第三节 逆矩阵

设A，B都是n阶方阵，则：

$$|AB| = |A||B|$$

n阶方阵行列式的运算规律

（A B是n阶方阵矩阵，$\lambda \in R$）

（1）$\left|A^T\right| = |A|$

（2）$|\lambda A| = \lambda^n |A|$

（3）$|AB| = |A||B| = |BA|$

（4）$\left|A^n\right| = |A|^n$

注 $|A+B| \overset{?}{=} |A|+|B|$

例1 已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\3&2&4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&3&0\\0&0&4\end{pmatrix},$

求 $|AB|,|A^3|,|3A|.$

解 易见 $|A|=6,|B|=20,$

所以 $|AB|=|A||B|=120$

$|A^3|=|A|^3=216$

$|3A|=3^3|A|=162$

例 2 已知 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$,且满足 $BA=B+2E$

求 $|B|$

解 $\because\ BA=B+2E$

$\therefore\ BA-B=2E$

$A-E=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$\therefore\ B(A-E)=2E$

$\therefore\ |B(A-E)|=|B|\cdot|A-E|=|2E|$

$|A-E|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2$

$\therefore\ 2|B|=2^2|E|=4$ $\qquad\therefore\ |B|=2$

概念的引入:

1、数　在数的运算中，当数 $a\neq 0$ 时,有

$$ab = ba = 1,$$

则 $b=\dfrac{1}{a}$ 称为 a 的倒数，（或称为 a 的逆）；

也可记为 $b = a^{-1}$

2、矩阵　在矩阵的运算中，单位阵 E 相当于数的乘法运算中的 1，那么，对于矩阵 A，如果存在一个矩阵 B，有

$$AB = BA = E,$$

则矩阵 B 称为 A 的逆矩阵，A 称为可逆矩阵.

逆矩阵的定义

定义1 对矩阵 A，若存在矩阵 B，使得

$$AB = BA = E$$

则称矩阵 A 是可逆的，且矩阵 B 称为 A 的逆矩阵，记作 $B = A^{-1}$

例： 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$

$\because AB = BA = E,$

$\therefore B$是A的一个逆矩阵.

说明：若 A 是可逆矩阵，则 A 必为方阵.

证明：设$B_{s\times t}$是$A_{m\times n}$的逆矩阵，则

$$(A\ B)_{m\times t}=(B\ A)_{s\times n}=E$$

$$\therefore\ n=s,t=m\qquad m=s,t=n\qquad \therefore\ m=n=s=t$$

定理1 若A是可逆矩阵，则A的逆矩阵是唯一的.

证明： 设B、C都是A的逆矩阵，则

$AB=BA=E$，$AC=CA=E$

从而$B=EB=(CA)B=C(AB)=CE=C$

逆矩阵的求法一：定义法

例1：设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, 求$A$的逆矩阵.

解：设 $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 是 A 的逆矩阵,

则 $$AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2a+c & 2b+d\\ -a & -b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+c=1, \\ 2b+d=0, \\ -a=0, \\ -b=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0, \\ b=-1, \\ c=1, \\ d=2. \end{cases}$$

又因为

$$\overset{AB}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} = \overset{BA}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

思考：所有的非零方阵都有可逆矩阵吗?

考虑 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

设$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，使得$AB = BA = E_2$

那么 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

上式出现矛盾。 所以 A 不可逆

定义2

行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵A 的伴随矩阵.

注意:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

例2：求方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵，并计算 AA^*

解 $\because\ |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-3,$$

同理可得 $A_{13}=2,\ A_{21}=6,\ A_{22}=-6,\ A_{23}=2,$

$A_{31}=-4,\ A_{32}=5,\ A_{33}=-2,$

得
$$A^*=\begin{pmatrix}2 & 6 & -4\\ -3 & -6 & 5\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix},$$

故
$$AA^*=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 6 & -4\\ -3 & -6 & 5\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=|A|E$$

定理2

设A是n阶方阵，A^*是A的伴随矩阵，则

$$AA^* = A^*A = |A|E.$$

非奇异矩阵： $|A| \neq 0$ （满秩矩阵）

奇异矩阵： $|A| = 0$ （降秩矩阵）

矩阵可逆的判别定理及求法

定理3 $\boxed{n\text{阶方阵}A\text{可逆当且仅当}\ |A| \neq 0}$

且$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*$，其中 A^*为矩阵 A的伴随矩阵．

证明：$(\Rightarrow)$

A可逆，则有 A^{-1}，使 $AA^{-1} = E$

两边取行列式，得 $|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = 1$

因此，$|A| \neq 0$

$$AA^* = A^*A = |A|E.$$

$(\Leftarrow)$

因为$AA^* = |A|E$，当$|A| \neq 0$时，有$A(\frac{A^*}{|A|}) = E$，

又因为$A^*A = |A|E$，当$|A| \neq 0$时，有$(\frac{A^*}{|A|})A = E$，

所以$A(\frac{A^*}{|A|}) = (\frac{A^*}{|A|})A = E$，所以$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

逆矩阵的求法二：伴随矩阵法

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*,\ \text{其中}\ A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 A^*为A的伴随矩阵，

A_{ij}为行列式 $|A|$中元素 a_{ij}的代数余子式 .

例： $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$， 当$|A|=ad-bc\neq 0$，有

$$A^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

例3：求方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解 $\because\ |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq 0,\therefore\ A^{-1}$存在.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-3,$$

同理可得 $A_{13}=2,\ A_{21}=6,\ A_{22}=-6,\ A_{23}=2,$

$A_{31}=-4,\ A_{32}=5,\ A_{33}=-2,$

得 $$A^*=\begin{pmatrix}2 & 6 & -4\\ -3 & -6 & 5\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix},$$

故

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 6 & -4\\ -3 & -6 & 5\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3/2 & -3 & 5/2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

例4　求下列矩阵的逆，其中

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & a_3 & \\ & & & a_4 \end{pmatrix} \qquad (\prod a_i \neq 0)$$

解　$\because |A|=\prod a_i \neq 0 \quad \therefore A$ 可逆　　$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$

$$A^{-1}=\frac{1}{\prod a_i}\begin{pmatrix} a_2a_3a_4 & & & \\ & a_1a_3a_4 & & \\ & & a_1a_2a_4 & \\ & & & a_1a_2a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & a_3^{-1} & \\ & & & a_4^{-1} \end{pmatrix}$$

练习 已知$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&4&0\\0&0&0&0&5\end{pmatrix}$求$A^{-1}$.

解 因$|A|=5!\neq 0$, 故A^{-1}存在.

由伴随矩阵法得 $A^{-1}=A^{*}/|A|$,

$$
=\frac{1}{5!}\begin{pmatrix} 2\cdot3\cdot4\cdot5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1\cdot3\cdot4\cdot5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\cdot2\cdot4\cdot5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\cdot2\cdot3\cdot5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\cdot2\cdot3\cdot4 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}.
$$

练习 求矩阵的逆

$$\begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & a_3 & & \\ a_4 & & & \end{pmatrix} \quad (\prod a_i \neq 0)$$

答案

$$\begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & a_3 & & \\ a_4 & & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & & a_4^{-1} \\ & & a_3^{-1} & \\ & a_2^{-1} & & \\ a_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$$

推论： 设A、B为同阶方阵，若 $AB=E$，则方阵A和B都可逆，且$A^{-1}=B$，$B^{-1}=A$

证明：若$AB=E$，则$|AB|=|A||B|=1$

所以$|A|\neq 0$，所以A^{-1}存在,有

$$B=EB=(A^{-1}A)B=A^{-1}(AB)=A^{-1}E=A^{-1}$$

同理，B可逆，且$A=B^{-1}$

注： 判断B是否为A的逆矩阵，

只需验证$AB=E$和$BA=E$中的一个即可

例： 设方阵A满足方程$A^2-A-2E=0$,证明：$A, A+2E$都可逆,并求它们的逆矩阵.

证： 由$A^2-A-2E=0$,

A^{-1}

得$A(A-E)=2E \Rightarrow A\dfrac{A-E}{2}=E$

所以 A 可逆，且 $A^{-1}=\dfrac{1}{2}(A-E)$.

又由$A^2-A-2E=0$

$$(A+2E)(A-3E)+4E=0$$

$(A+2E)^{-1}$

$$(A+2E)\left[-\frac{1}{4}(A-3E)\right]=E$$

所以$A+2E$可逆,$(A+2E)^{-1}=-\dfrac{1}{4}(A-3E)$

消去律

- 结论1：若$AB=AC$, 且A可逆，则$B=C$.
- 证：以A^{-1}左乘等式$AB=AC$即可。

- 结论2：若$AC=BC$，且C可逆，则$A=B$.

3. 可逆矩阵的性质

性质1 若A可逆,则A^{-1}亦可逆,且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A.$

性质2 若A可逆,数$\lambda\neq 0$,则λA可逆,且

$$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}.$$

性质3 若A,B为同阶方阵且均可逆,则AB亦可逆,且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

证明: $$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)=A\left(BB^{-1}\right)A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E,$$

$$\therefore (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

推广 $$(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

性质3 若A可逆,则A^T亦可逆,且$\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$.

证明: $\because\ A^T\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^{-1}A\right)^T=E^T=E,$

$\therefore\ \left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T.$

另外, 当$|A|\neq 0$时,定义

$$A^0=E,\quad A^{-k}=\left(A^{-1}\right)^k.\quad (k\text{为正整数})$$

当$|A|\neq 0,\lambda,\mu$为整数时,有

$$A^\lambda A^\mu=A^{\lambda+\mu},\quad \left(A^\lambda\right)^\mu=A^{\lambda\mu}.$$

性质5 若 A 可逆，则有 $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|} = |A|^{-1}$.

证明： $\because AA^{-1} = E$

$\therefore |A|\left|A^{-1}\right| = 1$

因此 $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|} = |A|^{-1}$

性质6： 设 A 为可逆矩阵，则 A 的伴随矩阵 A^* 也可逆，且 $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$.

证 A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$,

由 $AA^* = A^*A = |A|E$ 得到

$$A^*(\frac{1}{|A|}A) = (\frac{1}{|A|}A)A^* = E.$$

从而 $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A.$

注： $(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$

例如：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

A,B可逆，但$A+B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$不可逆

A,C可逆，$A+C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$可逆，但$A^{-1}+C^{-1}\neq(A+C)^{-1}$

例3：设A^*是4阶矩阵A的伴随矩阵，若$|A|=3$，求$|A^*|$.

解：$\because AA^*=|A|E_4$

$\therefore |A||A^*|=|AA^*|=||A|E_4|=|A|^4.1=|A|^4$

$\therefore \quad |A^*|=|A|^3=3^3=27$

一般有　　若A为n阶方阵，且$|A|\neq 0$　（$n\geq 2$）

则有　　$|A^*|=|A|^{n-1}$

例 设A为3阶方阵，且$|A|=\frac{1}{8}$，求$\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-8A^*\right|$.

解 $\because\ A^*A=|A|E,\quad \therefore\ A^*=|A|A^{-1}.$

$$\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-8A^*\right|=\left|3A^{-1}-8|A|A^{-1}\right|$$

$$=\left|3A^{-1}-A^{-1}\right|$$

$$=\left|2A^{-1}\right|$$

当A为3阶时，

$$=2^3\left|A^{-1}\right|$$

$$=2^3\times|A|^{-1}$$

$$=64$$

4. 用逆矩阵求解线性方程组

线性方程组 $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

等价于矩阵方程：$AX=b$.

矩阵方程1：$AX=B$，若A可逆，则$X=A^{-1}B$.

矩阵方程2：$XA=B$，若A可逆，则$X=BA^{-1}$.

警告： 在任何情形下，$\dfrac{B}{A}$都是错误的。

考试得 **0 分！**

因为我们不知道 B/A 表示 $X=A^{-1}B$ 还是 BA^{-1}.

例 解矩阵方程 (1) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;

(2) $X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

解 (1) $$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

给方程两端左乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$,

得 $$\overset{E}{\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}}} X = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -28 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$(2)\ X\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

给方程两端右乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$,

得 $$X=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 9 & -5 \\ -2 & -8 & 6 \\ -4 & -14 & 9 \end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

给方程两端左乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$,

给方程两端右乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$，

得 $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -75 & 30 \\ 9 & 52 & -21 \\ 21 & 120 & -47 \end{pmatrix}.$$

例： 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix},$

求矩阵X使满足 $AXB=C.$

解 $\because |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq 0,\quad |B|=\begin{vmatrix}2&1\\5&3\end{vmatrix}=1\neq 0,$

$\therefore\ A^{-1}, B^{-1}$都存在.

且 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$,

又由 $AXB=C \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{E}X\underbrace{BB^{-1}}_{E}=A^{-1}CB^{-1}$

$\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}.$

于是 $X=A^{-1}CB^{-1}$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

例： 设三阶矩阵A,B满足关系：

$$A^{-1}BA=6A+BA, \text{且} A=\begin{pmatrix} 1/2 & & O \\ & 1/4 & \\ O & & 1/7 \end{pmatrix} \text{求} B.$$

解：

$$A^{-1}BA-BA=6A \Rightarrow \left(A^{-1}-E\right)BA=6A$$

$$\Rightarrow \left(A^{-1}-E\right)BAA^{-1}=6AA^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(A^{-1}-E\right)}B=6E$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 4 & \\ & & 7 \end{pmatrix}$$

而 $A^{-1}-E=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}$

所以 $\left(A^{-1}-E\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/3&0\\0&0&1/6\end{pmatrix}$

$\boxed{\left(A^{-1}-E\right)B=6E}$ 左乘矩阵 $\left(A^{-1}-E\right)^{-1}$

则 $B=6\left(A^{-1}-E\right)^{-1}=6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/3&0\\0&0&1/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$

小结：

1. 逆矩阵的概念及运算性质.

2. 逆矩阵 A^{-1} 存在 $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0.$

3. 逆矩阵的计算方法：

(1)定义法;

(2)利用公式 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$;

(3)初等变换法(以后介绍).