第一节 定积分的元素法

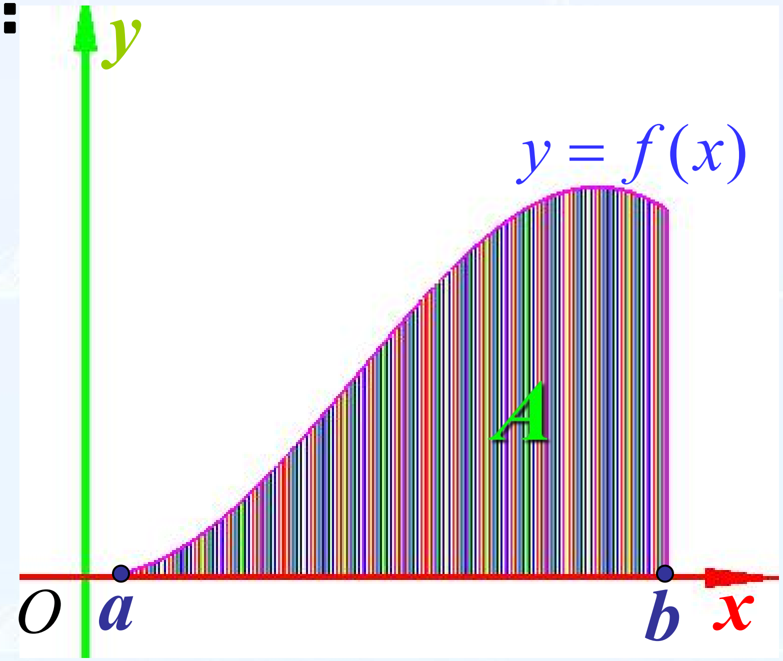
一、引例

二、元素法的步骤

一、引例

引例 曲边梯形的面积

在第五章第一节中，我们已经知道如图所示的曲边梯形的面积可以用定积分来计算：

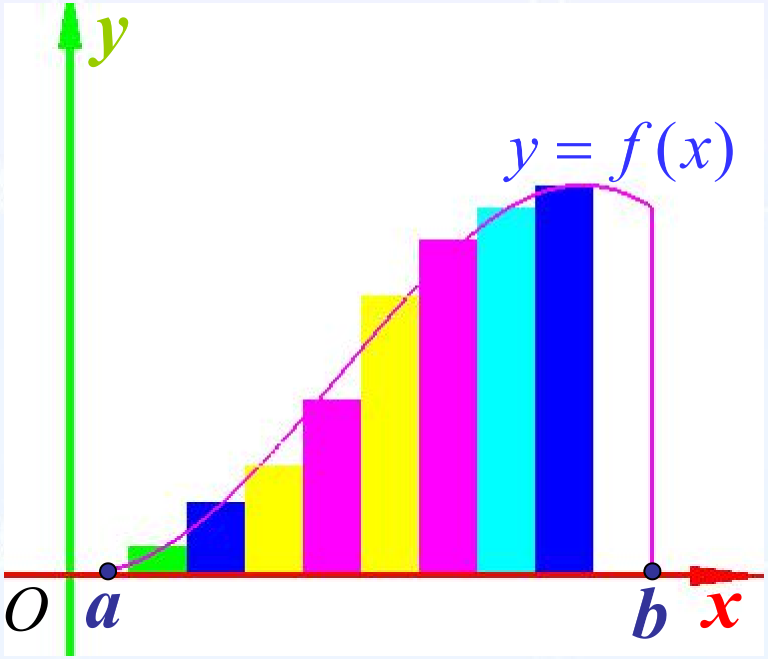


$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

得到上述计算公式的步骤如下：

Step1 分割 把区间 $[a, b]$ 任意分成 n 个小区间，相应的大的曲边梯形也就分成了 n 个小的曲边梯形，

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \;;$$



Step2 近似

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \quad (x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)\;;$$

Step3 求和

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \;;$$

Step4 取极限 $A = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \,.$

在工程技术中，有很多量的计算，如旋转体的体积、平行截面面积为已知的立体立体、曲线构件的长度、变力沿直线所作的功、水压力、引力等，这些量的计算都要用这种方法转化为定积分的计算．因此对这种方法要进行研究和简化．研究和简化的结果就产生了元素法．

二、元素法

设所求量为 U，且 U 满足以下两个条件：

(1) U 与一个变量比如 x 的变化区间 $[a, b]$ 有关;

(2) U 对于区间 $[a, b]$ 具有可加性：如果把区间$[a, b]$分成许多部分区间，则 U 相应的分成许多部分量，而 U 等于所有部分量的和.

那么 U 可用以下的元素法计算.

元素法的步骤:

Step1 选取积分变量 选择一个变量例如 x 作为积分变量，并确定它的变化区间 $[a,b]$;

Step2 求元素 设想把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，取其中任一小区间并记作 $[x, x+\Delta x]$，求出相应于这个小区间的部分量 ΔU 的近似值

U的元素

$$\boxed{\mathrm{d}U = f(x)\,\mathrm{d}x\ ;}$$

Step3 构造定积分 $U = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.