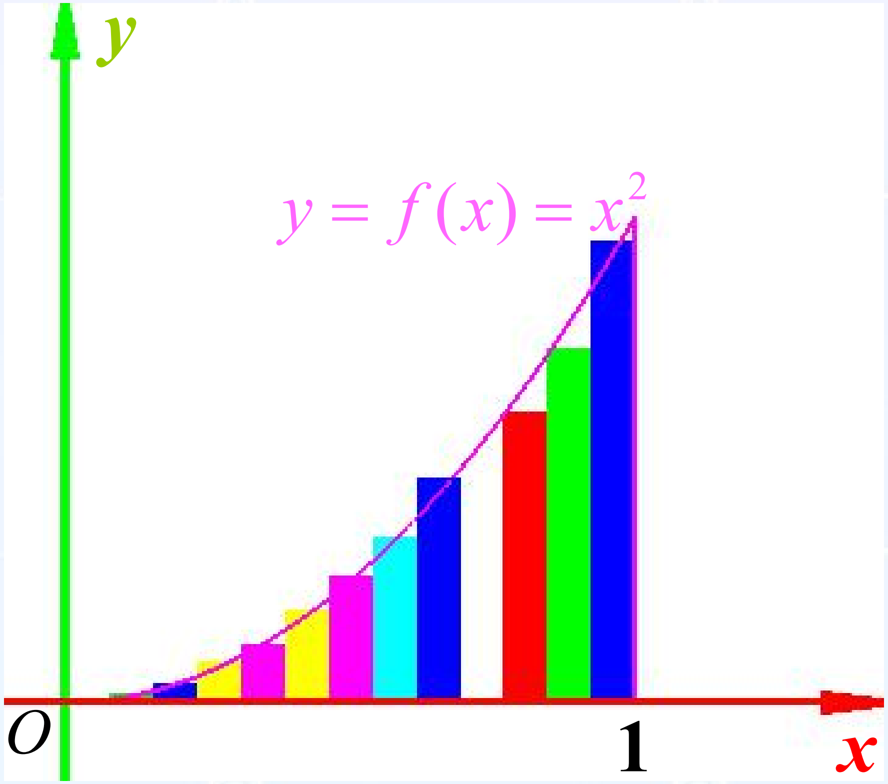


(3) 当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的部分区间为正，而在其他区间为负时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 等于 x 轴上方部分的曲边梯形面积减去 x 轴下方部分的曲边梯形面积.



例1 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$.

解



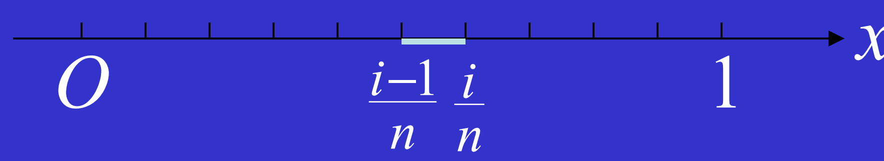
思考. 用定积分表示下列极限

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}} \qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$$

解: (1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\underbrace{\boxed{\frac{i}{n}}}_{\xi_i}}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\Delta x_i}$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$$



$$(2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Bigl(\underbrace{\boxed{\frac{i}{n}}}_{\xi_i}\Bigr)^p\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\Delta x_i}$$

$$=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x$$

三、定积分的近似计算

定积分的近似计算方法一般有：矩形法、梯形法和抛物线法(又称辛普森(Simpson)法).

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，下面简要介绍这三种方法.

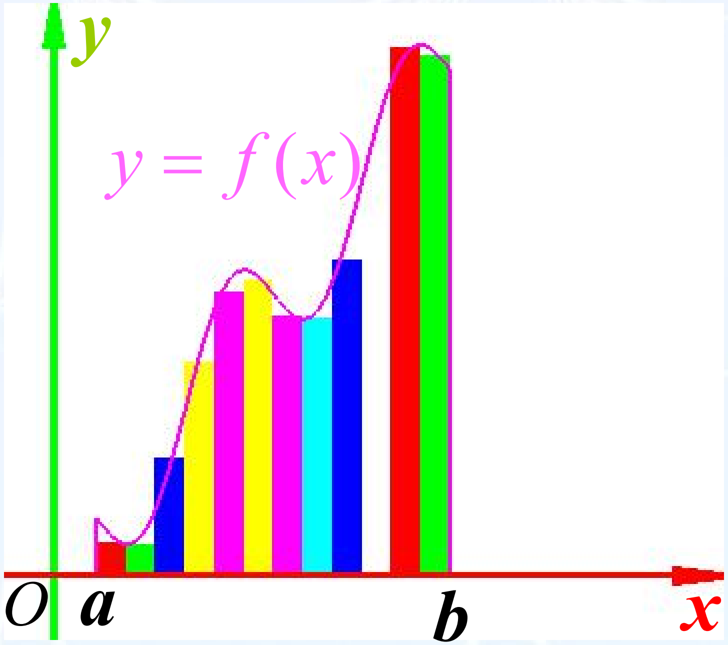
1. 矩形法

把 $[a, b]$ n 等分，则每个小区间的长度为 $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$,

在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上取 $\xi_i = x_{i-1}$，则

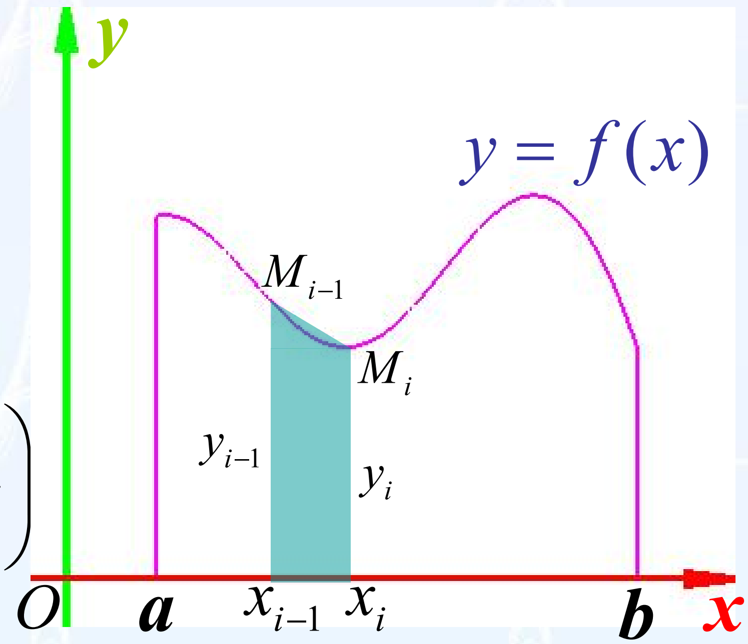
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$$

$$\approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \cdots y_{n-1}).$$



2. 梯形法

把 $[a,b]$ n 等分，则每个小区间的长度为 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$，在每个小区间上用梯形来近似对应的小曲边梯形．由此可得



$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

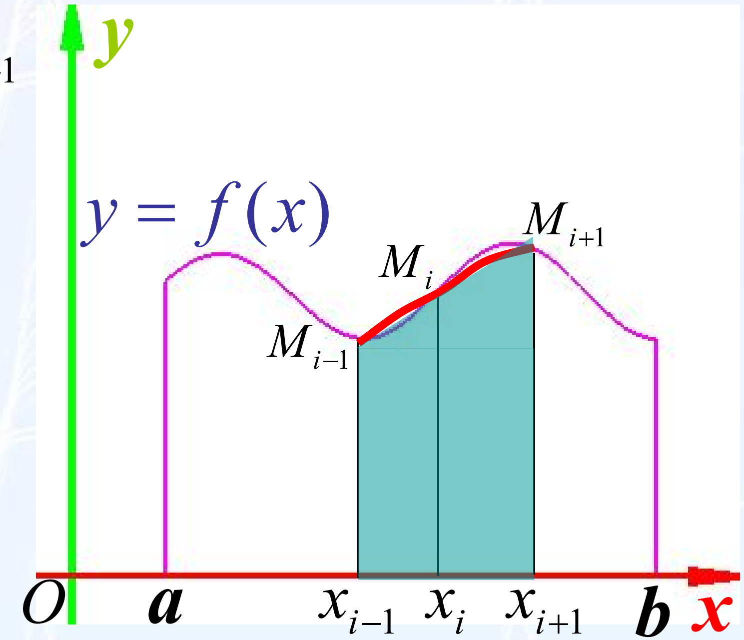
$$\approx\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\cdots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right)$$

$$=\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+\cdots+y_{n-1}\right).$$

3. 抛物线法

把 $[a,b]$ n 等分，则每个小区间的长度为 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$，

抛物线法的原理是：将以 M_{i-1}，M_{i+1} 为端点的曲线弧用由 M_{i-1}，M_i，M_{i+1} 三点所确定的抛物线代替．经推导可得



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6m}\left[\, y_0 + y_{2m} + 4\sum_{i=1}^{m} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i} \,\right] \ (n=2m).$$

四、定积分的性质

补充规定：

(1) 当 $a = b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$；

(2) 当 $a > b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

性质1 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

证明

性质2 $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

性质3 设 $a < c < b$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x .$$

证明

这个性质说明，定积分对区间具有**可加性**.

事实上不论 a , b , c 的位置关系如何结论都成立.

性质4 $\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = b - a$.

性质5 如果在区间 $[a, b]$ 上，$f(x) \geq 0$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0 \quad (a < b).$$

证明

推论1 如果在区间 $[a, b]$ 上，$f(x) \leq g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad (a < b).$$

推论2 $$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \quad (a < b).$$

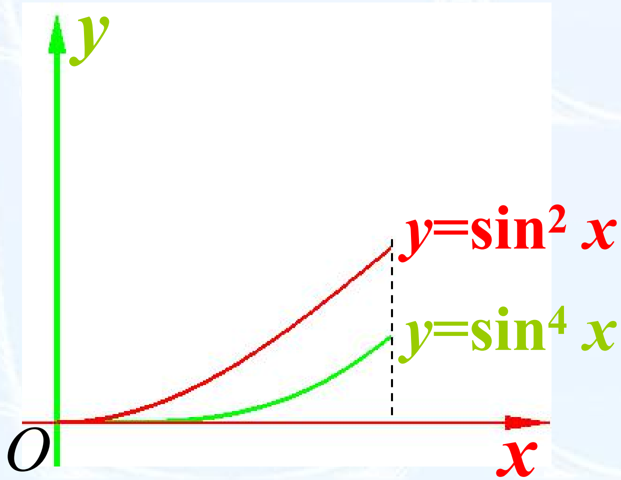
证明

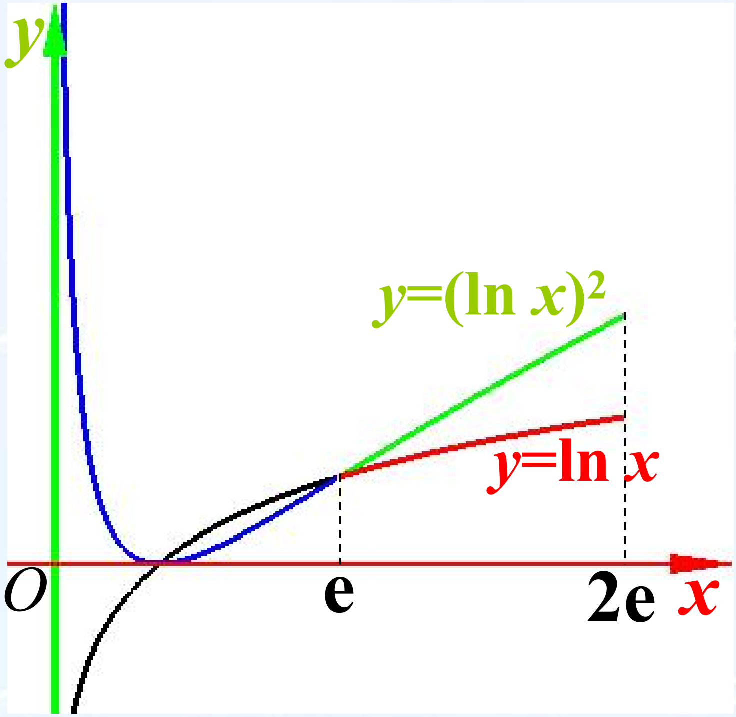
例2 比较下列各组中积分的大小：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\mathrm{d}x$；

(2) $\int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} \ln x\mathrm{d}x$ 与 $\int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} (\ln x)^2\mathrm{d}x$.

解





性质6 设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a).$$

证明

例3 估计定积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1+\sin^2 x)\,\mathrm{d}x$ 的值.

解

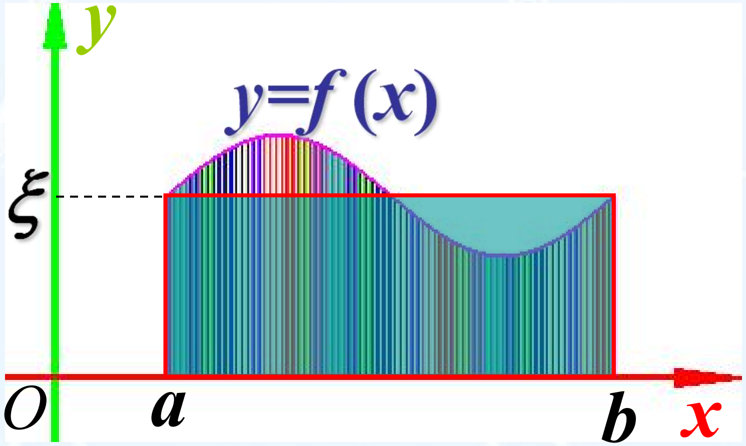
性质7(定积分中值定理) 如果函数 $f(x)$ 在区间积分区间 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使下式成立：

积分中值公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \quad (a \le \xi \le b).$$

证明

性质7的几何意义如图所示.



课后作业

P236 1， 2，7, 10（2,3），11（3,4）