一、平面图形的面积

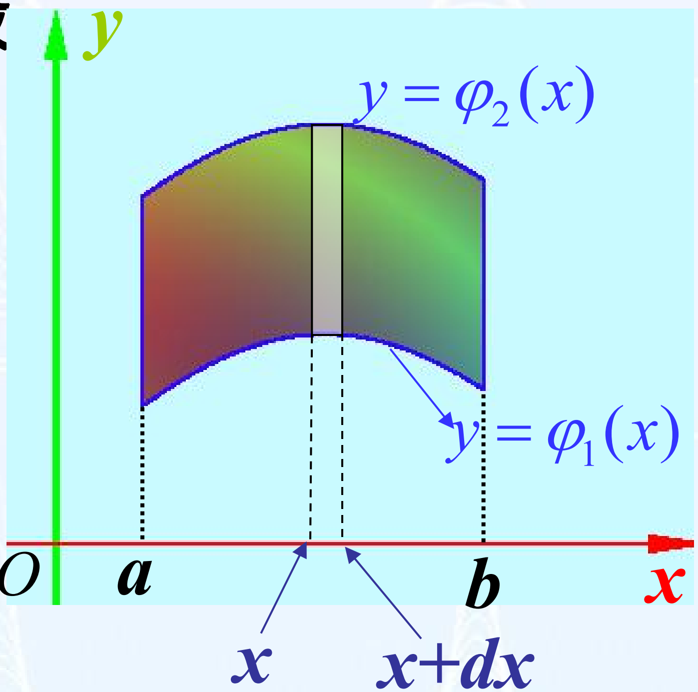
二、体积

三、平面曲线的弧长

一、平面图形的面积

1. 直角坐标情形

在直角坐标系下，积分变量一般取 x 或 y． 取 x 为积分变量时，面积元素为小竖条，其面积可用如图所示的小矩形近似：



$$\mathrm{d}A=[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]\mathrm{d}x\,,$$

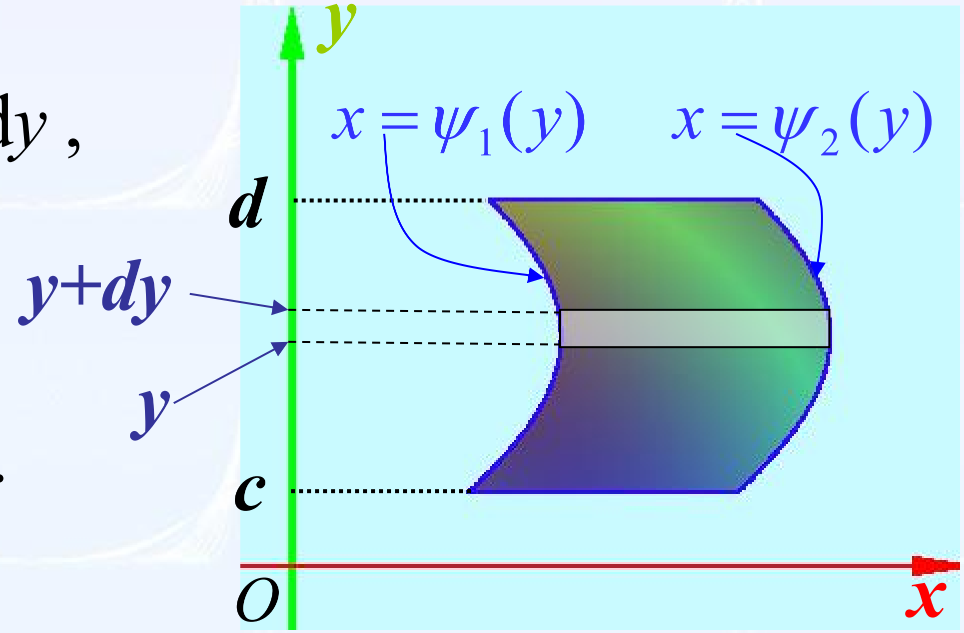
故面积为 $$A=\int_a^b[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]\mathrm{d}x\,.$$

取 y 为积分变量时，面积元素为小横条，其面积可用如图所示的小矩形近似：

$$\mathrm{d}A=[\psi_2(y)-\psi_1(y)]\mathrm{d}y\,,$$

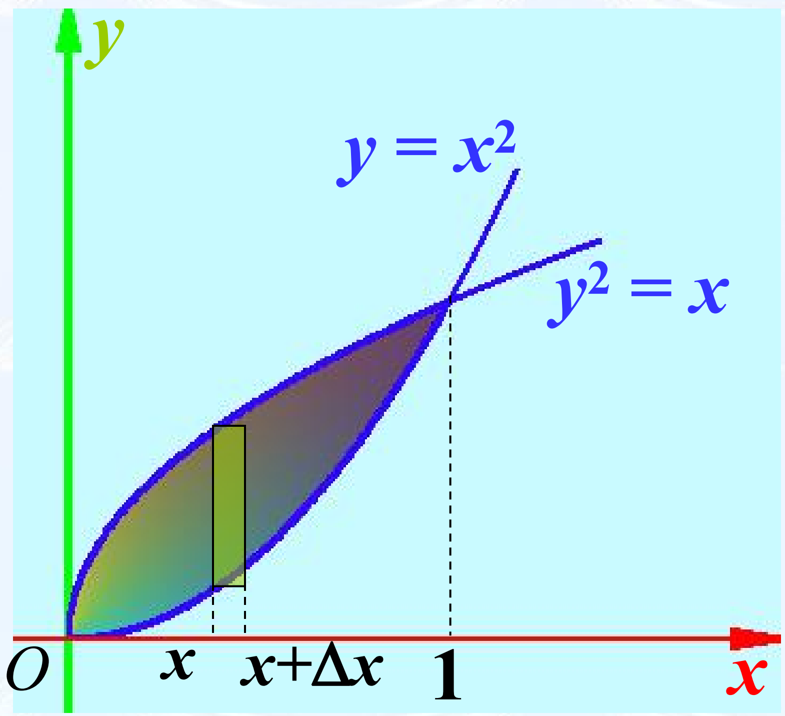
故面积为

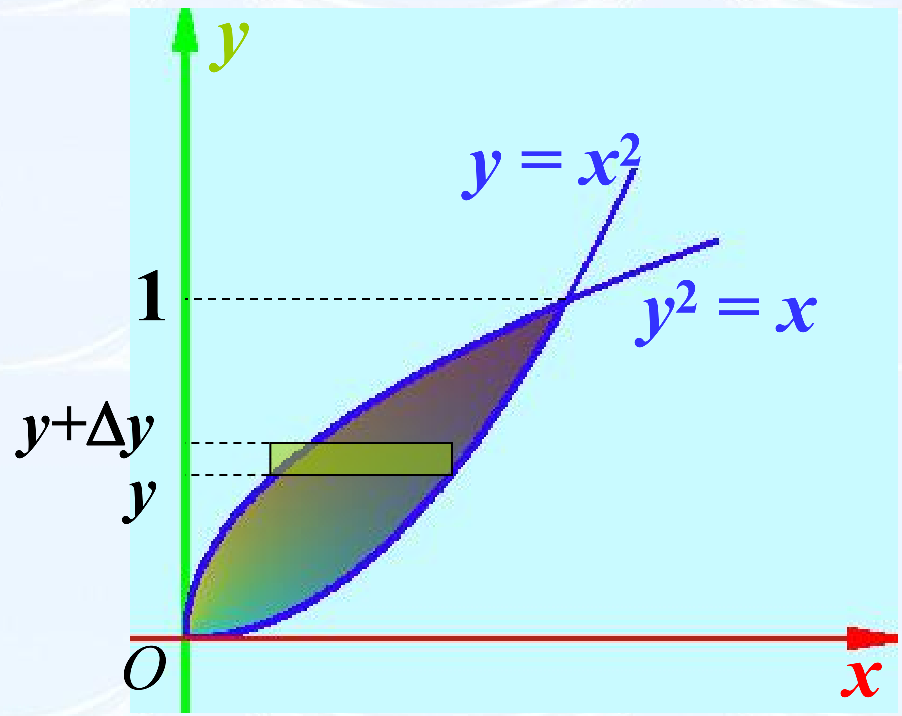
$$A=\int_c^d[\psi_2(y)-\psi_1(y)]\mathrm{d}y\,.$$



例1 计算由两条抛物线：$y^2=x$、$y=x^2$ 所围成的图形的面积.

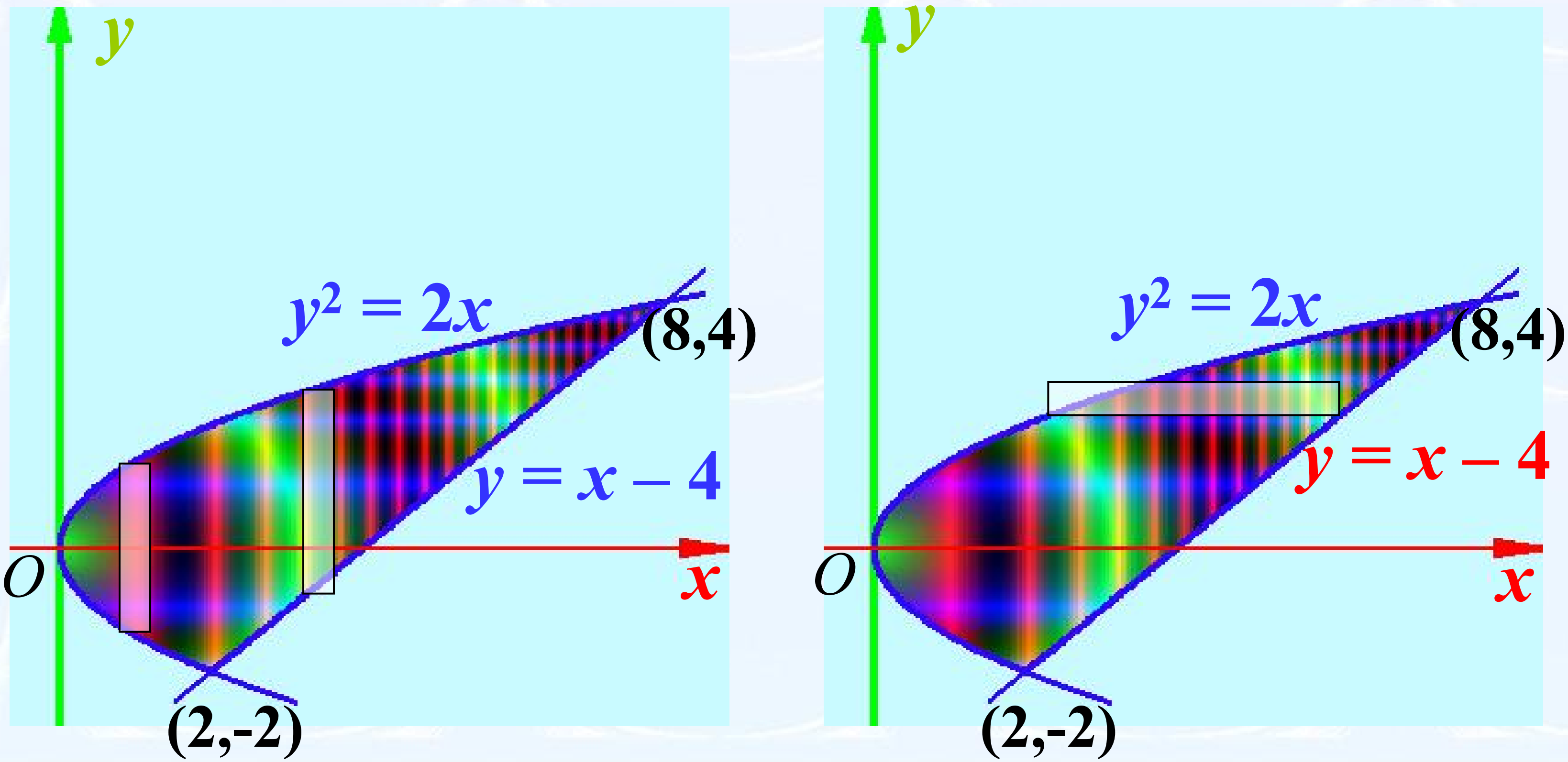
解





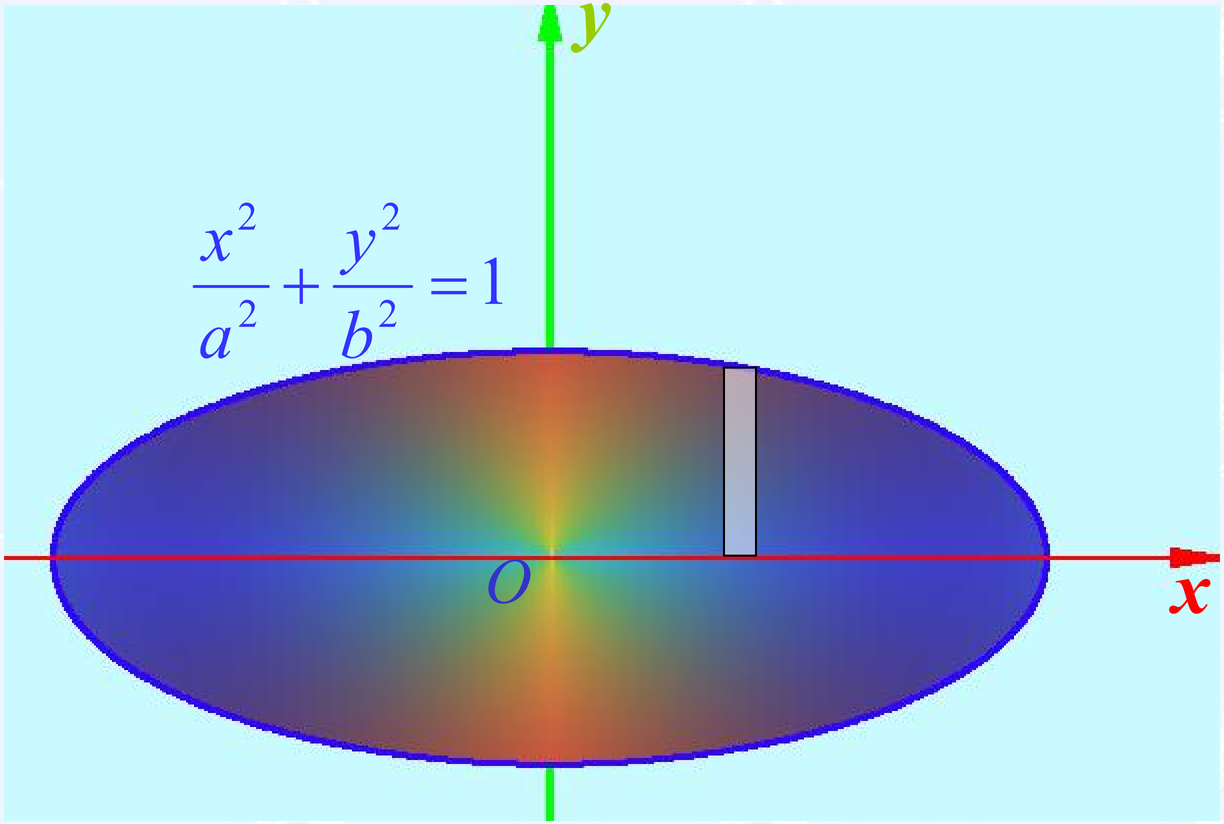
例2 计算抛物线：$y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围成的图形的面积.

解



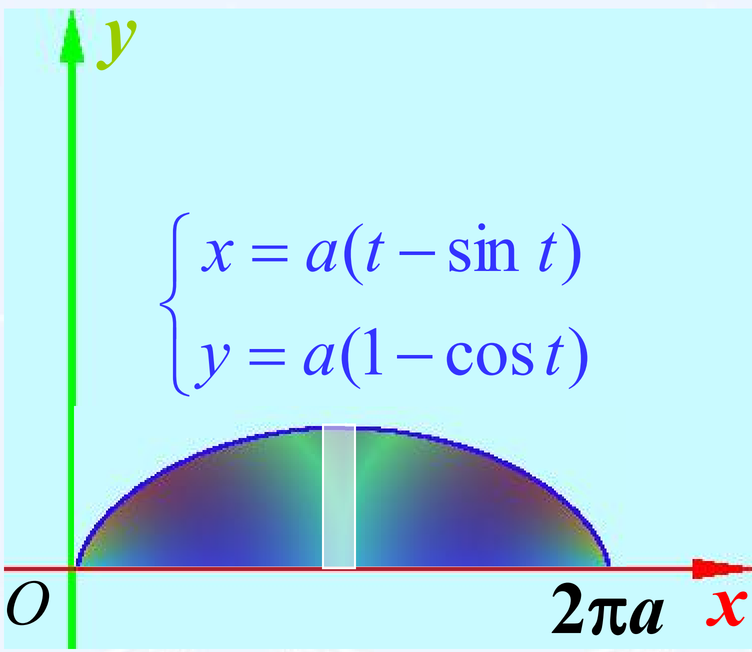
例3 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形的面积.

解



例4 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $(a > 0)$ 的一拱与 x 轴所围成的图形的面积.

解

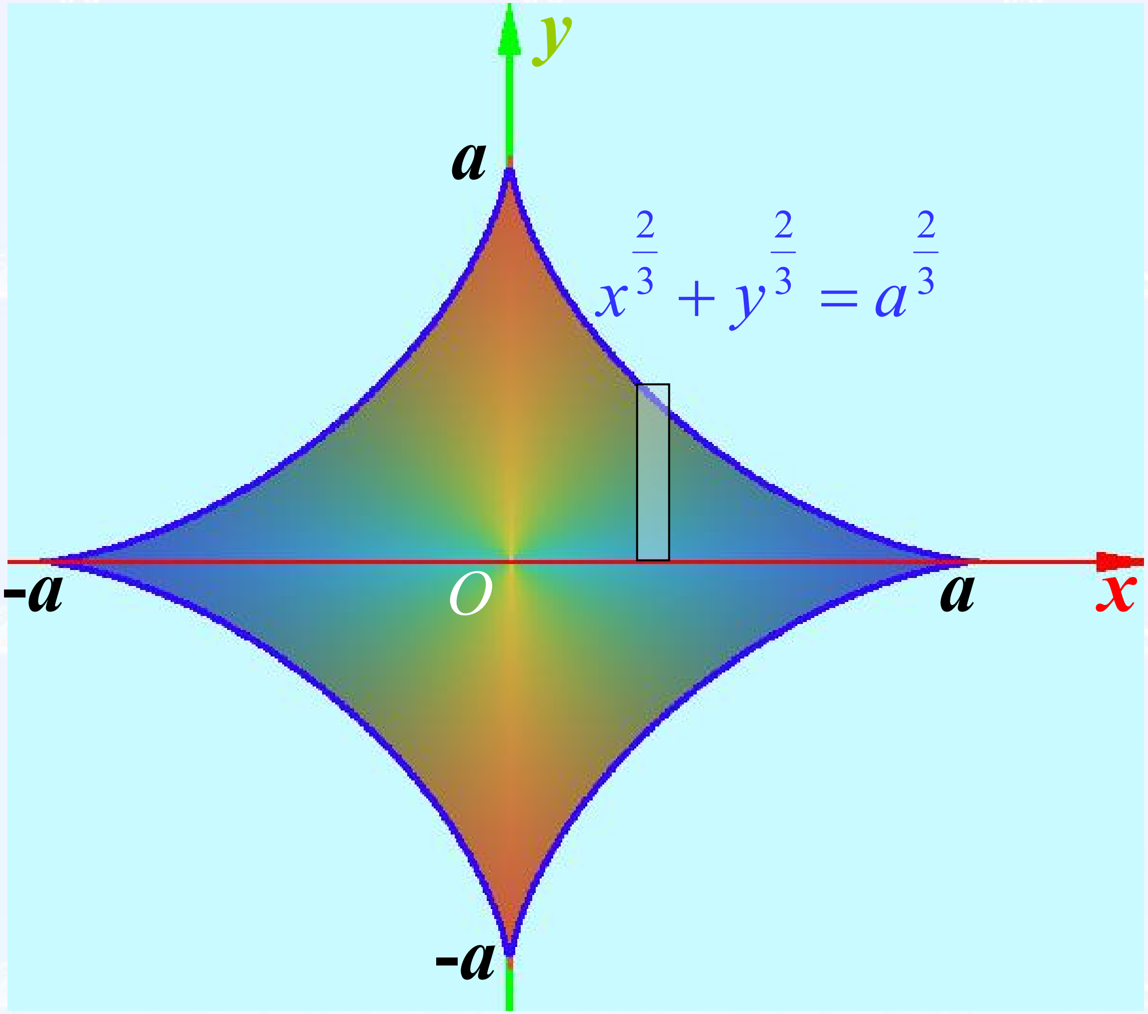


摆线动画

例5 计算星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\ (a>0)$ 所围成的图形的面积.

解

星形线动画

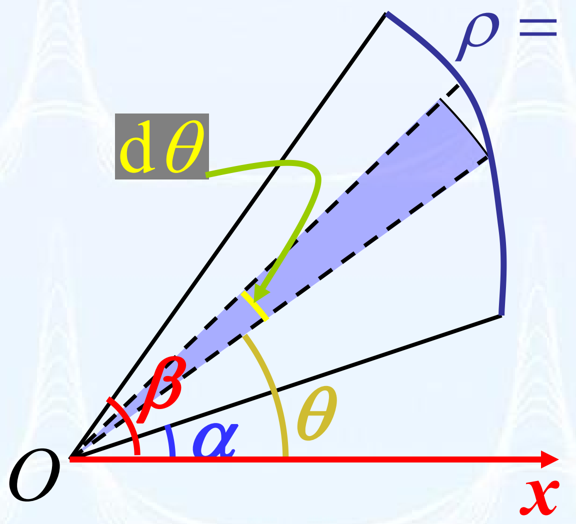


2. 极坐标情形

设 $\varphi(\theta)\in C[\alpha,\beta]$, $\varphi(\theta)\geq 0$, 求由曲线 $\rho=\varphi(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ 围成的曲边扇形的面积 .

在区间$[\alpha,\beta]$上任取小区间 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$, 则对应小区间上曲边扇形面积的近似值为

$$\mathrm{d}A=\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta,$$

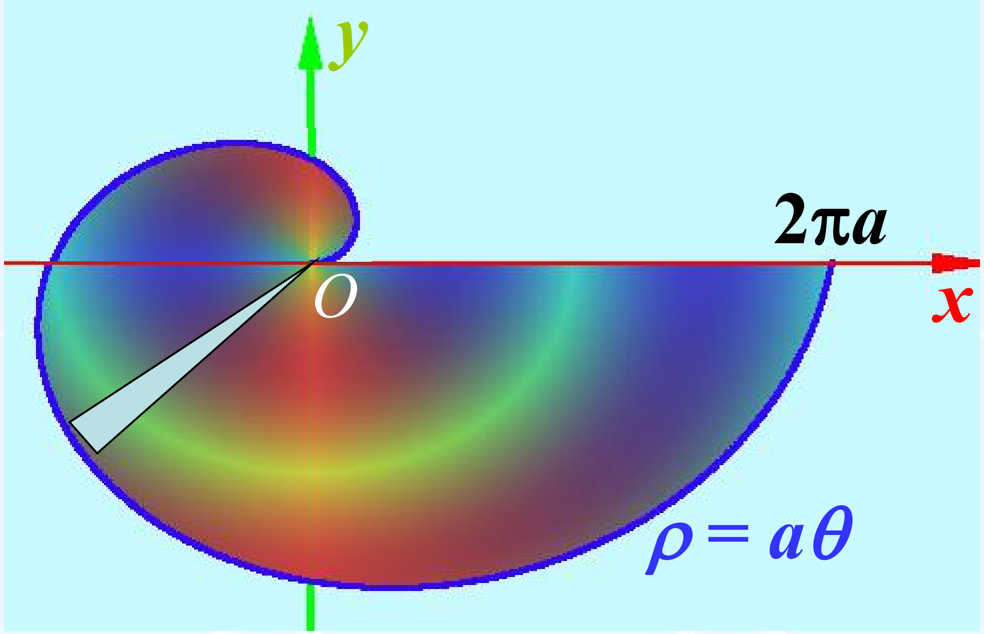


所求曲边扇形的面积为

$$\boxed{A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta.}$$

例6 计算阿基米德螺线 $\rho = a\theta \quad (a > 0)$上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积.

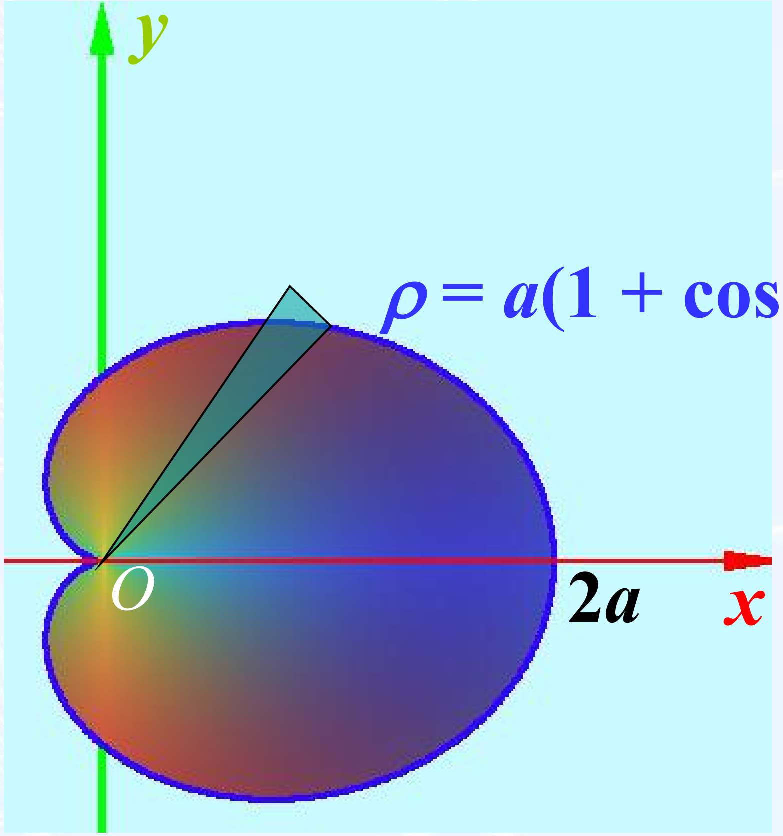
解



例7 计算心形线 $\rho = a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 所围成的图形的面积.

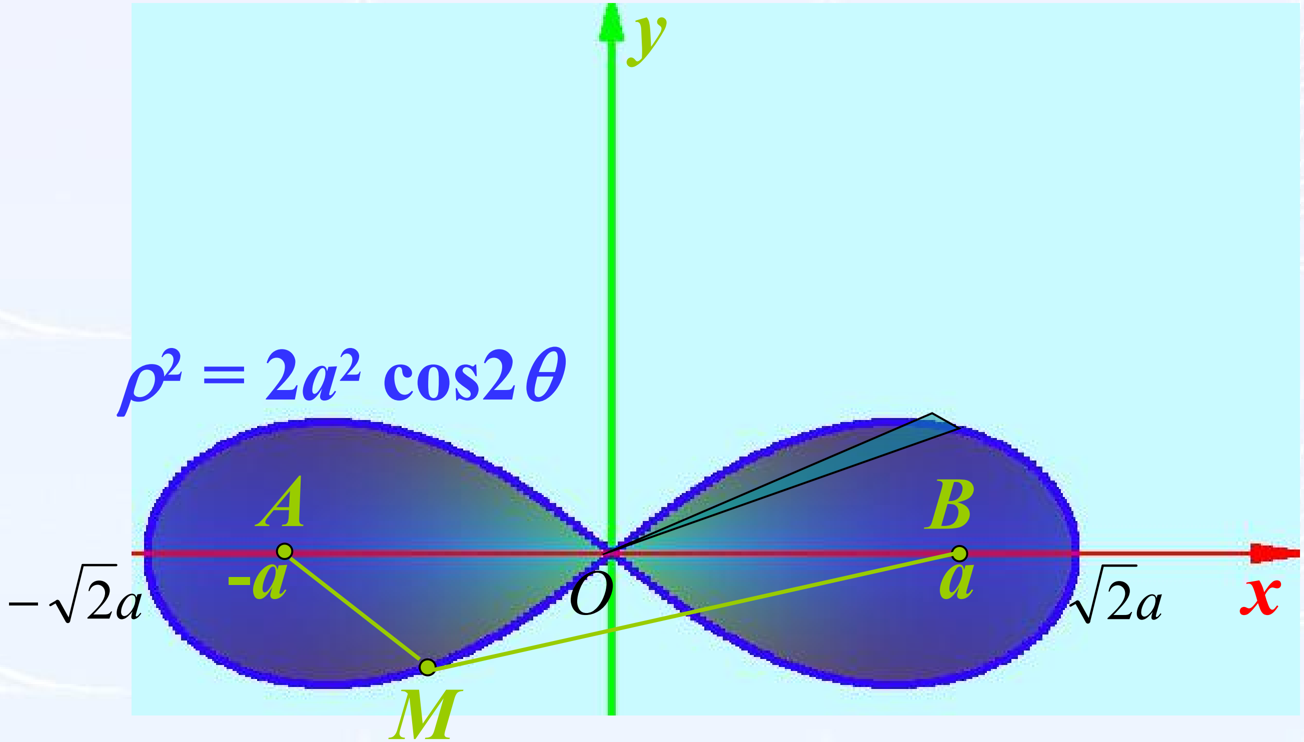
解

心形线动画



例8 计算双纽线 $\rho^2 = 2a^2\cos 2\theta\ (a > 0)$ 所围成的图形的面积.

解



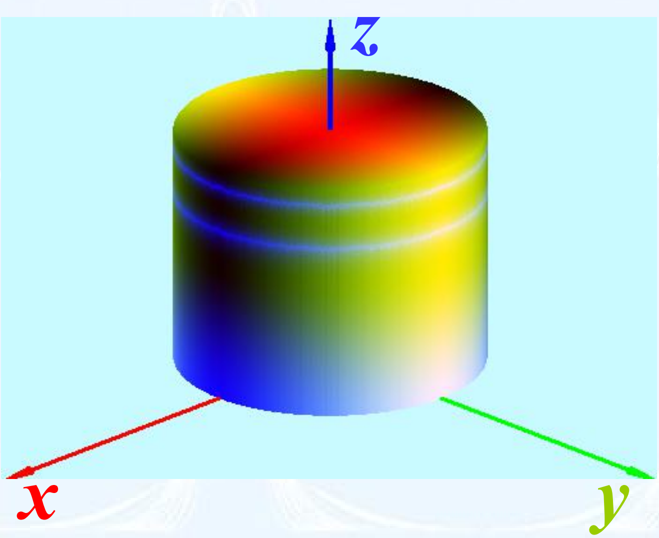
曲线名称： 伯努利双纽线　**轨迹：** $|MA| \cdot |MB| = a^2$

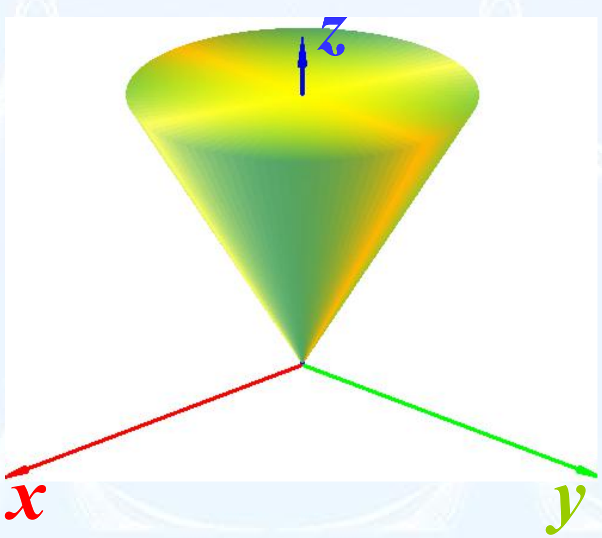
直角坐标方程： $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$

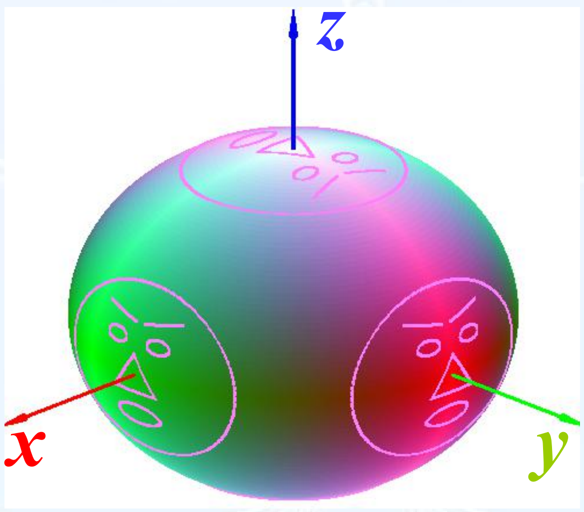
二、体积

1. 旋转体的体积

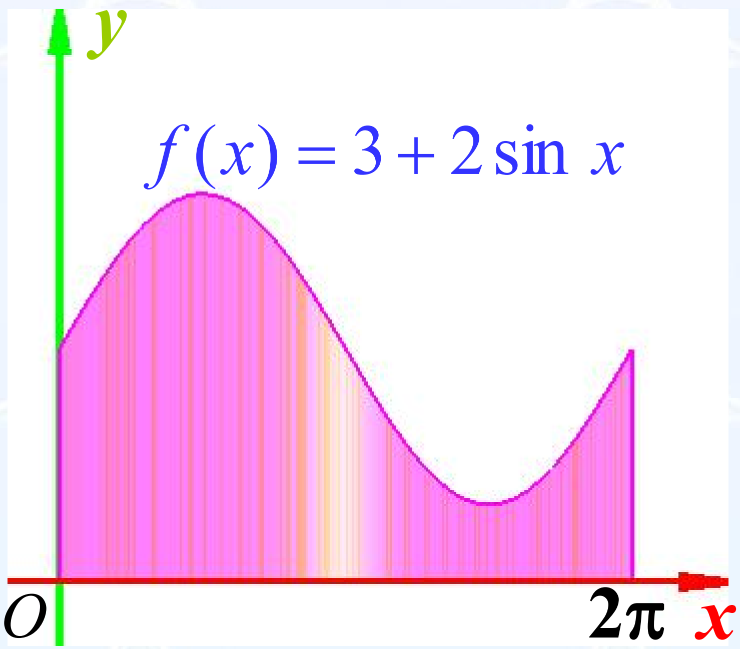
旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体．这直线叫做旋转轴．例如，

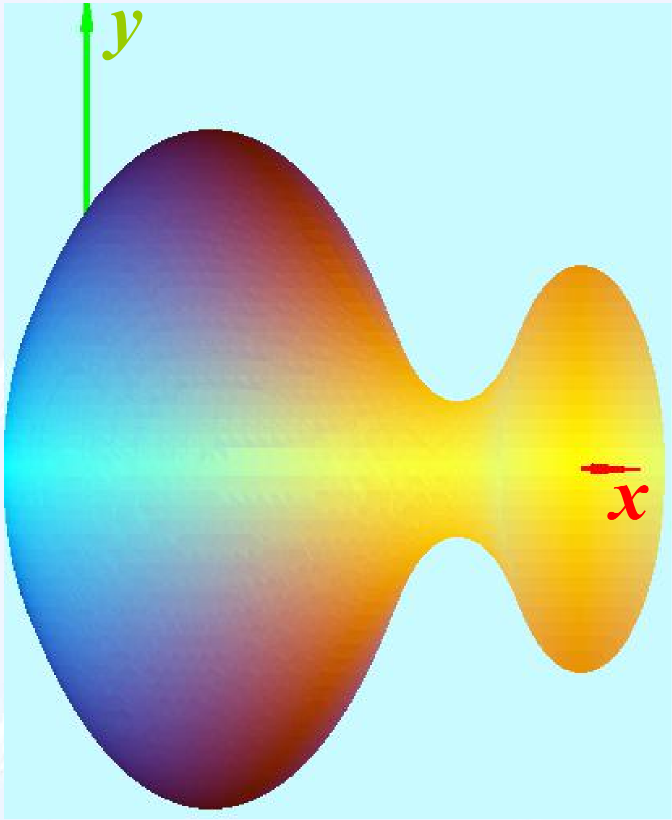


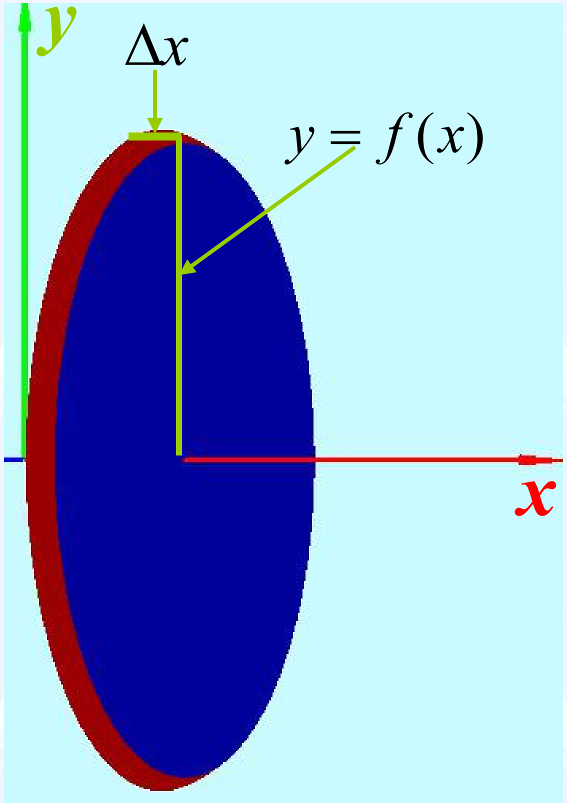




求如图所示的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.





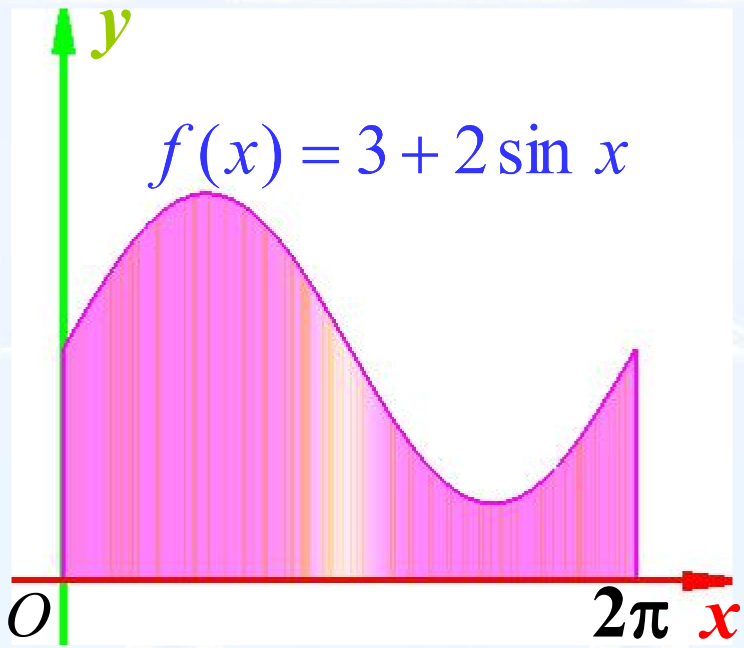


体积元素为 $\mathrm{d}V = \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$,

体积为 $$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

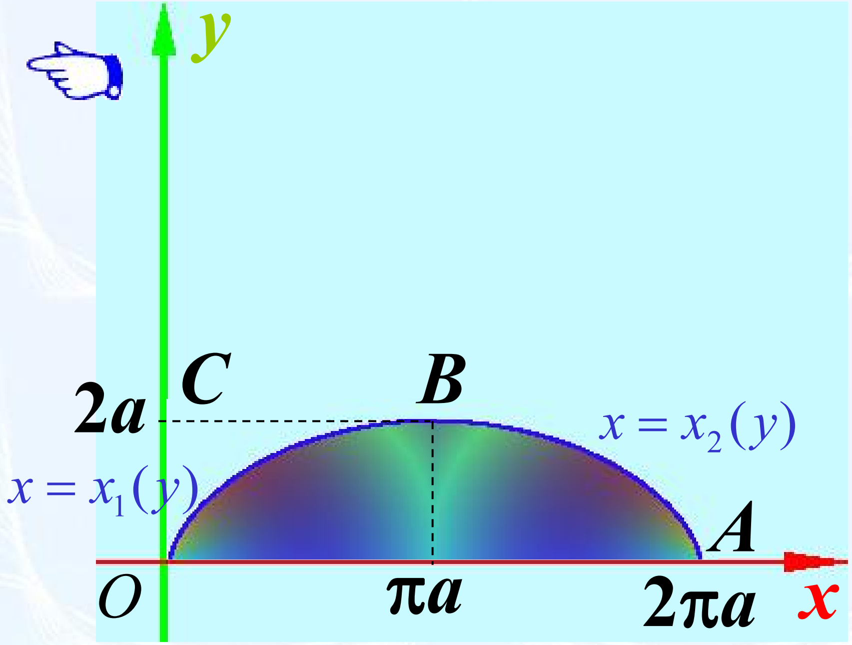
例9 求如图所示的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

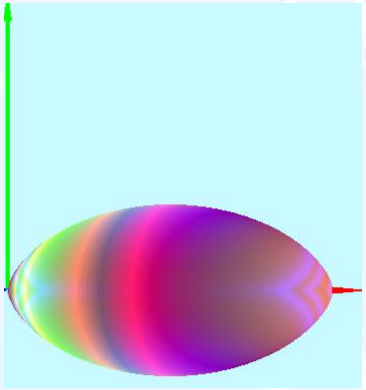
解

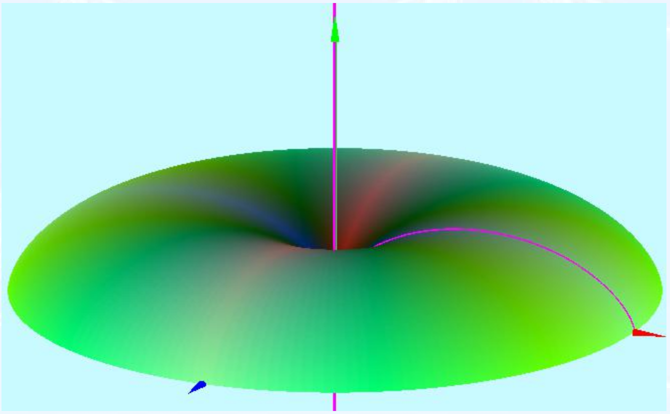


例10 计算由摆线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t), \end{cases}$ $(a>0)$ 的一拱与 x 轴所围成的图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转所得旋转体的体积.

解

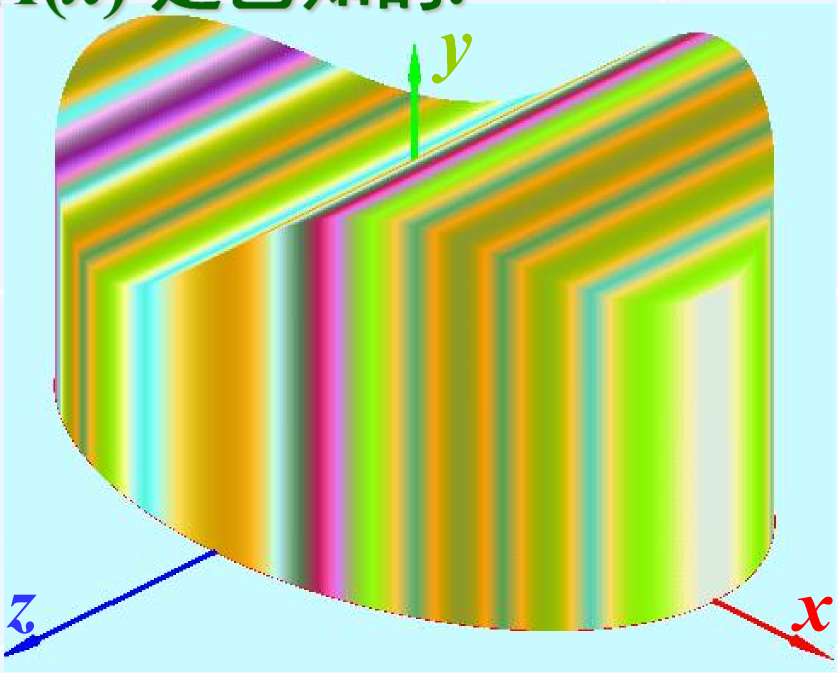


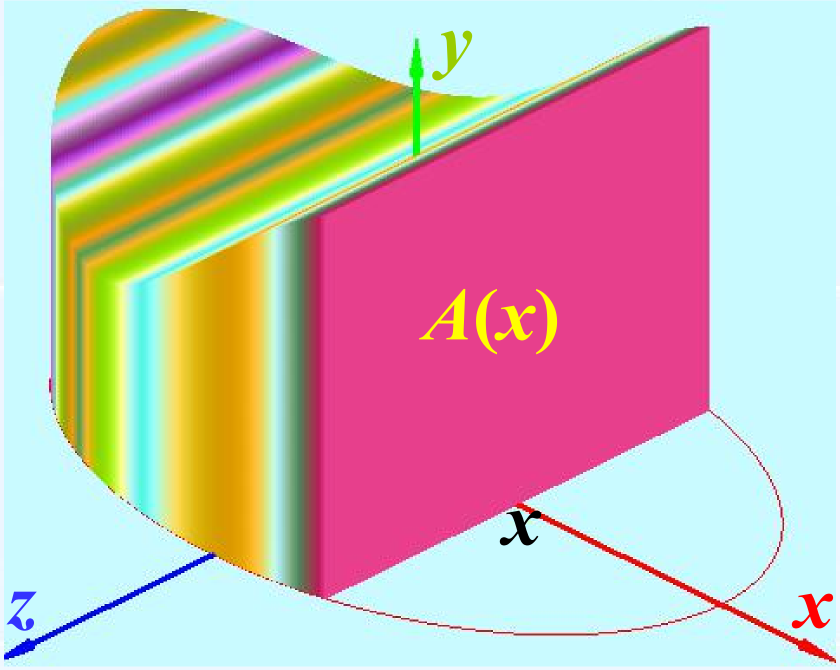




2. 平行截面面积为已知的立体的体积

如右下的立体为平行截面面积为已知的立体，其特点是：用垂直于 x 轴的平面截立体时，所得截面面积为 $A(x)$ 是已知的.

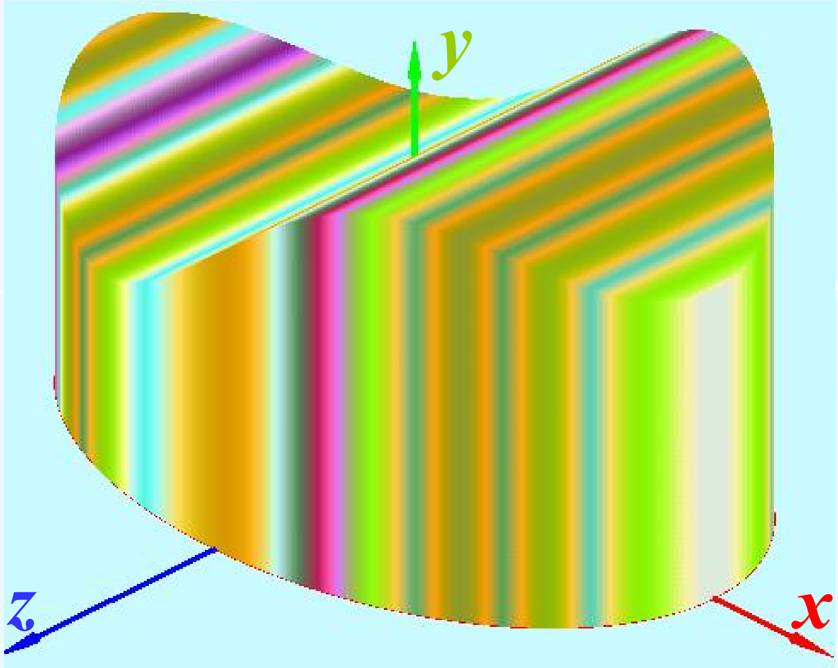


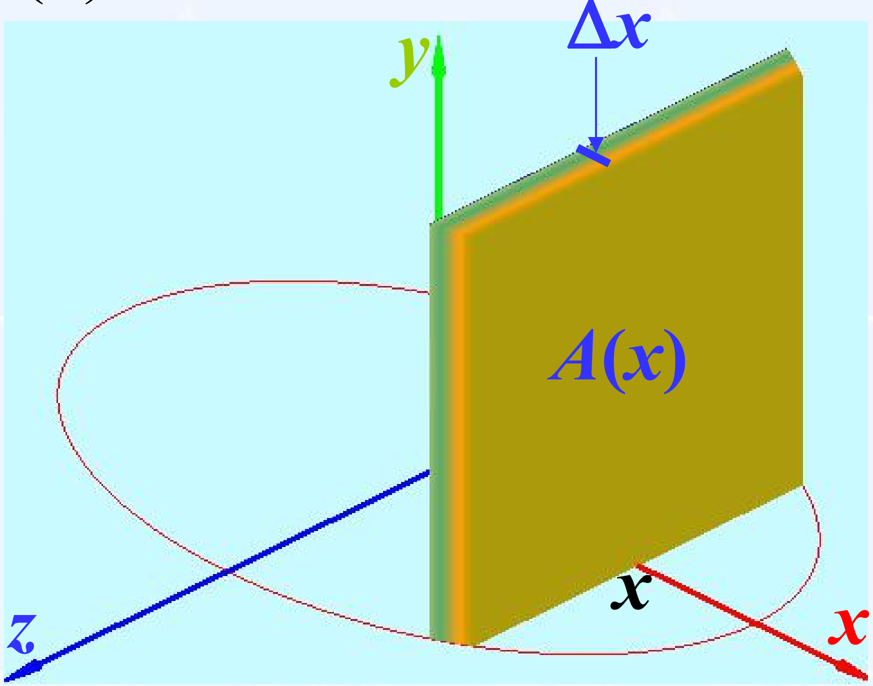


设所给立体垂直于x 轴的截面面积为$A(x)$，$A(x)$ 在 $[a\,,b]$上连续，则对应于小区间$[x\,,x+\mathrm{d}x]$的体积元素为

$$\mathrm{d}V=A(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

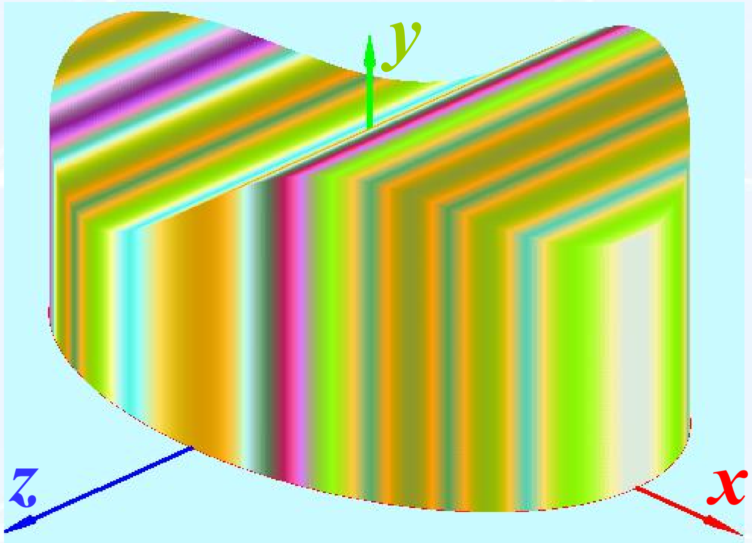
因此所求立体体积为 $V=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x\,.$

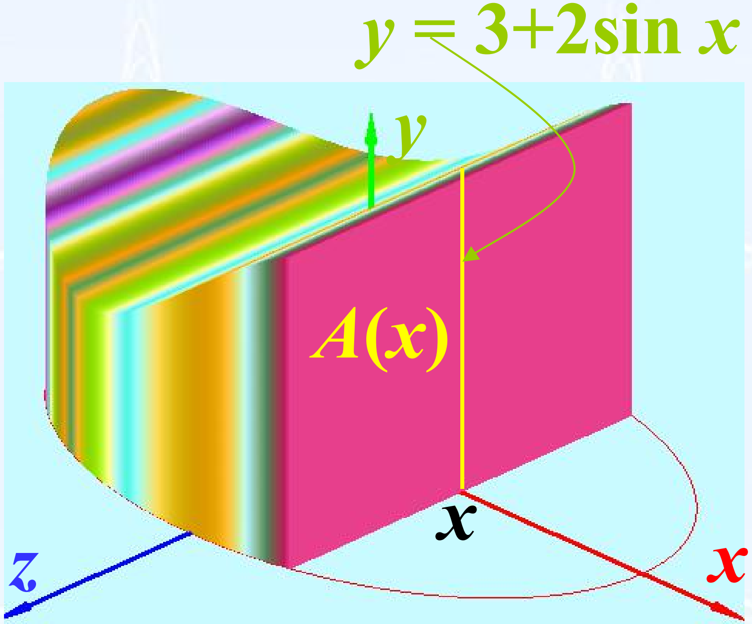




例11 下面的立体的底为 xOz 面上的椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$ 在 x 处的截面为矩形，其高的方程为 $y=3+2\sin x$，求其体积.

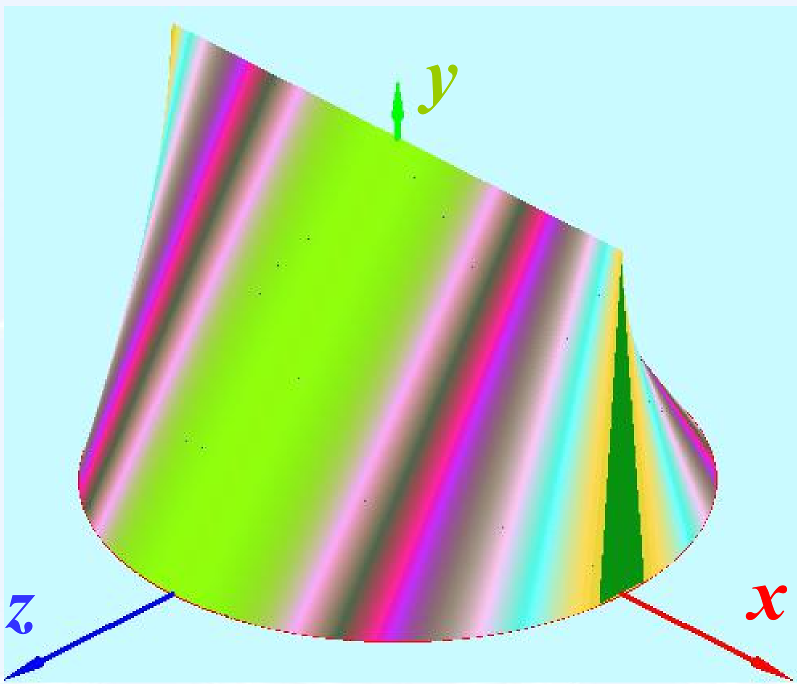
解

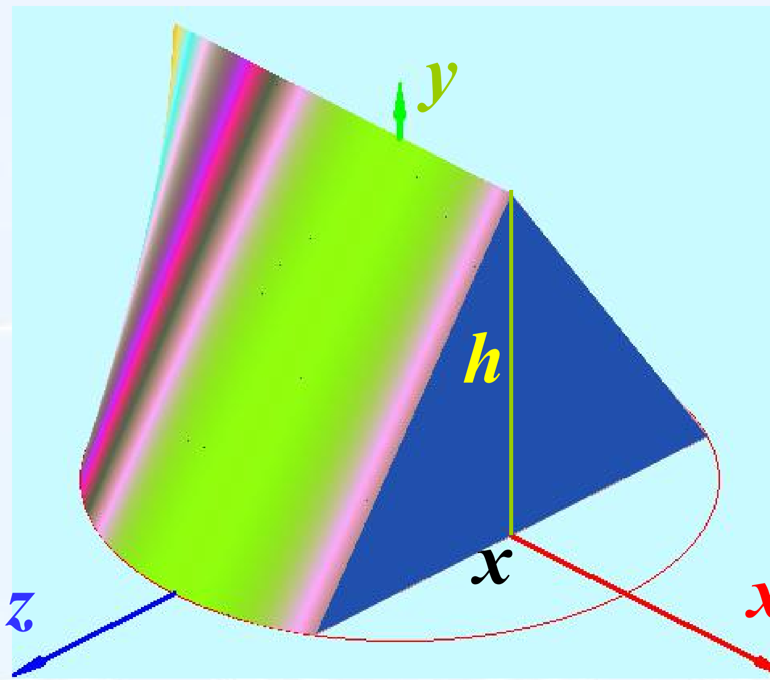




例12 正劈锥体的底为 xOz 面上的圆 $x^2+z^2=R^2$ 在 x 处的截面为三角形，其高为 h，求其体积.

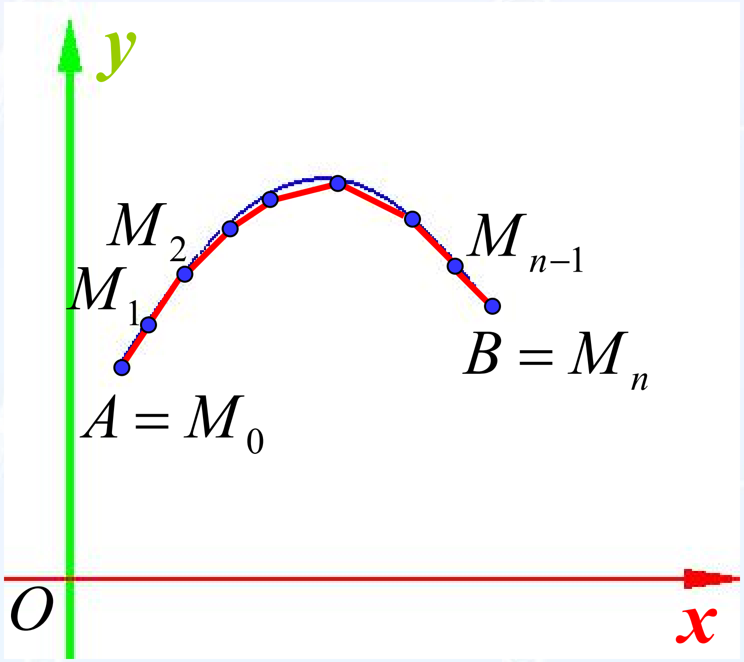
解





三、平面曲线的弧长

定义 在曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上依次任取分点 $A = M_0, M_1,$ $\ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_n = B$，并依次连接相邻的分点得一折线. 当这 n 个小线段长度的最大值 $\lambda \to 0$时此折线的长的极限存在，则称此极限为曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的**弧长**，并称此曲线弧是**可求长**的. 即 $s = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i|$.



定理 光滑曲线弧是可求长的.

弧长的计算公式

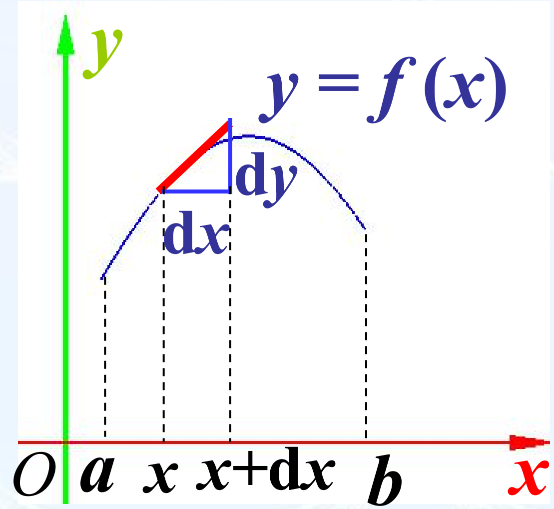
情形一

设曲线弧的方程为 $y=f(x)\ (a\le x\le b)$ 时，弧长元素(弧微分) 为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x\,,$$

所以曲线弧的长度为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x\,.$$



情形二

曲线弧由参数方程给出:

$$\begin{cases} x = \varphi(t)\,, \\ y = \psi(t)\,, \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)\,.$$

弧长元素(弧微分)为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t\,,$$

因此所求弧长

$$\boxed{s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\;\mathrm{d}t\,.}$$

情形三

曲线弧极坐标方程给出:

$$\rho=\rho(\theta)\quad(\alpha\le\theta\le\beta).$$

令 $x=\rho(\theta)\cos\theta,\ y=\rho(\theta)\sin\theta$, **则得弧长元素(弧微分)为**

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta,$$

因此所求弧长

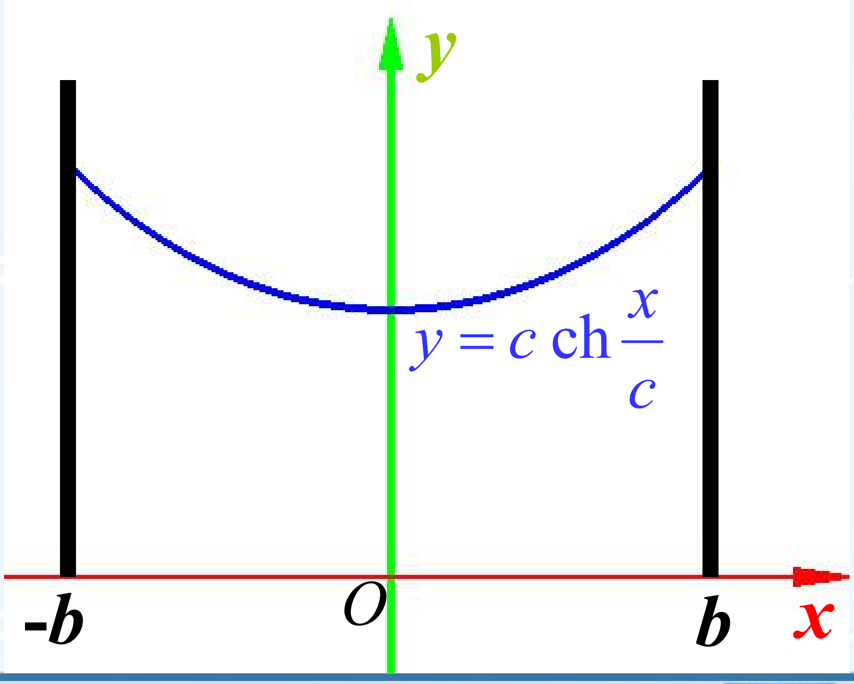
$$\boxed{s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\ \mathrm{d}\theta.}$$

例13 两根电线杆之间的电线，由于其本身的重量，下垂成悬链线．悬链线方程为

$$y = c\,\mathrm{ch}\frac{x}{c} \quad (-b \le x \le b),$$

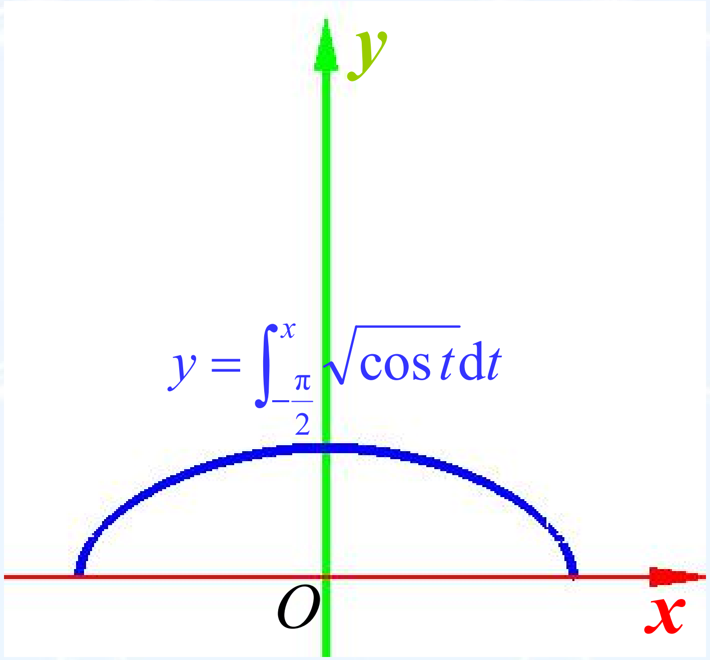
求这一段弧长．

解



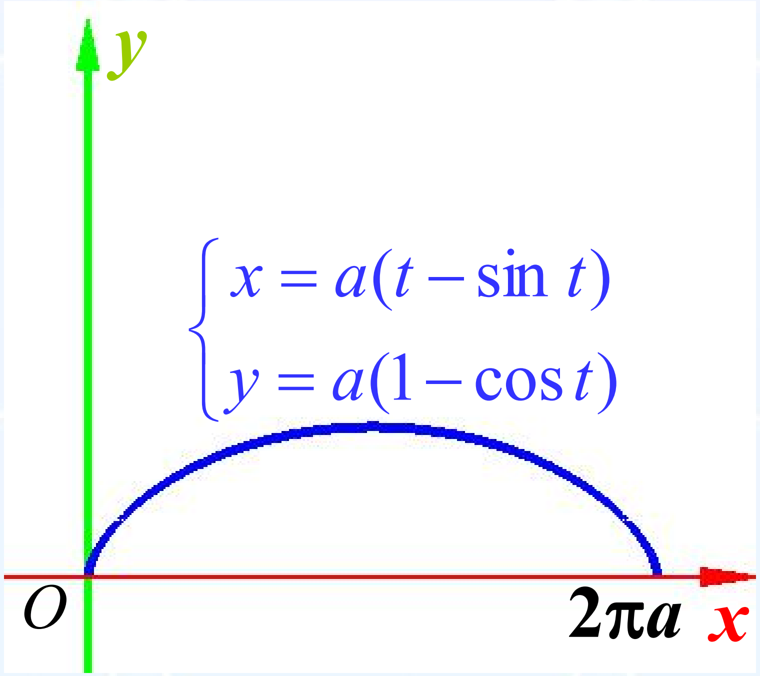
例14 求连续曲线段 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t$ 的弧长.

解



例15 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $(a > 0)$ 的一拱的长度.

解



例16 计算阿基米德螺线 $\rho = a\theta\ (a > 0)$ 上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧的长度.

解