Ecuaciones Diferenciales Parciales: Taller 4

16 de agosto del 2024

Universidad Nacional de Colombia

Oscar Guillermo Riaño Castañeda

Andrés David Cadena Simons acadenas@unal.edu.co
David Felipe Viuche Malaver dviuchem@unal.edu.co

Problema 1:

1. Suponga que u es una solución suave de la ecuación del calor $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Encuentre una familia de términos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $u_\lambda(x,t) = u(\lambda^a x, \lambda^b t)$ también sea solución de la ecuación del calor para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

2. Use el ejercicio anterior para mostrar que $v(x,t) := x \cdot \nabla u(x,t) + 2tu_t(x,t)$ también soluciona la ecuación del calor.

3. Suponga que u es una solución suave para la ecuación del calor no lineal $u_t - \Delta u = u^3 u_{x_1}$ en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Encuentre una familia de términos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $u_\lambda(x,t) = \lambda^a u(\lambda^b x, \lambda^c t)$ también sea solución de tal ecuación del calor no lineal para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Solución:

1. Suponga que u es una solución suave de la ecuación del calor $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Encuentre una familia de términos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $u_\lambda(x,t) = u(\lambda^a x, \lambda^b t)$ también sea solución de la ecuación del calor para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
   Suponga que $u_\lambda(x,t)$ satisface la ecuación del calor, es decir:

$$\partial_t u_\lambda(x,t) - \Delta u_\lambda(x,t) = 0,$$

en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, luego:

$$\begin{aligned} \partial_t u_\lambda(x,y) &= u_t(\lambda^a x, \lambda^b t) \\ &= u_t(\lambda^a x, \lambda^b t)(\lambda^b) \\ \Delta u_\lambda &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u_\lambda(x,t)}{\partial x_i x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_i}(\lambda^a x, \lambda^b t)(\lambda^a)^2 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} u_{\lambda_t}(x,t) - \Delta u_\lambda(x,t) &= \lambda^b u_t(\lambda^a x, \lambda^b t) - \lambda^{2a} \Delta u(\lambda^a x, \lambda^b t) \\ &= \lambda^c (u_t(\lambda^a x, \lambda^b t) - \Delta u(\lambda^a x, \lambda^b t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego $\lambda^c = \lambda^b = \lambda^{2a}$, por lo que podemos concluir en que $2a = b$, luego $u_\lambda(x,t) = u(\lambda^a x, \lambda^{2a} t)$ es solución para la ecuación del calor para todo $a \in \mathbb{R}$.

♥

2. Use el ejercicio anterior para mostrar que $v(x,t) := x \cdot \nabla u(x,t) + 2tu_t(x,t)$ también soluciona la ecuación del calor.
   Note que si tomamos $a = 1$, como para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$ se cumple que $u_{\lambda_t}(x,t)$ soluciona la ecuación del calor, es decir:

$$\begin{aligned}\partial_t u_\lambda(x,t) - \Delta u_\lambda(x,y) &= \lambda^2 u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \lambda^2 \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t),\\ &= 0,\end{aligned}$$

   luego si derivamos respecto a λ:

$$\begin{aligned}\partial_\lambda(\partial_t u_\lambda(x,t) - \Delta u_\lambda(x,y)) &= \partial_\lambda(\lambda^2 u_t(\lambda x, \lambda^2 t)) - \partial_\lambda(\lambda^2 \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)),\\ &= 2\lambda u_t(\lambda x, \lambda^2 t) + \lambda^2 u_{t\lambda}(\lambda x, \lambda^2 t) - 2\lambda \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t) - \lambda^2 \partial_\lambda \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)),\\ &= (2\lambda)(u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)) + (\lambda^2)(\partial_\lambda u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \partial_\lambda \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)),\\ &= (\lambda^2)(\partial_\lambda u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \partial_\lambda \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)),\\ &= (\lambda^2)(\partial_t \partial_\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t) - \Delta \partial_\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)),\\ &= 0.\end{aligned}$$

   Por lo que podemos asegurar que $\partial_\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$ también es solución de la ecuación del calor.
   Ahora calculemos $\partial_\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$:

$$\partial_\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t) = \nabla u(\lambda x, \lambda^2 t) \cdot x + 2\lambda t u_t(\lambda x, \lambda^2 t),$$

   fijando $\lambda = 1$ se tiene que:

$$x \cdot \nabla u(x,t) + 2tu_t(x,t) = v(x,t),$$

   por lo que se puede asegurar que $v(x,t)$ es una solución de la ecuación del calor.

   ♥

3. Suponga que u es una solución suave para la ecuación del calor no lineal $u_t - \Delta u = u^3 u_{x_1}$ en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Encuentre una familia de términos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $u_\lambda(x,t) = \lambda^a u(\lambda^b x, \lambda^c t)$ también sea solución de tal ecuación del calor no lineal para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
   Suponga que $u_\lambda(x,t)$ es solución de la ecuación del calor no lineal, es decir:

$$\partial_t u_\lambda(x,t) - \Delta u_\lambda(x,t) = [u_\lambda(x,t)]^3 \partial_{x_1} u_\lambda(x,t),$$

   en donde:

$$\begin{aligned}\partial_t u_\lambda(x,t) &= \lambda^{a+c} u_t(\lambda^b x, \lambda^c t),\\ \Delta u_\lambda(x,t) &= \lambda^{a+2b} \Delta u(\lambda^b x, \lambda^c t),\\ \partial_{x_1} u_\lambda(x,t) &= \lambda^{a+b} \partial_{x_1} u(\lambda^b x, \lambda^c t),\end{aligned}$$

por lo que tenemos que:

$$\lambda^{a+c}u_t(\lambda^b x, \lambda^c t) - \lambda^{a+2b}\Delta u(\lambda^b x, \lambda^c t) = \lambda^{4a+b}u^3(\lambda^b x, \lambda^c t)\partial_{x_1}u(\lambda^b x, \lambda^c t),$$

lo que implica que:

$$\begin{aligned} \lambda^{-3a-b+c}u_t(\lambda^b x, \lambda^c t) - \lambda^{-3a+b}\Delta u(\lambda^b x, \lambda^c t) &= u^3(\lambda^b x, \lambda^c t)\partial_{x_1}u(\lambda^b x, \lambda^c t), \\ \lambda^d(u_t(\lambda^b x, \lambda^c t) - \Delta u(\lambda^b x, \lambda^c t)) &= u^3(\lambda^b x, \lambda^c t)\partial_{x_1}u(\lambda^b x, \lambda^c t), \end{aligned}$$

en donde d tiene que ser igual a 0, por lo que se tiene que:

$$\begin{aligned} -3a - b + c &= 0, \\ -3a + b &= 0, \end{aligned}$$

de lo que podemos deducir que si $a \in \mathbb{R}$, entonces $b = 3a$ y $c = 6a$, por lo que podemos asegurar que para la familia de términos $(a, 3a, 6a)$ con $a \in \mathbb{R}$ se cumple que $u_\lambda(x,t) = \lambda^a u(\lambda^{3a}x, \lambda^{6a}t)$ es solución de la ecuación del calor no lineal anteriormente mencionada.

♥

Problema 2:

Considere el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u = g, & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{cases}$$

1. Suponga que $g \in C(\mathbb{R}^n)$ es una función absolutamente integrable, es decir,$\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty$. Muestre que para $0 < \beta < \frac{n}{2}$ existe una solucion $u(x,t)$ del problema de Cauchy anterior que satisface:

$$\lim_{t\to\infty} t^\beta u(x,t) = 0,$$

uniformemente en $x \in \mathbb{R}^n$.
Sugerencia. Considere $u(x,t) = (\phi(\cdot,t) * g)(x)$ y muestre que $|u(x,t)| \le \frac{\|g\|_{L^1}}{(4\pi t)^{n/2}}$.

Solución:

Note que:

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\le \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} g(y) dy \right|, \\ &\le \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \right| dy, \\ &\le \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\, dy, \\ &\le \frac{\|g\|_{L^1}}{(4\pi t)^{n/2}}. \end{aligned}$$

Luego, usando esto sabemos que:

$$\begin{aligned} \left| \lim_{t\to\infty} t^\beta u(x,t) \right| &= \lim_{t\to\infty} t^\beta |u(x,t)|, \\ &\le \lim_{t\to\infty} \frac{t^\beta \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{(4\pi t)^{n/2}}, \\ &\le \lim_{t\to\infty} \frac{C}{t^{n/2-\beta}}, \\ &\le 0. \end{aligned}$$

Luego como $|\lim_{t\to\infty} t^\beta u(x,t)| = 0$, entonces $\lim_{t\to\infty} t^\beta u(x,t) = 0$.

2. Sea $m > n + \frac{1}{4}$, donde $n \geq 1$ denota la dimensión del espacio $\mathbb{R}^n$. Suponga que $g \in C(\mathbb{R}^n)$ es una función tal que $|x|^m g(x)$ es acotada (es decir, $\||x|^m g(x)\|_{L^\infty} < \infty$). Muestre que para $0 \leq \beta \leq \frac{n}{2} - \frac{1}{8}$ existe una solucion $u(x,t)$ del problema de Cauchy anterior que satisface:

$$\lim_{t\to\infty} t^\beta |x|^{\frac{1}{4}} u(x,t) = 0,$$

uniformemente en $x \in \mathbb{R}^n$.
Sugerencia. Primero, dado $l > 0$, deduzca que existe una constante $c_l > 0$ tal que $(a+b)^l \leq c_l(a^l + b^l)$, para todo $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Con este resultado muestre que para alguna constante $c > 0$:

$$|x|^{\frac{1}{4}} \leq c(|x-y|^{\frac{1}{4}} + |y|^{\frac{1}{4}}),$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Segundo, utlizando la hipótesis sobre g, muestre que $|x|^{\frac{1}{4}} g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Sea $u(x,t) = (\Phi(\cdot,t) * g)(x)$, por el primer resultado previo, obtenemos que:

$$\begin{aligned} ||x|^{\frac{1}{4}} u(x,t)| \leq & \frac{c}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |g(y)| dy \\ & + \frac{c}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |y|^{\frac{1}{4}} |g(y)| dy. \end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad anterior y el hecho de que $|x|^{\frac{1}{4}} g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ concluya el límite cuanto $t \to 0^+$.

Solución:

Note que para el caso $a = 0$ o $b = 0$, la desigualdad es trivial, por lo que nos concentraremos en el caso $a \neq b \neq 0$:

$$\begin{aligned} (a+b)^l &= \frac{(a+b)^l}{b^l} b^l, \\ &= \left(\frac{a}{b} + 1\right)^l b^l. \\ a^l + b^l &= \left(\left(\frac{a}{b}\right)^l + 1\right) b^l. \end{aligned}$$

Suponga $z = \frac{a}{b}$ y note que:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{(z+1)^l}{z^l + 1} = 1,$$

por lo que usando la propiedad arquimediana, podemos asegurar que existe un c_l tal que $(z+1)^l \leq c_l(z^l + 1)$, lo cuál implica que $(a+b)^l \leq c_l(a^l + b^l)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Luego, utilizando este resultado sabemos que:

$$\begin{aligned}|x|^{1/4} &\leq |x-y+y|^{\frac{1}{4}},\\ &\leq (|x-y|+|y|)^{\frac{1}{4}},\\ &\leq c(|x-y|^{\frac{1}{4}}+|y|^{\frac{1}{4}}),\end{aligned}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.
Ahora, veamos que $|x|^{1/4}g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
Definimos $k = d(m, \frac{1}{4})$, luego como $n = d(n+\frac{1}{4}, n)$ y $n \geq 1$, entonces $k > 1$, de lo que sigue que:

$$\begin{aligned}\||x|^{\frac{1}{4}g(x)}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left||x|^{\frac{1}{4}}g(x)\right| dx,\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{|x|^m g(x)}{|x|^k}\right| dx,\\ &\leq \||x|^m g(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^k} dx,\\ &< \infty.\end{aligned}$$

Ahora note que:

$$\begin{aligned}\left|\lim_{t\to\infty} t^\beta |x|^{\frac{1}{4}} u(x,t)\right| &\leq \lim_{t\to\infty} \left|t^\beta |x|^{\frac{1}{4}} g(x)\right|,\\ &\leq \lim_{t\to\infty} t^\beta \left(\frac{c}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |g(y)| dy\right.\\ &\quad \left. + \frac{c}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |y|^{\frac{1}{4}} |g(y)| dy\right),\\ &\leq \lim_{t\to\infty} \frac{ct^\beta}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}(I+J),\end{aligned}$$

de lo cuál nos conviene ver que $I < \infty$ y $J < \infty$.
Para I note que si suponemos $z = \frac{|x-y|^2}{4t}$ tenemos que:

$$\||x-y|^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = ct^{\frac{1}{8}} \||z|^{\frac{1}{4}} e^{-z^2}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

de lo que sigue que:

$$\begin{aligned}
I &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |g(y)| dy, \\
&\leq \| |x-y|^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy, \\
&\leq (ct^{\frac{1}{8}}) \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy \\
&\leq (ct^{\frac{1}{8}}) \left(\int_{B(0,1)} |g(y)| + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} |g(y)| \right), \\
&\leq (ct^{\frac{1}{8}}) \left(\int_{B(0,1)} |g(y)| + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} |y|^{\frac{1}{4}} |g(y)| \right), \\
&\leq (ct^{\frac{1}{8}}) \left(k + \| |x|^{\frac{1}{4}} g \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \right), \\
&\leq kt^{\frac{1}{8}}.
\end{aligned}$$

Ahora, note que para J tenemos que:

$$\begin{aligned}
J &\leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |y|^{\frac{1}{4}} |g(y)| dy, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{\frac{1}{4}} |g(y)| dy, \\
&\leq k.
\end{aligned}$$

Por lo que recordando que $0 \leq \beta \leq \frac{n}{2} - \frac{1}{8}$, es decir $0 < \frac{n}{2} - \beta - \frac{1}{8}$, podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
\left| \lim_{t\to\infty} t^\beta |x|^{\frac{1}{4}} u(x,t) \right| &\leq \lim_{t\to\infty} \frac{ct^\beta}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} (kt^{\frac{1}{8}} + k), \\
&\leq \lim_{t\to\infty} m \frac{1}{t^{\frac{n}{2} - \beta - \frac{1}{8}}}, \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Por lo que se concluye que $\lim_{t\to\infty} t^\beta |x|^{\frac{1}{x}} u(x,t) = 0$.

♥

Problema 3:

Sea U un abierto cotado de $\mathbb{R}^n, T > 0$.

- Muestre que si v es subsolución, entonces

$$v(x) \leq \frac{1}{4r^n} \int\int_{E(x,t;r)} v(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dyds,$$

para todo $E(x,t;r) \subset U_T$.

- Como consecuencia muestre que $\max_{\overline{U_T}} v = \max_{\Gamma_T} v$.
- Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función suave convexa ($\phi'' \geq 0$). Demuestre que si u es una solución de la ecuación del calor, entonces la función $v = \phi(u)$ es una subsolución.
- Demuestre que si u soluciona la ecuación del calor, entonces $v = |\nabla u|^2 + u_t^2$ es una subsolución.

Solución:

Como en la prueba de Evans, comenzaremos con un desplazamiento para quedar con $x = 0, t = 0$. Y tomamos

$$\begin{aligned}\phi(r) :&= \frac{1}{r^n} \int\int_{E(r)} u(y,s) \frac{|y|^2}{s^2} dyds \\ &= \int\int_{E(1)} u(ry, r^2 s) \frac{|y|^2}{s^2} dyds.\end{aligned}$$

Calculamos

$$\begin{aligned}\phi'(r) &= \int\int_{E(1)} \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i \frac{|y|^2}{s^2} + 2ru_s \frac{|y|^2}{s} dyds \\ &= \frac{1}{r^n+1} \int\int_{E(r)} \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i \frac{|y|^2}{s^2} + 2u_s \frac{|y|^2}{s} dyds \\ &:= A + B.\end{aligned}$$

Note que $\partial E(0,0;r) = \left\{ (y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} : s \leq 0, \frac{1}{(-4\pi s)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|y|^2}{-4s}} = \frac{1}{r^n} \right\}$. Es decir, en $\partial E(r)$ se tiene que

$$\frac{|y|^2}{4s} = -nlog(r) + \frac{n}{2} log(-4\pi s).$$

Por lo que si definimos

$$\psi := -\frac{n}{2} log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + nlog(r)$$

Es claro que $\psi = 0$ en $\partial E(r)$. Además note que $\psi_{y_i} = \dfrac{y_i}{2s}$ para $i = 1, ..., n$. Luego $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \psi_{y_i} = \dfrac{|y|^2}{2s}$, por lo que podemos escribir B como sigue

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{r^{n+1}} \int\int_{E(r)} 4u_s \sum_{i=1}^{n} y_i \psi_{y_i} dyds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \int\int_{E(r)} 4 \sum_{i=1}^{n} (u_s y_i) \psi_{y_i} dyds.
\end{aligned}$$

Integrando por partes respecto a cada y_i y teniendo en cuenta que ψ se anula en $\partial E(r)$ siempre se perderá el término de borde y en consecuencia

$$\begin{aligned}
B &= -\frac{1}{r^{n+1}} \int\int_{E(r)} 4 \sum_{i=1}^{n} (u_s y_i)_{y_i} \psi dyds \\
&= -\frac{1}{r^{n+1}} \int\int_{E(r)} 4 \sum_{i=1}^{n} (u_s + u_{s_{y_i}} y_i) \psi dyds \\
&= -\frac{1}{r^{n+1}} \int\int_{E(r)} 4nu_s\psi + 4 \sum_{i=1}^{n} u_{sy_i} y_i \psi dyds.
\end{aligned}$$

Ahora integramos por partes respecto a s en el segundo término y obtenemos

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{r^{n+1}} \int\int_{E(r)} -4nu_s\psi + 4 \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i \psi_s dyds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \int\int_{E(r)} -4nu_s\psi + 4 \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i \left(-\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2} \right) dyds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \int\int_{E(r)} -4nu_s\psi - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i dyds - A.
\end{aligned}$$

Ahora es cuando usaremos que u es subsolución ($u_t \leq \Delta u$).

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= A + B \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \int\int_{E(r)} -4nu_s\psi - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i dyds \\
&\geq \frac{1}{r^{n+1}} \int\int_{E(r)} -4n\Delta u\psi - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i dyds.
\end{aligned}$$

Donde al usar una fórmula de Green (integrar por partes varias veces) en el primer término obtenemos

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &\geq \frac{1}{r^{n+1}} \int\int_{E(r)} 4n\nabla u \cdot \nabla \psi - \frac{2n}{s}\sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i dyds \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r^{n+1}} \int\int_{E(r)} 4nu_{y_i}\psi_{y_i} - \frac{2n}{s} u_{y_i} y_i dyds \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r^{n+1}} \int\int_{E(r)} 4nu_{y_i}\left(\frac{y_i}{2s}\right) - \frac{2n}{s} u_{y_i} y_i dyds \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Si tomamos $0 < \delta < r$, se cumple

$$\int_{\delta}^{r} \phi'(z)dz = \phi(r) - \phi(\delta) \geq 0.$$

Luego, $\phi(r) \geq \lim_{\delta\to 0} \phi(\delta) = u(0,0)\left(\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta^n}\int\int_{E(\delta)} \frac{|y|^2}{s^2} dyds\right)$.

Solamente nos queda ver el valor de $\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta^n}\int\int_{E(\delta)} \frac{|y|^2}{s^2} dyds = \int\int_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} dyds$.

Por como está definida $E(1)$ podemos plantear los límites de integración como sigue:

$$\int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \int_{|y|\leq\sqrt{2nslog(-4\pi s)}} \frac{|y|^2}{s^2} dyds,$$

Hacemos un cambio a coordenadas polares y otro cambio de variable $w = \frac{y}{r}$

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \int_{0}^{\sqrt{2nslog(-4\pi s)}} \int_{\partial B(0,1)} \frac{|rw|^2}{s^2} r^{n-1} dS(w)drds \\
&= \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \int_{0}^{\sqrt{2nslog(-4\pi s)}} \int_{\partial B(0,1)} \frac{r^{n+1}}{s^2} dS(w)drds \\
&|B(0,1)| \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \int_{0}^{\sqrt{2nslog(-4\pi s)}} \frac{r^{n+1}}{s^2} drds \\
&= \frac{|B(0,1)|}{n+2} \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \frac{(2nslog(-4\pi s))^{\frac{n}{2}+1}}{s^2} ds \\
&= \frac{|B(0,1)|(2n)^{\frac{n}{2}+1}}{n+2} \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \frac{(slog(-4\pi s))^{\frac{n}{2}+1}}{s^2} ds
\end{aligned}$$

Ahora sigamos viendo esta última integral. Considerando la sustitución $x = -4\pi s$ tenemos:

$$\int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \frac{(slog(-4\pi s))^{\frac{n}{2}+1}}{s^2} ds = \int_{1}^{0} \frac{((-\frac{x}{4\pi})log(x))^{\frac{n}{2}+1}}{(s^{\frac{x}{4\pi}})^2} (-\frac{1}{4\pi}) dx,$$

tomando $z = -log(x)$:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{((-\frac{e^{-z}}{4\pi})log(x))^{\frac{n}{2}+1}}{(-\frac{e^{-z}}{4\pi})^2} (-e^{-z}) dz \\ =& \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty e^{\frac{-nz}{2}} z^{\frac{n}{2}+1} dz \end{aligned}$$

Cambiando $w = \frac{nz}{2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty e^{-w} (\frac{2w}{n})^{\frac{n}{2}+1} \frac{2}{n} dw \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} (\frac{2}{n})^{\frac{n}{2}+1} \int_0^\infty e^{-w} w^{\frac{n}{2}+1} dw \\ &= \frac{1}{2^n \pi^{\frac{n}{2}} 2^{-\frac{n}{2}-2} n^{\frac{n}{2}+2}} \int_0^\infty e^{-w} w^{\frac{n}{2}+2-1} dw \end{aligned}$$

Por como está definida la función Γ, se tiene que

$$= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n}{2}-2} n^{\frac{n}{2}+2}} \Gamma(2 + \frac{n}{2})$$

Juntando ahora todas las constantes concluimos

$$si$$

♥

Ahora veamos que como consecuencia se tiene que $\max_{\overline{U_T}} v = \max_{\Gamma_T} v$.
Suponga $v_\epsilon(x,t) = u(x,t) - \epsilon t$, con u solución de la ecuación del calor, entonces:

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta)v &= (\partial_t - \Delta)(u - \epsilon t), \\ &= (\partial_t - \Delta)u - \epsilon, \\ &< 0. \end{aligned}$$

Luego, usando el principio del máximo para soluciones de la ecuación del calor se tiene que:

$$\begin{aligned} \max_{\overline{U_T}} u &= \max_{\overline{U_T}} v_\epsilon, \\ &= \max_{\Gamma_T} v_\epsilon (u - \epsilon t), \\ &\leq \max_{\Gamma_T} u. \end{aligned}$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
\max_{\overline{U_T}} u &= \max_{\overline{U_T}} u - \epsilon t + \epsilon t, \\
&\leq \max_{\overline{U_T}} v_\epsilon - \epsilon T,
\end{aligned}
$$

de lo que se sigue que:

$$
\begin{aligned}
\max_{\overline{U_T}} u - \epsilon T &\leq \max_{\overline{U_T}} v, \\
&\leq \max_{\Gamma_T} u.
\end{aligned}
$$

Ahora si tomamos $\epsilon \to 0^+$, se puede concluir que:

$$\max_{\overline{U_T}} u \leq \max_{\Gamma_T} u,$$

de lo que se sigue que:

$$\max_{\overline{U_T}} v = \max_{\Gamma_T} v.$$

Lo cual concluye la demostración.

Problema 4:

Demuestre el teorema de acotación de derivadas para soluciones de la ecuación del calor. Más precisamente, para cada multi-índices α y β existe una constante $C_{\alpha,\beta} > 0$ tal que

$$\max_{C(x,t;\frac{r}{2})} |\partial_x^\alpha \partial_t^\beta u| \leq \frac{C_{\alpha,\beta}}{r^{|\alpha|+2|\beta|+n+2}} ||u||_{L^1(C(x,t;r))},$$

para todo cilindro $C(x,t;\frac{r}{2}) \subset C(x,t;r) \subset U_T$ y toda solución u de la ecuación de la ecuación del calor en U_T.

Solución:

Solución. Primero fijemos un punto $(x_0,t_0) \in U_T$ y $r > 0$ suficientemente pequeño para que $C := C(x_0,t_0;r) \subset U_T$. Definamos también $C' := C(x_0,t_0;\frac{3}{4}r)$ y $C'' := C(x_0,t_0;\frac{r}{2})$, con el mismo centro superior (x_0,t_0). Tomemos una función suave de cierre $\zeta = \zeta(x,t)$ tal que

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta \leq 1, \zeta \equiv \ 1 \text{ en } C', \\ \zeta \equiv 0 \text{ cerca del borde parabólico de} C. \end{cases}$$

Extendamos $\zeta \equiv 0$ en $(\mathbb{R}^n \times [0,t_0]) - C$.
Como u es solución en U_T entonces $u \in C^\infty(U_T)$ y si tomamos

$$v(x,t) := \zeta(x,t)u(x,t) \qquad (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq t_0).$$

Entonces

$$v_t = \zeta u_t + \zeta_t u, \Delta v = \zeta \Delta u + 2\nabla\zeta \cdot \nabla u + \nabla\zeta u.$$

Luego

$$v = 0 \qquad \text{en } \mathbb{R}^n \times t = 0,$$

y

$$\begin{aligned} v_t - \Delta v &= \zeta u_t + \zeta_t u - \zeta\Delta u - 2\nabla\zeta \cdot \nabla u - \nabla\zeta u \\ &= \zeta(u_t - \Delta u) + \zeta_t u - 2\nabla\zeta \cdot \nabla u - \nabla\zeta u \\ &= \zeta_t u - 2\nabla\zeta \cdot \nabla u - \nabla\zeta u =: \tilde{f} \end{aligned}$$

en $\mathbb{R}^n \times (0,t_0)$. Ahora tome

$$\tilde{v} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)\tilde{f}(y,s)dyds.$$

De modo que,

$$\begin{cases} \tilde{v}_t - \Delta\tilde{v} = \tilde{f} \text{ en } \mathbb{R}^n \times (0,t_0), \\ \qquad \tilde{v} = 0 \text{ en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Como tanto v como $\tilde{v}$ satisfacen la misma ecuación del calor y por como están definidas podemos concluir que están acotadas. Luego, $v \equiv \tilde{v}$ debido al teorema de unicidad de solución. Así tenemos que

$$v(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)\tilde{f}dyds.$$

Ahora supongamos $(x,t) \in C''$. Como $\zeta \equiv 0$ fuera del cilindro C, entonces, la definición de $\tilde{f}$ la igualdad anterior implican

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \zeta(x,t)u(x,t) = 1 \cdot u(x,t) = u(x,t) \\ &= \int \int_C \Phi(x-y,t-s)[(\zeta_s(y,s) - \Delta\zeta(y,s))u(y.s) - 2\nabla\zeta(y,s)\cdot\nabla u(y,s)]dyds. \end{aligned}$$

Note que en la ecuación anterior, la expresión entre paréntesis cuadrados se hace 0 en una región cercana a la singularidad de Φ, véase $\mathbb{R}^n \times \{t=0\}$ por como se definió ζ. Ahora,

$$u(x,t) = \tag{1}$$

$$\int \int_C [\Phi(x-y,t-s)(\zeta_s(y,s) - \Delta\zeta(y,s))u(y.s) - 2\Phi(x-y,t-s)\nabla\zeta(y,s)\cdot\nabla u(y,s)]dyds \tag{2}$$

Fijémonos únicamente en el segundo término e integremos por partes

$$\begin{aligned} &\int_C -2\Phi(x-y,t-s)\nabla\zeta(y,s)\cdot\nabla u(y,s)dyds = \\ &\qquad = \int_{\partial C} -2\Phi(x-y,t-s)\nabla\zeta(y,s)\cdot u(y,s)dyds - \\ &\qquad \int_C -2\nabla_y\Phi(x-y,t-s)\nabla\zeta(y,s)\cdot u(y,s)dyds \\ &\qquad = \int_C 2\nabla_y\Phi(x-y,t-s)\nabla\zeta(y,s)\cdot u(y,s)dyds. \end{aligned}$$

Así, (1) nos queda como sigue:

$$u(x,t) = \int \int_C [\Phi(x-y,t-s)(\zeta_s(y,s) - \Delta\zeta(y,s)) + 2\nabla_y\Phi(x-y,t-s)\nabla\zeta(y,s)]u(y,s)dyds.$$

La fórmula anterior tiene la forma

$$u(x,t) = \int \int_C K(x,y,t,s)u(y,s)dyds \qquad ((x,t) \in C'').$$

Ahora, al cambiar coordenadas, podemos asumir que el punto de tope $(x_0,y_0) = (0,0)$. Asumiendo que $C(1) := C(0,0;1)$ está en U_T. Sea $C(\frac{1}{2}) := C(0,0;\frac{1}{2})$. La fórmula anterior nos queda de la siguiente manera

$$u(x,t) = \int \int_{C(1)} K(x,y,t,s)u(y,s)dyds \qquad ((x,t) \in C(\frac{1}{2})).$$

Donde K es una función suave puesto que Φ, ζ, u lo son en U_T. En consecuencia

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq \int\int_{C(1)} |K(x,y,t,s)||u(y,s)|dyds \\ |\partial_{x_i}^{\alpha}\partial_t^m u(x,t)| &\leq \int\int_{C(1)} |\partial_{x_i}^{\alpha}\partial_t^m K(x,y,t,s)|u(y,s)|dyds \\ &\leq C_{\alpha m}||u||_{L^1(C(1))} \end{aligned}$$

Para una constante $C_{\alpha m}$.
Ahora supongamos que el cilindro $C(r) := C(0,0;r)$ reposa en U_T. Sea $C(\frac{r}{2}) := C(0,0,;\frac{r}{2})$.
Reescalamos como sigue

$$v(x,t) := u(rx, r^2 t).$$

Entonces $v_t - \Delta v = 0$ en el cilindro $C(1)$. De acuerdo a lo anterior,

$$|\partial_{x_i}^{\alpha}\partial_t^m v(x,t)| \leq C_{\alpha m}||v||_{L^1(C(1))} \qquad \text{en } ((x,t) \in C(\frac{1}{2})).$$

Pero $\partial_{x_i}^{\alpha}\partial_t^m v(x,t) = r^{2m+|\alpha|}\partial_{x_i}^{\alpha}\partial_t^m u(rx,r^2t)$ y $||v||_{L^1(C(1))} = \frac{1}{r^{n+2}}||u||_{L^1(C(r))}$.
De modo que

$$\max_{C(x,t;\frac{r}{2})} |\partial_{x_i}^{\alpha}\partial_t^m u| \leq \frac{C_{\alpha m}}{r^{|\alpha|} + 2m + n + 2}||u||_{L^1(C(x,t;r))}.$$

♥