第一节 矩阵的概念

矩阵的背景

二维表格

工厂＼产品	I	II	III	IV
1	13	34	54	67
2	11	38	61	59
3	12	32	47	74

数据的位置和值

$$\begin{matrix} 13 & 34 & 54 & 67 \\ 11 & 38 & 61 & 59 \\ 12 & 32 & 47 & 74 \end{matrix}$$

长方形数表

例　n个变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$与m个变量$y_1,y_2,\cdots,y_m$之间的关系式

$$
\begin{cases}
y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\
y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n.
\end{cases}
$$

表示一个从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$的线性变换. 其中a_{ij}为常数.

$$
\begin{cases}
y_1 = \boxed{a_{11}} x_1 + \boxed{a_{12}} x_2 + \cdots + \boxed{a_{1n}} x_n, \\
y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_m = a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n.
\end{cases}
$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \cdots\cdots \qquad \downarrow$$

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

系数矩阵

矩阵概念的引入

1. 线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

的解取决于

系数 $a_{ij}(i, j = 1,2,\cdots,n)$,

常数项 $b_i(i = 1,2,\cdots,n)$

线性方程组的系数与常数项按原位置可排为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

对线性方程组的研究可转化为对这张表的研究.

矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$
\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{matrix}
$$

称为 $m\times n$ 矩阵. 简称 $m\times n$ 矩阵. 记作

主对角线

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

副对角线

简记为 $A = A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} = \left(a_{ij}\right).$

这$m\times n$个数称为A的元素,简称为元.

元素全是实数的矩阵称为**实矩阵**

元素中存在复数的矩阵称为**复矩阵**.

矩阵的记法

小括号和中括号是矩阵的标志性符号

(1) A，B，C，……

(2) (a_{ij})，(b_{ij})，(c_{ij})，……

(3) $A = A_{m\times n}$，$(a_{ij})_{m\times n}$

例：$D=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad D=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -9 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 是一个 2×4 实矩阵

$\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个 3×3 复矩阵

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是一个 3×1 矩阵

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ 是一个 1×4 矩阵

$\begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix}$ 是一个 1×1 矩阵

几种特殊矩阵

(1) 行数与列数都等于 n 的矩阵 A，称为 n 阶方阵. 也可记作 A_n.

例如 $\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个3 阶方阵.

(2) 只有一行的矩阵

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

称为行矩阵(或行向量)

只有一列的矩阵

$$B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$ 称为列矩阵(或列向量).

不全为0

（3）形如 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \cdots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 的方阵，称为对角矩阵(或对角阵)

记作 $A = diag\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right)$

（4）元素全为零的矩阵称为零矩阵，$m \times n$ 零矩阵记作 $\boldsymbol{o}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$.

注意　不同阶数的零矩阵是不相等的.

例如
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

例

$$O_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{O}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

- 当 $m=n$ 时，称矩阵为 n 阶矩阵或 n 阶方阵。

  方阵就是行数和列数相同的矩阵。

例：3阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$m=n=1$，一 阶矩阵可以看作一个数。

- 矩阵运算---负矩阵，类似于向量的负向量：

定义：$A=(a_{ij})$, 则A 的负矩阵为 $-A=(-a_{ij})$.

例：$$-\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5)方阵

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & O \\ & & \ddots & \\ O & & & 1 \end{pmatrix}$$

全为1

称为单位矩阵（或单位阵）.

二、 同型矩阵与矩阵相等的概念

1. 两个矩阵的行数相等, 列数相等时, 称为同型矩阵.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ 为同型矩阵.

2. 两个矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 $B(b_{ij})$ 为同型矩阵,并且对应元素相等,即

$$a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

则称**矩阵** A 与 B **相等**,记作 $A=B$.

例 设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&x&3\\y&1&z\end{pmatrix},$$

已知 $A=B$,求 x, y, z.

解 $\because\ A=B,$

$\therefore x=2,\ y=3,\ z=2.$

小结

(1)矩阵的概念 m行n列的一个数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(2) 特殊矩阵

- 方阵 $(m=n)$;
- 行矩阵与列矩阵; $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $B=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$;
- 单位矩阵; $\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$
- 对角矩阵; $\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}$.
- 零矩阵.