## 一、函数的极值及其求法

## 二、最大值最小值问题

# 一、函数的极值及其求法

## 1. 函数极值的定义

**定义** 设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，如果对该邻域内的任一 $x$ ($x \neq x_0$)，有

$$f(x) < f(x_0) \ (\text{或} \ f(x) > f(x_0)),$$

那么就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个**极大值**(或**极小值**).

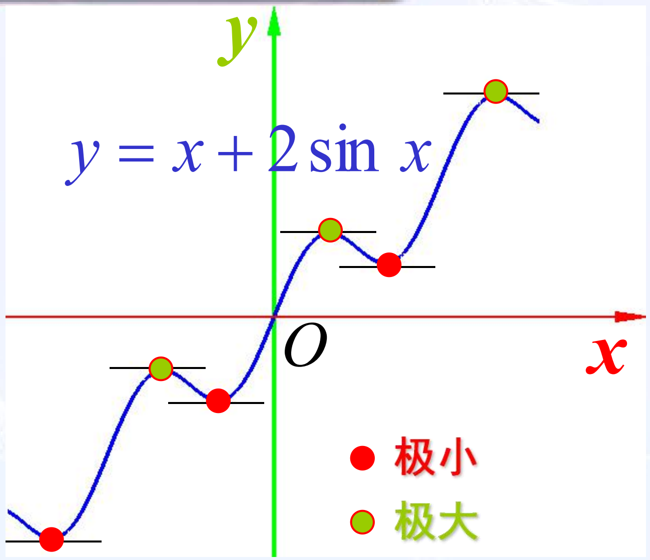
函数的极大值与极小值统称为**极值**，使函数取得极值的点称为**极值点**.

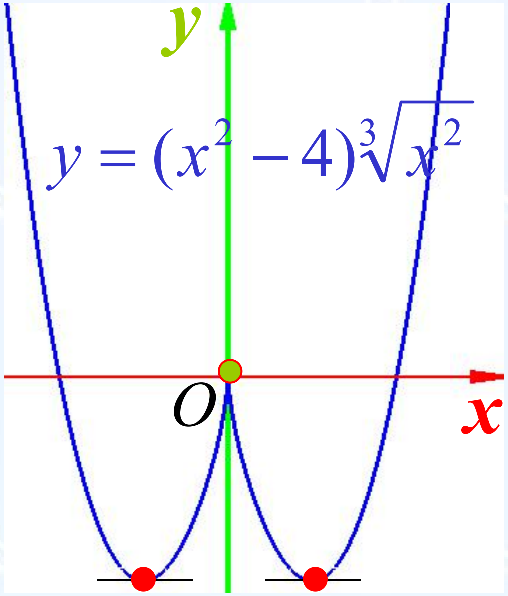
## 几点说明

(1) 极值是一个局部概念，在闭区上连续的函数，可能有多个极大值或极小值，并且极大值可能小于极小值.

(2) 极大值不一定是最大值，极小值也不一定是最小值.

(3) 极值点可能是驻点或不可导点.

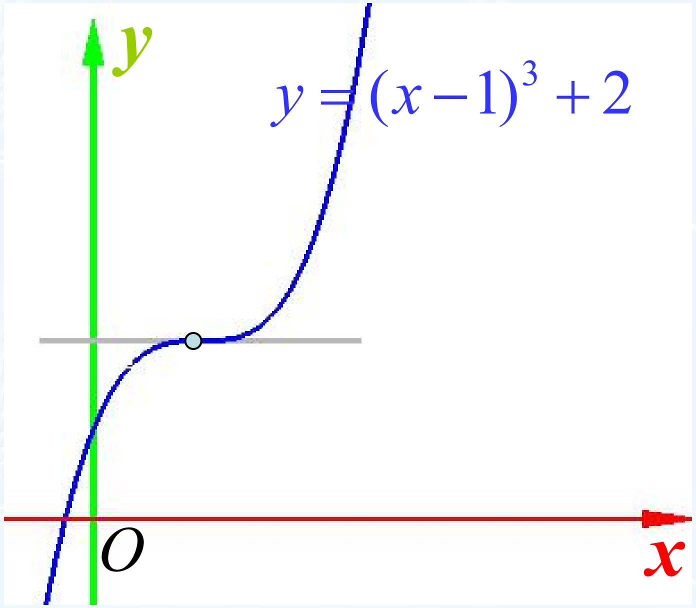


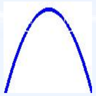
## 2. 极值存在的条件

**定理1(必要条件)** 设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导，且在 $x_0$ 处取得极值，那么 $f'(x_0)=0$ .

定理1说明：可导函数的极值点一定是驻点，但驻点不一定是极值点. 例如函数 $y=(x-1)^3+2$ 在驻点 $x=1$ 处不取得极值，因为该函数在其定义域内是单调增函数.



**定理2(第一充分条件)** 设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 连续，且在 $x_0$ 的某去心邻域内可导.

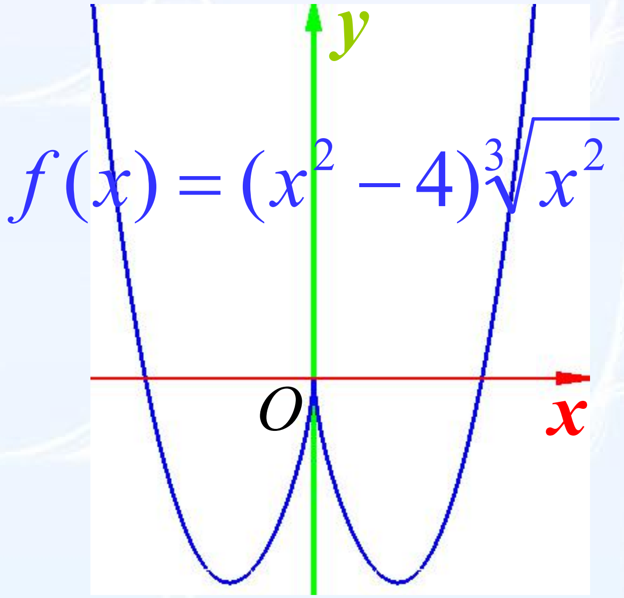
(1) 若 $x < x_0$ 时，$f'(x) > 0$，而 $x > x_0$ 时，$f'(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处取得极大值；(左正右负) 

(2) 若 $x < x_0$ 时，$f'(x) < 0$，而 $x > x_0$ 时，$f'(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处取得极小值；(左负右正) 

(3) 若在 $x_0$ 的左右两侧 $f'(x)$ 不变号，则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处不取得极值. 

**例1** 求函数 $f(x)=(x^2-4)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值.

**解**



**定理3(第二充分条件)** 设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处具有二阶导数且 $f'(x_0)=0$， $f''(x_0)\neq 0$，那么

(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时,函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处取得极大值；

(2) 当 $f''(x_0)>0$ 时,函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处取得极小值.

**证明**

定理3表明，当二阶导数在驻点处不为零时，可以用二阶导数的符号来判定函数在该驻点处是取得极大值还是极小值.

## 3. 求极值的步骤

**Step1** 求导数 $f'(x)$；

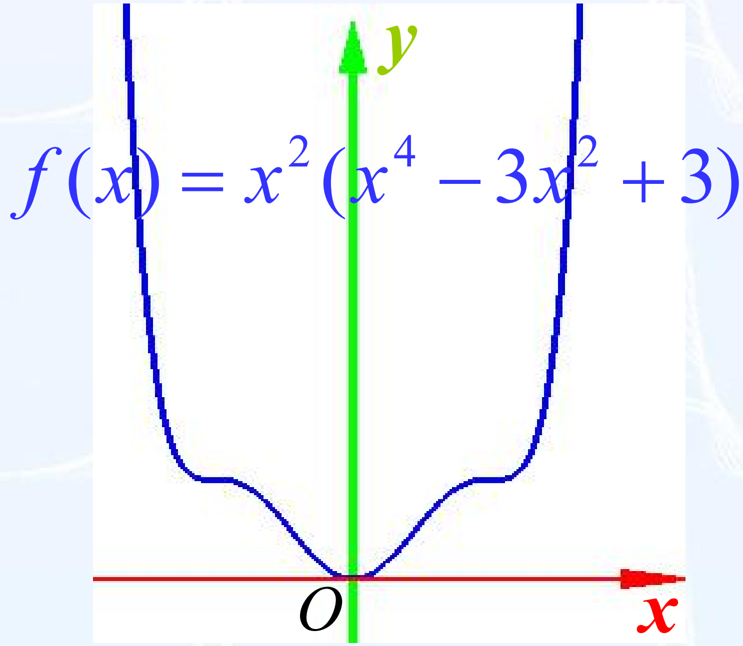
**Step2** 求出函数的全部驻点与不可导点；

**Step3** 用第一充分条件或第二充分条件判别在Step2中求出的这些点处函数是否取得极值，并进一步确定是极大值还是极小值；

**Step4** 求出各极值点的函数值，就得函数的全部极值.

**例2** 求函数 $f(x)=x^2(x^4-3x^2+3)$ 的极值.

**解**



## 二、最大值最小值问题

我们知道在闭区间 $[a, b]$ 上连续的函数，一定取得得最大值和最小值．下面来求最大值和最小值．

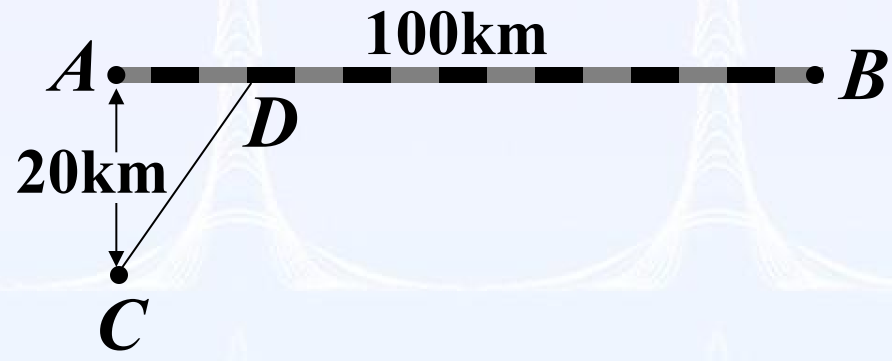
假设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在 $(a, b)$ 内除有限个点外可导，且至多有有限个驻点．则求其最大值和最小值的步骤如下：

**Step1** 求出 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 内的驻点及不可导点；

**Step2** 计算 $f(x)$ 在这些点处的函数值；

**Step3** 比较这些函数值的大小，最大的即为最大值，最小的即为最小值.

**例3** 铁路线上 $AB$ 段的距离为100km，工厂 $C$ 距 $A$ 处为20km，$AC$ 垂直于 $AB$. 为了运输需要，要在 $AB$ 线上选定一点 $D$ 向工厂修筑一条公路. 已知铁路每公里货运费与公路上每公里货运的运费之比为 $3:5$. 为了使货物从供应站 $B$ 运到工厂 $C$ 的运费最省，问 $D$ 点应选在何处?



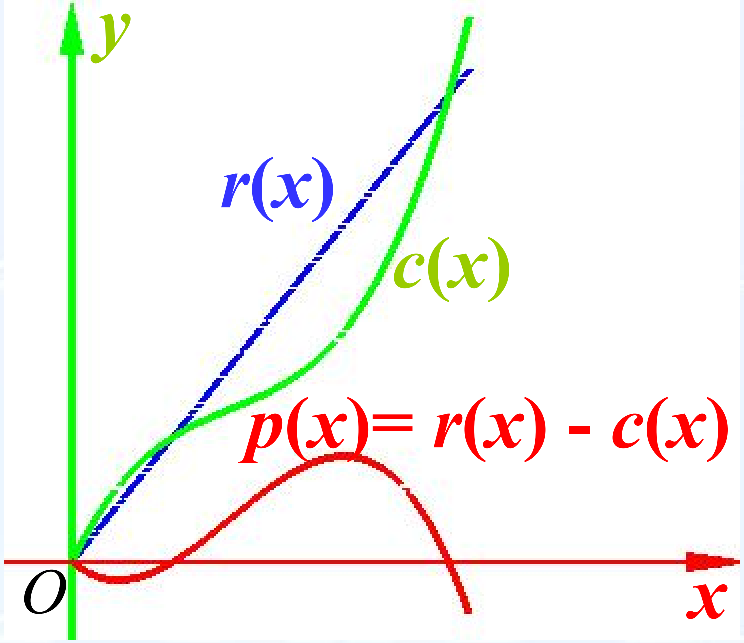

**解**

**例4** 假设某工厂生产某产品 $x$ 千件的成本是

$$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x,$$

售出该产品 $x$ 千件的收入是 $r(x) = 9x$. 问是否存在一个能取得最大利润的生产水平？若存在，找出它.

**解**



## 作业

P 161：1 (5), (9); 3 ; 7 ; 8 ;

10