第一节 矩阵的概念

矩阵的背景

二维表格

工厂\产品	I	II	III	IV
1	13	34	54	67
2	11	38	61	59
3	12	32	47	74

数据的位置和值

13	34	54	67
11	38	61	59
12	32	47	74

长方形数表

M n个变量 x_1, x_2, \dots, x_n 与m个变量 y_1, y_2, \dots, y_m 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots & \dots & \dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

表示一个从变量 x_1, x_2, \dots, x_n 到变量 y_1, y_2, \dots, y_m 的 线性变换. 其中 a_{ij} 为常数.

$$\begin{cases} y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n, \\ y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n, \\ y_m = a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n. \\ \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
系数矩阵

矩阵概念的引入

1. 线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的解取决于

系数
$$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$$
,

常数项
$$b_i(i=1,2,\cdots,n)$$

线性方程组的系数与常数项按原位置可排为

$$egin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

对线性方程组的研究可转化为对这张表的研究.

矩阵的定义

由 $m \times n$ 个数 a_{ij} $(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ 排成的 m行 n列的数表

$$a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n} \\
 a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n} \\
 \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
 a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}$$

称为 $m \times n$ 矩阵. 简称 $m \times n$ 矩阵. 记作

简记为
$$A = A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n} = (a_{ij}).$$

这 $m \times n$ 个数称为A的元素,简称为元.

元素全是实数的矩阵称为实矩阵 元素中存在复数的矩阵称为复矩阵.

矩阵的记法

小括号和中括号是矩阵的标志性符号

(2)
$$(a_{ij})$$
, (b_{ij}) , (c_{ij}) ,

(3)
$$A = A_{m \times n}$$
, $(a_{ij})_{m \times n}$

例:
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$
 $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

例如
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -9 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$
 是一个 2×4 实矩阵

是一个 3×1 矩阵 (2 3 5 9)

是一个1×4 矩阵 (6)

是一个1×1矩阵

几种特殊矩阵

(1)行数与列数都等于n 的矩阵A, 称为n 阶方阵 也可记作 A_n .

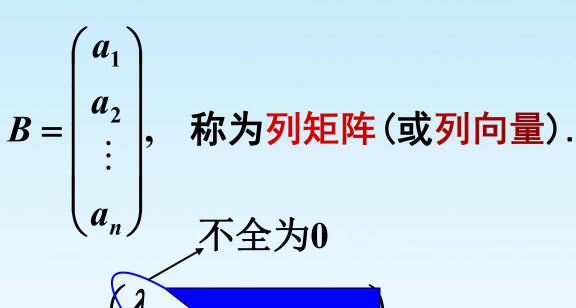
例如
$$\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
 是一个3 阶方阵.

(2) 只有一行的矩阵

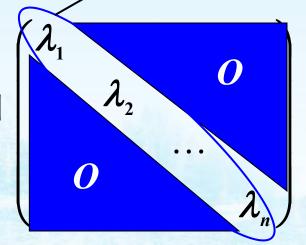
$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

称为行矩阵(或行向量)

只有一列的矩阵



(3) 形如



的方阵, 称为对角矩阵(或对角阵)

记作
$$A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

(4) 元素全为零的矩阵称为零矩阵, $m \times n$ 零矩阵记作 $o_{m \times n}$ 或 o.

注意不同阶数的零矩阵是不相等的

例如
$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\neq (0 \quad 0 \quad 0).$$

例

$$O_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O_{3\times 2} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

• 当m=n时,称矩阵为n阶矩阵或n阶方阵。 方阵就是行数和列数相同的矩阵。

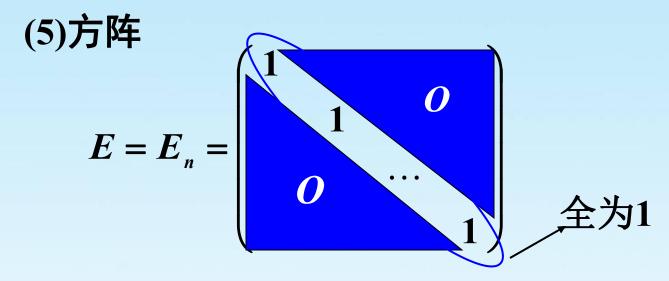
例: 3阶方阵
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

m=n=1,一阶矩阵可以看作一个数。

• 矩阵运算---负矩阵,类似于向量的负向量:

定义: $A = (a_{ij})$, 则A 的负矩阵为 $-A = (-a_{ij})$.

例:
$$-\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$



称为单位矩阵(或单位阵)

- 二、同型矩阵与矩阵相等的概念
 - 1. 两个矩阵的行数相等, 列数相等时, 称为同型矩阵.

例如
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$
与 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ 为同型矩阵.

2. 两个矩阵 $A = (a_{ij}) 与 B(b_{ij})$ 为同型矩阵,并且对应元素相等,即

$$a_{ij} = b_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n),$$

则称矩阵A = B.

例 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & x & 3 \\ y & 1 & z \end{pmatrix},$$

已知 A = B,求 x, y, z.

解 : A = B,

x = 2, y = 3, z = 2.

小结

(1)矩阵的概念 m行n列的一个数表

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

