UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Sede Bogotá

Departamento de Matemáticas

2029662 ANÁLISIS ARMÓNICO

Programa: `Maestría en Ciencias Matemáticas`
Créditos de la asignatura: `4`
Profesor: Ricardo Pastrán. Edificio: `404`. Oficina: `314`. **Atención:** `L y C: 16-17`
Email: `rapastranr@unal.edu.co`

DESCRIPCIÓN

Este curso ofrece una exploración profunda del análisis armónico, un área central en el análisis moderno con amplias aplicaciones en ecuaciones diferenciales parciales y teoría de números. El curso cubrirá tanto resultados clásicos como técnicas modernas, centrándose en el estudio de funciones y operadores a través del análisis de Fourier y herramientas relacionadas. Los estudiantes comenzarán repasando el operador transformada de Fourier, conceptos fundamentales que descomponen las funciones en sus componentes de frecuencia. A partir de ahí, el curso profundizará en temas avanzados como la teoría de Calderón-Zygmund, funciones maximales, integrales singulares, la teoría de Littlewood-Paley y aplicaciones a la teoría analítica de números y a las ecuaciones diferenciales parciales. El papel del análisis armónico en la comprensión de la regularidad y el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales también será un área clave de enfoque.

OBJETIVOS

- Adquirir un dominio sólido de las técnicas clásicas y modernas del análisis armónico.
- Comprender y aplicar métodos avanzados de análisis armónico a diversos problemas matemáticos.
- Utilizar las herramientas que proporciona el análisis armónico en el estudio de las EDP.

CONTENIDO

1. **Transformada de Fourier e Interpolación de Operadores**.
    - 1.1. Definición de la Transformada de Fourier
    - 1.2. La transformada en espacios L^p
    - 1.3. Teoremas de Interpolación para operadores lineales
2. **Función Maximal de Hardy-Littlewood**.
    - 2.1. Aproximaciones de la identidad
    - 2.2. Desigualdades tipo fuerte y tipo débil
    - 2.3. Teorema de interpolación de Marcinkiewicz
    - 2.4. La función maximal de Hardy-Littlewood

3. **Transformada de Hilbert**.
    3.1. El conjugado del núcleo de Poisson
    3.2. Los teoremas de Riesz y Kolmogorov
    3.3. Integrales truncadas y convergencia puntual
    3.4. Multiplicadores
4. **Integrales singulares**.
    4.1. Definición de operadores integrales singulares
    4.2. El método de las rotaciones
    4.3. Integrales singulares con núcleo par
    4.4. Integrales singulares con núcleo variable
5. **Teorema de Calderón-Zygmund y generalizaciones**.
    5.1. El teorema de Calderón-Zygmund
    5.2. Integrales truncadas y el valor principal
    5.3. Operadores generalizados de Calderón-Zygmund
    5.4. Integrales singulares de Calderón-Zygmund
6. **Propiedades de diferenciabilidad en términos de espacios de funciones**.
    6.1. Potenciales de Riesz
    6.2. Espacios de Sobolev
    6.3. Potenciales de Bessel
    6.4. Los espacios de funciones continuas de Lipschitz
7. **Espacios H^1 y BMO**.
    7.1. El espacio atómico H^1
    7.2. El espacio BMO
    7.3. Un resultado de interpolación
    7.4. La desigualdad John-Nirenberg
8. **Teoría de Littlewood-Paley y Multiplicadores**.
    8.1. Teoría de Littlewood-Paley
    8.2. Teorema del multiplicador de Hörmander
    8.3. Multiplicadores de Bochner-Riesz
    8.4. La función maximal y la transformada de Hilbert a lo largo de una parábola
9. **Aplicaciones a la Teoría Analítica de Números y a las Ecuaciones Diferenciales Parciales** (Por ejemplo: teoremas de restricción y estimativas de Strichartz).

REFERENCIAS

1. J. DUOANDIKOETXEA, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, 29, AMS 2001.

2. E. M. STEIN, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, 1970.

3. E. M. STEIN y G. WEISS, *Fourier Analysis on Euclidean spaces*, Princeton University Press, 1971.

4. E. M. STEIN, *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, 1993.

5. C. MUSCALU y W. SCHLAG, *Classical and multilinear harmonic analysis*, Vol. I. Cambridge University Press, 2013.

6. L. GRAFAKOS, *Classical Fourier Analysis*, Tercera edición, Grad. Text in Math., 269, Springer, 2014.

CALIFICACIÓN

Dos exámenes parciales valiendo cada uno el 25% de la nota. Otro 25% se obtendrá de talleres. El 25% restante se obtendrá de un trabajo investigativo desarrollado por el estudiante a lo largo del semestre que abarque o use algunos de los temas del curso. El primer examen parcial se realizará el día miércoles 28 de mayo y el segundo examen parcial el día miércoles 23 de julio.