一、第一类换元积分法

二、第二类换元积分法

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$,

(2) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$,

(3) $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$,

(4) $\int \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$,

(5) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$,

(6) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$,

(7) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$,

(8) $\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$,

(9) $\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$,

(10) $\int \sec x \tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$,

(11) $\int \csc x \cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$,

(12) $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$,

(13) $\int a^x\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

$$1+\tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1+\cot^2 x = \csc^2 x$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x = 1$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

一、第一类换元积分法

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \sin 2x \, \mathrm{d}x = ?$$

$$\int \sin 3x \, \mathrm{d}x = ?$$

$$\vdots$$

定理1 设函数 $f(u)$ 具有原函数，$u=\varphi(u)$，则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\left(\int f(u)\mathrm{d}u\right)_{u=\varphi(x)}.$$

证明

如何应用换元公式求 $\int g(x)\mathrm{d}x$ 呢？

(1) 分解　$g(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x)$，　这一步最难

(2) 凑微分　$\phi'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}\phi(x)=\mathrm{d}u$，

(3) 计算　$\int f(u)\mathrm{d}u$.　要容易积出

已知$F'(x)=f(x)$，求$\int g(x)\,\mathrm{d}x$.

$\mathrm{d}\varphi(x)=\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$

分析 $\int g(x)\,\mathrm{d}x$

观察 $=\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$

变形 $=\int f(\varphi(x))\,\mathrm{d}\varphi(x)$

带入 $=F(\varphi(x))+C$

例1 求 $\int \cos(2x+3)\mathrm{d}x$.

解

例2 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$.

解

例3 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$.

解

例4 求 $\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

解

例5 求 $\int \tan x\mathrm{d}x$.

解

例6 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$.

解

常用的几种配元形式:

$$1)\ \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\,\mathrm{d}(ax+b)$$

$$2)\ \int f(x^n)x^{n-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int f(x^n)\,\mathrm{d}x^n$$

$$3)\ \int f(x^n)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int f(x^n)\,\frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x^n$$

万能凑幂法

$$4)\ \int f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\,\mathrm{d}\sin x$$

$$5)\ \int f(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)\,\mathrm{d}\cos x$$

$$6)\ \int f(\tan x)\sec^2 x\,dx = \int f(\tan x)\,d\tan x$$

$$7)\ \int f(e^x)e^x\,dx = \int f(e^x)\,de^x$$

$$8)\ \int f(\ln x)\frac{1}{x}dx = \int f(\ln x)\,d\ln x$$

例7 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+2\ln x)}$.

解

例8 求 $\int \sec x \mathrm{d}x$.

解

例9 求 $\int \sin^3 x \,\mathrm{d}x$.

解

例10 求 $\int \sin^4 x \mathrm{d}x$.

解

例11 求 $\int \sin^2 x \cos^5 x \mathrm{d}x$.

解

例12 求 $\int \sin^2 x \cos^4 x \mathrm{d}x$.

解

例13 求 $\int \tan^5 x \sec^3 x \mathrm{d}x$.

解

例14 求 $\int \cos 3x \cos 2x \mathrm{d}x$.

解

例15 求 $\int \dfrac{x+1}{x(1+x\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x$.

解

例16 求 $\int \dfrac{1}{x(x^{10}+1)}\mathrm{d}x$.

解

二、第二类换元积分法

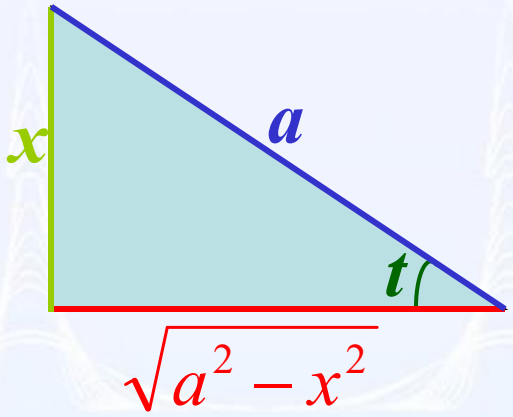
定理2 设 $x=\psi(t)$ 是单调的、可导的函数，并且 $\psi'(t)\neq 0$．又设 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 具有原函数，则有换元公式

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\left(\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t\right)_{x=\psi^{-1}(t)}.$$

证明

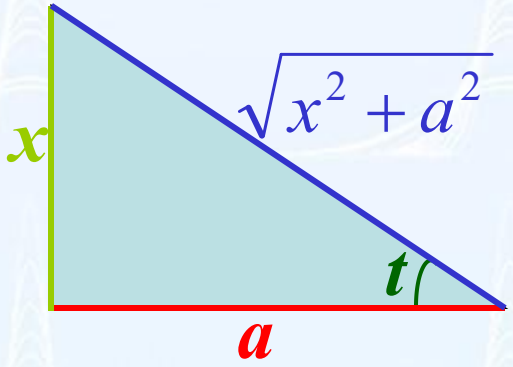
例17 求 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a > 0).$

解

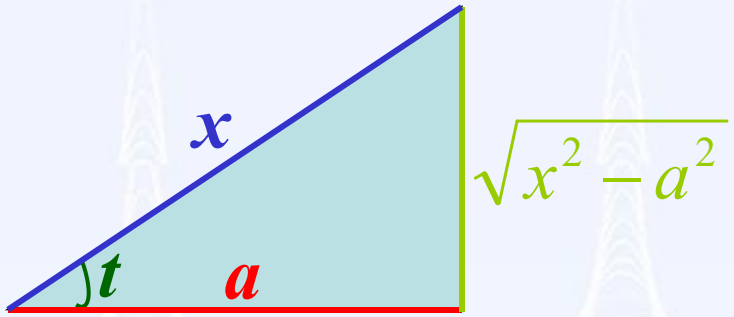


例18 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (a > 0).$

解



例19 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad (a>0).$



解

例20 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}.$

解

第二换元积分法常用的4种代换

(1) $x = a\sin t$ 用于被积函数中含有 $\sqrt{a^2 - x^2}$,

(2) $x = a\tan t$ 用于被积函数中含有 $\sqrt{x^2 + a^2}$,

(3) $x = a\sec t$ 用于被积函数中含有 $\sqrt{x^2 - a^2}$,

(4) $x = \frac{1}{t}$ 用于将被积函数分母中的高次因子翻到分子上去，使分母的次数降低.

基本积分表的扩充

(14) $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C$,

(15) $\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$,

(16) $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$,

(17) $\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$,

(18) $\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$,

(19) $\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$,

$$(20)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C,$$

$$(21)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,$$

$$(22)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C,$$

$$(23)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C,$$

$$(24)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$$

例21 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}$.

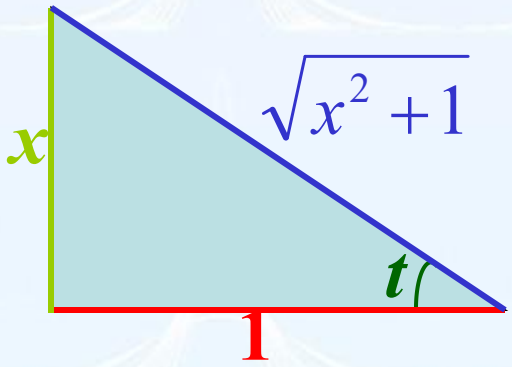
解

例22 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}$.

解

例23 求 $\int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$.

解



课后作业

P 207

（第一换元积分）：

1（2,4,6,8,10,12,14），

2（1,2,5,6，7,10,12,14,15,16,18,20,21,24,26,29,30）