# 第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性

一、函数单调性的判定法

二、曲线的凹凸性与拐点

# 一、函数单调性的判定法

## 1. 函数单调性的定义

单调性
- 单调增 $\forall x_1 < x_2 \in I$，有 $f(x_1) < f(x_2)$
- 单调减 $\forall x_1 < x_2 \in I$，有 $f(x_1) > f(x_2)$

直接用定义来判别函数的单调性就是要比较当 $x_1 < x_2$ 时 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小. 这在本章之前有时是很困难的, 但现在有了微分中值定理，这种做法就变得容易了.

## 2. 函数单调性的判定法

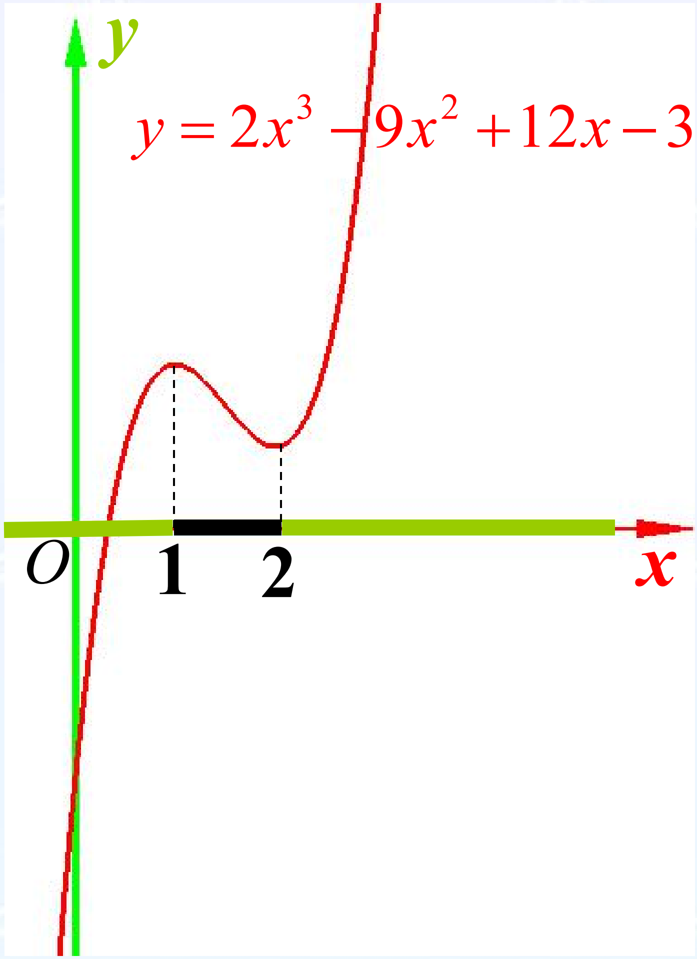
**定理1** 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 $(a, b)$ 内可导.

(1) 如果在 $(a, b)$ 内 $f'(x) > 0$，那么函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加；

(2) 如果在 $(a, b)$ 内 $f'(x) < 0$，那么函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少.

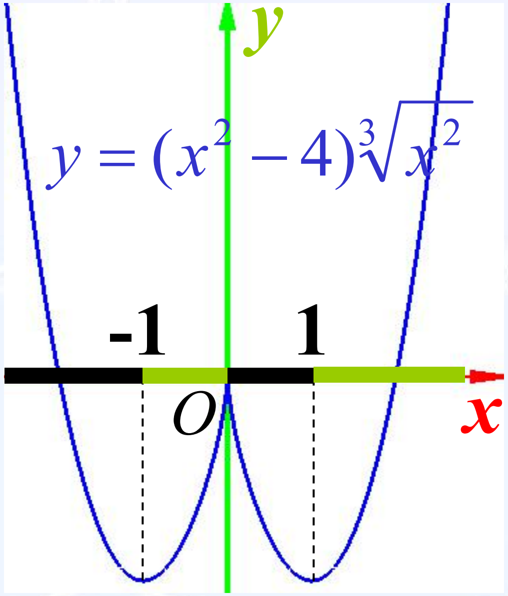
**例1** 确定函数 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间.

**解**



**例2** 确定函数 $y=(x^2-4)\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间.

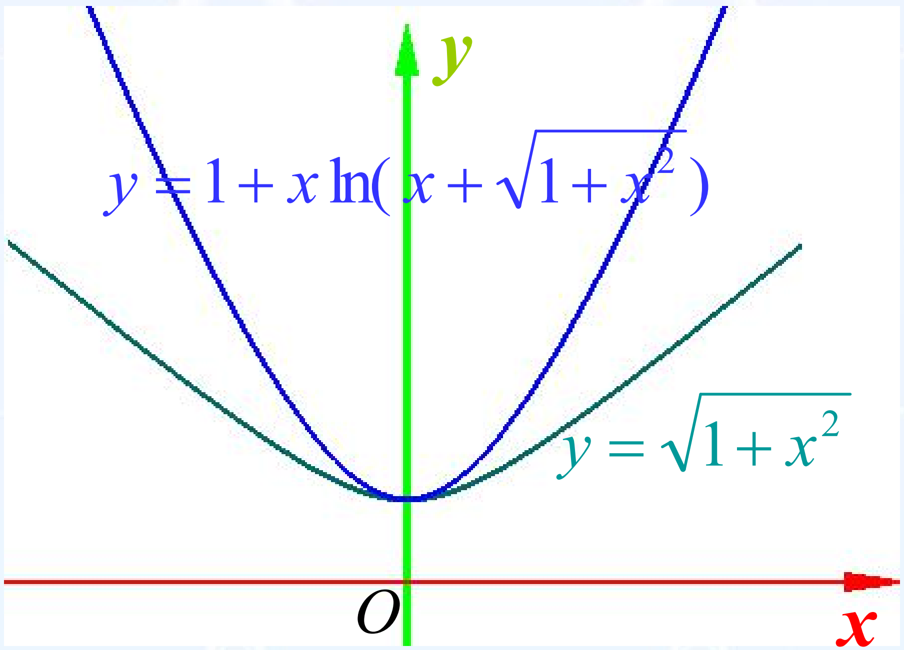
**解**




用函数的驻点与导数不存在的点来划分定义区间，就能够保证函数的导数在各个部分区间内保持固定的符号，从而函数在每个部分区间上单调.

**例3** 证明不等式 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}\ (x>0)$.

**解**



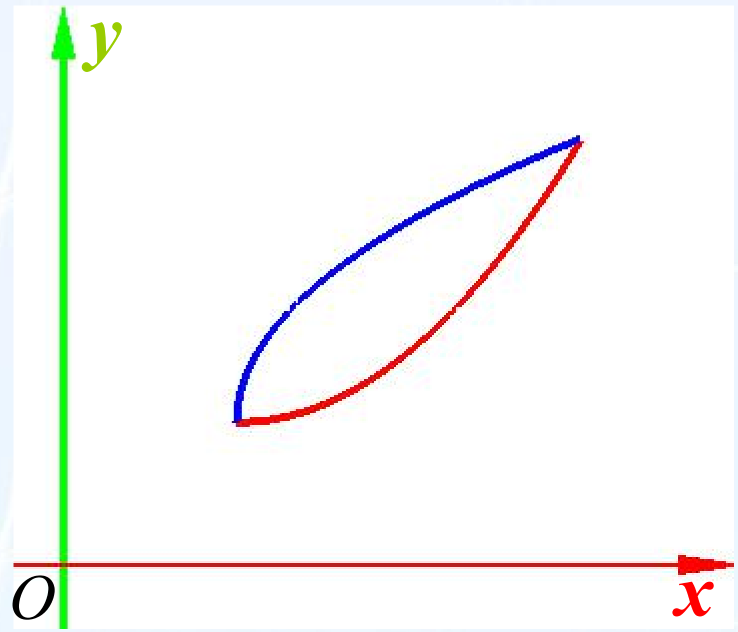
# 二、曲线的凹凸性与拐点

## 1. 定义

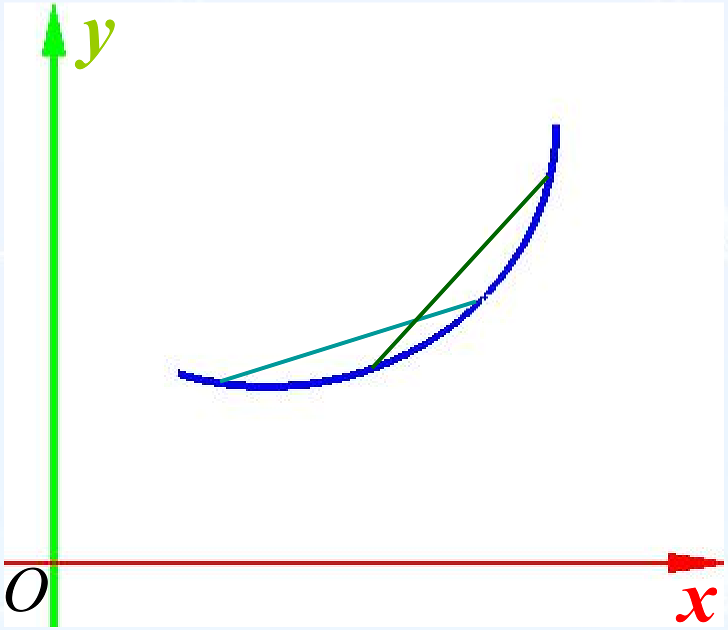
函数的单调性反映在图形上，就是曲线的上升或下降．但曲线在上升或下降的过程中，还有一个弯曲方向的问题．例如，如图所示的红色和蓝色曲线弧都是上升的，但它们的弯曲方向刚好相反：

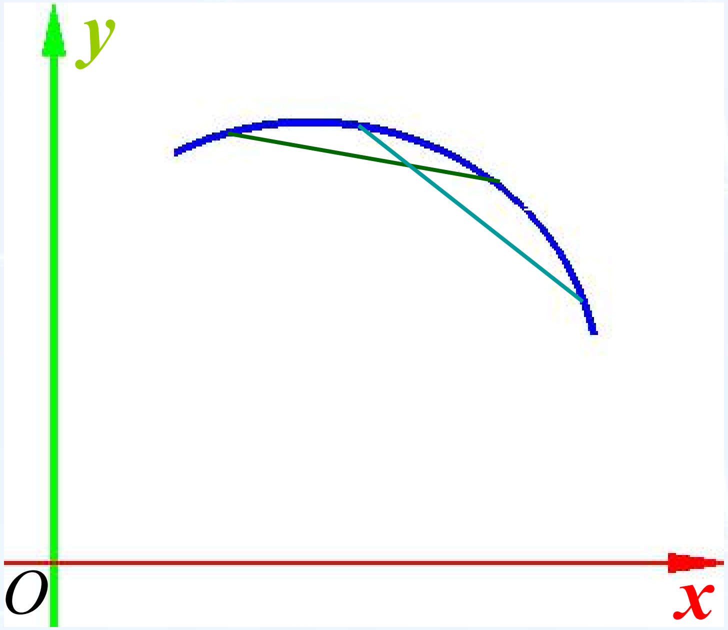
红色曲线弧：向上凹

蓝色曲线弧：向上凸

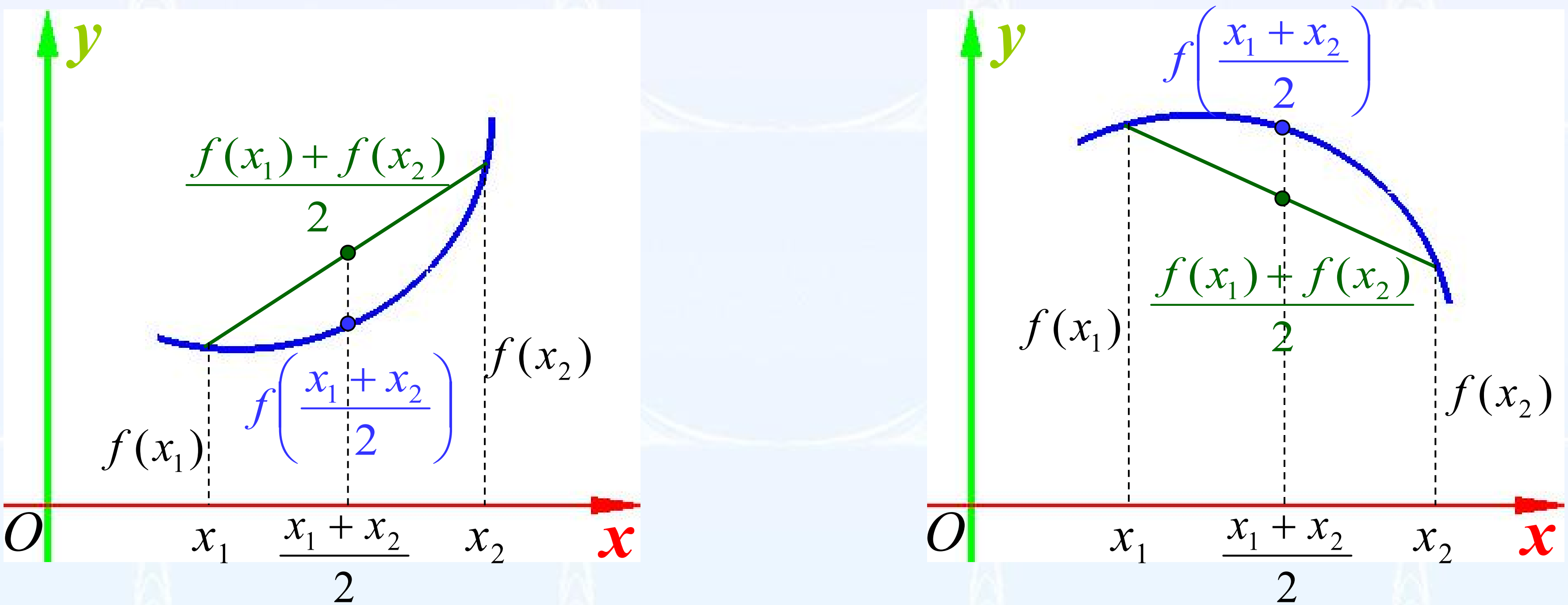


下面先来研究如图所示的向上凹的曲线弧所具有的性质．研究发现，曲线弧上任意两点所作的弦总位于该曲线弧的上方．类似地，向上凸的曲线弧上任意两点所所作的弦总位于该曲线弧的下方．



而直线与曲线的位置关系可用横坐标相同时，比较纵坐标大小的方法来判断.




$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

**定义** 设 $f(x)$ 在区间 $I$ 上连续，如果对 $I$ 上任意两点 $x_1, x_2$，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称 $f(x)$ 在 $I$ 上的图形是(向上)凹的(或凹弧)；如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称 $f(x)$ 在 $I$ 上的图形是(向上)凸的(或凸弧).

## 2. 曲线凹凸性的判别法

**定理2** 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 $(a, b)$ 内具有一阶和二阶导数，那么

(1) 若在 $(a, b)$ 内 $f''(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凹的；

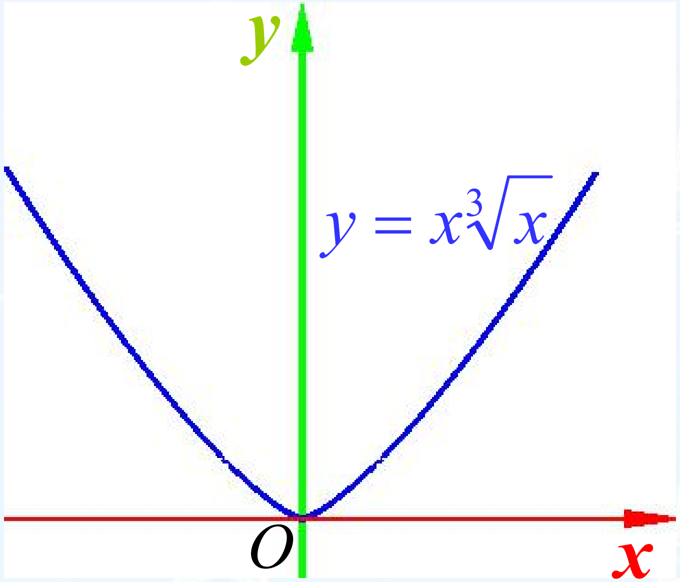
(2) 若在 $(a, b)$ 内 $f''(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凸的.

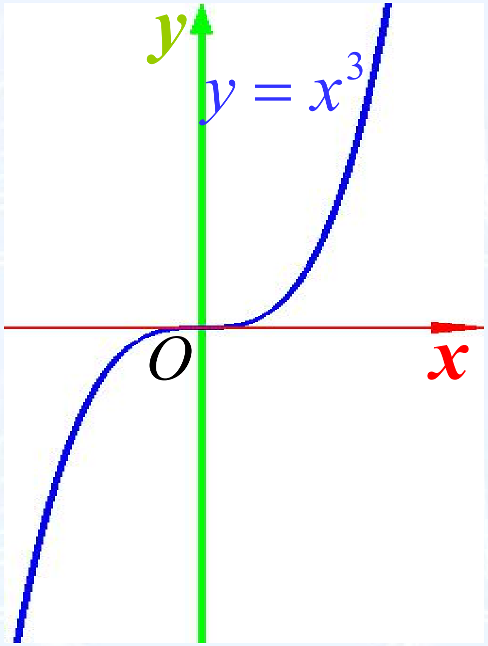
**证明**

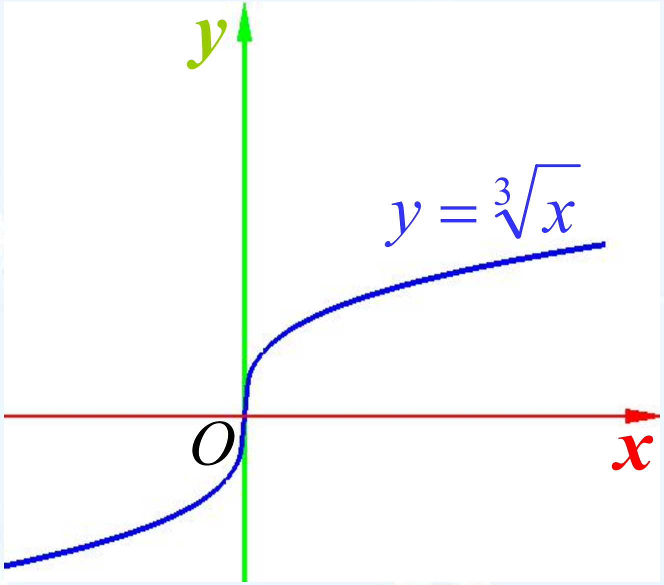
**例4** 讨论下列曲线的凹凸性：

$$(1)\ y = x\sqrt[3]{x}\ ;\ \ (2)\ y = x^3\ ;\ \ (3)\ y = \sqrt[3]{x}\ .$$

**解**

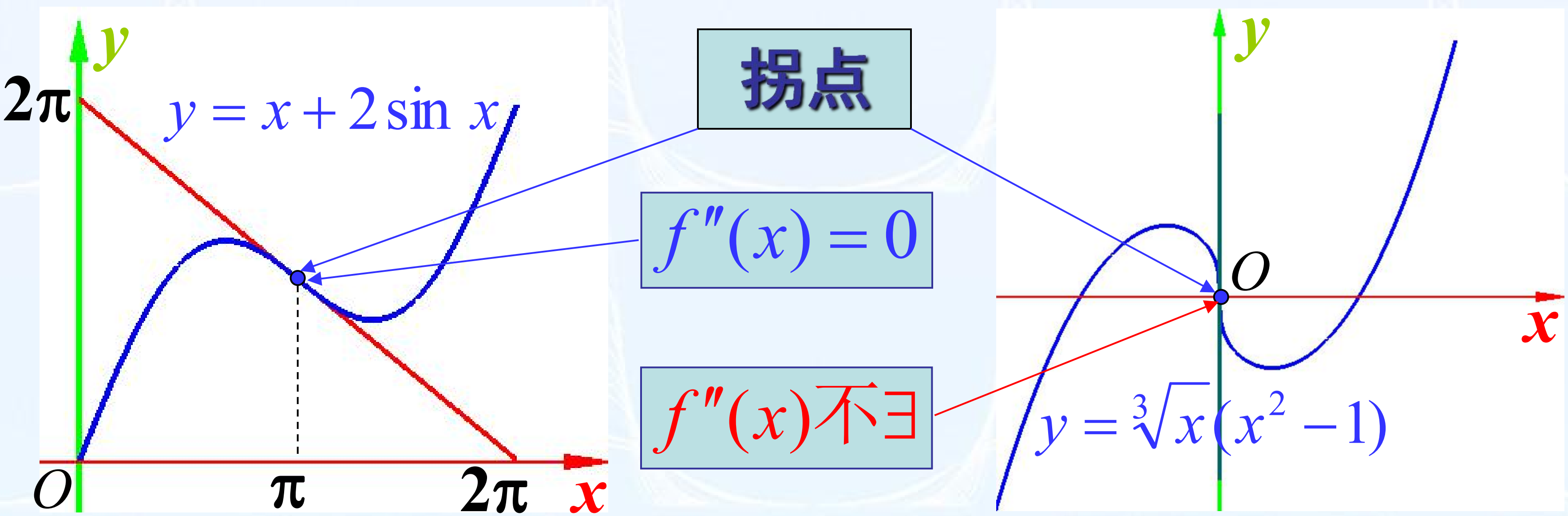


## 3. 拐点及其求法

**定义** 设 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上连续，$x_0$ 是 $I$ 的内点. 如果曲线 $y=f(x)$ 在经过点 $(x_0, f(x_0))$ 时，曲线的凹凸性改变了，那么就称点 $(x_0, f(x_0))$ 为这曲线的**拐点**.



## 拐点的求法

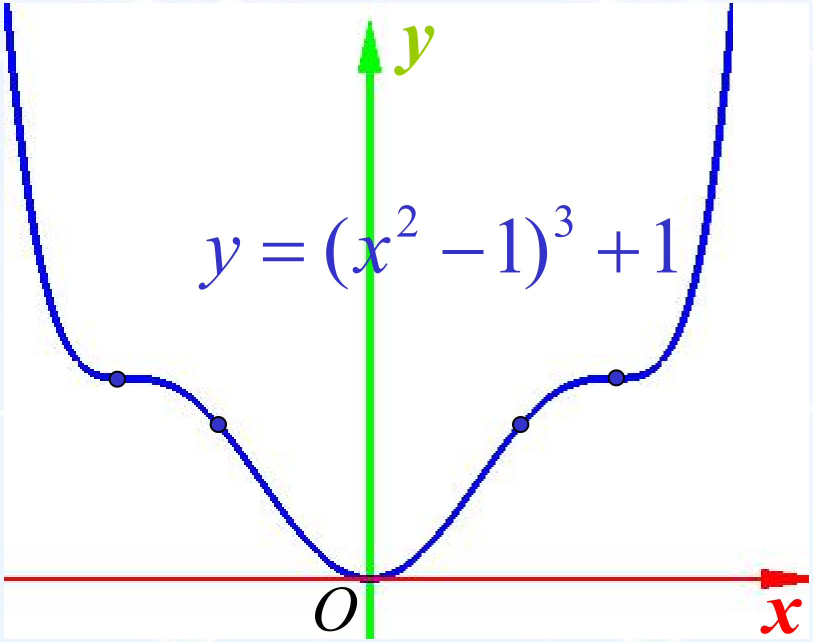
**Step1** 求 $f''(x)$；

**Step2** 令 $f''(x)=0$，解出这方程在区间 $I$ 内的实根，并求出在区间 $I$ 内使 $f''(x)$ 不存在的点；

**Step3** 对 Step2 中求出的每一个点，检查 $f''(x)$ 在这个点左右两侧的符号，当两侧的符号相反时，该点是拐点，当两侧的符号相同时，该点不是拐点.

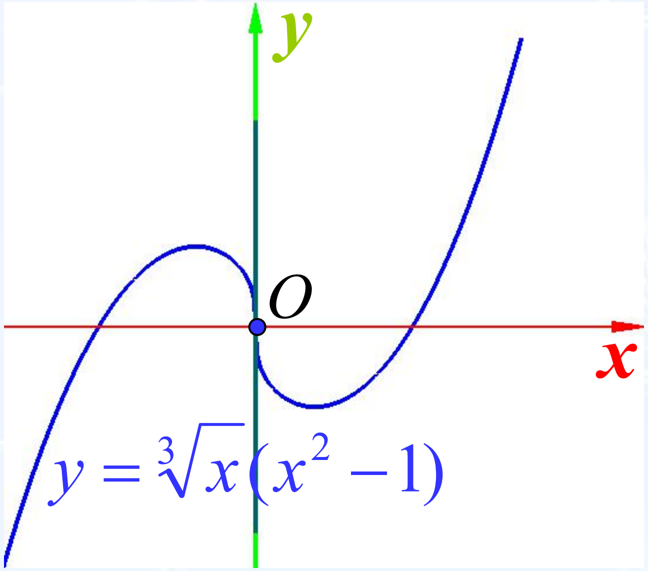
**例5** 求曲线 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点与凹凸区间.

**解**



**例6** 求曲线 $y=\sqrt[3]{x}(x^2-1)$ 的拐点与凹凸区间.

**解**



# 作业

**P150：3 (4),(5)；5 (1), (5)；10 (3), (6)；13**