一、定积分的换元法

二、定积分的分部积分法

一、定积分的换元法

定理 假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件：

(1) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;

(2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数，且其值域 $R_\varphi=[a,b]$，

则有

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t\,.}$$

换元公式

证明

几点说明:

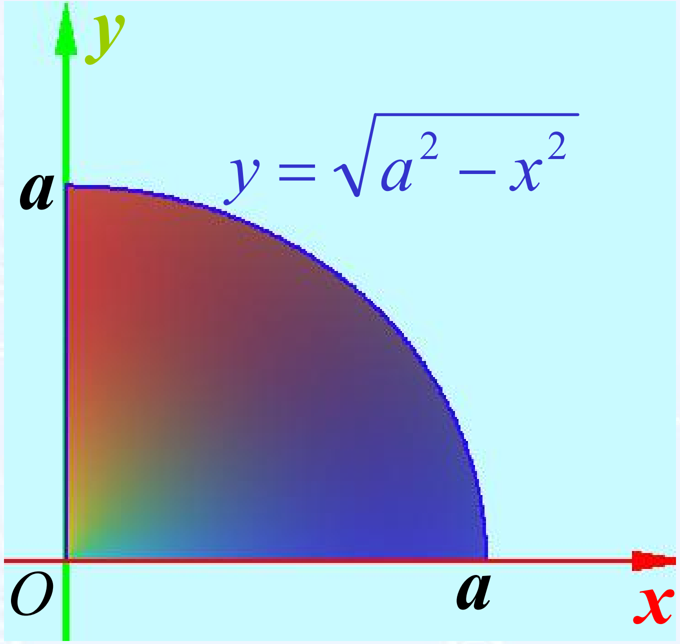
(1) 用 $x=\varphi(t)$ 换元时，积分限也要换成新变量的积分限(换元必换限);

(2) 求出 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数 $\Phi(t)$ 后，不需代回原来的变量，直接计算 $\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$ 即可.

(3) 换元公式相当于不定积分的第二换元积分法，反过来用换元公式即为凑微分法，用凑微分法能直接算出原函数时，可以不换元.

例1 计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a > 0)$.

解



例2 计算 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}\,\mathrm{d}x$.

解

例3 计算 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x$.

解

例4 证明:

(1) 若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x .$$

(2) 若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为奇函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 .$$

证明

例5 设 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数，证明

(1) $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int_a^{a+nT} f(x)\,\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x \ (n \in \mathrm{N})$,

证明

例6 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, & x\geq 0, \\ \dfrac{1}{1+\cos x}, & -\pi<x<0, \end{cases}$ 计算 $\int_1^4 f(x-2)\mathrm{d}x$.

解

练习:

$$1.\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}-1}$$

$$2.\int_{-1}^{1}(x^2\sqrt{1-x^2}+x^3\sqrt{1+x^2})dx$$

二、定积分的分部积分法

不定积分的分部积分法 $\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$

定积分的分部积分法 $\int_a^b u\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u$

例7 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \mathrm{d}x$.

解

例8 计算 $\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$.

解

练习

2.计算$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{xdx}{1+\cos 2x}$.

$\because 1+\cos 2x = 2\cos^2 x$,

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{xdx}{1+\cos 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{xdx}{2\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{2}d(\tan x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[\ln\sec x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}.$$

练习

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin^{100}(x-t)\,\mathrm{d}t = \underline{\ \sin^{100}x\ }$

提示：令 $u = x - t$, 则

$$\int_0^x \sin^{100}(x-t)\,\mathrm{d}t = -\int_x^0 \sin^{100}u\,\mathrm{d}u$$

2. 设 $f(t)\in C^1$, $f(1)=0$, $\int_1^{x^3} f'(t)\,\mathrm{d}t=\ln x$, 求 $f(\mathrm{e})$.

解法1. $\ln x=\int_1^{x^3} f'(t)\,\mathrm{d}t=f(x^3)-f(1)=f(x^3)$

令 $u=x^3$, 得 $f(u)=\ln\sqrt[3]{u}=\frac{1}{3}\ln u \longrightarrow f(\mathrm{e})=\frac{1}{3}$

解法2. 对已知等式两边求导,

得 $3x^2 f'(x^3)=\dfrac{1}{x}$

令 $u=x^3$, 得 $f'(u)=\dfrac{1}{3u}$

$$\therefore\quad f(\mathrm{e})=\int_1^{\mathrm{e}} f'(u)\,\mathrm{d}u+f(1)$$

$$=\frac{1}{3}\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{3}$$

思考: 若改题为

$$\int_1^{x^3} f'(\sqrt[3]{t})\,\mathrm{d}t=\ln x$$

$$f(\mathrm{e})=?$$

提示: 两边求导, 得

$$f'(x)=\frac{1}{3x^3}$$

$$f(\mathrm{e})=\int_1^{\mathrm{e}} f'(x)\,\mathrm{d}x$$

3. 设 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 且 $f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$, 求 $\int_0^1 x f''(2x)\,\mathrm{d}x$.

解: $\int_0^1 x \underline{f''(2x)\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}f'(2x)$ (分部积分)

$$= \frac{1}{2}\left[\, x f'(2x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(2x)\,\mathrm{d}x \,\right]$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{4} f(2x)\Big|_0^1$$

$$= 2$$

课后作业

P254 1（2,4,6,8,11,12,15，16,18）

3（1,2,5,6,7,9）