四川农业大学　彭杰

第五节 矩阵的初等变换和初等矩阵

1.矩阵的初等变换
2.初等矩阵
3.用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵

矩阵的初等变换

引例 消元法求解线性方程组

增广矩阵 $\tilde{A}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 & (1) \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 & (2) \\ 3x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 19 & (3) \end{cases} \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 9 \\ 3 & 2 & 9 & 19 \end{array}\right)$$

$$\downarrow r_2 + (-2)r_1 \quad r_3 + (-3)r_1$$

$$\xrightarrow[(3)+(-3)(1)]{(2)+(-2)(1)} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ -5x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 & (1)' \\ \quad -5x_2 - 2x_3 = 1 & (2)' \\ \quad\ -x_2 + 3x_3 = 7 & (3)' \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow (2)' \leftrightarrow (3)' \qquad\qquad \downarrow r_2 \leftrightarrow r_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 & (1)'' \\ \quad -x_2 + 3x_3 = 7 & (2)'' \\ \quad -5x_2 - 2x_3 = 1 & (3)'' \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow (3)'' + (-5)(2)'' \qquad\qquad \downarrow r_3 + (-5)r_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ \quad -x_2 + 3x_3 = 7 \\ \qquad -17x_3 = -34 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -17 & -34 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ \quad -x_2 + 3x_3 = 7 \\ \qquad -17x_3 = -34 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -17 & -34 \end{pmatrix}$$

解 得 $x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 2$

上述解方程组过程中对方程组反复使用了如下三种变换

1. 用一个非零数乘某一个方程;
2. 交换两个方程;
3. 把某一个方程的k倍加到另一个方程.

以上三种变换称为方程组的初等变换.

说明: 方程组进行了初等变换后, 不改变方程组的解.

线性方程组

对应增广矩阵

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 & (1) \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 & (2) \\ 3x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 19 & (3) \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 9 \\ 3 & 2 & 9 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)+(-3)(1)]{(2)+(-2)(1)} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 & (1)' \\ -5x_2 - 2x_3 = 1 & (2)' \\ -x_2 + 3x_3 = 7 & (3)' \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

（矩阵变换：$r_2 + (-2)r_1$，$r_3 + (-3)r_1$）

$$\xrightarrow{(2)' \leftrightarrow (3)'} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 & (1)'' \\ -x_2 + 3x_3 = 7 & (2)'' \\ -5x_2 - 2x_3 = 1 & (3)'' \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

（矩阵变换：$r_2 \leftrightarrow r_3$）

$$\xrightarrow{(3)'' + (-5)(2)''} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_2 + 3x_3 = 7 \\ -17x_3 = -34 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -17 & -34 \end{pmatrix}$$

（矩阵变换：$r_3 + (-5)r_2$）

上述过程可知，由于每个方程组都与其增广矩阵对应，在对方程组作初等变换的同时，对其增广矩阵也作了相应的变换，即：

1. 用一个非零数乘矩阵的某行;（列） $r_i \times k\left(c_i \times k\right)$

2. 交换矩阵的两行;（列） $r_i \leftrightarrow r_j\left(c_i \leftrightarrow c_j\right)$

（列）

3. 把矩阵某行的k倍加到另一行.（列） $r_i + kr_j\left(c_i + kc_j\right)$

以上三种对矩阵施行的变换称为矩阵的**初等行变换.**

（列）

矩阵的初等行（列）变换统称为矩阵的**初等变换.**

说明: 1 对矩阵施行初等变换后得到的是一个新的矩阵，它和原来的矩阵不同，两者间**不能写“=”**。

2 初等变换的逆变换仍为初等变换，且变换类型相同.

$r_i \leftrightarrow r_j$ 逆变换 $r_i \leftrightarrow r_j$;　　$r_i \times k$ 逆变换 $r_i \times (\frac{1}{k})$;

$r_i + kr_j$ 逆变换 $r_i - kr_j$.

矩阵等价

定义 如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B，就称矩阵 A 与 B 等价，记作 $A \cong B$

等价关系的性质：

（1）反身性：　$A \cong A$;

（2）对称性：　$if \quad A \cong B, \Rightarrow B \cong A$;

（3）传递性：　$if \quad A \cong B, B \cong C \Rightarrow A \cong \mathrm{C}$.

初等矩阵

定义 由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵.

三种初等变换对应着三种初等方阵.

$$\begin{cases} 1.\ \text{以数 } k \neq 0 \text{ 乘某行(列)}; \\ 2.\ \text{交换两行(列)}; \\ 3.\ \text{以数 } k \text{ 乘某行(列)加到另一行(列)上去}. \end{cases}$$

(1) 交换两行或两列，得初等对换矩阵。

交换 E 中第 i, j 两行，即 $(r_i \leftrightarrow r_j)$，得初等方阵

$$
P(i,j)=\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 && \cdots && 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 && \cdots && 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{ccccccccccc}
&&& \text{第 } i \text{ 列} &&&& \text{第 } j \text{ 列} &&&
\end{array}
&
\end{array}
$$

(2) 以数 $k \neq 0$ 乘某行或某列，得初等倍乘矩阵。

以数$k \neq 0$乘单位矩阵的第i行$(r_i \times k)$，得初等矩阵$P(i(k))$.

$$P(i(k))=\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & k & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\text{第 } i \text{ 列} &
\end{array}$$

(3) 以数 k 乘某行（列）加到另一行（列）上，

以 k 乘 E 的第 j 行加到第 i 行上 $(r_i + kr_j)$

[或以 k 乘 E 的第 i 列加到第 j 列上 $(c_j + kc_i)$]

$$P(i,j(k)) = \begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 & \cdots & k && \\
&&& \ddots &&& \\
&&&& 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{pmatrix} &
\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 第i行 \\ \\ \leftarrow 第j行 \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

第 i 列　第 j 列

练习

判断下列矩阵是否为初等矩阵

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ×

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✓ (4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ×

定理 $\boxed{\text{初等矩阵是可逆的，逆矩阵仍为初等矩阵。}}$

变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换是其本身，

则 $P(i,j)^{-1} = P(i,j)$ ；

变换 $r_i \times k$ 的逆变换为 $r_i \times \frac{1}{k}$,

则 $P(i(k))^{-1} = P(i(\frac{1}{k}))$;

变换 $r_i + kr_j$ 的逆变换为 $r_i + (-k)r_j$,

则 $P(i,j(k))^{-1} = P(i,j(-k))$.

练习

$$P(i,j)^{-1}=P(i,j)$$

$$P(i(k))^{-1}=P(i(\frac{1}{k}))$$

$$P(i,j(k))^{-1}=P(i,j(-k))$$

求初等矩阵逆矩阵

(1) $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-3&1\end{pmatrix}$

例1：计算

$$(1)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ka_{21}&ka_{22}&\cdots&ka_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3n}\end{pmatrix}$$

$$(2)\begin{pmatrix}1&0&k\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+ka_{31}&a_{12}+ka_{32}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}$$

$$(3)\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{13}&b_{12}\\b_{21}&b_{23}&b_{22}\\b_{31}&b_{33}&b_{32}\end{pmatrix}$$

定理1

设A是$m \times n$矩阵，对A施行一次初等行变换，相当于在A的左边乘一个相应的m阶初等矩阵；对A施行一次初等列变换，相当于在A的右边乘一个相应的n阶初等矩阵。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{12} \\ b_{21} & b_{23} & b_{22} \\ b_{31} & b_{33} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

一般记法：

$P(i,j)A$表示A的第i行与第j行对换，

$AP(i,j)$表示A的第i列与第j列对换.

$P(i(k))A$表示A的第i行乘k，

$AP(i(k))$表示A的第i列乘k.

$P(i,j(k))A$表示A的第j行乘k加到第i行上，

$AP(i,j(k))$表示A的第i列乘k加到第j列上.

矩阵的初等变换与初等矩阵的关系

$P(i,j)A$ 相当于$r_i \leftrightarrow r_j$,

$P(i(k))A$ 相当于$r_i \times k$,

$P(i,j(k))A$ 相当于$r_i + kr_j$,

$AP(i,j)$ 相当于$c_i \leftrightarrow c_j$,

$AP(i(k))$ 相当于$c_i \times k$,

$AP(i,j(k))$ 相当于$c_j + kc_i$,

说明：对矩阵实施一次初等变换可以用一个相应的初等矩阵去左乘或右乘表示。

定理 2 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$,则 A可逆$\Leftrightarrow$

A可以经过一系列的初等行变换化为单位阵E_n

证明： 必要性 已知 A可逆 （数学归纳法证明）

$$n=1 \quad A=(a_{11}),且a_{11}\neq 0 \quad 取 \quad P=(\frac{1}{a_{11}}),$$

$$PA=(\frac{1}{a_{11}})(a_{11})=E_1$$

假设 $n-1$时，结论也成立， 对n阶可逆阵A

第一列必有非零元素， 不妨设，$a_{11}\neq 0$

由此可用a_{11}的相应倍数把第一列其余元素化为零

并且用$\frac{1}{a_{11}}$乘以第一行把第一行第一列的元素化为1

$$A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

令 $B = \begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ 则 $|B| \neq 0$，所以B可逆

由归纳假设知，B可经过一系列的初等行变换化为E_{n-1}

$$B=\begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\cdots\cdots \\ r_1+(-b_{1n})r_n}]{r_1+(-b_{12})r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

所以对n阶可逆阵，结论也成立，

充分性

已知方阵A可以经过一系列的初等行变换化为单位阵E_n

即 $\underline{P_s \cdots P_2 P_1} A = E_n$ 所以A可逆

推论1 $\boxed{\text{若}A\text{可逆，则}A\text{可表示为若干初等矩阵的乘积}}$

证明：由以上定理，A可逆，则 $P_s \cdots P_2 P_1 A = E_n$

而 $P_s, \cdots, P_2, P_1$均可逆

依次用 $P_s^{-1}, \cdots, P_2^{-1}, P_1^{-1}$左乘上式两端

$$\underline{P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1} P_s \cdots P_2 P_1} A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1} E_n$$

$$A = \underline{P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1}}$$

而 $P_s^{-1}, P_2^{-1}, P_1^{-1}$也均为初等矩阵

推论2： 如果对可逆矩阵 A 和同阶单位矩阵 E 作同样的初等行变换，那么当 A 变成单位矩阵 E 时，E 就变成 A^{-1}。

即 $P_s \cdots P_2 P_1 A = E_n$ 则 $P_s \cdots P_2 P_1 E_n = A^{-1}$

证明：

$$\left(P_s \cdots P_2 P_1\right) A = E_n,$$

等号两边右乘 A^{-1}，$(P_s \cdots P_2 P_1) A A^{-1} = E_n A^{-1}$

$$(P_s \cdots P_2 P_1) E_n = A^{-1}$$

用矩阵的初等变换求逆矩阵方法

$$\left(A \;\; E\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(E \;\; A^{-1}\right)$$

$n \times 2n$矩阵

例4： 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解：

$$(A \vdots E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&\boxed{-2}&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times(-\frac{1}{2})}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1\end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2}\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

未 完 待 续 ！

作业

习题二：20、（1）、21

22（1）、26、（1）