四川农业大学　彭杰

第五节 矩阵的初等变换和初等矩阵

1.矩阵的初等变换
2.初等矩阵
3.用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵

矩阵的初等变换

引 例 消元法求解线性方程组

增广矩阵 $\tilde{A}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 & (1) \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 & (2) \\ 3x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 19 & (3) \end{cases} \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 9 \\ 3 & 2 & 9 & 19 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow\; r_2 + (-2)r_1 \quad r_3 + (-3)r_1$$

$$\xrightarrow[(3)+(-3)(1)]{(2)+(-2)(1)} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ -5x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 & (1)' \\ -5x_2 - 2x_3 = 1 & (2)' \\ -x_2 + 3x_3 = 7 & (3)' \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow (2)' \leftrightarrow (3)' \qquad\qquad \Big\downarrow r_2 \leftrightarrow r_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 & (1)'' \\ -x_2 + 3x_3 = 7 & (2)'' \\ -5x_2 - 2x_3 = 1 & (3)'' \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow (3)'' + (-5)(2)'' \qquad\qquad \Big\downarrow r_3 + (-5)r_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_2 + 3x_3 = 7 \\ -17x_3 = -34 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -17 & -34 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ \quad\;\; -x_2 + 3x_3 = 7 \\ \qquad\quad -17x_3 = -34 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -17 & -34 \end{pmatrix}$$

解 得 $x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 2$

上述解方程组过程中对方程组反复使用了如下三种变换

1. 用一个非零数乘某一个方程;
2. 交换两个方程;
3. 把某一个方程的k倍加到另一个方程.

以上三种变换称为方程组的**初等变换**.

说明: 方程组进行了初等变换后, 不改变方程组的解.

线性方程组 | 对应增广矩阵

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=4 & (1) \\ 2x_1-3x_2+2x_3=9 & (2) \\ 3x_1+2x_2+9x_3=19 & (3) \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 9 \\ 3 & 2 & 9 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)+(-3)(1)]{(2)+(-2)(1)} \begin{cases} x_1+x_2+2x_3=4 & (1)' \\ -5x_2-2x_3=1 & (2)' \\ -x_2+3x_3=7 & (3)' \end{cases} \longleftrightarrow \xrightarrow{r_2+(-2)r_1 \quad r_3+(-3)r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)'\leftrightarrow(3)'} \begin{cases} x_1+x_2+2x_3=4 & (1)'' \\ -x_2+3x_3=7 & (2)'' \\ -5x_2-2x_3=1 & (3)'' \end{cases} \longleftrightarrow \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)''+(-5)(2)''} \begin{cases} x_1+x_2+2x_3=4 \\ -x_2+3x_3=7 \\ -17x_3=-34 \end{cases} \longleftrightarrow \xrightarrow{r_3+(-5)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -17 & -34 \end{pmatrix}$$

上述过程可知，由于每个方程组都与其增广矩阵对应，在对方程组作初等变换的同时，对其增广矩阵也作了相应的变换，即：

1. 用一个非零数乘矩阵的某行；（列） $r_i \times k\left(c_i \times k\right)$

2. 交换矩阵的两行；（列） $r_i \leftrightarrow r_j\left(c_i \leftrightarrow c_j\right)$

3. 把矩阵某行（列）的k倍加到另一行.（列） $r_i + kr_j\left(c_i + kc_j\right)$

以上三种对矩阵施行的变换称为矩阵的初等行（列）变换.

矩阵的初等行（列）变换统称为矩阵的初等变换.

说明: 1 对矩阵施行初等变换后得到的是一个新的矩阵，它和原来的矩阵不同，两者间不能写“=”。

初等矩阵

定义 由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵.

三种初等变换对应着三种初等方阵.

$$\begin{cases} 1.\ \text{以数 } k \neq 0 \text{ 乘某行(列)}; \\ 2.\ \text{交换两行(列)}; \\ 3.\ \text{以数 } k \text{ 乘某行（列）加到另一行（列）上去}. \end{cases}$$

(1) 交换两行或两列，得初等对换矩阵。

交换 E 中第 i, j 两行，即 $(r_i \leftrightarrow r_j)$，得初等方阵

$$
\begin{array}{c}
P(i,j) = \left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

第 i 列　　第 j 列

(2) 以数 $k \neq 0$ 乘某行或某列，得初等倍乘矩阵。

以数$k \neq 0$乘单位矩阵的第i行$(r_i \times k)$，得初等矩阵$P(i(k))$.

$$P(i(k)) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \text{第 } i \text{ 列} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

(3) 以数 k 乘某行（列）加到另一行（列）上，

以 k 乘 E 的第 j 行加到第 i 行上 $(r_i + kr_j)$

[或以 k 乘 E 的第 i 列加到第 j 列上 $(c_j + kc_i)$]

$$P(i,j(k)) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 第i行 \\ \\ \leftarrow 第j行 \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} 第\ i\ 列 & 第\ j\ 列 \end{array} \end{array}$$

练习

判断下列矩阵是否为初等矩阵

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ×

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✓　　(4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ×

定理 初等矩阵是可逆的，逆矩阵仍为初等矩阵。

变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换是其本身，

则 $P(i,j)^{-1} = P(i,j)$ ；

变换 $r_i \times k$ 的逆变换为 $r_i \times \frac{1}{k}$,

则 $P(i(k))^{-1} = P(i(\frac{1}{k}))$;

变换 $r_i + kr_j$ 的逆变换为 $r_i + (-k)r_j$,

则 $P(i,j(k))^{-1} = P(i,j(-k))$.

练习

$$P(i,j)^{-1}=P(i,j)$$
$$P(i(k))^{-1}=P(i(\frac{1}{k}))$$
$$P(i,j(k))^{-1}=P(i,j(-k))$$

求初等矩阵逆矩阵

$$(1)\quad \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$(2)\quad \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$(3)\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-3&1\end{pmatrix}$$

例1： 计算

$$(1)\underline{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ka_{21}&ka_{22}&\cdots&ka_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3n}\end{pmatrix}$$

$$(2)\underline{\begin{pmatrix}1&0&k\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+ka_{31}&a_{12}+ka_{32}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}$$

$$(3)\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\underline{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{13}&b_{12}\\b_{21}&b_{23}&b_{22}\\b_{31}&b_{33}&b_{32}\end{pmatrix}$$

定理1

设A是$m\times n$矩阵，对A施行一次初等行变换，相当于在A的左边乘一个相应的m阶初等矩阵；对A施行一次初等列变换，相当于在A的右边乘一个相应的n阶初等矩阵。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{12} \\ b_{21} & b_{23} & b_{22} \\ b_{31} & b_{33} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵的关系

$P(i,j)A$ 相当于$r_i \leftrightarrow r_j$,

$P(i(k))A$ 相当于$r_i \times k$,

$P(i,j(k))A$ 相当于$r_i + kr_j$,

$AP(i,j)$ 相当于$c_i \leftrightarrow c_j$,

$AP(i(k))$ 相当于$c_i \times k$,

说明：对矩阵实施一次初等变换可以用一个相应的初等矩阵去左乘或右乘表示。

定理 2 若n阶矩阵A可逆，则可以通过行初等变换将A化为单位矩阵E.

推论1 若A可逆，则A可表示为若干初等矩阵的乘积

证明： 由以上定理，A可逆，则 $P_s \cdots P_2 P_1 A = E_n$

而 $P_s, \cdots, P_2, P_1$均可逆

依次用 $P_s^{-1}, \cdots, P_2^{-1}, P_1^{-1}$左乘上式两端

$$\underline{P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1} P_s \cdots P_2 P_1} A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1} E_n$$

$A = \underline{P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1}}$ 而 $P_s^{-1}, P_2^{-1}, P_1^{-1}$也均为初等矩阵

推论2：如果对可逆矩阵 A 和同阶单位矩阵 E 作同样的初等行变换，那么当 A 变成单位矩阵 E 时，E 就变成 A^{-1}。

即 $P_s\cdots P_2P_1A=E_n$ 则 $P_s\cdots P_2P_1E_n=A^{-1}$

证明：$$\left(P_s\cdots P_2P_1\right)A=E_n,$$

等号两边右乘 A^{-1}，$(P_s\cdots P_2P_1)AA^{-1}=E_nA^{-1}$

$$(P_s\cdots P_2P_1)E_n=A^{-1}$$

用矩阵的初等变换求逆矩阵方法

$$\begin{pmatrix}A & E\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}E & A^{-1}\end{pmatrix}$$

$n\times 2n$矩阵

例2： 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解：

$$(A \mid E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&\boxed{-2}&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

练习：用初等行变换求可逆矩阵A的逆矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A\ \ E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

用矩阵的初等变换求逆矩阵

注：1. A 与 E 每一次变换必须同步;

2. 求逆时,自始至终每一步都只能用初等行变换，千万不能夹杂任何初等列变换.

3. 若作初等行变换时,出现全行为0，则矩阵的行列式等于0。结论：矩阵不可逆!

另：利用初等行变换求逆矩阵的方法，还可用于求矩阵 $A^{-1}B$.

即

$$(A \mid B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \mid \boxed{A^{-1}B})$$

例3： 求矩阵 X,使 $AX = B$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

解： 若 A 可逆，则 $X = A^{-1}B$.

方法1：先求出 A^{-1}，再计算 $A^{-1}B$。

方法2：直接求 $A^{-1}B$ 。

$$(A \mid B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \mid A^{-1}B)$$

$$(A \vdots B)=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&5\\0&-2&-5&-1&-9\\0&-2&-6&-2&-12\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&-2&1&-4\\0&-2&-5&-1&-9\\0&0&-1&-1&-3\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&3&2\\0&-2&0&4&6\\0&0&-1&-1&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\div(-1)]{r_2\div(-2)}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&3&2\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&1&3\end{array}\right),\quad \therefore X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-3\\1&3\end{pmatrix}.$$

利用初等列变换求逆阵：

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

如果要解 $YA = C$，则可对矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$ 作初等列变换，

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} E \\ CA^{-1} \end{pmatrix}$$

即可得 $Y = CA^{-1}$.

小结：

1. 单位矩阵 $\xrightarrow{\text{一次初等变换}}$ 初等矩阵.

初等矩阵的类型　　　　初等矩阵与初等变换的关系

2. 利用初等变换求逆阵的步骤是:

(1) 构造矩阵 $(A \quad E)$;

(2) 对 $(A \quad E)$ 施行初等行变换, 将 A 化为单位矩阵 E 后, 右边 E 对应部分即为 A^{-1}.