线性代数教程

第四章
特征值 特征向量 相似矩阵

第二节 方阵的相似对角化

四川大学数学学院

一、相似矩阵与相似变换的概念

定义　设A,B都是n阶方阵,若有可逆矩阵P,

使得　$P^{-1}AP=B$

则称B是A的相似矩阵,或称矩阵A与B相似

记为 $A\sim B$

把$P^{-1}AP$看成对A作的运算，称为对A施行的相似变换,

可逆矩阵P称为把A变成B的相似变换矩阵

二、相似矩阵的性质

性质1 矩阵之间的相似关系满足：

(1) 反身性，即对每个矩阵A，都有$A \sim A$.

(2) 对称性，即若$A \sim B$，则有$B \sim A$.

(3) 传递性，即若$A \sim B$且$B \sim C$，则$A \sim C$.

性质2 若矩阵$A \sim B$，则$|A| = |B|$.

性质3 若$A \sim B$，则$A^m \sim B^m$(m为自然数)

性质4 相似矩阵有相同的特征多项式，从而有相同的特征值。

证明：设$A\sim B$，即存在可逆矩阵P，使得

$P^{-1}AP=B$,

$$\left|\lambda E-B\right| = \left|\lambda E-P^{-1}AP\right| = \left|P^{-1}(\lambda E-A)P\right|$$

$$= \left|P^{-1}\right|\left|\lambda E-A\right|\left|P\right| = \left|\lambda E-A\right|,$$

即A的特征多项式与B的特征多项式相同，当然特征值也相同。

相似关系还具有以下性质：

(i)若$A \sim B$，则$r_A = r_B$;

(ii)若$A \sim B$，则 $trA = trB$;

例1

设$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & x & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$与$\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & y & \\ & & 10 \end{pmatrix}$相似,

求x,y.

分析: 相似矩阵具有相同的迹$\Rightarrow$

$$2+x+5=1+y+10$$

相似矩阵具有相同的行列式$\Rightarrow$

$$|A|=10y$$

定义 对 n 阶方阵 A，若 A 相似于对角矩阵，则称 A 为可（相似）对角化（diagonalization）.

即 存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵，

其中 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

问题：由于对角阵具有很好的性质，那么对于任意一个方阵，是否都可以对角化？如果可以对角化，如何对角化？

定理1 n阶矩阵A相似于对角矩阵(可(相似)对角化)的充分必要条件为A有n个线性无关的特征向量。

说明：由定理1的证明可知：

1. 当$P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$时，$diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$的$n$个主对角元素是$A$的$n$个特征值；

2. 可逆矩阵P的n个列向量$X_1, X_2, \cdots, X_n$是A分别属于$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$的线性无关特征向量。

我们知道 $(\lambda_j E - A)X = 0$的基础解系是A的属于特征值λ_j的线性无关特征向量

问题：不同特征值的线性无关特征向量是否构成线性无关组？

定理2 n阶方阵A的属于不同特征值的特征向量线性无关。

若n阶矩阵有m个不同的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，其对应的特征向量分别为 $X_1,X_2,\cdots X_m$ 则 向量组 $X_1,X_2,\cdots X_m$ 线性无关

推论 若n阶矩阵A有n个不同的特征值，则A可对角化。

说明：如果A的特征方程有**重根**，此时**不一定**有n个线性无关的特征向量，从而矩阵A**不一定能对角化**，但**如果能找到**n个线性无关的特征向量，A还是**能对角化**.

定义1： 设A和B为两个n阶方阵, 若存在可逆矩阵P, 使得

$$B = P^{-1}AP$$

则称 A与 B 相似，记作 $A \sim B$.

性质1： 相似的矩阵有相同的秩.

即 $A \sim B \Rightarrow r(A)=r(B)$.

性质2： 相似的矩阵有相同的行列式.

即 $A \sim B \Rightarrow |A| = |B|$.

性质3： $A \sim B$, 则 A,B 有相同的特征多项式和特征值

$$A \sim B \;\not\Leftarrow\; A,B \text{ 的特征值相同.}$$

性质4: $A \sim B$, 则 A,B 有相同的迹.

即： $A \sim B$, 有 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$

定义 对 n 阶方阵 A，若 A 相似于对角矩阵，则称 A 为可（相似）对角化（diagonalization）.

即 存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵，

其中 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

问题：由于对角阵具有很好的性质，那么对于任意一个方阵，是否都可以对角化？如果可以对角化，如何对角化？

将方阵化为对角矩阵的步骤:

1、求 A 的全部互异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$；

2、对每一个特征值 λ_i,解出其特征方程 $(\lambda_i E - A)X = 0$ 的一个基础解系 $X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{it_i}$；

3、计算 $T=\sum_{i=1}^{m} t_i$, 则得A的 T 个线性无关的特征向量

若 $T<n$, 则表示 A 找不到 n 个线性无关的特征向量，从而不可对角化；若 $T=n$,则 A 可对角化（由定理1）.

4、若可对角化，令

$$P=(X_{11}\cdots X_{1t_1},X_{21}\cdots X_{2t_2},\cdots,X_{m1}\cdots X_{mt_m}),$$

则 P 可逆且有

$$P^{-1}AP=\Lambda=diag(\lambda_1\cdots\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_2,\cdots\lambda_m\cdots\lambda_m).$$

例2 设$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，问$A$能否对角化？

若能，则求出可逆矩阵P，使$P^{-1}AP$为对角形矩阵。

解：A的特征方程为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}\underset{r_1+(\lambda-1)r_3}{=}\begin{vmatrix}0&-(\lambda-1)&(\lambda-1)(\lambda-2)-1\\0&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}-(\lambda-1)&(\lambda-1)(\lambda-2)-1\\\lambda-1&-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)=0$$

解得 A的特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=3$互异，$A$可对角化。

求出可逆矩阵P，使$P^{-1}AP$为对角形矩阵

对于$\lambda_1 = 0$，解齐次线性方程组$(0E - A)X = 0$，

$$0E - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

秩为2，基础解系含3－2个向量

令自由未知量 $x_3 = 1$，代入同解方程组$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$，

得 基础解系

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

对于$\lambda_2 = 1$，解齐次线性方程组$(1E - A)X = 0$,

$$1E - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

秩为2，基础解系含3－2个向量

令自由未知量 $x_2 = 1$，代入　同解方程组$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$，

得 基础解系

$$X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

对于$\lambda_3=3$，解齐次线性方程组$(3E-A)X=0$,

$$3E-A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&2&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}}$$

秩为2，基础解系含3－2个向量

令自由未知量$x_3=2$，代入　同解方程组$\begin{cases}2x_1=x_3\\2x_2=x_3\end{cases}$，

得 基础解系

$$X_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

令 $P=(X_1,X_2,X_3)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

则P可逆，并且$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 3\end{pmatrix}$

注：又令$P'=(X_3,X_1,X_2)$，则$P'^{-1}AP'=\begin{pmatrix}3 & & \\ & 0 & \\ & & 1\end{pmatrix}$

即 矩阵P中的列向量要和对角矩阵中的特征值相对应！

例3 设$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&5&-2\\-2&4&-1\end{pmatrix}$，试问$A$能否对角化？若能，则求出可逆矩阵$P$，使$P^{-1}AP$为对角形矩阵。

解：A的特征方程为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\2&\lambda-5&2\\2&-4&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3)=0$$

A的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$(二重)，$\lambda_3=3$。

对于$\lambda_1=\lambda_2=1$，解方程组$(1E-A)X=0$,

$$E-A=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&-4&2\\2&-4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&5&-2\\-2&4&-1\end{pmatrix}}$$

秩为1，基础解系含3−1个向量

令自由未知量 x_2，x_3分别取(1, 0), (0, 1)，代入

同解方程组　　　　得 基础解系

$x_1=2x_2-x_3$ ，

$$X_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

对于$\lambda_3 = 3$，解齐次线性方程组$(3E - A)X = 0$,

$$3E - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}}$$

秩为2，基础解系含3－2个向量

令自由未知量 $x_3 = 1$，代入　同解方程组$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$,

得 基础解系

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

令 $P=(X_1,X_2,X_3)=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$,

则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&3\end{pmatrix}$

说明：此例中A的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$(二重), $\lambda_3=3$

但也找到了3个线性无关的特征向量

所以，A也可对角化。

例4 判断实矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ 能否化为对角阵？

解 A的特征方程为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-1&-1\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0$$

$\therefore A$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1$(二重)，$\lambda_3=2$

对于$\lambda_1=\lambda_2=1$，解齐次线性方程组$(1E-A)X=0$，

对于$\lambda_1=\lambda_2=1$，解齐次线性方程组$(1E-A)X=0$，

$$E-A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}}$$

$R(E-A)=2$，基础解系含$3-2=1$个向量

对于$\lambda_3=2$，解齐次线性方程组$(2E-A)X=0$，

$$2E-A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$R(2E-A)=2$，

基础解系含$3-2=1$个向量

A最多才能找到2个线性无关的特征向量

$\therefore A$不能对角化

方阵可对角化的判定定理

定理4.设λ_0为n阶矩阵A的k重特征值,则属于λ_0的A的线性无关的特征向量最多只有k个.

定理5 n阶矩阵A可对角化的充分必要条件是:对于A的每个k_i重特征值λ_i,A有k_i个线性无关的特征向量(与重根的重数相同).

推论 n阶矩阵A可对角化的充分必要条件是:对于A的每个k_i重特征值λ_i,特征矩阵$\lambda_i E - A$的秩为$n - k_i$

例5 已知$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，求 A^n

解：A为例1中的矩阵，

$$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)=0.$$

由例1，分别对应于特征值0、1、3

的特征向量为$\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$。

令 $P=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 3\end{pmatrix}=\Lambda$

$\Rightarrow A=P\Lambda P^{-1}\Rightarrow A^n=P\Lambda^n P^{-1}$,

$$\Rightarrow A^n=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 2\\ -3 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3+3^n & -3+3^n & 2\times 3^n\\ -3+3^n & 3+3^n & 2\times 3^n\\ 2\times 3^n & 2\times 3^n & 4\times 3^n\end{pmatrix}。$$

例6 已知三阶方阵A的特征值分别为$\lambda_1=2$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=1$

对应的特征向量依次为

$$p_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\qquad \text{求 } A$$

解：令 $P=(p_1,p_2,p_3)$ 则P可逆，且 $P^{-1}AP=\Lambda$

其中 $\Lambda=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\quad\therefore\ A=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$

$$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}}$$

$$(P\ E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&-1&0&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&0&1\\0&1&0&1&-1&1\\0&0&-1&0&-1&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&0\\0&1&0&1&-1&1\\0&0&-1&0&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&0\\0&1&0&1&-1&1\\0&0&1&0&1&-1\end{array}\right)$$

P^{-1}

$$\boxed{A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$