第二节 微积分基本公式

一、引例

二、积分上限的函数

三、牛顿—莱布尼茨公式

一、引例

设一物体作变速直线运动，其速度函数为 $v(t)$，位置函数为 $s(t)$，求物体在时间间隔 $[T_1, T_2]$ 内经过的路程.

路程 s 可以用两种方法计算：

第一节问题2

用速度函数计算：$s=\int_{T_1}^{T_2} v(t)\,\mathrm{d}t$；

用位置函数计算：$s=s(T_2)-s(T_1)$.

于是有

$$s=\int_{T_1}^{T_2} v(t)\,\mathrm{d}t=s(T_2)-s(T_1),$$

在这时里有 $s'(t)=v(t)$，即 $s(t)$ 是 $v(t)$ 的一个原函数.

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t = s(T_2) - s(T_1)$$

上式说明：**定积分 $\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t$ 等于被积函数 $v(t)$ 在积分区间 $[T_1, T_2]$ 上的一个原函数 $s(t)$ 在积分区间上的增量.**

那么这一结论具不具有普遍性呢？即若设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数，是否也有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

这就是本节要研究的问题.

二、积分上限的函数及其导数

1. 定义

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$x \in [a,b]$，则定积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是积分上限 x 的函数，称之为**积分上限的函数**，记作 $\Phi(x)$：

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad (a \le x \le b).$$

下面来研究积分上限的函数的性质.

2. 积分上限的函数的性质

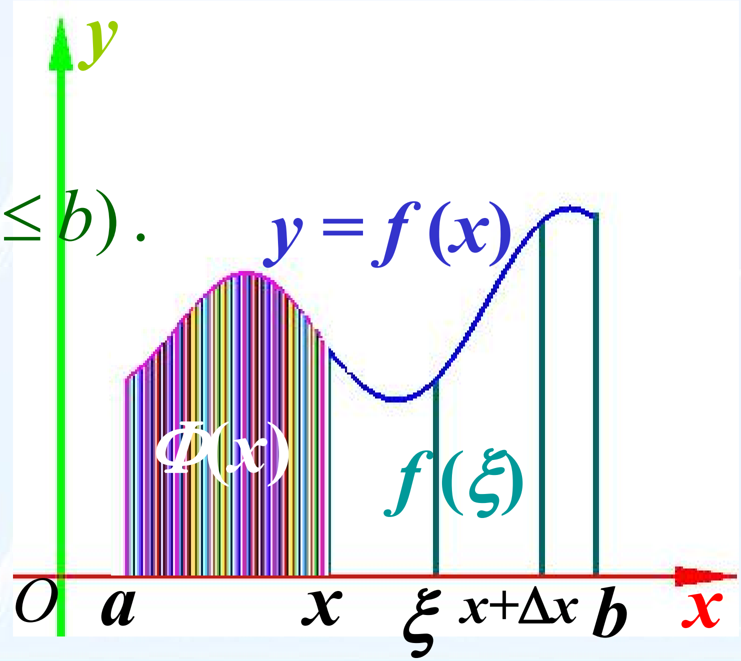
定理1 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，则积分上限的函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在 $[a, b]$ 上可导，并且

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)\quad(a\le x\le b).$$

证明 ☜



定理2 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，则函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

就是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数.

三、牛顿—莱布尼茨公式

定理3 如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

牛顿—莱布尼茨公式

证明

牛顿—莱布尼茨公式也称**微积分基本公式**.

例1 计算第一节中的定积分 $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$.

解

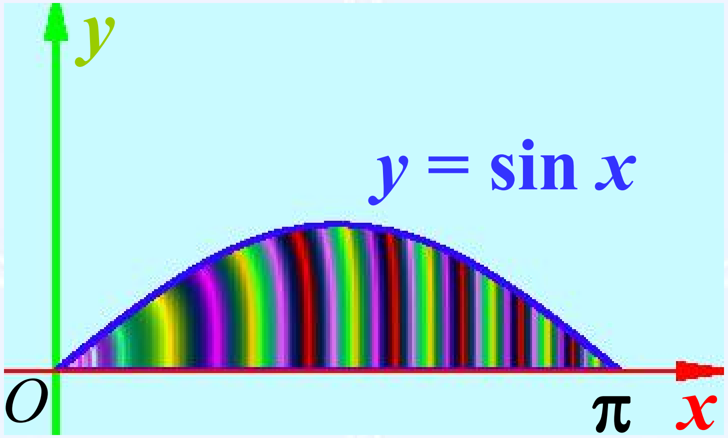
例2 计算 $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解

例3 计算 $\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

解

例4 计算正弦函数 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上与 x 轴所围成的平面图形的面积.



解

例5 汽车以每小时 36km 速度行驶，到某处需要减速停车. 设汽车以等加速度 $a = -5\ \mathrm{m/s^2}$ 刹车，问从开始刹车到停车，汽车驶过了多少距离.

解

关于积分上限的函数的求导，不加证明地补充下面几条公式：

$$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(x);$$

$$\left(\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right)' = -f(x);$$

$$\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(\varphi(x))\,\varphi'(x);$$

$$\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(\varphi(x))\,\varphi'(x) - f(\psi(x))\,\psi'(x).$$

例4 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续且 $f(x)>0$. 证明函数

$$F(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$$

在 $[0,+\infty)$ 内为单调增加函数.

证明

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^1 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}$.

解

练习：计算

$$\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\int_0^{x^{\frac{1}{2}}}(1-\cos t^2)dt}{x^{\frac{5}{2}}}$$

课后作业:

P244 1,3，5（1,3）,8（1,3,5,7,8，11,12），11