

第三节 分部积分法

一、分部积分公式

二、举例

一、分部积分公式

由第一节我们已知道，对应于一个求导公式，就有一个积分公式，在第二节中，利用复合函数的求导法则得到了换元积分法，在本节中，将利用两个函数乘积的求导法则，来推导另一个求积分的基本方法 **分部积分法**.

第三节 分部积分法

设函数 $u = u(x)$ 及 $v = v(x)$ 具有连续导数，那么有

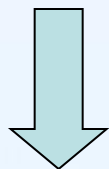
$$(uv)' = u'v + uv',$$

移↓项

$$uv' = (uv)' - u'v,$$

两边↓积分

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx,$$



$$\int u dv = uv - \int v du.$$

分部积分公式

$$\int u dv = uv - \int v du$$

分部积分公式的使用

应用分部积分法时，恰当选取 u 和 dv 是一个关键，选取 u 和 dv 一般要考虑下面两点：

- (1) v 要容易求得；
- (2) $\int v du$ 要比 $\int u dv$ 容易积出.

第三节 分部积分法

$$\int u dv = uv - \int v du$$

当被积函数是两类基本初等函数的乘积时，可用如下的办法来选择 u 和 dv ：

选择 u 和 dv 时，可按照反三角函数、对数函数、幂函数、指数函数、三角函数的顺序（即“**反、对、幂、指、三**”的顺序），把排在前面的那类函数选作 u ，而把排在后面的那类函数选作 v' 。

二、举例

例1 求 $\int x \cos x dx$.

解 

例2 求 $\int x^2 e^x dx$.

解 

例3 求 $\int x \ln x dx$.

解 

例4 求 $\int \arcsin x dx$.

解 

例5 求 $\int e^x \sin x dx$.

解 

例6 求 $\int \sec^3 x dx$.

解 

练习 计算下列不定积分

1. $\int \ln x \, dx.$

2. $\int x e^{-x} \, dx.$

3. $\int (\arcsin x)^2 \, dx.$

4. $\int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx \quad (a > 0).$

解 

例7 求 $\int e^{\sqrt{x}} \, dx.$

解 

例8 求 $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}.$

解 

第三节 分部积分法

思考 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{\cos x}{x}$, 求 $\int x f'(x) dx$.

$$\begin{aligned}\text{解: } \int x f'(x) dx &= \int x df(x) \\ &= x f(x) - \int f(x) dx \\ &= x \left(\frac{\cos x}{x} \right)' - \frac{\cos x}{x} + C \\ &= -\sin x - 2 \frac{\cos x}{x} + C\end{aligned}$$

$$\frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$$

说明: 此题若先求出 $f'(x)$ 再求积分反而复杂.

$$\int x f'(x) dx = \int \left(-\cos x + \frac{2 \sin x}{x} + \frac{2 \cos x}{x^2} \right) dx$$

思考与练习

1、 设 $f(x) = \begin{cases} x \ln(1+x^2), & x \geq 0 \\ (x^2 + 2x - 3)e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$, 求 $\int f(x)dx$.

2、 设 $f'(e^x) = a \sin x + b \cos x$, (a, b 为不同时为零的常数), 求 $f(x)$.

3、 设当 $x \neq 0$ 时, $f'(x)$ 连续, 求
$$\int \frac{xf'(x) - (1+x)f(x)}{x^2 e^x} dx.$$

第三节 分部积分法

作业

P213 1 (**5,8,10,12,19,20, 23,24**)