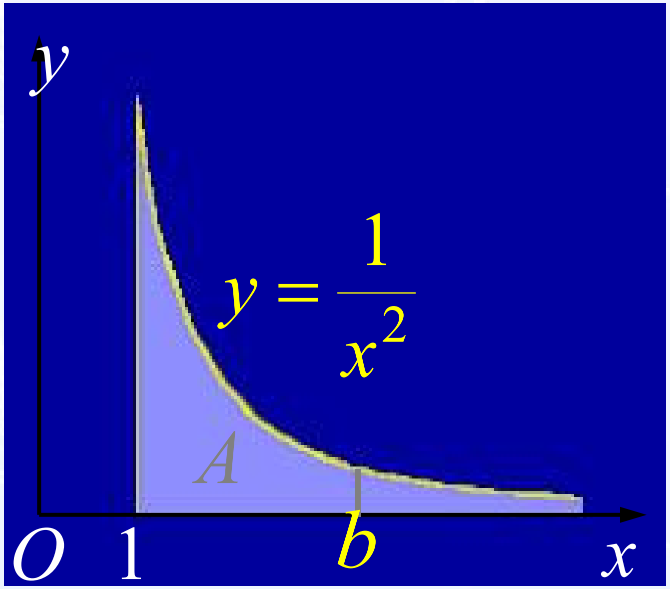
一、无穷限的反常积分

二、无界函数的反常积分

引例. 曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 和直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的开口曲边梯形的面积可记作

$$A=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$



其含义可理解为

$$A=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1$$

一、无穷限的反常积分

1. 定义

定义1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，取 $t>a$，如果极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限为**函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分**，记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x .$$

此时也称反常积分**收敛**，如果极限不存在，则称**发散**.

类似地可定义：

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{b} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

2. 计算方法

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上的一个原函数，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ 存在，则有计算公式

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty}F(x)-F(a)=[F(x)]_a^{+\infty}.$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b)-\lim_{x\to-\infty}F(x)=[F(x)]_{-\infty}^{b}.$$

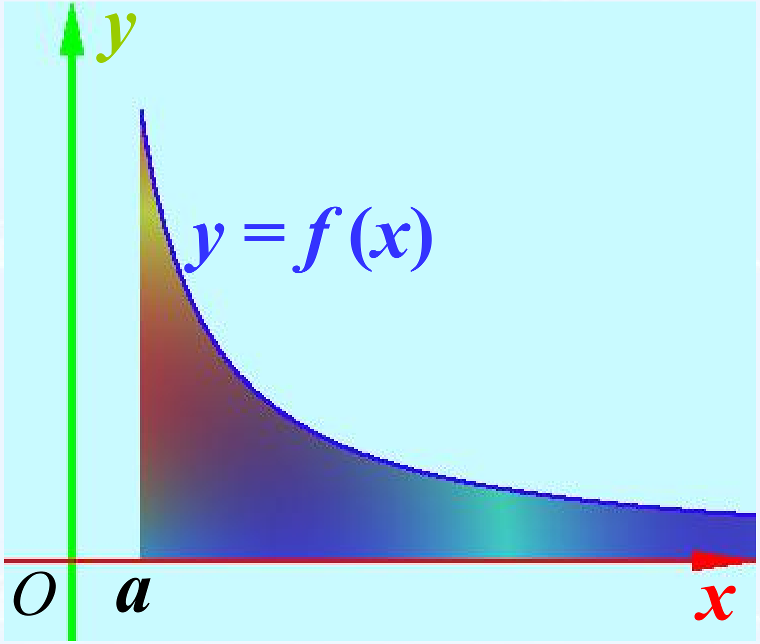
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty}F(x)-\lim_{x\to-\infty}F(x)=[F(x)]_{-\infty}^{+\infty}.$$

3. 几何意义

若反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $f(x) \geq 0$, $x \in [a, +\infty)$,

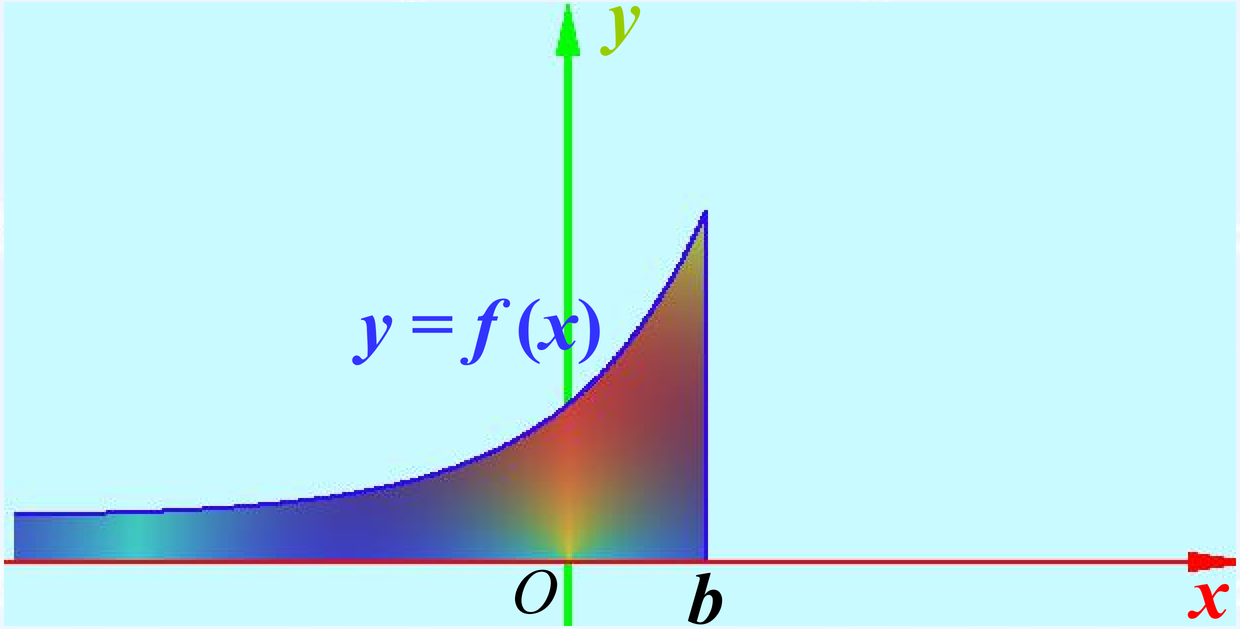
则其几何意义是：曲线 $y = f(x)$, $x = a$, x 轴所围的开口曲边三角形的面积存在，且为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x .$$

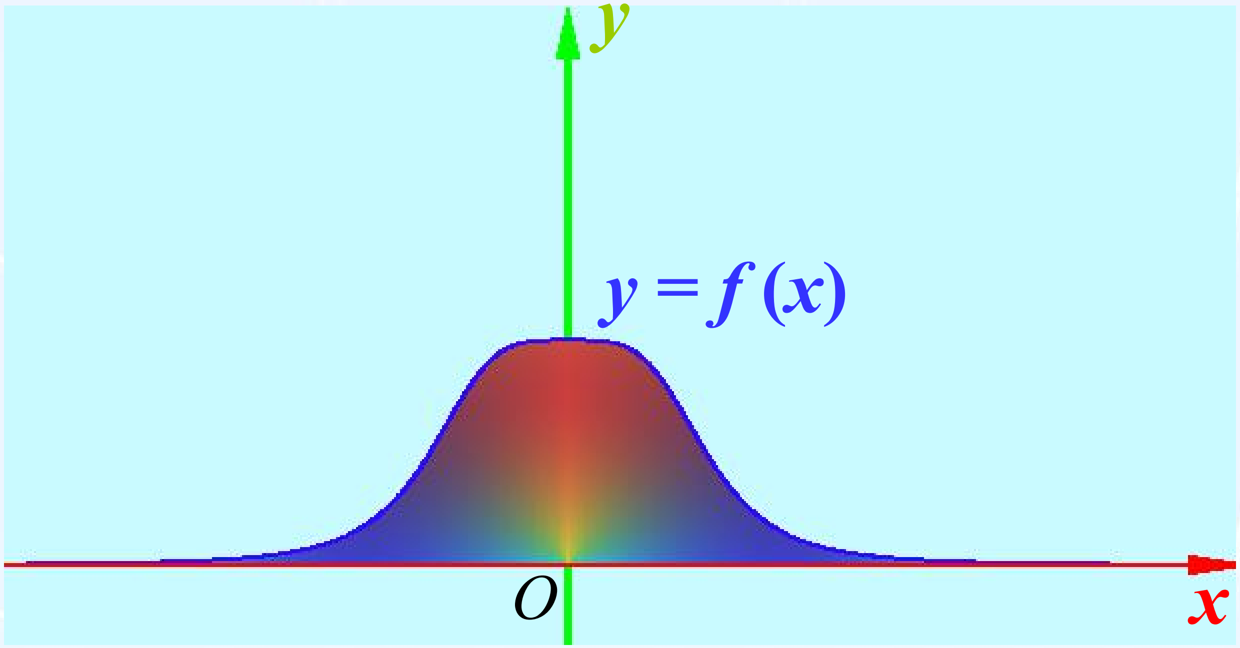


这时 x 轴是曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线.

若反常积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且$f(x) \geq 0$, $x \in (-\infty , b]$,
则其几何意义是：曲线 $y = f(x)$, $x = b$, x 轴所围的开口曲边三角形的面积存在，且为 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$. 这时 x 轴是曲线$y = f(x)$的水平渐近线.



若反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $f(x)\geq 0$, $x\in(-\infty, +\infty)$,则其几何意义是：曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围的开口曲边梯形的面积存在，且为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$. 这时 x 轴是曲线 $y=f(x)$的水平渐近线.



例1 计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解

例2 计算反常积分 $\int_{0}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\ (p>0)$.

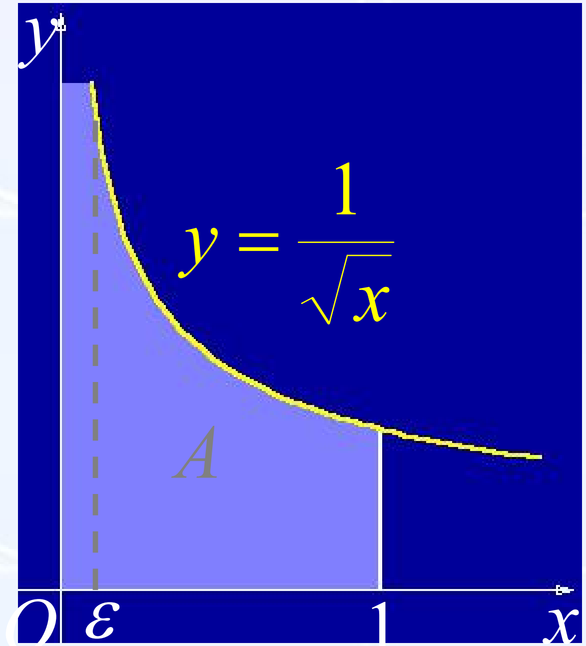
解

例3 证明反常积分 $\int_{a}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}\ (a>0)$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\le 1$ 时发散.

证明

引例:曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 与 x 轴, y 轴和直线 $x=1$ 所围成的开口曲边梯形的面积可记作

$$A=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$



其含义可理解为

$$A=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+} 2(1-\sqrt{\varepsilon}) = 2$$

二、无界函数的反常积分

如果函数 $f(x)$ 在点 a 的任一邻域内都无界，那么点 a 称为函数 $f(x)$ 的**瑕点**(也称无界间断点)．无界函数的反常积分又称为**瑕积分**.

定义2 设函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续，点 a 为 $f(x)$ 的瑕点．取 $t > a$，如果极限 $\lim\limits_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限为**函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上的反常积分**，仍然记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

即 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

此时称反常积分**收敛**，否则称**发散**.

类似地可定义：

若函数 $f(x)$ 在 $[a\,,b)$ 上连续，点 b 为 $f(x)$ 的瑕点，

则定义 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x\,.$$

若函数 $f(x)$ 在 $[a\,,b]$ 上除 $c\ (a<c<b)$ 外连续，c 为 $f(x)$ 的瑕点，则定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x + \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

无界函数的反常积分，也有类似的牛顿—莱布尼茨公式：

若 b 为瑕点, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a)$,

若 a 为瑕点, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a^+)$,

若 a , b 都为瑕点, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a^+) .$$

注意: 若瑕点 $c \in (a,b)$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(c^+) + F(c^-) - F(a) .$$

例4 计算反常积分 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0)$.

解

例5 讨论反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 的收敛性.

解

例6 证明反常积分 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}$ 当 $0<q<1$ 时收敛，当 $q\geq 1$ 时发散.

证明

例7 计算反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)^3}}$.

解

课后作业:

P262 1 (4) , (5) , (6) , (9) , (10) ;

2