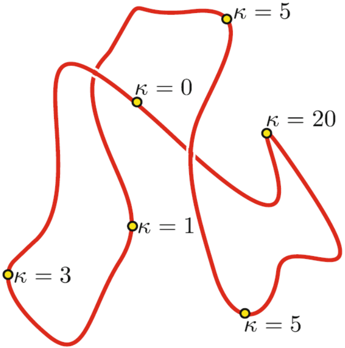
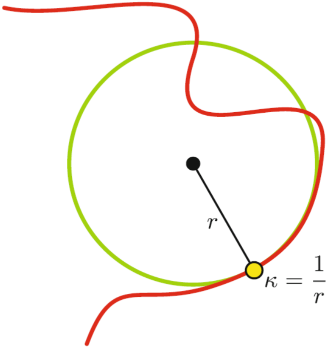
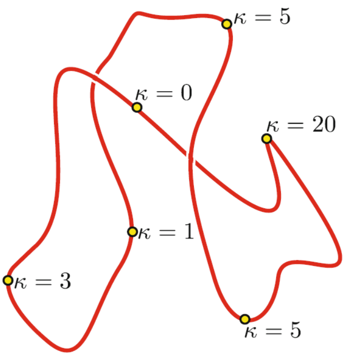
Curvatura κ

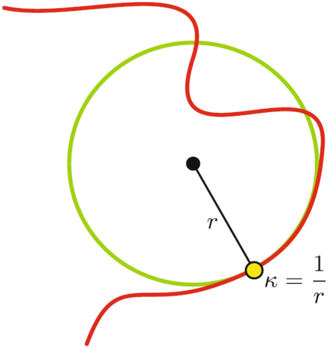




Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regular.

Curvatura κ

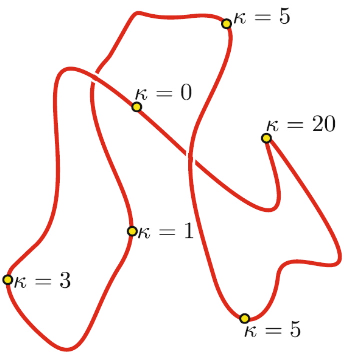


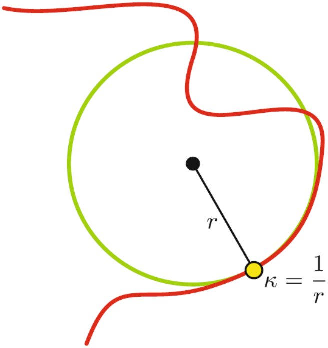


Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regular. En esta sección, definiremos y estudiaremos su **función de curvatura**,

$$\kappa : I \to [0, \infty).$$

Curvatura κ



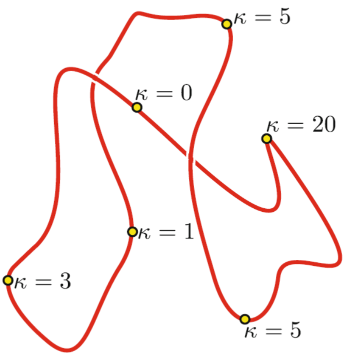


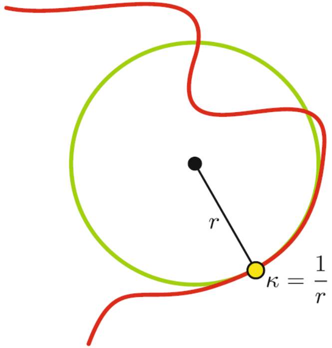
Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regular. En esta sección, definiremos y estudiaremos su **función de curvatura**,

$$\kappa : I \to [0, \infty).$$

Para $t \in I$, el valor $\kappa(t)$ medirá que tan pronunciada se dobla la traza de α al pasar por la posición $\alpha(t)$.

Curvatura κ



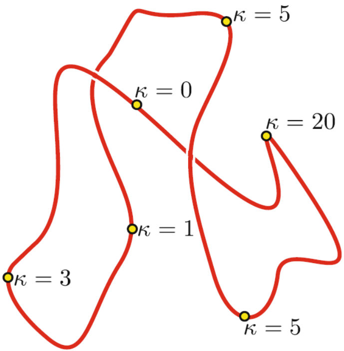


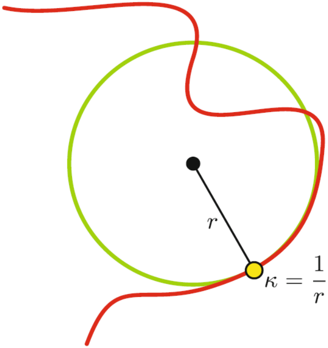
Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regular. En esta sección, definiremos y estudiaremos su **función de curvatura**,

$$\kappa : I \to [0, \infty).$$

Será grande si la trayectoria se curva de manera pronunciada

Curvatura κ



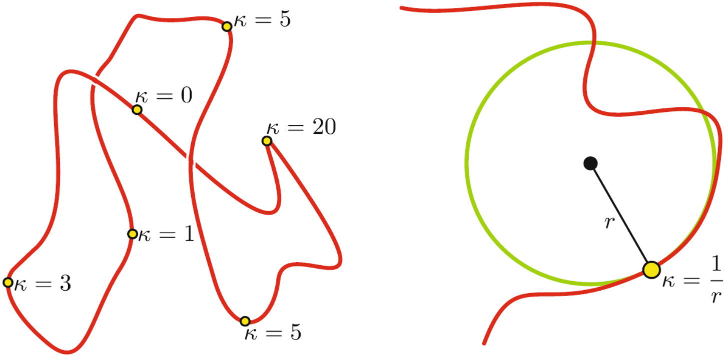


Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regular. En esta sección, definiremos y estudiaremos su **función de curvatura**,

$$\kappa : I \to [0, \infty).$$

Será igual a cero si la trayectoria parece una línea recta.

Curvatura κ

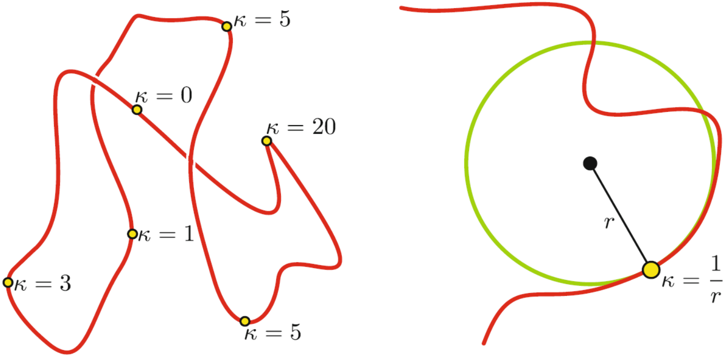


Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regular. En esta sección, definiremos y estudiaremos su **función de curvatura**,

$$\kappa : I \to [0, \infty).$$

Para calibrar nuestra medición de **curvatura**, compararemos con circunferencias en $\mathbb{R}^2$ ((que besan perfectamente la traza en ese punto)).

Curvatura κ

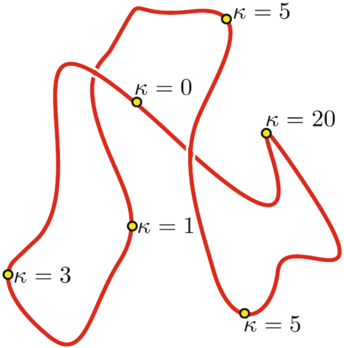


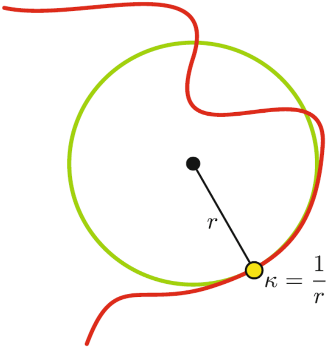
Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regular. En esta sección, definiremos y estudiaremos su **función de curvatura**,

$$\kappa : I \to [0, \infty).$$

Las circunferencias grandes se declaran con una curvatura menor.

Curvatura κ





Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regular. En esta sección, definiremos y estudiaremos su **función de curvatura**,

$$\kappa : I \to [0, \infty).$$

Más precisamente, si la traza en $\alpha(t)$ se curva tanto como una circunferencia de radio r, entonces $\kappa(t) := \frac{1}{r}$.

- Para garantizar que nuestra medida de **curvatura** dependa únicamente del camino trazado y no de la velocidad a la que se recorre en camino, la función κ debe definirse mediante una fórmula que sea independiente de la parametrización;

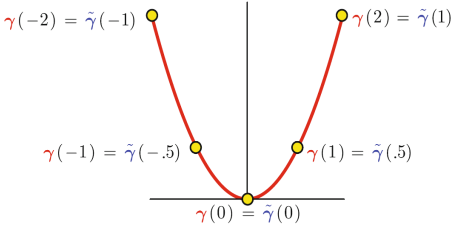
- Para garantizar que nuestra medida de **curvatura** dependa únicamente del camino trazado y no de la velocidad a la que se recorre en camino, la función κ debe definirse mediante una fórmula que sea independiente de la parametrización;
- Por tanto, si $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ h$ es una reparametrización de α y $\widetilde{\kappa}$ es su función de curvatura, entonces debemos tener

$$\widetilde{\kappa} = \kappa \circ h.$$

- Para garantizar que nuestra medida de **curvatura** dependa únicamente del camino trazado y no de la velocidad a la que se recorre en camino, la función κ debe definirse mediante una fórmula que sea independiente de la parametrización;
- Por tanto, si $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ h$ es una reparametrización de α y $\widetilde{\kappa}$ es su función de curvatura, entonces debemos tener

$$\widetilde{\kappa} = \kappa \circ h.$$

Por ejemplo, $\kappa(1) = \widetilde{\kappa}(.5)$ en la figura



.

- Para garantizar que nuestra medida de **curvatura** dependa únicamente del camino trazado y no de la velocidad a la que se recorre en camino, la función κ debe definirse mediante una fórmula que sea independiente de la parametrización;
- Por tanto, si $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ h$ es una reparametrización de α y $\widetilde{\kappa}$ es su función de curvatura, entonces debemos tener

$$\widetilde{\kappa} = \kappa \circ h.$$

Esto dice que las dos parametrizaciones asignan el mismo número de curvatura a cada punto de la traza.

- Para garantizar que nuestra medida de **curvatura** dependa únicamente del camino trazado y no de la velocidad a la que se recorre en camino, la función κ debe definirse mediante una fórmula que sea independiente de la parametrización;
- Por tanto, si $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ h$ es una reparametrización de α y $\widetilde{\kappa}$ es su función de curvatura, entonces debemos tener

$$\widetilde{\kappa} = \kappa \circ h.$$

  Esto dice que las dos parametrizaciones asignan el mismo número de curvatura a cada punto de la traza.
- Defina $\mathbf{v}(t) = \alpha'(t)$ y $\mathbf{a}(t) = \alpha''(t)$ como antes. Será que podemos definir

$$\kappa(t) = \left\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\right\| ??,$$

- Para garantizar que nuestra medida de **curvatura** dependa únicamente del camino trazado y no de la velocidad a la que se recorre en camino, la función κ debe definirse mediante una fórmula que sea independiente de la parametrización;
- Por tanto, si $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ h$ es una reparametrización de α y $\widetilde{\kappa}$ es su función de curvatura, entonces debemos tener

$$\widetilde{\kappa} = \kappa \circ h.$$

  Esto dice que las dos parametrizaciones asignan el mismo número de curvatura a cada punto de la traza.
- Defina $\mathbf{v}(t) = \alpha'(t)$ y $\mathbf{a}(t) = \alpha''(t)$ como antes. Será que podemos definir

$$\kappa(t) = \left|\left|\mathbf{a}^{\perp}(t)\right|\right|??,$$

- NO. Más adelante, veremos que $\left|\left|\mathbf{a}^{\perp}(t)\right|\right|$ depende no solo de cuán pronunciada sea la curva de la trayectoria, sino también de la velocidad del objeto, por lo que se incrementaría con una parametrización más rápida.

$$\boxed{\boxed{\text{Hallemos la definición de } \kappa\text{:}}}$$

$\boxed{\text{Hallemos la definición de } \kappa\text{:}}$ Sea $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ h$ una reparametrización de α, cuyas funciones de velocidad y aceleración se denotarán por $\widetilde{\mathbf{v}}(t)$ y $\widetilde{\mathbf{a}}(t)$ respectivamente.

$\boxed{\text{Hallemos la definición de } \kappa\text{:}}$ Sea $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ h$ una reparametrización de α, cuyas funciones de velocidad y aceleración se denotarán por $\widetilde{\mathbf{v}}(t)$ y $\widetilde{\mathbf{a}}(t)$ respectivamente. De la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{v}}(t) &= h'(t)\mathbf{v}(h(t)) \\
\widetilde{\mathbf{a}}(t) &= h''(t)\mathbf{v}(h(t)) + h'(t)^2\mathbf{a}(h(t)) \\
\widetilde{\mathbf{a}}^{\perp}(t) &= .5cm\mathbf{0} \qquad + h'(t)^2\mathbf{a}^{\perp}(h(t))
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Hallemos la definición de } \kappa\text{:}}$ Sea $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ h$ una reparametrización de α, cuyas funciones de velocidad y aceleración se denotarán por $\widetilde{\mathbf{v}}(t)$ y $\widetilde{\mathbf{a}}(t)$ respectivamente. De la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{v}}(t) &= h'(t)\mathbf{v}(h(t)) \\ \widetilde{\mathbf{a}}(t) &= h''(t)\mathbf{v}(h(t)) + h'(t)^2\mathbf{a}(h(t)) \\ \widetilde{\mathbf{a}}^{\perp}(t) &= .5cm\mathbf{0} \qquad + h'(t)^2\mathbf{a}^{\perp}(h(t)) \end{aligned}$$

Suprimiendo los parámetros de entrada, podemos resumir esto como

$$\widetilde{\mathbf{v}} = (h')\mathbf{v} \qquad\qquad \widetilde{\mathbf{a}}^{\perp} = (h')^2\mathbf{a}^{\perp}$$

$\boxed{\text{Hallemos la definición de } \kappa\text{:}}$ Sea $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ h$ una reparametrización de α, cuyas funciones de velocidad y aceleración se denotarán por $\widetilde{\mathbf{v}}(t)$ y $\widetilde{\mathbf{a}}(t)$ respectivamente. De la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{v}}(t) &= h'(t)\mathbf{v}(h(t)) \\ \widetilde{\mathbf{a}}(t) &= h''(t)\mathbf{v}(h(t)) + h'(t)^2\mathbf{a}(h(t)) \\ \widetilde{\mathbf{a}}^{\perp}(t) &= .5cm\mathbf{0} \qquad + h'(t)^2\mathbf{a}^{\perp}(h(t)) \end{aligned}$$

Suprimiendo los parámetros de entrada, podemos resumir esto como

$$\widetilde{\mathbf{v}} = (h')\mathbf{v} \qquad\qquad \widetilde{\mathbf{a}}^{\perp} = (h')^2\mathbf{a}^{\perp}$$

Por lo tanto, la reparametrización escala $\mathbf{v}$ por un factor de (h') y escala $\mathbf{a}^{\perp}$ por un factor de $(h')^2$.

$\boxed{\boxed{\text{Hallemos la definición de } \kappa\text{:}}}$ Sea $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ h$ una reparametrización de α, cuyas funciones de velocidad y aceleración se denotarán por $\widetilde{\mathbf{v}}(t)$ y $\widetilde{\mathbf{a}}(t)$ respectivamente. De la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{v}}(t) &= h'(t)\mathbf{v}(h(t)) \\ \widetilde{\mathbf{a}}(t) &= h''(t)\mathbf{v}(h(t)) + h'(t)^2\mathbf{a}(h(t)) \\ \widetilde{\mathbf{a}}^{\perp}(t) &= .5cm\mathbf{0} \qquad + h'(t)^2\mathbf{a}^{\perp}(h(t)) \end{aligned}$$

Suprimiendo los parámetros de entrada, podemos resumir esto como

$$\widetilde{\mathbf{v}} = (h')\mathbf{v} \qquad\qquad \widetilde{\mathbf{a}}^{\perp} = (h')^2\mathbf{a}^{\perp}$$

Por lo tanto, la reparametrización escala $\mathbf{v}$ por un factor de (h') y escala $\mathbf{a}^{\perp}$ por un factor de $(h')^2$.Como lo definirían mis estudiantes????

$\boxed{\text{Hallemos la definición de } \kappa\text{:}}$ Sea $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ h$ una reparametrización de α, cuyas funciones de velocidad y aceleración se denotarán por $\widetilde{\mathbf{v}}(t)$ y $\widetilde{\mathbf{a}}(t)$ respectivamente. De la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{v}}(t) &= h'(t)\mathbf{v}(h(t))\\ \widetilde{\mathbf{a}}(t) &= h''(t)\mathbf{v}(h(t)) + h'(t)^2\mathbf{a}(h(t))\\ \widetilde{\mathbf{a}}^{\perp}(t) &= .5cm\mathbf{0} \qquad + h'(t)^2\mathbf{a}^{\perp}(h(t))\end{aligned}$$

Suprimiendo los parámetros de entrada, podemos resumir esto como

$$\widetilde{\mathbf{v}} = (h')\mathbf{v} \qquad\qquad \widetilde{\mathbf{a}}^{\perp} = (h')^2\mathbf{a}^{\perp}$$

Por lo tanto, la reparametrización escala $\mathbf{v}$ por un factor de (h') y escala $\mathbf{a}^{\perp}$ por un factor de $(h')^2$.Como lo definirían mis estudiantes????Por lo tanto, considerando, la expresión

$$\frac{\left|\left|\widetilde{\mathbf{a}}^{\perp}(t)\right|\right|}{||\widetilde{\mathbf{v}}(t)||^2} = \frac{||\mathbf{a}^{\perp}(h(t)||}{||\mathbf{v}(h(t)||^2} \tag{1}$$

vemos que NO se ve afectada por la reparametrización; Por lo tanto, definimos la función de curvatura de la siguiente manera:

Definición (Curvatura $\kappa(t)$)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ *una curva regular. Su* **función de curvatura**, $\kappa : I \to [0, \infty)$, *se define como*

$$\kappa(t) = \frac{\left\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\right\|}{\left\|\mathbf{v}(t)\right\|^2}$$

Definición (Curvatura $\kappa(t)$)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regular. Su **función de curvatura**, $\kappa : I \to [0, \infty)$, *se define como*

$$\kappa(t) = \frac{\left|\left|\mathbf{a}^{\perp}(t)\right|\right|}{||\mathbf{v}(t)||^2}$$

- La ecuación que encontramos $\dfrac{\left|\left|\widetilde{\mathbf{a}}^{\perp}(t)\right|\right|}{||\widetilde{\mathbf{v}}(t)||^2} = \dfrac{\left|\left|\mathbf{a}^{\perp}(h(t))\right|\right|}{||\mathbf{v}(h(t))||^2}$ confirma que $\widetilde{\kappa} = \kappa \circ h$, así que la curvatura es independiente de la parametrización, como se deseaba.

Definición (Curvatura $\kappa(t)$)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regular. Su **función de curvatura**, $\kappa : I \to [0, \infty)$, *se define como*

$$\kappa(t) = \frac{\left|\left|\mathbf{a}^{\perp}(t)\right|\right|}{\left|\left|\mathbf{v}(t)\right|\right|^2}$$

- La ecuación que encontramos $\dfrac{\left|\left|\widetilde{\mathbf{a}}^{\perp}(t)\right|\right|}{\left|\left|\widetilde{\mathbf{v}}(t)\right|\right|^2} = \dfrac{\left|\left|\mathbf{a}^{\perp}(h(t))\right|\right|}{\left|\left|\mathbf{v}(h(t))\right|\right|^2}$ confirma que $\widetilde{\kappa} = \kappa \circ h$, así que la curvatura es independiente de la parametrización, como se deseaba.
- Por lo tanto, $\kappa(t)$ depende solo de la traza de la restricción de α a una pequeña vecindad de t en I. Despejando,

$$\left|\left|\mathbf{a}^{\perp}(t)\right|\right| = \kappa(t) \cdot \left|\left|\mathbf{v}(t)\right|\right|^2,$$

Definición (Curvatura $\kappa(t)$)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ *una curva regular. Su* **función de curvatura**, $\kappa : I \to [0,\infty)$, *se define como*

$$\kappa(t) = \frac{\left\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\right\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^2}$$

- La ecuación que encontramos $\dfrac{\left\|\widetilde{\mathbf{a}}^{\perp}(t)\right\|}{\|\widetilde{\mathbf{v}}(t)\|^2} = \dfrac{\left\|\mathbf{a}^{\perp}(h(t))\right\|}{\|\mathbf{v}(h(t))\|^2}$ confirma que $\widetilde{\kappa} = \kappa \circ h$, así que la curvatura es independiente de la parametrización, como se deseaba.
- Por lo tanto, $\kappa(t)$ depende solo de la traza de la restricción de α a una pequeña vecindad de t en I. Despejando,

$$\left\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\right\| = \kappa(t) \cdot \|\mathbf{v}(t)\|^2,$$

que cuantifica la intuición discutida, que $\left\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\right\|$ debería aumentar con la velocidad y con la curvatura de la trayectoria.

Definición (**Curvatura $\kappa(t)$**)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regular. Su **función de curvatura**, $\kappa : I \to [0, \infty)$, *se define como*

$$\kappa(t) = \frac{\left|\left|\mathbf{a}^{\perp}(t)\right|\right|}{\left|\left|\mathbf{v}(t)\right|\right|^2}$$

- La ecuación que encontramos $\dfrac{\left|\left|\widetilde{\mathbf{a}}^{\perp}(t)\right|\right|}{\left|\left|\widetilde{\mathbf{v}}(t)\right|\right|^2} = \dfrac{\left|\left|\mathbf{a}^{\perp}(h(t))\right|\right|}{\left|\left|\mathbf{v}(h(t))\right|\right|^2}$ confirma que $\widetilde{\kappa} = \kappa \circ h$, así que la curvatura es independiente de la parametrización, como se deseaba.
- Por lo tanto, $\kappa(t)$ depende solo de la traza de la restricción de α a una pequeña vecindad de t en I. Despejando,

$$\left|\left|\mathbf{a}^{\perp}(t)\right|\right| = \kappa(t) \cdot \left|\left|\mathbf{v}(t)\right|\right|^2,$$

  que cuantifica la intuición discutida, que $\left|\left|\mathbf{a}^{\perp}(t)\right|\right|$ debería aumentar con la velocidad y con la curvatura de la trayectoria.
- Dado que la curvatura es independiente de la parametrización, a menudo es útil elegir una reparametrización p.p.a para simplificar la fórmula:

Proposición (Curvatura dada en longitud de arco)

Si α *está parametrizada por la longitud del arco (p.p.a), entonces* $\kappa(t) = \|\mathbf{a}(t)||$.

DEM:

Proposición (Curvatura dada en longitud de arco)

Si α está parametrizada por la longitud del arco (p.p.a), entonces $\kappa(t) = \|\mathbf{a}(t)||$.

DEM: Dado que

$$1 = \|\alpha'(t)||^2 = \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t) \rangle,$$

al derivar encontramos que $0 = 2 \langle \mathbf{a}(t), \mathbf{v}(t) \rangle$

Proposición (Curvatura dada en longitud de arco)

Si α está parametrizada por la longitud del arco (p.p.a), entonces $\kappa(t) = \|\mathbf{a}(t)||$.

DEM: Dado que

$$1 = \|\alpha'(t)||^2 = \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t) \rangle,$$

al derivar encontramos que $0 = 2\,\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{v}(t) \rangle$ es decir, $\mathbf{a}(s)$ es ortogonal a $\mathbf{v}(s)$, por lo cual $\mathbf{a}^{\perp}(t) = \mathbf{a}(t)$,

Proposición (Curvatura dada en longitud de arco)

Si α está parametrizada por la longitud del arco (p.p.a), entonces $\kappa(t) = \|\mathbf{a}(t)\|$.

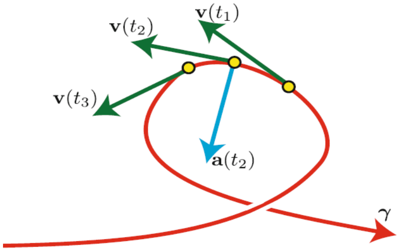
DEM: Dado que

$$1 = \|\alpha'(t)\|^2 = \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t) \rangle,$$

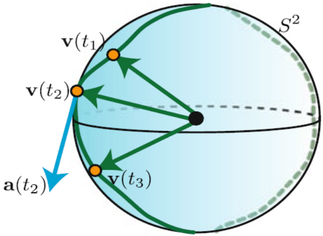
al derivar encontramos que $0 = 2\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{v}(t) \rangle$ es decir, $\mathbf{a}(s)$ es ortogonal a $\mathbf{v}(s)$, por lo cual $\mathbf{a}^{\perp}(t) = \mathbf{a}(t)$, y por ende

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{\|\mathbf{a}(t)\|}{1} = \|\mathbf{a}(t)\|.$$

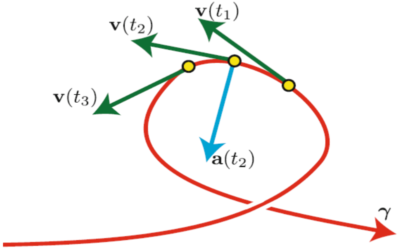
$\blacksquare$

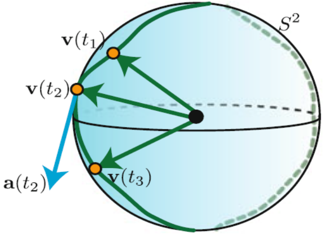


$\mathbf{v}(t_1)$
$\mathbf{v}(t_2)$
$\mathbf{v}(t_3)$
$\mathbf{a}(t_2)$
γ



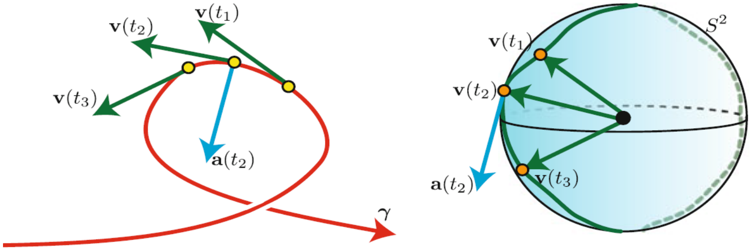
S^2
$\mathbf{v}(t_1)$
$\mathbf{v}(t_2)$
$\mathbf{v}(t_3)$
$\mathbf{a}(t_2)$



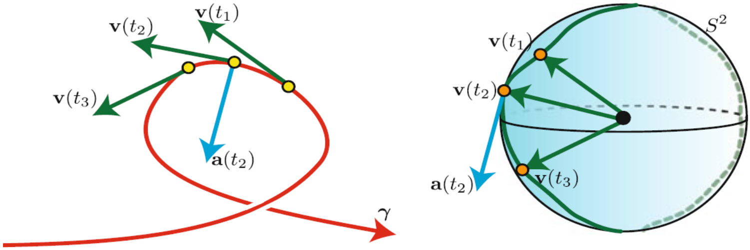


La proposición 2 sugiere una bonita interpretación visual de la función curvatura $k(t) = \|\mathbf{a}(t)\|$ asociada a curva p.p.a $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$. Si cada vector de velocidad $\mathbf{v}(t)$ se dibuja con su cola en el origen, entonces $t \to \mathbf{v}(t)$ se visualiza como una trayectoria en la esfera de dimensión $(n-1)$,

$\mathbb{S}^{n-1} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{p}\| = 1\}$ el conjunto de todos los vectores unitarios en $\mathbb{R}^n$.



- La figura de abajo ilustra en caso $n = 3$, donde se puede pensar en la esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ como un dispositivo "*medidor de dirección*" que permite monitoriar desde en el origen de la esfera, un objeto que se mueve a distancia, porque $\mathbf{v}(t)$, siempre apunta en la dirección en la que se dirige el objeto.



- La figura de abajo ilustra en caso $n = 3$, donde se puede pensar en la esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ como un dispositivo "*medidor de dirección*" que permite monitoriar desde en el origen de la esfera, un objeto que se mueve a distancia, porque $\mathbf{v}(t)$, siempre apunta en la dirección en la que se dirige el objeto.
- La derivada $\mathbf{v}'(t) = \mathbf{a}(t)$, registra el cambio en la dirección del objeto. Por lo tanto, $\kappa(t) = \|\mathbf{a}(t)\|$ registra la velocidad a la que cambia la dirección del objeto.

EJEMPLO: La curva plana $\alpha(t) = (r\cos t, r\text{sin}t)$, $t \in [0, 2\pi]$, parametriza el circunferencia de radio r. Las funciones de velocidad y aceleración son

$$\mathbf{v}(t) = (-r\text{sin}t, r\cos t), \qquad \mathbf{a}(t) = (-r\cos t, -r\text{sin}t).$$

EJEMPLO: La curva plana $\alpha(t) = (r\cos t, r\mathrm{sin}t)$, $t \in [0, 2\pi]$, parametriza el circunferencia de radio r. Las funciones de velocidad y aceleración son

$$\mathbf{v}(t) = (-r\mathrm{sin}t, r\cos t), \qquad \mathbf{a}(t) = (-r\cos t, -r\mathrm{sin}t).$$

Observe que $\mathbf{a}(t) = -\alpha(t)$, lo que refleja la intuición física de que se necesita una fuerza que apunte al centro para hacer que un objeto se desplace en un circunferencia.

EJEMPLO: La curva plana $\alpha(t) = (r\cos t, r\mathrm{sin} t)$, $t \in [0, 2\pi]$, parametriza el circunferencia de radio r. Las funciones de velocidad y aceleración son

$$\mathbf{v}(t) = (-r\mathrm{sin} t, r\cos t), \qquad \mathbf{a}(t) = (-r\cos t, -r\mathrm{sin} t).$$

Observe que $\mathbf{a}(t) = -\alpha(t)$, lo que refleja la intuición física de que se necesita una fuerza que apunte al centro para hacer que un objeto se desplace en un circunferencia. Como $\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{v}(t) \rangle = 0$, tenemos $\mathbf{a}^{\perp}(t) = \mathbf{a}(t)$,

EJEMPLO: La curva plana $\alpha(t) = (r\cos t, r\text{sin}t)$, $t \in [0, 2\pi]$, parametriza el circunferencia de radio r. Las funciones de velocidad y aceleración son

$$\mathbf{v}(t) = (-r\text{sin}t, r\cos t), \qquad \mathbf{a}(t) = (-r\cos t, -r\text{sin}t).$$

Observe que $\mathbf{a}(t) = -\alpha(t)$, lo que refleja la intuición física de que se necesita una fuerza que apunte al centro para hacer que un objeto se desplace en un circunferencia. Como $\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{v}(t) \rangle = 0$, tenemos $\mathbf{a}^{\perp}(t) = \mathbf{a}(t)$, por lo que

$$\kappa(t) = \frac{||\mathbf{a}^{\perp}(t)||}{||\mathbf{v}(t)||^2} = \frac{||\mathbf{a}(t)||}{||\mathbf{v}(t)||^2} = \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r}$$

EJEMPLO: La curva plana $\alpha(t) = (r\cos t, r\text{sin}t)$, $t \in [0, 2\pi]$, parametriza el circunferencia de radio r. Las funciones de velocidad y aceleración son

$$\mathbf{v}(t) = (-r\text{sin}t, r\cos t), \qquad \mathbf{a}(t) = (-r\cos t, -r\text{sin}t).$$

Observe que $\mathbf{a}(t) = -\alpha(t)$, lo que refleja la intuición física de que se necesita una fuerza que apunte al centro para hacer que un objeto se desplace en un circunferencia. Como $\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{v}(t)\rangle = 0$, tenemos $\mathbf{a}^{\perp}(t) = \mathbf{a}(t)$, por lo que

$$\kappa(t) = \frac{\left\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\right\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{\|\mathbf{a}(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r}$$

Esto verifica que nuestra definición concuerda con la calibración de curvatura indicada por la Figura Sección 1 una circunferencia de radio r tiene una curvatura constante $\kappa = 1/r$.

EJEMPLO: La curva plana $\alpha(t) = (r\cos t, r\text{sin}t)$, $t \in [0, 2\pi]$, parametriza el circunferencia de radio r. Las funciones de velocidad y aceleración son

$$\mathbf{v}(t) = (-r\text{sin}t, r\cos t), \qquad \mathbf{a}(t) = (-r\cos t, -r\text{sin}t).$$

Observe que $\mathbf{a}(t) = -\alpha(t)$, lo que refleja la intuición física de que se necesita una fuerza que apunte al centro para hacer que un objeto se desplace en un circunferencia. Como $\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{v}(t) \rangle = 0$, tenemos $\mathbf{a}^{\perp}(t) = \mathbf{a}(t)$, por lo que

$$\kappa(t) = \frac{\left|\left|\mathbf{a}^{\perp}(t)\right|\right|}{||\mathbf{v}(t)||^2} = \frac{||\mathbf{a}(t)||}{||\mathbf{v}(t)||^2} = \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r}$$

Esto verifica que nuestra definición concuerda con la calibración de curvatura indicada por la Figura Sección 1 una circunferencia de radio r tiene una curvatura constante $\kappa = 1/r$.

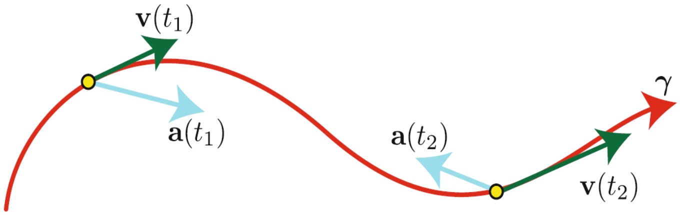
Como es conveniente trabajar con colecciones ortonormales de vectores, hacemos la siguiente definición:

Definición (Tangente unitario y Normal unitario)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ *una curva regular. Definamos el vector* **tangente unitario** *y el vector* **unitario normal principal** *en* $t \in I$ *como*

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}, \qquad \mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{a}^{\perp}(t)}{\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\|}.$$

$\mathbf{n}(t)$ *es definido sólo si* $\kappa(t) \neq 0$

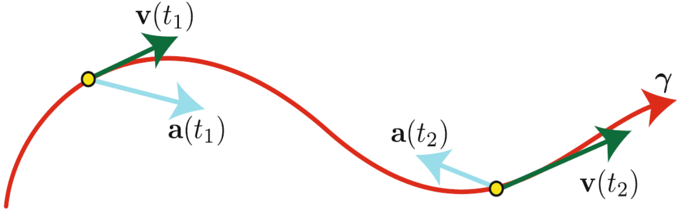


Definición (Tangente unitario y Normal unitario)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regular. Definamos el vector **tangente unitario** *y el vector* **unitario normal principal** *en $t \in I$ como*

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}, \qquad \mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{a}^{\perp}(t)}{\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\|}.$$

$\mathbf{n}(t)$ *es definido sólo si $\kappa(t) \neq 0$*



Siempre que no cause confusión, suprimiremos la variable de entrada y simplemente escribiremos $\mathbf{t}, \mathbf{n}$. Por construcción, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ es ortonormal.

Definición (Plano Osculador)

El plano generado por los vectores **t** *y* **n** *se denomina* **plano osculador***:*

$$\boldsymbol{plano\ \ osculador} = \mathrm{gen}\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\} = \mathrm{gen}\{\mathbf{v}, \mathbf{a}\}.$$

Definición (**Plano Osculador**)

El plano generado por los vectores $\mathbf{t}$ *y* $\mathbf{n}$ *se denomina* **plano osculador***:*

$$\boldsymbol{plano\ \ osculador} = \text{gen}\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\} = \text{gen}\{\mathbf{v}, \mathbf{a}\}.$$

Este plano contiene la dirección en la que se dirige la curva y la dirección en la que gira la curva.

Definición (**Plano Osculador**)

El plano generado por los vectores **t** *y* **n** *se denomina* **plano osculador***:*

$$\boldsymbol{plano\ \ osculador} = \mathrm{gen}\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\} = \mathrm{gen}\{\mathbf{v}, \mathbf{a}\}.$$

Este plano contiene la dirección en la que se dirige la curva y la dirección en la que gira la curva.

Proposición

Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ *es regular (no necesariamente p.p.a), entonces para todo* $t \in I$*,*

$$\kappa(t) = \frac{\left\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\right\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{\|\mathbf{t}'(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|}.$$

DEM:

Definición (**Plano Osculador**)

El plano generado por los vectores **t** *y* **n** *se denomina* **plano osculador***:*

$$\boldsymbol{plano\ \ osculador} = \mathrm{gen}\{\mathbf{t},\mathbf{n}\} = \mathrm{gen}\{\mathbf{v},\mathbf{a}\}.$$

Este plano contiene la dirección en la que se dirige la curva y la dirección en la que gira la curva.

Proposición

Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ *es regular (no necesariamente p.p.a), entonces para todo* $t \in I$*,*

$$\kappa(t) = \frac{\left\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\right\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{\|\mathbf{t}'(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|}.$$

DEM: Por definición $\langle \mathbf{t},\mathbf{t}\rangle = \left\langle \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right\rangle = 1.$

Definición (Plano Osculador)

El plano generado por los vectores **t** *y* **n** *se denomina* **plano osculador***:*

$$\boldsymbol{plano\ osculador} = \mathrm{gen}\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\} = \mathrm{gen}\{\mathbf{v}, \mathbf{a}\}.$$

Este plano contiene la dirección en la que se dirige la curva y la dirección en la que gira la curva.

Proposición

Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ *es regular (no necesariamente p.p.a), entonces para todo* $t \in I$*,*

$$\kappa(t) = \frac{\left|\left|\mathbf{a}^{\perp}(t)\right|\right|}{||\mathbf{v}(t)||^2} = \frac{||\mathbf{t}'(t)||}{||\mathbf{v}(t)||}.$$

DEM: Por definición $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}, \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} \right\rangle = 1.$ Luego derivando,

$2 \langle \mathbf{t}', \mathbf{t} \rangle = 0$, es decir, $\mathbf{t}' \perp \mathbf{t}$.

Definición (**Plano Osculador**)

El plano generado por los vectores **t** *y* **n** *se denomina* **plano osculador***:*

$$\boldsymbol{plano\ osculador} = \text{gen}\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\} = \text{gen}\{\mathbf{v}, \mathbf{a}\}.$$

Este plano contiene la dirección en la que se dirige la curva y la dirección en la que gira la curva.

Proposición

Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ *es regular (no necesariamente p.p.a), entonces para todo* $t \in I$*,*

$$\kappa(t) = \frac{\left\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\right\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{\|\mathbf{t}'(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|}.$$

DEM: Por definición $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right\rangle = 1.$ Luego derivando, $2\langle \mathbf{t}', \mathbf{t} \rangle = 0$, es decir, $\mathbf{t}' \perp \mathbf{t}$. Ahora observe que,

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}' = (\|\mathbf{v}\|\mathbf{t})' = \underbrace{\|\mathbf{v}\|'\mathbf{t}}_{\mathbf{a}^{||}} + \underbrace{\|\mathbf{v}\|\mathbf{t}'}_{\mathbf{a}^{\perp}}$$

Definición (**Plano Osculador**)

El plano generado por los vectores **t** *y* **n** *se denomina* **plano osculador***:*

$$\boldsymbol{plano\ \ osculador} = \mathrm{gen}\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\} = \mathrm{gen}\{\mathbf{v}, \mathbf{a}\}.$$

Este plano contiene la dirección en la que se dirige la curva y la dirección en la que gira la curva.

Proposición

Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ *es regular (no necesariamente p.p.a), entonces para todo* $t \in I$*,*

$$\kappa(t) = \frac{\left\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\right\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{\|\mathbf{t}'(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|}.$$

DEM: Por definición $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right\rangle = 1.$ Luego derivando, $2\langle \mathbf{t}', \mathbf{t} \rangle = 0$, es decir, $\mathbf{t}' \perp \mathbf{t}.$ Ahora observe que,

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}' = (\|\mathbf{v}\|\mathbf{t})' = \underbrace{\|\mathbf{v}\|'\mathbf{t}}_{\mathbf{a}^{||}} + \underbrace{\|\mathbf{v}\|\mathbf{t}'}_{\mathbf{a}^{\perp}}$$

Por lo tanto, $\kappa = \frac{\left\|\mathbf{a}^{\perp}\right\|}{\|\mathbf{v}\|^2} = \frac{\left|\,\|\mathbf{v}\|\mathbf{t}'\right|}{\|\mathbf{v}\|^2} = \frac{\|\mathbf{t}'\|}{\|\mathbf{v}\|}$

Por lo tanto, la curvatura es igual a la velocidad a la que cambia la dirección del objeto dividida por su velocidad ((lo que hace que la medición sea independiente de la parametrización)).

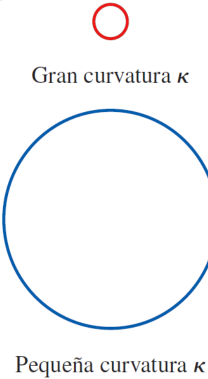
$$\kappa = \frac{||\mathbf{a}^{\perp}||}{||\mathbf{v}||^2}$$

La prueba anterior muestra que $\mathbf{a}^{||} = ||\mathbf{v}||\mathbf{t}$. También muestra que $\mathbf{a}^{\perp} = ||\mathbf{v}||\mathbf{t}'$. En particular, $\mathbf{a}^{\perp}$ y $\mathbf{t}'$ apuntan en la misma dirección, por lo que las siguientes dos caracterizaciones de $\mathbf{n}$ son equivalentes, y ambas posibilidades capturan la idea de que $\mathbf{n}$ es la dirección en la que gira la curva:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}^{\perp}}{||\mathbf{a}^{\perp}||} = \frac{\mathbf{t}'}{||\mathbf{t}'||} \tag{2}$$

EJEMPLO: Encuentre la curvatura de una circunferencia de radio a.

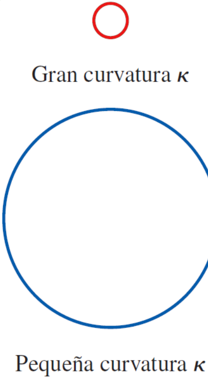
Sol:



EJEMPLO: Encuentre la curvatura de una circunferencia de radio a.

Sol: Función vectorial de una circunferencia es

$$\alpha(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j}$$



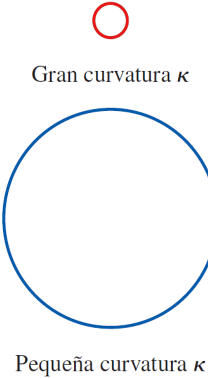
EJEMPLO: Encuentre la curvatura de una circunferencia de radio a.

Sol: Función vectorial de una circunferencia es

$$\alpha(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j}$$

luego $\mathbf{v}'(t) \quad =$ y $\|\mathbf{v}(t)\| \quad =$
y

$\mathbf{t}(t) =$ $\mathbf{t}'(t) =$

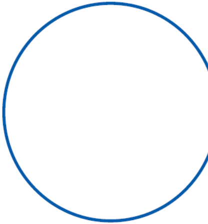


EJEMPLO: Encuentre la curvatura de una circunferencia de radio a.

Gran curvatura κ

Sol: Función vectorial de una circunferencia es

$$\alpha(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\mathrm{sin} t\mathbf{j}$$



Pequeña curvatura κ

luego $\mathbf{v}'(t) \quad =$ y $\|\mathbf{v}(t)\| \quad =$ y

$\mathbf{t}(t) =$

$\mathbf{t}'(t) =$

Por consiguiente, la curvatura es

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{|\,\|\mathbf{v}(t)\|\,|\mathbf{t}'|}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{\|\mathbf{t}'(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|} =$$

EJEMPLO (La curvatura de un gráfico en un punto crítico).
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función suave con un punto crítico en $t_0 \in I$, es decir, $f'(t_0) = 0$, la parametrización natural del gráfico de f es

$$\alpha(t) = (t, f(t)), \qquad t \in I.$$

EJEMPLO (La curvatura de un gráfico en un punto crítico).
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función suave con un punto crítico en $t_0 \in I$, es decir, $f'(t_0) = 0$, la parametrización natural del gráfico de f es

$$\alpha(t) = (t, f(t)), \qquad t \in I.$$

Nótese que $\mathbf{v}(t) = (1, f'(t))$ y $\mathbf{a}(t) = (0, f''(t))$. En particular, $\mathbf{v}(t_0) = (1, 0)$ y $\mathbf{a}(t_0) = (0, f''(t_0))$ son ortogonales, por lo que $\mathbf{a}^{\perp}(t_0) = \mathbf{a}(t_0)$.

EJEMPLO (La curvatura de un gráfico en un punto crítico).
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función suave con un punto crítico en $t_0 \in I$, es decir, $f'(t_0) = 0$, la parametrización natural del gráfico de f es

$$\alpha(t) = (t, f(t)), \qquad t \in I.$$

Nótese que $\mathbf{v}(t) = (1, f'(t))$ y $\mathbf{a}(t) = (0, f''(t))$. En particular, $\mathbf{v}(t_0) = (1, 0)$ y $\mathbf{a}(t_0) = (0, f''(t_0))$ son ortogonales, por lo que $\mathbf{a}^{\perp}(t_0) = \mathbf{a}(t_0)$. Por lo tanto,

$$\kappa(t_0) = \frac{\|\mathbf{a}^{\perp}(t_0)\|}{\|\mathbf{v}(t_0)\|^2} = \frac{\|\mathbf{a}(t_0)\|}{\|\mathbf{v}(t_0)\|^2} = |f''(t_0)|. \qquad |concavidad| \text{ en un punto crítico de un g}$$

Nuestros resultados hasta ahora sobre curvas en $\mathbb{R}^n$ han sido válidos para todos los n. Pero cada dimensión tiene sus propias características únicas. En esta sección, exploramos propiedades especializadas de las curvas regulares planas (curvas regulares en el plano $\mathbb{R}^2$).

¿Qué tiene de especial $n = 2$?

Nuestros resultados hasta ahora sobre curvas en $\mathbb{R}^n$ han sido válidos para todos los n. Pero cada dimensión tiene sus propias características únicas. En esta sección, exploramos propiedades especializadas de las curvas regulares planas (curvas regulares en el plano $\mathbb{R}^2$).

¿Qué tiene de especial $n = 2$?

Es la única dimensión en la que los términos "**en sentido horario**" y "**en sentido antihorario**" tienen sentido para describir cómo gira una curva regular.

Más rigurosamente, considere el isomorfismo lineal $R_{90} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido como

$$R_{90}(x, y) = (-y, x),$$

cuyo efecto es rotar el vector (x, y) por 90 grados en sentido antihorario.

Más rigurosamente, considere el isomorfismo lineal $R_{90} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido como

$$R_{90}(x, y) = (-y, x),$$

cuyo efecto es rotar el vector (x, y) por 90 grados en sentido antihorario. Si prefieres pensar en $\mathbb{R}^2$ como el plano complejo, entonces R_{90} es la función de "**multiplicación por** i". Observa que

$$R_{90}(R_{90}(\mathbf{v})) = -\mathbf{v} \qquad \text{para todo } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2.$$

Más rigurosamente, considere el isomorfismo lineal $R_{90} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido como

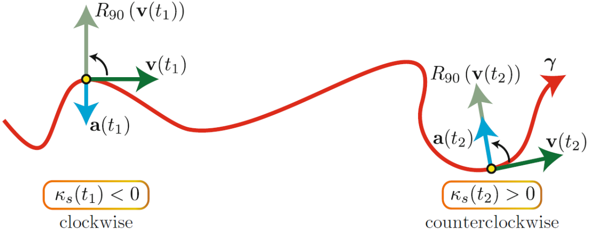
$$R_{90}(x, y) = (-y, x),$$

cuyo efecto es rotar el vector (x, y) por 90 grados en sentido antihorario.

Más rigurosamente, considere el isomorfismo lineal $R_{90} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido como

$$R_{90}(x, y) = (-y, x),$$

cuyo efecto es rotar el vector (x, y) por 90 grados en sentido antihorario. Ahora suponga que $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ es una curva plana p.p.a. En cualquier instante $t \in I$, observa que $\mathbf{a}(t)$ y $R_{90}(\mathbf{v}(t))$ son ortogonales a $\mathbf{v}(t)$,

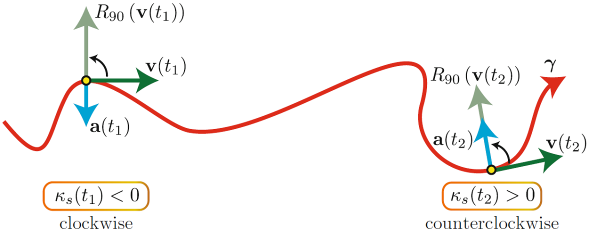


Más rigurosamente, considere el isomorfismo lineal $R_{90} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido como

$$R_{90}(x, y) = (-y, x),$$

cuyo efecto es rotar el vector (x, y) por 90 grados en sentido antihorario. Ahora suponga que $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ es una curva plana p.p.a. En cualquier instante $t \in I$, observa que $\mathbf{a}(t)$ y $R_{90}(\mathbf{v}(t))$ son ortogonales a $\mathbf{v}(t)$, por lo que deben ser paralelas entre sí,

$$\mathbf{a}(t) = \kappa_s(t) R_{90}(\mathbf{v}(t)) \implies \kappa_s(t) = \langle \mathbf{a}(t), R_{90}(\mathbf{v}(t)) \rangle \qquad (2)$$



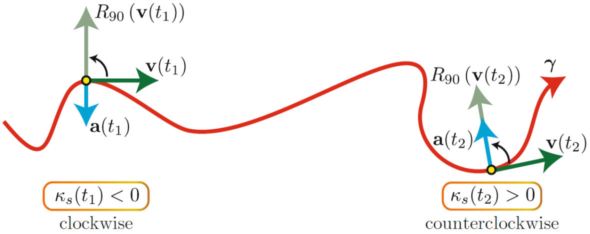
para algún escalar $\kappa_s(t) \in \mathbb{R}$.

Más rigurosamente, considere el isomorfismo lineal $R_{90} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido como

$$R_{90}(x, y) = (-y, x),$$

cuyo efecto es rotar el vector (x, y) por 90 grados en sentido antihorario. Ahora suponga que $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ es una curva plana p.p.a. En cualquier instante $t \in I$, observa que $\mathbf{a}(t)$ y $R_{90}(\mathbf{v}(t))$ son ortogonales a $\mathbf{v}(t)$, por lo que deben ser paralelas entre sí,

$$\mathbf{a}(t) = \kappa_s(t) R_{90}(\mathbf{v}(t)) \quad \Longrightarrow \quad \kappa_s(t) = \langle \mathbf{a}(t), R_{90}(\mathbf{v}(t)) \rangle \qquad (2)$$



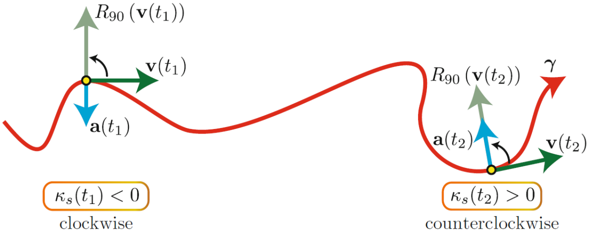
para algún escalar $\kappa_s(t) \in \mathbb{R}$. Llamamos a $\kappa_s : I \to \mathbb{R}$ la función de curvatura con signo.

Más rigurosamente, considere el isomorfismo lineal $R_{90} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido como

$$R_{90}(x, y) = (-y, x),$$

cuyo efecto es rotar el vector (x, y) por 90 grados en sentido antihorario. Ahora suponga que $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ es una curva plana p.p.a. En cualquier instante $t \in I$, observa que $\mathbf{a}(t)$ y $R_{90}(\mathbf{v}(t))$ son ortogonales a $\mathbf{v}(t)$, por lo que deben ser paralelas entre sí,

$$\mathbf{a}(t) = \kappa_s(t) R_{90}(\mathbf{v}(t)) \quad \Longrightarrow \quad \kappa_s(t) = \langle \mathbf{a}(t), R_{90}(\mathbf{v}(t)) \rangle \qquad (2)$$



para algún escalar $\kappa_s(t) \in \mathbb{R}$. Llamamos a $\kappa_s : I \to \mathbb{R}$ la función de curvatura con signo. Es **negativa** si la curva gira en el sentido de las agujas del reloj en t, y **positiva** si gira en el sentido contrario a las agujas del reloj, como se muestra en la figura

NOTA: Esta medida se llama "**curvatura con signo**" porque su signo se interpreta como giro de las manecillas del reloj, mientras que su valor absoluto es igual a la curvatura, como lo vemos en enunciado

NOTA: Esta medida se llama "**curvatura con signo**" porque su signo se interpreta como giro de las manecillas del reloj, mientras que su valor absoluto es igual a la curvatura, como lo vemos en enunciado

Lema (Curvatura con signo y curvatura de la curva)

Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ *es una curva plana p.p.a, entonces* $|\kappa_s(t)| = \kappa(t)$.

DEM:

NOTA: Esta medida se llama "**curvatura con signo**" porque su signo se interpreta como giro de las manecillas del reloj, mientras que su valor absoluto es igual a la curvatura, como lo vemos en enunciado

Lema (Curvatura con signo y curvatura de la curva)

Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ es una curva plana p.p.a, entonces $|\kappa_s(t)| = \kappa(t)$.

DEM: Nótese que $\|R_{90}(\mathbf{v}(t))\| = \|\mathbf{v}(t)\| = 1$, por lo que, según la Proposición 2, tenemos

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{a}^{\perp}\|}{\|\mathbf{v}\|^2} = \frac{\|\mathbf{a}(t)\|}{1} = \|\kappa_s(t) R_{90}(\mathbf{v}(t))\| = |\kappa_s(t)|.$$

■

NOTA: Esta medida se llama "**curvatura con signo**" porque su signo se interpreta como giro de las manecillas del reloj, mientras que su valor absoluto es igual a la curvatura, como lo vemos en enunciado

Lema (**Curvatura con signo y curvatura de la curva**)

Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ *es una curva plana p.p.a, entonces* $|\kappa_s(t)| = \kappa(t)$.

DEM: Nótese que $||R_{90}(\mathbf{v}(t))|| = ||\mathbf{v}(t)|| = 1$, por lo que, según la Proposición 2, tenemos

$$\kappa(t) = \frac{||\mathbf{a}^{\perp}||}{||\mathbf{v}||^2} = \frac{||\mathbf{a}(t)||}{1} = ||\kappa_s(t) R_{90}(\mathbf{v}(t))|| = |\kappa_s(t)|.$$

■

El problema que se plantea a continuación es

¿cómo calcular la curvatura de una curva plana si ésta no es p.p.a?

NOTA: Esta medida se llama "**curvatura con signo**" porque su signo se interpreta como giro de las manecillas del reloj, mientras que su valor absoluto es igual a la curvatura, como lo vemos en enunciado

Lema (Curvatura con signo y curvatura de la curva)

Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ es una curva plana p.p.a, entonces $|\kappa_s(t)| = \kappa(t)$.

DEM: Nótese que $||R_{90}(\mathbf{v}(t))|| = ||\mathbf{v}(t)|| = 1$, por lo que, según la Proposición 2, tenemos

$$\kappa(t) = \frac{||\mathbf{a}^{\perp}||}{||\mathbf{v}||^2} = \frac{||\mathbf{a}(t)||}{1} = ||\kappa_s(t)R_{90}(\mathbf{v}(t))|| = |\kappa_s(t)|.$$

$\blacksquare$

El problema que se plantea a continuación es

¿cómo calcular la curvatura de una curva plana si ésta no es p.p.a?

pues, como ya sabemos, en muchas ocasiones es materialmente imposible encontrar la parametrización por el arco de una curva.

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana regular con parámetro arbitrario t, y consideremos $\widetilde{\alpha}(s) = \alpha(h(s))$ su reparametrización por la longitud de arco.

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana regular con parámetro arbitrario t, y consideremos $\widetilde{\alpha}(s) = \alpha(h(s))$ su reparametrización por la longitud de arco. Recuérdese que

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{v}(u)||du \qquad \text{y} \qquad h = g^{-1}$$

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana regular con parámetro arbitrario t, y consideremos $\widetilde{\alpha}(s) = \alpha(h(s))$ su reparametrización por la longitud de arco. Recuérdese que

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{v}(u)||du \qquad \text{y} \qquad h = g^{-1}$$

Ahora observe que

$$\widetilde{\mathbf{v}}(s) = h'(s)\mathbf{v}(h(s)) \qquad \widetilde{\mathbf{a}}(s) = h''(s)\mathbf{v}(h(s)) + (h'(s))^2\mathbf{a}(h(s))$$

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana regular con parámetro arbitrario t, y consideremos $\widetilde{\alpha}(s) = \alpha(h(s))$ su reparametrización por la longitud de arco. Recuérdese que

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{v}(u)||du \qquad \text{y} \qquad h = g^{-1}$$

Ahora observe que

$$\widetilde{\mathbf{v}}(s) = h'(s)\mathbf{v}(h(s)) \qquad \widetilde{\mathbf{a}}(s) = h''(s)\mathbf{v}(h(s)) + (h'(s))^2\mathbf{a}(h(s))$$

Como la **curvatura signo** debe ser invariante bajo cualquier re-parametrizaciones (que conserve la orientación), encontramos que

$$\kappa_s(h(s)) = \widetilde{\kappa}_s(s) = \langle \widetilde{\mathbf{a}}(s), R_{90}(\widetilde{\mathbf{v}}(s)\rangle$$

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana regular con parámetro arbitrario t, y consideremos $\widetilde{\alpha}(s) = \alpha(h(s))$ su reparametrización por la longitud de arco. Recuérdese que

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{v}(u)||du \qquad \text{y} \qquad h = g^{-1}$$

Ahora observe que

$$\widetilde{\mathbf{v}}(s) = h'(s)\mathbf{v}(h(s)) \qquad \widetilde{\mathbf{a}}(s) = h''(s)\mathbf{v}(h(s)) + (h'(s))^2\mathbf{a}(h(s))$$

Como la **curvatura signo** debe ser invariante bajo cualquier re-parametrizaciones (que conserve la orientación), encontramos que

$$\begin{aligned}\kappa_s(h(s)) = \widetilde{\kappa}_s(s) &= \langle \widetilde{\mathbf{a}}(s), R_{90}(\widetilde{\mathbf{v}}(s) \rangle \\ &= \big\langle h''(s)\mathbf{v}(h(s)) + h'(s)^2\mathbf{a}(h(s)), R_{90}\big(h'(s)\mathbf{v}(h(s))\big)\big\rangle \\ &= h'(s)^3 \big\langle \mathbf{a}(h(s)), R_{90}\big(\mathbf{v}(h(s))\big)\big\rangle\end{aligned}$$

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana regular con parámetro arbitrario t, y consideremos $\widetilde{\alpha}(s) = \alpha(h(s))$ su reparametrización por la longitud de arco. Recuérdese que

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{v}(u)\| du \qquad \text{y} \qquad h = g^{-1}$$

Ahora observe que

$$\widetilde{\mathbf{v}}(s) = h'(s)\mathbf{v}(h(s)) \qquad \widetilde{\mathbf{a}}(s) = h''(s)\mathbf{v}(h(s)) + (h'(s))^2\mathbf{a}(h(s))$$

Como la **curvatura signo** debe ser invariante bajo cualquier re-parametrizaciones (que conserve la orientación), encontramos que

$$\begin{aligned}
\kappa_s(h(s)) = \widetilde{\kappa}_s(s) &= \langle \widetilde{\mathbf{a}}(s), R_{90}(\widetilde{\mathbf{v}}(s) \rangle \\
&= \left\langle h''(s)\mathbf{v}(h(s)) + h'(s)^2\mathbf{a}(h(s)), R_{90}\big(h'(s)\mathbf{v}(h(s))\big)\right\rangle \\
&= h'(s)^3 \left\langle \mathbf{a}(h(s)), R_{90}\big(\mathbf{v}(h(s))\big)\right\rangle \qquad \text{como } h'(s) = \frac{1}{g'(h(s)} \\
&= \frac{\left\langle \mathbf{a}(h(s)), R_{90}\big(\mathbf{v}(h(s))\big)\right\rangle}{\|\mathbf{v}(h(s)\|^3}
\end{aligned}$$

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana regular con parámetro arbitrario t, y consideremos $\widetilde{\alpha}(s) = \alpha(h(s))$ su reparametrización por la longitud de arco. Recuérdese que

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{v}(u)||du \qquad \text{y} \qquad h = g^{-1}$$

Ahora observe que

$$\widetilde{\mathbf{v}}(s) = h'(s)\mathbf{v}(h(s)) \qquad \widetilde{\mathbf{a}}(s) = h''(s)\mathbf{v}(h(s)) + (h'(s))^2\mathbf{a}(h(s))$$

Como la **curvatura signo** debe ser invariante bajo cualquier re-parametrizaciones (que conserve la orientación), encontramos que

$$\begin{aligned}
\kappa_s(h(s)) = \widetilde{\kappa}_s(s) &= \langle \widetilde{\mathbf{a}}(s), R_{90}(\widetilde{\mathbf{v}}(s) \rangle \\
&= \big\langle h''(s)\mathbf{v}(h(s)) + h'(s)^2\mathbf{a}(h(s)), R_{90}\big(h'(s)\mathbf{v}(h(s))\big)\big\rangle \\
&= h'(s)^3 \big\langle \mathbf{a}(h(s)), R_{90}\big(\mathbf{v}(h(s))\big)\big\rangle \qquad \text{como } h'(s) = \frac{1}{g'(h(s)} \\
&= \frac{\big\langle \mathbf{a}(h(s)), R_{90}\big(\mathbf{v}(h(s))\big)\big\rangle}{\|\mathbf{v}(h(s)||^3}
\end{aligned}$$

Por tanto, reemplazando $h(s) = t$ en está expresión encontramos una definición general para κ_s

Definición (Curvatura $\kappa_s(t)$ en general)

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *es curva plana regular con parámetro arbitrario* t. *Entonces para todo* $t \in I$

$$\kappa_s(t) = \frac{\left\langle \mathbf{a}(t), R_{90}\Big(\frac{\mathbf{v}(t)}{||\mathbf{v}(t)||}\Big) \right\rangle}{||\mathbf{v}(t)||^2} = \frac{\langle \mathbf{a}(t), R_{90}(\mathbf{v}(t)) \rangle}{||\mathbf{v}(t)||^3} = \frac{\det\big(\mathbf{v}(t); \mathbf{a}(t)\big)}{||\mathbf{v}(t)||^3}$$

Definición (Curvatura $\kappa_s(t)$ en general)

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es curva plana regular con parámetro arbitrario t. Entonces para todo $t \in I$

$$\kappa_s(t) = \frac{\left\langle \mathbf{a}(t), R_{90}\left(\frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}\right)\right\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{\langle \mathbf{a}(t), R_{90}(\mathbf{v}(t))\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|^3} = \frac{\det\big(\mathbf{v}(t); \mathbf{a}(t)\big)}{\|\mathbf{v}(t)\|^3}$$

Verifiquemos la última igualdad en esta definición:

Definición (**Curvatura $\kappa_s(t)$ en general**)

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es curva plana regular con parámetro arbitrario t. Entonces para todo $t \in I$

$$\kappa_s(t) = \frac{\left\langle \mathbf{a}(t), R_{90}\left(\frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}\right)\right\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{\langle \mathbf{a}(t), R_{90}(\mathbf{v}(t))\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|^3} = \frac{\det\big(\mathbf{v}(t); \mathbf{a}(t)\big)}{\|\mathbf{v}(t)\|^3}$$

Verifiquemos la última igualdad en esta definición: Aquí $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ entonces $\mathbf{v}(t) = (x'(t), y'(t))$ y $\mathbf{a}(t) = (x''(t), y''(t))$

Definición (Curvatura $\kappa_s(t)$ en general)

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es curva plana regular con parámetro arbitrario t. Entonces para todo $t \in I$

$$\kappa_s(t) = \frac{\left\langle \mathbf{a}(t), R_{90}\left(\frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}\right)\right\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{\langle \mathbf{a}(t), R_{90}(\mathbf{v}(t))\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|^3} = \frac{\det\big(\mathbf{v}(t); \mathbf{a}(t)\big)}{\|\mathbf{v}(t)\|^3}$$

Verifiquemos la última igualdad en esta definición: Aquí $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ entonces $\mathbf{v}(t) = (x'(t), y'(t))$ y $\mathbf{a}(t) = (x''(t), y''(t))$ luego un rápido cálculo en donde suprimimos el parámetro, muestra que

$$\kappa_s = \frac{\langle \mathbf{a}, R_{90}(\mathbf{v})\rangle}{\|\mathbf{v}\|^3} = \frac{\langle (x'', y''), (-y', x')\rangle}{\left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\right)^3}$$

Definición (**Curvatura $\kappa_s(t)$ en general**)

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es curva plana regular con parámetro arbitrario t. Entonces para todo $t \in I$

$$\kappa_s(t) = \frac{\left\langle \mathbf{a}(t), R_{90}\left(\frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}\right)\right\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{\langle \mathbf{a}(t), R_{90}(\mathbf{v}(t))\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|^3} = \frac{\det\big(\mathbf{v}(t); \mathbf{a}(t)\big)}{\|\mathbf{v}(t)\|^3}$$

Verifiquemos la última igualdad en esta definición: Aquí $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ entonces $\mathbf{v}(t) = (x'(t), y'(t))$ y $\mathbf{a}(t) = (x''(t), y''(t))$ luego un rápido cálculo en donde suprimimos el parámetro, muestra que

$$\kappa_s = \frac{\langle \mathbf{a}, R_{90}(\mathbf{v})\rangle}{\|\mathbf{v}\|^3} = \frac{\langle (x'', y''), (-y', x')\rangle}{\left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\right)^3}$$

$$= \frac{x'y'' - x''y'}{\left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\right)^3} = \frac{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}}{\left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\right)^3} = \frac{\det\big(\mathbf{v}; \mathbf{a}\big)}{\|\mathbf{v}\|^3}$$

Definición (Curvatura $\kappa_s(t)$ en general)

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es curva plana regular con parámetro arbitrario t. Entonces para todo $t \in I$

$$\kappa_s(t) = \frac{\left\langle \mathbf{a}(t), R_{90}\left(\frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}\right)\right\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{\langle \mathbf{a}(t), R_{90}(\mathbf{v}(t))\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|^3} = \frac{\det\big(\mathbf{v}(t); \mathbf{a}(t)\big)}{\|\mathbf{v}(t)\|^3}$$

Verifiquemos la última igualdad en esta definición: Aquí $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ entonces $\mathbf{v}(t) = (x'(t), y'(t))$ y $\mathbf{a}(t) = (x''(t), y''(t))$ luego un rápido cálculo en donde suprimimos el parámetro, muestra que

$$\kappa_s = \frac{\langle \mathbf{a}, R_{90}(\mathbf{v})\rangle}{\|\mathbf{v}\|^3} = \frac{\langle (x'', y''), (-y', x')\rangle}{\left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\right)^3}$$

$$= \frac{x'y'' - x''y'}{\left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\right)^3} = \frac{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}}{\left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\right)^3} = \frac{\det\big(\mathbf{v}; \mathbf{a}\big)}{\|\mathbf{v}\|^3}$$

lo que nos da una fórmula para $\kappa_s(s)$, directamente en función de la curva α y sus derivadas.

Definición (**Curvatura $\kappa_s(t)$ en general**)

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es curva plana regular con parámetro arbitrario t. Entonces para todo $t \in I$

$$\kappa_s(t) = \frac{\left\langle \mathbf{a}(t), R_{90}\Big(\dfrac{\mathbf{v}(t)}{||\mathbf{v}(t)||}\Big) \right\rangle}{||\mathbf{v}(t)||^2} = \frac{\langle \mathbf{a}(t), R_{90}(\mathbf{v}(t)) \rangle}{||\mathbf{v}(t)||^3} = \frac{\det\big(\mathbf{v}(t); \mathbf{a}(t)\big)}{||\mathbf{v}(t)||^3}$$

Definición (Curvatura $\kappa_s(t)$ en general)

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es curva plana regular con parámetro arbitrario t. Entonces para todo $t \in I$

$$\kappa_s(t) = \frac{\left\langle \mathbf{a}(t), R_{90}\left(\frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}\right)\right\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{\langle \mathbf{a}(t), R_{90}(\mathbf{v}(t))\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|^3} = \frac{\det\big(\mathbf{v}(t); \mathbf{a}(t)\big)}{\|\mathbf{v}(t)\|^3}$$

Además verifica $|\kappa_s(t)| = \kappa(t)$.

Definición (**Curvatura $\kappa_s(t)$ en general**)

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es curva plana regular con parámetro arbitrario t. Entonces para todo $t \in I$

$$\kappa_s(t) = \frac{\left\langle \mathbf{a}(t), R_{90}\left(\frac{\mathbf{v}(t)}{||\mathbf{v}(t)||}\right)\right\rangle}{||\mathbf{v}(t)||^2} = \frac{\langle \mathbf{a}(t), R_{90}(\mathbf{v}(t))\rangle}{||\mathbf{v}(t)||^3} = \frac{\det\big(\mathbf{v}(t); \mathbf{a}(t)\big)}{||\mathbf{v}(t)||^3}$$

Además verifica $|\kappa_s(t)| = \kappa(t)$. En efecto,

$$\begin{aligned} |\kappa_s(t)| &= \left| \frac{\left\langle \mathbf{a}(t), R_{90}\left(\frac{\mathbf{v}(t)}{||\mathbf{v}(t)||}\right)\right\rangle}{||\mathbf{v}(t)||^2} \right| \\ &= \left| \frac{\left\langle \mathbf{a}^{\perp}(t), R_{90}\left(\frac{\mathbf{v}(t)}{||\mathbf{v}(t)||}\right)\right\rangle}{||\mathbf{v}(t)||^2} \right| \end{aligned}$$

Definición (**Curvatura $\kappa_s(t)$ en general**)

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es curva plana regular con parámetro arbitrario t. Entonces para todo $t \in I$

$$\kappa_s(t) = \frac{\left\langle \mathbf{a}(t), R_{90}\left(\frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}\right)\right\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{\langle \mathbf{a}(t), R_{90}(\mathbf{v}(t))\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|^3} = \frac{\det\big(\mathbf{v}(t); \mathbf{a}(t)\big)}{\|\mathbf{v}(t)\|^3}$$

Además verifica $|\kappa_s(t)| = \kappa(t)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
|\kappa_s(t)| &= \left| \frac{\left\langle \mathbf{a}(t), R_{90}\left(\frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}\right)\right\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} \right| \\
&= \left| \frac{\left\langle \mathbf{a}^{\perp}(t), R_{90}\left(\frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}\right)\right\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} \right| \quad \overbrace{=}^{Cauchy-Sch} \quad \frac{\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\| \left| R_{90}\left(\frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}\right)\right|}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} \\
&= \frac{\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \kappa(t)
\end{aligned}$$

EJEMPLO: Halle la curvatura de la circunferencia de centro **p** y radio r es $\alpha(s) = \mathbf{p} + r(\cos(\frac{s}{r}), \sin(\frac{s}{r}))$

SOL:

EJEMPLO: Halle la curvatura de la circunferencia de centro **p** y radio r es $\alpha(s) = \mathbf{p} + r(\cos(\frac{s}{r}), \sin(\frac{s}{r}))$

SOL: Un sencillo cálculo demuestra que

$$\mathbf{v}(s) = \Big(-\sin(\frac{s}{r}), \cos(\frac{s}{r})\Big) \qquad \|\mathbf{v}(s)|| = 1, \qquad \mathbf{a}(s) = \frac{1}{r}\Big(-\cos(\frac{s}{r}), -\sin(\frac{s}{r})\Big)$$

EJEMPLO: Halle la curvatura de la circunferencia de centro **p** y radio r es $\alpha(s) = \mathbf{p} + r(\cos(\frac{s}{r}), \sin(\frac{s}{r}))$

SOL: Un sencillo cálculo demuestra que

$$\mathbf{v}(s) = \Big(-\sin(\frac{s}{r}), \cos(\frac{s}{r})\Big) \qquad ||\mathbf{v}(s)|| = 1, \qquad \mathbf{a}(s) = \frac{1}{r}\Big(-\cos(\frac{s}{r}), -\sin(\frac{s}{r})\Big)$$

la **curvatura signo** está dada por

$$\kappa_s(s) = \frac{\langle \mathbf{a}(s), R_{90}(\mathbf{v}(s))\rangle}{||\mathbf{v}(s)||^2} = \Big\langle -\frac{1}{r}(\cos(\frac{s}{r}), -\sin(\frac{s}{r})), (-\cos(\frac{s}{r}), -\sin(\frac{s}{r}))\Big\rangle = \frac{1}{r}.$$

EJEMPLO: Halle la curvatura de la circunferencia de centro **p** y radio r es $\alpha(s) = \mathbf{p} + r(\cos(\frac{s}{r}), \sin(\frac{s}{r}))$

SOL: Un sencillo cálculo demuestra que

$$\mathbf{v}(s) = \Big(-\sin(\frac{s}{r}), \cos(\frac{s}{r})\Big) \qquad ||\mathbf{v}(s)|| = 1, \qquad \mathbf{a}(s) = \frac{1}{r}\Big(-\cos(\frac{s}{r}), -\sin(\frac{s}{r})\Big)$$

la **curvatura signo** está dada por

$$\kappa_s(s) = \frac{\langle \mathbf{a}(s), R_{90}(\mathbf{v}(s))\rangle}{||\mathbf{v}(s)||^2} = \Big\langle -\frac{1}{r}(\cos(\frac{s}{r}), -\sin(\frac{s}{r})), (-\cos(\frac{s}{r}), -\sin(\frac{s}{r}))\Big\rangle = \frac{1}{r}.$$

Usando la otra definición no queda:

$$\kappa_s = \frac{\det(\mathbf{v}; \mathbf{a})}{||\mathbf{v}||^3} = \det\begin{bmatrix} -\sin(\frac{s}{r}) & -\frac{1}{r}\cos(\frac{s}{r}) \\ \cos(\frac{s}{r}) & -\frac{1}{r}\sin(\frac{s}{r}) \end{bmatrix} = \frac{1}{r}$$

EJEMPLO: Halle la curvatura de la circunferencia de centro **p** y radio r es $\alpha(s) = \mathbf{p} + r(\cos(\frac{s}{r}), \sin(\frac{s}{r}))$

SOL: Un sencillo cálculo demuestra que

$$\mathbf{v}(s) = \Big(-\sin(\frac{s}{r}), \cos(\frac{s}{r})\Big) \qquad ||\mathbf{v}(s)|| = 1, \qquad \mathbf{a}(s) = \frac{1}{r}\Big(-\cos(\frac{s}{r}), -\sin(\frac{s}{r})\Big)$$

la **curvatura signo** está dada por

$$\kappa_s(s) = \frac{\langle \mathbf{a}(s), R_{90}(\mathbf{v}(s))\rangle}{||\mathbf{v}(s)||^2} = \Big\langle -\frac{1}{r}(\cos(\frac{s}{r}), -\sin(\frac{s}{r})), (-\cos(\frac{s}{r}), -\sin(\frac{s}{r}))\Big\rangle = \frac{1}{r}.$$

Usando la otra definición no queda:

$$\kappa_s = \frac{\det\big(\mathbf{v}; \mathbf{a}\big)}{||\mathbf{v}||^3} = \det \begin{bmatrix} -\sin(\frac{s}{r}) & -\frac{1}{r}\cos(\frac{s}{r}) \\ \cos(\frac{s}{r}) & -\frac{1}{r}\sin(\frac{s}{r}) \end{bmatrix} = \frac{1}{r}$$

Por tanto, la curvatura de una circunferencia es siempre constante, y $\kappa(s) = |\kappa_s(s)| = \frac{1}{r}$.

EJEMPLO: Halle la curvatura $\kappa(t)$ de la catenaria $\alpha(s) = (\sinh^{-1} s, \sqrt{1+s^2})$

$\boxed{\textbf{Una interpretación geométrica de la curvatura:}}$. Supongamos dada una curva regular $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ p.p.a. Si escribimos $\alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$ se tiene que

$$x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1.$$

$\boxed{\textbf{Una interpretación geométrica de la curvatura:}}$. Supongamos dada una curva regular $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ p.p.a. Si escribimos $\alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$ se tiene que

$$x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1.$$

En consecuencia, existe una función diferenciable ((función ángulo)) $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(I)$ de modo que $x'(s) = \cos\varphi(s)$ e $y'(s) = \sin\varphi(s)$ esto es, el vector velocidad $\mathbf{v}(s)$ y la aceleración $\mathbf{a}(s)$ son de la forma

$$\mathbf{v}(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s)), \qquad R_{90}(\mathbf{v}(s)) = (-\sin\varphi(s), \cos\varphi(s))$$

$$\mathbf{a}(s) = \varphi'(s)(-\sin\varphi(s), \cos\varphi(s),)$$

$\boxed{\text{Una interpretación geométrica de la curvatura:}}$. Supongamos dada una curva regular $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ p.p.a. Si escribimos $\alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$ se tiene que

$$x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1.$$

En consecuencia, existe una función diferenciable ((función ángulo)) $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(I)$ de modo que $x'(s) = \cos\varphi(s)$ e $y'(s) = \sin\varphi(s)$ esto es, el vector velocidad $\mathbf{v}(s)$ y la aceleración $\mathbf{a}(s)$ son de la forma

$$\mathbf{v}(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s)), \qquad R_{90}(\mathbf{v}(s)) = (-\sin\varphi(s), \cos\varphi(s))$$

$$\mathbf{a}(s) = \varphi'(s)(-\sin\varphi(s), \cos\varphi(s),)$$

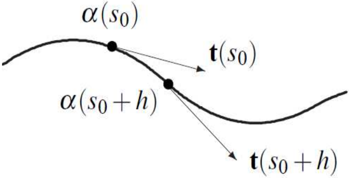
Es fácil comprobar entonces que la **curvatura signo** y la **curvatura** de α están dadas

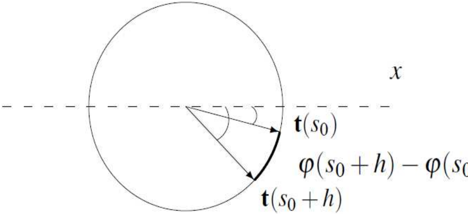
$$\kappa_s(s) = \langle \mathbf{a}(s), R_{90}(\mathbf{v}(s)) \rangle = \varphi'(s), \qquad \kappa(s) = \frac{||\mathbf{a}^\perp(s)||}{||\mathbf{v}(s)||} = \frac{||\mathbf{a}(s)||}{1} = ||\varphi'(s)|| =$$

Es decir, "la curvatura con signo es igual a la velocidad a la que cambia el ángulo".

Este razonamiento permite dar una interpretación geométrica de la curvatura de una curva:

$\kappa_s(s_0) = \varphi'(s_0)$



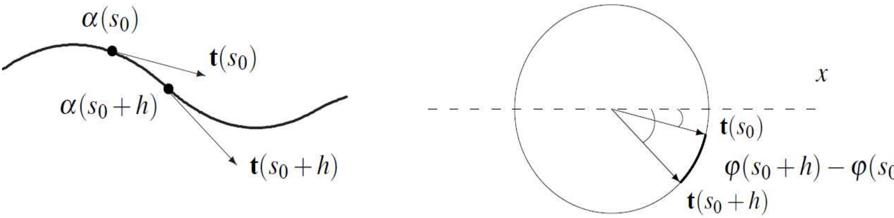


Este razonamiento permite dar una interpretación geométrica de la curvatura de una curva: para cada $s \in I$, el valor

$$\varphi(s) = \angle(\mathbf{t}(s), \text{el eje } x)$$

así, la curvatura signo de α nos dice cómo varía este ángulo respecto al parámetro arco s.

$\kappa_s(s_0) = \varphi'(s_0)$

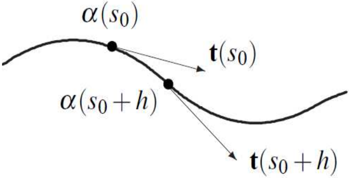


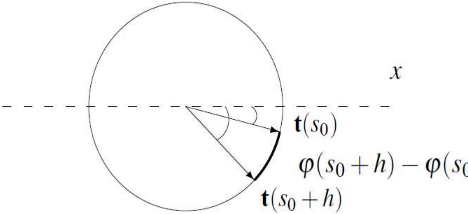
Este razonamiento permite dar una interpretación geométrica de la curvatura de una curva: para cada $s \in I$, el valor

$$\varphi(s) = \angle(\mathbf{t}(s), \text{el eje } x)$$

así, la curvatura signo de α nos dice cómo varía este ángulo respecto al parámetro arco s. Y aún más. Si elegimos un valor inicial $s_0 \in I$ y un incremento de éste, $s_0 + h$, se tiene que

$$\kappa_s(s_0) = \varphi'(s_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(s_0 + h) - \varphi(s_0)}{h}$$



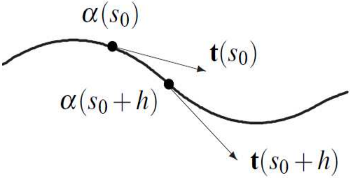


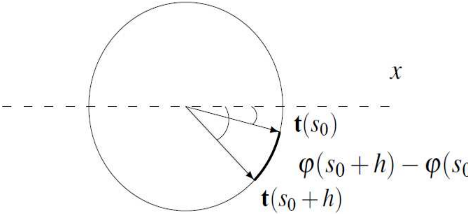
Este razonamiento permite dar una interpretación geométrica de la curvatura de una curva: para cada $s \in I$, el valor

$$\varphi(s) = \angle(\mathbf{t}(s), \text{el eje } x)$$

así, la curvatura signo de α nos dice cómo varía este ángulo respecto al parámetro arco s. Y aún más. Si elegimos un valor inicial $s_0 \in I$ y un incremento de éste, $s_0 + h$, se tiene que

$$\kappa_s(s_0) = \varphi'(s_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(s_0 + h) - \varphi(s_0)}{h}$$





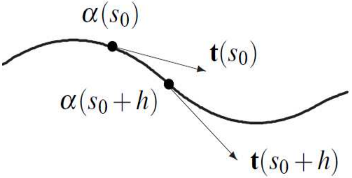
trasladando los vectores tangentes $\mathbf{t}(s_0)$ y $\mathbf{t}(s_0 + h)$ (unitarios) a $\mathbb{S}^1$ (véase la figura) se observa que $\varphi(s_0 + h) - \varphi(s_0)$ es, precisamente, la **longitud de arco en** $\mathbb{S}^1$ desde $\mathbf{t}(s_0)$ a $\mathbf{t}(s_0 + h)$, mientras que h es la **longitud de arco** desde $\alpha(s_0)$ y $\alpha(s_0 + h)$.

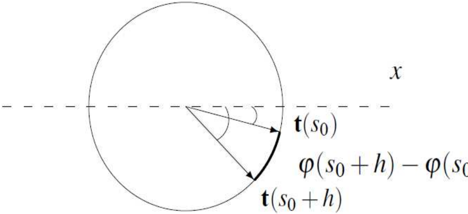
Este razonamiento permite dar una interpretación geométrica de la curvatura de una curva: para cada $s \in I$, el valor

$$\varphi(s) = \angle(\mathbf{t}(s), \text{el eje } x)$$

así, la curvatura signo de α nos dice cómo varía este ángulo respecto al parámetro arco s. Y aún más. Si elegimos un valor inicial $s_0 \in I$ y un incremento de éste, $s_0 + h$, se tiene que

$$\kappa_s(s_0) = \varphi'(s_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(s_0+h) - \varphi(s_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\text{longitud de arco en } \mathbb{S}^1}{\text{longitud de arco en } \alpha}$$





trasladando los vectores tangentes $\mathbf{t}(s_0)$ y $\mathbf{t}(s_0+h)$ (unitarios) a $\mathbb{S}^1$ (véase la figura) se observa que $\varphi(s_0+h) - \varphi(s_0)$ es, precisamente, la **longitud de arco en** $\mathbb{S}^1$ desde $\mathbf{t}(s_0)$ a $\mathbf{t}(s_0+h)$, mientras que h es la **longitud de arco** desde $\alpha(s_0)$ y $\alpha(s_0+h)$.

Los vectores $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ forman una base ortonormal positivamente orientada del plano euclídeo, que recibe el nombre de Diedro de Frenet.

Diedro de Frenet

Los vectores $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ forman una base ortonormal positivamente orientada del plano euclídeo, que recibe el nombre de Diedro de Frenet. Nos preguntamos entonces de manera natural:

¿cómo varían los vectores tangente y normal a una curva?

Los vectores $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ forman una base ortonormal positivamente orientada del plano euclídeo, que recibe el nombre de Diedro de Frenet. Nos preguntamos entonces de manera natural:

¿cómo varían los vectores tangente y normal a una curva?

La respuesta esta es estudiar $\mathbf{t}'(s)$ y $\mathbf{n}'(s)$.

Diedro de Frenet

Los vectores $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ forman una base ortonormal positivamente orientada del plano euclídeo, que recibe el nombre de Diedro de Frenet. Nos preguntamos entonces de manera natural:

¿cómo varían los vectores tangente y normal a una curva?

La respuesta esta es estudiar $\mathbf{t}'(s)$ y $\mathbf{n}'(s)$.

Teorema (Fórmulas de Frenet en $\mathbb{R}^2$)

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva regular (no necesariamente p.p.a.) las formulas de Frenet vienen dada por

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = \kappa \|\mathbf{v}\| \; \mathbf{n} & \textit{también para curvas en } \mathbb{R}^n \\ \mathbf{n}' = -\kappa \|\mathbf{v}\| \; \mathbf{t} & \end{cases}$$

Teorema (Fórmulas de Frenet en $\mathbb{R}^2$)

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva regular (no necesariamente p.p.a.) las formulas de Frenet vienen dada por

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = \kappa \, \|\mathbf{v}\| \, \mathbf{n} & \textit{también para curvas en } \mathbb{R}^n \\ \mathbf{n}' = -\kappa \, \|\mathbf{v}\| \, \mathbf{t} \end{cases}$$

Diedro de Frenet

Teorema (Fórmulas de Frenet en $\mathbb{R}^2$)

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva regular (no necesariamente p.p.a.) las formulas de Frenet vienen dada por

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = \kappa \left\|\mathbf{v}\right\| \mathbf{n} & \textit{también para curvas en } \mathbb{R}^n \\ \mathbf{n}' = -\kappa \left\|\mathbf{v}\right\| \mathbf{t} & \end{cases}$$

DEM: Primero observe que $\mathbf{a} = \mathbf{v}' = (\left\|\mathbf{v}\right\| \mathbf{t})' = \overbrace{\left\|\mathbf{v}\right\|' \mathbf{t}}^{\mathbf{a}^{||}} + \overbrace{\left\|\mathbf{v}\right\| \mathbf{t}'}^{\mathbf{a}^{\perp}}.$

Teorema (Fórmulas de Frenet en $\mathbb{R}^2$)

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva regular (no necesariamente p.p.a.) las formulas de Frenet vienen dada por

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = \kappa \, \|\mathbf{v}\| \, \mathbf{n} & \textit{también para curvas en } \mathbb{R}^n \\ \mathbf{n}' = -\kappa \, \|\mathbf{v}\| \, \mathbf{t} \end{cases}$$

DEM: Primero observe que $\mathbf{a} = \mathbf{v}' = (\|\mathbf{v}\| \, \mathbf{t})' = \overbrace{\|\mathbf{v}\|' \mathbf{t}}^{\mathbf{a}^{||}} + \overbrace{\|\mathbf{v}\| \, \mathbf{t}'}^{\mathbf{a}^{\perp}}$. Entonces de aquí $\mathbf{a}^{\perp} = \|\mathbf{v}\| \, \mathbf{t}'$.Luego, $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{a}^{\perp}}{\|\mathbf{a}^{\perp}\|} = \dfrac{\mathbf{t}'}{\|\mathbf{t}'\|}$.

Teorema (Fórmulas de Frenet en $\mathbb{R}^2$)

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva regular (no necesariamente p.p.a.) las formulas de Frenet vienen dada por

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = \kappa \, \|\mathbf{v}|| \, \mathbf{n} & \textit{también para curvas en } \mathbb{R}^n \\ \mathbf{n}' = -\kappa \, \|\mathbf{v}|| \, \mathbf{t} & \end{cases}$$

DEM: Primero observe que $\mathbf{a} = \mathbf{v}' = (\|\mathbf{v}||\mathbf{t})' = \overbrace{\|\mathbf{v}||'\mathbf{t}}^{\mathbf{a}^{||}} + \overbrace{\|\mathbf{v}||\mathbf{t}'}^{\mathbf{a}^{\perp}}$. Entonces de aquí $\mathbf{a}^{\perp} = \|\mathbf{v}||\mathbf{t}'$.Luego, $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{a}^{\perp}}{\|\mathbf{a}^{\perp}||} = \dfrac{\mathbf{t}'}{\|\mathbf{t}'||}$. De aquí y teniendo en mente Proposición 5

$$\mathbf{t}' = \|\mathbf{t}'||\mathbf{n} = \kappa \, \|\mathbf{v}||\mathbf{n}.$$

Teorema (Fórmulas de Frenet en $\mathbb{R}^2$)

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva regular (no necesariamente p.p.a.) las formulas de Frenet vienen dada por

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = \kappa \,\|\mathbf{v}\|\; \mathbf{n} & \textit{también para curvas en } \mathbb{R}^n \\ \mathbf{n}' = -\kappa \,\|\mathbf{v}\|\; \mathbf{t} \end{cases}$$

DEM: Primero observe que $\mathbf{a} = \mathbf{v}' = (\|\mathbf{v}\|\mathbf{t})' = \overbrace{\|\mathbf{v}\|'\mathbf{t}}^{\mathbf{a}^{||}} + \overbrace{\|\mathbf{v}\|\mathbf{t}'}^{\mathbf{a}^{\perp}}$. Entonces de aquí $\mathbf{a}^{\perp} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{t}'$.Luego, $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{a}^{\perp}}{\|\mathbf{a}^{\perp}\|} = \dfrac{\mathbf{t}'}{\|\mathbf{t}'\|}$. De aquí y teniendo en mente Proposición 5

$$\mathbf{t}' = \|\mathbf{t}'\|\mathbf{n} = \kappa\,\|\mathbf{v}\|\mathbf{n}.$$

Por otra parte, como la curva vive en $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\mathbf{n}' = \lambda_1\mathbf{t} + \lambda_2\mathbf{n}.$$

Teorema (Fórmulas de Frenet en $\mathbb{R}^2$)

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva regular (no necesariamente p.p.a.) las formulas de Frenet vienen dada por

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = \kappa \, ||\mathbf{v}|| \, \mathbf{n} & \textit{también para curvas en } \mathbb{R}^n \\ \mathbf{n}' = -\kappa \, ||\mathbf{v}|| \, \mathbf{t} \end{cases}$$

DEM: Primero observe que $\mathbf{a} = \mathbf{v}' = (||\mathbf{v}||\mathbf{t})' = \overbrace{||\mathbf{v}||'\mathbf{t}}^{\mathbf{a}^{||}} + \overbrace{||\mathbf{v}||\mathbf{t}'}^{\mathbf{a}^{\perp}}$. Entonces de aquí $\mathbf{a}^{\perp} = ||\mathbf{v}||\mathbf{t}'$.Luego, $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{a}^{\perp}}{||\mathbf{a}^{\perp}||} = \dfrac{\mathbf{t}'}{||\mathbf{t}'||}$. De aquí y teniendo en mente Proposición 5

$$\mathbf{t}' = ||\mathbf{t}'||\mathbf{n} = \kappa \, ||\mathbf{v}||\mathbf{n}.$$

Por otra parte, como la curva vive en $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\mathbf{n}' = \lambda_1 \mathbf{t} + \lambda_2 \mathbf{n}.$$

Así que hallemos λ_1, λ_2.

Teorema (Fórmulas de Frenet en $\mathbb{R}^2$)

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva regular (no necesariamente p.p.a.) las formulas de Frenet vienen dada por

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = \kappa \, \|\mathbf{v}|| \, \mathbf{n} & \textit{también para curvas en } \mathbb{R}^n \\ \mathbf{n}' = -\kappa \, \|\mathbf{v}|| \, \mathbf{t} \end{cases}$$

DEM: Primero observe que $\mathbf{a} = \mathbf{v}' = (\|\mathbf{v}||\mathbf{t})' = \overbrace{\|\mathbf{v}||'\mathbf{t}}^{\mathbf{a}^{||}} + \overbrace{\|\mathbf{v}||\mathbf{t}'}^{\mathbf{a}^{\perp}}$. Entonces de aquí $\mathbf{a}^{\perp} = \|\mathbf{v}||\mathbf{t}'$.Luego, $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{a}^{\perp}}{\|\mathbf{a}^{\perp}||} = \dfrac{\mathbf{t}'}{\|\mathbf{t}'||}$. De aquí y teniendo en mente Proposición 5

$$\mathbf{t}' = \|\mathbf{t}'||\mathbf{n} = \kappa \, \|\mathbf{v}||\mathbf{n}.$$

Por otra parte, como la curva vive en $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\mathbf{n}' = \lambda_1 \mathbf{t} + \lambda_2 \mathbf{n}.$$

Así que hallemos λ_1, λ_2. Dado que, $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$ entonces (derivando), llegamos a que $\langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle = 0$, por ende $\lambda_2 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle = 0$.

Teorema (Fórmulas de Frenet en $\mathbb{R}^2$)

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva regular (no necesariamente p.p.a.) las formulas de Frenet vienen dada por

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = \kappa \|\mathbf{v}\| \, \mathbf{n} & \textit{también para curvas en } \mathbb{R}^n \\ \mathbf{n}' = -\kappa \|\mathbf{v}\| \, \mathbf{t} \end{cases}$$

DEM: Primero observe que $\mathbf{a} = \mathbf{v}' = (\|\mathbf{v}\|\mathbf{t})' = \overbrace{\|\mathbf{v}\|'\mathbf{t}}^{\mathbf{a}^{||}} + \overbrace{\|\mathbf{v}\|\mathbf{t}'}^{\mathbf{a}^{\perp}}$. Entonces de aquí $\mathbf{a}^{\perp} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{t}'$.Luego, $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{a}^{\perp}}{\|\mathbf{a}^{\perp}\|} = \dfrac{\mathbf{t}'}{\|\mathbf{t}'\|}$. De aquí y teniendo en mente Proposición 5

$$\mathbf{t}' = \|\mathbf{t}'\|\mathbf{n} = \kappa \|\mathbf{v}\|\mathbf{n}.$$

Por otra parte, como la curva vive en $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\mathbf{n}' = \lambda_1 \mathbf{t} + \lambda_2 \mathbf{n}.$$

Así que hallemos λ_1, λ_2. Dado que, $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$ entonces (derivando), llegamos a que $\langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle = 0$, por ende $\lambda_2 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle = 0$. Por otro lado,

$$\lambda_1 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle' - \langle \mathbf{n}, \mathbf{t}' \rangle = 0 - \kappa \|\mathbf{v}\| = -\kappa \|\mathbf{v}\|$$

Diedro de Frenet

Teorema (Fórmulas de Frenet en $\mathbb{R}^2$)

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva regular (no necesariamente p.p.a.) las formulas de Frenet vienen dada por

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = \kappa \, \|\mathbf{v}|| \; \mathbf{n} & \textit{también para curvas en } \mathbb{R}^n \\ \mathbf{n}' = -\kappa \, \|\mathbf{v}|| \; \mathbf{t} \end{cases}$$

DEM: Primero observe que $\mathbf{a} = \mathbf{v}' = (\|\mathbf{v}||\mathbf{t})' = \overbrace{\|\mathbf{v}||'\mathbf{t}}^{\mathbf{a}^{||}} + \overbrace{\|\mathbf{v}||\mathbf{t}'}^{\mathbf{a}^{\perp}}$. Entonces de aquí $\mathbf{a}^{\perp} = \|\mathbf{v}||\mathbf{t}'$.Luego, $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{a}^{\perp}}{\|\mathbf{a}^{\perp}||} = \dfrac{\mathbf{t}'}{\|\mathbf{t}'||}$. De aquí y teniendo en mente Proposición 5

$$\mathbf{t}' = \|\mathbf{t}'||\mathbf{n} = \kappa \, \|\mathbf{v}||\mathbf{n}.$$

Por otra parte, como la curva vive en $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\mathbf{n}' = \lambda_1 \mathbf{t} + \lambda_2 \mathbf{n}.$$

Así que hallemos λ_1, λ_2. Dado que, $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$ entonces (derivando), llegamos a que $\langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle = 0$, por ende $\lambda_2 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle = 0$. Por otro lado,

$$\lambda_1 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle' - \langle \mathbf{n}, \mathbf{t}' \rangle = 0 - \kappa \, \|\mathbf{v}|| = -\kappa \, \|\mathbf{v}||$$

Generalizaremos la conclusión del Ejemplo

Generalizaremos la conclusión del Ejemplo

EJEMPLO (La curvatura de un gráfico en un punto crítico).
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función suave con un punto crítico en $t_0 \in I$, es decir, $f'(t_0) = 0$, la parametrización natural del gráfico de f es

$$\alpha(t) = (t, f(t)), \qquad t \in I.$$

Nótese que $\mathbf{v}(t) = (1, f'(t))$ y $\mathbf{a}(t) = (0, f''(t))$. En particular, $\mathbf{v}(t_0) = (1, 0)$ y $\mathbf{a}(t_0) = (0, f''(t_0))$ son ortogonales, por lo que $\mathbf{a}^{\perp}(t_0) = \mathbf{a}(t_0)$. Por lo tanto,

$$\kappa(t_0) = \frac{||\mathbf{a}^{\perp}(t_0)||}{||\mathbf{v}(t_0)||^2} = \frac{||\mathbf{a}(t_0)||}{||\mathbf{v}(t_0)||^2} = |f''(t_0)|. \qquad |concavidad| \text{ en un punto crítico de un g}$$

Para explicar esta generalización, supongamos entonces que $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva p.p.a y que $t_0 \in I$ con $\kappa(t_0) \neq 0$.

Para explicar esta generalización, supongamos entonces que $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva p.p.a y que $t_0 \in I$ con $\kappa(t_0) \neq 0$. El polinomio de Taylor de segundo orden de γ en el tiempo t_0 es

$$\gamma(t_0 + h) \approx \gamma(t_0) + h\gamma'(t_0) + \frac{h^2}{2}\gamma''(t_0)$$

Para explicar esta generalización, supongamos entonces que $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva p.p.a y que $t_0 \in I$ con $\kappa(t_0) \neq 0$. El polinomio de Taylor de segundo orden de γ en el tiempo t_0 es

$$\gamma(t_0 + h) \approx \gamma(t_0) + h\gamma'(t_0) + \frac{h^2}{2}\gamma''(t_0) = \gamma(t_0) + h\mathbf{t} + \frac{\kappa h^2}{2}\mathbf{n}$$

donde $\mathbf{t} = \mathbf{t}(t_0)$ y $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t_0)$.

Para explicar esta generalización, supongamos entonces que $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva p.p.a y que $t_0 \in I$ con $\kappa(t_0) \neq 0$. El polinomio de Taylor de segundo orden de γ en el tiempo t_0 es

$$\gamma(t_0 + h) \approx \gamma(t_0) + h\gamma'(t_0) + \frac{h^2}{2}\gamma''(t_0) = \gamma(t_0) + h\mathbf{t} + \frac{\kappa h^2}{2}\mathbf{n}$$

donde $\mathbf{t} = \mathbf{t}(t_0)$ y $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t_0)$. Observe que, el vector de desplazamiento

$$\mathbf{D}(h) := \gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0) \approx h\mathbf{t} + \frac{\kappa h^2}{2}\mathbf{n}$$

Aproximación, Evolutas

Para explicar esta generalización, supongamos entonces que $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva p.p.a y que $t_0 \in I$ con $\kappa(t_0) \neq 0$. El polinomio de Taylor de segundo orden de γ en el tiempo t_0 es

$$\gamma(t_0 + h) \approx \gamma(t_0) + h\gamma'(t_0) + \frac{h^2}{2}\gamma''(t_0) = \gamma(t_0) + h\mathbf{t} + \frac{\kappa h^2}{2}\mathbf{n}$$

donde $\mathbf{t} = \mathbf{t}(t_0)$ y $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t_0)$. Observe que, el vector de desplazamiento

$$\mathbf{D}(h) := \gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0) \approx h\mathbf{t} + \frac{\kappa h^2}{2}\mathbf{n}$$

Por tanto, las componentes de $\mathbf{D}(h)$ en las direcciones de $\mathbf{t}$ y $\mathbf{n}$ son

$$x(h) = \langle \mathbf{D}(h), \mathbf{t} \rangle \approx h, \qquad y(h) = \langle \mathbf{D}(h), \mathbf{n} \rangle \approx \frac{\kappa h^2}{2}$$

Para explicar esta generalización, supongamos entonces que $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva p.p.a y que $t_0 \in I$ con $\kappa(t_0) \neq 0$. El polinomio de Taylor de segundo orden de γ en el tiempo t_0 es

$$\gamma(t_0 + h) \approx \gamma(t_0) + h\gamma'(t_0) + \frac{h^2}{2}\gamma''(t_0) = \gamma(t_0) + h\mathbf{t} + \frac{\kappa h^2}{2}\mathbf{n}$$

donde $\mathbf{t} = \mathbf{t}(t_0)$ y $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t_0)$. Observe que, el vector de desplazamiento

$$\mathbf{D}(h) := \gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0) \approx h\mathbf{t} + \frac{\kappa h^2}{2}\mathbf{n}$$

Por tanto, las componentes de $\mathbf{D}(h)$ en las direcciones de $\mathbf{t}$ y $\mathbf{n}$ son

$$x(h) = \langle \mathbf{D}(h), \mathbf{t} \rangle \approx h, \qquad y(h) = \langle \mathbf{D}(h), \mathbf{n} \rangle \approx \frac{\kappa h^2}{2}$$

Además, si $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ es cualquier vector unitario ortogonal a $\mathbf{t}$ y $\mathbf{n}$, entonces el **polinomio de Taylor de segundo orden** para el componente de $\mathbf{D}$ en la dirección de $\mathbf{b}$ es

$$\langle \mathbf{D}(h), \mathbf{b} \rangle \approx 0.$$

Para explicar esta generalización, supongamos entonces que $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva p.p.a y que $t_0 \in I$ con $\kappa(t_0) \neq 0$. El polinomio de Taylor de segundo orden de γ en el tiempo t_0 es

$$\gamma(t_0 + h) \approx \gamma(t_0) + h\gamma'(t_0) + \frac{h^2}{2}\gamma''(t_0) = \gamma(t_0) + h\mathbf{t} + \frac{\kappa h^2}{2}\mathbf{n}$$

donde $\mathbf{t} = \mathbf{t}(t_0)$ y $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t_0)$. Observe que, el vector de desplazamiento

$$\mathbf{D}(h) := \gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0) \approx h\mathbf{t} + \frac{\kappa h^2}{2}\mathbf{n}$$

Por tanto, las componentes de $\mathbf{D}(h)$ en las direcciones de $\mathbf{t}$ y $\mathbf{n}$ son

$$x(h) = \langle \mathbf{D}(h), \mathbf{t} \rangle \approx h, \qquad y(h) = \langle \mathbf{D}(h), \mathbf{n} \rangle \approx \frac{\kappa h^2}{2}$$

Además, si $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ es cualquier vector unitario ortogonal a $\mathbf{t}$ y $\mathbf{n}$, entonces el **polinomio de Taylor de segundo orden** para el componente de $\mathbf{D}$ en la dirección de $\mathbf{b}$ es

$$\langle \mathbf{D}(h), \mathbf{b} \rangle \approx 0.$$

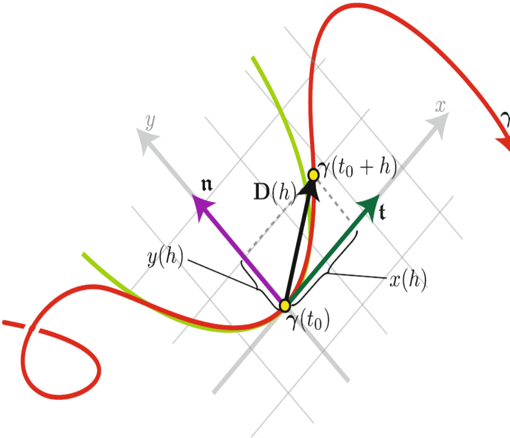
Cada ecuación contiene "$\approx$" por lo que los lados izquierdo y derecho de cada ecuación difiere en un término de error, $E(h)$, para el cual

$|E(h)|$

$$\lim_{h\to 0} \frac{|E(h)|}{h^2} = 0.$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{|E(h)|}{h^2}=0.$$

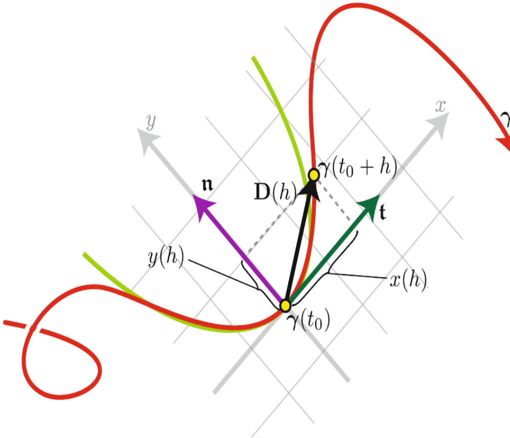
La notación $x(h)$ e $y(h)$ es apropiada si imaginas que reposicionas e inclinas tu cabeza de modo que parezca que $\mathrm{gen}\{\mathbf{t},\mathbf{n}\}$ es el plano xy con el origen en $\gamma(t_0)$; véase la figura.



$$\lim_{h \to 0} \frac{|E(h)|}{h^2} = 0.$$

La notación $x(h)$ e $y(h)$ es apropiada si imaginas que reposicionas e inclinas tu cabeza de modo que parezca que $\mathrm{gen}\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ es el plano xy con el origen en $\gamma(t_0)$; véase la figura. Desde este punto de vista, la traza del 2-polinomio de Taylor de γ en t_0 es la **parábola**

$$y = \frac{\kappa}{2} x^2.$$

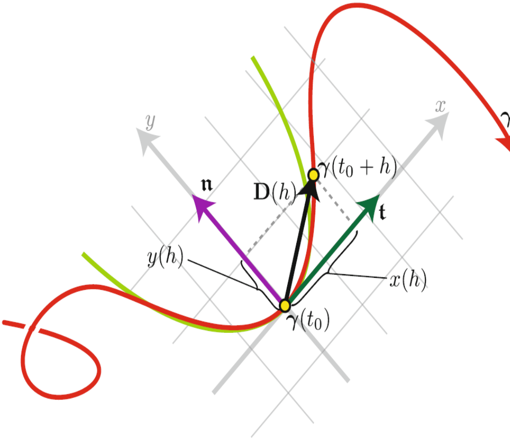


$$\lim_{h\to 0} \frac{|E(h)|}{h^2} = 0.$$

La notación $x(h)$ e $y(h)$ es apropiada si imaginas que reposicionas e inclinas tu cabeza de modo que parezca que $\text{gen}\{\mathbf{t},\mathbf{n}\}$ es el plano xy con el origen en $\gamma(t_0)$; véase la figura. Desde este punto de vista, la traza del 2-polinomio de Taylor de γ en t_0 es la **parábola**

$$y = \frac{\kappa}{2}x^2.$$

La concavidad de esta parábola es $y''(0) = \kappa(t_0)$, que proporciona una interpretación general de la curvatura:

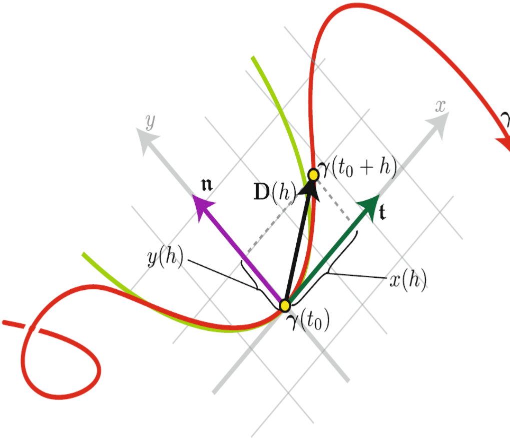


$$\lim_{h\to 0}\frac{|E(h)|}{h^2}=0.$$

La notación $x(h)$ e $y(h)$ es apropiada si imaginas que reposicionas e inclinas tu cabeza de modo que parezca que $\text{gen}\{\mathbf{t},\mathbf{n}\}$ es el plano xy con el origen en $\gamma(t_0)$; véase la figura. Desde este punto de vista, la traza del 2-polinomio de Taylor de γ en t_0 es la **parábola**

$$y=\frac{\kappa}{2}x^2.$$

La concavidad de esta parábola es $y''(0)=\kappa(t_0)$, que proporciona una interpretación general de la curvatura: la curvatura es igual a la concavidad de la parábola que se aproxima a la traza de la curva en el punto.

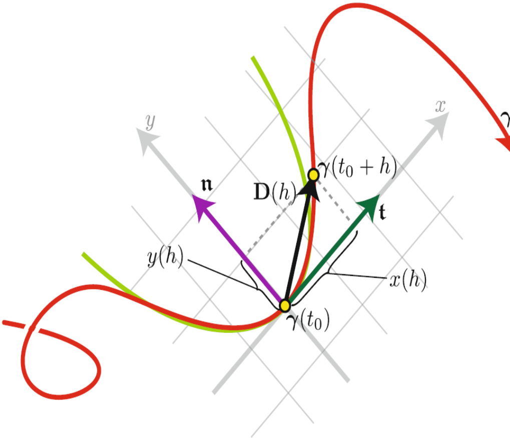


$$\lim_{h\to 0} \frac{|E(h)|}{h^2} = 0.$$

La notación $x(h)$ e $y(h)$ es apropiada si imaginas que reposicionas e inclinas tu cabeza de modo que parezca que $\text{gen}\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ es el plano xy con el origen en $\gamma(t_0)$; véase la figura. Desde este punto de vista, la traza del 2-polinomio de Taylor de γ en t_0 es la **parábola**

$$y = \frac{\kappa}{2}x^2.$$

La concavidad de esta parábola es $y''(0) = \kappa(t_0)$, que proporciona una interpretación general de la curvatura: la curvatura es igual a la concavidad de la parábola que se aproxima a la traza de la curva en el punto.

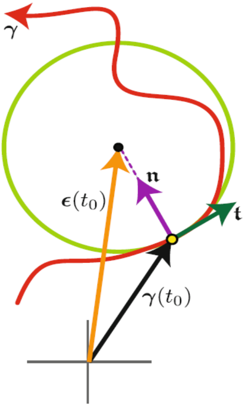


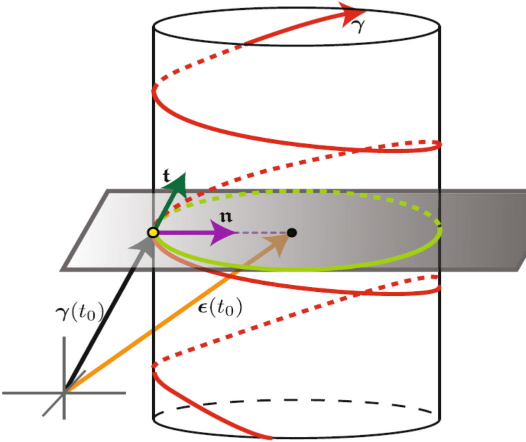
La traza de γ se aproxima cerca de $\gamma(t_0)$ por la parábola co concavidad $\kappa(t_0)$ en el **tn**-plano (trasladada a $\gamma(t_0)$)

Analizamos cómo la traza de la curva también ((es bien besado por otro amante,)) Analizamos cómo la traza de la curva también es aproximado mediante una **circunferencia** en el plano osculador

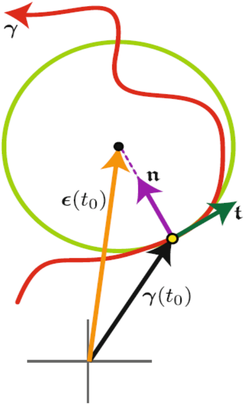
Analizamos cómo la traza de la curva también es aproximado mediante una **circunferencia** en el plano osculador ((que luego trasladamos y será el circulo que “mejor besa” a la curva en la vecindad del punto $\gamma(t_0)$.)).

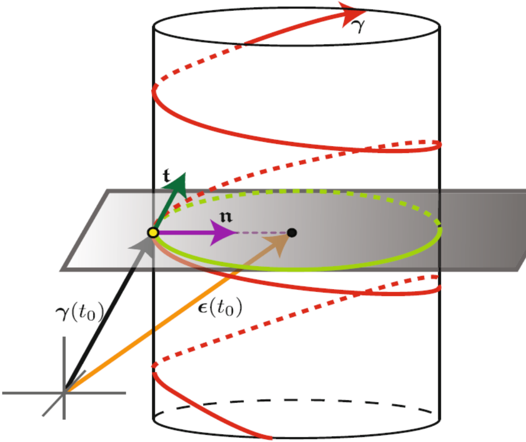
Analizamos cómo la traza de la curva también es aproximado mediante una **circunferencia** en el plano osculador ((que luego trasladamos y será el circulo que "mejor besa" a la curva en la vecindad del punto $\gamma(t_0)$.)).

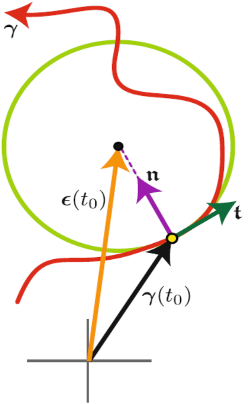


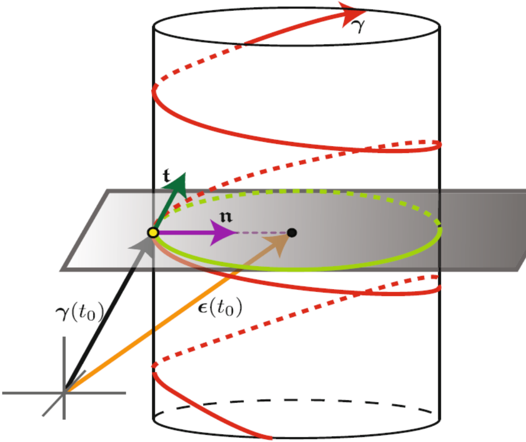


La circunferencia osculatriz para una curva plana (izquierda) y una curva en $\mathbb{R}^3$ (derecha), trasladado a $\epsilon(t_0)$


γ
$\mathbf{n}$
$\boldsymbol{\epsilon}(t_0)$
$\mathbf{t}$
$\gamma(t_0)$


γ
$\mathbf{t}$
$\mathbf{n}$
$\gamma(t_0)$
$\boldsymbol{\epsilon}(t_0)$

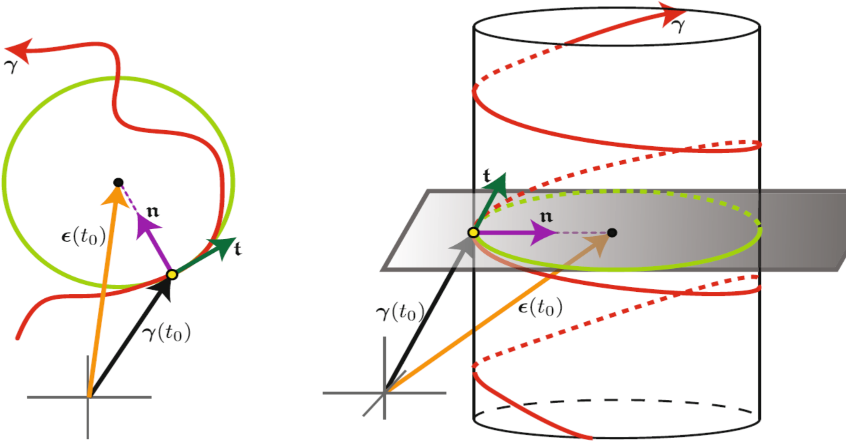


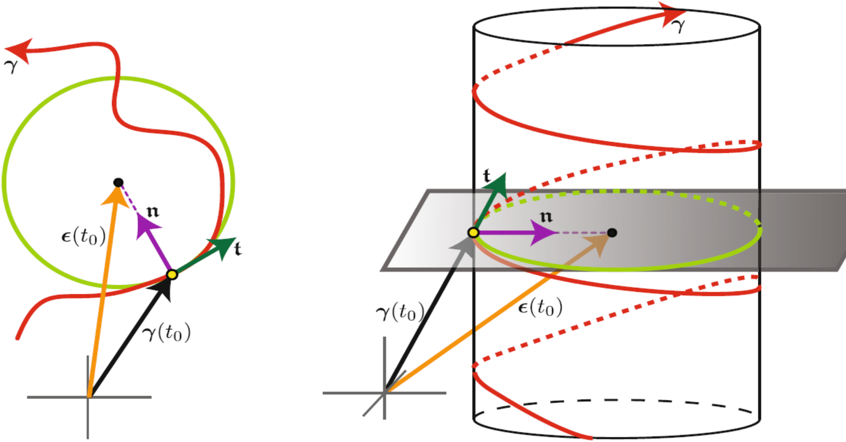


Definición (Circunferencia osculatriz)

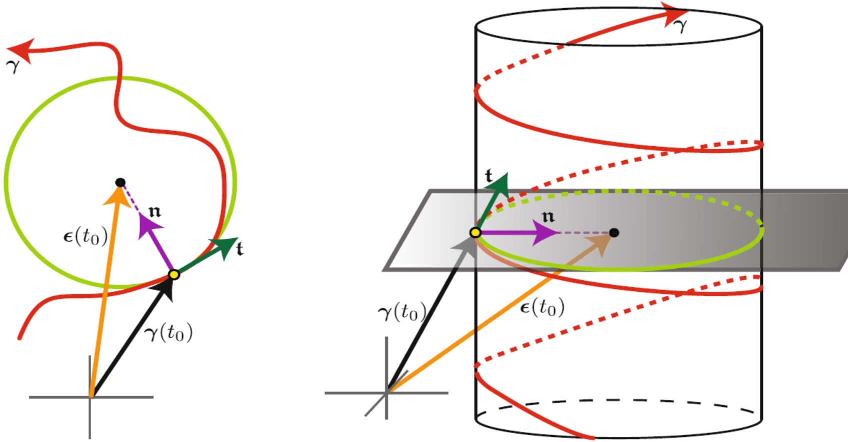
Definamos la **circunferencia osculatriz** *como la circunferencia en el* **tn***-plano osculador centrado en el origen con radio* $R = \frac{1}{\kappa(t_0)}$ *. Esta circunferencia podría parametrizarse como*

$$c(s) = \frac{1}{\kappa(t_0)}\Big(\cos(s)\mathbf{t} + \sin(s)\mathbf{n}\Big), \qquad s \in [0, 2\pi].$$

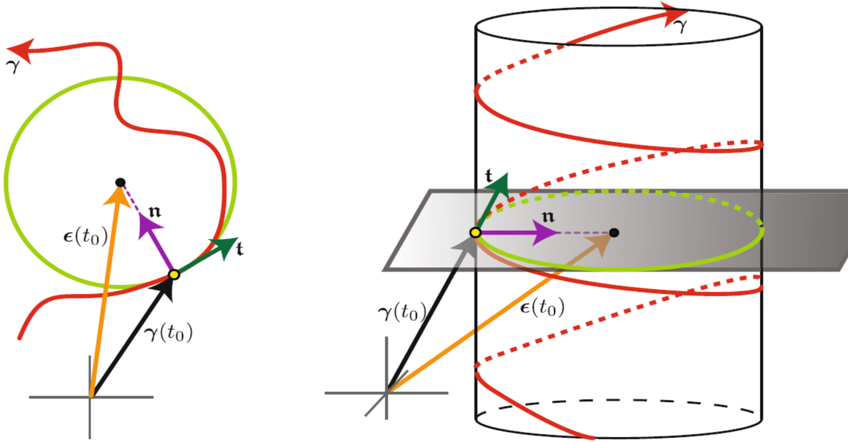

γ
$\boldsymbol{\epsilon}(t_0)$
$\mathfrak{n}$
$\mathfrak{t}$
$\gamma(t_0)$
γ
$\mathfrak{t}$
$\mathfrak{n}$
$\gamma(t_0)$
$\boldsymbol{\epsilon}(t_0)$



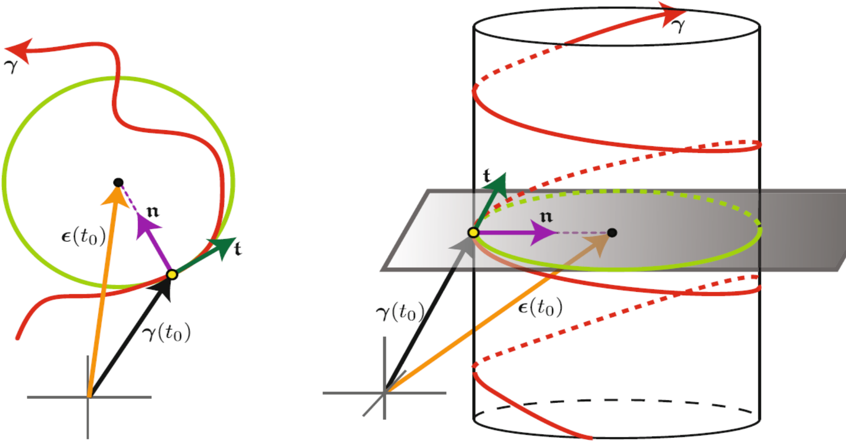
Específicamente, la figura muestra la **traslación** de la circunferencia osculatriz a la posición en la cual **besará** la curva en el punto $\gamma(t_0)$,



Específicamente, la figura muestra la **traslación** de la circunferencia osculatriz a la posición en la cual **besará** la curva en el punto $\gamma(t_0)$, una vez allí denotamos por $\epsilon(t_0)$ las coordenadas de su **nuevo centro**.

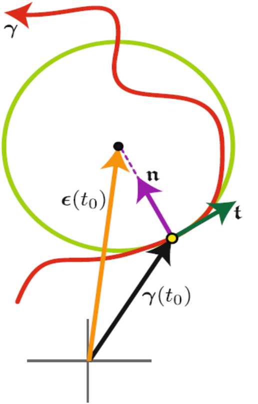


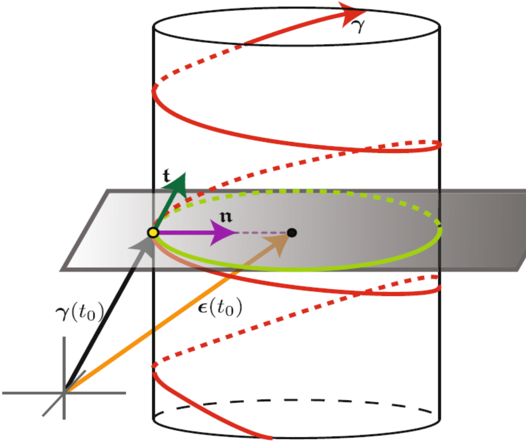
Específicamente, la figura muestra la **traslación** de la circunferencia osculatriz a la posición en la cual **besará** la curva en el punto $\gamma(t_0)$, una vez allí denotamos por $\epsilon(t_0)$ las coordenadas de su **nuevo centro**. Esta posición se encuentra comenzando en $\gamma(t_0)$ y recorriendo la distancia $\frac{1}{\kappa(t_0)}$ en la dirección de **n**:



Vectorialmente hablando es:

$$\epsilon(t_0) = \gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}\mathbf{n}. \tag{3}$$

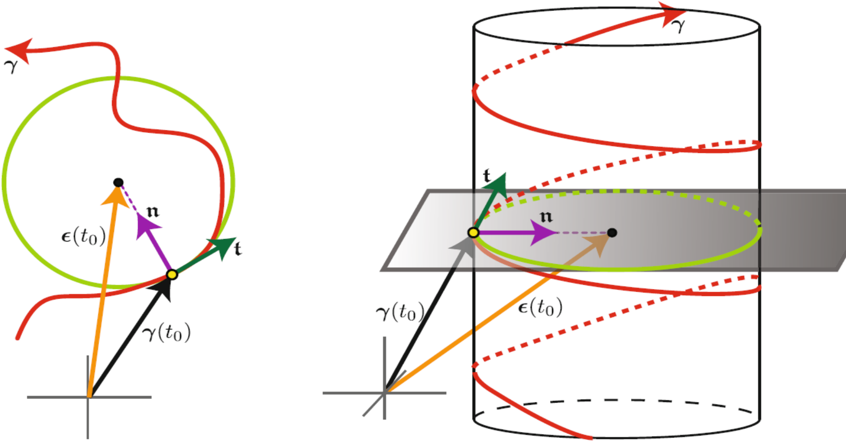




Vectorialmente hablando es:

$$\epsilon(t_0) = \gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}\mathbf{n}. \tag{3}$$

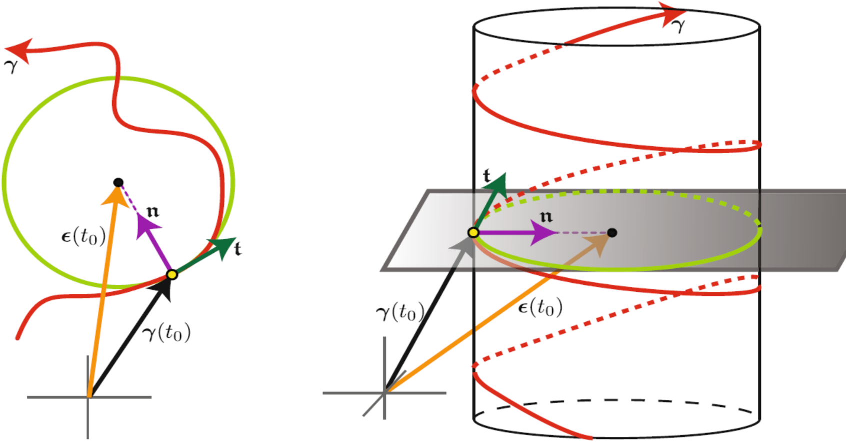
El término "**osculatriz**" proviene de la raíz latina "**besar**", porque cuando se traduce a esta posición, la circunferencia osculatriz besa ((apasionadamente)) el trazo de la curva en $\gamma(t_0)$.



Vectorialmente hablando es:

$$\epsilon(t_0) = \gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}\mathbf{n}. \tag{3}$$

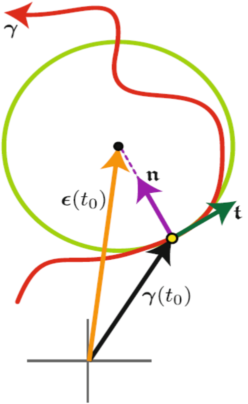
Nótese que $t \to \epsilon(t_0)$ es en sí misma una curva parametrizada (no necesariamente regular) en cualquier vecindad de t_0 a lo largo de la cual $\kappa \neq 0$. Esta curva se llama evoluta de γ

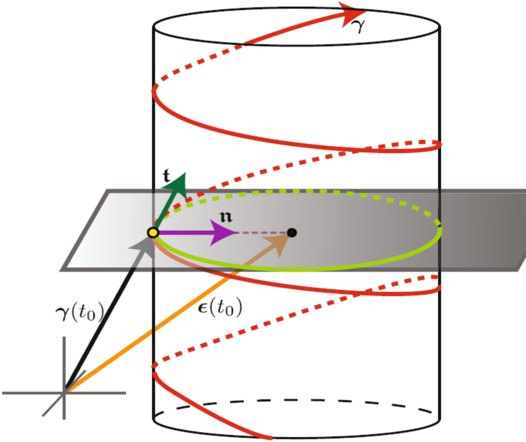


Definición (La evoluta)

La evoluta de una curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *parametrizada regular es el lugar geométrico de los* **centros de curvatura** *de* α*, es decir, la curva* $\epsilon(t) := \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}\mathbf{n}(t)$*Además, si* ϵ *es la evoluta de* α*, se dice que* α *es una involuta de* ϵ*.*

PREGUNTA: Si ϵ es la evoluta de α y su traza es una circunferencia, haga un bosquejo de la traza de α

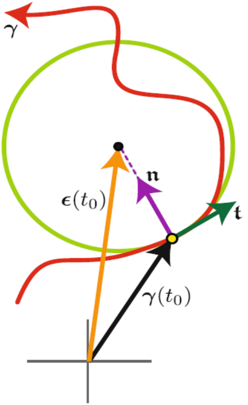


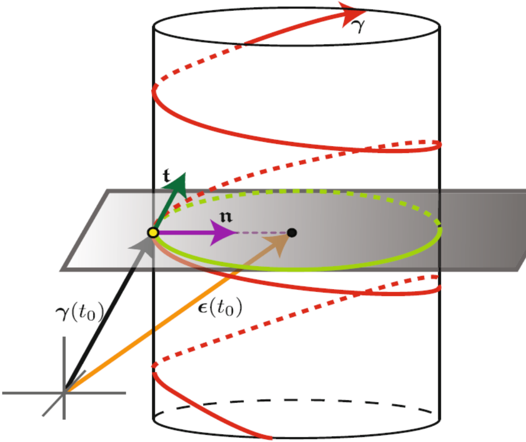


Proposición

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada regular. La evoluta de α es la única curva de la forma $\epsilon(t) = \alpha(t) + f(t)\mathbf{n}(t)$, donde f es una función real diferenciable, de modo que la recta normal a α coincide con la recta tangente a α_E en cada valor t del parámetro.

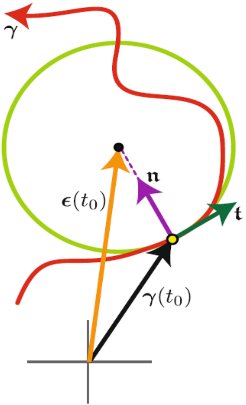
DEM:

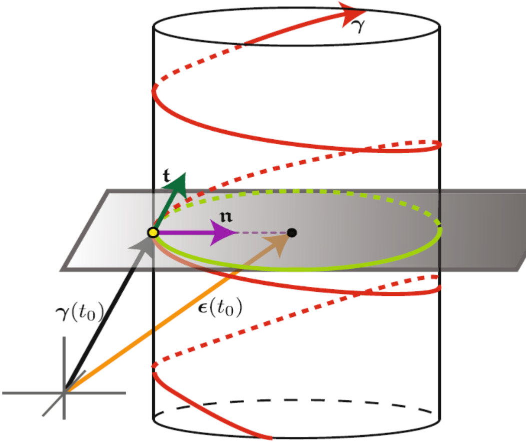




Proposición

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *una curva parametrizada regular. La evoluta de* α *es la única curva de la forma* $\epsilon(t) = \alpha(t) + f(t)\mathbf{n}(t)$, *donde* f *es una función real diferenciable, de modo que la recta normal a* α *coincide con la recta tangente a* α_E *en cada valor* t *del parámetro. Es decir,* $\mathbf{v}_\epsilon(t)$ *y* $\mathbf{n}(t)$ *son paralelos.*





Proposición

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada regular. La evoluta de α es la única curva de la forma $\epsilon(t) = \alpha(t) + f(t)\mathbf{n}(t)$, donde f es una función real diferenciable, Demuestre que $\mathbf{v}_\epsilon(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ son paralelos.

DEM:

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada regular. La evoluta de α es la única curva de la forma $\epsilon(t) = \alpha(t) + f(t)\mathbf{n}(t)$, donde f es una función real diferenciable, Demuestre que $\mathbf{v}_\epsilon(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ son paralelos.

DEM:

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada regular. La evoluta de α es la única curva de la forma $\epsilon(t) = \alpha(t) + f(t)\mathbf{n}(t)$, donde f es una función real diferenciable, Demuestre que $\mathbf{v}_\epsilon(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ son paralelos.

DEM: Demostraremos que $\mathbf{v}_\epsilon$ y $\mathbf{n}$ son paralelos. La curva evoluta de α está dada por

$$\epsilon(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}\mathbf{n}(t)$$

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada regular. La evoluta de α es la única curva de la forma $\epsilon(t) = \alpha(t) + f(t)\mathbf{n}(t)$, donde f es una función real diferenciable, Demuestre que $\mathbf{v}_\epsilon(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ son paralelos.

DEM: Demostraremos que $\mathbf{v}_\epsilon$ y $\mathbf{n}$ son paralelos. La curva evoluta de α está dada por

$$\epsilon(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}\mathbf{n}(t)$$

Ahora, derivemos esta expresión (suprimamos el parámetro t), y teniendo en mente que $\mathbf{n}' = -\kappa \|\mathbf{v}\| \mathbf{t} = -\kappa \mathbf{v}$ encontramos

$$\mathbf{v}_\epsilon = \mathbf{v} + \frac{1}{k}\mathbf{n}' - \frac{\kappa'}{\kappa^2}\mathbf{n} = -\frac{\kappa'}{\kappa^2}\mathbf{n}$$

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada regular. La evoluta de α es la única curva de la forma $\epsilon(t) = \alpha(t) + f(t)\mathbf{n}(t)$, donde f es una función real diferenciable, Demuestre que $\mathbf{v}_\epsilon(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ son paralelos.

DEM: Demostraremos que $\mathbf{v}_\epsilon$ y $\mathbf{n}$ son paralelos. La curva evoluta de α está dada por

$$\epsilon(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}\mathbf{n}(t)$$

Ahora, derivemos esta expresión (suprimamos el parámetro t), y teniendo en mente que $\mathbf{n}' = -\kappa \|\mathbf{v}| |\mathbf{t} = -\kappa \mathbf{v}$ encontramos

$$\mathbf{v}_\epsilon = \mathbf{v} + \frac{1}{k}\mathbf{n}' - \frac{\kappa'}{\kappa^2}\mathbf{n} = -\frac{\kappa'}{\kappa^2}\mathbf{n}$$

Por tanto, afirmamos que la recta tangente de ϵ coincide con la recta normal a α para todo t.

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada regular. La evoluta de α es la única curva de la forma $\epsilon(t) = \alpha(t) + f(t)\mathbf{n}(t)$, donde f es una función real diferenciable, Demuestre que $\mathbf{v}_\epsilon(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ son paralelos.

DEM:

Unicidad:

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada regular. La evoluta de α es la única curva de la forma $\epsilon(t) = \alpha(t) + f(t)\mathbf{n}(t)$, donde f es una función real diferenciable, Demuestre que $\mathbf{v}_\epsilon(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ son paralelos.

DEM:

Unicidad: Supongamos que existe otra curva evoluta de α;

$$\overline{\epsilon}(t) = \alpha(t) + f(t)\mathbf{n}(t),$$

donde f es una función real diferenciable, de modo que $\overline{\epsilon}'(t) = \lambda(t)\mathbf{n}(t)$.

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada regular. La evoluta de α es la única curva de la forma $\epsilon(t) = \alpha(t) + f(t)\mathbf{n}(t)$, donde f es una función real diferenciable, Demuestre que $\mathbf{v}_\epsilon(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ son paralelos.

DEM:

Unicidad: Supongamos que existe otra curva evoluta de α;

$$\overline{\epsilon}(t) = \alpha(t) + f(t)\mathbf{n}(t),$$

donde f es una función real diferenciable, de modo que $\overline{\epsilon}'(t) = \lambda(t)\mathbf{n}(t)$. Calculemos la función $f(t)$.

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada regular. La evoluta de α es la única curva de la forma $\epsilon(t) = \alpha(t) + f(t)\mathbf{n}(t)$, donde f es una función real diferenciable, Demuestre que $\mathbf{v}_\epsilon(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ son paralelos.

DEM:

Unicidad: Supongamos que existe otra curva evoluta de α;

$$\overline{\epsilon}(t) = \alpha(t) + f(t)\mathbf{n}(t),$$

donde f es una función real diferenciable, de modo que $\overline{\epsilon}'(t) = \lambda(t)\mathbf{n}(t)$. Calculemos la función $f(t)$. Es sencillo comprobar que

$$\begin{aligned}
\lambda(t)\mathbf{n}(t) \overset{\text{hip}}{=} \overline{\mathbf{v}}_\epsilon(t) &= \mathbf{v}(t) + f'(t)\mathbf{n}(t) + f(t)\mathbf{n}'(t) \\
&= \|\mathbf{v}(t)\|\,\mathbf{t}(t) + f'(t)\mathbf{n}(t) - f(t)\kappa(t)\,\|\mathbf{v}(t)\|\,\mathbf{t}(t) \\
&= \Big(1 - \kappa(t)f(t)\Big)\,\|\mathbf{v}(t)\|\,\mathbf{t}(t) + f'(t)\mathbf{n}(t)
\end{aligned}$$

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada regular. La evoluta de α es la única curva de la forma $\epsilon(t) = \alpha(t) + f(t)\mathbf{n}(t)$, donde f es una función real diferenciable, Demuestre que $\mathbf{v}_\epsilon(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ son paralelos.

DEM:

Unicidad: Supongamos que existe otra curva evoluta de α;

$$\overline{\epsilon}(t) = \alpha(t) + f(t)\mathbf{n}(t),$$

donde f es una función real diferenciable, de modo que $\overline{\epsilon}'(t) = \lambda(t)\mathbf{n}(t)$. Calculemos la función $f(t)$. Es sencillo comprobar que

$$\begin{aligned}\lambda(t)\mathbf{n}(t) \overset{\text{hip}}{=} \overline{\mathbf{v}}_\epsilon(t) &= \mathbf{v}(t) + f'(t)\mathbf{n}(t) + f(t)\mathbf{n}'(t)\\ &= \|\mathbf{v}(t)\|\,\mathbf{t}(t) + f'(t)\mathbf{n}(t) - f(t)\kappa(t)\,\|\mathbf{v}(t)\|\,\mathbf{t}(t)\\ &= \Big(1 - \kappa(t)f(t)\Big)\,\|\mathbf{v}(t)\|\,\mathbf{t}(t) + f'(t)\mathbf{n}(t)\end{aligned}$$

Igualando las componentes tangenciales, y teniendo en cuenta que la curva es regular encontramos que, $1 - \kappa(t)f(t) = 0$; es decir, que $f(t) = \frac{1}{k(t)}$, lo que $\overline{\epsilon}(t) = \epsilon(t)$. ∎