GEOMETRIA DIFERENCIAL

Profesor: Sandra Carolina García Martínez. Edificio: 404 Ofic: 311.
E-mail: sacgarciama@unal.edu.co
Grupo: 1. **Herramienta virtual:** Moodle. Ingresar en la página web https://micampus.unal.edu.co/
Atención: Se cuadra un horario enviando un mail y se indica si de forma presencial o virtual

Evaluación
Parcial 1 (Semana 6) 25%
Parcial 2 (Semana 11) 25%
Asistencia 10%
Póster con exposición corta....................40%

Bibliografía
1 M. A. Hernández Cifre y J. A. Pastor González; Un curso de Geometría Diferencial. Publicaciones del CSIC, Textos Universitarios 47 Madrid 2010.
2 S. Montiel y A. Ros; Curvas y Superficies. Proyecto Sur D. L., Granada, 1997.
3 M. P. do Carmo; Differential Geometry of Curves and Surfaces.

Un poco de Álgebra Lineal

Desarrollamos las **herramientas matemáticas** necesarias para modelar y estudiar un objeto en movimiento.

Un poco de Álgebra Lineal

Desarrollamos las **herramientas matemáticas** necesarias para modelar y estudiar un objeto en movimiento. El objeto podría estar moviéndose:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Un poco de Álgebra Lineal

Desarrollamos las **herramientas matemáticas** necesarias para modelar y estudiar un objeto en movimiento. El objeto podría estar moviéndose:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

O podría estar moviéndose en el $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Un poco de Álgebra Lineal

Desarrollamos las **herramientas matemáticas** necesarias para modelar y estudiar un objeto en movimiento. El objeto podría estar moviéndose:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

O podría estar moviéndose en el $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Cuando sea posible estudiaremos un objeto que se mueve en un espacio euclidiano de n dimensiones:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

Un poco de Álgebra Lineal

Desarrollamos las **herramientas matemáticas** necesarias para modelar y estudiar un objeto en movimiento. El objeto podría estar moviéndose:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

O podría estar moviéndose en el $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Cuando sea posible estudiaremos un objeto que se mueve en un espacio euclidiano de n dimensiones:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

- Empecemos estudiando el **concepto de curvas** en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, y analicemos **las diferencias** existentes en ambos ambientes:

Un poco de Álgebra Lineal

Desarrollamos las **herramientas matemáticas** necesarias para modelar y estudiar un objeto en movimiento. El objeto podría estar moviéndose:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

O podría estar moviéndose en el $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Cuando sea posible estudiaremos un objeto que se mueve en un espacio euclidiano de n dimensiones:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

- Empecemos estudiando el **concepto de curvas** en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, y analicemos **las diferencias** existentes en ambos ambientes:
- una curva en $\mathbb{R}^3$ tiene más libertad de movimiento y, por ende, su estudio es más complejo.

Curvas parametrizadas

Curvas parametrizadas

1. Una primera idea intuitiva de curva es verla como la "**trayectoria de una partícula**", lo cual nos ofrece una primera aproximación a una definición **geométrica** de curva.

Curvas parametrizadas

1. Una primera idea intuitiva de curva es verla como la "**trayectoria de una partícula**", lo cual nos ofrece una primera aproximación a una definición **geométrica** de curva. Por ejemplo, la trayectoria descrita por la partícula podría ser: un círculo, una parábola, una elipse, ect.

Curvas parametrizadas

1. Una primera idea intuitiva de curva es verla como la "**trayectoria de una partícula**", lo cual nos ofrece una primera aproximación a una definición **geométrica** de curva. Por ejemplo, la trayectoria descrita por la partícula podría ser: un círculo, una parábola, una elipse, ect.

2. También podemos definir una curva como "**una aplicación que, en cada instante de tiempo, da una posición en el $\mathbb{R}^3$**".

Curvas parametrizadas

1. Una primera idea intuitiva de curva es verla como la "**trayectoria de una partícula**", lo cual nos ofrece una primera aproximación a una definición **geométrica** de curva. Por ejemplo, la trayectoria descrita por la partícula podría ser: un círculo, una parábola, una elipse, ect.

2. También podemos definir una curva como "**una aplicación que, en cada instante de tiempo, da una posición en el $\mathbb{R}^3$**".
Supongamos que $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son las coordenadas en el instante t de objeto moviéndose en el $\mathbb{R}^3$. El vector de posición del objeto en instante t está descrito por
$$\alpha(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big).$$

3. Esta última idea engloba algo más que la mera trayectoria o traza, pues encierra a su vez las nociones de **curva orientada** y de **velocidad de la curva**.

Curvas parametrizadas

1. Una primera idea intuitiva de curva es verla como la "**trayectoria de una partícula**", lo cual nos ofrece una primera aproximación a una definición **geométrica** de curva. Por ejemplo, la trayectoria descrita por la partícula podría ser: un círculo, una parábola, una elipse, ect.

2. También podemos definir una curva como "**una aplicación que, en cada instante de tiempo, da una posición en el $\mathbb{R}^3$**".
Supongamos que $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son las coordenadas en el instante t de objeto moviéndose en el $\mathbb{R}^3$. El vector de posición del objeto en instante t está descrito por
$$\alpha(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big).$$

3. Esta última idea engloba algo más que la mera trayectoria o traza, pues encierra a su vez las nociones de **curva orientada** y de **velocidad de la curva**.

4. Es razonable suponer que α es suave (**diferenciable**), lo que significa que cada una de las tres funciones componentes, $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$, por separado es diferenciable en el sentido de que se puede derivar cualquier número de veces.

EJEMPLO: Consideremos la aplicaciones

$\alpha(t) = (\cos t, \sin t) \qquad \beta(t) = (\cos(2t), \sin(2t)) \qquad C(t) = (\sin t, \cos t)$

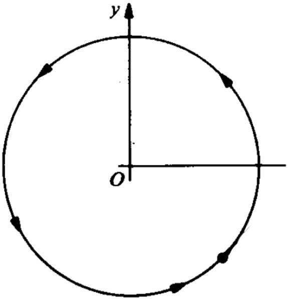
¿Que información proporciona estas aplicaciones así definidas?

EJEMPLO: Consideremos la aplicaciones

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t) \qquad \beta(t) = (\cos(2t), \sin(2t)) \qquad C(t) = (\sin t, \cos t)$$

¿Que información proporciona estas aplicaciones así definidas?

- TODAS son circunferencias con centro el origen de coordenadas 0 y radio 1. **Esa sería su traza**.

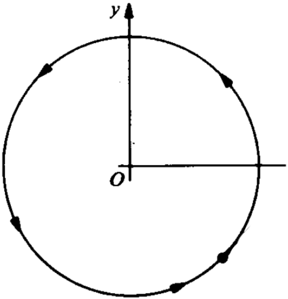


EJEMPLO: Consideremos la aplicaciones

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t) \qquad \beta(t) = (\cos(2t), \sin(2t)) \qquad C(t) = (\sin t, \cos t)$$

¿Que información proporciona estas aplicaciones así definidas?

- TODAS son circunferencias con centro el origen de coordenadas 0 y radio 1. **Esa sería su traza**.

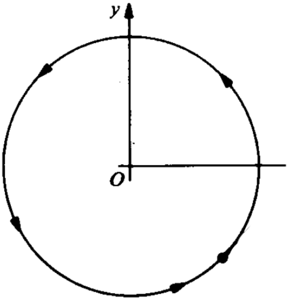


EJEMPLO: Consideremos la aplicaciones

$\alpha(t) = (\cos t, \sin t) \qquad \beta(t) = (\cos(2t), \sin(2t)) \qquad C(t) = (\sin t, \cos t)$

¿Que información proporciona estas aplicaciones así definidas?

- TODAS son circunferencias con centro el origen de coordenadas 0 y radio 1. **Esa sería su traza**.
- Para α partimos del punto $(1, 0)$ (cuando $t = 0$), la recorremos en el sentido contrario a las agujas del reloj, y volvemos de nuevo al $(1, 0)$ cuando $t = 2\pi$ (**esto nos indica, además de una orientación precisa, una cierta "velocidad de movimiento**").

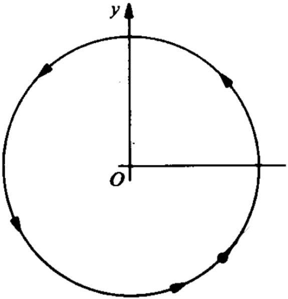


EJEMPLO: Consideremos la aplicaciones

$\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ $\qquad$ $\beta(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ $\qquad$ $C(t) = (\sin t, \cos t)$

¿Que información proporciona estas aplicaciones así definidas?

- TODAS son circunferencias con centro el origen de coordenadas 0 y radio 1. **Esa sería su traza**.
- Para α partimos del punto $(1, 0)$ (cuando $t = 0$), la recorremos en el sentido contrario a las agujas del reloj, y volvemos de nuevo al $(1, 0)$ cuando $t = 2\pi$ (**esto nos indica, además de una orientación precisa, una cierta "velocidad de movimiento**").



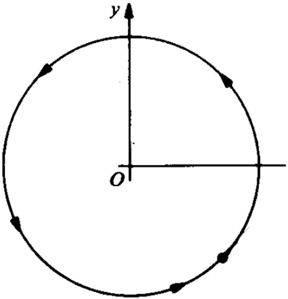
- β parte del mismo punto y con la misma orientación que α. Sin embargo, la velocidad con que recorremos es mucho mayor, pues, cuando $t = \pi$, la partícula ya ha dado una vuelta completa.

EJEMPLO: Consideremos la aplicaciones

$\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ $\qquad$ $\beta(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ $\qquad$ $C(t) = (\sin t, \cos t)$

¿Que información proporciona estas aplicaciones así definidas?

- TODAS son circunferencias con centro el origen de coordenadas 0 y radio 1. **Esa sería su traza**.
- Para α partimos del punto $(1, 0)$ (cuando $t = 0$), la recorremos en el sentido contrario a las agujas del reloj, y volvemos de nuevo al $(1, 0)$ cuando $t = 2\pi$ (**esto nos indica, además de una orientación precisa, una cierta "velocidad de movimiento**").



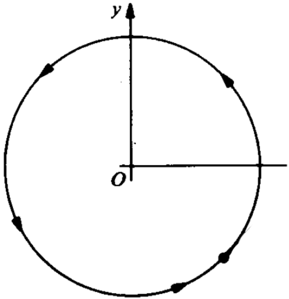
- β parte del mismo punto y con la misma orientación que α. Sin embargo, la velocidad con que recorremos es mucho mayor, pues, cuando $t = \pi$, la partícula ya ha dado una vuelta completa.
- Para C partimos del punto $(0, 1)$ y la recorremos en el sentido de las agujas del reloj: ha cambiado la orientación (además del punto inicial).

EJEMPLO: Consideremos la aplicaciones

$\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ $\beta(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ $C(t) = (\sin t, \cos t)$

¿Que información proporciona estas aplicaciones así definidas?

- TODAS son circunferencias con centro el origen de coordenadas 0 y radio 1. **Esa sería su traza**.
- Para α partimos del punto $(1, 0)$ (cuando $t = 0$), la recorremos en el sentido contrario a las agujas del reloj, y volvemos de nuevo al $(1, 0)$ cuando $t = 2\pi$ (**esto nos indica, además de una orientación precisa, una cierta "velocidad de movimiento**").



- β parte del mismo punto y con la misma orientación que α. Sin embargo, la velocidad con que recorremos es mucho mayor, pues, cuando $t = \pi$, la partícula ya ha dado una vuelta completa.
- Para C partimos del punto $(0, 1)$ y la recorremos en el sentido de las agujas del reloj: ha cambiado la orientación (además del punto inicial).

Definición (Curva parametrizada diferenciable)

Una curva parametrizada en $\mathbb{R}^n$ *es una aplicación diferenciable* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$*, definida por*

$$\alpha(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$$

donde $I \subset \mathbb{R}$ *abierto, y cada función coordenada* $x_i(t)$ *es* $\mathcal{C}^\infty(I)$*, es decir, que admite derivadas continuas de todos los órdenes.*

Definición (Curva parametrizada diferenciable)

Una curva parametrizada en $\mathbb{R}^n$ *es una aplicación diferenciable* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *definida por*

$$\alpha(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$$

donde $I \subset \mathbb{R}$ *abierto, y cada función coordenada* $x_i(t)$ *es* $\mathcal{C}^{\infty}(I)$, *es decir, que admite derivadas continuas de todos los órdenes.*

- El adjetivo "**parametrizada**" hace referencia, precisamente, a que no sólo consideramos la traza de la curva, sino también la manera que tenemos de *recorrerla* mediante un determinado parámetro.

Definición (Curva parametrizada diferenciable)

Una curva parametrizada en $\mathbb{R}^n$ *es una aplicación diferenciable* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *definida por*

$$\alpha(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$$

donde $I \subset \mathbb{R}$ *abierto, y cada función coordenada* $x_i(t)$ *es* $\mathcal{C}^\infty(I)$, *es decir, que admite derivadas continuas de todos los órdenes.*

- El adjetivo "**parametrizada**" hace referencia, precisamente, a que no sólo consideramos la traza de la curva, sino también la manera que tenemos de *recorrerla* mediante un determinado parámetro.
- La imagen $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^n$ la traza de α, y la aplicación $\alpha' : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida de la forma

$$\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \ldots, \alpha_n'(t)),$$

su vector velocidad o vector tangente.

Definición (Curva parametrizada diferenciable)

Una curva parametrizada en $\mathbb{R}^n$ *es una aplicación diferenciable* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *definida por*

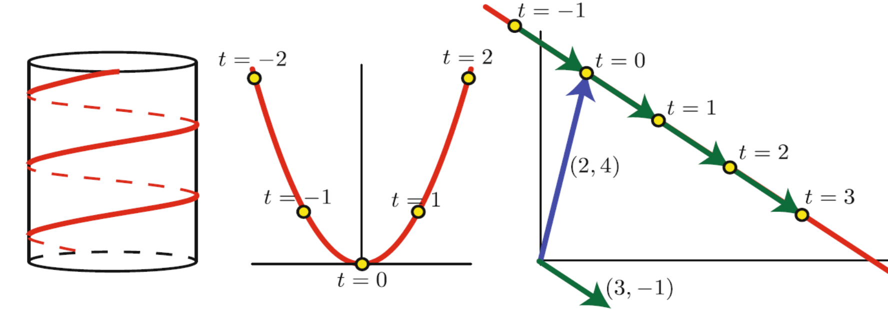
$$\alpha(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$$

donde $I \subset \mathbb{R}$ *abierto, y cada función coordenada* $x_i(t)$ *es* $\mathcal{C}^\infty(I)$, *es decir, que admite derivadas continuas de todos los órdenes.*

- El adjetivo "**parametrizada**" hace referencia, precisamente, a que no sólo consideramos la traza de la curva, sino también la manera que tenemos de *recorrerla* mediante un determinado parámetro.
- La imagen $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^n$ la traza de α, y la aplicación $\alpha' : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida de la forma

$$\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \ldots, \alpha_n'(t)),$$

  su vector velocidad o vector tangente.
- Por motivos de brevedad, de ahora en adelante utilizaremos el término **curva** como abreviatura. para "**curva parametrizada**".

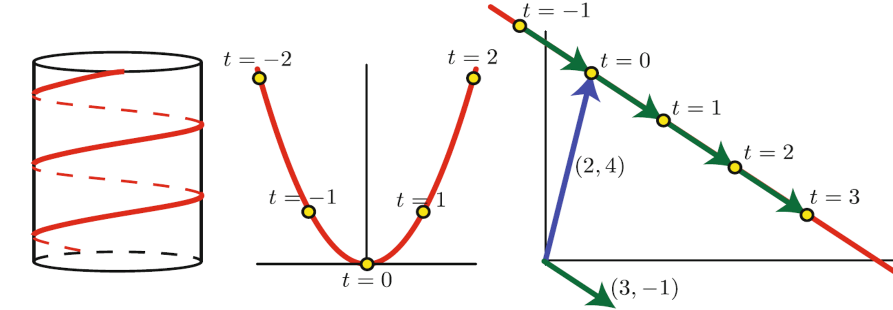


$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ $\quad$ $\gamma(t) = (t, t^2)$ $\quad$ $\gamma(t) = (2,4) + t(3,-1)$

(Hélice) La función

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in (-\infty, \infty),$$

es una curva en $\mathbb{R}^3$. Modela un objeto cuya sombra en el plano xy es un el círculo unitario, mientras que simultáneamente su coordenada z aumenta constantemente con el tiempo. Esa traza es llamada una Hélice.

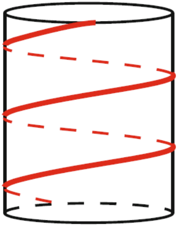


$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ $\quad$ $\gamma(t) = (t, t^2)$ $\quad$ $\gamma(t) = (2,4) + t(3,-1)$

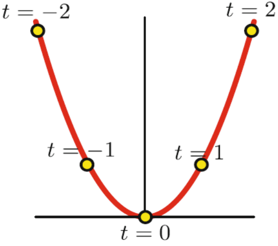
(Grafo): La función

$$\gamma(t) = (t, t^2), \quad t \in (-\infty, \infty),$$

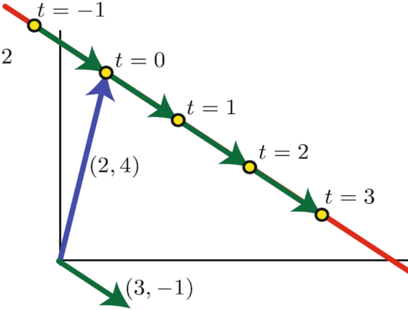
es una curva plana que modela un objeto que viaja a lo largo de la parábola $y = x^2$ de tal manera de manera que su coordenada x siempre sea igual al parámetro de tiempo t.



$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$



$\gamma(t) = (t, t^2)$

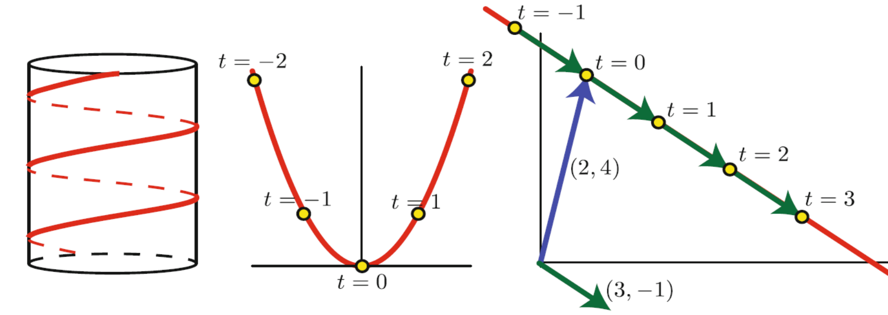


$\gamma(t) = (2, 4) + t(3, -1)$

(Grafo): De manera más general, si I es un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es una función suave, entonces

$$\gamma(t) = (t, f(t))$$

modela un objeto que recorre la gráfica de $y = f(x)$.



$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ $\quad$ $\gamma(t) = (t, t^2)$ $\quad$ $\gamma(t) = (2,4) + t(3,-1)$

(Recta) La curva plana

$$\gamma(t) = (2 + 3t, 4 - t), \qquad t \in (-\infty, \infty),$$

tiene como coordenadas $x_i(t)$ funciones lineales, por lo que se podría suponer que modela un objeto que se mueve a lo largo de una línea recta. Para confirmar esta suposición, podemos reescribirla en forma vectorial

$$\gamma(t) = (2, 4) + t(3, -1),$$

Definición (Derivadas de una curva parametrizada)

Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ *es una curva con componentes* $\gamma(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$*, entonces su* **derivada**, $\gamma' : I \to \mathbb{R}^n$*, es la curva definida como*

$$\gamma'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t)).$$

Las derivadas de orden superior se definen de manera análoga.

Definición (Derivadas de una curva parametrizada)

Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ *es una curva con componentes* $\gamma(t) = \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)$, *entonces su* **derivada**, $\gamma' : I \to \mathbb{R}^n$, *es la curva definida como*

$$\gamma'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t)).$$

Las derivadas de orden superior se definen de manera análoga.

Por ejemplo, la curva

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

tiene derivada primera $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, derivada segunda $\gamma''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$, y así sucesivamente. La siguiente definición alternativa es más fácil de interpretar visualmente:

Definición (**Derivadas de una curva parametrizada**)

Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ *es una curva con componentes* $\gamma(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$, *entonces su* **derivada**, $\gamma' : I \to \mathbb{R}^n$, *es la curva definida como*

$$\gamma'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t)).$$

Las derivadas de orden superior se definen de manera análoga.

Por ejemplo, la curva

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

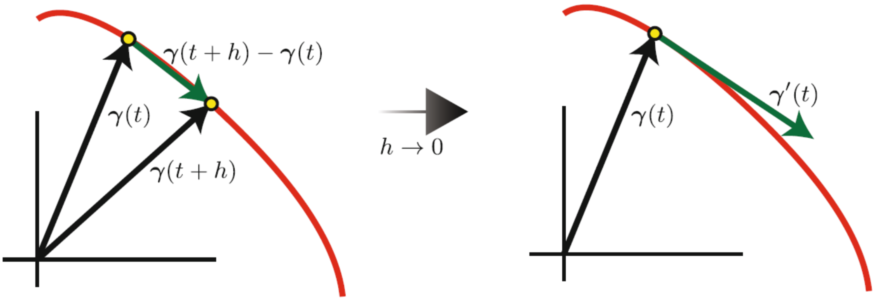
tiene derivada primera $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, derivada segunda $\gamma''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$, y así sucesivamente. La siguiente definición alternativa es más fácil de interpretar visualmente:

Proposición (**Interpretación geométrica: derivadas de una curva**)

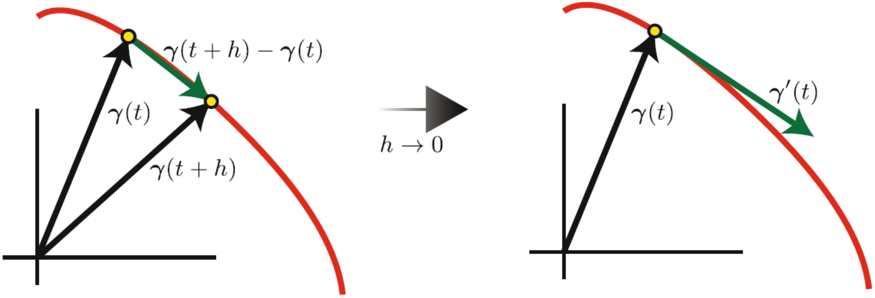
La derivada de una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ *en el instante* $t \in I$ *viene dada por la fórmula*

$$\gamma'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

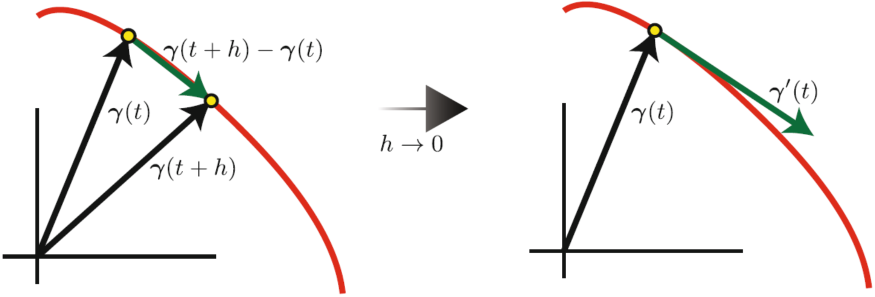
- Esta fórmula parece similar a la conocida del cálculo, pero observe que el numerador implica una **resta de dos vectores** en $\mathbb{R}^n$.



- Esta fórmula parece similar a la conocida del cálculo, pero observe que el numerador implica una **resta de dos vectores** en $\mathbb{R}^n$.
- Visualmente, $\gamma(t+h)-\gamma(t)$ es el vector que, inicia en $\gamma(t)$ y tendrá su punta en $\gamma(t+h)$. Después de dividir este vector por h, su longitud se aproxima a la velocidad del objeto y su dirección se aproxima a la dirección del movimiento.



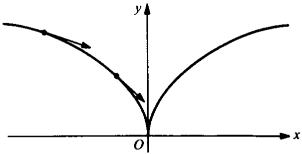
- Esta fórmula parece similar a la conocida del cálculo, pero observe que el numerador implica una **resta de dos vectores** en $\mathbb{R}^n$.
- Visualmente, $\gamma(t+h) - \gamma(t)$ es el vector que, inicia en $\gamma(t)$ y tendrá su punta en $\gamma(t+h)$. Después de dividir este vector por h, su longitud se aproxima a la velocidad del objeto y su dirección se aproxima a la dirección del movimiento.
- Por lo tanto, si $\gamma'(t)$ se dibuja iniciando en $\gamma(t)$, entonces será **tangente a la trayectoria** del movimiento y su longitud será igual a la velocidad del objeto (ver Figura).



Situaciones que excluiremos en nuestro estudio de las curvas

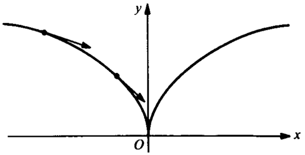
Situaciones que excluiremos en nuestro estudio de las curvas

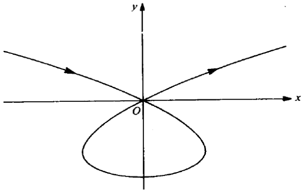
1. La curva $\alpha(t) = (t^3, t^2)$, es claramente diferenciable, pero $\alpha'(0) = (0, 0)$: el vector velocidad en $t = 0$ **existe**, aunque **no tiene dirección**.



Situaciones que excluiremos en nuestro estudio de las curvas

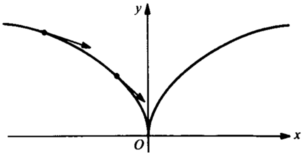
1. La curva $\alpha(t) = (t^3, t^2)$, es claramente diferenciable, pero $\alpha'(0) = (0, 0)$: el vector velocidad en $t = 0$ **existe**, aunque **no tiene dirección**.
2. La curva $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$. Claramente α **no es inyectiva**, pues $\alpha(2) = \alpha(-2) = (0, 0)$: se dice entonces que $\alpha(t)$ presenta una autointersección o que la curva no es simple.

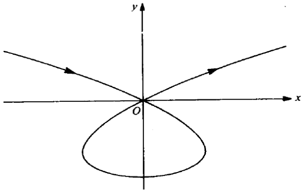


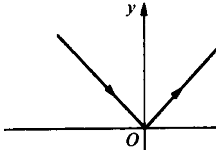


Situaciones que excluiremos en nuestro estudio de las curvas

1. La curva $\alpha(t) = (t^3, t^2)$, es claramente diferenciable, pero $\alpha'(0) = (0, 0)$: el vector velocidad en $t = 0$ **existe**, aunque **no tiene dirección**.
2. La curva $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$. Claramente α **no es inyectiva**, pues $\alpha(2) = \alpha(-2) = (0, 0)$: se dice entonces que $\alpha(t)$ presenta una autointersección o que la curva no es simple.
3. La curva parametrizada, $\alpha(t) = (t, |t|)$, que no es diferenciable y que, por tanto, nunca contemplaremos en nuestro estudio.

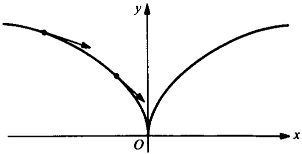


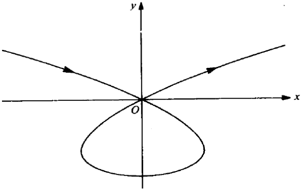


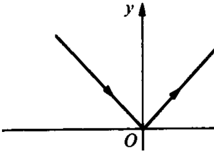


Situaciones que excluiremos en nuestro estudio de las curvas

1. La curva $\alpha(t) = (t^3, t^2)$, es claramente diferenciable, pero $\alpha'(0) = (0, 0)$: el vector velocidad en $t = 0$ **existe**, aunque **no tiene dirección**.
2. La curva $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$. Claramente α **no es inyectiva**, pues $\alpha(2) = \alpha(-2) = (0, 0)$: se dice entonces que $\alpha(t)$ presenta una autointersección o que la curva no es simple.
3. La curva parametrizada, $\alpha(t) = (t, |t|)$, que no es diferenciable y que, por tanto, nunca contemplaremos en nuestro estudio.







A la vista de estos ejemplos, nos podemos plantear algunas cuestiones: **¿por qué tenemos especial interés en que nuestra curva sea diferenciable? ¿Por qué queremos evitar que el vector tangente se anule en un punto?** La respuesta está implícita en la siguiente definición.

Definición (Curva regular)

Se dice que una curva parametrizada diferenciable $\alpha : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es* **regular** *si* $\alpha'(\mathrm{t}) \neq 0$, *para todo* $\mathrm{t} \in \mathrm{I}$.

Definición (Curva regular)

Se dice que una curva parametrizada diferenciable $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es* **regular** *si* $\alpha'(t) \neq 0$*, para todo* $t \in I$.

- Si $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable con $\alpha'(t) \neq 0$, podemos considerar la **recta tangente** a α en el punto $\alpha(t)$, es decir, la recta que pasa por $\alpha(t)$ y tiene como vector director $\alpha'(t)$ (aquí es esencial que la curva sea regular).

Definición (Curva regular)

Se dice que una curva parametrizada diferenciable $\alpha : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es* **regular** *si* $\alpha'(t) \neq 0$*, para todo* $t \in \mathrm{I}$*.*

- Si $\alpha : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable con $\alpha'(t) \neq 0$, podemos considerar la **recta tangente** a α en el punto $\alpha(t)$, es decir, la recta que pasa por $\alpha(t)$ y tiene como vector director $\alpha'(t)$ (aquí es esencial que la curva sea regular).
- Si por el contrario $t_0 \in \mathrm{I}$ es tal que $\alpha'(t_0) = 0$, se dice entonces que α presenta un **punto singular** en t_0.

Definición (**Curva regular**)

Se dice que una curva parametrizada diferenciable $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es* **regular** *si* $\alpha'(t) \neq 0$*, para todo* $t \in I$*.*

- Si $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable con $\alpha'(t) \neq 0$, podemos considerar la **recta tangente** a α en el punto $\alpha(t)$, es decir, la recta que pasa por $\alpha(t)$ y tiene como vector director $\alpha'(t)$ (aquí es esencial que la curva sea regular).
- Si por el contrario $t_0 \in I$ es tal que $\alpha'(t_0) = 0$, se dice entonces que α presenta un **punto singular** en t_0.
- En este curso y salvo que precise lo contrario, estudiaremos únicamente curvas simples y regulares, esto es, curvas que **NO** presentan **singularidades ni autointersecciones**.

OBS: Una curva puede recorrerse de varias formas ((**caminando-trotando-corriendo, ect**)), desde nuestro punto de vista, la misma curva recorrida de manera distinta, resulta ser una curva completamente diferente.

EJEMPLO Consideremos las dos curvas planas regulares siguientes:

$$\gamma(t) = (t, t^2), \qquad t \in [-2, 2]$$

$$\widetilde{\gamma}(t) = (2t, (2t)^2), \qquad t \in [-1, 1].$$

EJEMPLO Consideremos las dos curvas planas regulares siguientes:

$$\gamma(t) = (t, t^2), \qquad t \in [-2, 2]$$

$$\widetilde{\gamma}(t) = (2t, (2t)^2), \qquad t \in [-1, 1].$$

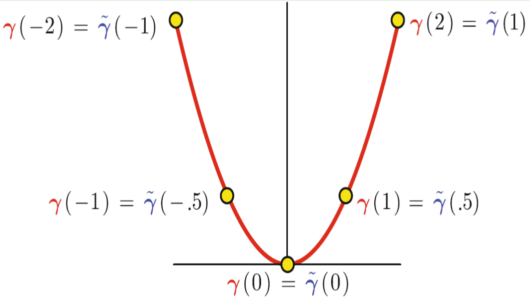
Tienen la misma **traza**, es decir, la parte de la parábola que se muestra en la figura.

EJEMPLO Consideremos las dos curvas planas regulares siguientes:

$$\gamma(t) = (t, t^2), \qquad t \in [-2, 2]$$

$$\widetilde{\gamma}(t) = (2t, (2t)^2), \qquad t \in [-1, 1].$$

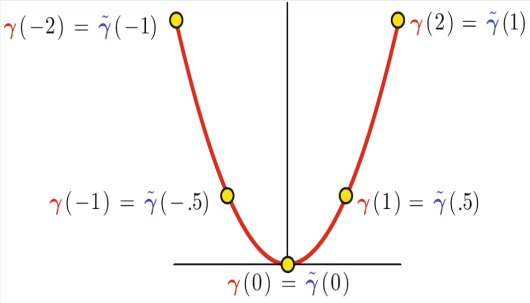
Tienen la misma **traza**, es decir, la parte de la parábola que se muestra en la figura.



EJEMPLO Consideremos las dos curvas planas regulares siguientes:

$$\gamma(t) = (t, t^2), \qquad t \in [-2, 2]$$
$$\widetilde{\gamma}(t) = (2t, (2t)^2), \qquad t \in [-1, 1].$$

Tienen la misma **traza**, es decir, la parte de la parábola que se muestra en la figura. Defina $h : [-1, 1] \to [-2, 2]$ como $h(t) = 2t$,



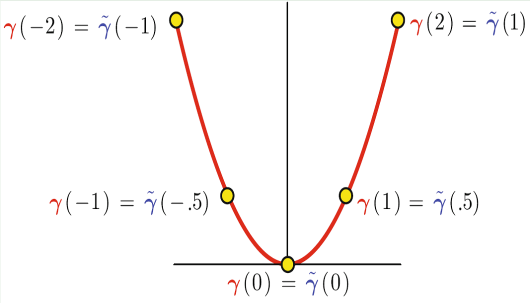
EJEMPLO Consideremos las dos curvas planas regulares siguientes:

$$\gamma(t) = (t, t^2), \qquad t \in [-2, 2]$$

$$\widetilde{\gamma}(t) = (2t, (2t)^2), \qquad t \in [-1, 1].$$

Tienen la misma **traza**, es decir, la parte de la parábola que se muestra en la figura. Defina $h : [-1, 1] \to [-2, 2]$ como $h(t) = 2t$, y observe que

$$\widetilde{\gamma}(t) = (\gamma \circ h)(t) = \gamma(h(t)) = \gamma(2t) = (2t, (2t)^2).$$



EJEMPLO Consideremos las dos curvas planas regulares siguientes:

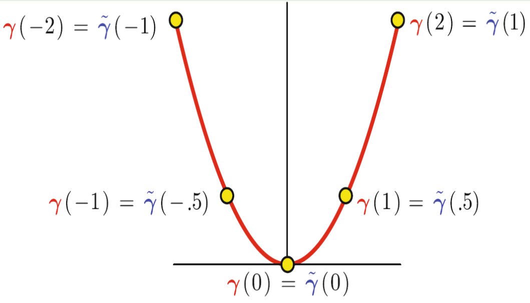
$$\gamma(t) = (t, t^2), \qquad t \in [-2, 2]$$

$$\widetilde{\gamma}(t) = (2t, (2t)^2), \qquad t \in [-1, 1].$$

Tienen la misma **traza**, es decir, la parte de la parábola que se muestra en la figura. Defina $h : [-1, 1] \to [-2, 2]$ como $h(t) = 2t$, y observe que

$$\widetilde{\gamma}(t) = (\gamma \circ h)(t) = \gamma(h(t)) = \gamma(2t) = (2t, (2t)^2).$$

Por lo tanto, llamaremos a $\widetilde{\gamma}$ una **reparametrización** de γ, y nos referiremos a γ y $\widetilde{\gamma}$ como dos parametrizaciones de la misma trayectoria.

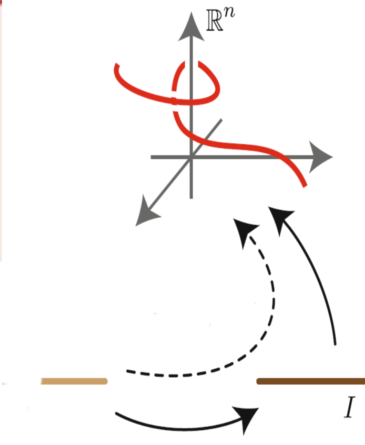


Definición (Cambio de parámetro)

Si $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es una curva parametrizada, se denomina* **cambio de parámetro** *a cualquier difeomorfismo* $h : \widetilde{I} \longrightarrow I$*, donde* $\widetilde{I}$ *es un intervalo abierto de* $\mathbb{R}$*. La curva*

$$\widetilde{\alpha} = \alpha \circ h : \widetilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

se llama **reparametrización** *de* α*.*

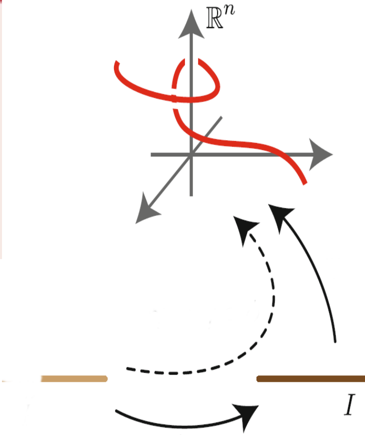


Definición (Cambio de parámetro)

Si $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es una curva parametrizada, se denomina* **cambio de parámetro** *a cualquier difeomorfismo* $h : \widetilde{I} \longrightarrow I$*, donde* $\widetilde{I}$ *es un intervalo abierto de* $\mathbb{R}$*. La curva*

$$\widetilde{\alpha} = \alpha \circ h : \widetilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

se llama **reparametrización** *de* α*.*



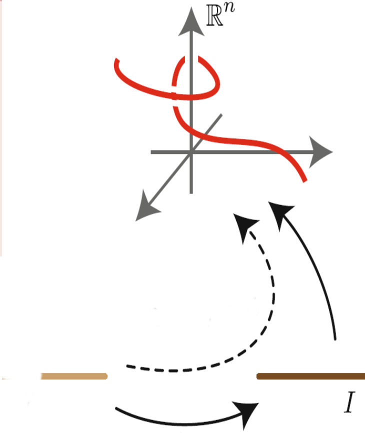
1. Como $\widetilde{\alpha}'(t) = h'(t)\alpha'(h(t))$, si α es regular, entonces cualquier re-parametrización de α también lo es, pues $h'(t) \neq 0$ siempre. Además, de la conexión de I se tiene que, o bien $h'(t) > 0$ o bien $h'(t) < 0$ para todo $t \in \widetilde{I}$.

Definición (**Cambio de parámetro**)

Si $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es una curva parametrizada, se denomina* **cambio de parámetro** *a cualquier difeomorfismo* $h : \widetilde{I} \longrightarrow I$*, donde* $\widetilde{I}$ *es un intervalo abierto de* $\mathbb{R}$*. La curva*

$$\widetilde{\alpha} = \alpha \circ h : \widetilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

se llama **reparametrización** *de* α.



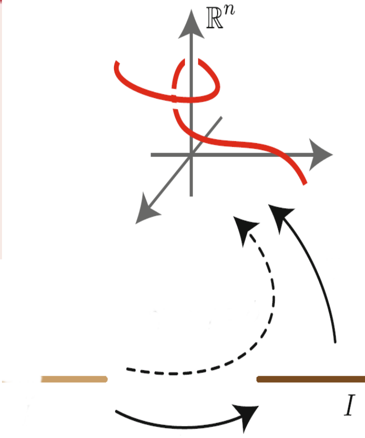
1. Como $\widetilde{\alpha}'(t) = h'(t)\alpha'(h(t))$, si α es regular, entonces cualquier re-parametrización de α también lo es, pues $h'(t) \neq 0$ siempre. Además, de la conexión de I se tiene que, o bien $h'(t) > 0$ o bien $h'(t) < 0$ para todo $t \in \widetilde{I}$.
1. Diremos que el cambio de parámetro h **conserva** la orientación si $h'(t) > 0$, y que **invierte** la orientación si $h'(t) < 0$.

Definición (Cambio de parámetro)

Si $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es una curva parametrizada, se denomina* **cambio de parámetro** *a cualquier difeomorfismo* $h : \widetilde{I} \longrightarrow I$*, donde* $\widetilde{I}$ *es un intervalo abierto de* $\mathbb{R}$*. La curva*

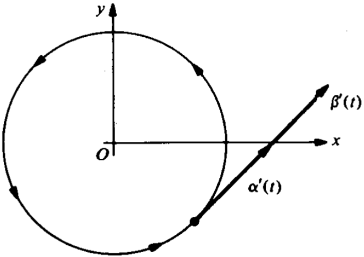
$$\widetilde{\alpha} = \alpha \circ h : \widetilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

se llama **reparametrización** *de* α*.*



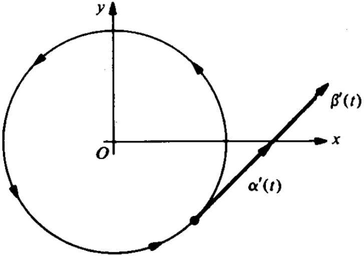
1. Como $\widetilde{\alpha}'(t) = h'(t)\alpha'(h(t))$, si α es regular, entonces cualquier re-parametrización de α también lo es, pues $h'(t) \neq 0$ siempre. Además, de la conexión de I se tiene que, o bien $h'(t) > 0$ o bien $h'(t) < 0$ para todo $t \in \widetilde{I}$.
1. Diremos que el cambio de parámetro h **conserva** la orientación si $h'(t) > 0$, y que **invierte** la orientación si $h'(t) < 0$.
2. Un cambio de parámetro h puede modificar tanto la orientación como la velocidad de una curva, pero nunca su trayectoria.

EJEMPLO: Para la curva $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$



EJEMPLO: Para la curva $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$

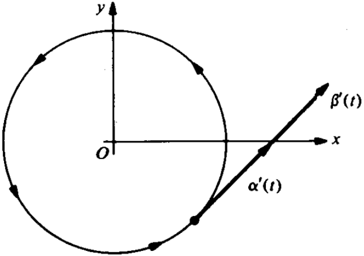
- El cambio de parámetro $h(s) = 2s$ **conserva la orientación**, pero NO preserva la velocidad,



EJEMPLO: Para la curva $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$

- El cambio de parámetro $h(s) = 2s$ **conserva la orientación**, pero NO preserva la velocidad, pues

$$\widetilde{\alpha}(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(2s) \qquad \widetilde{\alpha}'(s) = 2\alpha'(2s)$$

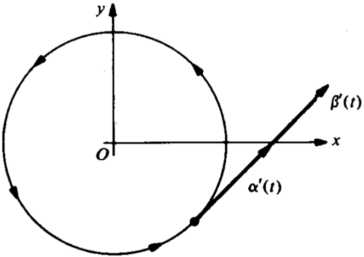


EJEMPLO: Para la curva $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$

- El cambio de parámetro $h(s) = 2s$ **conserva la orientación**, pero NO preserva la velocidad, pues

$$\widetilde{\alpha}(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(2s) \qquad \widetilde{\alpha}'(s) = 2\alpha'(2s)$$

- El cambio de parámetro $h(s) = -s$ **invierte la orientación**, NO Preserva la velocidad, aunque SI conserva su módulo.



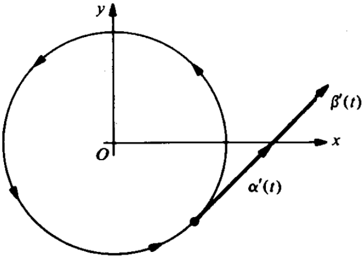
EJEMPLO: Para la curva $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$

- El cambio de parámetro $h(s) = 2s$ **conserva la orientación**, pero NO preserva la velocidad, pues

$$\widetilde{\alpha}(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(2s) \qquad \widetilde{\alpha}'(s) = 2\alpha'(2s)$$

- El cambio de parámetro $h(s) = -s$ **invierte la orientación**, NO Preserva la velocidad, aunque SI conserva su módulo.

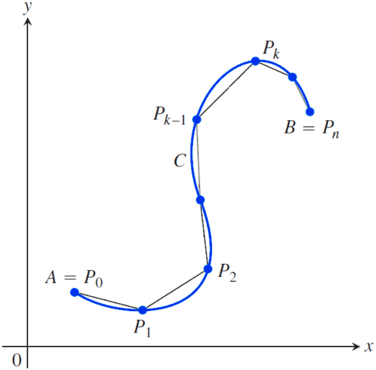
$$\widetilde{\alpha}(s) = \alpha(h_2(s)) = \alpha(-s) \qquad y \qquad \|\widetilde{\alpha}'(s)|| = \| - \alpha'(-s)|| = \|\alpha(-s)||$$



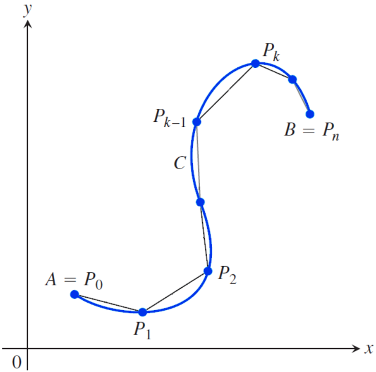
¿Como calcular la longitud de una curva en $\mathbb{R}^n$?

$\boxed{\textbf{¿Como calcular la longitud de una curva en } \mathbb{R}^n\textbf{?}}$. Consideremos el caso en $\mathbb{R}^2$:

$\boxed{\textbf{¿Como calcular la longitud de una curva en } \mathbb{R}^n\textbf{?}}$. Consideremos el caso en $\mathbb{R}^2$:

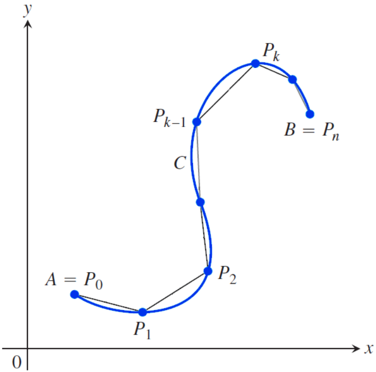


$\boxed{\text{¿Como calcular la longitud de una curva en } \mathbb{R}^n\text{?}}$. Consideremos el caso en $\mathbb{R}^2$: Subdividimos la trayectoria $\widehat{AB}$ en n partes en los puntos $A = P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n = B$.



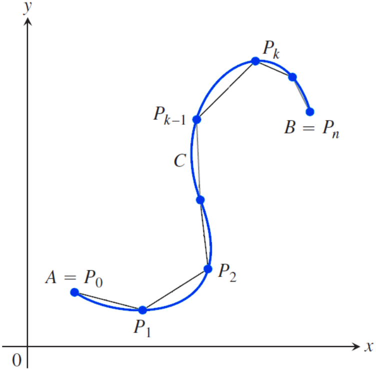
¿Como calcular la longitud de una curva en $\mathbb{R}^n$?. Consideremos el caso en $\mathbb{R}^2$: Subdividimos la trayectoria $\widehat{AB}$ en n partes en los puntos $A = P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n = B$. Estos puntos corresponden a una **partición de intervalo** ((tiempo)), $[a, b]$ por medio de

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \qquad C(t_k) = P_k = (f(t_k), g(t_k))$$



$\boxed{\text{¿Como calcular la longitud de una curva en } \mathbb{R}^n\text{?}}$. Consideremos el caso en $\mathbb{R}^2$: Subdividimos la trayectoria $\widehat{AB}$ en n partes en los puntos $A = P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n = B$. Estos puntos corresponden a una **partición de intervalo** ((tiempo)), $[a, b]$ por medio de

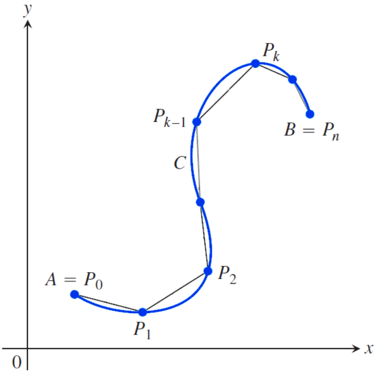
$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \qquad C(t_k) = P_k = (f(t_k), g(t_k))$$

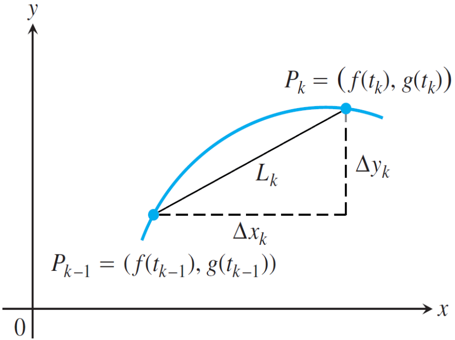


Después, unimos P_{k-1} y P_k mediante segmentos de recta L_k.

$\boxed{\text{¿Como calcular la longitud de una curva en } \mathbb{R}^n\text{?}}$. Consideremos el caso en $\mathbb{R}^2$: Subdividimos la trayectoria $\widehat{AB}$ en n partes en los puntos $A = P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n = B$. Estos puntos corresponden a una **partición de intervalo** ((tiempo)), $[a, b]$ por medio de

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \qquad C(t_k) = P_k = (f(t_k), g(t_k))$$





Después, unimos P_{k-1} y P_k mediante segmentos de recta L_k.

El segmento $\overline{P_{k-1}P_k}$ tiene longitud

$$\begin{aligned} L_k &= \|P_k - P_{k-1}\| = \left\|\big(f(t_k), g(t_k)\big) - \big(f(t_{k-1}), g(t_{k-1})\big)\right\| \\ &= \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2} \end{aligned}$$

El segmento $\overline{P_{k-1}P_k}$ tiene longitud

$$\begin{aligned} L_k &= \|P_k - P_{k-1}\| = \|\big(f(t_k), g(t_k)\big) - \big(f(t_{k-1}), g(t_{k-1})\big)\| \\ &= \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2} \end{aligned}$$

Aplicando Teorema del Valor Medio, a las funciones f y g en el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$,

El segmento $\overline{P_{k-1}P_k}$ tiene longitud

$$\begin{aligned} L_k &= \|P_k - P_{k-1}\| = \|\big(f(t_k), g(t_k)\big) - \big(f(t_{k-1}), g(t_{k-1})\big)\| \\ &= \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2} \end{aligned}$$

Aplicando Teorema del Valor Medio, a las funciones f y g en el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$, afirmamos que existen números $t^*, t^{**} \in [t_{k-1}, t_k]$ tales que

$$\frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = f'(t^*)$$

$$\frac{g(t_k) - g(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = g'(t^{**})$$

El segmento $\overline{P_{k-1}P_k}$ tiene longitud

$$\begin{aligned} L_k &= \|P_k - P_{k-1}\| = \|\big(f(t_k), g(t_k)\big) - \big(f(t_{k-1}), g(t_{k-1})\big)\| \\ &= \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2} \end{aligned}$$

Aplicando Teorema del Valor Medio, a las funciones f y g en el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$, afirmamos que existen números $t^*, t^{**} \in [t_{k-1}, t_k]$ tales que

$$\frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = f'(t^*) \qquad \Rightarrow \qquad f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(t^*)\Delta t_k$$

$$\frac{g(t_k) - g(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = g'(t^{**}) \qquad \Rightarrow \qquad g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(t^{**})\Delta t_k$$

El segmento $\overline{P_{k-1}P_k}$ tiene longitud

$$
\begin{aligned}
L_k &= \|P_k - P_{k-1}\| = \left\|\big(f(t_k), g(t_k)\big) - \big(f(t_{k-1}), g(t_{k-1})\big)\right\| \\
&= \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2}
\end{aligned}
$$

Aplicando Teorema del Valor Medio, a las funciones f y g en el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$, afirmamos que existen números $t^*, t^{**} \in [t_{k-1}, t_k]$ tales que

$$
\frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = f'(t^*) \qquad \Rightarrow \qquad f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(t^*)\Delta t_k
$$

$$
\frac{g(t_k) - g(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = g'(t^{**}) \qquad \Rightarrow \qquad g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(t^{**})\Delta t_k
$$

Por tanto, la **longitud** de la curva $\widehat{AB}$ se puede aproximar

$$
\begin{aligned}
L \approx \sum_{k=1}^{n} L_k &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big[f(t_k) - f(t_{k-1})\big]^2 + \big[g(t_k) - g(t_{k-1})\big]^2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big[f'(t^*)\Delta t_k\big]^2 + \big[g'(t^{**})\Delta t_k\big]^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big[f'(t^*)\big]^2 + \big[g'(t^{**})\big]^2}\,\Delta t_k
\end{aligned}
$$

Esta última expresión es exactamente una **suma de Riemann**?

$$L = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left[f'(t^*)\right]^2 + \left[g'(t^{**})\right]^2}\,\Delta t_k$$

Esta última expresión es exactamente una **suma de Riemann**? **NOOOO**
(ya que $f'(t^{*})$ y $g'(t^{**})$ se evalúan en diferentes puntos),

$$L = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left[f'(t^{*})\right]^{2} + \left[g'(t^{**})\right]^{2}}\,\Delta t_k$$

Esta última expresión es exactamente una **suma de Riemann**? **NOOOO** (ya que $f'(t^*)$ y $g'(t^{**})$ se evalúan en diferentes puntos), pero, conforme la $\|\Delta t_k\| \to 0$, esta sumatoria tiende a una integral definida, esto es,

$$L = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left[f'(t^*)\right]^2 + \left[g'(t^{**})\right]^2}\,\Delta t_k$$

Esta última expresión es exactamente una **suma de Riemann**? **NOOOO** (ya que $f'(t^*)$ y $g'(t^{**})$ se evalúan en diferentes puntos), pero, conforme la $\|\Delta t_k\| \to 0$, esta sumatoria tiende a una integral definida, esto es,

$$
\begin{aligned}
L = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left[f'(t^*)\right]^2 + \left[g'(t^{**})\right]^2}\,\Delta t_k &= \int_a^b \sqrt{\left[f'(t)\right]^2 + \left[g'(t)\right]^2}\,dt \\
&= \int_a^b \|C'(t)\|\,dt
\end{aligned}
$$

Esta última expresión es exactamente una **suma de Riemann**? **NOOOO** (ya que $f'(t^*)$ y $g'(t^{**})$ se evalúan en diferentes puntos), pero, conforme la $\|\Delta t_k\| \to 0$, esta sumatoria tiende a una integral definida, esto es,

$$L = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left[f'(t^*)\right]^2 + \left[g'(t^{**})\right]^2}\, \Delta t_k = \int_a^b \sqrt{\left[f'(t)\right]^2 + \left[g'(t)\right]^2}\, dt$$

$$= \int_a^b \|C'(t)\|\, dt$$

Por lo tanto, es razonable la siguiente definición de longitud de la curva:

Definición (Longitud de una curva parametrizada.)

Sean $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una curva parametrizada y* $[a, b] \subset I$. *Entonces la* **longitud de** α *entre* $\alpha(a)$ *y* $\alpha(b)$ *está dada por*

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt$$

Esta última expresión es exactamente una **suma de Riemann**? **NOOOO** (ya que $f'(t^*)$ y $g'(t^{**})$ se evalúan en diferentes puntos), pero, conforme la $\|\Delta t_k\| \to 0$, esta sumatoria tiende a una integral definida, esto es,

$$L = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left[f'(t^*)\right]^2 + \left[g'(t^{**})\right]^2}\,\Delta t_k = \int_a^b \sqrt{\left[f'(t)\right]^2 + \left[g'(t)\right]^2}\,dt$$

$$= \int_a^b \|C'(t)\|\,dt$$

Por lo tanto, es razonable la siguiente definición de longitud de la curva:

Definición (Longitud de una curva parametrizada.)

Sean $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una curva parametrizada y* $[a, b] \subset I$. *Entonces la* **longitud de** α *entre* $\alpha(a)$ *y* $\alpha(b)$ *está dada por*

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt$$

EJER: La longitud de una curva parametrizada es independiente de su parametrización.

De entre **todas las parametrizaciones** ((posibles para la imagen de una curva)), **existe una** (salvo orientación) cuyas propiedades son especialmente importantes.

De entre **todas las parametrizaciones** ((posibles para la imagen de una curva)), **existe una** (salvo orientación) cuyas propiedades son especialmente importantes. Se trata de parametrizar la curva de modo que $\|\alpha'(t)\| = 1$.

De entre **todas las parametrizaciones** ((posibles para la imagen de una curva)), **existe una** (salvo orientación) cuyas propiedades son especialmente importantes. Se trata de parametrizar la curva de modo que $\|\alpha'(t)\| = 1$.

Definición (Parametrización por longitud de arco)

Se dice que una curva parametrizada $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ está parametrizada por la longitud de arco (p.p.a) si $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.

De entre **todas las parametrizaciones** ((posibles para la imagen de una curva)), **existe una** (salvo orientación) cuyas propiedades son especialmente importantes. Se trata de parametrizar la curva de modo que $\|\alpha'(t)\| = 1$.

Definición (Parametrización por longitud de arco)

Se dice que una curva parametrizada $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ está parametrizada por la longitud de arco (p.p.a) si $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.

- **La razón de tal calificativo es clara:**

De entre **todas las parametrizaciones** ((posibles para la imagen de una curva)), **existe una** (salvo orientación) cuyas propiedades son especialmente importantes. Se trata de parametrizar la curva de modo que $\|\alpha'(t)\| = 1$.

Definición (Parametrización por longitud de arco)

Se dice que una curva parametrizada $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *está parametrizada por la longitud de arco (p.p.a) si* $\|\alpha'(t)\| = 1$ *para todo* $t \in I$.

- **La razón de tal calificativo es clara:** cuando $\|\alpha'(t)\| = 1$, el parámetro t de la curva mide (salvo una constante) la **longitud del arco** de la misma curva entre los tiempos t_1 y t_2;

De entre **todas las parametrizaciones** ((posibles para la imagen de una curva)), **existe una** (salvo orientación) cuyas propiedades son especialmente importantes. Se trata de parametrizar la curva de modo que $\|\alpha'(t)\| = 1$.

Definición (Parametrización por longitud de arco)

Se dice que una curva parametrizada $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ está parametrizada por la longitud de arco (p.p.a) si $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.

- **La razón de tal calificativo es clara:** cuando $\|\alpha'(t)\| = 1$, el parámetro t de la curva mide (salvo una constante) la **longitud del arco** de la misma curva entre los tiempos t_1 y t_2; En efecto,

$$L_{t_1}^{t_2}(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_1}^{t_2} 1 dt = t\Big|_{t_1}^{t_2} = t_2 - t_1$$

De entre **todas las parametrizaciones** ((posibles para la imagen de una curva)), **existe una** (salvo orientación) cuyas propiedades son especialmente importantes. Se trata de parametrizar la curva de modo que $\|\alpha'(t)\| = 1$.

Definición (Parametrización por longitud de arco)

Se dice que una curva parametrizada $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ está parametrizada por la longitud de arco (p.p.a) si $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.

- **La razón de tal calificativo es clara:** cuando $\|\alpha'(t)\| = 1$, el parámetro t de la curva mide (salvo una constante) la **longitud del arco** de la misma curva entre los tiempos t_1 y t_2; En efecto,

$$L_{t_1}^{t_2}(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_1}^{t_2} 1 dt = t\Big|_{t_1}^{t_2} = t_2 - t_1$$

- En lo que sigue, utilizaremos **(p.p.a.)** como abreviatura para indicar que una curva a está parametrizada por el **parámetro-longitud de arco**.

De entre **todas las parametrizaciones** ((posibles para la imagen de una curva)), **existe una** (salvo orientación) cuyas propiedades son especialmente importantes. Se trata de parametrizar la curva de modo que $\|\alpha'(t)\| = 1$.

Definición (Parametrización por longitud de arco)

Se dice que una curva parametrizada $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ está parametrizada por la longitud de arco (p.p.a) si $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.

- **La razón de tal calificativo es clara:** cuando $\|\alpha'(t)\| = 1$, el parámetro t de la curva mide (salvo una constante) la **longitud del arco** de la misma curva entre los tiempos t_1 y t_2; En efecto,

$$L_{t_1}^{t_2}(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_1}^{t_2} 1 dt = t\Big|_{t_1}^{t_2} = t_2 - t_1$$

- En lo que sigue, utilizaremos **(p.p.a.)** como abreviatura para indicar que una curva a está parametrizada por el **parámetro-longitud de arco**. Muchos autores usan s como el parámetro arco de la curva, en lugar de t.

- Desde una perspectiva física, la aceleración de una curva p.p.a. no posee componente tangencial ((la partícula no experimenta aceleración en la dirección del movimiento)), por lo que, si existe aceleración, ésta es siempre perpendicular a la velocidad (y por ende, a su trayectoria).

- Desde una perspectiva física, la aceleración de una curva p.p.a. no posee componente tangencial ((la partícula no experimenta aceleración en la dirección del movimiento)), por lo que, si existe aceleración, ésta es siempre perpendicular a la velocidad (y por ende, a su trayectoria).
- En términos matemáticos si $\|\alpha'(s)|| = 1$

- Desde una perspectiva física, la aceleración de una curva p.p.a. no posee componente tangencial ((la partícula no experimenta aceleración en la dirección del movimiento)), por lo que, si existe aceleración, ésta es siempre perpendicular a la velocidad (y por ende, a su trayectoria).
- En términos matemáticos si $\|\alpha'(s)|| = 1$ entonces derivando encontramos que

$$0 = \frac{d}{ds}\|\alpha'(s)||^2 = \frac{d}{ds}\langle\alpha'(s), \alpha'(s)\rangle = 2\langle\alpha'(s), \alpha''(s)\rangle := \langle\mathbf{v}, \mathbf{a}\rangle$$

- Desde una perspectiva física, la aceleración de una curva p.p.a. no posee componente tangencial ((la partícula no experimenta aceleración en la dirección del movimiento)), por lo que, si existe aceleración, ésta es siempre perpendicular a la velocidad (y por ende, a su trayectoria).
- En términos matemáticos si $\|\alpha'(s)\| = 1$ entonces derivando encontramos que

$$0 = \frac{d}{ds}\|\alpha'(s)\|^2 = \frac{d}{ds}\langle \alpha'(s), \alpha'(s)\rangle = 2\langle \alpha'(s), \alpha''(s)\rangle := \langle \mathbf{v}, \mathbf{a}\rangle$$

((**obsérvese que no es necesario que el módulo de la velocidad sea unitario, basta con que sea constante**)).

- Desde una perspectiva física, la aceleración de una curva p.p.a. no posee componente tangencial ((la partícula no experimenta aceleración en la dirección del movimiento)), por lo que, si existe aceleración, ésta es siempre perpendicular a la velocidad (y por ende, a su trayectoria).
- En términos matemáticos si $\|\alpha'(s)\| = 1$ entonces derivando encontramos que

$$0 = \frac{d}{ds}\|\alpha'(s)\|^2 = \frac{d}{ds}\langle\alpha'(s), \alpha'(s)\rangle = 2\langle\alpha'(s), \alpha''(s)\rangle := \langle \mathbf{v}, \mathbf{a}\rangle$$

((**obsérvese que no es necesario que el módulo de la velocidad sea unitario, basta con que sea constante**)).

El siguiente teorema es **fundamental** para el desarrollo de toda la teoría de curvas, tanto en el $\mathbb{R}^2$ como en el $\mathbb{R}^3$. Enseguida veremos por qué.

Teorema (Existencia de p.p.a)

Toda curva parametrizada regular admite una reparametrización por la longitud de arco con un cambio de parámetro que conserva la orientación.

Dem:

Teorema (Existencia de p.p.a)

Toda curva parametrizada regular admite una reparametrización por la longitud de arco con un cambio de parámetro que conserva la orientación.

Dem: Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular parametrizada con parámetro arbitrario t.

Teorema (Existencia de p.p.a)

Toda curva parametrizada regular admite una reparametrización por la longitud de arco con un cambio de parámetro que conserva la orientación.

Dem: Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular parametrizada con parámetro arbitrario t. Fijamos $t_0 \in I$ y consideremos la función **longitud de arco** $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ como la aplicación

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)||du = L_{t_0}^{t}(\alpha)$$

Teorema (Existencia de p.p.a)

Toda curva parametrizada regular admite una reparametrización por la longitud de arco con un cambio de parámetro que conserva la orientación.

Dem: Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular parametrizada con parámetro arbitrario t. Fijamos $t_0 \in I$ y consideremos la función **longitud de arco** $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ como la aplicación

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| du = L_{t_0}^{t}(\alpha)$$

- g es una función diferenciable.

Teorema (Existencia de p.p.a)

Toda curva parametrizada regular admite una reparametrización por la longitud de arco con un cambio de parámetro que conserva la orientación.

Dem: Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular parametrizada con parámetro arbitrario t. Fijamos $t_0 \in I$ y consideremos la función **longitud de arco** $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ como la aplicación

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| du = L_{t_0}^{t}(\alpha)$$

- g es una función diferenciable.
- Por TFC, $g'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$, para todo $t \in I$, pues α es regular.

Teorema (Existencia de p.p.a)

Toda curva parametrizada regular admite una reparametrización por la longitud de arco con un cambio de parámetro que conserva la orientación.

Dem: Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular parametrizada con parámetro arbitrario t. Fijamos $t_0 \in I$ y consideremos la función **longitud de arco** $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ como la aplicación

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| du = L_{t_0}^{t}(\alpha)$$

- g es una función diferenciable.
- Por TFC, $g'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$, para todo $t \in I$, pues α es regular.
- Luego, $g : I \longrightarrow g(I) \subset \mathbb{R}$ es un **difeomorfismo** sobre su imagen $g(I) = J$, la cual también es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.

Teorema (Existencia de p.p.a)

Toda curva parametrizada regular admite una reparametrización por la longitud de arco con un cambio de parámetro que conserva la orientación.

Dem: Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular parametrizada con parámetro arbitrario t. Fijamos $t_0 \in I$ y consideremos la función **longitud de arco** $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ como la aplicación

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| du = L_{t_0}^{t}(\alpha)$$

- Representamos por $h := g^{-1} : J \longrightarrow I$. Claramente,

$$(g \circ h)(s) = s.$$

Teorema (**Existencia de p.p.a**)

Toda curva parametrizada regular admite una reparametrización por la longitud de arco con un cambio de parámetro que conserva la orientación.

Dem: Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular parametrizada con parámetro arbitrario t. Fijamos $t_0 \in I$ y consideremos la función **longitud de arco** $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ como la aplicación

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| du = L_{t_0}^{t}(\alpha)$$

- Representamos por $h := g^{-1} : J \longrightarrow I$. Claramente,

$$(g \circ h)(s) = s.$$

Por tanto, $g'(h(s))h'(s) = 1$,

Teorema (Existencia de p.p.a)

Toda curva parametrizada regular admite una reparametrización por la longitud de arco con un cambio de parámetro que conserva la orientación.

Dem: Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular parametrizada con parámetro arbitrario t. Fijamos $t_0 \in I$ y consideremos la función **longitud de arco** $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ como la aplicación

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| du = L_{t_0}^{t}(\alpha)$$

- Representamos por $h := g^{-1} : J \longrightarrow I$. Claramente,

$$(g \circ h)(s) = s.$$

Por tanto, $g'(h(s))h'(s) = 1$, de donde se obtiene que

$$h'(s) = \frac{1}{g'(h(s))} = \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|} > 0$$

Teorema (Existencia de p.p.a)

Toda curva parametrizada regular admite una reparametrización por la longitud de arco con un cambio de parámetro que conserva la orientación.

Dem: Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular parametrizada con parámetro arbitrario t. Fijamos $t_0 \in I$ y consideremos la función **longitud de arco** $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ como la aplicación

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| du = L_{t_0}^{t}(\alpha)$$

- Representamos por $h := g^{-1} : J \longrightarrow I$. Claramente,

$$(g \circ h)(s) = s.$$

  Por tanto, $g'(h(s))h'(s) = 1$, de donde se obtiene que

$$h'(s) = \frac{1}{g'(h(s))} = \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|} > 0$$

  es decir, el cambio de parámetro h conserva la orientación.

Teorema (Existencia de p.p.a)

Toda curva parametrizada regular admite una reparametrización por la longitud de arco con un cambio de parámetro que conserva la orientación.

Dem: Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular parametrizada con parámetro arbitrario t. Fijamos $t_0 \in I$ y consideremos la función **longitud de arco** $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ como la aplicación

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| du = L_{t_0}^{t}(\alpha)$$

- Finalmente, es fácil ver que la reparametrización $\widetilde{\alpha}(s) = \alpha(h(s))$ es una curva p.p.a.

$$\|\widetilde{\alpha}'(s)\| = \|\alpha'(h(s))\| \, |h'(s)| = \|\alpha'(h(s))\| \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|} = 1$$

Teorema (Existencia de p.p.a)

Toda curva parametrizada regular admite una reparametrización por la longitud de arco con un cambio de parámetro que conserva la orientación.

Dem: Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular parametrizada con parámetro arbitrario t. Fijamos $t_0 \in I$ y consideremos la función **longitud de arco** $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ como la aplicación

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| du = L_{t_0}^{t}(\alpha)$$

- Finalmente, es fácil ver que la reparametrización $\widetilde{\alpha}(s) = \alpha(h(s))$ es una curva p.p.a.

$$\|\widetilde{\alpha}'(s)\| = \|\alpha'(h(s))\| \, |h'(s)| = \|\alpha'(h(s))\| \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|} = 1$$

- Este teorema nos dice que **toda curva parametrizada regular siempre puede reparametrizarse por la longitud de arco.**

Teorema (**Existencia de p.p.a**)

Toda curva parametrizada regular admite una reparametrización por la longitud de arco con un cambio de parámetro que conserva la orientación.

Dem: Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular parametrizada con parámetro arbitrario t. Fijamos $t_0 \in I$ y consideremos la función **longitud de arco** $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ como la aplicación

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| du = L_{t_0}^{t}(\alpha)$$

- Finalmente, es fácil ver que la reparametrización $\widetilde{\alpha}(s) = \alpha(h(s))$ es una curva p.p.a.

$$\|\widetilde{\alpha}'(s)\| = \|\alpha'(h(s))\| \, |h'(s)| = \|\alpha'(h(s))\| \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|} = 1$$

- Este teorema nos dice que **toda curva parametrizada regular siempre puede reparametrizarse por la longitud de arco.**
- El **((problema))** radica en que, en la práctica, encontrar la reparametrización NO siempre es posible. Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO: [La catenaria] Halle el parámetro arco para la curva $\alpha(t) = (t, \cosh t)$.

SOL:

EJEMPLO: [La catenaria] Halle el parámetro arco para la curva $\alpha(t) = (t, \cosh t)$.

SOL: Un rápido cálculo permite obtener el que será el parámetro arco:

$$s = g(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)||du = \int_0^t \cosh u du = \sinh t$$

EJEMPLO: [La catenaria] Halle el parámetro arco para la curva $\alpha(t) = (t, \cosh t)$.

SOL: Un rápido cálculo permite obtener el que será el parámetro arco:

$$s = g(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)||du = \int_0^t \cosh u du = \sinh t$$

luego el cambio de parámetro que reparametriza a por la longitud de arco viene dado por

$$t = g^{-1} \equiv h(s) = \sinh\ ^{-1} s.$$

EJEMPLO: [La catenaria] Halle el parámetro arco para la curva $\alpha(t) = (t, \cosh t)$.

SOL: Un rápido cálculo permite obtener el que será el parámetro arco:

$$s = g(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t \cosh u du = \sinh t$$

luego el cambio de parámetro que reparametriza a por la longitud de arco viene dado por

$$t = g^{-1} \equiv h(s) = \sinh^{-1} s.$$

Por lo tanto,

$$\widetilde{\alpha}(s) = \alpha(h(s)) = (\sinh^{-1} s, \cosh(\sinh^{-1} s)) = (\sinh^{-1} s, \sqrt{1+s^2})$$

es la reparametrización por la longitud de arco de la catenaria, y $\widetilde{\alpha}$ es p.p.a

NOTA HISTÓRICA El problema de la **catenaria**, planteado durante el siglo XVII, consistía en determinar la forma que adoptaba una cadena o cuerda, suspendida por sus extremos y sometida a la acción de un campo gravitatorio uniforme, su peso. Los primeros físicos y matemáticos que abordaron el problema supusieron que la curva era una parábola, porque empíricamente la forma de la cuerda se parece mucho a una parábola, especialmente si se consideran longitudes pequeñas de cuerda. Pero fue Christian Huygens, a los 17 años, quien demostró que la curva no era realmente una parábola, sino sólo una curva parecida, aunque no encontró la ecuación de la catenaria.

Esta fue obtenida por Leibnitz, Huygens y Johann Bernoulli en 1691, en respuesta al desafío planteado por Jakob Bernoulli. Si se desarrolla en **Serie de Taylor** la función $\cosh t$, se obtiene

$$\cosh t = 1 + t^2 + O^4(t),$$

que corresponde a la ecuación de una parábola más un término de cuarto orden. Es por este motivo por el que las gráficas son tan parecidas en un entorno de cero. Una curva catenaria invertida es el trazado perfecto para un arco en la arquitectura, forma que fue aplicada, entre otros y fundamentalmente, por Gaudí, su descubridor. (**visitar La Sagrada Familia en Barcelona, España**)

EJEMPLO: [Circunferencia]: Halle el parámetro arco para la circunferencia $\alpha(t) = \mathbf{p} + (r\cos t, r\sin t)$.

SOL:

EJEMPLO: [Circunferencia]: Halle el parámetro arco para la circunferencia $\alpha(t) = \mathbf{p} + (r\cos t, r\sin t)$.

SOL: La reparametrización por arco es muy sencilla de obtener:

$$s = g(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)||du = \int_0^t r du = rt$$

EJEMPLO: [Circunferencia]: Halle el parámetro arco para la circunferencia $\alpha(t) = \mathbf{p} + (r\cos t, r\sin t)$.

SOL: La reparametrización por arco es muy sencilla de obtener:

$$s = g(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t r du = rt$$

luego el cambio de parámetro buscado es $t = g^{-1} \equiv h(s) = s/r$, y

$$\widetilde{\alpha}(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(\frac{s}{r}) = \mathbf{p} + \left(r\cos(\frac{s}{r}), r\sin(\frac{s}{r})\right)$$

es la reparametrización por la longitud de arco y $\widetilde{\alpha}$ es p.p.a

EJEMPLO: ¿Es posible encontrar el parámetro arco para la curva $\alpha(t) = (2\cos t, \sin t)$.?

SOL:

EJEMPLO: ¿Es posible encontrar el parámetro arco para la curva $\alpha(t) = (2\cos t, \sin t)$.?

SOL: NO. Observe que

$$s = g(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{4\sin^2 u + \cos^2 u}\, du = 2\int_0^t \sqrt{1 - \frac{3}{4}\cos^2 u}\, du$$

EJEMPLO: ¿Es posible encontrar el parámetro arco para la curva $\alpha(t) = (2\cos t, \sin t)$.?

SOL: NO. Observe que

$$s = g(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{4\sin^2 u + \cos^2 u}\, du = 2\int_0^t \sqrt{1 - \frac{3}{4}\cos^2 u}\, du$$

Luego NOOOO es posible dar explícitamente la reparametrización.

EJEMPLO: ¿Es posible encontrar el parámetro arco para la curva $\alpha(t) = (t, t^2)$.?

SOL:

EJEMPLO: ¿Es posible encontrar el parámetro arco para la curva $\alpha(t) = (t, t^2)$.?

SOL: NO. Observe que

$$\begin{aligned} s = g(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\|\,du &= \int_0^t \sqrt{1+4u^2}\,du \\ &= \frac{1}{4}\ln\left(2t + \sqrt{1+4t^2}\right) + \frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2} \end{aligned}$$

EJEMPLO: ¿Es posible encontrar el parámetro arco para la curva $\alpha(t) = (t, t^2)$.?

SOL: NO. Observe que

$$s = g(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)||du = \int_0^t \sqrt{1+4u^2}du$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left(2t + \sqrt{1+4t^2}\right) + \frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2}$$

sin embargo, es IMPOSIBLE despejar t en la ecuación anterior. Por tanto, tampoco puede darse explícitamente la reparametrización.

EJEMPLO: ¿Es posible encontrar el parámetro arco para la curva $\alpha(t) = (t, t^2)$.?

SOL: NO. Observe que

$$\begin{aligned} s = g(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)||du &= \int_0^t \sqrt{1+4u^2}du \\ &= \frac{1}{4} \ln\left(2t + \sqrt{1+4t^2}\right) + \frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2} \end{aligned}$$

sin embargo, es IMPOSIBLE despejar t en la ecuación anterior. Por tanto, tampoco puede darse explícitamente la reparametrización.

- Como hemos visto, **NO SIEMPRE** es factible reparametrizar una curva por la longitud de arco ((realmente, en la mayoría de los casos no va a ser posible)).

EJEMPLO: ¿Es posible encontrar el parámetro arco para la curva $\alpha(t) = (t, t^2)$.?

SOL: NO. Observe que

$$s = g(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\|du = \int_0^t \sqrt{1+4u^2}du$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left(2t + \sqrt{1+4t^2}\right) + \frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2}$$

sin embargo, es IMPOSIBLE despejar t en la ecuación anterior. Por tanto, tampoco puede darse explícitamente la reparametrización.

- Como hemos visto, **NO SIEMPRE** es factible reparametrizar una curva por la longitud de arco ((realmente, en la mayoría de los casos no va a ser posible)).
- Sin embargo, esto no plantea ningún inconveniente, pues es suficiente saber que, teóricamente, gracias al Teorema 8, siempre podemos suponer la curva p.p.a., lo que permite desarrollar la llamada **Teoría de curvas**.

El producto interno (antecedentes de álgebra lineal)

Revisemos rápidamente algunos datos básicos sobre el producto interno, las proyecciones y las bases ortonormales. Este material será necesario para interpretar la aceleración de una curva.

El producto interno (antecedentes de álgebra lineal)

Definición (Producto interno en $\mathbb{R}^n$)

El producto interno de un par de vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *(con componentes denotados por* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *e* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *es*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \in \mathbb{R}.$$

El producto interno (antecedentes de álgebra lineal)

Definición (Producto interno en $\mathbb{R}^n$)

El producto interno de un par de vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *(con componentes denotados por* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *e* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *es*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \in \mathbb{R}.$$

Lema (Propiedades algebraicas del producto interno)

Si $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ *y* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *entonces:*

1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ *(simétrica),*
2. $\langle \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \mu \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$
   $\langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} + \mu \mathbf{z} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \mu \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$ *(bilineal),*
3. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2$, *que es igual a cero solo si* $\mathbf{x} = 0$.
4. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leqslant |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leqslant \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|$ *(**la desigualdad de Schwarz**).*

El producto interno (antecedentes de álgebra lineal)

Definición (Producto interno en $\mathbb{R}^n$)

El producto interno de un par de vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *(con componentes denotados por* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *e* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *es*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \in \mathbb{R}.$$

Lema (Propiedades algebraicas del producto interno)

Si $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ *y* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*, entonces:*

1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ *(simétrica),*
2. $\langle \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \mu \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$
$\langle \mathbf{x}, \lambda\mathbf{y} + \mu\mathbf{z} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \mu \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$ *(bilineal),*
3. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}||^2$*, que es igual a cero solo si* $\mathbf{x} = 0$.
4. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leqslant |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leqslant \|\mathbf{x}|| \, \|\mathbf{y}||$ *(**la desigualdad de Schwarz**).*

El significado visual de $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ implica el ángulo, $\theta \in [0, \pi]$, entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}|| \, \|\mathbf{y}|| \cos(\theta). \tag{1}$$

El producto interno (antecedentes de álgebra lineal)

- $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ se denominan ortogonales si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

El producto interno (antecedentes de álgebra lineal)

- $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ se denominan ortogonales si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq 0$, ortogonal significa que $\theta = \pi/2$.

El producto interno (antecedentes de álgebra lineal)

- $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ se denominan ortogonales si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq 0$, ortogonal significa que $\theta = \pi/2$.
- $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ se denominan paralelas si una de ellas es un múltiplo escalar de la otra.

El producto interno (antecedentes de álgebra lineal)

- $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ se denominan ortogonales si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq 0$, ortogonal significa que $\theta = \pi/2$.
- $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ se denominan paralelas si una de ellas es un múltiplo escalar de la otra. Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq 0$, paralelo significa que $\theta = 0$ o $\theta = \pi$.

El producto interno (antecedentes de álgebra lineal)

- $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ se denominan ortogonales si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq 0$, ortogonal significa que $\theta = \pi/2$.
- $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ se denominan paralelas si una de ellas es un múltiplo escalar de la otra. Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq 0$, paralelo significa que $\theta = 0$ o $\theta = \pi$.
- El vector $\mathbf{0}$ es tanto ortogonal como paralelo a cualquier vector.

El producto interno (antecedentes de álgebra lineal)

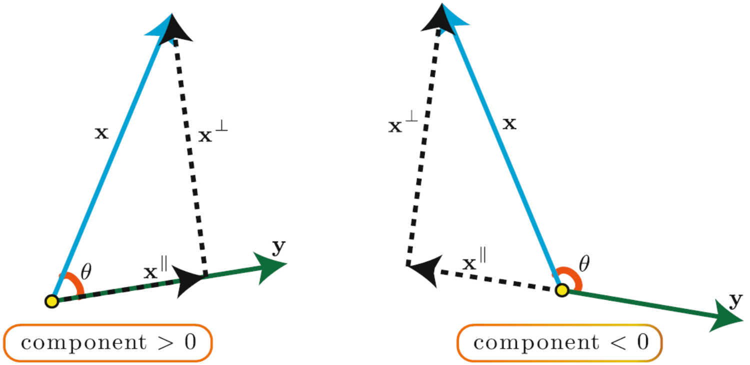
- $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ se denominan ortogonales si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq 0$, ortogonal significa que $\theta = \pi/2$.
- $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ se denominan paralelas si una de ellas es un múltiplo escalar de la otra. Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq 0$, paralelo significa que $\theta = 0$ o $\theta = \pi$.
- El vector $\mathbf{0}$ es tanto ortogonal como paralelo a cualquier vector.

El **producto interno** es útil para calcular **componentes** y **proyecciones** de vectores, definidos de la siguiente manera:

El producto interno (antecedentes de álgebra lineal)

- **x** e **y** se denominan ortogonales si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq 0$, ortogonal significa que $\theta = \pi/2$.
- **x** e **y** se denominan paralelas si una de ellas es un múltiplo escalar de la otra. Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq 0$, paralelo significa que $\theta = 0$ o $\theta = \pi$.
- El vector **0** es tanto ortogonal como paralelo a cualquier vector.

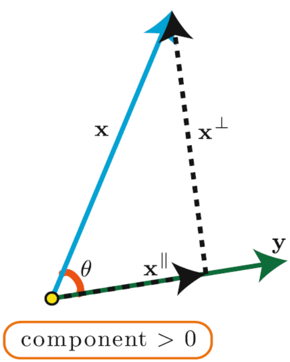
El **producto interno** es útil para calcular **componentes** y **proyecciones** de vectores, definidos de la siguiente manera:

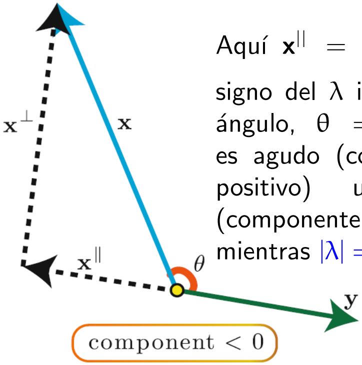


El producto interno (antecedentes de álgebra lineal)

- $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ se denominan ortogonales si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq 0$, ortogonal significa que $\theta = \pi/2$.
- $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ se denominan paralelas si una de ellas es un múltiplo escalar de la otra. Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq 0$, paralelo significa que $\theta = 0$ o $\theta = \pi$.
- El vector $\mathbf{0}$ es tanto ortogonal como paralelo a cualquier vector.

El **producto interno** es útil para calcular **componentes** y **proyecciones** de vectores, definidos de la siguiente manera:





Aquí $\mathbf{x}^{||} = \lambda \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$. El signo del λ indica si el ángulo, $\theta = \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, es agudo (componente positivo) u obtuso (componente negativo), mientras $|\lambda| = \|\mathbf{x}^{||}\|$.

Proposición (**Proyección x sobre vectores**)

Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *con* $\|\mathbf{y}|| \neq 0$, *entonces hay una única manera de escribir* $\mathbf{x}$ *como una suma de dos vectores:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{||} + \mathbf{x}^{\perp}$$

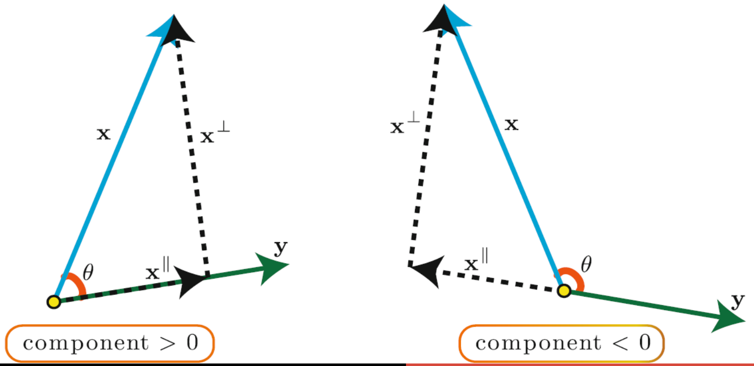
El vector $\mathbf{x}^{||}$ *se llama* **proyección** *de* $\mathbf{x}$ *en la dirección de* $\mathbf{y}$.

Proposición (Proyección x sobre vectores)

Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *con* $\|\mathbf{y}\| \neq 0$*, entonces hay una única manera de escribir* $\mathbf{x}$ *como una suma de dos vectores:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{||} + \mathbf{x}^{\perp}$$

El vector $\mathbf{x}^{||}$ *se llama* **proyección** *de* $\mathbf{x}$ *en la dirección de* $\mathbf{y}$*.*

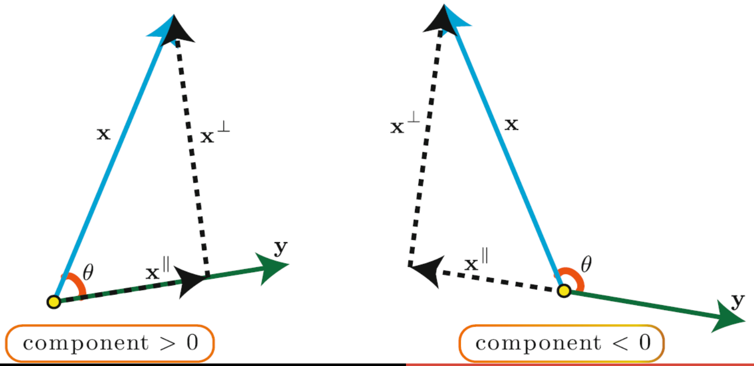


Proposición (Proyección x sobre vectores)

Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *con* $\|\mathbf{y}\| \neq 0$, *entonces hay una única manera de escribir* $\mathbf{x}$ *como una suma de dos vectores:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{||} + \mathbf{x}^{\perp} = \mathrm{Proy}_{\mathbf{y}}\mathbf{x} + \mathbf{x}^{\perp}$$

El vector $\mathbf{x}^{||}$ *se llama* **proyección** *de* $\mathbf{x}$ *en la dirección de* $\mathbf{y}$.

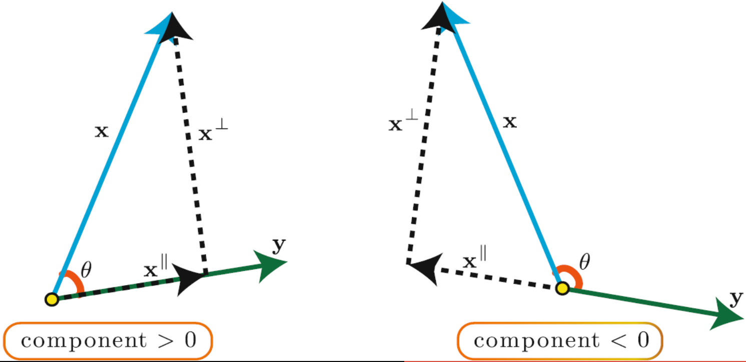


Proposición (**Proyección x sobre vectores**)

Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *con* $\|\mathbf{y}\| \neq 0$*, entonces hay una única manera de escribir* $\mathbf{x}$ *como una suma de dos vectores:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{||} + \mathbf{x}^{\perp} = \mathrm{Proy}_{\mathbf{y}}\mathbf{x} + \mathbf{x}^{\perp} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y} + \mathbf{x}^{\perp}$$

El vector $\mathbf{x}^{||}$ *se llama* **proyección** *de* $\mathbf{x}$ *en la dirección de* $\mathbf{y}$.

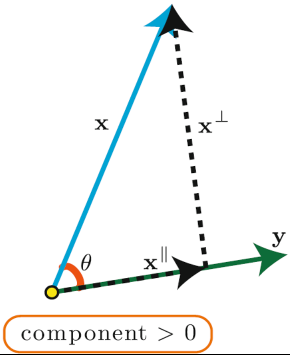


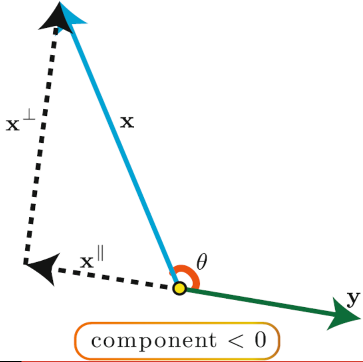
Proposición (Proyección x sobre vectores)

Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *con* $\|\mathbf{y}\| \neq 0$, *entonces hay una única manera de escribir* $\mathbf{x}$ *como una suma de dos vectores:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{||} + \mathbf{x}^{\perp} = \mathrm{Proy}_{\mathbf{y}}\mathbf{x} + \mathbf{x}^{\perp} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y} + \mathbf{x}^{\perp} = \lambda \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} + \mathbf{x}^{\perp}$$

El vector $\mathbf{x}^{||}$ *se llama* **proyección** *de* $\mathbf{x}$ *en la dirección de* $\mathbf{y}$.



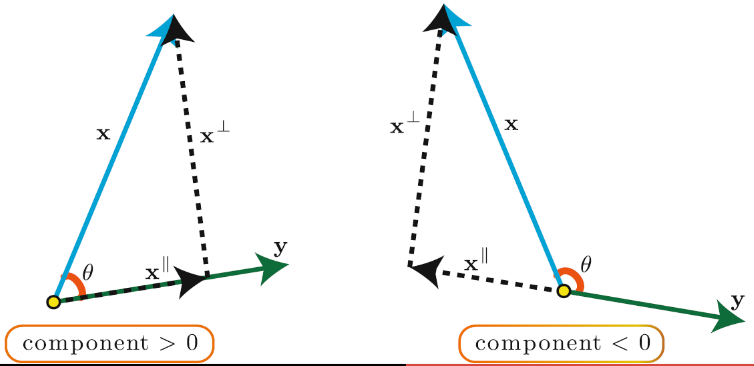


Proposición (Proyección x sobre vectores)

Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *con* $\|\mathbf{y}\| \neq 0$, *entonces hay una única manera de escribir* $\mathbf{x}$ *como una suma de dos vectores:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{||} + \mathbf{x}^{\perp} = \mathrm{Proy}_{\mathbf{y}}\mathbf{x} + \mathbf{x}^{\perp} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y} + \mathbf{x}^{\perp} = \lambda \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} + \mathbf{x}^{\perp}$$

El vector $\mathbf{x}^{||}$ *se llama* **proyección** *de* $\mathbf{x}$ *en la dirección de* $\mathbf{y}$. *El escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ *se llama* **componente** *de* $\mathbf{x}^{||}$ *en la dirección de* $\mathbf{y}$.



Proposición (Proyección x sobre vectores)

Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *con* $\|\mathbf{y}\| \neq 0$*, entonces hay una única manera de escribir* $\mathbf{x}$ *como una suma de dos vectores:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{||} + \mathbf{x}^{\perp} = \mathrm{Proy}_{\mathbf{y}}\mathbf{x} + \mathbf{x}^{\perp} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y} + \mathbf{x}^{\perp} = \lambda \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} + \mathbf{x}^{\perp}$$

El vector $\mathbf{x}^{||}$ *se llama* **proyección** *de* $\mathbf{x}$ *en la dirección de* $\mathbf{y}$*. El escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ *se llama* **componente** *de* $\mathbf{x}^{||}$ *en la dirección de* $\mathbf{y}$*.*

Proposición (Proyección x sobre vectores)

Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *con* $\|\mathbf{y}\| \neq 0$*, entonces hay una única manera de escribir* $\mathbf{x}$ *como una suma de dos vectores:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{||} + \mathbf{x}^{\perp} = \mathrm{Proy}_{\mathbf{y}}\mathbf{x} + \mathbf{x}^{\perp} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y} + \mathbf{x}^{\perp} = \lambda \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} + \mathbf{x}^{\perp}$$

El vector $\mathbf{x}^{||}$ *se llama* **proyección** *de* $\mathbf{x}$ *en la dirección de* $\mathbf{y}$*. El escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ *se llama* **componente** *de* $\mathbf{x}^{||}$ *en la dirección de* $\mathbf{y}$*.*

DEM: Debemos demostrar que existe un único valor $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que si definimos

$$\mathbf{x}^{||} = \lambda \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} \qquad\qquad \mathbf{x}^{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{||}$$

entonces $\mathbf{x}^{\perp}$ es ortogonal a $\mathbf{y}$.

Proposición (Proyección x sobre vectores)

Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *con* $\|\mathbf{y}\| \neq 0$*, entonces hay una única manera de escribir* $\mathbf{x}$ *como una suma de dos vectores:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{||} + \mathbf{x}^{\perp} = \mathrm{Proy}_{\mathbf{y}}\mathbf{x} + \mathbf{x}^{\perp} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y} + \mathbf{x}^{\perp} = \lambda \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} + \mathbf{x}^{\perp}$$

El vector $\mathbf{x}^{||}$ *se llama* **proyección** *de* $\mathbf{x}$ *en la dirección de* $\mathbf{y}$*. El escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ *se llama* **componente** *de* $\mathbf{x}^{||}$ *en la dirección de* $\mathbf{y}$*.*

DEM: Debemos demostrar que existe un único valor $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que si definimos

$$\mathbf{x}^{||} = \lambda \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} \qquad \mathbf{x}^{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{||}$$

entonces $\mathbf{x}^{\perp}$ es ortogonal a $\mathbf{y}$. Es decir, hallemos λ el cual satisface la ecuación:

$$0 = \langle \mathbf{x}^{\perp}, \mathbf{y} \rangle = \left\langle \mathbf{x} - \lambda \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}, \mathbf{y} \right\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \frac{\lambda}{\|\mathbf{y}\|} \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \lambda \|\mathbf{y}\|.$$

Proposición (**Proyección x sobre vectores**)

Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *con* $\|\mathbf{y}\| \neq 0$*, entonces hay una única manera de escribir* $\mathbf{x}$ *como una suma de dos vectores:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{||} + \mathbf{x}^{\perp} = \mathrm{Proy}_{\mathbf{y}}\mathbf{x} + \mathbf{x}^{\perp} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y} + \mathbf{x}^{\perp} = \lambda \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} + \mathbf{x}^{\perp}$$

El vector $\mathbf{x}^{||}$ *se llama* **proyección** *de* $\mathbf{x}$ *en la dirección de* $\mathbf{y}$*. El escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ *se llama* **componente** *de* $\mathbf{x}^{||}$ *en la dirección de* $\mathbf{y}$*.*

DEM: Debemos demostrar que existe un único valor $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que si definimos

$$\mathbf{x}^{||} = \lambda \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} \qquad\qquad \mathbf{x}^{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{||}$$

entonces $\mathbf{x}^{\perp}$ es ortogonal a $\mathbf{y}$. Es decir, hallemos λ el cual satisface la ecuación:

$$0 = \langle \mathbf{x}^{\perp}, \mathbf{y}\rangle = \left\langle \mathbf{x} - \lambda\frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}, \mathbf{y}\right\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle - \frac{\lambda}{\|\mathbf{y}\|}\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle - \lambda\|\mathbf{y}\|.$$

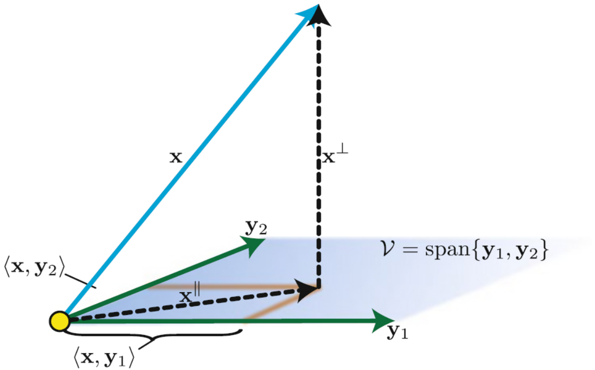
la única solución es $\lambda = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{y}\|}$ ■

Proposición (Proyección de x sobre subespacios)

Si $\mathbb{V}^k \subset \mathbb{R}^n$ *es un k-subespacio de* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, *entonces hay una única manera de escribir* $\mathbf{x}$ *como suma de dos vectores:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{||} + \mathbf{x}^{\perp},$$

donde $\mathbf{x}^{||} \in \mathbb{V}$ *y* $\mathbf{x}^{\perp} \in \mathbb{V}^{\perp}$.

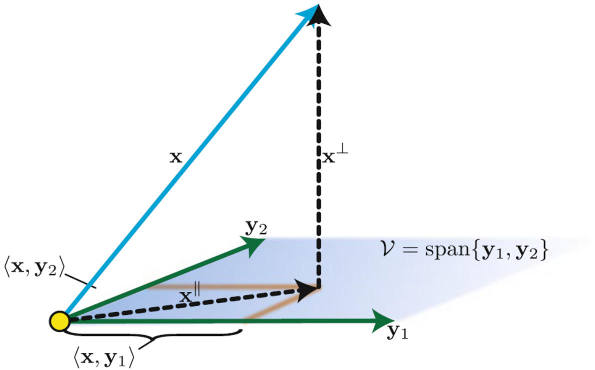


Proposición (Proyección de x sobre subespacios)

Si $\mathbb{V}^k \subset \mathbb{R}^n$ *es un k-subespacio de* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$*, entonces hay una única manera de escribir* $\mathbf{x}$ *como suma de dos vectores:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{||} + \mathbf{x}^{\perp},$$

donde $\mathbf{x}^{||} \in \mathbb{V}$ *y* $\mathbf{x}^{\perp} \in \mathbb{V}^{\perp}$*. El primer vector,* $\mathbf{x}^{||} := \mathrm{Proy}_{\mathbb{V}}\mathbf{x}$*.*



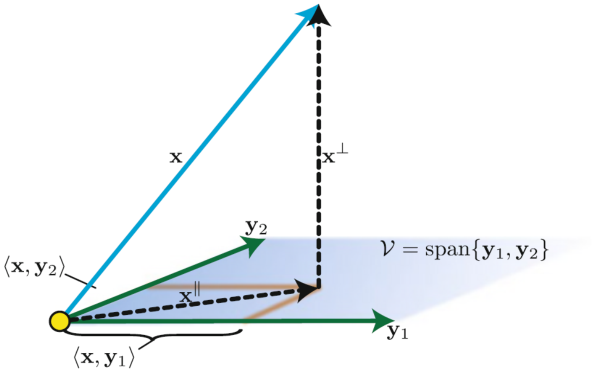
Proposición (Proyección de x sobre subespacios)

Si $\mathbb{V}^k \subset \mathbb{R}^n$ *es un k-subespacio de* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$*, entonces hay una única manera de escribir* $\mathbf{x}$ *como suma de dos vectores:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{||} + \mathbf{x}^{\perp},$$

donde $\mathbf{x}^{||} \in \mathbb{V}$ *y* $\mathbf{x}^{\perp} \in \mathbb{V}^{\perp}$*. El primer vector,* $\mathbf{x}^{||} := \mathrm{Proy}_{\mathbb{V}}\mathbf{x}$*. Si* $\mathcal{B} = \{\mathbf{y}_1, \ldots, y_k\}$ *es una base ortonormal de* $\mathbb{V}$*, entonces*

$$\mathbf{x}^{||} = \lambda_1 \mathbf{y}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{y}_k, \qquad \textit{donde} \qquad \lambda_i = \left\langle \mathbf{x}^{||}, \mathbf{y}_i \right\rangle$$



Proposición (Proyección de x sobre subespacios)

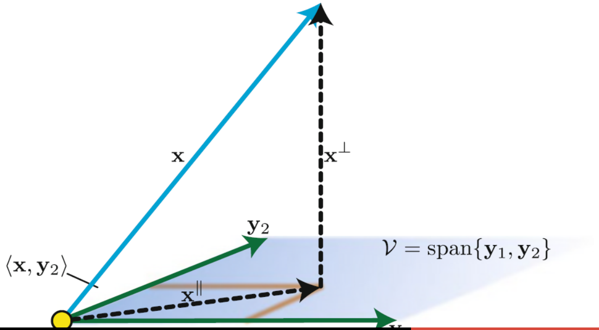
Si $\mathbb{V}^k \subset \mathbb{R}^n$ *es un k-subespacio de* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$*, entonces hay una única manera de escribir* $\mathbf{x}$ *como suma de dos vectores:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{||} + \mathbf{x}^{\perp},$$

donde $\mathbf{x}^{||} \in \mathbb{V}$ *y* $\mathbf{x}^{\perp} \in \mathbb{V}^{\perp}$*. El primer vector,* $\mathbf{x}^{||} := \mathrm{Proy}_{\mathbb{V}}\mathbf{x}$*. Si* $\mathcal{B} = \{\mathbf{y}_1, \ldots, y_k\}$ *es una base ortonormal de* $\mathbb{V}$*, entonces*

$$\mathbf{x}^{||} = \lambda_1 \mathbf{y}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{y}_k, \qquad \textit{donde} \qquad \lambda_i = \left\langle \mathbf{x}^{||}, \mathbf{y}_i \right\rangle$$

Nótese que los **coeficientes** $\lambda_i = \left\langle \mathbf{x}^{||}, \mathbf{y}_i \right\rangle$ *son los componentes de* $\mathbf{x}^{||}$ *en las direcciones de los miembros de* $\mathbb{V}$*.*



Proposición (**Proyección de x sobre subespacios**)

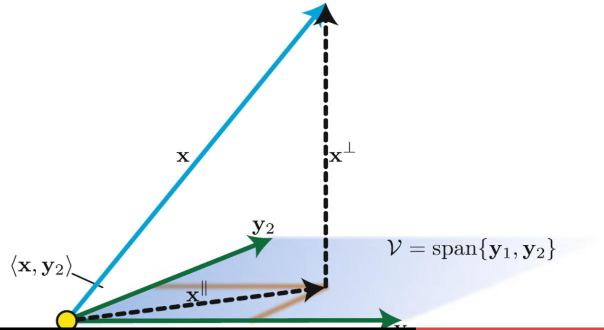
Si $\mathbb{V}^k \subset \mathbb{R}^n$ *es un k-subespacio de* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$*, entonces hay una única manera de escribir* $\mathbf{x}$ *como suma de dos vectores:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{||} + \mathbf{x}^{\perp},$$

donde $\mathbf{x}^{||} \in \mathbb{V}$ *y* $\mathbf{x}^{\perp} \in \mathbb{V}^{\perp}$*. El primer vector,* $\mathbf{x}^{||} := \mathrm{Proy}_{\mathbb{V}}\mathbf{x}$*. Si* $\mathcal{B} = \{\mathbf{y}_1, \ldots, y_k\}$ *es una base ortonormal de* $\mathbb{V}$*, entonces*

$$\mathbf{x}^{||} = \lambda_1 \mathbf{y}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{y}_k, \qquad donde \qquad \lambda_i = \left\langle \mathbf{x}^{||}, \mathbf{y}_i \right\rangle$$

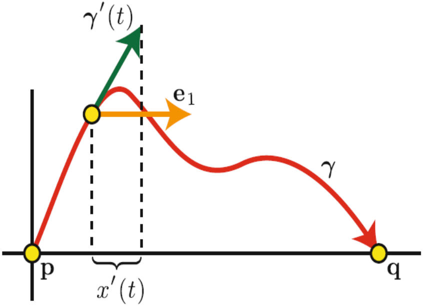
Nótese que los **coeficientes** $\lambda_i = \left\langle \mathbf{x}^{||}, \mathbf{y}_i \right\rangle$ *son los componentes de* $\mathbf{x}^{||}$ *en las direcciones de los miembros de* $\mathbb{V}$*.*

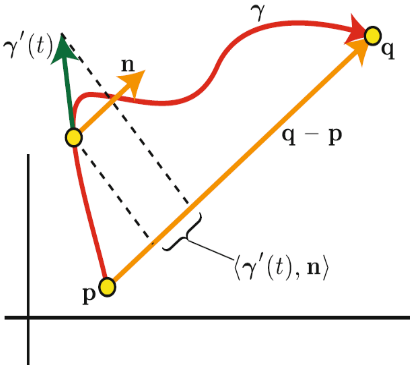


Aunque la **b.o.n**, a menudo es ventajoso elegir vectores **adaptados al problema**. El siguiente ejemplo es una muestra.

EJEMPLO:(El camino más corto entre dos puntos)

Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva. Definamos $\mathbf{p} = \gamma(a)$ y $\mathbf{q} = \gamma(b)$, y sea L la longitud de arco de γ.

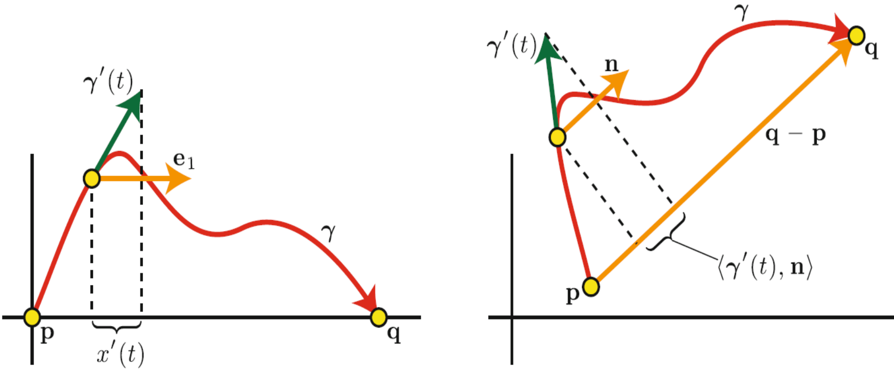




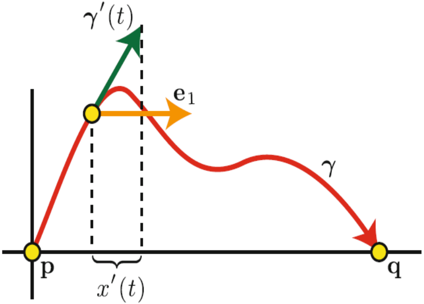
EJEMPLO:(El camino más corto entre dos puntos)

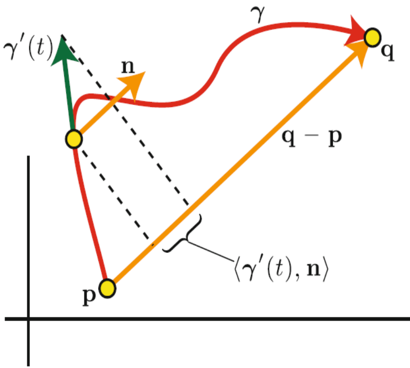
Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva. Definamos $\mathbf{p} = \gamma(a)$ y $\mathbf{q} = \gamma(b)$, y sea L la longitud de arco de γ. Como la línea recta entre estos puntos tiene una longitud de arco $\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|$, nuestro objetivo es demostrar que

$$L \geqslant \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|.$$

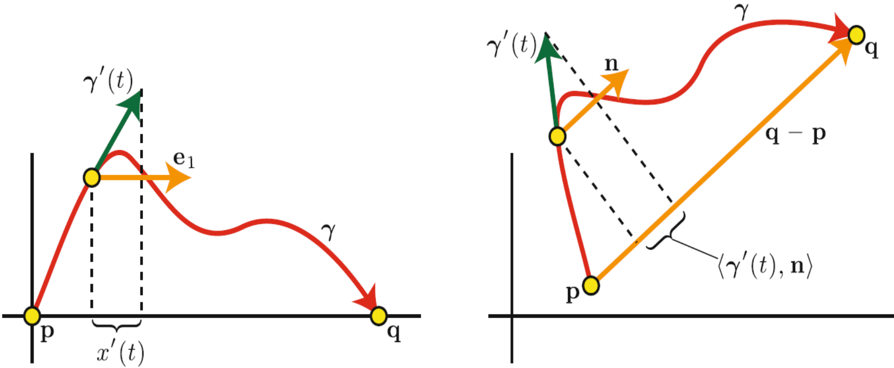


Para entrar en materia, primero consideraremos el caso especial en el que $n = 2$, $\mathbf{p} = (0,0)$ y $\mathbf{q} = (5,0)$. Denotando los componentes por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, tenemos





Para entrar en materia, primero consideraremos el caso especial en el que $n = 2$, $\mathbf{p} = (0,0)$ y $\mathbf{q} = (5,0)$. Denotando los componentes por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, tenemos



$$L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \geqslant \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + 0} dt$$
$$= \int_a^b |x'(t)| dt \geqslant \int_a^b x'(t) dt = x(t)\Big|_a^b = x(b) - x(a) = 5 - 0 = 5.$$

Para el caso general, lo ideal será considerar la dirección del vector unitario $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{q} - \mathbf{p}}{\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|}$.

Para el caso general, lo ideal será considerar la dirección del vector unitario $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{q}-\mathbf{p}}{\|\mathbf{q}-\mathbf{p}\|}$. Ahora observe el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned}
L &= \int_a^b |\gamma'(t)|dt \\
&= \underbrace{\int_a^b \|\gamma'(t)\| \, \|\mathbf{n}\| dt \geqslant \int_a^b \langle \gamma'(t), \mathbf{n} \rangle dt}_{\text{Desigualdad de Schwarz}} = \int_a^b \frac{d}{dt} \langle \gamma(t), \mathbf{n} \rangle \, dt \\
&= \langle \gamma(t), \mathbf{n} \rangle \Big|_a^b = \langle \gamma(b), \mathbf{n} \rangle - \langle \gamma(a), \mathbf{n} \rangle = \langle \gamma(b) - \gamma(a), \mathbf{n} \rangle = \left\langle \mathbf{q}-\mathbf{p}, \frac{\mathbf{q}-\mathbf{p}}{\|\mathbf{q}-\mathbf{p}\|} \right\rangle \\
&= \|\mathbf{q}-\mathbf{p}\|.
\end{aligned}$$

Para el caso general, lo ideal será considerar la dirección del vector unitario $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{q}-\mathbf{p}}{\|\mathbf{q}-\mathbf{p}\|}$. Ahora observe el siguiente razonamiento:

$$
\begin{aligned}
L &= \int_a^b |\gamma'(t)|dt \\
&= \underbrace{\int_a^b \|\gamma'(t)\| \, \|\mathbf{n}\| dt \geqslant \int_a^b \langle \gamma'(t), \mathbf{n} \rangle dt}_{\text{Desigualdad de Schwarz}} = \int_a^b \frac{d}{dt} \langle \gamma(t), \mathbf{n} \rangle \, dt \\
&= \langle \gamma(t), \mathbf{n} \rangle \Big|_a^b = \langle \gamma(b), \mathbf{n} \rangle - \langle \gamma(a), \mathbf{n} \rangle = \langle \gamma(b) - \gamma(a), \mathbf{n} \rangle = \left\langle \mathbf{q}-\mathbf{p}, \frac{\mathbf{q}-\mathbf{p}}{\|\mathbf{q}-\mathbf{p}\|} \right\rangle \\
&= \|\mathbf{q}-\mathbf{p}\|.
\end{aligned}
$$

En el I caso, tenemos $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$, y la lógica de nuestra prueba general se reducen a las del caso especial; véase la figura.

Para el caso general, lo ideal será considerar la dirección del vector unitario $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{q}-\mathbf{p}}{\|\mathbf{q}-\mathbf{p}\|}$. Ahora observe el siguiente razonamiento:

$$
\begin{aligned}
L &= \int_a^b |\gamma'(t)| dt \\
&= \underbrace{\int_a^b \|\gamma'(t)\| \, \|\mathbf{n}\| dt \geqslant \int_a^b \langle \gamma'(t), \mathbf{n} \rangle dt}_{\text{Desigualdad de Schwarz}} = \int_a^b \frac{d}{dt} \langle \gamma(t), \mathbf{n} \rangle \, dt \\
&= \langle \gamma(t), \mathbf{n} \rangle \Big|_a^b = \langle \gamma(b), \mathbf{n} \rangle - \langle \gamma(a), \mathbf{n} \rangle = \langle \gamma(b) - \gamma(a), \mathbf{n} \rangle = \left\langle \mathbf{q}-\mathbf{p}, \frac{\mathbf{q}-\mathbf{p}}{\|\mathbf{q}-\mathbf{p}\|} \right\rangle \\
&= \|\mathbf{q}-\mathbf{p}\|.
\end{aligned}
$$

En el I caso, tenemos $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 = (1,0)$, y la lógica de nuestra prueba general se reducen a las del caso especial; véase la figura.

Lo anterior es un pequeño ejemplo de una técnica generalmente útil: utilizar un **vector unitario adaptado al problema en cuestión** ((o un conjunto ortonormal de vectores).

$\boxed{\textbf{Aceleración:}}$ Interpretamos la segunda derivada de una curva regular como **aceleración**.

Aceleración: Interpretamos la segunda derivada de una curva regular como **aceleración**. Supongamos que $\gamma : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ es una curva regular.

$$\mathbf{v}(t) = \gamma'(t) \qquad \textbf{(la función de velocidad)} \tag{2}$$

$$\mathbf{a}(t) = \gamma''(t) \qquad \textbf{(la función de aceleración)} \tag{3}$$

$\boxed{\textbf{Aceleración:}}$ Interpretamos la segunda derivada de una curva regular como **aceleración**. Supongamos que $\gamma : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ es una curva regular.

$$\mathbf{v}(t) = \gamma'(t) \qquad \textbf{(la función de velocidad)} \tag{2}$$
$$\mathbf{a}(t) = \gamma''(t) \qquad \textbf{(la función de aceleración)} \tag{3}$$

Ya sabemos que el término "**velocidad**" es apropiado, porque $\mathbf{v}(t)$ codifica la dirección y la velocidad del movimiento.

Aceleración: Interpretamos la segunda derivada de una curva regular como **aceleración**. Supongamos que $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva regular.

$$\mathbf{v}(t) = \gamma'(t) \qquad \textbf{(la función de velocidad)} \tag{2}$$

$$\mathbf{a}(t) = \gamma''(t) \qquad \textbf{(la función de aceleración)} \tag{3}$$

Ya sabemos que el término “**velocidad**” es apropiado, porque $\mathbf{v}(t)$ codifica la dirección y la velocidad del movimiento.

¿Por qué es apropiado el término “**aceleración**” y cómo visualizamos $\mathbf{a}(t)$?

Aceleración: Interpretamos la segunda derivada de una curva regular como **aceleración**. Supongamos que $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva regular.

$$\mathbf{v}(t) = \gamma'(t) \qquad \textbf{(la función de velocidad)} \tag{2}$$
$$\mathbf{a}(t) = \gamma''(t) \qquad \textbf{(la función de aceleración)} \tag{3}$$

Ya sabemos que el término "**velocidad**" es apropiado, porque $\mathbf{v}(t)$ codifica la dirección y la velocidad del movimiento.

¿Por qué es apropiado el término "**aceleración**" y cómo visualizamos $\mathbf{a}(t)$?

La interpretación física de $\mathbf{a}(t)$ proviene de la versión vectorial de la ley de Newton:

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t),$$

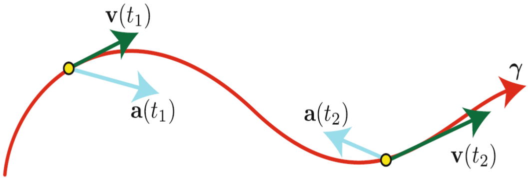
donde m es la masa del objeto y $\mathbf{F}(t)$ es la fuerza de valor vectorial que actúa sobre el objeto en el tiempo t. Supongamos, para simplificar, que $m = 1$.

Aceleración: Interpretamos la segunda derivada de una curva regular como **aceleración**. Supongamos que $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva regular.

$$\mathbf{v}(t) = \gamma'(t) \qquad \textbf{(la función de velocidad)} \qquad (2)$$
$$\mathbf{a}(t) = \gamma''(t) \qquad \textbf{(la función de aceleración)} \qquad (3)$$

Ya sabemos que el término "**velocidad**" es apropiado, porque $\mathbf{v}(t)$ codifica la dirección y la velocidad del movimiento.

¿Por qué es apropiado el término "**aceleración**" y cómo visualizamos $\mathbf{a}(t)$?



Si dibujamos $\mathbf{a}(t)$ con su cola en $\gamma(t)$, entonces podemos visualizar $\mathbf{a}(t)$ como el vector de fuerza que tira del objeto para que siga la trayectoria que sigue.

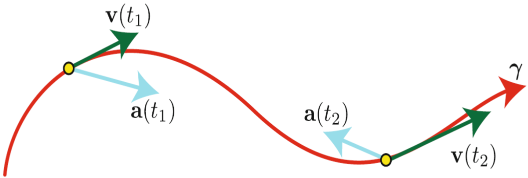
Aceleración: Interpretamos la segunda derivada de una curva regular como **aceleración**. Supongamos que $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva regular.

$$\mathbf{v}(t) = \gamma'(t) \qquad \textbf{(la función de velocidad)} \tag{2}$$

$$\mathbf{a}(t) = \gamma''(t) \qquad \textbf{(la función de aceleración)} \tag{3}$$

Ya sabemos que el término "**velocidad**" es apropiado, porque $\mathbf{v}(t)$ codifica la dirección y la velocidad del movimiento.

¿Por qué es apropiado el término "**aceleración**" y cómo visualizamos $\mathbf{a}(t)$?



Por ejemplo, en la figura,

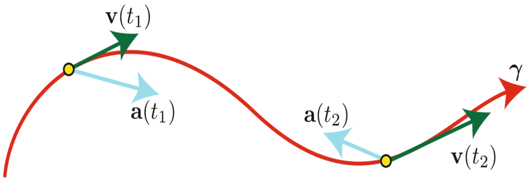
Si dibujamos $\mathbf{a}(t)$ con su cola en $\gamma(t)$, entonces podemos visualizar $\mathbf{a}(t)$ como el vector de fuerza que tira del objeto para que siga la trayectoria que sigue.

Aceleración: Interpretamos la segunda derivada de una curva regular como **aceleración**. Supongamos que $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva regular.

$$\mathbf{v}(t) = \gamma'(t) \qquad \textbf{(la función de velocidad)} \tag{2}$$
$$\mathbf{a}(t) = \gamma''(t) \qquad \textbf{(la función de aceleración)} \tag{3}$$

Ya sabemos que el término "**velocidad**" es apropiado, porque $\mathbf{v}(t)$ codifica la dirección y la velocidad del movimiento.

¿Por qué es apropiado el término "**aceleración**" y cómo visualizamos $\mathbf{a}(t)$?



Si dibujamos $\mathbf{a}(t)$ con su cola en $\gamma(t)$, entonces podemos visualizar $\mathbf{a}(t)$ como el vector de fuerza que tira del objeto para que siga la trayectoria que sigue.

Por ejemplo, en la figura,

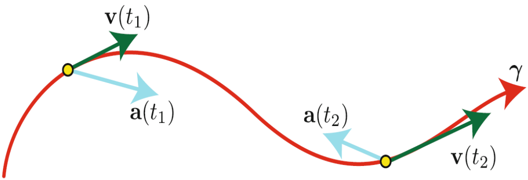
- El objeto está **acelerando** en el tiempo t_1, porque $\mathbf{a}(t_1)$ forma un ángulo agudo con $\mathbf{v}(t_1)$, por lo que la fuerza tira aproximadamente en la dirección del movimiento.

Aceleración: Interpretamos la segunda derivada de una curva regular como **aceleración**. Supongamos que $\gamma : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ es una curva regular.

$$\mathbf{v}(t) = \gamma'(t) \qquad \textbf{(la función de velocidad)} \qquad (2)$$
$$\mathbf{a}(t) = \gamma''(t) \qquad \textbf{(la función de aceleración)} \qquad (3)$$

Ya sabemos que el término "**velocidad**" es apropiado, porque $\mathbf{v}(t)$ codifica la dirección y la velocidad del movimiento.

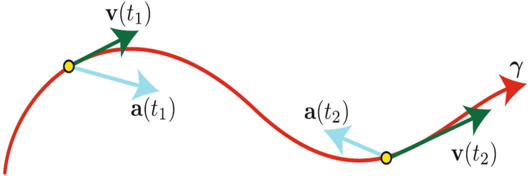
¿Por qué es apropiado el término "**aceleración**" y cómo visualizamos $\mathbf{a}(t)$?



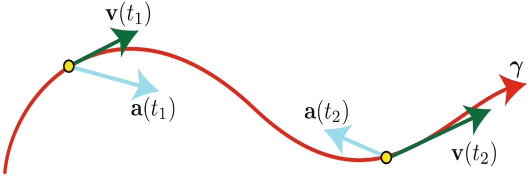
Si dibujamos $\mathbf{a}(t)$ con su cola en $\gamma(t)$, entonces podemos visualizar $\mathbf{a}(t)$ como el vector de fuerza que tira del objeto para que siga la trayectoria que sigue.

Por ejemplo, en la figura,

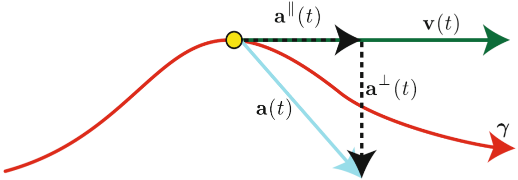
- El objeto está **desacelerando** en el tiempo t_2, porque $\mathbf{a}(t_2)$ forma un ángulo obtuso con $\mathbf{v}(t_2)$, por lo que tenemos una fuerza de arrastre que tira aproximadamente en contra del movimiento.



En ambos momentos, t_1, y t_2 de la figura, $a(t)$ **apunta en la dirección en la que se curva la trayectoria por ende debe haber un vector-fuerza para hacer que el objeto siga la trayectoria que está siguiendo.**

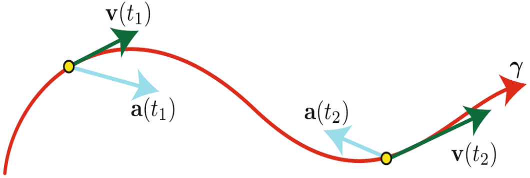


En ambos momentos, t_1, y t_2 de la figura, **$a(t)$ apunta en la dirección en la que se curva la trayectoria por ende debe haber un vector-fuerza para hacer que el objeto siga la trayectoria que está siguiendo.**

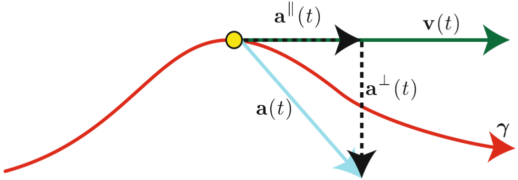


Por ser un vector-Fuerza podemos considerar la siguiente descomposición.

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}^{||}(t) + \mathbf{a}^{\perp}(t)$$



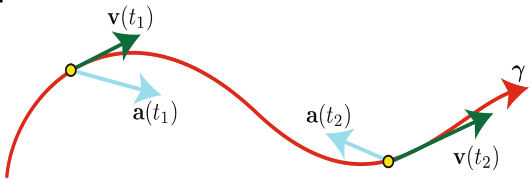
En ambos momentos, t_1, y t_2 de la figura, **$\mathbf{a}(t)$ apunta en la dirección en la que se curva la trayectoria por ende debe haber un vector-fuerza para hacer que el objeto siga la trayectoria que está siguiendo.**



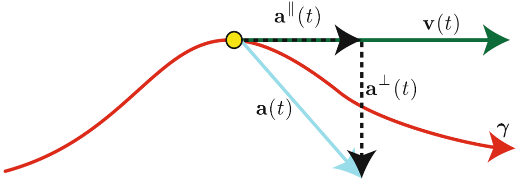
Por ser un vector-Fuerza podemos considerar la siguiente descomposición.

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}^{||}(t) + \mathbf{a}^{\perp}(t)$$

Interpretamos el significado geométrico de $\mathbf{a}^{||}(t)$ y $\mathbf{a}^{\perp}(t)$.



En ambos momentos, t_1, y t_2 de la figura, **$a(t)$ apunta en la dirección en la que se curva la trayectoria por ende debe haber un vector-fuerza para hacer que el objeto siga la trayectoria que está siguiendo.**

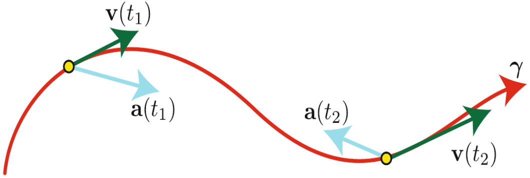


Por ser un vector-Fuerza podemos considerar la siguiente descomposición.

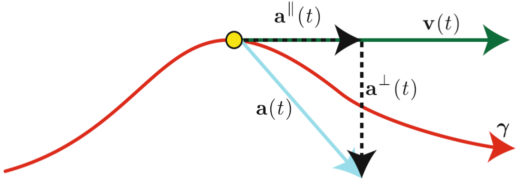
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}^{||}(t) + \mathbf{a}^{\perp}(t)$$

Interpretamos el significado geométrico de $\mathbf{a}^{||}(t)$ y $\mathbf{a}^{\perp}(t)$.

- $\mathbf{a}^{||}(t)$ es la parte del vector de fuerza que **tira a favor o en contra** de la dirección del movimiento, lo que debería cambiar la velocidad del objeto.



En ambos momentos, t_1, y t_2 de la figura, **$\mathbf{a}(t)$ apunta en la dirección en la que se curva la trayectoria por ende debe haber un vector-fuerza para hacer que el objeto siga la trayectoria que está siguiendo.**



Por ser un vector-Fuerza podemos considerar la siguiente descomposición.

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}^{||}(t) + \mathbf{a}^{\perp}(t)$$

Interpretamos el significado geométrico de $\mathbf{a}^{||}(t)$ y $\mathbf{a}^{\perp}(t)$.

- $\mathbf{a}^{||}(t)$ es la parte del vector de fuerza que **tira a favor o en contra** de la dirección del movimiento, lo que debería cambiar la velocidad del objeto.
- De hecho, el signo de la longitud $\mathbf{a}^{||}(t)$ es igual a la tasa de cambio de la velocidad:

Proposición

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{v}(t)\| = \frac{\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{v}(t)\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|} =$$ *el componente de* $\mathbf{a}(t)$ *en la dirección de* $\mathbf{v}(t)$.

DEM:

$\blacksquare$

Proposición

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{v}(t)\| = \frac{\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{v}(t)\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|} = \textit{el componente de } \mathbf{a}(t) \textit{ en la dirección de } \mathbf{v}(t).$$

DEM: Primero confirmemos por que es la "**componente**". Recordemos que

$$\mathbf{a}^{||} = \mathrm{Proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|}\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

■

Proposición

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{v}(t)\| = \frac{\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{v}(t)\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|} = \textit{el componente de } \mathbf{a}(t) \textit{ en la dirección de } \mathbf{v}(t).$$

DEM: Primero confirmemos por que es la "**componente**". Recordemos que

$$\mathbf{a}^{||} = \mathrm{Proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|}\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

Por ende, $\dfrac{\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{v}(t)\rangle}{|\mathbf{v}(t)|}$ es la componente de $\mathbf{a}(t)$ en la dirección (unitaria) de $\mathbf{v}(t)$.

$\blacksquare$

Proposición

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{v}(t)\| = \frac{\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{v}(t)\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|} = \textit{el componente de } \mathbf{a}(t) \textit{ en la dirección de } \mathbf{v}(t).$$

DEM: Primero confirmemos por que es la "**componente**". Recordemos que

$$\mathbf{a}^{||} = \mathrm{Proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|}\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

Por ende, $\frac{\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{v}(t)\rangle}{|\mathbf{v}(t)|}$ es la componente de $\mathbf{a}(t)$ en la dirección (unitaria) de $\mathbf{v}(t)$. Por otra parte

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{v}(t)\| = \frac{d}{dt}\langle \mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t)\rangle^{1/2} = \frac{1}{2}\langle \mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t)\rangle^{-1/2}\Big(\langle \mathbf{v}'(t), \mathbf{v}(t)\rangle + \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{v}'(t)\rangle$$

$$= \frac{2\langle \mathbf{v}'(t), \mathbf{v}(t)\rangle}{2\langle \mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t)\rangle^{1/2}} = \frac{\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{v}(t)\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|}.$$

■

NOTA: Solo queda interpretar geométricamente $\mathbf{a}^{\perp}(t)$, **que es aproximadamente la parte del vector-fuerza que altera la dirección en la que se mueve el objeto.**

NOTA: Solo queda interpretar geométricamente $\mathbf{a}^{\perp}(t)$, **que es aproximadamente la parte del vector-fuerza que altera la dirección en la que se mueve el objeto.** Intuitivamente, $\left\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\right\|$ debería ser mayor cuando:

NOTA: Solo queda interpretar geométricamente $\mathbf{a}^{\perp}(t)$, **que es aproximadamente la parte del vector-fuerza que altera la dirección en la que se mueve el objeto.** Intuitivamente, $\left\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\right\|$ debería ser mayor cuando:

- la traza del objeto se curva más pronunciadamente.

NOTA: Solo queda interpretar geométricamente $\mathbf{a}^{\perp}(t)$, **que es aproximadamente la parte del vector-fuerza que altera la dirección en la que se mueve el objeto.** Intuitivamente, $\left\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\right\|$ debería ser mayor cuando:

- la traza del objeto se curva más pronunciadamente.
- el objeto se mueve más rápido.

NOTA: Solo queda interpretar geométricamente $\mathbf{a}^{\perp}(t)$, **que es aproximadamente la parte del vector-fuerza que altera la dirección en la que se mueve el objeto.** Intuitivamente, $\left\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\right\|$ debería ser mayor cuando:

- la traza del objeto se curva más pronunciadamente.
- el objeto se mueve más rápido.

Para terminar esta historia, separaremos estos dos efectos para obtener una **medición** la cual deberá ser invariante a la rapidez con que se recorre la traza y de cuán pronunciada se curva la traza.