微分中值定理 $\left\{ \begin{array}{l} \text{函数的性态} \\ \quad \downarrow\uparrow \\ \text{导数的性态} \end{array} \right.$

本节研究:

函数之商的极限 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} \left(\dfrac{0}{0} \text{ 或 } \dfrac{\infty}{\infty} \text{ 型} \right)$

转化 $\downarrow$ **洛必达法则**

导数之商的极限 $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

洛必达，G.-F.-A. de

一、$\frac{0}{0}$ 型未定式

二、$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

三、其他未定式

一、$\frac{0}{0}$ 型未定式

定理1 设

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} F(x)=0$;

(2) 在点 a 的某去心邻域内，$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在，且 $F'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在(或为无穷大)，

那么 $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

洛必达法则

证明

几点说明

(1) 定理中的 $x \to a$ 可以改成其他变化过程；

(2) 若 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 仍属 $\dfrac{0}{0}$ 型，则可继续施用洛必达法则，即

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{F''(x)};$$

(3) 若 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在，只能说明该极限不能用洛必达法则来计算，而不能断定原极限也不存在.

例1 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

解

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

解

二、$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

定理2 设

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} F(x)=\infty$;

(2) 在点 a 的某去心邻域内，$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在，

且 $F'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在(或为无穷大)，

那么 $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

洛必达法则

证明略.

例3 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$.

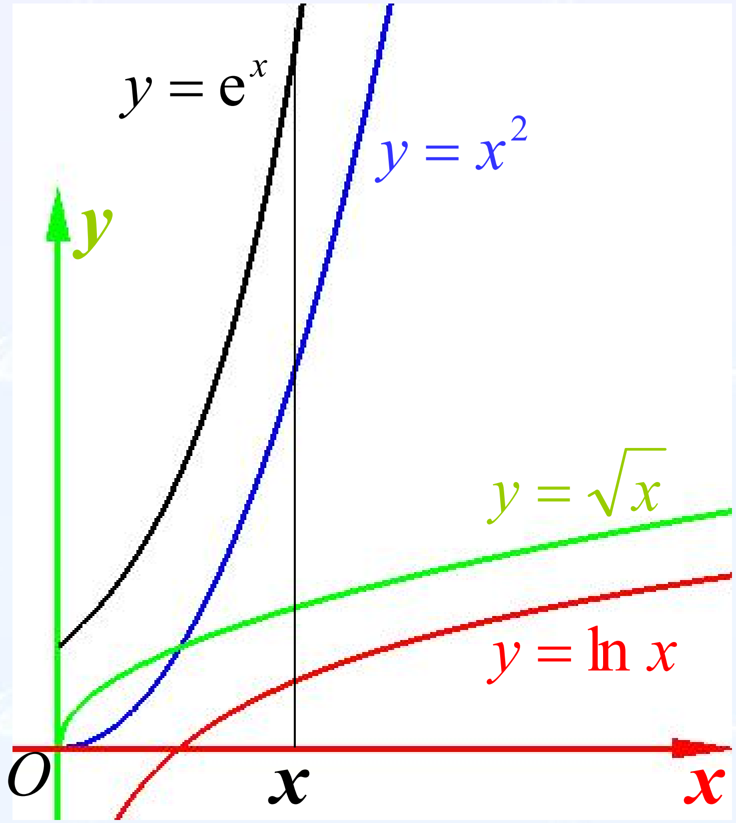
解

例4 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}\ (n>0)$.

解

例5 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}\ (n\in N^+,\lambda>0)$.

解



对数函数、幂函数、指数函数增大的“速度”比较

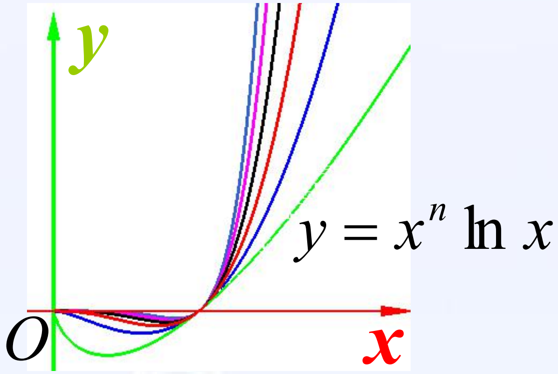
三、其他未定式

解决方法:

$$\infty-\infty \xrightarrow[\text{转化}]{\text{通分}} \left\{\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}\right\} \xleftarrow[\text{转化}]{\text{取倒数}} 0\cdot\infty \xleftarrow[\text{转化}]{\text{取对数}} \left\{0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0\right\}$$

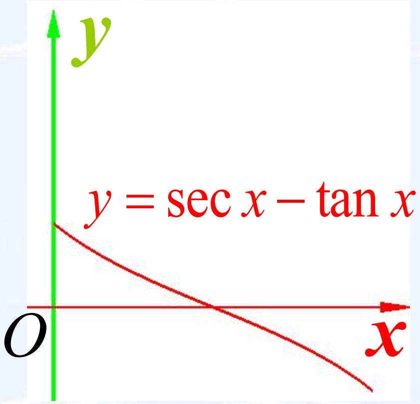
例6 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x \ (n>0)$.

解



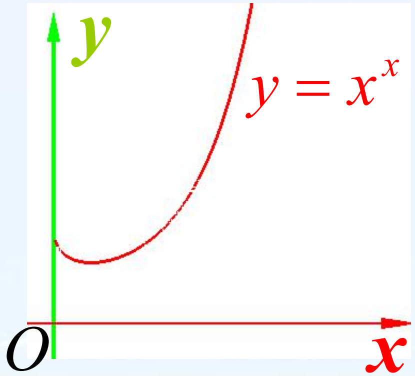
例7 求 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$.

解



例8 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

解



例9 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2 \sin x}$.

解

例10 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

解

例11 求 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

解

内容小结

洛必达法则

$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

$f^g = e^{g\ln f}$

$\frac{0}{0}$ 型

$\frac{\infty}{\infty}$ 型

$\infty - \infty$ 型

$0 \cdot \infty$ 型

$$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{g} \cdot \frac{1}{f}}$$

$$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$$

作业

P 137 1（2,4,5,7,9,10,11,13,15,16）,4

洛必达(1661 – 1704)


洛必达，G.-F.-A.de

法国数学家, 他著有《无穷小分析》(1696), 并在该书中提出了求未定式极限的方法, 后人将其命名为“ 洛必达法则 ”他在15岁时就解决了帕斯卡提出的摆线难题 , 以后又解出了伯努利提出的“ 最速降线 ” 问题,在他去世后的1720 年出版了他的关于圆锥曲线的书 .