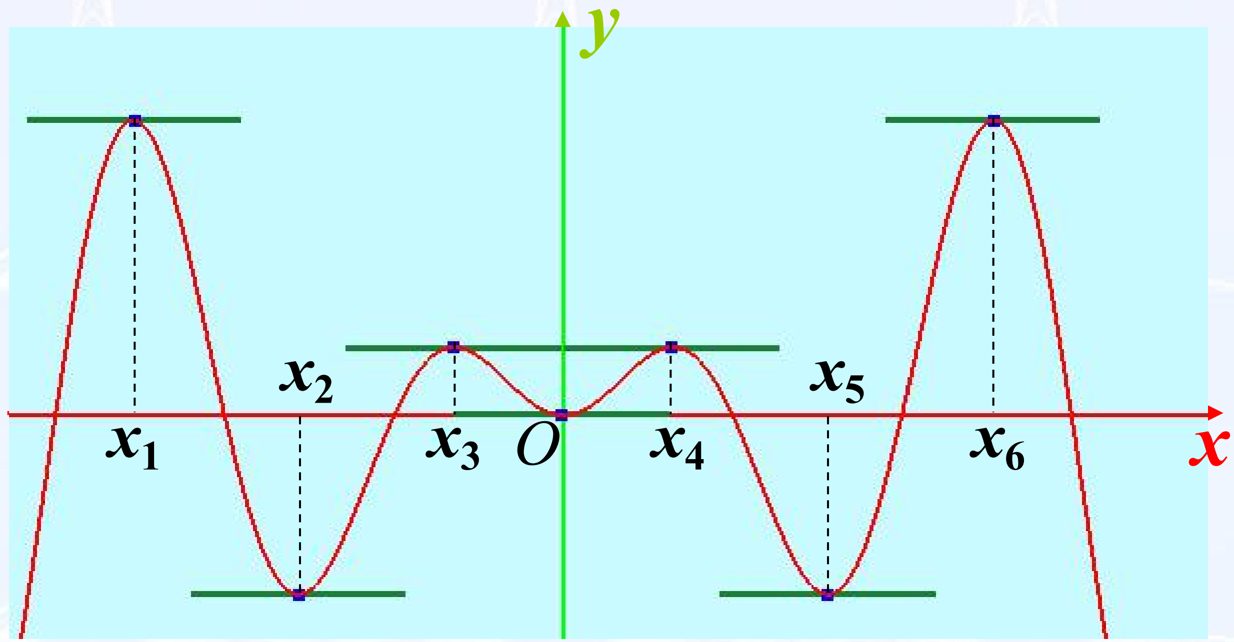
一、罗尔定理

1. 几何发现



如图所示的曲线，在 x_1—x_6 这6个相应点处有水平切线，这6点均是曲线在局部的最高点或最低点. 那么如何用分析语言来描述这一几何现象呢？

2. 费马引理

费马引理 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，并且在 x_0 处可导，如果对任意的 $x \in U(x_0)$，有

$$f(x) \le f(x_0) \quad (\text{或} f(x) \ge f(x_0)),$$

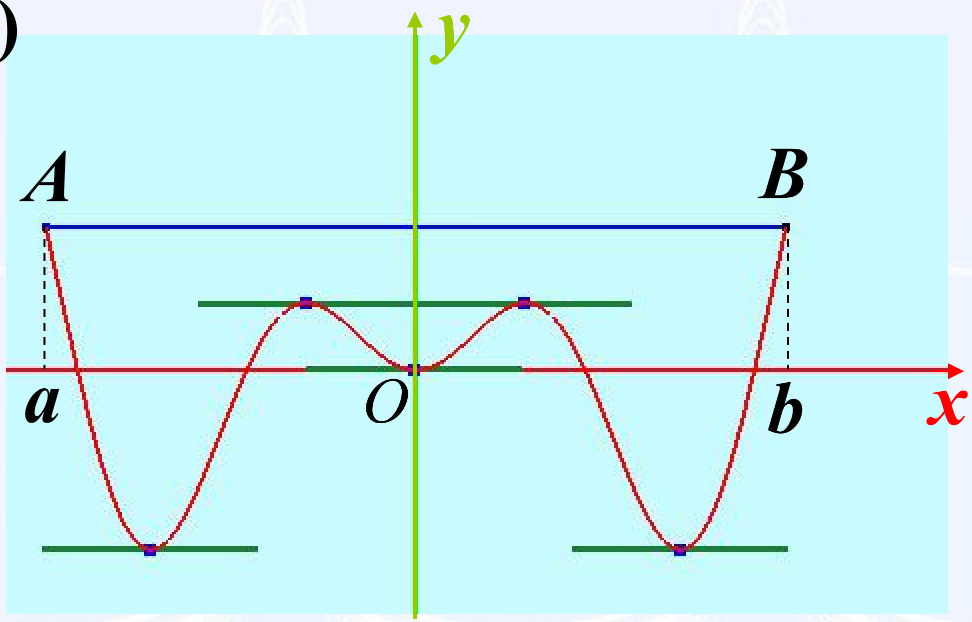
那么 $f'(x_0) = 0$.

证明

通常称导数等于零的点为函数的**驻点**.

3. 罗尔定理

如图所示，曲线 $y = f(x)$ 在开区间 (a, b) 内有 5条水平切线，并且它们都平行于弦AB. 那么这条曲线在$[a, b]$



到底满足了哪些条件才做到了这一点呢？ 从图可以看出：(1) 它是连续曲线；(2) 除两个端点外处处有切线；(3) $f(a) = f(b)$.

罗尔定理 如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续；

(2) 在开区间 (a, b) 内可导；

(3) 在区间端点处的函数值相等，即 $f(a) = f(b)$，

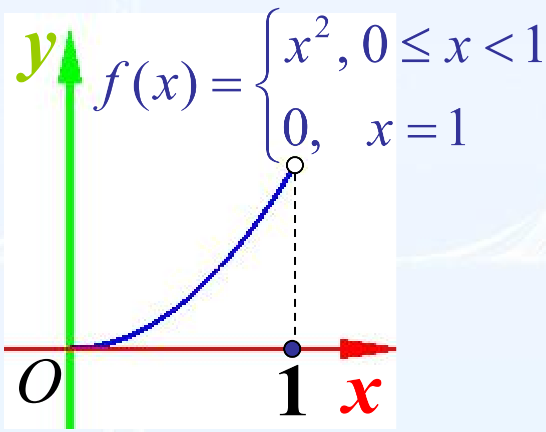
那么在 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f'(\xi) = 0 .$$

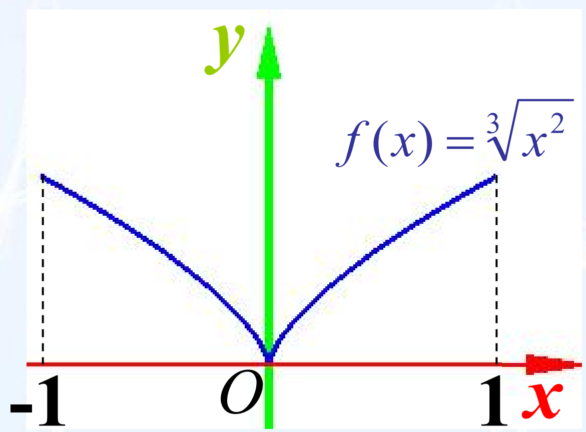
证明

注意

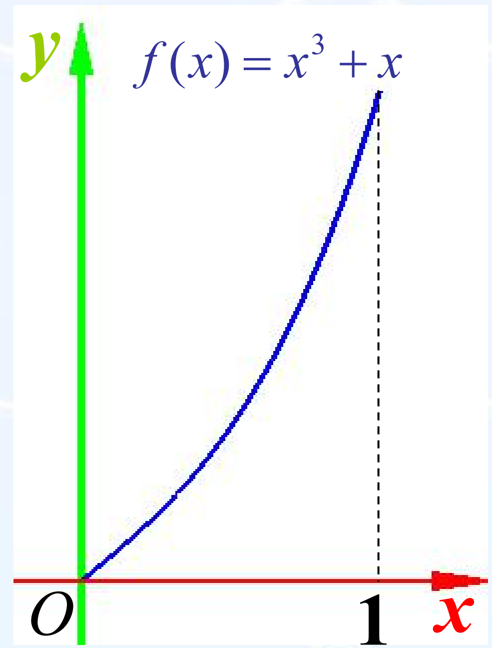
罗尔定理是一个充分性定理， 定理的条件不全满足时，可能有该结论，也可能没有该结论. 例如



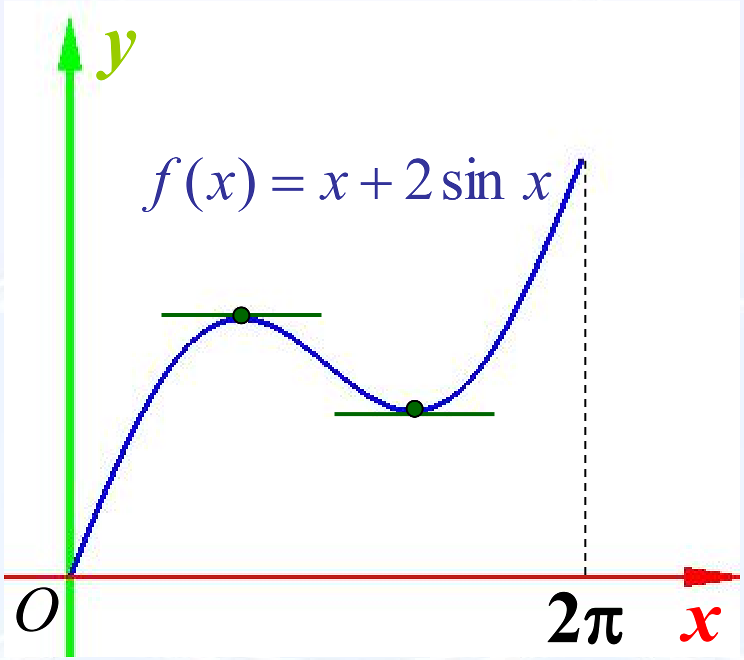
$f(x)$ 在$[0,1]$不连续



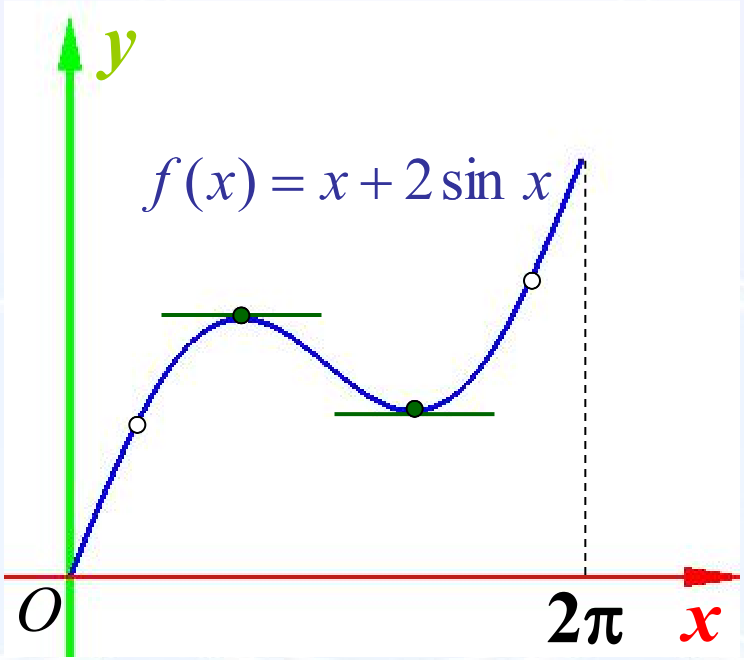
$f(x)$ 在$(0,1)$不可导



$f(0)\neq f(1)$



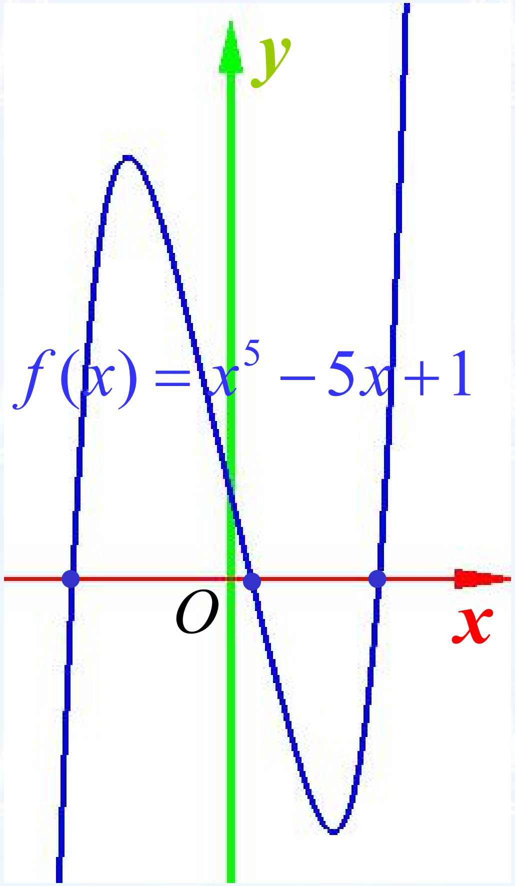
$f(0)\neq f(2\pi)$



$f(0)\neq f(2\pi)$且不连续

例1 证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于1 的正实根 .

证明



二、拉格朗日中值定理

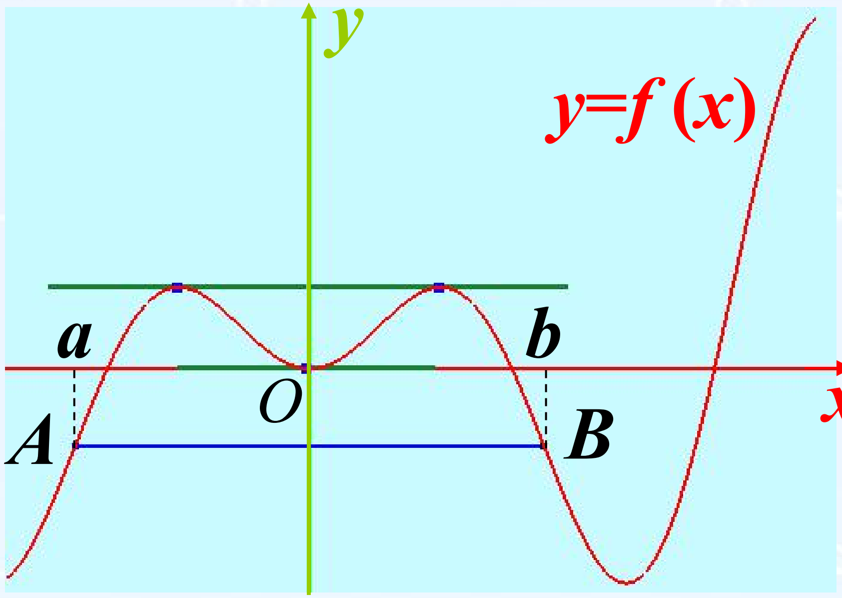
罗尔定理中的第3个条件 $f(a)=f(b)$ 相当特殊，它使罗尔定理的应用受到限制．如果去掉这个条件，但仍保留其余两个条件，会有什么样的结论呢？

罗尔定理的结论：

$$f'(\xi)=0$$

⇕

切线平行于弦 AB



拉格朗日中值定理 如果函数 $f(x)$ 满足

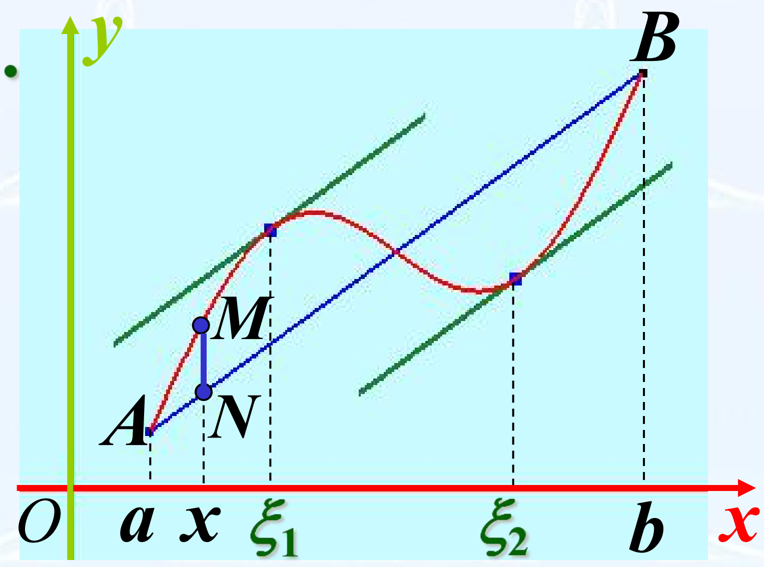
(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a, b) 内可导,

那么在 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

证明



几点说明

(1) 公式 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 叫做**拉格朗日中值公式**.

(2) 拉格朗日中值公式对于 $b<a$ 也成立.

(3) 拉格朗日中值公式也可写成有限增量形式：

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x\quad(0<\theta<1),$$

或
$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x\quad(0<\theta<1).$$

(4) 拉格朗日中值定理也叫**有限增量定理**或**微分中值定理**.

定理 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为零，那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

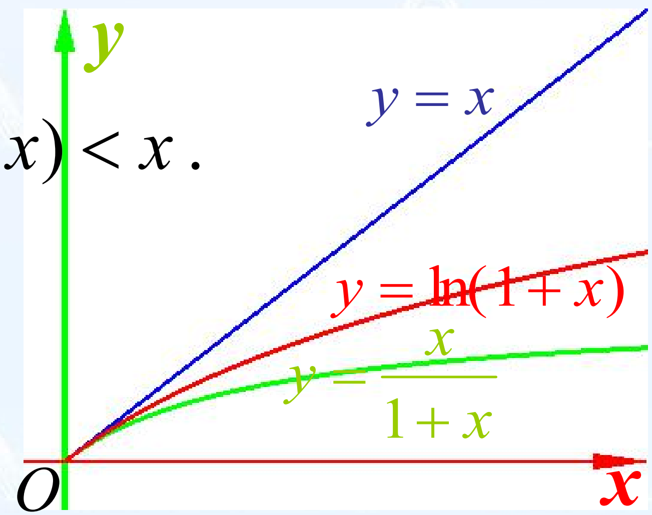
证明

例2 证明等式 $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2},\ x \in [-1, 1]$.

证明

例3 证明当 $x > 0$ 时，$\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

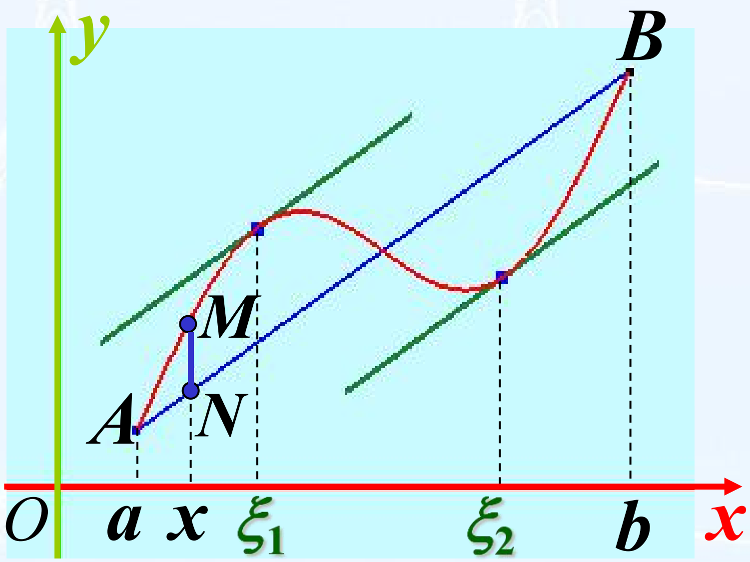
证明



三、柯西中值定理

在拉格朗日中值定理的几何意义中， 如果曲线的方程由参数方程 $\begin{cases} x = F(t) \\ y = f(t) \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$ 给出，其结论又该如何表达呢？ 此时，切线和弦 AB 的斜率分别为

$$k_{切} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}, \quad k_{弦AB} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{F(\beta) - F(\alpha)},$$



于是结论应改为

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{F(\beta) - F(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

柯西中值定理 如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a, b) 内可导;

(3) 对任一 $x \in (a, b)$, $F'(x) \neq 0$,

那么在 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

证明

例4 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在 $(0,1)$ 内可导，证明至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

证明

作业:

P 132 1,2,3,10,11

费马(1601 – 1665)

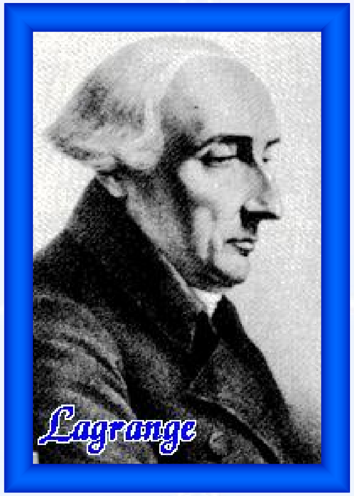
费马，P. de

法国数学家，他是一位律师，数学只是他的业余爱好. 他兴趣广泛，博览群书并善于思考，在数学上有许多重大贡献. 他特别爱好数论，他提出的费马大定理:

"当$n > 2$时，方程 $x^n + y^n = z^n$ 无整数解"

历经358年，直到1993年才由美国普林斯顿大学的安德鲁.怀尔斯教授经过十年的潜心研究才得到解决 .费马引理是后人从他研究解决最值的方法中提炼出来的.

拉格朗日 (1736 – 1813)



法国数学家. 他在方程论, 解析函数论, 及数论方面都作出了重要的贡献, 近百余年来, 数学中的许多成就都可直接或间接地追溯到他的工作, 他是对分析数学产生全面影响的数学家之一.

柯西(1789 – 1857)

柯西, A. -L.

法国数学家, 他对数学的贡献主要集中在微积分学, 复变函数和微分方程方面 . 一生发表论文800余篇, 著书 7 本 ,《柯西全集》共有 27 卷.其中最重要的是为巴黎综合学校编写的《分析教程》,《无穷小分析概论》,《微积分在几何上的应用》 等, 有思想有创建, 对数学的影响广泛而深远 . 他是经典分析的奠基人之一, 他为微积分所奠定的基础推动了分析数学的发展.