一、定义

二、几个初等函数的 n 阶导数

三、莱布尼茨公式

一、定义

定义 函数 $y=f(x)$ 的导数仍是 x 的函数，一阶导数的导数叫做二阶导数，二阶导数的导数叫做三阶导数，一般地，$n-1$ 阶导数的导数叫做 n 阶导数，二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数. n 阶导数记为

$$y^{(n)} \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}.$$

二阶和三阶导数也可记为

$$y'', y'''.$$

如何通往人生的高阶？

求高阶导数的方法是依次求一阶、二阶、…、直到所需要的阶数为止．每次求导仍用一阶导数的求导公式和法则.

例1 $y = 2x^5 - x^3 + 4x - 9$，求 y'''.

解

例2 证明函数 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 满足关系式 $y^3y''+1=0$.

解

二、几个初等函数的 n 阶导数

例3 求幂函数 $y=x^{\mu}$ 的 n 阶导数 .

解

$$(x^n)^{(n)}=n!,\quad \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

例4 求指数函数 $y=e^x$ 的 n 阶导数 .

解

$$(e^x)^{(n)}=e^x.$$

例5 求正弦函数 $y=\sin x$ 的 n 阶导数 .

解 $$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ (\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

例6 求对数函数 $y=\ln(1+x)\ (x>-1)$的 n 阶导数 .

解 $$[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\ (x>-1).$$

三、莱布尼茨公式

如果函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在点 x 处具有 n 阶导数，则有

(1) $(\alpha u+\beta v)^{(n)}=\alpha u^{(n)}+\beta v^{(n)}\ (\alpha,\beta\in\mathrm{R})$;

(2) $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$.

莱布尼茨公式

莱布尼茨公式可用数学归纳法证明.

作业

P 100: 1(4, 5, 9 ,10 , 12) ; 3; 4