线性代数教程

第六章　二次型

第一节　二次型的概念

四川大学数学学院

一、二次型及其标准形的概念

定义1 含有n个变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为**二次型**.

只含有平方项的二次型

$$f = k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + \cdots + k_nx_n^2$$

称为二次型的**标准形**.

二、二次型的矩阵表示方法

对二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

取 $a_{ji}=a_{ij}$， 则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$，

于是 $$f=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n$$
$$+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n$$
$$+\cdots$$
$$+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$

$$
\begin{aligned}
f =\ & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots \\
& + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

$$
= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X^T A X,
$$

其中$A = A^T$

记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T A X$$ 其中$A = A^T$

在二次型的矩阵表示中，任给一个二次型，就唯一地确定一个对称矩阵；反之，任给一个对称矩阵，也可唯一地确定一个二次型．这样，二次型与对称矩阵之间存在一一对应的关系.

对称矩阵A叫做二次型 f 的矩阵;

f 叫做对称矩阵 A的二次型；

对称矩阵A的秩叫做二次型 f 的秩.

例 1　求三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$ 的秩.

解　$a_{11}=1, a_{22}=0, a_{33}=1,$

$$a_{12}=a_{21}=\frac{2+0}{2},\quad a_{13}=a_{31}=\frac{-2+0}{2},\quad a_{23}=a_{32}=\frac{0+0}{2}$$

$$\therefore\quad A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\therefore R(A)=3$　$\therefore f(x_1,x_2,x_3)$的秩为3

练习：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

f 对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

f 的秩为 r(A)=3.

练习：$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3$

f对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

f的秩为 r(A)=2.

化二次型为标准形

对于二次型，我们讨论的主要问题是：寻求可逆的线性变换，将二次型化为标准形.

设
$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

记$C=(c_{ij})$,若C可逆 则上述关系称为可逆线性变换

可 记作 $X = CY$
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$X = CY$ 将其代入 $f = X^T AX$,有

$$f = X^T AX = (CY)^T A(CY) = Y^T (C^T AC) Y.$$

说明

1. 二次型经可逆变换$X=CY$后,其秩不变,但f的矩阵由A变为$B=C^TAC$;

2. 要使二次型f经可逆变换 $X=CY$变成标准形,就是要使

$$Y^TC^TACY=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$$

$$=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

也就是要使 C^TAC成为对角矩阵 .

定义2 设 A,B为n阶方阵，若存在可逆阵C,使得

$$B = C^T A C,$$

则称A与B合同，记为 $A \simeq B$

说明：要使二次型$f = X^T A X$经可逆变换 $X = CY$ 变成标准形,就是要使

也就是要使 $A \simeq diag\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$

第六章　二次型

第二节　二次型化为标准形

定义3 如果二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$可经过非退化的线性替换$X=CY$化简为

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2 \qquad (6.4)$$

的形式，则称(6.4)为二次型f的标准形

要使二次型$f=X^TAX$经可逆变换 $X=CY$ 变成标准形,就是要使

也就是要使 $A\simeq diag\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$

正交变换法

定理 设A为n阶对称矩阵，则必有正交矩阵P，使$P^{-1}AP=P^{T}AP=\Lambda$，其中Λ是以A的n个特征值为对角元的对角矩阵.

定理3 任给二次型 $f=X^{T}AX\left(A=A^{T}\right)$,总有正交变换$X=QY$,使$f$化为标准形

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2,$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$f$的矩阵$A$的特征值.

用正交变换化二次型为标准形的具体步骤

1. 将二次型表成矩阵形式 $f = X^T AX$，求出 A；

2. 求出 A 的所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$；

3. 求出对应于特征值的特征向量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$；

4. 将特征向量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 正交化，单位化，得 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$，记 $Q = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$；

5. 作正交变换 $X = QY$，则得 f 的标准形

$$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

例2 将二次型

$$f=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

通过正交变换 $X=QY$,化成标准形.

解 **1. 写出对应的二次型矩阵，并求其特征值**

$$A=\begin{pmatrix}17 & -2 & -2\\ -2 & 14 & -4\\ -2 & -4 & 14\end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-17 & 2 & 2\\ 2 & \lambda-14 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-14\end{vmatrix}=(\lambda-18)^2(\lambda-9)$$

从而得特征值 $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = \lambda_3 = 18.$

2. 求特征向量

对$\lambda_1 = 9$，解$\left(A-9E\right)X = 0$，得基础解系 $X_1 = (\frac{1}{2},1,1)^T$

对$\lambda_2 = \lambda_3 = 18$，解$\left(A-18E\right)X = 0$，得基础解系

$$X_2 = \left(-2,1,0\right)^T, X_3 = (-2,0,1)^T$$

3. 将特征向量正交化

取 $\alpha_1 = X_1, \alpha_2 = X_2$，$\alpha_3 = X_3 - \frac{\left[\alpha_2, X_3\right]}{\left[\alpha_2, \alpha_2\right]}\alpha_2$，

得正交向量组

$$\alpha_1 = (1/2,1,1)^T, \quad \alpha_2 = (-2,1,0)^T,$$

$$\alpha_3 = (-2/5,-4/5,1)^T.$$

4．将正交向量组单位化，得正交矩阵Q

令 $\eta_i = \dfrac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}, \quad (i = 1,2,3),$

得 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{45} \\ -4/\sqrt{45} \\ 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}.$

所以 $Q = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}.$

于是所求正交变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

且有标准形为 $f = 9y_1^2 + 18y_2^2 + 18y_3^2$.

用正交变换化二次型为标准形，其特点是**保持几何形状不变.**

问题 有没有其它方法，也可以把二次型化为标准形？

问题的回答是肯定的。下面介绍一种行之有效的方法——**拉格朗日配方法.**

拉格朗日配方法的步骤

$$(1)a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

1. 若二次型含有x_i的平方项，则先把含有x_i的乘积项集中，然后配方，再对其余的变量同样进行，直到都配成平方项为止，经过非退化线性变换，就得到标准形;

$$(2)(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

2. 若二次型中不含有平方项，但是$a_{ij} \neq 0$ $(i \neq j)$,则先作可逆线性变换

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j \\ x_j = y_i + y_j \\ x_k = y_k \end{cases} \quad (k = 1,2,\cdots,n \text{且} k \neq i,j)$$

化二次型为含有平方项的二次型，然后再按1中方法配方.

例P170 化二次型

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

为标准形,并求所用的变换矩阵.

解

含有平方项

含有 x_1 的项配方

$$
\begin{aligned}
f &= \boxed{x_1^2} + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3 \\
&= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 \\
&\quad \boxed{-x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3} + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3
\end{aligned}
$$

去掉配方后多出来的项

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+2x_3)^2.$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

$$= y_1^2 + y_2^2.$$

所用变换矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(|C| = 1 \neq 0\right).$$

例 化二次型

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

成标准形，并求所用的变换矩阵.

解 由于所给二次型中无平方项，所以

令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ $\left(即 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right)$

代入 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$,

得 $$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3.$$

再配方，得

$$f = 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2.$$

令 $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_2 = z_2 + 2z_3, \\ y_3 = z_3 \end{cases}$ $\left(\text{即} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right)$

得 $f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2.$

所用变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \quad (|C|=-2\neq 0).$$

即 $$f \underset{X=CZ}{=} 2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2.$$

小结

将一个二次型化为标准形，可以用**正交变换法**，也可以用**拉格朗日配方法**，或者其它方法，这取决于问题的要求．如果要求找出一个正交矩阵，无疑应使用正交变换法；如果只需要找出一个可逆的线性变换，那么各种方法都可以使用．正交变换法的好处是有固定的步骤，可以按部就班一步一步地求解，但计算量通常较大；如果二次型中变量个数较少，使用拉格朗日配方法反而比较简单．需要注意的是，**使用不同的方法，所得到的标准形可能不相同，但标准形中含有的项数必定相同，项数等于所给二次型的秩．**

第六章　二次型

二次型的正定性

实二次型的分类

定义　设n元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$，如果对任何 $X=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T\neq 0$，都有

(1) $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)>0$,则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为**正定的**;
$<$ 为**负定的**

例如 $f=x^2+4y^2+16z^2$ 为正定二次型

$f(x_1,x_2)=-x_1^2-3x_2^2$ 为负定二次型

一个实二次型，既可以通过正交变换化为标准形，也可以通过拉格朗日配方法化为标准形，显然，其标准形一般来说是不唯一的，但标准形中所含有的项数是确定的，项数等于二次型的秩.

惯性定理 设有实二次型 $f = X^T AX$,它的秩为r,有两个实的可逆变换

$$X = CY \quad 及 \quad X = PZ$$

使 $$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_r y_r^2 \qquad (k_i \neq 0),$$

及 $$f = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_r z_r^2 \qquad (\lambda_i \neq 0),$$

则$k_1,\cdots,k_r$中正数的个数与$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$中正数的个数相等.

若某个实二次型的标准形为

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2$$

其中，$d_i>0(i=1,\cdots,r)$，r为二次型的秩。

正平方项的项数p称为f的正惯性指数，

负平方项的项数q称为f的负惯性指数

$p-q$称为f的符号差

根据惯性定理，p和$q=r-p$就是唯一确定的，无论标准形是通过正交变换得到还是通过配方法得到。

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2$$

在上面的标准形中，令$z_i=\sqrt{d_i}\,y_i(i=1,\cdots,r)$，$z_k=y_k,(k=r+1,\cdots,n)$，则可得新的标准形：

$$z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2.$$

我们称这种形式的标准形为规范形。

推论 任意一个n元实二次型都可以通过满秩线性替换化为规范形，且规范形是唯一的。

正定矩阵、正定矩阵的等价条件

定义 设n元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX,\ (A^T=A)$ 正定，则称 A 为正定矩阵。

定理 设A为n阶实对称矩阵，$f=X^TAX$，则下列命题相互等价：

(1)A为正定矩阵；　(2)A的特征值全是正实数；

(3)$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的正惯性指数$p=n$；

(4)存在可逆实矩阵C，使得$C^TAC=E$；

(5)存在可逆实矩阵P，使得$A=P^TP$.

正定矩阵的基本性质

1. A正定，则$|A| \neq 0$

2. 设A为正定矩阵,则A^T, A^{-1}, A^*均为正定矩阵;

3. 若A, B均为n阶正定矩阵,则$A+B$也是正定矩阵.

定义8 设 $A=(a_{ij})$为n阶方阵，记A的位于左上角的子式为

$$A_1=\left|a_{11}\right|,\ A_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \cdots,\ A_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},$$

$$A_n=\left|A\right|,$$

称为A的$1,2,3,\cdots,k\cdots,n$阶**顺序主子式**。

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

定理6 n元二次型$f = X^T A X$为正定的

$\Leftrightarrow$ A 的各阶顺序主子式均大于零

例1 判别二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3$ 是否正定.

解 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,

$$A_1 = |2| = 2 > 0, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0,$$

$$A_3 = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 24 > 0$$

故此二次型为正定二次型.

推论2 n元二次型$f = X^T A X$为负定的

$\Leftrightarrow A$ 的偶数阶顺序主子式均大于零

奇数阶顺序主子式均小于零

即 $$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \ (k = 1, 2, \cdots, n)$$

例3 判别二次型

$$f=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy+4xz$$

的正定性.

解 f的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}$,

$$A_1=-5<0,\qquad A_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}=26>0,$$

$$A_3=|A|=-80<0,\qquad \therefore f\text{为负定.}$$

例4 若二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$$ 正定

问 t 如何取值?

解 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & t & 1\\ t & 4 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$,

$$A_1=|1|=1>0,$$

$$A_2=\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 4\end{vmatrix}=4-t^2>0,$$

$$A_3=\begin{vmatrix}1 & t & 1\\ t & 4 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & t & 1\\ t & 4 & 0\\ -1 & -2t & 0\end{vmatrix}=-2t^2+4>0,$$

$$\begin{cases}4-t^2>0\\ -2t^2+4>0\end{cases},$$

解得

$$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$$

小结

1. 正定二次型的概念，正定二次型与正定矩阵的区别与联系.

2. 正定二次型（正定矩阵）的判别方法：

(1) 定义法；
(2) 顺次主子式判别法；
(3) 特征值判别法.

3. 根据正定二次型的判别方法，可以得到负定二次型（负定矩阵）相应的判别方法.