第七节 曲率

一、弧微分

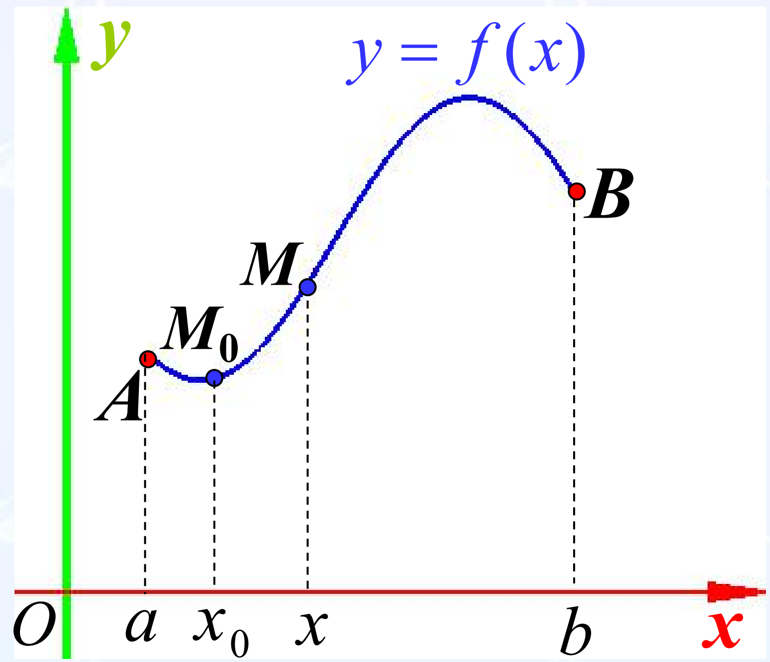
二、曲率及其计算公式

三、曲率圆与曲率半径

*四、曲率中心 渐屈线与渐伸线

一、弧微分

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内具有连续导数．在曲线上取固定点 $M_0(x_0,y_0)$ 作为度量弧长的基点．对曲线上任一点 $M(x,y)$，规定有向弧段 $\overset{\frown}{M_0M}$ 的值 s 如下：s 的绝对值等于这弧段的长度，当 M 位于 M_0 的右侧时 $s>0$，否则 $s<0$．于是 $s=s(x)$ 是单调增函数．



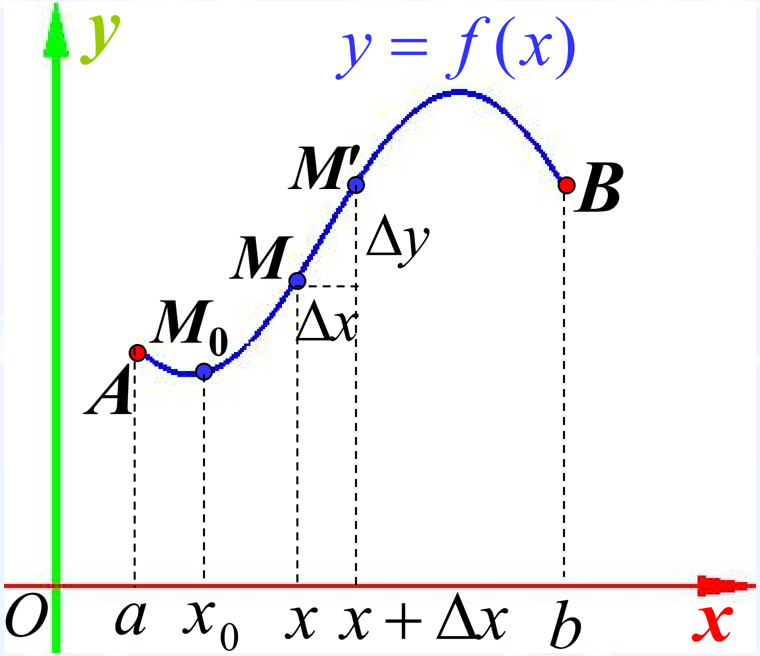
下面来求 $s(x)$ 的导数与微分．

如图所示，$\Delta s = \overset{\frown}{M_0M'} - \overset{\frown}{M_0M} = \overset{\frown}{MM'}$. 于是

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \cdot \frac{|MM'|^2}{(\Delta x)^2}$$

$$= \left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \cdot \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}$$

$$= \left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right],$$



$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \pm\sqrt{\left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]}.$$

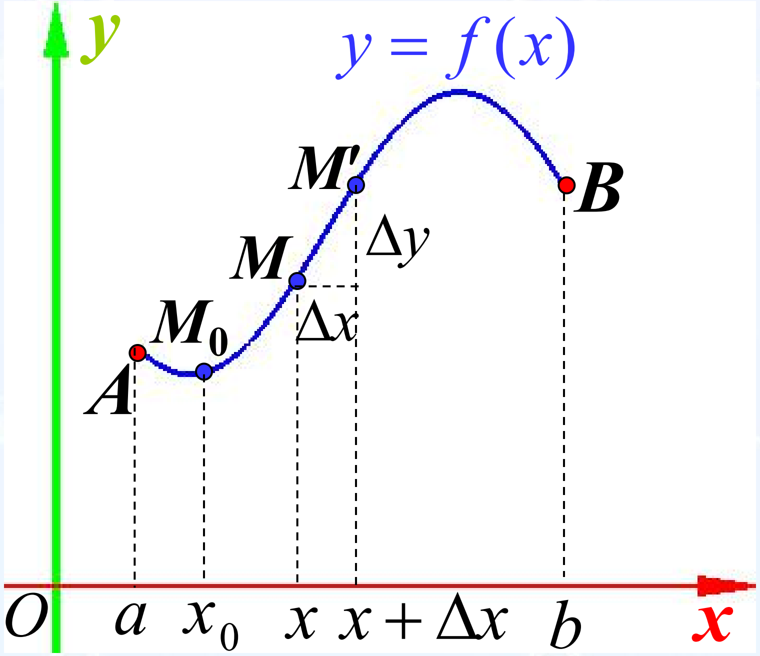
$$\frac{\Delta s}{\Delta x}=\pm\sqrt{\left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\right)^2\cdot\left[1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]}.$$

$\because\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\overset{\frown}{MM'}|}{|MM'|}=1,\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=y',$

$\therefore\ \dfrac{ds}{dx}=\pm\sqrt{1+y'^2}.$

因为 $s=s(x)$ 是单调增函数，

所以 $\dfrac{ds}{dx}=\sqrt{1+y'^2}$， **于是有**



$$\boxed{ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx.}$$

弧微分

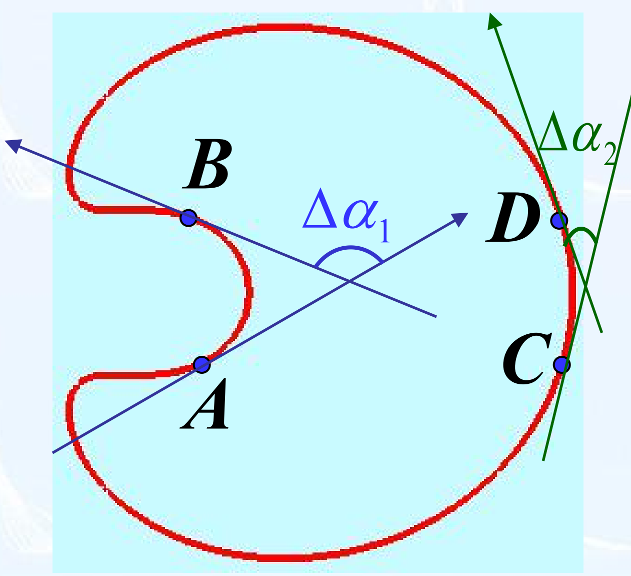
二、曲率及其计算公式

1. 定义

在工程技术中，有时需要研究曲线的弯曲程度. 那么如何用数量来描述曲线的弯曲程度呢？

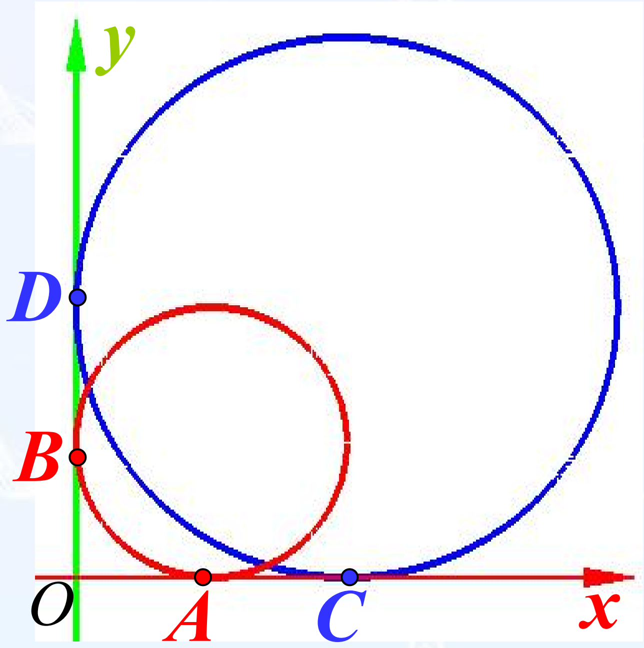
从图中可以看出，弧段 $\overset{\frown}{AB}$ 的弯曲程度比弧段 $\overset{\frown}{CD}$ 的弯曲程度大，它们在端点处切线的转角有关系式

$$\Delta\alpha_1 > \Delta\alpha_2 .$$



即曲线弧的弯曲程度与在两端点的切线转角成正比.

但在下图中，大小两个圆都与两坐标轴相切，切点分别为 A , B , C , D，两曲线弧在两端点的切线转角相等均为 $\frac{\pi}{2}$. 但显然弧段 $\overset{\frown}{AB}$ 的弯曲程度更大些. 其原因是弧段 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长小于弧段 $\overset{\frown}{CD}$ 的弧长. 这就是说曲线弧的弯曲程度与弧长成反比.



定义 设弧段 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长为 Δs，两个端点处的切线转角为 $\Delta\alpha$，则称

$$\overline{K} = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

为弧段 $\overset{\frown}{AB}$ 的**平均曲率**，

$$K = \lim_{B\to A}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

称为曲线在点 A 处的**曲率**.

$$K=\lim_{B\to A}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

2. 曲率的计算公式

设曲线的方程为 $y=f(x)$，且 $f(x)$ 具有二阶导数，

因为 $\tan\alpha=y'$，所以

$$\sec^2\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=y'', \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{y''}{1+\tan^2\alpha}=\frac{y''}{1+y'^2},$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}\alpha=\frac{y''}{1+y'^2}\mathrm{d}x.$$

$$K = \lim_{B\to A}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| \quad \mathrm{d}\alpha = \frac{y''}{1+y'^2}\mathrm{d}x\,.$$

又因为 $$\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

于是得到曲率的计算公式为

$$\boxed{K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\,.}$$

若曲线的方程由参数方程 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 给出，

则 $$\boxed{K = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}\,.}$$

例1 证明

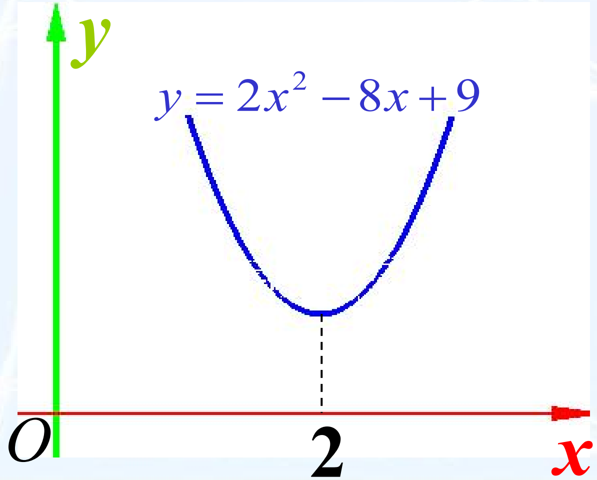
(1) 直线上任一点的曲率等于零;

(2) 圆上任一点的曲率都相等.

证明

例2 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上哪一点的曲率最大?

解



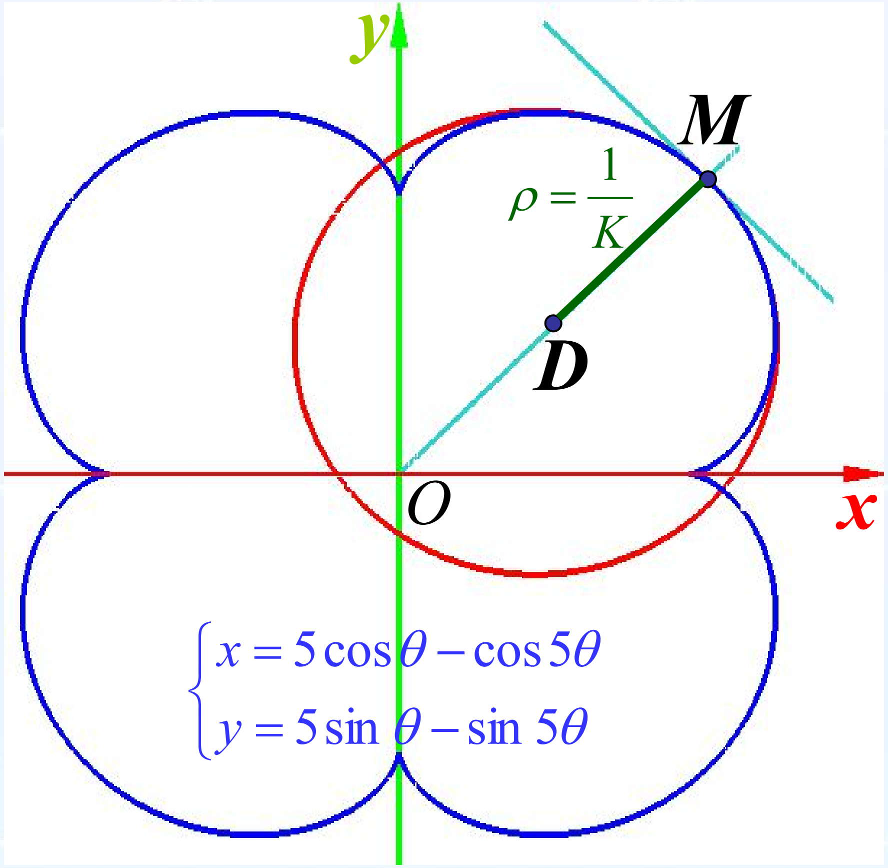
三、曲率圆与曲率半径

定义 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率为 $K(\neq 0)$

在点 M 处的曲线的法线上，在凹的一侧取一点 D，使

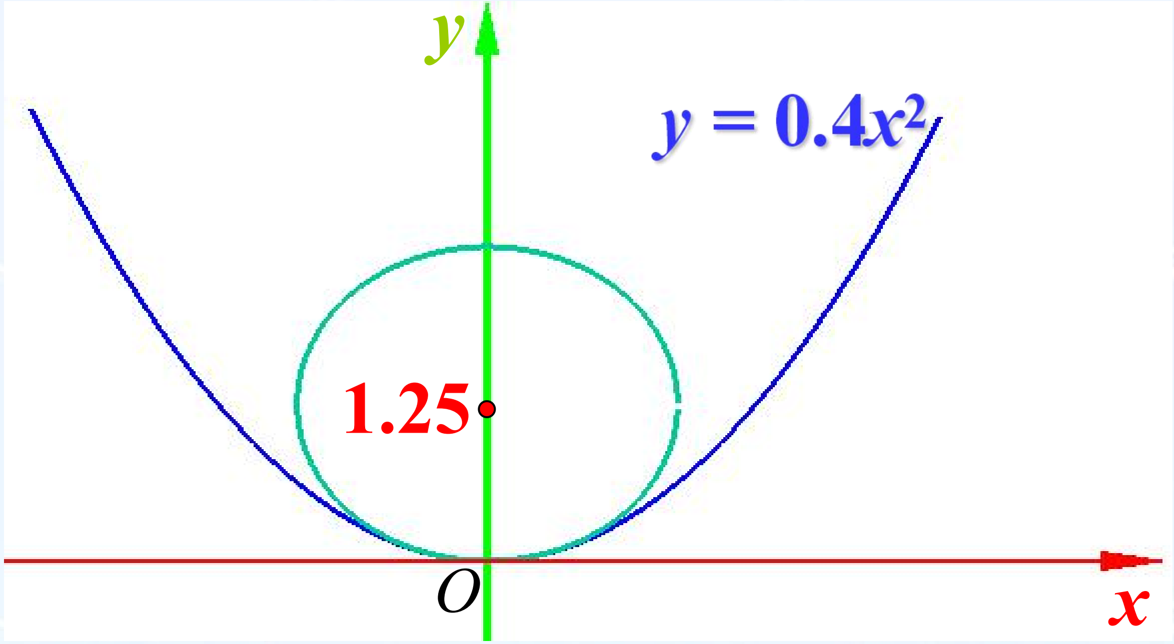
$$|DM|=\frac{1}{K}=\rho.$$

以 D 为中心 ρ 为半径的圆叫做**曲率圆**，D 叫做曲率**中心**，ρ 叫做**曲率半径**.



例3 设工件内表面的截线为抛物线 $y = 0.4x^2$．现在要用砂轮磨削其内表面. 问用直径多大的砂轮才比较合适？

解



*四、曲率中心的计算公式 渐屈线与渐伸线

设已知曲线的方程为 $y=f(x)$，且其二阶导数 y'' 在点 x 不为零，则曲线在对应点 $M(x,y)$ 的曲率中心 $D(\alpha,\beta)$ 的坐标为

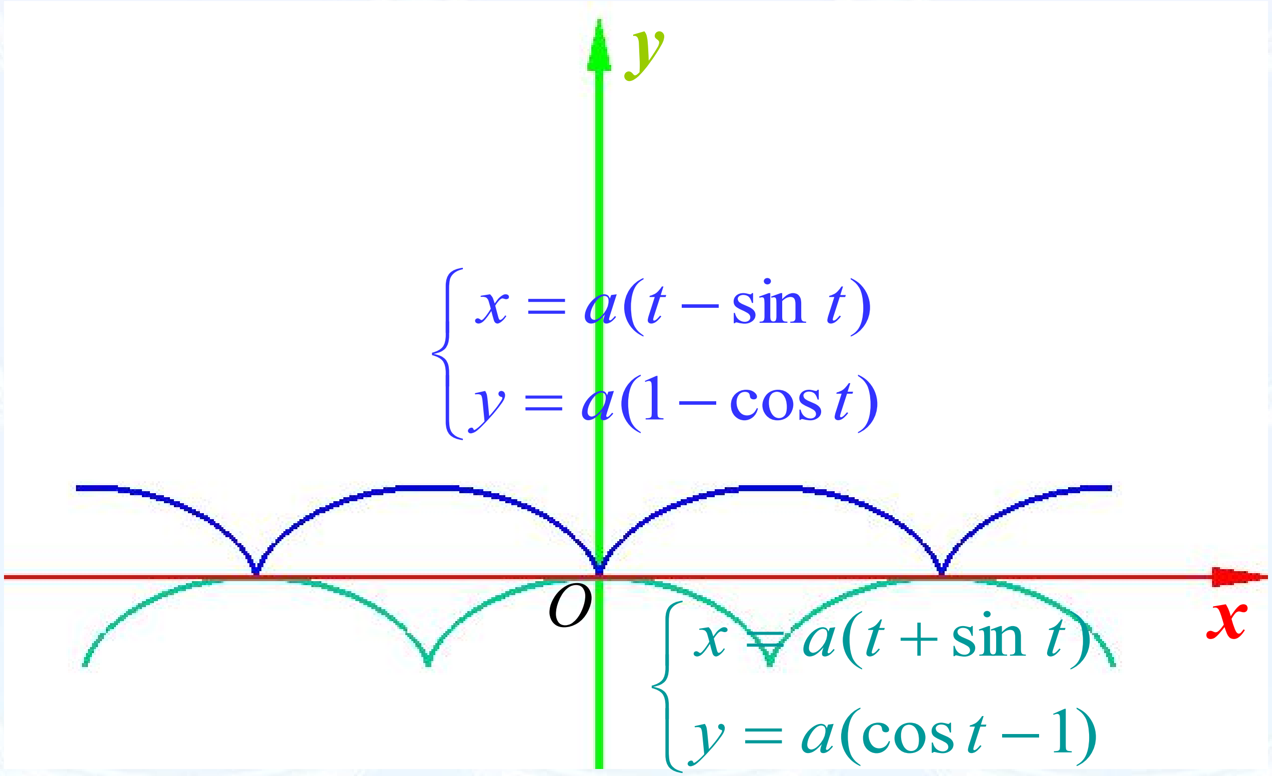
$$\begin{cases} \alpha = x - \dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}, \\ \beta = y + \dfrac{1+y'^2}{y''}. \end{cases}$$

证明

当点 $(x, f(x))$ 沿曲线 C 移动时，相应的曲率中心 D 的轨迹曲线 G 称为曲线 C 的**渐屈线**，而曲线 C 称为曲线 G 的**渐伸线**.

例4 求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 的渐屈线方程.

解



作业

P176 2； 3