彭杰

第四节　行列式按行（列）展开

一、余子式与代数余子式

例

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11} & a_{12} & a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}} + \underline{a_{13}a_{21}a_{32}} - \underline{a_{11}a_{23}a_{32}} - \underline{a_{12}a_{21}a_{33}} - \underline{a_{13}a_{22}a_{31}},$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

定义 在 n阶行列式中，把元素 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}.

记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式.

例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}.$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}.$$

$$M_{44}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{44}=(-1)^{4+4}M_{44}=M_{44}.$$

行列式的每个元素分别 对应着一个余子式和一个代数余子式 .

代数余子式在余子式前面所乘的符号有以下规律：

$$\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

定理1　一个 n 阶行列式，如果其中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都为零，那么这行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即 $D = a_{ij}A_{ij}$.

例如 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

$$= a_{33}(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

证　当 a_{ij} 位于第一行第一列时，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

即有

$$D=\sum(-1)^{\tau(1p_2p_3\cdots p_n)}a_{11}a_{2p_2}\ldots.a_{np_n}=a_{11}\sum(-1)^{\tau(p_2p_3\cdots p_n)}a_{2p_2}\ldots.a_{np_n}$$

$$=a_{11}M_{11}$$

又　$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}$,

从而　$D=a_{11}A_{11}.$

同理，可证一般情形

例1

计算行列式常用方法：化零，展开.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

解 $$D=(-1)^{3+3}3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{1+2}2\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-6)\cdot(-7)=42$$

例 2　计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

解　$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

$$=2\cdot(-1)^{2+5}\begin{vmatrix}5 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 3 & 1\\ 0 & -4 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 5\end{vmatrix}=-2\cdot 5\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ -4 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}\begin{matrix}r_1+r_3\\ \\ r_2+(-2)r_1\end{matrix}$$

$$=-10\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & -7 & 2\\ 0 & 6 & 6\end{vmatrix}=-10\cdot(-2)\begin{vmatrix}-7 & 2\\ 6 & 6\end{vmatrix}$$

$$=20(-42-12)=-1080$$

二、行列式按行（列）展开法则

定理2 行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

证

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
+ \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}
$$

$$
(i = 1, 2, \cdots, n)
$$

例 3 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 7 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

解 按第一行展开，得

$$D=-3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}+(-5)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+3\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 7 \end{vmatrix}=27$$

例 3 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}-3 & -5 & 3\\ 0 & -1 & 0\\ 7 & 7 & 2\end{vmatrix}$

解：按第二行展开，得

$$D=-1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-3 & 3\\ 7 & 2\end{vmatrix}=27$$

定理3 行列式任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j.$$

证 把行列式 $D=\det(a_{ij})$ 按第 j 行展开，有

$$a_{j1}A_{j1}+\cdots+a_{jn}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$
a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},
$$

第 i 行

第 j 行

相同

当 $i \neq j$ 时,

$$
a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad (i\neq j).
$$

同理 $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad (i\neq j).$

关于代数余子式的性质

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, 当 i = j, \\ 0, 当 i \neq j; \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, 当 i = j, \\ 0, 当 i \neq j; \end{cases}$$

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, 当 i = j, \\ 0, 当 i \neq j. \end{cases}$

例4

$$D=\begin{vmatrix}2 & -5 & 1 & 2\\ 3 & 7 & -1 & 4\\ 5 & -9 & 2 & 7\\ 4 & 6 & 1 & 2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 2\\ -1 & 7 & 3 & 4\\ 2 & -9 & 5 & 7\\ 1 & 6 & 4 & 2\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 5 & 6\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 11 & 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 5 & 6\\ 0 & 11 & 2 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -33 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -33 \end{vmatrix} = -99$$

例4

$$D=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\4&6&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\5&2&0&6\\1&1&0&3\\2&11&0&0\end{vmatrix}$$

$$=1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5&2&6\\1&1&3\\2&11&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&0&0\\1&1&3\\2&11&0\end{vmatrix}$$

$$=3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&3\\11&0\end{vmatrix}=3\cdot(-33)=-99$$

例5 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}$$

解：将D_n按第一列展开

$$D_n=x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$=xD_{n-1}+(-1)^{n+1}\cdot a_n\cdot(-1)^{n-1}=xD_{n-1}+a_n\ ,$$

这里 D_{n-1} 与 D_n 有相同的结构，但阶数是 **n-1**的行列式。

现在, 利用递推关系式计算结果. 对此, 只需反复进行代换, 得

$$D_n = x\left(xD_{n-2} + a_{n-1}\right) + a_n = x^2 D_{n-2} + a_{n-1}x + a_n$$

$$= x^2\left(xD_{n-3} + a_{n-2}\right) + a_{n-1}x + a_n = \cdots\cdots$$

$$= x^{n-1}D_1 + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \ ,$$

因 $D_1 = \left|x + a_1\right| = x + a_1$

故 $D_n = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$

例6 证明范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j). \qquad (1)$$

证 用数学归纳法证明，当 $n=2$ 时

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{2\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j),$$

结论成立;

假设（1）对于 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立，

下面证明对 n 阶行列式也成立

从 D_n 的最后一行开始，自下而上，依次将上一行的 $(-x_1)$ 倍加到下一行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

按第 1列展开

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

并把每列的公因子 $(x_i - x_1)$ 提出，就有

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

n-1阶范德蒙德行列式

$$\therefore \quad D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\cdot \prod_{n \geq i > j \geq 2}(x_i - x_j)$$

$$= \prod_{n \geq i > j \geq 1}(x_i - x_j).$$

例7 计算
$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$$

解 每一行提取各行的公因子，于是得到

$$D_n = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

上面等式右端行列式为n阶范德蒙行列式，由范德蒙行列式知

$$D_n = n! \prod_{n \ge i > j \ge 1} (i - j)$$

$$\begin{aligned} &= n!(2-1)(3-1)(4-1)\cdots(n-1) \\ &\qquad \cdot(3-2)(4-2)\cdots(n-2) \\ &\qquad\quad \cdot(4-3)\cdots(n-3) \\ &\qquad\qquad \vdots \\ &\qquad\qquad [n-(n-1)] \\ &= n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!. \end{aligned}$$

升阶法

例8 $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -x & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & y & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = x^2 y^2$$

例9 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ 第四行各元素余子式之和为 $\underline{-28}$

分析 以 M_{ij} 表示 D 中元素 a_{ij} 的余子式，则有

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44} = -A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 28\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -28$$