Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Análisis Funcional
Taller 1: Espacios vectoriales normados
(I-2025)

Profesor: Oscar Guillermo Riaño Castañeda
Integrantes: Jairo Sebastián Niño Castro Iván Felipe Salamanca Medina
Fecha: 03 de Junio del 2025

Ejercicio 2. Sea E un espacio vectorial y $g, f_1, ..., f_k$, $k+1$ funcionales lineales sobre E tales que

$$\langle f_i; x\rangle = 0 \text{ para todo } i = 1, ..., k \Longrightarrow \langle g; x\rangle = 0.$$

Muestre que existen constantes $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que $g = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$. Es decir, g es combinación lineal de los f_i's.

Demostración. □

Ejercicio 9. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Muestre que cada vecindad débil* del origen de E^* es no acotada.

Demostración. Sea V una vecindad del origen de E^* con la topología $\sigma(E^*, E)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$V = \{f \in E^* : |\langle f; x_i\rangle| < \varepsilon \text{ para todo } i = 1, ..., k\},$$

para algunos $x_1, ..., x_k \in E$ y $\varepsilon > 0$. Si $x_i = \mathbf{0}$ para todo $i = 1, .., k$, entonces $V = E^*$ y queda claro que V es no acotado.
Supongamos que no todos los x_i's son nulos. Considere $W = \text{gen}\{x_1, ..., x_k\}$. Como E es de dimensión infinita, tenemos que $W \subset E$ estrictamente. Queremos usar la segunda forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach para garantizar que existe $g \in E^*$ con $g \neq 0$ tal que $\langle g; v\rangle = 0$ para todo $v \in W$, pero para esto, debemos ver que W es cerrado.
Sea $(w_n)_{n\in\mathbb{Z}^+} \subset W$ una sucesión convergente y sea $\{v_1, ..., v_l\}$ una base de W. Como (w_n) es convergente, en particular, es una sucesión de Cauchy, por tanto, dad $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $n, m \geq N$, entonces

$$\|w_n - w_m\| < \epsilon.$$

Como $w_n, w_m \in W$, estos se pueden expresar de manera única como

$$w_n = \sum_{i=1}^{l} \lambda_{i,n} v_i, \quad w_m = \sum_{i=1}^{l} \lambda_{i,m} v_i$$

con $\lambda_{i,n}, \lambda_{i,m} \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, ..., k$, luego

$$\|w_n - w_m\| = \left\| \sum_{i=1}^{l} (\lambda_{i,n} - \lambda_{i,m}) v_i \right\|.$$

Como W es de dimensión finita, existe una constante $C_1 > 0$ tal que $C_1 \|\cdot\|_\infty \leq \|v\|$ para todo $v \in W$, donde que no depende del vector tal que

$$\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq l} |\lambda_i| \quad \text{y} \quad v = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i,$$

por tanto

$$C_1 \|w_n - w_m\|_\infty \leq \|w_n - w_m\|,$$

de esta manera

$$C_1 \|w_n - w_m\|_\infty = C_1 \max_{1 \leq i \leq l} |\lambda_{i,n} - \lambda_{i,m}| \leq \|w_n - w_m\| < \epsilon,$$

así, para cada $i = 1, ..., l$, las sucesiones $(\lambda_{i,n})_{n \in \mathbb{Z}^+}$ son de Cauchy en $\mathbb{R}$ y, por ser $\mathbb{R}$ completo, son sucesiones convergentes. Así, $\lambda_{i,n} \to \lambda_i$ para algunos $\lambda_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, ..., l$. Entonces, $w_n \to w$ en la norma $\|\cdot\|_\infty$ donde

$$w = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i,$$

en efecto

$$\|w_n - w\|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^{l} (\lambda_{i,n} - \lambda_i) v_i \right\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq l} |\lambda_{n,i} - \lambda_i| \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Ahora, nuevamente por ser W de dimensión finita, también existe C_2 tal que $\|v\| \leq C_2 \|v\|_\infty$ para todo $v \in W$, entonces

$$\|w_n - w\| \leq C_2 \|w_n - w\|_\infty,$$

así, $w_n \to w \in W$ en la norma $\|\cdot\|$. Tenemos entonces que W es cerrado. Sea $x_0 \in E \setminus W$, así, por la segunda forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach, existe un hiperplano que separa estrictamente a W y a $\{x_0\}$, más precisamente, existe $g \in E^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle g : v \rangle < \alpha < \langle g; x_0 \rangle,$$

para todo $v \in W$. Como W es un subespacio, tenemos que $|\langle g; v \rangle| < \alpha$ para todo $v \in W$, ya que podemos cambiar v por $-v$. Además, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, tenemos

$$|\langle g; nv \rangle| = n |\langle g; v \rangle| < \alpha \Longrightarrow |\langle g; v \rangle| < \frac{\alpha}{n}$$

de manera que $\langle g; v\rangle = 0$ para todo $v \in W$, y $g \neq 0$, dado que $\langle g; x_0\rangle > \alpha > 0$. Así, por la definición de W, $x_1, ..., x_k \in W$ y tenemos que $|\langle g; x_i\rangle| = 0 < \epsilon$ para todo $i = 1, ..., k$, es decir, $g \in V$, más aún para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, $|\langle ng; v\rangle| = n|\langle g; v\rangle| = 0$, es decir, $ng \in V$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Como $g \neq 0$, $\|g\|_{E^*} > 0$ y así, $\|ng\|_{E^*} = n\,\|g\|_{E^*}$. Así, por la propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$, $\|ng\|_{E^*}$ es "tan grande como se quiera", para $n \in \mathbb{Z}^+$ suficientemente grande. Así, tenemos que V no es acotado.

□

Ejercicio 11. Sea K un espacio métrico compacto infinito. Demuestre que $C(K)$ (con la norma del supremo $\|\cdot\|_{L^\infty}$) no es reflexivo.

Demostración. Primero veamos que $(C(K), \|\cdot\|_{L^\infty})$ es un espacio de Banach.
Primero, note que como K es un espacio métrico compacto infinito, las funciones continuas con dominio en K alcanzan su máximo y su mínimo en K, por lo que sabemos que la norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$ se encuentra bien definida en el espacio.
Por otro lado verificar que las propiedades de norma se dan, es suficiente con notar que estas se cumplen bajo las propiedades del máx (recordando que $\|f\|_{L^\infty} = \max_{x\in K} |f(x)|$) y de ser funciones continuas, por lo que solo nos centraremos en ver que es un espacio completo.
Sea $\{f_k\} \subset C(K)$ una sucesión de Cauchy, es decir, dado $\epsilon > 0$ sabemos que existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$, entonces

$$\|f_n - f_m\|_{L^\infty} < \epsilon.$$

Veamos que $f_k \to f \in C(K)$ cuando $k \to \infty$.
Note que dado $x \in K$ se cumple que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{L^\infty} < \epsilon. \tag{1}$$

Luego $\{f_k(x)\} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión de Cauchy, por lo tanto existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f_k(x) \to a$ cuando $k \to \infty$, luego como se puede realizar el mismo razonamiento para todo $x \in K$, definamos

$$\begin{aligned} f : K &\to \mathbb{R}, \\ x &\to \lim_{k\to\infty} f_k(x). \end{aligned}$$

Ahora veamos que $f \in C(K)$, entonces, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (este δ depende de la continuidad de las funciones f_k) tal que si tomamos $x, y \in K$ que satisfacen

$$|x - y| < \delta,$$

entonces, si tomamos un k adecuado (de la condición) y aprovechando que las funciones f_k con continuas en K, sabemos que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(y) + f_m(y) - f(y)|, \\ &\leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)|, \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}, \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir que $f \in C(K)$.
Ahora veamos que $f_k \to f$ en la norma de $L^\infty(K)$ cuando $k \to \infty$.
Note que como $\{f_k\}$ es una sucesión de Cauchy, entonces dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$ se satisface que

$$\|f_n - f_m\|_{L^\infty} = \max_{x \in K} |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Luego, si fijamos n y hacemos que $m \to \infty$, entonces $f_m(x) \to f(x)$, por lo que podemos asegurar que

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{L^\infty} &= \max_{x \in K} |f_n(x) - f(x)|, \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

lo que nos permite concluir que $f_k \to f$ cuando $k \to \infty$ en la norma de L^∞, es decir, el espacio $(C(K), \|\cdot\|_{L^\infty})$ es Banach. $\square$

Ejercicio 15. Sea E un espacio de Banach reflexivo. Sea $a : E \times E \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua, es decir, existe $M > 0$ tal que $|a(x,y)| \leq M \|x\| \|y\|$ para todo $x, y \in E$. Asuma que a es coerciva, esto es, existe $\alpha > 0$ tal que para todo $x \in E$

$$a(x,x) \geq \alpha \|x\|^2 .$$

(a) Dado $x \in E$, defina $A_x(y) = a(x,y)$ para todo $y \in E$. Muestre que $A_x \in E^*$ para cada $x \in E$. Además, concluya que la función $x \mapsto A(x) = A_x$ satisface que $A \in \mathcal{L}(E, E^*)$.

(b) Muestre que A definida como en (a) es una función sobreyectiva.

(c) Deduzca que para $f \in E^*$, existe un único $x \in E$ tal que $a(x,y) = \langle f; y \rangle$, para todo $y \in E$. Esto es, la forma bilineal coerciva a representa todo funcional lineal continuo.

Demostración. $\square$

Ejercicio 18. Sea E un espacio de Banach.

(a) Demuestre que existe un espacio topológico compacto K y una isometría de E en $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$.

(b) Asuma que E es separable y muestre que existe una isometría de E en l^∞.