第一节 不定积分的概念与性质

一、不定积分的概念

二、基本积分表

三、不定积分的性质

一、不定积分的概念

1. 求导运算的逆运算问题

已知函数 $f(x)$ $\xrightarrow{\text{求导运算}}$ $f'(x)$

已知导数 $f'(x)$ $\xrightarrow{\text{如何运算}}$ $f(x)$

显然这是两个互逆运算．本章将要讨论求导运算的逆运算——**积分运算**.

2. 原函数及其存在定理

定义1 如果在区间 I 上，可导函数 $F(x)$ 的导数为$f(x)$

即对任一 $x \in I$，都有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x \text{ ,}$$

那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$ 在区间 I 上的**原函数**.

例如，$\because (x^5)' = 5x^4$，所以 x^5 是 $5x^4$ 的一个原函数,

$\because (\sin x)' = \cos x$，所以$\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数,

$\because (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$，所以$\ln x$ 是 $1/x$ 在$(0 , +\infty)$上的一个原函数.

原函数存在定理 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，那么在 I 上存在可导函数 $F(x)$，使对任一 $x \in I$ 都有

$$F'(x) = f(x).$$

连续函数一定有原函数.

两点说明

(1) 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则 $F(x)+C$ (C 是任意常数) 也是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数. 因为 $[F(x)+C]' = F'(x) = f(x)$.

(2) 若 $F(x)$ 及 $\Phi(x)$ 都是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数，

则 $\Phi(x) = F(x) + C_0$ (C_0 为某个常数). 因为

$$[\Phi(x) - F(x)]' = f(x) - f(x) = 0,$$

所以有

$$\Phi(x) - F(x) = C_0, \Longrightarrow \Phi(x) = F(x) + C_0.$$

因此，$f(x)$ 在区间 I 上的任一原函数可表示为

$$F(x) + C.$$

3. 不定积分的概念

定义2 在区间 I 上，函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ (或 $f(x)\mathrm{d}x$) 在区间 I 上的**不定积分**，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$. 其中

$\int$ —— 积分号，　　$f(x)$ —— 被积函数，

$f(x)\mathrm{d}x$ —— 被积表达式，　　x —— 积分变量.

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数，则

$$\boxed{\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C\,.}$$

例如,

$$\because \left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)' = x^{\mu}, \qquad \therefore \int x^{\mu}\mathrm{d}x = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq 1);$$

$$\because (\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad \therefore \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C;$$

$$\because (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \therefore \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C;$$

$$\because (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \therefore \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C.$$

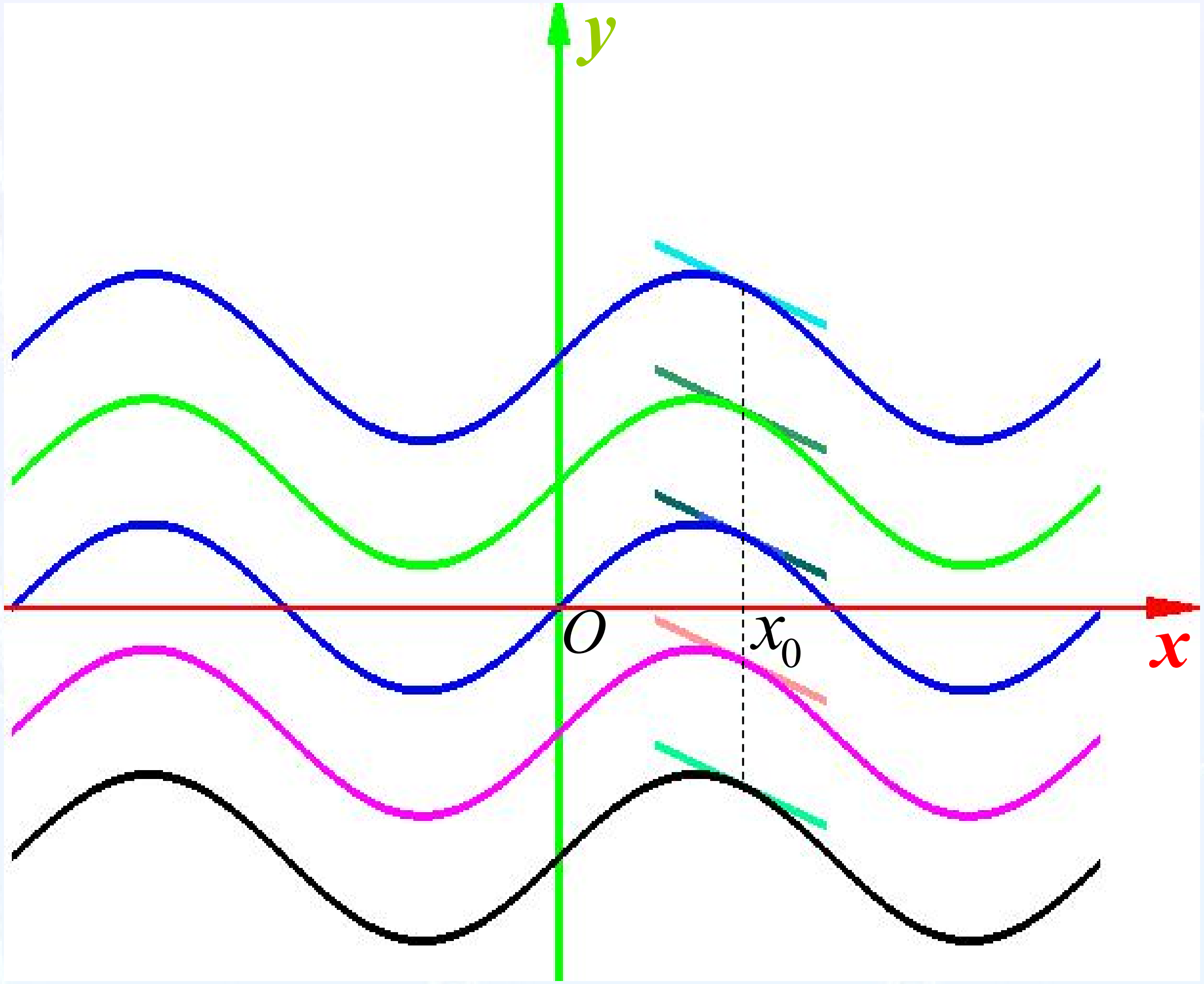
几点说明

(1) 不定积分的几何意义 设有

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

称 $F(x)+C$ 的图形为 $f(x)$ 的积分曲线. 积分曲线是一簇平行曲线, 它们在横坐标相同的点的切线平行.

例如, $y=\cos x$ 的积分曲线如下:



$y=\cos x$ 的积分曲线

(2) 积分运算与微分运算是互逆运算

设 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$， 则有

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = [F(x)+C]' = f(x),$$

或 $$\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = \mathrm{d}[F(x)+C] = f(x)\mathrm{d}x;$$

$$\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x)+C,$$

或 $$\int \mathrm{d}F(x) = F(x)+C.$$

例1 设曲线通过点(1, 2), 且其上任一点处的切线斜率等于该点横坐标的两倍, 求此曲线的方程.

解: $y' = 2x$

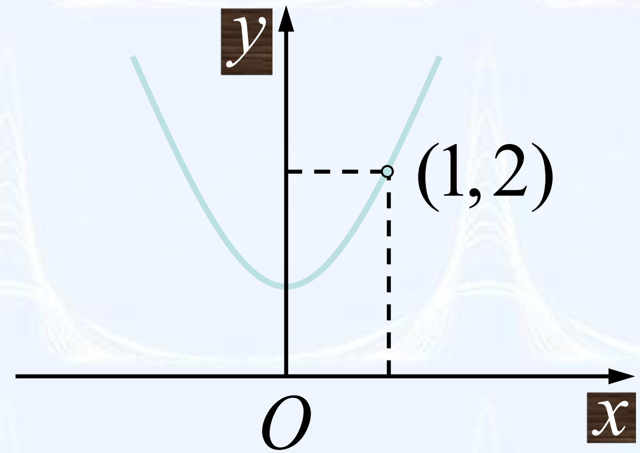
$$\therefore \quad y = \int 2x \mathrm{d}x = x^2 + C$$

所求曲线过点 (1, 2) , 故有

$$2 = 1^2 + C$$

$$\therefore \quad C = 1$$

因此所求曲线为 $y = x^2 + 1$



二、基本积分表

因为积分运算是微分运算的逆运算，所以对应于一个求导公式，可以写出一个积分公式．下面列出十三个基本的积分公式，称为**基本积分表**.

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$,

(2) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$,

(3) $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$,

(4) $\int \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$,

(5) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$,

(6) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$,

(7) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$,

(8) $\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$,

(9) $\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$,

(10) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$,

(11) $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$,

(12) $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$,

(13) $\int a^x\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

例2 计算下列不定积分：

$$(1)\int x^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\,;\quad (2)\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x}}\,;\quad (3)\int 2^{2x}\cdot 9^{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

解

三、不定积分的性质

性质1 设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的原函数存在，则

$$\int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x\,.$$

性质2 设函数$f(x)$的原函数存在，k为非零常数，则

$$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x\,.$$

例3 求 $\int \sqrt{x}(x^3-7)\mathrm{d}x$.

解

例4 求 $\int \frac{(x-1)^3}{x^2}\mathrm{d}x$.

解

例5 求 $\int \frac{x^6}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解

例6 求 $\int \cos^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x$.

解

例7 求 $\int \tan^2 x\mathrm{d}x$.

解

例8 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 \frac{x}{2}\cos^2 \frac{x}{2}}$.

解

课后作业

P 192： 1（4,5,6）,2（2,6， 11,12, 13,14,15,17,18， 19,21,23,25），5