Ecuaciones Diferenciales Parciales: Trabajo Presentación

30 de julio del 2024

Universidad Nacional de Colombia

Oscar Guillermo Riaño Castañeda

Andrés David Cadena Simons acadenas@unal.edu.co
David Felipe Viuche Malaver dviuchem@unal.edu.co

Problema 1:

Teorema 0.1 *Asuma que $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y sea u definida por:*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (\Phi(\cdot,t) * g)(x) \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)dy \end{aligned}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$. Entonces:

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$,
2. $u_t - \Delta u = 0$ *para* $x \in \mathbb{R}^n$ *y* $t > 0$,
3. $\lim\limits_{(x,t)\to(x^0,0), x\in\mathbb{R}^n, t>0} u(x,t) = g(x^0)$ *para cada punto* $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Solución:

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ Note que la función $\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, ahora veamos que $e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.

   Para esto será interesante ver que $e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ es infinitamente derivable respecto a x e infinitamente derivable respecto a t independientemente y luego inductivamente ver que estás son a su vez infinitamente derivables entre si, es decir:
   Sabemos que respecto a la variable x se tiene que:

   $$\partial_{x_i} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = -\frac{x_i}{2t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

   y a su vez, utilizando un argumento inductivo podemos verificar que en general:

   $$\partial^\alpha e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{p(x,t)}{(2t)^{|\alpha|}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

   con α multi-índice y p es un polinomio con grado $|\alpha|$. Esto debido a que cada derivada parcial respecto a la componente x_j aumenta a lo más un grado el polinomio definido por la derivada anterior, y añade un factor $(-\dfrac{1}{2t})$
   Además, sabemos que respecto a t se cumple que:

   $$\partial_t e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{|x|^2}{4t^2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

   y a su vez, usando la regla del producto de las derivadas y un argumento inductivo se puede verificar que en general:

   $$\partial_t^k e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{q(t)}{r(t)} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

   con $k \in \mathbb{N}$ y q, r polinomios.
   Ahora, utilizando esto, podemos ver que si derivamos $e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ respecto a (x,t), dado

cualquier multi-índice β, existen polinomios p, q, r no nulos tales que:

$$\partial^\beta e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{p(x)q(t)}{r(t)} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

Luego, note que si dado $\delta > 0$ y tomamos $t \in [\delta, \infty)$, entonces:

$$\begin{aligned} \left|\partial^\beta e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right| &= \left|\frac{p(x)q(t)}{r(t)} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right| \\ &\leq \left|\frac{p(x)q(t)}{r(t)}\right| \left|e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right| \end{aligned}$$

No sé aquí que hacer :p.
Ni gran puta idea.
Luego como:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} g(y) dy \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} (\cdot, t) * g \right)(x), \end{aligned}$$

al ser $\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, entonces $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.

♥

2. $u_t - \Delta u = 0$ para $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$.

Problema 2:

Teorema 0.2 *Asuma que* $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ *con soporte compacto y sea* u *definida por:*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (\Phi(\cdot,t) * g)(x) + \int_0^t (\Phi(\cdot,t-s) * f(\cdot,s))(x)ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)g(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)f(y,s)dyds \end{aligned}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ *y* $t > 0$. *Entonces:*

1. $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$,
2. $u_t - \Delta u = f$ *para* $x \in \mathbb{R}^n$ *y* $t > 0$,
3. $\displaystyle\lim_{(x,t)\to(x^0,0),x\in\mathbb{R}^n,t>0} u(x,t) = g(x^0)$ *para cada punto* $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Solución:

1. $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.