彭杰

在上一讲

我们建立了行列式的一些重要性质

这一讲我们讲如何利用行列式的性质来计算行列式

行 (row) 运算

为方便，引入几个行 (列)
运算的记号

$r_i \leftrightarrow r_j$　交换 第i, j 两行 (行列式变号)

$r_i \times k$　第 i 行乘以数 k　(行列式乘以k)

$r_i + kr_j$　第 j 行乘以 k 加到第 i 行 (行列式不变)

列 (column) 运算

$c_i \leftrightarrow c_j$　交换第 i, j 两列　(行列式变号)

$c_i \times k$　第 i 列乘以数 k　(行列式乘以k)

$c_i + kc_j$　第 j 列乘以 k 加到第 i 列 (行列式不变)

行列式的几种行 (列) 运算

$$D \xRightarrow[c_i \leftrightarrow c_j]{r_i \leftrightarrow r_j} -D$$

$$D \xRightarrow[c_i \times k]{r_i \times k} kD$$

$$D \xlongequal[c_i + kc_j]{r_i + kr_j} D$$

化为三角形计算行列式

三角形行列式（斜边为主对角线）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

行列式可以通过一系列的行(列)运算化为

上三角形行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{m} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

计算行列式常用方法：利用运算$r_i + kr_j$把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

例 1 $$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} \boxed{1 & -1 & 2 & -3 & 1} \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 3 \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{r_2 + 3r_1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{array}{c}
\\
\\
\underline{\underline{r_2+3r_1}}
\end{array}
\begin{vmatrix}
\boxed{1 \quad -1 \quad 2 \quad -3 \quad 1} \\
0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad -2 \\
2 \quad 0 \quad 4 \quad -2 \quad 1 \\
3 \quad -5 \quad 7 \quad -14 \quad 6 \\
4 \quad -4 \quad 10 \quad -10 \quad 2
\end{vmatrix}
\begin{array}{l}
\times(-2) \\
\oplus \\
\\
\\
\\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
(-4)\times \\
\\
\underline{\underline{r_2-2r_1}} \quad \oplus \\
\\
\\
\end{array}
\begin{vmatrix}
1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\
0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\
3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\
4 & -4 & 10 & -10 & 2
\end{vmatrix}
\begin{array}{l}
\times(-3) \\
\\
\oplus \\
\\
\\
\end{array}
$$

$$\overset{r_3-3r_1}{\underset{r_4-4r_1}{=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2 \leftrightarrow r_4}{=\!=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 + r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \oplus$$

$$\xlongequal{r_4 + r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times(-2) \\ \oplus \\ \\ \end{matrix}$$

$$\xlongequal{r_5 - 2r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \end{vmatrix} \times 4 \oplus$$

$$\xlongequal{r_5 + 4r_4} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -(-2)(-1)(-6) = 12.$$

练习

$$D=\begin{vmatrix}2 & -5 & 1 & 2\\ 3 & 7 & -1 & 4\\ 5 & -9 & 2 & 7\\ 4 & 6 & 1 & 2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 2\\ -1 & 7 & 3 & 4\\ 2 & -9 & 5 & 7\\ 1 & 6 & 4 & 2\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 5 & 6\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 11 & 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 5 & 6\\ 0 & 11 & 2 & 0\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -33 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -33 \end{vmatrix} = -99$$

例 2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2010 & 2011 & 2012 \\ 2015 & 2014 & 2013 \\ 2017 & 2016 & 2018 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 - c_2} \begin{vmatrix} -1 & 2011 & 2012 \\ 1 & 2014 & 2013 \\ 1 & 2016 & 2018 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3 + r_1]{r_2 + r_1} \begin{vmatrix} -1 & 2011 & 2012 \\ 0 & 4025 & 4025 \\ 0 & 4027 & 4030 \end{vmatrix} = 4025 \begin{vmatrix} -1 & 2011 & 2012 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4027 & 4030 \end{vmatrix}$$

$$= 4025 \begin{vmatrix} -1 & 2011 & 2012 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4025 \cdot (-3) = -12075$$

利用各行(各列)元素之和相等

例 3　计算行列式

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \xlongequal{\text{各行加到第 1 行}} \begin{vmatrix} a+3 & a+3 & a+3 & a+3 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \xlongequal[\text{第 1 行}]{\text{各行减}} (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3 & a+3 & a+3 & a+3 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3$$

例4 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

解 将第 $2,3,\cdots,n$ 列都加到第一列得

$$D=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ & a-b & & & \\ & & a-b & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & a-b \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

类似的例子

计算***n*** 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

答案：

$$(a+n-1)(a-1)^{n-1}$$

例5 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明 $D=D_1D_2.$

证明

对 D_1 作运算 $r_i + kr_j$，把 D_1 化为下三角形行列式

$$\text{设为}\quad D_1 = \begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix} = p_{11} \cdots p_{kk};$$

对 D_2 作运算 $c_i + kc_j$,把 D_2 化为下三角形行列式

$$\text{设为}\quad D_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & p_{nk} \end{vmatrix} = q_{11} \cdots q_{nn}.$$

对 D 的前 k 行作运算 $r_i + kr_j$，再对后 n 列作运算 $c_i + kc_j$,把 D 化为下三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix},$$

故 $\quad D = p_{11} \cdots p_{kk} \cdot q_{11} \cdots q_{nn} = D_1 D_2 .$

例 6 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & a^2+2a+1 & a^2+4a+4 & a^2+6a+9 \\ b_2 & b_2+2b+1 & b^2+4b+4 & b^2+6b+9 \\ c^2 & c^2+2c+1 & c^2+4c+4 & c^2+6c+9 \\ d^2 & d^2+2d+1 & d^2+4d+4 & d^2+6d+9 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2 & a^2+2a+1 & a^2+4a+4 & a^2+6a+9 \\ b^2 & b^2+2b+1 & b^2+4b+4 & b^2+6b+9 \\ c^2 & c^2+2c+1 & c^2+4c+4 & c^2+6c+9 \\ d^2 & d^2+2d+1 & d^2+4d+4 & d^2+6d+9 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$$ 各列减第1列

$$
=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}
$$

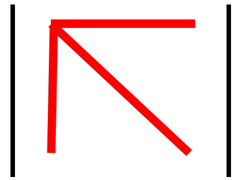
$$
\xlongequal[c_4-3c_2]{c_3-2c_2}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=0
$$

有两列成比例

例 7 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ d_1 & a_1 & & & \\ d_2 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ d_n & & & & a_n \end{vmatrix}$$

爪形行列式



其它元素为**0**

$(a_i \neq 0, (i=1,2,..n)$

$$c_1-\frac{d_1}{a_1}c_2 \quad D=\begin{vmatrix} a_0-\frac{d_1}{a_1}b_1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & & & \\ d_2 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ d_n & & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_0 - \frac{d_1}{a_1} b_1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & & & \\ d_2 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ d_n & & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$c_1 - \frac{d_j}{a_j} c_j$$

j*=2,…,*n

$$= \begin{vmatrix} a_0 - \frac{d_1}{a_1} b_1 - \cdots - \frac{d_n}{a_n} b_n & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & & & \\ 0 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix} a_0-\frac{d_1}{a_1}b_1-\dots-\frac{d_n}{a_n}b_n & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & & & \\ 0 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_n \end{vmatrix}$$

上三角行列式

$$=(a_0-\frac{d_1}{a_1}b_1-\dots-\frac{d_n}{a_n}b_n)a_1a_2\cdots a_n$$

例 8 计算 6 阶行列式

$$D_6 = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & a & & & b & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & c & & & d & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}$$

将最后一行依次与上面 的 4 行作相邻对换

$$= (-1)^4 \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ c & & & & & d \\ & a & & & b & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & c & & & d & \end{vmatrix}$$

$$D_6=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & a & & & b & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & c & & & d & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}=(-1)^4\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ c & & & & & d \\ & a & & & b & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & c & & & d & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^4\cdot(-1)^4\left|\begin{array}{cc|cccc} a & b & & & & \\ c & d & & & & \\ \hline & & a & & & b \\ & & & a & b & \\ & & & c & d & \\ & & c & & & d \end{array}\right|$$

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix}=|A||B|$$

$$=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & & & b \\ & a & b & \\ & c & d & \\ c & & & d \end{vmatrix}$$

将最后一列依次与前面的4列作相邻对换

$$D_6 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & & & b \\ & a & b & \\ & c & d & \\ c & & & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} D_4$$

递推公式

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^3$$

$$= (ad - bc)^3$$

一般有 $$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^n = (ad - bc)^n$$

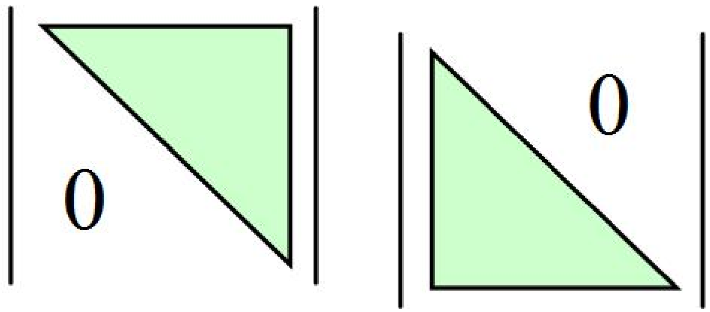
计算

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & & & b_n \\ & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a_1 & b_1 & & & \\ & & & c_1 & d_1 & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} & \\ c_n & & & & & & & d_n \end{vmatrix}$$

答案：$\prod_{i=1}^{n}(a_i d_i - b_i c_i) = \prod_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{vmatrix}$

行列式化为三角形的一般结论

一个行列式总可以通过行运算 $r_i \leftrightarrow \boldsymbol{k}r_j$ 化成上 (下) 三角形行列式：



而这种运算不会改变行列式

例如

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 9 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{r_1+r_2}{=} \begin{vmatrix} -1 & 4 & 4 & 9 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 9 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{r_2-r_1 \quad r_3+3r_1 \quad r_4+2r_1}{=} \begin{vmatrix} -1 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 21 & 14 & 28 \\ 0 & 7 & 9 & 20 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 9 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 4 & 9 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 9 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 21 & 14 & 28 \\ 0 & 7 & 9 & 20 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 14 & -119 \\ 0 & 0 & 9 & -29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 14 & -119 \\ 0 & 0 & 0 & 95/2 \end{vmatrix} = 665$$

$r_3+21r_2 \quad r_4+7r_2$

$r_4-(9/14)r_3$