四川农业大学　彭杰

线代总复习

三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

注意：只适用于二阶与三阶行列式.

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

实线上的三个元素的乘积, 正号,

虚线上的三个元素的乘积, 负号.

划重点

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 34 & 1 & 34 \end{vmatrix} = ?$$

划重点

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 34 & 1 & 34 \end{vmatrix} = 520$$

$$\begin{vmatrix} 我 & 0 & 你 \\ 0 & 有 & 0 \\ 生 & 0 & 幸 \end{vmatrix} = \text{我有幸一生有你}$$

例4

$$D=\begin{vmatrix}2 & -5 & 1 & 2\\ 3 & 7 & -1 & 4\\ 5 & -9 & 2 & 7\\ 4 & 6 & 1 & 2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 2\\ -1 & 7 & 3 & 4\\ 2 & -9 & 5 & 7\\ 1 & 6 & 4 & 2\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 5 & 6\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 11 & 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 5 & 6\\ 0 & 11 & 2 & 0\end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -33 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -33 \end{vmatrix} = -99
$$

例4

$$D=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\4&6&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\5&2&0&6\\1&1&0&3\\2&11&0&0\end{vmatrix}$$

$$=1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5&2&6\\1&1&3\\2&11&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&0&0\\1&1&3\\2&11&0\end{vmatrix}$$

$$=3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&3\\11&0\end{vmatrix}=3\cdot(-33)=-99$$

定义　在 n阶行列式中，把元素 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}.

记　$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$，　叫做元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

例如

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}.$$

定理1 一个 n 阶行列式，如果其中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都为零，那么这行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即 $D = a_{ij}A_{ij}$.

例如 $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{33}(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

例 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 7 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

解 按第一行展开，得

$$D=-3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}+(-5)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+3\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 7 \end{vmatrix}=27$$

例　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 7 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

解：按第二行展开，得

$$D=-1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}=27$$

例

计算行列式常用方法：化零，展开.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

解 $$D = (-1)^{3+3} 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-6) \cdot (-7) = 42$$

例 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

解 将第 $2,3,\cdots,n$ 列都加到第一列得

$$D=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\left[a+(n-1)b\right]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\left[a+(n-1)b\right]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ & a-b & & \mathbf{0} & \\ & & a-b & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & a-b \end{vmatrix}=\left[a+(n-1)b\right](a-b)^{n-1}.$$

用矩阵的初等变换求逆矩阵方法

$$\left(A\ E\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(E\ \ A^{-1}\right)$$

$n \times 2n$矩阵

例： 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$,求 A^{-1}.

解：

$$(A \mid E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&\boxed{-2}&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

矩阵可逆的判别

判别定理 $\boxed{n\text{阶方阵}A\text{可逆当且仅当}\ |A| \neq 0}$

A 可逆 $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $r(A)=n$ $\Leftrightarrow$ A 满秩（非奇异）

A 不可逆 $\Leftrightarrow$ $|A|=0$ $\Leftrightarrow$ $r(A)<n$ $\Leftrightarrow$ A 降秩（奇异）

推论： 设A、B为同阶方阵，若 $AB = E$，
则方阵 A和B都可逆，
且$A^{-1} = B$，$B^{-1} = A$

即：判断B是否为A的逆矩阵，
只需验证$AB = E$和$BA = E$中的一个即可

可逆矩阵运算性质：

若A 可逆

$$
\begin{cases}
\left(A^{-1}\right)^{-1} = A \\
(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1} \\
\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T} \\
\left(A^{*}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{*} = \dfrac{1}{|A|}A \\
\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \\
(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}
\end{cases}
$$

例： 设方阵A满足方程$A^2-A-2E=0$,证明：$A, A+2E$都可逆,并求它们的逆矩阵.

$$A^{-1}$$

证： 由$A^2-A-2E=0$,

得$A(A-E)=2E \Rightarrow A\frac{A-E}{2}=E$

所以 A 可逆，且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$.

又由$A^2-A-2E=0$

$$(A+2E)(A-3E)+4E=0$$

$$(A+2E)^{-1}$$

$$(A+2E)\left[-\frac{1}{4}(A-3E)\right]=E$$

所以$A+2E$可逆,$(A+2E)^{-1}=-\frac{1}{4}(A-3E)$

解线性方程组的消元法

在消元法中，我们对线性方程组作同解变形，其中用到了三种基本变形，即：

- 交换两个方程的位置；
- 某个方程乘以一个不为0的数；
- 某个方程乘以一个数加到另一个方程。

这三种变形分别对应于增广矩阵的三种初等行变换。

解线性方程组大的步骤

$$(Ab)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 28 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 26 \end{array}\right)$$

阶梯形矩阵

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

行最简矩阵

线性方程组解的情况

$Ax = 0$一定有解

$R(A) = n \iff Ax = 0$只有零解

$R(A) < n \iff Ax = 0$有非零解

(此时基础解系中含有 $n - R(A)$个解向量)

$Ax = b$

$R(A) = R(B) = n \iff Ax = b$有唯一解.

$R(A) = R(B) < n \iff Ax = b$有无穷多解.

$R(A) \neq R(B) \iff Ax = b$无解.

例 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 7x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系与通解.

解 对系数矩阵A作初等行变换，变为行最简矩阵，有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/7 & -3/7 \\ 0 & 1 & -5/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

便得
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{7}x_3 + \dfrac{3}{7}x_4, \\ x_2 = \dfrac{5}{7}x_3 + \dfrac{4}{7}x_4. \end{cases}$$

令$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，对应有$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{pmatrix}$,

即得基础解系$\xi_1 = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

并由此得到通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (c_1, c_2 \in R).$$

若令$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$，对应有$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

即得$\xi'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi'_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$也是所求方程组的基础解系

例　求解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2. \end{cases}$$

解　对增广矩阵B施行初等行变换：

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见$R(A)=R(B)=2$,故方程组有解,并有

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2, \\ x_3 = \qquad 2x_4 + 1/2. \end{cases}$$

取 $x_2 = x_4 = 0$,则 $x_1 = x_3 = \dfrac{1}{2}$,即得方程组的一个解

$$\eta^* = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

在对应的齐次线性方程 组$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4, \\ x_3 = \qquad 2x_4 \end{cases}$中,取

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 及 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 则 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 及 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

即得对应的齐次线性方 程组的基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

于是所求通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, (c_1, c_2 \in R).$$

例6 设有线性方程组 $\begin{cases} x_1+ \quad a x_2+2x_3=1 \\ x_1+(2a-1)x_2+3x_3=1 \\ x_1+ax_2+(a+3)x_3=b \end{cases}$

(1) 问a,b为何值时,方程组有唯一解，无穷多解,无解;

(2) 当方程组有无穷多解时,求出全部解

解　对增广矩阵$\tilde{A}$作初等行变换化简,

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 2a-1 & 3 & 1 \\ 1 & a & a+3 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & b-1 \end{pmatrix}=\tilde{B}.$$

当$a\neq 1$且$a\neq -1$时，$r_A=r_{\tilde{A}}=3$　方程组有唯一解;

当a=1时，$\tilde{B}=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & b-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$

当a=1时，$\tilde{B}=\begin{pmatrix}1 & a & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & b-1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & b-1\end{pmatrix}$

当$a=1,b\neq 1$时,$r_A=2\neq r_{\tilde{A}}=3$，　方程组无解;

当$a=1,b=1$时,$r_A=r_{\tilde{A}}=2$　　方程组有无穷多解;

$\tilde{B} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$　　全部解为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

k为任意数

$$\tilde{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & b-1 \end{pmatrix} = \tilde{B} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

同理,当$a=-1,b\neq 1$时 $r_A = 2 \neq r_{\tilde{A}} = 3$, 方程组无解;

当$a=-1,b=1$时,$r_A = r_{\tilde{A}} = 2$ 方程组有无穷多解;

$$\tilde{B} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 全部解为 $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

c为任意数

例 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

求矩阵A的列向量组的一个最大无关组，并把不属于最大无关组的列向量用最大无关组线性表示.

解 对A施行初等行变换变为 行阶梯形矩阵

$$A \overset{\text{初等行变换}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知$R(A)=3$,

故列向量组的最大无关 组含3个向量.

而三个非零行的非零首 元在1、2、4三列,

故 a_1, a_2, a_4,为列向量组的一个最大 无关组.

事实上

$$(a_1,a_2,a_4)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\4&-6&-2\\3&6&7\end{pmatrix}\overset{\text{初等行变换}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

知$R(a_1,a_2,a_4)=3$，故a_1,a_2,a_4线性无关

要把a_3,a_5用a_1,a_2,a_4线性表示，必须将A再变成行最简形矩阵.

$$A \overset{\text{初等行变换}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得

$$\begin{cases} a_3 = -a_1 - a_2, \\ a_5 = 4a_1 + 3a_2 - 3a_4 \end{cases}$$

例３ 设 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$，求A的特征值与特征向量.

解

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -4 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2,$$

令 $-(\lambda+1)(\lambda-2)^2=0$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=\lambda_3=2.$

当 $\lambda_1 = -1$时，解方程 $(A+E)x=0$.由

$$A+E=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ -4 & 1 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,

故对应于 $\lambda_1 = -1$的全体特征向量为

$$k\,p_1 \qquad (k\neq 0).$$

当$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$时，解方程$(A-2E)x = 0$.由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系为：

$$p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\qquad p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},$$

所以对应于$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$的全部特征向量为：

$$k_2 p_2 + k_3 p_3 \quad (k_2, k_3\text{不同时为 }0).$$

期末考试

考的全会　蒙的都对

2020.6.9