四川农业大学　彭杰

第六节　矩阵的秩

一、矩阵秩的概念

定义1 在 $m\times n$ 矩阵 A 中任取 k 行 k 列（$k\le m$，$k\le n$），位于这些行列交叉 处的个 k^2 元素,不改变它们在 A 中所处的位置次序而得 的k阶行列式，称为矩阵 A 的 k 阶子式.

$m\times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k \bullet C_n^k$ 个.

例：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&1\\2&4&6&0\end{pmatrix}$$

A的最低阶子式的阶数为 <u>1</u>，共有<u>$3\times4=12$</u>个最低阶子式。

取第1、2行和第2、3列交叉点的元，组成的二阶行列式

$\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=1$ 为A的一个二阶子式，这样的二阶子式一共有

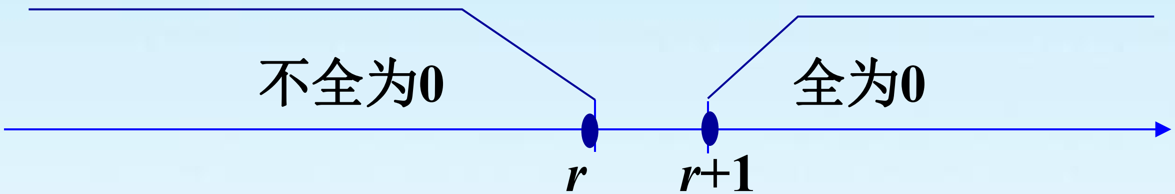
<u>$C_3^2\times C_4^2=18$</u>.

A的最高阶子式的阶数为 <u>3</u>，共有 <u>$C_4^3=4$个</u>，且全为0.

如：1、2、3行，1、2、3列所成之三阶子式：
$$\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&2\\2&4&6\end{vmatrix}=0$$

可见：不为0的子式的最高阶数为2。

定义2： 设矩阵 A 不等于0的子式的最高阶数为 r，即：**存在** r 阶子式不为0, 且所有 $r+1$阶子式都为0，则称 r 为矩阵 A 的秩(rank)，记作 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{rank}(A)=r_A$



规定零矩阵的秩为零.

非0的行向量、列向量看作矩阵，其秩都为1.

例：$A=(1,0,2,4)$, 则 $\mathrm{r}(A)=1$.

对于 A^T，显有 $R(A^T)=R(A)$.

例：n 阶方阵A 的子式的最高阶数为 n 阶，这样的子式只有唯一的1个，即A的行列式 $|A|$.

例：$m \times n$ 矩阵A 的子式的阶数不可能超过 A 的行数 m 及 列数 n.

性质：若矩阵A 的 r+1 阶子式全为 0，则由行列式的展开可知高于 r+1 阶子式（如果存在的话）也全为0.

因此，矩阵 A 的秩 $R(A)$ 就是 A 中不等于零的子式的最高阶数 .

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} & a_{24} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} & a_{34} \end{pmatrix}$$

矩阵 A 的 2 阶子式

矩阵 A 的一个 3 阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

若矩阵 A 中所有 2 阶子式都等于0, 那么 3 阶子式也等于0.

由秩的定义可见：

(1)若A是$m\times n$的矩阵，则$r(A)\le\min\{m,n\}$.

(2)$r(kA)=r(A)$，$k\neq 0$

对于n阶方阵A，

若$r(A)=n$，则称A为满秩矩阵.

若$r(A)<n$，则称A为降秩矩阵.

定理：设 A 为 n 阶方阵，则

A 可逆 $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $r(A)=n$ $\Leftrightarrow$ A 满秩

A 不可逆 $\Leftrightarrow$ $|A|=0$ $\Leftrightarrow$ $r(A)<n$.

例 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 4 & 7 & 1\end{pmatrix}$的秩.

解 在 A 中，$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\neq 0.$

又 $\because$ A的 3 阶子式只有一个 $|A|$，且 $|A|=0$,

$\therefore \quad R(A)=2.$

例 已知 $A=\begin{pmatrix}1&3&-2&2\\0&2&-1&3\\-2&0&1&5\end{pmatrix}$，求该矩阵的秩.

解 $\because \begin{vmatrix}1&3\\0&2\end{vmatrix}=2\neq 0,$ 计算A的3阶子式，

$$\begin{vmatrix}1&3&-2\\0&2&-1\\-2&0&1\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1&3&2\\0&2&3\\-2&0&5\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}3&-2&2\\2&-1&3\\0&1&5\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1&-2&2\\0&-1&3\\-2&1&5\end{vmatrix}=0.$$

$\therefore R(A)=2.$

二、通过初等变换求矩阵的秩

定理1： 初等变换不改变矩阵的秩.

定理2 设P，Q分别为m阶和n阶可逆矩阵，则对于任一$m \times n$矩阵A，都有$r(PAQ) = r(A)$

定义3 满足下面两个条件的矩阵称为行阶梯形矩阵

（1）若有零行，零行都在非零行的下方（元素全为零的行称为零行，否则称为非零行）；

（2）从第一行起，下面每一行自左向右第一个非零元素前面零的个数逐步增加.

例：阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

例：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

不是阶梯形矩阵

首元

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \underline{2} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{3} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \underline{3} & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{4} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \underline{2} & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \underline{3} & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \underline{3} & 4 & 5 \\ 0 & \underline{2} & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{2} & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \underline{3} & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

第2行无首元

对于矩阵的每一行，从左往右数，第一个不为0的元素称为这一行的**非0首元，简称首元**。

行最简矩阵

也称为简化行阶梯形矩阵，

是满足下述三个条件的矩阵：

1，阶梯形矩阵.

2，首元都等于1.

3，首元所在的列，其余元素为0.

下列矩阵是否为行最简矩阵？

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

不是

标准型

$m \times n$ 矩阵 A 总可经过初等变换化为 标准形

$$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$$

此标准形由 m,n,r 三个数唯一确定，其中 r 就是行阶梯形矩阵中非零行 的行数.

所有与矩阵 A 等价的矩阵组成的一个集合，称为一个等价类，标准形 F 是这个等价类中最简单的矩阵.

标准形矩阵

$$D=\begin{pmatrix} \overbrace{1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1}^{r\text{个}} & \\ & & & & \end{pmatrix}_{m\times n}$$

定理： 任何矩阵 $A_{m\times n}$ $\xrightarrow{\text{行，列变换化成}}$ 标准形

注：此处既可以用行变换，也可以用列变换。

标准形矩阵的例子

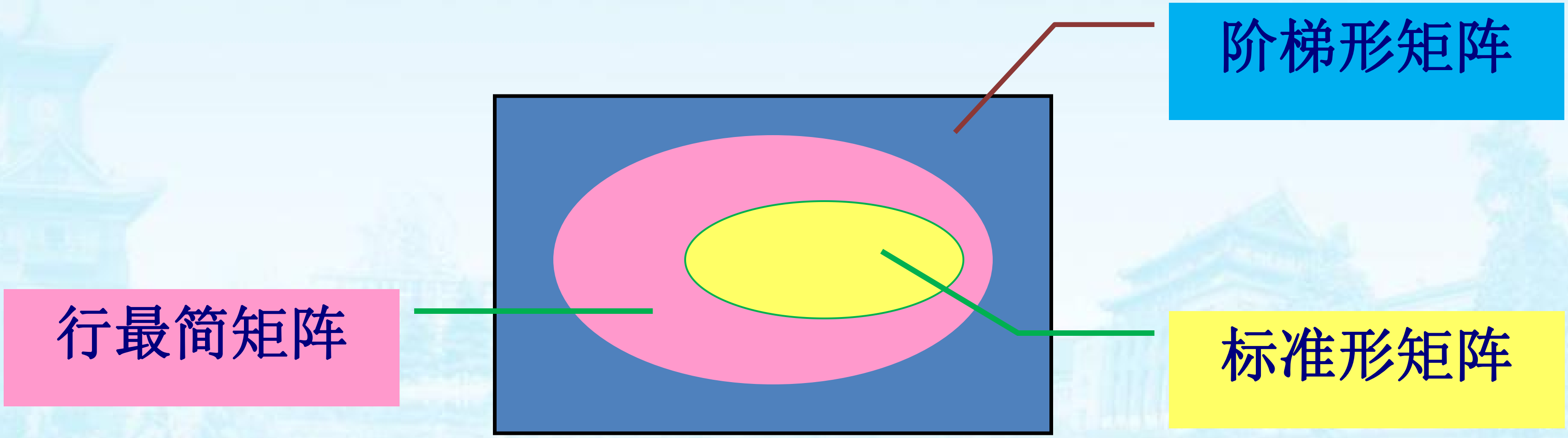
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

标准形矩阵由 m、n、r 这3个参数完全确定，r 为阶梯形矩阵中非0行的行数。

三者之间的包含关系



定理： 任何矩阵 $A_{m\times n}$

$$\xrightarrow{\text{行的初等变换}} \text{行阶梯形矩阵}$$

$$\xrightarrow{\text{行的初等变换}} \text{行最简矩阵}$$

$$\xrightarrow{\text{行和列的初等变换}} \text{标准形}$$

即：任何矩阵都可以经过一系列初等行变换化为行阶梯形矩阵，也可以化为行最简形矩阵，进一步还可以化为标准形.

例：将A化为阶梯形、行最简、标准形

$$A=\begin{pmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-2)\ \times(-1)\\ \\ \\\end{matrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&-1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

阶梯形

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}2&0&1&2\\0&-1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\times\frac{1}{2}\\ \times(-1)\\ \\\end{matrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行最简

$$\times\left(-\frac{1}{2}\right)\quad\times(-1)$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hline 0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\times(-1)$$

标准形

初等变换求矩阵秩的方法：

把矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩.

例 求矩阵 $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩.

解 $\because$ B是一个行阶梯形矩阵， 其非零行有3行，

$\therefore$ $R(B)=3.$

例 设$A=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1\\2&-4&8&0\\-2&4&-2&3\\3&-6&0&-6\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$

求矩阵 A 及矩阵 $B=(A|b)$的秩．

解

$$B=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\2&-4&8&0&2\\-2&4&-2&3&3\\3&-6&0&-6&4\end{pmatrix}$$

解

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4-3r_1}{\overset{\substack{r_2-2r_1\\ r_3+2r_1}}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4 + 3r_2}{\overset{r_2 \div 2 \quad r_3 - r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4 - r_3}{\overset{r_3 \div 5}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore R(A) = 2, \quad R(B) = 3.$$

*三、矩阵秩的一些重要结论

定理4 两矩阵乘积的秩不大于各因子矩阵的秩，即

$$r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}.$$

定理5 设A, B均为n阶方阵，则

$$r(AB) \ge r(A) + r(B) - n$$

推论 设A, B分别为$m \times n$和$n \times p$矩阵，$AB = 0$，则

$$r(A) + r(B) \le n$$

定理6 设A, B均为$m \times n$矩阵，则

$$r(A + B) \le r(A) + r(B)$$

推论 $A_{s\times n}$，$B_{s\times m}$，$\boldsymbol{r[A,B] \le r(A) + r(B)}$.

分块矩阵的秩

例：$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

$r(A)=2, r(B)=1.$

$r(A,B)=3.$

分块矩阵的秩

例：$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$r(A)=2, r(B)=2.$

$r(A,B)=2.$

例：3阶矩阵 $B\neq 0$, $AB=0$, 问 r(B)=? $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & t\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$.

解：$AB=0$, 故 $r(A)+r(B)\leq 3$.

若 $t=6$, 则 $r(A)=1$.于是$r(B)\leq 2$

若 $t\neq 6$, 则 $r(A)=2$.于是$r(B)\leq 1$，但B为3阶非零矩阵，所以 $r(B)\geq 1$

故此时$r(B)=1$

四、等价矩阵

定义4 如果矩阵 A 经过初等变换变成矩阵 B，则称矩阵 A 与 B 等价，记作 $A \cong B$

等价关系的性质：

（1）反身性：$A \cong A$;

（2）对称性：*if* $A \cong B, \Rightarrow B \cong A$;

（3）传递性：*if* $A \cong B, B \cong C \Rightarrow A \cong \mathrm{C}$.

定理7 设A，B是同型矩阵，则$A \cong B$的充分必要条件是

$$r(A) = r(B).$$

推论 n阶方阵A可逆的充分必要条件是$A \cong E$.

四、小结

1. 矩阵秩的概念

2. 求矩阵秩的方法

(1) 利用定义

(即寻找矩阵中非零子式的最高阶数);

(2) 初等变换法

(把矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩).