Series de Fourier: El fenómeno de Gibbs

7 de marzo de 2025

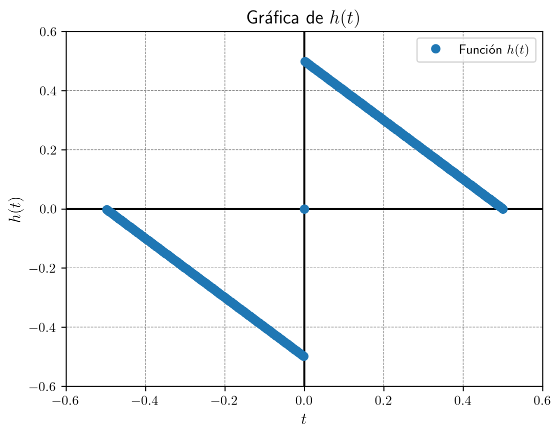
Universidad Nacional de Colombia

Guillermo Rodriguéz Blanco

Andrés David Cadena Simons acadenas@unal.edu.co

Veamos como se comporta el fenómeno de Gibbs en la siguiente función:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - t, & \text{cuando } 0 < t \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{cuando } t = 0, \\ -\frac{1}{2} - t, & \text{cuando } -\frac{1}{2} \leq t < 0. \end{cases}$$



Luego, es claro que h es de variación acotada y continua excepto en el punto $t = 0$, en dónde tiene una discontinuidad de salto. Además, note que h es una función impar, por lo que podemos cálcular su transformada de Fourier de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \hat{h}(m) &= \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(t)e^{-2\pi itm}dt, \\ &= -2i\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - t\right) \operatorname{sen}(2\pi mt)dt, \\ &= -\frac{i}{2m\pi}. \end{aligned} \tag{1}$$

Cuando $m \neq 0$ y por otro lado $\hat{h}(0) = 0$.
Luego, las sumas parciales de Fourier de h son:

$$(h * D_N)(t) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{\substack{|m| \leq N \\ m \neq 0}} \frac{e^{2\pi imt}}{m}. \tag{2}$$

Ahora derivando respecto a t

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(h * D_N) &= \sum_{\substack{|m| \leq N \\ m \neq 0}} e^{2\pi imt}, \\ &= D_N(t) - 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Siendo así, definamos $g(s) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi s)} - \frac{1}{\pi s}$, luego utilizando el teorema fundamental del cálculo en 3 podemos afirmar que

$$\begin{aligned}
(h * D_N)(t) &= \int_0^t D_N(s) - 1ds \\
&= -t + \int_0^t D_N(s)ds \\
&= -t + \int_0^t \frac{\operatorname{sen}((2N+1)\pi s)}{\operatorname{sen}(\pi s)}ds \qquad (4) \\
&= -t + \int_0^t \frac{\operatorname{sen}((2N+1)\pi s)}{\operatorname{sen}(\pi s)} - \frac{\operatorname{sen}((2N+1)\pi s)}{\pi s} + \frac{\operatorname{sen}((2N+1)\pi s)}{\pi s}ds \\
&= -t + \int_0^t g(s)\operatorname{sen}((2N+1)\pi s)ds + \int_0^t \frac{\operatorname{sen}((2N+1)\pi s)}{\pi s}ds.
\end{aligned}$$

Además, se puede ver que

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0} g(s) &= \lim_{s\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi s)} - \frac{1}{\pi s}, \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{\pi s - \operatorname{sen}(\pi s)}{\operatorname{sen}(\pi s)\pi s}, \\
&= \lim_{u\to 0} \frac{u - \operatorname{sen}(u)}{\operatorname{sen}(u)u}, \\
&= \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos(u)}{\cos(u)u + \operatorname{sen}(u)}, \\
&= \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{-\operatorname{sen}(u)u + 2\cos(u)}, \\
&= \frac{0}{2}, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo que podemos asegurar que g es continua en 0 y además $g(0) = 0$, luego

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0} \frac{g(s)}{s} &= \pi \lim_{u\to 0} \frac{u - \operatorname{sen}(u)}{\operatorname{sen}(u)u^2}, \\
&= \pi \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos(u)}{\cos(u)u^2 + 2\operatorname{sen}(u)u}, \\
&= \pi \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{-\operatorname{sen}(u)u^2 + 4\cos(u)u + 2\operatorname{sen}(u)}, \\
&= \pi \lim_{u\to 0} \frac{\cos(u)}{-\cos(u)u^2 - 6\operatorname{sen}(u)u + 6\cos(u)}, \\
&= \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

De esto que $g(s)$ sea continua y diferenciable en $[0, \frac{1}{2}]$ y $g'(0) = \frac{\pi}{6}$, además es claro que g y g' son funciones no negativas crecientes en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, luego

$$\begin{aligned} g'(s) &= \left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi s)} - \frac{1}{\pi s} \right)', \\ &= -\frac{\pi \cos(\pi s)}{\operatorname{sen}^2(\pi s)} + \frac{1}{\pi s^2}, \\ &\leq -\frac{\pi \cos(\pi/2)}{\operatorname{sen}^2(\pi/2)} + \frac{4}{\pi}, \\ &\leq \frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

Ahora, utilizando esto se sigue que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t g(s) \operatorname{sen}((2N+1)\pi s) ds \right| &= \left| -\frac{\cos((2N+1)\pi t)}{(2N+1)\pi} g(t) + \int_0^t g'(s) \frac{\cos((2N+1)\pi s)}{(2N+1)\pi} ds \right|, \\ &\leq \left(\frac{g(\frac{1}{2})}{\pi} + \frac{1}{2} \frac{g'(\frac{1}{2})}{\pi} \right) \frac{1}{2N+1}, \\ &\leq O\left(\frac{1}{2N+1} \right). \end{aligned} \tag{5}$$

Luego, reemplazando 5 en 4 nos queda que

$$\begin{aligned} (h * D_N)(t) &= -t + \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{\operatorname{sen}((2N+1)\pi s)}{s} ds + O\left(\frac{1}{2N+1} \right), \\ &= -t + \frac{1}{\pi} \int_0^{(2N+1)\pi t} \frac{\operatorname{sen}((s)}{s} ds + O\left(\frac{1}{2N+1} \right), \end{aligned} \tag{6}$$

Ahora note que si tomamos $t \in (0, \frac{1}{2}]$, entonces $\lim_{N \to infty} (h * D_N)(t)) = -t + \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} - t$, lo que se espera del núcleo de Dirichlet. De igual forma si tomamos $t \in [-\frac{1}{2}, 0)$, entonces $\lim_{N \to \infty} (h * D_N)(t) = -t - \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2} - t$. También note que para $t = 0$ se cumple que $\lim_{N \to \infty} (h * D_N)(0) = 0$, por lo que podemos ver que la serie de h converge al promedio de $h(0+)$ y $h(0-)$, que resulta ser $h(0) = 0$. Con la intención de estimar la no uniformidad de la convergencia haremos lo siguiente

$$(h * D_N)(t) - \left(\frac{1}{2} - t \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{(2N+1)\pi t} \frac{\operatorname{sen}(s)}{s} ds - \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{2N+1} \right).$$

luego si tomamos $N = 1, 2, \cdots$ y $t \in (0, \frac{1}{2}]$ se cumple que

$$\begin{aligned} (h * D_N)(t) - h(t) &\leq \frac{Si((2N+1)\pi)}{\pi} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \frac{1}{2N+1}, \\ &\leq \frac{Si(\pi)}{\pi} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \frac{1}{2N+1}, \\ &\leq 0{,}08949 \cdots + \frac{\pi^{-1}}{2N+1}. \end{aligned}$$

Luego escogiendo una subsucesión $t_N \to 0$ nosotros tenemos que

$$\limsup_{N\to\infty} [(h * D_N)(t_N) - h(t_N)] \leq \frac{Si(\pi)}{\pi} - \frac{1}{2} = 0{,}08949\cdots, \tag{7}$$

Luego, es particular si tomamos $t_N = \frac{1}{2N+1}$ se cumple que

$$\limsup_{N\to\infty} [(h * D_N)(t_N) - h(t_N)] = \frac{Si(\pi)}{\pi} - \frac{1}{2} = 0{,}08949\cdots$$

Veamos esto gráficamente

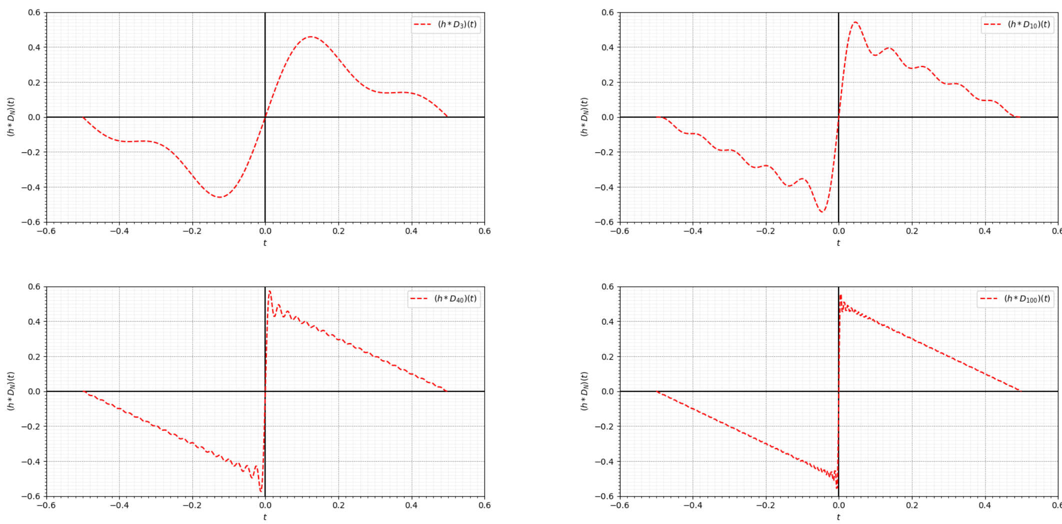


Figura 1: Series de Fourier $N = 3, 10, 40$ y 100.

En dónde se puede ver que las series presentan superar en un $9\,\%$ aproximadamente al acercarse al salto del 0, a este suceso se le llama el fenómeno de Gibbs.