

第五节 克拉默法则



非齐次与齐次线性方程组的概念

[illegible]

若常数项 b_1, b_2, \dots, b_n 不全为零, 则称此方程组为**非齐次线性方程组**; 若常数项 b_1, b_2, \dots, b_n 全为零, 此时称方程组为**齐次线性方程组**.

一、克拉默法则

如果线性方程组

[illegible]

的系数行列式不等于零, 即 $D =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

那么线性方程组(1)有解，并且解是唯一的，解可以表为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

其中 D_j 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式, 即

$$D_j = \begin{array}{c|cccc} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ & \dots\dots\dots & & & & & & \\ & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

齐次线性方程组的相关定理

[illegible]

定理 如果齐次线性方程组 (2) 的系数行列式 $D \neq 0$ 则齐次线性方程组 (2) 只有零解.

定理 如果齐次线性方程组 (2) 有非零解, 则它的系数行列式必为零.

系数行列式 $D = 0$

[illegible]

有非零解.

例1 用克拉默则解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解

$$D = \left| \begin{array}{cccc|cc} 2 & 1 & -5 & 1 & 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 & 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 & 0 & 7 & -7 & 12 \end{array} \right| \begin{array}{c} \\ r_1 - 2r_2 \\ \hline r_4 - r_2 \\ \end{array}$$

$$= - \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \frac{c_1 + 2c_2}{c_3 + 2c_2} - \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \\ = 81,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} \\ = -108,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -27,$$

$$\therefore x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{81}{27} = 3,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-27}{27} = -1,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 27,$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-108}{27} = -4,$$

$$x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{27}{27} = 1.$$

例2 问 λ 取何值时, 齐次方程组

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0, \end{cases}$$

有非零解?

分析: 方程组有非零解 $\iff D = 0$

解

$$D = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3+\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda-3 & -\lambda^2+2\lambda+3 \\ 2 & 1-\lambda & 2\lambda-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} \lambda-3 & -\lambda^2+2\lambda+3 \\ 1-\lambda & 2\lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$$

齐次方程组有非零解，则 $D = 0$

所以 $\lambda = 0, \lambda = 2$ 或 $\lambda = 3$ 时齐次方程组有非零解。

三、小结

1. 用克拉默法则解方程组的两个条件

- (1) 方程个数等于未知量个数;
- (2) 系数行列式不等于零.

2. 克拉默法则建立了线性方程组的解和已知的系数与常数项之间的关系.