第一节　高斯消元法

非齐次与齐次线性方程组的概念

设线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

若常数项$b_1, b_2, \cdots, b_n$不全为零，则称此方程组为**非齐次线性方程组**；若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为零，此时称方程组为**齐次线性方程组**.

例：
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

则方程组可写作矩阵形式：$AX=b$

A 称为线性方程组的系数矩阵

例：
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\tilde{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$\tilde{A}$ 称为线性方程组的增广矩阵

Back

解线性方程组的几个问题：

1. 什么条件下有解?

2. 若有解，解是否唯一，解有多少个?

3. 求出其全部解；并以某种简洁的方式表示线性方程组的所有解。

- 消元法

用消元法解线性方程组

◀Back

例 解线性方程组(消元法)

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 & (r_1) \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 & (r_2) \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 = 28 & (r_3) \end{cases}$$

对应的增广矩阵

$$(Ab) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 28 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{array}$$

解 $\boxed{r_1 \leftrightarrow r_2}$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 & (r_1) \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 & (r_2) \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 = 28 & (r_3) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \\ 5 & 7 & 1 & 28 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{array}$$

$\boxed{r_1 \times (-2) + r_2}$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 6x_2 - 9x_3 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 = 28 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_1 \times (-2) + r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -9 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 28 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 6x_2 - 9x_3 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 = 28 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -9 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 28 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 6x_2 - 9x_3 = 0 \\ 17x_2 - 19x_3 = 13 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -9 & 0 \\ 0 & 17 & -19 & 13 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 17x_2 - 19x_3 = 13 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 17 & -19 & 13 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 34x_2 - 38x_3 = 26 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 34 & -38 & 26 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 34x_2 - 38x_3 = 26 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 34 & -38 & 26 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 13x_3 = 26 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 26 \end{array}\right)$$

阶梯形矩阵

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_2 = 6 \\ x_3 = 2 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_2 = 6 \\ x_3 = 2 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -5 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

这是原方程组的唯一解

行最简矩阵

解线性方程组的消元法

在消元法中，我们对线性方程组作同解变形，其中用到了三种基本变形，即：

●交换两个方程的位置；

●某个方程乘以一个不为0的数；

●某个方程乘以一个数加到另一个方程。

这三种变形分别对应于增广矩阵的三种初等行变换。

大的步骤

$$(Ab)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 28 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 26 \end{array}\right)$$

阶梯形矩阵

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

行最简矩阵

Back

线性方程组　　　　　　　　对应的增广矩阵

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 = 28 \end{cases} \qquad (Ab) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 28 \end{array}\right)$$

解线性方程组的第 1 个步骤：

写下方程组对应的增广矩阵。

这是解线性方程组的准备工作。

$$(Ab)=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 2 & -1 & 6\\ 1 & -2 & 4 & 3\\ 5 & 7 & 1 & 28\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 3\\ 0 & 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 13 & 26\end{array}\right)$$

阶梯形矩阵

解线性方程组的第 2 个步骤：

对增广矩阵进行初等行变换，将之化作阶梯形矩阵

接下来，判断线性方程组是否有解。准则：

阶梯形矩阵的最后一个首元是否在最后一列：

- 若最后一个首元在最后一列，则原方程组无解；
- 否则有解。

$$(Ab)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 28 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

行最简矩阵

解线性方程组的第 **3** 个步骤：

若线性方程组有解，则进一步用初等行变换将增广矩阵化成行最简矩阵。

解线性方程组的第 **4** 个步骤：

写下行最简矩阵对应的线性方程组，然后直接求解：即给出线性方程组解的结构。

例：

$$(Ab)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{13}{7} & \frac{13}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1+\dfrac{3}{7}x_3+\dfrac{13}{7}x_4=\dfrac{13}{7} \\ x_2-\dfrac{2}{7}x_3-\dfrac{4}{7}x_4=-\dfrac{4}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{13}{7}-\dfrac{3}{7}x_3-\dfrac{13}{7}x_4 \\ x_2=-\dfrac{4}{7}+\dfrac{2}{7}x_3+\dfrac{4}{7}x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{13}{7} - \dfrac{3}{7}x_3 - \dfrac{13}{7}x_4 \\ x_2 = -\dfrac{4}{7} + \dfrac{2}{7}x_3 + \dfrac{4}{7}x_4 \end{cases}$$

令 $x_3 = 0$, $x_4 = 0$，则 $x_1 = 13/7$, $x_2 = -4/7$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/7 \\ -4/7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

为原方程组的一个解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{13}{7} - \dfrac{3}{7}x_3 - \dfrac{13}{7}x_4 \\ x_2 = -\dfrac{4}{7} + \dfrac{2}{7}x_3 + \dfrac{4}{7}x_4 \end{cases}$$

令 $x_3 = 0, x_4 = 1$，则 $x_1 = 0,\ x_2 = 0.$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 为原方程组的一个解。

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{7}x_3 + \frac{13}{7}x_4 = \frac{13}{7} \\ x_2 - \frac{2}{7}x_3 - \frac{4}{7}x_4 = -\frac{4}{7} \end{cases}$$

x_3, x_4 任意取值，代入可得原方程组的**通解**

$x_3 = a, x_4 = b$, 其中 a,b 是可以任意取值的量

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{7} - \frac{3}{7}a - \frac{13}{7}b \\ x_2 = -\frac{4}{7} + \frac{2}{7}a + \frac{4}{7}b \end{cases}$$

$x_3 = a, x_4 = b$, 其中 a,b 是可以任意取值的量

可得原方程组的通解：

a,b 是可以任意取值的量，称为自由变量

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{13}{7} - \dfrac{3}{7}a - \dfrac{13}{7}b \\ x_2 = -\dfrac{4}{7} + \dfrac{2}{7}a + \dfrac{4}{7}b \\ x_3 = a \\ x_4 = b \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{13}{7} - \dfrac{3}{7}a - \dfrac{13}{7}b \\ -\dfrac{4}{7} + \dfrac{2}{7}a + \dfrac{4}{7}b \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{7} - \frac{3}{7}a - \frac{13}{7}b \\ -\frac{4}{7} + \frac{2}{7}a + \frac{4}{7}b \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

变量个数

= 首元个数

+ 自由变量个数

其中 ***a*,*b*** 是可以任意取值的量，即自由变量。

方程组有**4**个变量 x_1, x_2, x_3, x_4.

增广矩阵化为阶梯形后，有**2**个首元，对应的变量为 x_1, x_2.

自由变量有**2**个，为 x_3, x_4.

消元法的一般理论

一般地，***n***个变量和 ***m*** 个方程的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

若 $x_1=c_1, x_2=c_2, \ldots, x_n=c_n$ 满足方程组，则称之为方程组的一个解。

通常我们将线性方程组的解写成列向量的形式，并称之为一个解向量：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

线性方程组的矩阵方程形式：$AX=b$.

向量 α 是线性方程组 $AX=b$ 的解 $\Leftrightarrow$ $A\alpha=b$.

线性方程组 $AX=b$ 的所有解构成一个集合，这个集合称为线性方程组的解空间：$\{X \mid AX=b\}$

定理1 线性方程组有解（相容）的充分必要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩.

$$r(A) = r(A|b) = r(\tilde{A})$$

定理2 当方程组有解（相容）时，若系数矩阵的秩等于未知数个数，则方程组有唯一解；当系数矩阵的秩小于未知量的个数时，方程组有无穷多解.

推论 n个方程n个未知量的线性方程组有唯一解的充分必要条件是方程组的系数行列式不等于零.

例 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

解 对增广矩阵B进行初等变换,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

解 对增广矩阵B进行初等变换,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2 = r(A) \neq r(\tilde{A}) = 3$$

故方程组无解.

例：解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 3 \end{cases}$$

解：$(Ab) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -6 & 3 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\text{消元过程}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

对应的方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_2 + 4x_3 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{回代过程}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

对应的方程组：

$$\begin{cases} x_1 - 6x_3 = 0 \\ x_2 + 4x_3 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} x_1 = 6x_3 \\ x_2 = 1 - 4x_3 \end{cases}$$

（x_3可任意取值）

例：求线性方程组的解

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 6x_3 = 0 \\ x_2 + 4x_3 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

解：

$$\begin{cases} x_1 = 6x_3 \\ x_2 = 1 - 4x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 6x_3 \\ x_2 = 1 - 4x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_3 \\ 1 - 4x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

显然，任取 $x_3=c$ 代入上式，都可得到原方程组的一个解，x_3 为自由变量。这个线性方程组有无穷多个解。

例：解线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad + 3x_4 - 2x_5 = 6 \\ \qquad\qquad x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

解：
$$\begin{cases} x_1 = 6 - 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 \\ x_3 = 1 \qquad - 4x_4 - 5x_5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 \\ x_2 \\ 1 \qquad - 4x_4 - 5x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

x_2, x_4, x_5 为自由变量，任意取值，代入可得原方程组的通解。

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例 证明方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \\ x_5 - x_1 = a_5 \end{cases}$$
有解的充要条件是$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$.在有解的情况下，求出它的一切解.

解证 对增广矩阵B进行初等变换,

方程组的增广矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^{5} a_i\end{pmatrix}$$

$$\because R(A)=R(B)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} a_i = 0$$

$\therefore$ 方程组有解的充要条件 是 $\sum_{i=1}^{5} a_i = 0.$

由于原方程组等价于方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \end{cases}$

由此得通解：

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + k \\ x_2 = a_2 + a_3 + a_4 + k \\ x_3 = a_3 + a_4 + k \\ x_4 = a_4 + k \end{cases}$$

$(x_5 = k$，k为任意常数$).$

- 消元法是对线性方程组作同解变形。

- 消元法解线性方程组的关键之处在于化简。相对于线性方程组对应的增广矩阵，消元法就是作初等行变换。于是问题转化为用初等行变换对矩阵进行化简。

- 阶梯形矩阵就是一种简单形式的矩阵。解线性方程组的第一个环节就是将其增广矩阵化简为阶梯形。

齐次线性方程组

线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

方程组的矩阵形式：***AX*=*b*.**

若***b*=0**，即常数项都为**0**，此时线性方程组为 ***AX*=0**，称之为齐次线性方程组。

显然，***X*=0** 是任何齐次线性方程组的解。

***X*=0** 这个解是显而易见的，因此被称为平凡解，也称为 **0** 解。

Back

齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

齐次线性方程组的矩阵形式：$AX=0$.

因而，对于齐次线性方程组，我们关心的问题就不是解的存在性，而是：

齐次线性方程组 是否存在 非 0 解。

定理3 齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是系数矩阵的秩小于未知数个数；只有零解的充分必要条件是系数矩阵的秩等于未知数个数.

推论1 如果齐次线性方程组中方程的个数小于未知量个数，则该方程组必有非零解.

推论2 n个方程n个未知量的齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是方程组的系数行列式等于零.

即： 对于齐次线性方程组 $AX=0$，若系数矩阵 A 为方阵，则：$AX=0$ 有非0解，当且仅当，系数矩阵的行列式 $|A|=0$.

例：行最简矩阵，**4** 阶：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应的齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

显然，取 x_3=**1** 代入即可得到一个非 **0** 解：$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

例 求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0 \\ x_1-x_2-4x_3-3x_4=0 \end{cases} .$$

解 对系数矩阵 A 施行初等行变换：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 \div (-3)]{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - \frac{5}{3}x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 0, \end{cases}$$

由此即得 $\begin{cases} x_1 = 2x_3 + \dfrac{5}{3}x_4, \\ x_2 = -2x_3 - \dfrac{4}{3}x_4, \end{cases}$ $(x_3, x_4$ 可任意取值$)$.

令 $x_3 = c_1, x_4 = c_2$，把它写成通常的参数 形式

$$\begin{cases} x_1 = 2c_1 + \dfrac{5}{3}c_2, \\ x_2 = -2c_1 - \dfrac{4}{3}c_2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \end{cases} \qquad \therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例 设有线性方程组

P91 例9

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

问λ取何值时,有解?有无穷多个解?

解 对增广矩阵 $B=(A,b)$ 作初等行变换,

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda - \lambda^2 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 & 1 - \lambda^3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda - \lambda^2 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda - \lambda^2 & 1 + \lambda - \lambda^2 - \lambda^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda(1 - \lambda) \\ 0 & 0 & (1 - \lambda)(2 + \lambda) & (1 - \lambda)(1 + \lambda)^2 \end{pmatrix}$$

(1) 当$\lambda = 1$时,

$$B \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$1 = R(A) = R(B) < 3$,方程组有无穷多解

其通解为 $\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$

$(x_2, x_3$为任意实数$)$.

Back

(2) 当$\lambda \neq 1$时,

$$B \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2+\lambda & (1+\lambda)^2 \end{pmatrix}$$

这时又分两种情形:

1) $\lambda \neq -2$时,$R(A) = R(B) = 3$,方程组有唯一解:

$$x_1 = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, \quad x_2 = \frac{1}{\lambda+2}, \quad x_3 = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}.$$

2) $\lambda = -2$时,

$$B \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$R(A) = 2 \neq R(B) = 3$，故方程组无解

三、小结

齐次线性方程组 $Ax = 0$

$R(A) = n \Leftrightarrow Ax = 0$只有零解；

$R(A) < n \Leftrightarrow Ax = 0$有非零解．

非齐次线性方程组 $Ax = b$

$R(A) = R(B) = n \Leftrightarrow Ax = b$有唯一解;

$R(A) = R(B) < n \Leftrightarrow Ax = b$有无穷多解.

$R(A) \neq R(B)$, 故方程组无解