Curvas

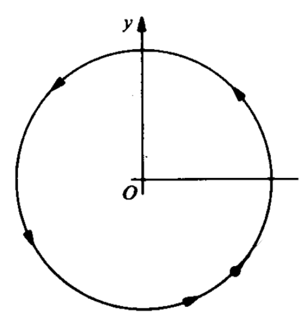
La educación no es llenar un cubo, sino encender un fuego. (William Butler Yeats)

Empecemos estudiando el concepto de curvas en el plano y en el espacio, y analicemos las diferencias existentes en ambos ambientes: una curva en el espacio tiene más libertad de movimiento y, por ende, su estudio es más complejo.

Curvas parametrizadas, Longitud de curva

Una primera idea intuitiva de curva es verla como la "*trayectoria de una partícula*", lo cual nos ofrece una primera aproximación a una definición **geométrica** de curva. También podemos definir una curva como "*una aplicación que, en cada instante de tiempo, da una posición en el espacio*". Esta última idea engloba algo más que la mera trayectoria o traza, pues encierra a su vez las nociones de **curva orientada** y de **velocidad de la curva**.

Ejemplo 1. Consideremos la aplicaciones $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $\beta(t) = (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t))$ y $C(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$ ¿Que información proporciona estas aplicaciones así definidas?

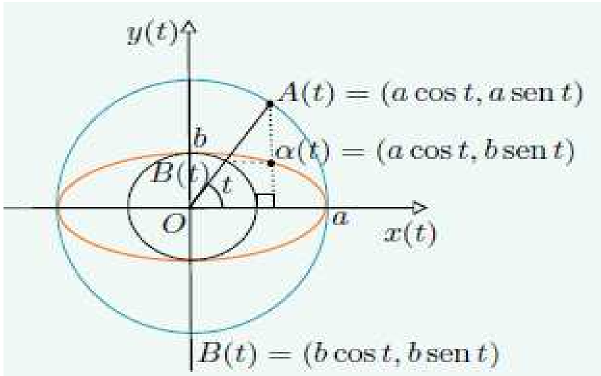


- TODAS son circunferencias con centro el origen de coordenadas 0 y radio 1. Esa sería su traza.
- Para α partimos del punto $(1, 0)$ (cuando $t = 0$), la recorremos en el sentido contrario a las agujas del reloj, y volvemos de nuevo al $(1, 0)$ cuando $t = 2\pi$ (esto nos indica, además de una orientación precisa, una cierta "*velocidad de movimiento*".
- β parte del mismo punto y con la misma orientación que α. Sin embargo, algo ha cambiado: la velocidad con que recorremos la circunferencia es mucho mayor, pues, cuando $t = \pi$, la partícula ya ha dado una vuelta completa.
- Para C partimos del punto $(0, 1)$ y la recorremos en el sentido de las agujas del reloj: ha cambiado la orientación (además del punto inicial).

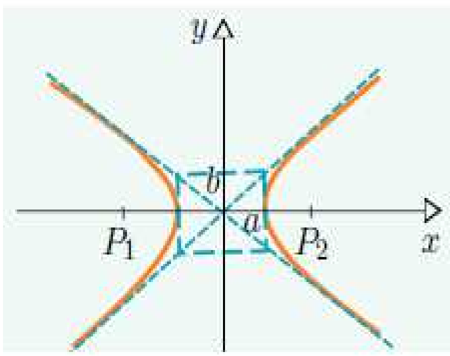
En este sentido, presentamos la siguiente definición.

Definición 1 (**Curva parametrizada diferenciable**).
Una curva parametrizada diferenciable en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con $I \subset \mathbb{R}$ abierto, que es $\mathcal{C}^\infty$, es decir, que admite derivadas continuas de todos los órdenes.

Ejemplo 2. La elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ con $a, b > 0$ podemos parametrizarla $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ con $\alpha(t) = (a\cos(t), b\operatorname{sen}(t))$



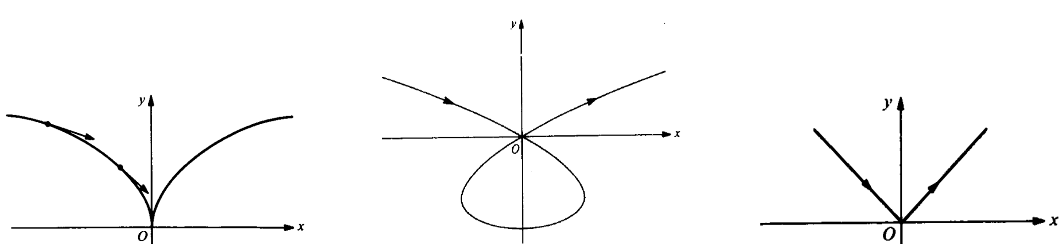
Ejemplo 3. La hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a, b > 0$ podemos parametrizarla $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ con $\alpha(t) = (a\cosh(t), b\,\mathrm{senh}(t))$



- El adjetivo "*parametrizada*" hace referencia, precisamente, a que no sólo consideramos la traza de la curva, sino también la manera que tenemos de *recorrerla* mediante un determinado parámetro.
- tenemos entonces, una aplicación $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$, donde las funciones $\alpha_i(t)$ admiten derivadas continuas de todos los órdenes.
- t se denomina el parámetro de la curva.
- El subconjunto imagen $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^n$ la traza de α, y la aplicación $\alpha' : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida de la forma $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \dots, \alpha_n'(t))$, su vector velocidad o vector tangente.

Situaciones que excluiremos en nuestro estudio de las curvas

1. La curva $\alpha(t) = (t^3, t^2)$, representada en la Figura, es claramente diferenciable, pero $\alpha'(0) = (0, 0)$: el vector velocidad en $t = 0$ existe, aunque no tiene dirección.
2. La curva $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$, véase la Figura. Claramente α no es inyectiva, pues $\alpha(2) = \alpha(-2) = (0, 0)$, se dice entonces que $\alpha(t)$ presenta una autointersección o que la curva no es simple.
3. La curva parametrizada, $\alpha(t) = (t, |t|)$, que no es diferenciable y que, por tanto, nunca contemplaremos en nuestro estudio.



A la vista de estos ejemplos, nos podemos plantear algunas cuestiones: **¿por qué tenemos especial interés en que nuestra curva sea diferenciable? ¿Por qué queremos evitar que el vector tangente se anule en un punto?** La respuesta está implícita en la siguiente definición.

Definición 2 (**Curva regular**).
Se dice que una curva parametrizada diferenciable $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es regular si* $\alpha'(t) \neq 0$*, para todo* $t \in I$.

- Si $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable con $\alpha'(t) \neq 0$, podemos considerar la **recta tangente** a α en el punto $\alpha(t)$, es decir, la recta que pasa por $\alpha(t)$ y tiene como vector director $\alpha'(t)$ (aquí es esencial que la curva sea regular).
- Si por el contrario $t_0 \in I$ es tal que $\alpha'(t_0) = 0$, se dice entonces que α presenta un punto singular en t_0. En este curso y salvo que precise lo contrario, estudiaremos únicamente curvas simples y regulares, esto es, curvas que NO presentan singularidades ni autointersecciones.

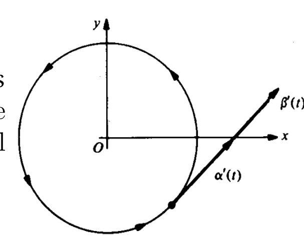
El cambio de parámetro y la longitud de arco

Tal y como ya hemos anticipado, una curva puede recorrerse de varias formas, desde nuestro punto de vista, la misma (imagen de una) curva recorrida de manera distinta, resulta ser una curva completamente diferente.

Definición 3 (**Curva regular**).
Si $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es una curva parametrizada, se denomina cambio de parámetro a cualquier difeomorfismo* $h : J \longrightarrow I$*, donde* J *es un intervalo abierto de* $\mathbb{R}$*. La curva* $\beta = \alpha \circ h : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *se llama reparametrización de* α.

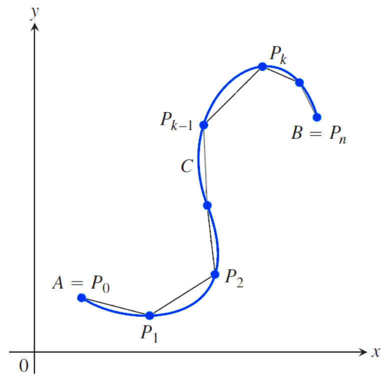
1. Claramente, como $\beta'(t) = \alpha'(h(t))h'(t)$, si α es regular, entonces cualquier reparametrización de α también lo es, pues $h'(t) \neq 0$ siempre. Además, de la conexión de I se tiene que, o bien $h'(t) > 0$ para todo $t \in J$, o bien $h'(t) < 0$ para todo $t \in J$.
2. Diremos entonces que el cambio de parámetro h conserva la orientación si $h'(t) > 0$, y que invierte la orientación si $h'(t) < 0$.
3. Obsérvese que un cambio de parámetro puede modificar tanto la orientación como la velocidad de una curva, pero nunca su trayectoria.

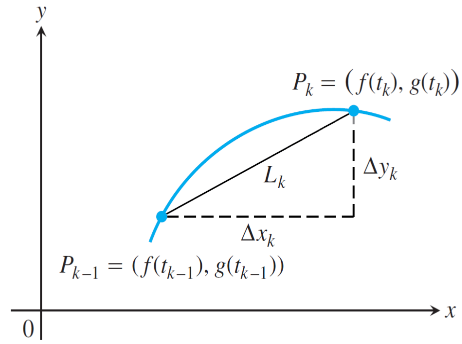
Ejemplo 4. Para la curva $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, el cambio de parámetro $h(s) = 2s$ conserva la orientación, mientras que $h(s) = -s$ la invierte. Además, el primero de ellos NO preserva la velocidad, pues $\beta(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(2s)$ y $\beta'(s) = 2\alpha'(2s)$, el segundo tampoco, aunque sí conserva su módulo.



¿Cómo calcular la longitud de una curva en $\mathbb{R}^n$?. Consideremos el caso en $\mathbb{R}^2$: Para calcular la distancia de la curva C subdividimos la trayectoria $\widehat{AB}$ en n partes en los puntos $A = P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n = B$. Estos puntos corresponden a una partición del intervalo $[a, b]$ por medio de

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \qquad C(t_k) = P_k = (f(t_k), g(t_k))$$





Después, unimos los puntos P_k mediante segmentos de recta. El segmento $\overline{P_{k-1}P_k}$ tiene longitud

$$\begin{aligned}L_k &= \|C(t_k) - C(t_{k-1})\| = \|\big(f(t_k), g(t_k)\big) - \big(f(t_{k-1}), g(t_{k-1})\big)\| \\ &= \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2}.\end{aligned}$$

De acuerdo con el Teorema del Valor Medio, existen números $t^*, t^{**} \in [t_{k-1}, t_k]$ tales que

$$\frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = f'(t^*) \qquad \Rightarrow \qquad f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(t^*)\Delta t_k$$

$$\frac{g(t_k) - g(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = g'(t^{**}) \qquad \Rightarrow \qquad g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(t^{**})\Delta t_k.$$

Por tanto, la **longitud** de la curva $\widehat{AB}$ se puede aproximar

$$\begin{aligned}L \approx \sum_{k=1}^{n} L_k &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big[f(t_k) - f(t_{k-1})\big]^2 + \big[g(t_k) - g(t_{k-1})\big]^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big[f'(t^*)\Delta t_k\big]^2 + \big[g'(t^{**})\Delta t_k\big]^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big[f'(t^*)\big]^2 + \big[g'(t^{**})\big]^2}\, \Delta t_k.\end{aligned}$$

Esta última expresión NOOOO es exactamente una suma de Riemann (ya que $f'(t^*)$ y $g'(t^{**})$ se evalúan en diferentes puntos), pero, conforme la $\|\Delta t_k\| \to 0$, esta sumatoria tiende a una integral definida, esto es,

$$L = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big[f'(t^*)\big]^2 + \big[g'(t^{**})\big]^2}\, \Delta t_k = \int_a^b \sqrt{\big[f'(t)\big]^2 + \big[g'(t)\big]^2}\, dt = \int_a^b \|C'(t)\|\, dt.$$

Por lo tanto, es razonable definir la longitud de la curva de A a B como esta integral

Definición 4 (**Longitud de una curva parametrizada.**).
Sean $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una curva parametrizada y* $[a, b] \subset I$*. Entonces la* ***longitud de*** α *entre* $\alpha(a)$ *y* $\alpha(b)$ *está dada por*

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt.$$

Es un sencillo ejercicio probar el siguiente corolario.

Corolario 5. *La longitud de una curva parametrizada es independiente de su parametrización.*

De entre todas las parametrizaciones posibles para (la imagen de) una curva, existe una (salvo orientación) cuyas propiedades son especialmente importantes. Se trata de parametrizar la curva de modo que el módulo de la velocidad sea constante e igual a la unidad.

Definición 6 (**Longitud de una curva parametrizada.**).
Se dice que una curva parametrizada $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ está parametrizada por la longitud de arco si $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.

La razón de tal calificativo es clara: cuando $\|\alpha'(t)\| = 1$, el parámetro t de la curva mide (salvo una constante) la longitud de la misma entre un punto fijo (o inicial, si suponemos $t_0 = 0$) y $\alpha(t)$; en efecto,

$$L_0^t(\alpha) = \int_0^t \|\alpha'(s)\| ds = \int_0^t ds = t.$$

En lo que sigue, utilizaremos p.p.a. como abreviatura para indicar que una curva α está parametrizada por la longitud de arco. Además, cuando esto sea así, usaremos s como el parámetro arco de la curva, en lugar de t.

Desde una perspectiva física, la aceleración de una curva p.p.a. no posee componente tangencial (la velocidad no cambia en módulo y la partícula no experimenta aceleración en la dirección del movimiento), por lo que, si existe aceleración, ésta es siempre perpendicular a la velocidad (y por ende, a su trayectoria). En términos matemáticos se tiene

$$0 = \frac{d}{ds}\|\alpha'(s)\|^2 = \frac{d}{ds}\langle \alpha'(s), \alpha'(s)\rangle = 2\langle \alpha'(s), \alpha''(s)\rangle$$

lo que prueba que la aceleración y la velocidad son ortogonales (obsérvese que no es necesario que el módulo de la velocidad sea unitario, basta con que sea constante).

El siguiente teorema es fundamental para el desarrollo de toda la teoría de curvas, tanto en el plano como en el espacio. Enseguida veremos por qué.

Teorema 7 (**Existencia de p.p.a**).
Toda curva parametrizada regular admite una reparametrización por la longitud de arco con un cambio de parámetro que conserva la orientación.

Dem: Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada regular con parámetro arbitrario t. Fijamos $t_0 \in I$ y consideremos la función longitud de arco $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ como la aplicación

$$g(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = L_{t_0}^t(\alpha)$$

que es una función diferenciable. Además, como $\alpha'(u) \neq 0$, para todo $u \in I$, entonces $g'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$, para todo $t \in I$, siendo $I \subset \mathbb{R}$ abierto. El teorema de la función inversa nos asegura entonces que $J = g(I)$ es también un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, y que $g : I \longrightarrow J$ es un difeomorfismo. Representamos por $h := g^{-1} : J \longrightarrow I$. Claramente, $(h \circ g)(t) = t$ y $(g \circ h)(s) = s$. Por tanto, $h'(g(t))g'(t) = 1$, de donde se obtiene que

$$h'(g(t)) = \frac{1}{g'(t)} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} > 0$$

, es decir, el cambio de parámetro h conserva la orientación. Finalmente, es fácil ver que la reparametrización $\beta(s) = \alpha(h(s))$ es una curva p.p.a.

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(h(s))\| \, \|h'(s)\| = \|\alpha'(h(s))\| \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|} = 1.$$

Este teorema nos dice que toda curva parametrizada regular siempre puede reparametrizarse por la longitud de arco. El ((problema)) radica en que, en la práctica, encontrar la reparametrización no siempre es posible. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 5. [La catenaria] Halle el parámetro arco para la curva $\alpha(t) = (t, \cosh t)$.

SOL: Un rápido cálculo permite obtener el que será el parámetro arco:

$$s = g(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t \cosh u \, du = \operatorname{senh} t$$

luego el cambio de parámetro que reparametriza α por la longitud de arco viene dado por $t = h(s) = \operatorname{senh}^{-1} s$. Por lo tanto,

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) = (\operatorname{senh}^{-1} s, \cosh(\operatorname{senh}^{-1} s)) = (\operatorname{senh}^{-1} s, \sqrt{1+s^2})$$

es la reparametrización por la longitud de arco de la catenaria.

NOTA HISTÓRICA El problema de la **catenaria**, planteado durante el siglo XVII, consistía en determinar la forma que adoptaba una cadena o cuerda, suspendida por sus extremos y sometida a la acción de un campo gravitatorio uniforme, su peso. Los primeros físicos y matemáticos que abordaron el problema pensaro n que la curva era una parábola, porque empíricamente la forma de la cuerda se parece mucho a una parábola, especialmente si se consideran longitudes pequeñas de cuerda. Pero fue Christian Huygens, a los 17 años, quien demostró que la curva no era realmente una parábola, sino sólo una curva parecida, aunque no encontró la ecuación de la catenaria.

Esta fue obtenida por Leibnitz, Huygens y Johann Bernoulli en 1691, en respuesta al desafío planteado por Jakob Bernoulli. Si se desarrolla en serie de Taylor la función $\cosh(t)$, se obtiene $\cosh t = 1 + t^2 + O^4(t)$, que corresponde a la ecuación de una parábola más un término de cuarto orden. Es por este motivo por el que las gráficas son tan parecidas en un entorno de cero. Una curva catenaria invertida es el trazado perfecto para un arco en la arquitectura, forma que fue aplicada, entre otros y fundamentalmente, por Gaudí, su descubridor. (visitar La Sagrada Familia en Barcelona, España)

Ejemplo 6. Halle el parámetro arco para la circunferencia $\alpha(t) = \mathbf{p} + (r\cos t, r\operatorname{sen} t)$.

SOL: La reparametrización por arco es muy sencilla de obtener:

$$s = g(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t r du = rt$$

luego el cambio de parámetro buscado es $t = h(s) = s/r$, y la reparametrización por la longitud de arco, $\beta(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(\frac{s}{r}) = \mathbf{p} + \big(r\cos(\frac{s}{r}), r\operatorname{sen}(\frac{s}{r})\big)$.

Ejemplo 7. ¿Es posible encontrar el parámetro arco para la curva $\alpha(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t)$.?

SOL: NO. Observe que

$$s = g(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{4\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u}\, du = 2\int_0^t \sqrt{1 - \frac{3}{4}\cos^2 u}\, du \qquad \text{NO SOL.}$$

Luego no es posible dar explícitamente la reparametrización.

Ejemplo 8. ¿Es posible encontrar el parámetro arco para la curva $\alpha(t) = (t, t^2)$?

SOL: NO. Observe que

$$s = g(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{1+4u^2}\, du = \frac{1}{4}\ln\left(2t + \sqrt{1+4t^2}\right) + \frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2}$$

sin embargo, es imposible despejar t en la ecuación anterior. Por tanto, tampoco puede darse explícitamente la reparametrización.

Como hemos visto, no siempre es factible reparametrizar una curva por la longitud de arco (realmente, en la mayoría de los casos NO va a ser posible). Sin embargo, esto no plantea ningún inconveniente, pues es suficiente saber que, teóricamente, gracias al Teorema 7, siempre podemos suponer la curva p.p.a., lo que permite desarrollar la llamada **Teoría de curvas**.

El concepto local hace referencia que estudiaremos aspectos locales de la curva, es decir, las propiedades, objetos y características de la curva en un entorno arbitrariamente pequeño. Por ejemplo: la velocidad, la aceleración, etc. Esto es muy diferente a los aspectos globales, que es cuando estudiemos la teoría global de curvas, donde el objetivo es contemplar la curva como un todo e intentar relacionar aspectos locales de la curva con características globales.

La Teoría Local de curvas planas

Tal y como indica su nombre, se ocupa del estudio de curvas que están contenidas en un plano. Desde una perspectiva puramente local, una curva plana p.p.a. tiene ((muy poca libertad para moverse)) en el sentido de que, o bien gira hacia la izquierda, o bien lo hace hacia la derecha. Este giro (y su intensidad) puede ser descrito por las variaciones del vector tangente unitario.

Definición 8 (Vector tangente y normal de curvas planas).
Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *una curva regular p.p.a. El* ***vector tangente*** *y* ***vector normal*** *de* α *están dados por*

$$\boldsymbol{t}(s) = \alpha'(s), \qquad \boldsymbol{n}(s) = J(\alpha'(s))$$

donde $J = R_{\pi/2}$ *es la estructura compleja en* $\mathbb{R}^2$*, esto es, la rotación positiva de ángulo* $\pi/2$.

Por tanto, los vectores $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ forman una base ortonormal positivamente orientada del plano euclídeo para cada s, que recibe el nombre de **diedro de Frenet**.

Nos preguntamos entonces de manera natural: ¿cómo varían los vectores tangente y normal a una curva? La respuesta esta en estudiar $\mathbf{t}'(s)$ y $\mathbf{n}'(s)$. Empecemos por la siguiente definición.

Definición 9 (Vector curvatura y función curvatura p.p.a).
Se llama ***vector curvatura*** *de una curva plana regular* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *p.p.a. al vector definido por*

$$\boldsymbol{k}(s) = \boldsymbol{t}'(s) = k(s)\boldsymbol{n}.$$

Se llama ***curvatura*** *de una curva plana regular* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *p.p.a. a la función* $k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$k(s) := \langle \alpha''(s), J(\alpha'(s)) \rangle .$$

Además, si $k(s) \neq 0$ *se llama* ***radio de curvatura*** *al valor* $\rho(s) = 1/|k(s)| = 1/\|\boldsymbol{k}\|$.

Teorema 10 (Fórmulas de Frenet).
Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *una curva regular p.p.a. las fórmulas de Frenet vienen dada por*

$$\begin{cases} \boldsymbol{t}'(s) = k(s)\boldsymbol{n}(s) \\ \boldsymbol{n}'(s) = -k(s)\boldsymbol{t}(s) \end{cases}$$

DEM:

Obsérvese que estas fórmulas nos aseguran que la componente tangencial del vector aceleración de la curva α, $\alpha''(s) = \mathbf{t}'(s)$ es cero. Así pues, la aceleración sólo tiene componente normal, y es el valor absoluto de la curvatura el que mide cuánto vale:

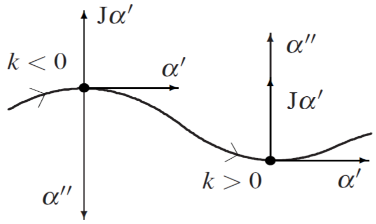
$$|k(s)| = |k(s)|\,\|\mathbf{n}(s)\| = \|\mathbf{t}'(s)\| = \|\alpha''(s)\|.$$

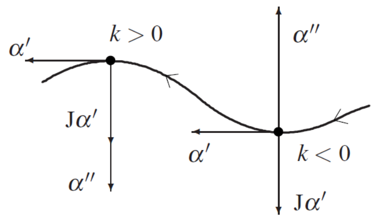
Ahora bien, el signo de la curvatura $k(s)$ también ofrece información sobre la curva: nos dice el sentido de giro, es decir, en qué sentido rota el vector velocidad $\alpha'(s) = \mathbf{t}(s)$ conforme se recorre la curva. La figura de abajo refleja claramente este hecho. Observemos además que un cambio de orientación cambia el signo de la curvatura pero no su magnitud.

Observación. Otro modo de calcular la curvatura de una curva plana regular p.p.a. es el siguiente: si $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tiene coordenadas $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, un rápido cálculo muestra que

$$\begin{aligned} k(s) &= \langle \alpha''(s), J\alpha'(s)\rangle = \langle (x''(s), y''(s)), (-y'(s), x'(s))\rangle \\ &= -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s) = \begin{vmatrix} x'(s) & y'(s) \\ x''(s) & y''(s) \end{vmatrix} = \det\big(\alpha'(s), \alpha''(s)\big) \end{aligned}$$

lo que nos da una fórmula para $k(s)$, directamente en función de la curva α y sus derivadas.





Ejemplo 9. Halle la curvatura de la circunferencia de centro $\mathbf{p}$ y radio r es $\alpha(s) = \mathbf{p} + r(\cos(\frac{s}{r}), \operatorname{sen}(\frac{s}{r}))$

SOL: La curva α esta p.p.a. Un sencillo cálculo demuestra que

$$k(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s)\rangle = \langle \alpha''(s), J(\alpha'(s))\rangle = \left\langle -\frac{1}{r}(\cos(\frac{s}{r}), \operatorname{sen}(\frac{s}{r})), (-\cos(\frac{s}{r}), -\operatorname{sen}(\frac{s}{r}))\right\rangle = \frac{1}{r}.$$

Por tanto, la curvatura de una circunferencia es siempre constante, y $|k(s)| = \frac{1}{r}$.

Ejemplo 10. Halle la curvatura de la catenaria $\alpha(s) = (\operatorname{senh}^{-1} s, \sqrt{1+s^2})$

El problema que se plantea a continuación es **¿cómo calcular la curvatura de una curva plana si ésta no está parametrizada por la longitud de arco?**, pues, como ya sabemos, en muchas ocasiones es materialmente imposible encontrar la parametrización por el arco de una curva.

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana regular con parámetro arbitrario t, y consideremos $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$ su reparametrización por la longitud de arco. Recuérdese que $h = g^{-1}$, donde

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(u)| du.$$

Es evidente que la curvatura de una curva no debe depender de su parametrización (siempre y cuando ésta conserve la orientación) pues es un concepto geométrico que debe dar información sobre cómo es la traza de α y cuál es el sentido de movimiento.

Se define la curvatura de α, simplemente, como la curvatura de su reparametrización por el arco:

$$k_\alpha(t) := k_\beta(g(t)) \equiv k_\beta(s).$$

Proposición 11. *[Curvatura $k_\alpha(t)$]*
Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana regular con parámetro arbitrario t. Entonces

$$k_\alpha(t) = \frac{\langle \alpha''(t), J\alpha'(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

DEM: Como $k(t) = k_\beta(g(t))$, Calculamos $k_\beta(s) = \left\langle \mathbf{t}'_\beta(s), \mathbf{n}_\beta(s)\right\rangle$ donde

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_\beta(s) &= \beta'(s) = \alpha'(h(s))h'(s) \\ \mathbf{n}_\beta(s) &= J\mathbf{t}_\beta(s) = h'(s)J\alpha'(h(s)) \\ \mathbf{t}'_\beta(s) &= \alpha''(h(s))h'(s)^2 + h''(s)\alpha'(h(s)). \end{aligned}$$

Teniendo en mente que $g(h(s)) = s$ implica $h'(s) = \frac{1}{g'(h(s))} = \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|}$ encontramos que

$$\begin{aligned} k_\beta(s) &= \left\langle \mathbf{t}'_\beta(s), \mathbf{n}_\beta(s) \right\rangle = \left\langle \alpha''(h(s))h'(s)^2, h'(s)J\alpha'(h(s)) \right\rangle = h'(s)^3 \left\langle \alpha''(h(s)), J\alpha'(h(s)) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|^3} \left\langle \alpha''(h(s)), J\alpha'(h(s)) \right\rangle. \end{aligned}$$

Para finalizar, basta considerar que $h(s) = t$. ■

Ejemplo 11. Halle la curvatura de $\alpha(t) = (t, t^2)$.

A partir de ahora suprimiremos a menudo el parámetro de la curva en muchas expresiones, para evitar así fórmulas excesivamente engorrosas, siempre y cuando no haya lugar a confusión.

Teorema fundamental de la Teoría Local de curvas planas

Este teorema establece que una curva plana regular viene determinada unívocamente por su función curvatura (salvo movimientos rígidos). Enunciémoslo con mayor precisión.

Teorema 12 (**Fundamental de curvas planas**).
Sea $k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces, existe una curva plana regular $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ p.p.a. tal que

$$k_\alpha(s) = k(s), \qquad \textit{para todo } s \in I.$$

Además, si $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es otra curva regular p.p.a. con curvatura $k_\beta(s) = k(s)$, para todo $s \in I$, entonces existe un movimiento rígido directo $M : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $M\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + b$, tal que $\beta = M \circ \alpha$.

DEM: Comenzamos demostrando la existencia de α, para lo cual construimos explícitamente la curva.

EXISTENCIA: Sea $s_0 \in I$ fijo. Definimos la función $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^{s} k(u)du$$

y construimos la curva (diferenciable, por serlo $k(s)$ y, por tanto, $\varphi(s)$)

$$\alpha(s) := \Big(\int_{s_0}^{s} \cos\varphi(u)du, \int_{s_0}^{s} \operatorname{sen}\varphi(u)du \Big).$$

Veamos que $\alpha(s)$ es la curva buscada.

Como $\alpha'(s) = \big(\cos\varphi(s), \operatorname{sen}\varphi(s)\big)$, claramente $\|\alpha'(s)\| = 1$, luego $\alpha(s)$ está parametrizada por la longitud de arco y es regular. Además, su curvatura vale

$$k_\alpha(s) = \langle \mathbf{t}'_\alpha(s), \mathbf{n}_\alpha(s) \rangle = \varphi'(s)\operatorname{sen}^2\varphi(s) + \varphi'(s)\cos^2\varphi(s) = \varphi'(s) = k(s).$$

UNICIDAD: Supongamos que existen dos curvas $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con la misma curvatura,

$$k_\alpha(s) = k(s) = k_\beta(s).$$

Fijamos de nuevo $s_0 \in I$. Representamos por $\{\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha\}$ y $\{\mathbf{t}_\beta, \mathbf{n}_\beta\}$, respectivamente, los diedros de Frenet de α y β. Consideramos los vectores $\mathbf{t}_\alpha(s_0)$ y $\mathbf{t}_\beta(s_0)$ de $\mathbb{R}^2$. Entonces, existe una única transformación $A \in SO(2)$, es decir, una única rotación, tal que $A[\mathbf{t}_\alpha(s_0)] = \mathbf{t}_\beta(s_0)$. Claramente, por la ortogonalidad de los vectores de la base y por ser A una matriz ortogonal con determinante positivo, $A[\mathbf{n}_\alpha(s_0)] = \mathbf{n}_\beta(s_0)$.

Definimos $b := \beta(s_0) - A\alpha(s_0)$ y tomamos el movimiento rígido $M\mathbf{x} := A\mathbf{x} + b$. Sea $\gamma = M \circ \alpha = (A\alpha + b)$. Demostrando que $\gamma \equiv \beta$, concluirá la demostración. Desde luego,

$$\begin{aligned} \gamma(s_0) &= A\alpha(s_0) + b = \beta(s_0) \qquad \text{y} \\ \mathbf{t}_\gamma(s_0) &= \gamma'(s_0) = (A\alpha + b)'(s_0) = A\alpha'(s_0) = A\mathbf{t}_\alpha(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0); \end{aligned}$$

esto es, tanto las curvas como sus vectores tangentes coinciden en s_0. Además,

$$k_\gamma = \langle \gamma'', J\gamma' \rangle = \langle A\alpha'', JA\alpha' \rangle = \langle A\alpha'', AJ\alpha' \rangle = (A\alpha'')^T AJ\alpha' = (\alpha'')^T A^T AJ\alpha' = (\alpha'')^T J\alpha' = \langle \alpha'', J\alpha' \rangle = k_\alpha.$$

Definimos ahora la función $f(s) := \|\mathbf{t}_\beta(s) - \mathbf{t}_\gamma(s)\|^2/2$, que verifica $f(s_0) = 0$. Un sencillo cálculo permite comprobar que

$$f'(s) = \left\langle \mathbf{t}'_\beta - \mathbf{t}'_\gamma, \mathbf{t}_\beta - \mathbf{t}_\gamma \right\rangle = \langle k_\beta \mathbf{n}_\beta - k_\gamma \mathbf{n}_\gamma, \mathbf{t}_\beta - \mathbf{t}_\gamma \rangle = -k\Big(\langle \mathbf{n}_\beta, \mathbf{t}_\gamma \rangle + \langle \mathbf{n}_\gamma, \mathbf{t}_\beta \rangle \Big) = 0.$$

La última igualdad se sigue porque

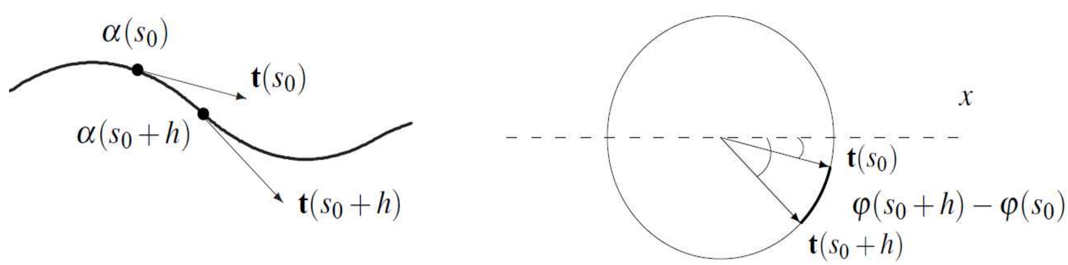
$$\langle \mathbf{n}_\beta, \mathbf{t}_\gamma \rangle = \langle J\mathbf{t}_\beta, \mathbf{t}_\gamma \rangle = -\langle \mathbf{t}_\beta, J\mathbf{t}_\gamma \rangle = -\langle \mathbf{t}_\beta, \mathbf{n}_\gamma \rangle.$$

En consecuencia, f es una función constante, y dado que $f(s_0) = 0$, podemos concluir que $f \equiv 0$. Esto nos asegura a su vez que $\mathbf{t}_\beta(s) = \mathbf{t}_\gamma(s)$ para todo $s \in I$, es decir, que $(\beta - \gamma)'(s) = 0$. Y de nuevo utilizamos el mismo argumento: como $\beta - \gamma$ es constante y sabemos que $\beta(s_0) = \gamma(s_0)$, podemos concluir finalmente que $\beta \equiv \gamma$. ■

Observación: (Una interpretación geométrica de la curvatura). Obsérvese que la curva α, tal y como se define en la demostración del teorema, no es algo artificioso. Supongamos dada una curva regular $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ p.p.a. Si escribimos $\alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$ se tiene que $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$. En consecuencia, existe una función diferenciable $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(I)$ de modo que $x'(s) = \cos\varphi(s)$ e $y'(s) = \operatorname{sen}\varphi(s)$ esto es, el vector tangente $\mathbf{t}(s)$ es de la forma $\mathbf{t}(s) = (\cos\varphi(s), \operatorname{sen}\varphi(s))$. Es fácil comprobar entonces que la curvatura de α vale $k(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \varphi'(s)$.

Este razonamiento permite dar una interpretación geométrica de la curvatura de una curva: para cada $s \in I$, el valor $\varphi(s)$ no es otra cosa que el ángulo que forma el vector tangente $\mathbf{t}(s)$ con el eje x; así, la curvatura de α nos dice cómo varía este ángulo respecto al parámetro arco. Y aún más. Si elegimos un valor inicial $s_0 \in I$ y un incremento de éste, $s_0 + h$, se tiene que

$$k(s_0) = \varphi'(s_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(s_0 + h) - \varphi(s_0)}{h}.$$

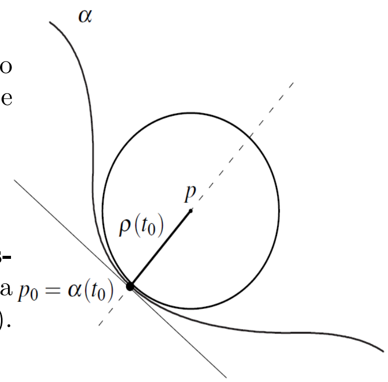


Ahora bien, trasladando los vectores tangentes $\mathbf{t}(s_0)$ y $\mathbf{t}(s_0+h)$ (unitarios) a la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1$ (véase la figura anterior) se observa que $\varphi(s_0+h) - \varphi(s_0)$ es, precisamente, la longitud de arco en S^1 desde $\mathbf{t}(s_0)$ a $\mathbf{t}(s_0+h)$, mientras que h es la longitud (de arco) de α entre tales valores. Luego

$$k(s_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\text{longitud de arco en } S^1}{\text{longitud de arco en } \alpha}$$

la curvatura es el límite de un cociente de longitudes.

1.1. Evolutas, involutas y curvas paralelas



Si $k(p_0) \neq 0$, el punto p de la normal, del lado de la concavidad del arco, situado a una distancia ρ del punto p_0 es llamado **centro de curvatura** y puede escribirse como

$$C \equiv p + \rho^2 \mathbf{k} = p + \frac{1}{k}\mathbf{n},$$

donde $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$.
La circunferencia centrada en este punto y de radio ρ es llamada circunferencia **osculatriz**, (del latín osculari, besar), que es la circunferencia que mejor se adapta a la curva en dicho punto (es decir, la circunferencia que besa a la curva en dicho punto).

Si cambiamos la orientación del arco, el vector tangente cambia de sentido y en consecuencia, también el vector normal. El vector de curvatura no cambia porque su sentido es el sentido de la concavidad de la curva. En consecuencia, la curvatura escalar cambia de signo pero ni el radio de curvatura, ni el centro de curvatura ni la circunferencia osculatriz son afectados. El cambio de signo de la curvatura escalar corresponde a la observación que cuando recorremos un camino, lo que es una curva derecha para ir se transforma en curva izquierda por el regreso.

Definición 13 (**La evoluta**).
La evoluta de una curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada regular es el lugar geométrico de los ***centros de curvatura*** *de α, es decir, la curva*

$$\alpha_E(t) := \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}\boldsymbol{n}(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}\frac{J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Además, si α_E es la evoluta de α, se dice que α es una involuta o evolvente de α_E.

Proposición 14. *Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada regular. La evoluta de α es la única curva de la forma $\alpha_E(t) = \alpha(t) + f(t)J\alpha'(t)$, donde f es una función real diferenciable, de modo que la recta normal a α coincide con la recta tangente a α_E en cada valor t del parámetro.*

DEM: S.P.G, supongamos que α está p.p.a.; Luego,

$$\alpha_E(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}\mathbf{n}(s)$$

y su vector tangente es

$$\mathbf{t}_E(s) = \alpha_E'(s) = \mathbf{t}(s) + \frac{k(s)\mathbf{n}'(s) - k'(s)\mathbf{n}(s)}{k(s)^2} = -\frac{k'(s)}{k(s)^2}\mathbf{n}(s) \qquad \text{(pues } \mathbf{n}' = -k\mathbf{t}\text{)}.$$

Por tanto, afirmamos que la recta tangente de α_E coincide con la recta normal a α para todo t.

Veamos que es ÚNICA: Supongamos que existe otra curva $\beta(s) = \alpha(s) + f(s)\mathbf{n}(s)$, donde f es una función real diferenciable, de modo que la recta normal a α coincide con la recta tangente a β para todo t. Calculemos la función $f(s)$. Es sencillo comprobar que

$$\beta'(s) = (1 - k(s)f(s))\mathbf{t}(s) + f'(s)\mathbf{n}(s) \overset{\text{hip}}{=} \lambda(s)\mathbf{n}(s).$$

De aquí que, $1 - k(s)f(s) = 0$; es decir, que $f(s) = \frac{1}{k(s)}$, lo que $\beta(s) = \alpha_E(s)$. ∎

Ejemplo 12.

- Cicloide Es una de las curvas clásicas más importantes, por muy diferentes motivos. Entre muchas propiedades de esta curva, cabe destacar: que es la solución al problema de la braquistocrona (para más detalles, véase https://historiasdematematicas.blogspot.com/2017/04/la-curva-braquistocrona-de-johann.html); resuelve el problema de la tautocrona (descubierto por Christian Huygens: si despreciamos el rozamiento e invertimos una

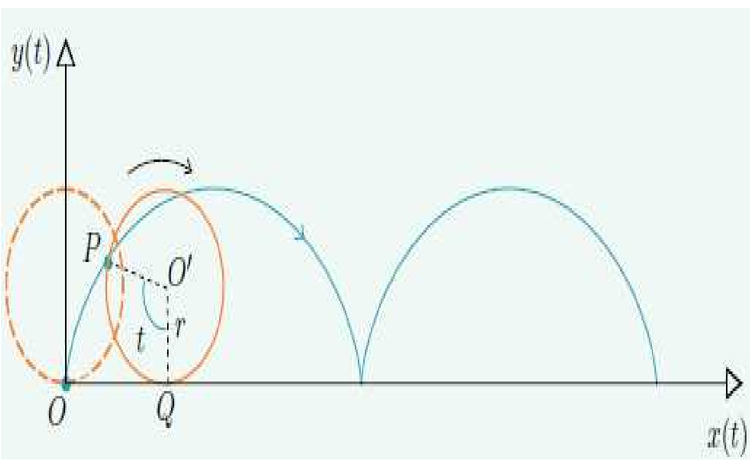
cicloide dejando caer un objeto por la misma, por ejemplo una bola, ésta llegará a la parte más baja de la curva en un intervalo de tiempo que no depende del punto de partida).
Una curva braquistócrona (brachistos el más corto, chronos intervalo de tiempo), o curva del descenso más rápido, es la curva entre dos puntos que es recorrida en menor tiempo por un cuerpo que comienza en el punto inicial con velocidad cero, y que debe desplazarse a lo largo de la curva hasta llegar al segundo punto, bajo acción de una fuerza de gravedad constante y suponiendo que no existe fricción. En la solución del problema intervinieron entre otros Johann y Jacobo Bernoulli, Leibniz, L'Hôpital, Newton y Tschirnhaus.

En 1696, Jakob Bernoulli y Johann Bernoulli resolvieron el problema de la braquistócrona, su respuesta es la cicloide y este es el primer resultado en el cálculo de variaciones.

La curva braquistócrona coincide además con una curva tautócrona. Una curva plana se dice tautócrona si dada una colección de puntos materiales que se mueven a lo largo de ella impulsados por la gravedad, empezando a la vez desde el reposo pero desde puntos diferentes, acaban encontrándose simultáneamente en un mismo punto de la curva, es decir, tardan el mismo tiempo en alcanzar una cierta posición.
Una cicloide es una trayectoria descrita por un punto $\alpha(t) = P(t) = (x(t), y(t))$ de $\mathbb{R}^2$, localizado en una circunferencia de radio r y centro O', que gira a lo largo de su eje Ox, sin deslizarse y con aceleración escalar, esto es,

$$\|\alpha''(t)\| = \sqrt{(x''(t))^2 + (y''(t))^2}$$

constante.
Si el punto está dentro o fuera de la circunferencia, el lugar geométrico es llamado trocoide. Sea u un vector con punto inicial en O' y punto final en P, y sea t el ángulo descrito por el vector u con una vertical, suponga que P coincide con el origen O, cuando $t = 0$



Entonces el arco $\widehat{QP}$ tiene la misma longitud que un segmento con punto inicial en el origen O y punto final Q, donde Q es el punto de intersección entre la circunferencia y el eje Ox. Concluimos que rt y r son la abscisa e ordenada, respectivamente, de O'; y, consecuentemente,

$$x = rt - r\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = rt - r\,\mathrm{sen}\,t$$
$$y = r - r\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = r - r\cos t$$

son las coordenadas de P. Luego, podemos describir un cicloide, como el tracco de la curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha(t) = (rt - r\,\mathrm{sen}\,t, r - r\cos t)$$

Notamos que es posible eliminar t en las ecuaciones. De hecho, usando esas ecuaciones, $\cos t = 1 - \frac{y}{r}$ y, por tanto, $t = \arccos\left(1 - \frac{y}{r}\right)$. Así

$$\mathrm{sen}\,t = \pm\sqrt{1 - \cos^2 t} = \frac{\sqrt{(2r - y)y}}{r}$$

y obtenemos la ecuación cartesiana de la cicloide, dada por

$$x = r\arccos\left(1 - \frac{y}{r}\right) \mp \sqrt{(2r - y)y}$$

EJERCICIO: Demuestre que la evoluta del cicloide $\alpha(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$; $0 < t < 2\pi$; donde $a > 0$ es una constante, es $\beta(t) = a(t + \sin t, -1 + \cos t)$ otra cicloide.

- Demostrar que la evoluta de la catenaria es $\beta(t) = (t - \sinh t \cosh t, 2\cosh t)$.
- Determine la curva plana que tiene $\kappa(s) = \dfrac{1}{\sqrt{s}}$.

1.2. Teoría local de curvas en el espacio

El estudio de curvas en el espacio es, en bastantes aspectos, muy diferente al de curvas en el plano. El motivo principal es que una curva en el espacio tiene mucha más libertad para **((moverse))**. De hecho, tiene una dirección adicional en la que puede curvarse, y su libertad está **((menos controlada))** que en el caso de una curva plana. Esta exposición es igualmente válida para curvas en dimensión superior: a mayor dimensión, mayor libertad, y el estudio de las curvas se complica cada vez más. Siendo exhaustivos, podríamos apuntar tres diferencias fundamentales con respecto a la sección anterior:

i) la curvatura de una curva en el espacio no tiene signo y ofrece menos información que en el caso de curvas planas;

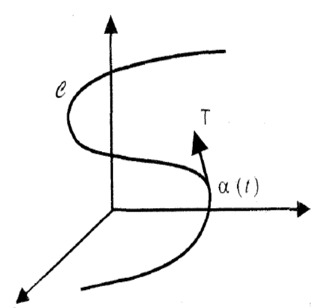
ii) la existencia de un vector normal a la curva no está garantizada;

iii) es necesario contar con una función adicional (la torsión) para explicar y caracterizar cómo se comporta una curva en el espacio.

La curvatura, la torsión y el triedro de Frenet

Definición 15 (**Vector Tangente de una curva**).
*Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regular. El **vector tangente unitario** denotado por $\boldsymbol{t}(t)$ en la dirección de $\alpha'(t)$está dado por*

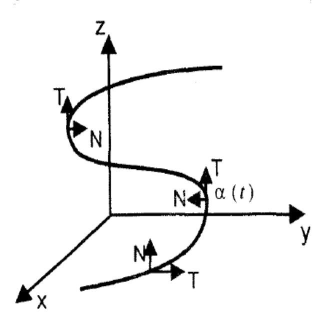
$$\boldsymbol{t}(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$



OBS: Como $\|\mathbf{t}\| = 1$ entonces $\langle \mathbf{t}(t), \mathbf{t}(t) \rangle = 1$, luego al derivar esta expresión, se tiene

$$2\langle \mathbf{t}(t), \mathbf{t}'(t) \rangle = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle \mathbf{t}(t), \mathbf{t}'(t) \rangle = 0.$$

Así, $\mathbf{t}'(t)$ es un vector perpendicular al vector tangente $\mathbf{t}(t)$, $\forall t \in [a, b]$.



Definición 16 (**Vector Normal Principal**).
*Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regular. El vector unitario que tiene la misma dirección que $\boldsymbol{t}'(t)$ (si $\boldsymbol{t}'(t) \neq 0$ se denomina **normal principal** a la curva α en el punto $\alpha(t)$ y se denota por*

$$\boldsymbol{n}(t) = \frac{\boldsymbol{t}'(t)}{\|\boldsymbol{t}'(t)\|} \qquad \textit{siempre que } \|\boldsymbol{t}'(t)\| \neq 0.$$

Como $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una curva regular, entonces la función longitud de arco de la curva $\alpha(t)$ es

$$g(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\|du \qquad \text{La derivada de esta función real es} \qquad g'(t) = \|\alpha'(t)\|.$$

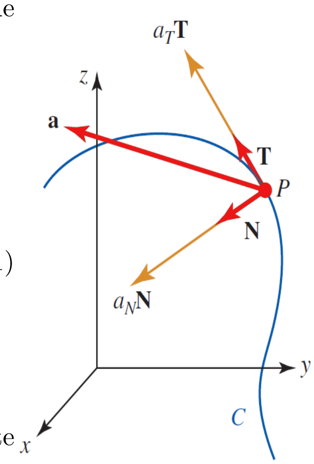
Luego, como $\mathbf{t}(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$, se tiene

$$\alpha'(t) = g'(t)\mathbf{t}(t). \tag{1.1}$$

Observe que

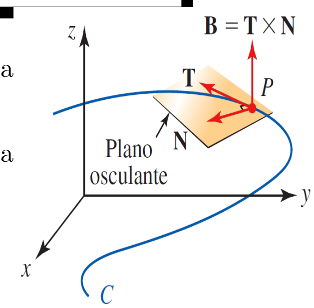
$$\alpha''(t) = g''(t)\mathbf{t}(t) + g'(t)\mathbf{t}'(t) = g''(t)\mathbf{t}(t) + g'(t)\|\mathbf{t}'(t)\|\mathbf{n}(t).$$

Luego, el **vector aceleración** a $\alpha''(t)$ es combinación lineal de los vectores tangente unitario $\mathbf{t}(t)$ y normal principal $\mathbf{n}(t)$.



- Como $\alpha'(t) = g'(t)\mathbf{t}(t)$ entonces la dirección del vector velocidad α' es igual a la de $\mathbf{t}(t)$ y la velocidad rapidez es dada por
$$g'(t) = \|\alpha'(t)\|.$$
- Si un objeto se mueve a lo largo de una curva C, el **vector tangente** unitario $\mathbf{t}(t)$ apunta en la dirección del movimiento, mientras que el **vector normal** principal $\mathbf{n}(t)$ es ortogonal a $\mathbf{t}(t)$ y señala la dirección hacia donde gira el objeto (lado cóncavo de la curva C).

Definición 17 (**Vector Binormal en $\mathbb{R}^3$**).
Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ *una curva regular tal que* $\alpha''(t) \neq 0$, $\forall t \in [a, b]$. *El vector unitario dado por* $\boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{t}(t) \times \boldsymbol{n}(t)$ *se denomina* ***vector binormal*** *a la curva* α *en el punto* $\alpha(t)$.



- Los tres vectores unitarios $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ y $\mathbf{b}$ forman un conjunto de mano derecha de vectores mutuamente ortogonales denominado triedro móvil.
- El plano de $\mathbf{t}$ y $\mathbf{n}$ se denomina plano osculante. La ecuación cartesiana del plano osculador es
$$P_O : ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) \cdot \mathbf{b}(t_0) = 0.$$
- El plano de $\mathbf{n}$ y $\mathbf{b}$ se dice que es el plano normal. La ecuación cartesiana del plano normal principal es
$$P_N : ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) \cdot \mathbf{t}(t_0) = 0.$$
- El plano de $\mathbf{t}$ y $\mathbf{b}$ es el plano de rectificación. La ecuación cartesiana del plano de rectificación es
$$P_R : ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) \cdot \mathbf{n}(t_0) = 0.$$
- Los tres vectores unitarios mutuamente ortogonales $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ pueden considerarse como un sistema de coordenadas de mano derecha móvil, ya que
$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t), \qquad \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t), \qquad \mathbf{t}(t) = \mathbf{n}(t) \times \mathbf{b}(t).$$

  Este sistema de coordenadas móvil se conoce como **marco tnb**.

OBSERVACIÓN CASO $\mathbb{R}^3$: Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una función vectorial cuyas funciones coordenadas tienen derivadas continuas hasta el segundo orden. Las expresiones de $\mathbf{t}(t)$, $\mathbf{n}(t)$ y $\mathbf{b}(t)$ en términos de la función $\alpha(t)$ y sus derivadas son

$$\mathbf{t} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \qquad \mathbf{b} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}, \qquad \mathbf{n} = \frac{[\alpha' \times \alpha''] \times \alpha'}{\|[\alpha' \times \alpha''] \times \alpha'||}.$$

Si $\mathbf{b}(t) = b$ (b vector constante) $\forall t \in I$, entonces la curva es plana. Así, la curva está en el plano osculador.

Ejemplo 13. Halle los vectores tangente unitario, normal principal y binormal de la espiral cónica $\alpha(t) = e^t(\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$ en un punto arbitrario.

Ejemplo 14. Sea C la curva intersección entre las superficies

$$y = (x-2)^2 \qquad\qquad z = (x-2)^2.$$

Halle la ecuación cartesiana del plano osculador a la curva C en los puntos $(2,0,0)$, $(3,1,1)$ y (x_0, y_0, z_0) R/: $P_O : y - z = 0$, $\mathbf{b}(t)$ es const

Ejemplo 15. Dada la curva $C : \alpha(t) = \Big(t, \ln(\sec t), \ln(\sec t + \tan t)\Big)$, $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Halle la longitud de arco de C y reparametrice C en términos de longitud de arco. R: a) $\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$, parte del b) $\varphi(s) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{e^{\frac{2s}{\sqrt{2}}}-1}{e^{\frac{2s}{\sqrt{2}}}+1}\right)$

1.2.1. Variación de los vectores t, n y b

Antes de estudiar estas variaciones para una curva α p.p.a, vamos a considerar las siguientes definiciones

Definición 18 (**Vector Curvatura en $\mathbb{R}^3$**).
*Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. Se denomina **vector curvatura** de la curva en el punto $\alpha(s)$ al vector dado por*

$$\boldsymbol{k}(s) = \boldsymbol{t}'(s) \overset{def}{=} \|\boldsymbol{t}'(s)\|\boldsymbol{n}(s).$$

En el caso de que α no este p.p.a entonces

$$\boldsymbol{k}(t) = \frac{d\boldsymbol{t}(t)}{ds} = \frac{d\boldsymbol{t}}{dt}\frac{dt}{ds} = \boldsymbol{t}'(t)\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\boldsymbol{t}'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \left(\frac{\|\boldsymbol{t}'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|}\right)\boldsymbol{n}(t). \tag{1.2}$$

Luego, el vector curvatura $k(t)$ tiene la misma dirección que el vector unitario normal principal $\mathbf{n}(t)$ y es ortogonal al vector tangente unitario.

Definición 19 (**Curvatura**).
*La función escalar que multiplica a $\boldsymbol{n}(t)$ en (1.2) se denomina **curvatura** de la curva α en el punto $\alpha(t)$ y se denota por*

$$k(t) = \frac{\|\boldsymbol{t}'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|} \qquad \big(\text{p.p.a} \quad k(s) = \|\boldsymbol{t}'(s)\| = \|\alpha''(s)\|\big).$$

La curvatura $k(t)$ es un número real que nos indica que tanto se tuerce (o se dobla) α en el punto $\alpha(t)$.

Definición 20 (**Torsión**).
Se llama torsión de una curva regular $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, p.p.a., con curvatura $k(s) \neq 0$, a la función $\tau : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tau(s) := \big\langle \boldsymbol{b}'(s), \boldsymbol{n}(s)\big\rangle = \langle \boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{n}'(s), \boldsymbol{n}(s)\rangle\,.$$

Teorema 21 (**Fórmulas de Frenet**).
Para una curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se verifica

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}'(s) &= k(s)\boldsymbol{n}(s) \\ \boldsymbol{n}'(s) &= -k(s)\boldsymbol{t}(s) - \tau(s)\boldsymbol{b}(s) \\ \boldsymbol{b}'(s) &= \tau(s)\boldsymbol{n}(s) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Dem: Como $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ está p.p.a entonces por definición de $\mathbf{n}$ y de la curvatura,

$$\mathbf{t}'(s) = \|\mathbf{t}'(s)\|\mathbf{n}(s) = k(s)\mathbf{n}(s).$$

Dado que $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ es un base de $\mathbb{R}^3$ tenemos que $\mathbf{b}' = a_1\mathbf{t} + a_2\mathbf{n} + a_3\mathbf{b}$ y $\mathbf{n}' = b_1\mathbf{T} + b_2\mathbf{n} + b_3\mathbf{b}$. Ahora, demostremos que

$$a_1 = a_3 = b_2 = 0, \qquad a_2 = \tau(s) = -b_3, \qquad b_1 = -k(s).$$

En efecto,

La torsión se puede expresar de manera sencilla en función de α y sus derivadas. Basta escribir $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$ y $\mathbf{n}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
\tau(s) &= \langle \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s), \mathbf{n}(s)\rangle \overset{\text{def}}{=} \det(\mathbf{t}(s); \mathbf{n}'(s); \mathbf{n}(s)) \\
&= \det\Big(\alpha'(s); \Big[\frac{1}{\|\alpha''(s)\|}\Big]' \alpha''(s) + \frac{\alpha'''(s)}{\|\alpha''(s)\|}; \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}\Big) \\
&= \det\Big(\alpha'(s); \frac{\alpha'''(s)}{\|\alpha''(s)\|}; \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}\Big) = \frac{\det(\alpha'(s); \alpha''(s); \alpha'''(s))}{\|\alpha''(s)\|^3}.
\end{aligned}
$$

Proposición 22. *Una curva* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *con curvatura* $k(s) \neq 0$ *es plana si, y sólo si, su torsión es nula.*

Dem: ($\Longrightarrow$) Supongamos que α es plana, y sea Π el plano que la contiene. Entonces $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \subset \Pi$, para todo $s \in I$, por lo que $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$ es constante. En consecuencia, $\mathbf{b}'(s) = 0 = \tau(s)\mathbf{n}(s)$, lo que demuestra que $\tau(s) \equiv 0$.

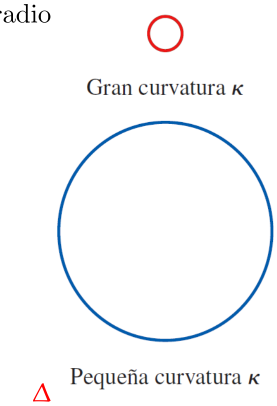
($\Longleftarrow$) si $\tau(s) \equiv 0$, entonces $\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s) \equiv 0$, es decir, el vector binormal $\mathbf{B}$ es constante. Esto implica que la curva α está contenida en un plano. En efecto, definiendo $f(s) := \langle \alpha(s); \mathbf{B}\rangle$, se tiene que $f'(s) = \langle \mathbf{t}(s); b\rangle = 0$, es decir, $f(s) = d = const$; escribiendo entonces

$$\mathbf{b} = (a, b, c) \qquad y \qquad \alpha(s) = (x(s), y(s), z(s)) \qquad f(s) = \langle \alpha(s), \mathbf{b}\rangle = ax(s) + by(s) + cz(s) = d$$

la ecuación de un plano. ■

NOTA: Obsérvese que, si la curvatura $k(s) \equiv 0$, entonces α es una recta, y por tanto siempre es una curva plana. Este caso se excluye en el enunciado de la proposición porque, si $k(s) = 0$, la torsión no puede definirse, y el resultado no tendría sentido.

Ejemplo 16. Encuentre la curvatura de una circunferencia de centro en el origen y radio a.



Solución. La circunferencia está dada por $\alpha(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\, t\mathbf{j}$.
luego $\alpha'(t) =$ y $\|\alpha'(t)\| =$ y

$\mathbf{t}(t) =$ $\mathbf{t}'(t) =$

Por consiguiente, la curvatura es

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{t}'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|} =$$

△

Ejemplo 17. En el espacio tridimensional la posición de una partícula en movimiento está dada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t, 3t)$. Encuentre los vectores $\mathbf{t}(t)$, $\mathbf{n}(t)$ y $\mathbf{b}(t)$. Determine la curvatura $\kappa(t)$.

Solución. Puesto que $\mathbf{r}'(t) =$, $\|\mathbf{r}'(t)\| =$. Luego encontramos que

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

para hallar $\mathbf{n}$ necesitamos hallar

$\mathbf{t}'(t) =$ $\|\mathbf{t}'(t)\| =$ $\mathbf{n}(t) =$

Ahora el binormal es

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t) =$$

Por último encontramos la curvatura $k(t) = \dfrac{\|\mathbf{t}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} =$ $\triangle$

A continuación nos planteamos de nuevo cómo calcular la curvatura y la torsión de una curva en $\mathbb{R}^3$ que no esté p.p.a, pues ya sabemos que, en general, no es posible encontrar su reparametrización por el arco.

Definición 23 (**Curvatura $k(t)$ y Torsión $\tau(t)$**).
Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular con parámetro t y consideremos $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$ su reparametrización por la longitud de arco. Se definen la curvatura y la torsión de α

$$k_\alpha(t) := k_\beta(g(t)) \equiv k_\beta(s) \qquad \tau(t) := \tau_\beta(g(t)) \equiv \tau_\beta(s).$$

Proposición 24. *Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular. Entonces*

$$k_\alpha(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} \qquad \tau_\alpha(t) = -\frac{\det(\alpha'(t); \alpha''(t); \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}.$$

Dem: Obsérvese que $k_\beta(s) = \|\beta''(s)\| \overset{\text{def}}{=} \|\beta'(s) \times \beta''(s)\|$ (β_0 y β'' son ortogonales). Además,

$$\begin{aligned}
\beta'(s) &= \alpha'(h(s))h'(s),\\
\beta''(s) &= \alpha''(h(s))h'(s)^2 + h''(s)\alpha'(h(s))\\
\beta'''(s) &= \alpha'''(h(s))h'(s)^3 + 3h'(s)h''(s)\alpha''(h(s)) + h'''(s)\alpha'(h(s)).
\end{aligned}$$

Sustituyendo en las fórmulas de la curvatura y la torsión, se obtienen las relaciones buscadas:

$$\begin{aligned}
k_\beta &= \|\beta'(s) \times \beta''(s)\| = \left\|\alpha'(h(s))h'(s) \times [\alpha''(h(s))h'(s)^2 + h''(s)\alpha'(h(s))]\right\|\\
&= h'(s)^3\left\|\alpha'(h(s)) \times \alpha''(h(s))\right\| = \frac{\|\alpha'(h(s)) \times \alpha''(h(s))\|}{\|\alpha'(h(s))\|^3}
\end{aligned}$$

pues, recordemos, $g(h(s)) = s$ y por ende $h'(s) = \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|}$; para la torsión

$$\begin{aligned}
\tau_\beta(s) &= -\frac{\det(\beta'(s); \beta''(s); \beta'''(s))}{\|\beta''(s)\|^2} \overset{\text{def}}{=} -\frac{(\langle\beta'(s) \times \beta''(s), \beta'''(s)\rangle}{\|\beta'(t) \times \beta''(s)\|^2}\\
&= -\frac{h'(s)^3\left\langle\alpha'(h(s)) \times \alpha''(h(s)), h'(s)^3\alpha'''(h(s))\right\rangle}{\|h'(s)^3[\alpha'(h(s)) \times \alpha''(h(s))]\|^2} = -\frac{\langle\alpha'(h(s)) \times \alpha''(h(s)), \alpha'''(h(s))\rangle}{\|\alpha'(h(s)) \times \alpha''(h(s))\|^2}\\
&= -\frac{\det(\alpha'(h(s)); \alpha''(h(s)); \alpha'''(h(s)))}{\|\alpha'(h(s)) \times \alpha''(h(s))\|^2} \qquad h(s) = t.
\end{aligned}$$

Ejemplo 18. Sea C la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 + 2(y - x) - 2 = 0$ con el plano $x - y - 2z - 2 = 0$. Determine la curvatura de C en el punto $(3, -1, 1)$.

Solución. No es difícil ver que $x^2 + y^2 + 2(y - x) - 2 = 0$, es igual a $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$. Luego, al parametrizar la curva se obtiene

$$C : \alpha(t) = (1 + 2\cos t, 2\operatorname{sen} t - 1, \cos t - \operatorname{sen} t), \qquad \alpha(0) = (3, -1, 1).$$

De donde resulta

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, -\operatorname{sen} t - \cos t), \qquad \alpha'(0) = (0, 2, -1)\\
\alpha''(t) &= (-2\cos t, -2\operatorname{sen} t, -\cos t + \operatorname{sen} t), \qquad \alpha''(0) = (-2, 0, -1)\\
\alpha'(0) \times \alpha''(0) &= (-2, 2, 4).
\end{aligned}$$

Por tanto, la curvatura de la curva C en el punto $\alpha(0) = (3, -1, 1)$ es

$$k(0) = \frac{\|\alpha'(0) \times \alpha''(0)\|}{\|\alpha'(0)\|^3} = \frac{2\sqrt{6}}{5\sqrt{5}}.$$

$\triangle$

Ejemplo 19. Sea la curva $C : \alpha(t) = \Big(\frac{t^2}{2} + t, \frac{t^2}{2} - t, \frac{\sqrt{2}}{2}\ln t\Big)$. Halle la curvatura de la curva 0 en el punto donde la curva corta al plano xy. R: $k(1) = \frac{2\sqrt{2}}{9}$

Ejemplo 20. Halle la curvatura y la torsión de la curva $\alpha(t) = (t^2, \cos(t), \operatorname{sen}(t))$.

Ejemplo 21. Sea $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida sobre un abierto $W \subset \mathbb{R}^2$ y sea $c \in R$. Se denomina curva de nivel determinada por c al conjunto $\Gamma_c = f^{-1}(c) = \big\{(x, y) \in W : f(x, y) = c\big\}$. Si $c \in \mathbb{R}$ es tal que se verifica la condición $f_x^2 + f_y^2 > 0$ para todo $(x, y) \in \Gamma_c$, entonces Γ_c es una curva regular plana y su curvatura viene dada por

$$k_\Gamma = \frac{-f_{xx}f_y^2 + 2f_{xy}f_xf_y - f_{yy}f_x^2}{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}.$$

Sol: Veamos que la recta tangente de la curva Γ siempre existe (esto es, $y - y_0 = m(x - x_0)$). Dado $f(x, y) = c$ supongamos SPG que y depende implícitamente de x. Derivando respecto a x, $f_x + f_y y_x = 0 \Rightarrow m = y_x = -\frac{f_x}{f_y}$ por hipótesis $(f_x^2 + f_y^2 > 0)$ entonces necesariamente $f_y \neq 0$ por ende la recta tangente siempre existe,

$$l_t \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ m(x - x_0) + y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{f_x}{f_y}x_0 + y_0 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{f_x}{f_y} \end{pmatrix}$$

luego Γ es una curva regular.

Por otra parte, $k = \frac{\langle \alpha''(t), J(\alpha') \rangle}{\| \alpha'(t)\|^3}$ donde $\alpha(t)$ es la parametrización de la Γ, aunque no conocemos explícitamente a $\alpha(t)$ si sabemos su vector velocidad, $\alpha'(t) = (1, -\frac{f_x}{f_y})$ por ende $\alpha''(t) = (0, \frac{-(f_{xx}+f_{xy}y_x)f_y+f_x(f_{yx}+f_{yy}y_x)}{f_y^2})$

$$\begin{aligned}
k_\Gamma &= \frac{\langle \alpha''(t), J(\alpha') \rangle}{\| \alpha'(t)\|^3} = \frac{(0, \frac{-(f_{xx}+f_{xy}y_x)f_y+f_x(f_{yx}+f_{yy}y_x)}{f_y^2}), (\frac{f_x}{f_y}, 1)}{\Big(\frac{f_y^2+f_x^2}{f_y^2}\Big)^{3/2}} \\
&= \frac{f_y\Big(-(f_{xx} + f_{xy}y_x)f_y + f_x(f_{yx} + f_{yy}y_x)\Big)}{(f_y^2 + f_x^2)^{3/2}} = \frac{f_y\Big(-(f_{xx} + f_{xy}(-\frac{f_x}{f_y}))f_y + f_x(f_{yx} + f_{yy}(-\frac{f_x}{f_y}))\Big)}{(f_y^2 + f_x^2)^{3/2}} \\
&= \frac{-f_{xx}f_y^2 + 2f_{xy}f_xf_y - f_{yy}f_x^2}{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Definición 25 (**Radio de Curvatura**).
*Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular, y sea $k(t)$ la curvatura de la curva C en el punto $\alpha(t)$ donde $k(t) \neq 0$, $\forall t \in I$. El **radio de curvatura** de la curva C en el punto $\alpha(t)$ es dado por*

$$\rho(t) = \frac{1}{k(t)}.$$

1. A la circunferencia que tiene como radio $\rho(t)$ se denomina **circunferencia de curvatura** o **círcunferencia osculatriz** en el punto $\alpha(t_0)$ de la curva C con $k(t) \neq 0$.

2. El centro de la circunferencia de curvatura se encuentra sobre la recta normal a la curva C en el punto $\alpha(t_0)$.
3. Como los vectores **t** y **n** están en el plano osculador, entonces la circunferencia de curvatura se encuentra también sobre el plano osculador.
4. La circunferencia de curvatura (C_1) está en el lado cóncavo o interior de la curva C y tiene la misma curvatura que C en $\alpha(t_0)$.
5. El centro de curvatura de la curva C en el punto $\alpha(t_0)$ es el centro de la circunferencia de curvatura (C_1) y es dado por
$$C_0(t_0) = \alpha(t_0) + \rho(t_0)\mathbf{n}(t_0).$$

Ejemplo 22. Dada la curva $C : \alpha(t) = \left(\dfrac{1-2t}{2}, \displaystyle\int_{2\pi}^{t} e^{\operatorname{sen} u}du, t\right)$. Halle la ecuación de la circunferencia de curvatura de la curva C en el punto donde C corta al plano $x + y + z = \frac{1}{2}$.

Solución. Como la curva interseca al plano dado, entonces las componentes de la función vectorial $\alpha(t)$ satisface la ecuación del plano, esto es,

$$\frac{1-2t}{2} + \int_{2\pi}^{t} e^{\operatorname{sen} u}du + t = \frac{1}{2}, \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_{2\pi}^{t} e^{\operatorname{sen} u}du = 0, \qquad \Leftrightarrow \qquad t = 2\pi.$$

Luego, la curva C corta al plano dado en el punto $\alpha(2\pi) = P_0\left(\frac{1-4\pi}{2}, 0, 2\pi\right)$. Por otro lado, se tiene

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= (-1, e^{\operatorname{sen} t}, 1), \qquad \alpha'(2\pi) = (-1, 1, 1)\\
\alpha''(t) &= (0, e^{\operatorname{sen} t}\cos t, 0), \qquad \alpha''(2\pi) = (0, 1, 0)\\
\alpha'(2\pi) \times \alpha''(2\pi) &= (-1, 0, -1)\\
\Big[\alpha'(2\pi) \times \alpha''(2\pi)\Big] \times \alpha'(2\pi) &= (1, 2, -1)\\
\mathbf{n}(2\pi) &= \frac{\Big[\alpha'(2\pi) \times \alpha''(2\pi)\Big] \times \alpha'(2\pi)}{\Big\|\Big[\alpha'(2\pi) \times \alpha''(2\pi)\Big] \times \alpha'(2\pi)\Big\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)\\
\rho(2\pi) &= \frac{\|\alpha'(2\pi)\|^3}{\|\alpha'(2\pi) \times \alpha''(2\pi)\|} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.
\end{aligned}$$

Así, el centro de curvatura de la curva C en el punto $\alpha(2\pi)$ es

$$\begin{aligned}
C_0(2\pi) &= \alpha(2\pi) + \rho(2\pi)\mathbf{n}(2\pi)\\
&= \left(\frac{1-4\pi}{2}, 0, 2\pi\right) + \frac{3\sqrt{6}}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)\right] = \left(2 - 2\pi, 3, \frac{4\pi - 3}{2}\right).
\end{aligned}$$

La ecuación del plano osculador de la curva C que pasa por el punto $\alpha(2\pi)$ es

$$P_0 : \left[(x, y, z) - \left(\frac{1-4\pi}{2}, 0, 2\pi\right)\right] \cdot (-1, 0, -1) = 0, \qquad \Leftrightarrow \qquad P_0 : x + z = \frac{1}{2}.$$

Como las coordenadas del centro de curvatura satisfacen la ecuación del plano osculador, entonces la circunferencia de curvatura se encuentra sobre el plano osculador. Δ

Ejemplo 23. Sea una curva dada por $\alpha(t) = \left(\frac{2t+1}{t-1}, \frac{t^2}{t-1}, t+2\right)$

1. Halle la torsión de la curva C para todo $t \neq 1$. R: $\tau = 0$
2. Halle la ecuación del plano osculador en la que se encuentra la curva dada $\forall t \neq 1$. R: $P_0 : x - 3y + 3z - 5 = 0$

Ejemplo 24. Dada la curva $C : \alpha(t) = \left(t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t, 4 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right)$, halle la curvatura y la torsión de la curva C en el punto donde el plano normal principal a la curva es paralelo al plano $z = 1$. R: $\alpha(0) = (0, 0, 0)$, $k(0) = \frac{1}{4}$, $\tau(0) = -\frac{1}{2}$

Teorema fundamental de la Teoría Local de curvas en el espacio

El teorema fundamental de la Teoría Local de curvas en el espacio establece que cualquier curva parametrizada regular en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ está determinada unívocamente, salvo movimientos rígidos, por su curvatura y su torsión. Antes de enunciar y demostrar este resultado, necesitamos el siguiente lema.

Lema 26. *Sean* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una curva regular p.p.a., y* $Mx = Ax + b$ *un movimiento rígido. Sea* $\beta = M \circ \alpha$. *Entonces*

i) β *está parametrizada por la longitud de arco y* $L_a^b(\beta) = L_a^b(\alpha)$

ii) $k_\beta(s) = k_\alpha(s)$*;*

iii) $\tau_\beta(s) = \pm\tau_\alpha(s) = (\det A)\tau_\alpha(s)$ *(dependiendo de que* M *sea directo o inverso).*

Dem: Veamos i) y ii): como $\beta(s) = M(\alpha(s)) = A\alpha + b$ entonces $\beta' = A\alpha'$ y $\beta'' = A\alpha''$, se tiene que

$$\|\beta'\|^2 = \langle \beta', \beta' \rangle = \langle A\alpha', A\alpha' \rangle = \langle \alpha'; \alpha' \rangle = 1$$
$$L_a^b(\beta) = \int_a^b \|\beta'(s)\| ds = \int_a^b \|A\alpha'\| ds = \int_a^b \|\alpha'(s)\| ds = L_a^b(\alpha)$$
$$k_\beta = \|\beta''\| = \|A\alpha''\| = \alpha'' = k_\alpha(s) :$$

Para demostrar el apartado iii), obsérvese que

$$A\mathbf{t}_\alpha = A\alpha' = \beta' = \mathbf{t}_\beta, \qquad A\mathbf{n}_\alpha = A\left(\frac{\alpha''}{k_\alpha}\right) = \frac{A\alpha''}{k_\alpha} = \frac{\beta''}{k_\beta} = \mathbf{n}_\beta,$$

¿Qué vale entonces $A\mathbf{B}_\alpha$? Como A es una transformación ortogonal ($A^T A = I$) que conserva el producto escalar ($\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$), llevará bases ortonormales a bases ortonormales; por lo tanto,

$$\{A\mathbf{t}_\alpha, A\mathbf{n}_\alpha, A\mathbf{b}_\alpha\} = \{\mathbf{t}_\beta, \mathbf{n}_\beta; A\mathbf{b}_\beta\}$$

es también una base ortonormal, lo que implica que $AB_\alpha = \pm\mathbf{b}_\beta = (\det A)\mathbf{b}_\beta$ (vector unitario, ortogonal a $\mathbf{t}_\beta$ y $\mathbf{n}_\beta$), dependiendo de que A sea directo o inverso. Luego

$$\tau_\beta = \left\langle \mathbf{b}'_\beta, \mathbf{n}_\beta \right\rangle = \left\langle \pm A\mathbf{b}'_\alpha; \mathbf{n}_\beta \right\rangle = \pm \left\langle A(\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha), \mathbf{n}_\beta \right\rangle = \pm\tau_\alpha \left\langle \mathbf{n}_\beta, \mathbf{n}_\beta \right\rangle = \pm\tau_\alpha.$$

Teorema 27 (**Fundamental de Curvas en $\mathbb{R}^3$**). *Sean* $k, \tau : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones diferenciables, con* $k(s) > 0$ *para todo* $s \in I$. *Entonces existe una curva regular, p.p.a.,* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, *cuya curvatura y torsión*

$$k_\alpha(s) = k(s) \qquad \tau_\alpha(s) = \tau(s), \qquad \textit{para todo } s \in I.$$

Además, si $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *es otra curva regular p.p.a. con curvatura* $k_\beta(s) = k(s)$ *y torsión* $\tau_\beta(s) = \tau(s)$, *para todo* $s \in I$, *entonces existe un movimiento rígido directo* $M : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $Mx = Ax + b$, *tal que* $\beta = M \circ \alpha$.

Dem: La prueba de la existencia de α NO es constructiva. Obsérvese que las fórmulas de Frenet (1.4) pueden verse como un sistema de ecuaciones diferenciales lineales en $I \times \mathbb{R}^9$, sin más que considerar como incógnitas las funciones coordenadas de los vectores

$$\mathbf{t}(s) = (t_1(s), t_2(s), t_3(s) \qquad \mathbf{n}(s) = (n_1(s), n_2(s), n_3(s)) \qquad \mathbf{b}(s) = (b_1(s), b_2(s), b_3(s)).$$

entonces tendríamos que

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= k(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) &= -k(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= \tau(s)\mathbf{n} \end{aligned} \qquad \qquad \begin{aligned} \frac{dt_1}{ds} &= f_1(s, t_1, t_2, t_3, n_1, n_2, n_3, b_1, b_2, b_3) \\ \frac{dt_2}{ds} &= f_2(s, t_1, t_2, t_3, n_1, n_2, n_3, b_1, b_2, b_3) \\ \vdots &= \quad \vdots \\ \frac{db_2}{ds} &= f_8(s, t_1, t_2, t_3, n_1, n_2, n_3, b_1, b_2, b_3) \\ \frac{db_3}{ds} &= f_9(s, t_1, t_2, t_3, n_1, n_2, n_3, b_1, b_2, b_3) \end{aligned}$$

Fijadas entonces como condiciones iniciales $s_0 \in I$ y una base ortonormal positivamente orientada

$$\mathbf{t}_0 = (t_1^0, t_2^0, t_3^0) \qquad \mathbf{n}_0 = (n_1^0, n_2^0, n_3^0), \qquad \mathbf{b}_0 = (b_1^0, b_2^0, b_3^0),$$

el correspondiente **teorema de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales** asegura la existencia de una única aplicación diferenciable $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^9$, $f(s) = (\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\mathbf{b}(s))$, verificando (1.4) y tal que $f(s_0) = (\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0)$.

Se deduce entonces que, dado un triedro de Frenet $\{\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0\}$, y un valor $s \in I$, existe una familia de triedros $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$, $s \in I$, con $\mathbf{t}(s_0) = \mathbf{t}_0$, $\mathbf{n}(s_0) = n_0$, y $\mathbf{b}(s_0) = \mathbf{b}_0$.

Veamos que la terna $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base ortonormal para todo $s \in$. En efecto, utilizando las ecuaciones de Frenet (1.4) podemos calcular las derivadas de los siguientes 6 productos escalares obtenidos con dichos vectores,

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle \qquad \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle \qquad \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle \qquad \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle \qquad \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \qquad \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle .$$

Como funciones de estas mismas cantidades. En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle &= k \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle - k \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle - \tau \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle &= k \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle + \tau \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle &= -k \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle - \tau \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle + \tau \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle &= 2k \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle &= -2k \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle - 2\tau \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle &= 2\tau \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle \end{aligned}$$

lo que vuelve a ser un sistema de ecuaciones diferenciales cuyas incógnitas son ahora tales productos escalares. Es fácil ver que

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle \equiv 0 \qquad \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle \equiv 0 \qquad \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle \equiv 0 \qquad \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle \equiv 1 \qquad \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \equiv 1 \qquad \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \equiv 1$$

es una solución de dicho sistema con condiciones iniciales $0, 0, 0, 1, 1, 1$ en s_0. Por la unicidad de soluciones, obtenemos que la terna $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base ortonormal para todo $s \in I$, tal y como se quería demostrar.

A partir de la familia $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es posible obtener la curva buscada $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definiendo

$$\alpha(s) := \int \mathbf{t}(s) ds = \Big(\int t_1(s) ds; \int t_2(s) ds, \int t_3(s) ds \Big).$$

Es claro que $\alpha'(s) = \mathbf{t}(s)$ (y por tanto que α está p.p.a.) y que $\alpha''(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$ (utilizando el sistema de Frenet (1.4)). En consecuencia, $k(s)$ es la curvatura de α en s. Además, dado que $\alpha'''(s) = k'(s)\mathbf{n}(s) - k(s)^2\mathbf{t}(s) - k(s)\tau(s)\mathbf{b}(s)$, la torsión de α vale

$$\begin{aligned}
\tau_\alpha(s) &= -\frac{\det(\alpha'; \alpha''; \alpha''')}{\|\alpha''\|^2} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{k^2} \\
&= -\frac{\big\langle \mathbf{t} \times k\mathbf{n}, k'\mathbf{n} - k^2\mathbf{t} - k\tau\mathbf{b} \big\rangle}{k^2} = \tau \langle \mathbf{t} \times \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = \tau \det(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}) = \tau(s).
\end{aligned}$$

La demostración de la unicidad sigue las mismas pautas que en el caso de curvas planas. Supongamos por tanto que existen dos curvas $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con igual curvatura, $k_\alpha(s) = k(s) = k_\beta(s)$ e idéntica torsión, $\tau_\alpha(s) = \tau(s) = \tau_\beta(s)$. Fijamos $s_0 \in I$. Representamos por $\{\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{b}_\alpha\}$ y $\{\mathbf{t}_\beta, \mathbf{n}_\beta, \mathbf{b}_\beta\}$, respectivamente, los triedros de Frenet de α y de β. Entonces, existe una única transformación ortogonal positiva $A \in SO(3)$ del subgrupo especial ortogonal, tal que

$$A\mathbf{t}_\alpha(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0), \qquad A\mathbf{n}_\alpha(s_0) = \mathbf{n}_\beta(s_0), \qquad A\mathbf{b}_\alpha(s0) = \mathbf{b}_\beta(s_0).$$

Definimos el vector $b := \beta(s_0) - A\alpha(s_0)$, y construimos el movimiento rígido $Mx := Ax + b$. Sea $\gamma = M \circ \alpha$. Vamos a comprobar que $\gamma = \beta$, lo que concluirá la demostración. Claramente, se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
&\gamma(s_0) = M\alpha(s_0) = A\alpha(s_0) + b = \beta(s_0) \\
&\mathbf{t}'_\gamma(s_0) = \gamma'(s_0) = (A\alpha + b)'(s_0) = A\alpha'(s_0) = A\mathbf{t}_\alpha(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0); \\
&k_\gamma(s) = k_\alpha(s) = k_\beta(s) = k(s) \qquad\qquad \text{(lema)}, \\
&\tau_\gamma(s) = \tau_\alpha(s) = \tau_\beta(s) = \tau(s) \qquad\qquad \text{(lema 1.3.6, por ser M directo)}, \\
&\mathbf{n}_\gamma(s_0) = \frac{\gamma''(s_0)}{k_\gamma(s_0)} = \frac{A\alpha''(s_0)}{k_\alpha(s_0)} = A\mathbf{n}_\alpha(s_0) = \mathbf{n}_\beta(s_0) \\
&\mathbf{b}_\gamma(s_0) = \mathbf{t}_\gamma(s_0) \times \mathbf{n}_\gamma(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0) \times \mathbf{n}_\beta(s_0) = \mathbf{b}_\beta(s_0)
\end{aligned}$$

esto es, tanto las curvas como sus triedros coinciden en s_0, además de coincidir las funciones curvatura y torsión. Definimos ahora la función

$$f(s) := \frac{1}{2}\Big(\|\mathbf{t}_\beta(s) - \mathbf{t}_\gamma(s)\|^2 + \|\mathbf{n}_\beta(s) - \mathbf{n}_\gamma(s)\|^2 + \|\mathbf{b}_\beta(s) - \mathbf{b}_\gamma(s)\|^2 \Big)$$

que verifica $f(s_0) = 0$. Un sencillo cálculo permite comprobar que

$$\begin{aligned}
f'(s) &= \big\langle \mathbf{t}'_\beta - \mathbf{t}'_\gamma, \mathbf{t}_\beta - \mathbf{t}_\gamma \big\rangle + \big\langle \mathbf{n}'_\beta - \mathbf{n}'_\gamma, \mathbf{n}_\beta - \mathbf{n}_\gamma \big\rangle + \big\langle \mathbf{b}'_\beta - \mathbf{b}'_\gamma, \mathbf{b}_\beta - \mathbf{b}_\gamma \big\rangle \\
&= \langle k\mathbf{n}_\beta - k\mathbf{n}_\gamma, \mathbf{t}_\beta - \mathbf{t}_\gamma \rangle + \langle -k\mathbf{t}_\beta - \tau\mathbf{b}_\beta + k\mathbf{t}_\gamma + \tau\mathbf{b}_\gamma, \mathbf{n}_\beta - \mathbf{n}_\gamma \rangle + \langle \tau\mathbf{n}_\beta - \tau\mathbf{n}_\gamma, \mathbf{b}_\beta - \mathbf{b}_\gamma \rangle = 0.
\end{aligned}$$

En consecuencia, f es una función constante, y dado que $f(s_0) = 0$, concluimos que $f \equiv 0$. Esto nos asegura a su vez que, en particular, $\mathbf{t}_\beta(s) = \mathbf{t}_\gamma(s)$ para todo $s \in I$, es decir, que $(\beta - \gamma)'(s) = 0$. Y de nuevo utilizamos el mismo argumento: como $\beta - \gamma$ es constante y $\beta(s_0) = \gamma(s_0)$, podemos concluir finalmente que $\beta = \gamma$.

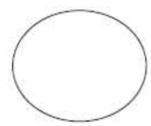
Teoría Global de Curvas Planas

A continuación estudiaremos resultados que hacen referencia a toda la curva y a propiedades que afectan a la curva vista como un todo.

Definición 28 (Curva Cerrada). *Una curva parametrizada* $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ *es* ***cerrada*** *si es periódica, es decir, si existe un número real positivo* a *tal que* $\alpha(t + a) = \alpha(t)$. *Se llama* ***periodo*** *de* α *al menor número positivo* a *que satisface dicha condición.*

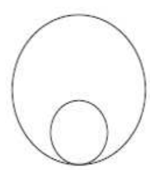
Teorema 29 (de la Curva de Jordan). *Sea* $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ *una curva cerrada y simple entonces* $\mathbb{R}^2 \backslash \alpha(I)$ *tiene, exactamente dos componentes conexas, cuya frontera común es* $\alpha(I)$.

Definición 30 (Curva Convexa). *Una curva regular* $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ *es* ***convexa*** *si todos las rectas tangentes a* α *dejan su traza,* $\alpha(I)$, *totalmente contenida en uno de los semiplanos que dichas rectas determinan.*



Convexa

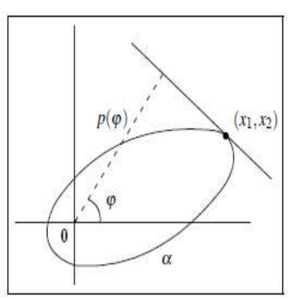
No convexa



No convexa

Algunas medidas geométricas más importantes asociadas a una curva convexa y cerrada son el área, la longitud, el diámetro y la anchura.

Definición 31 (Anchura). *Sea* $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ *una curva convexa y cerrada. Se define la* ***anchura*** *de* α *en dirección* ***u*** *como la distancia entre las dos rectas paralelas tangentes a* α, *que son ortogonales a* ***u***. *La mayor de todas estas anchuras es el diámetro de* α *que se suele denotar por* D.



Sea φ el ángulo que forma la recta que pasa por el origen y es perpendicular a la recta tangente a α en el punto (x_1, x_2) entonces esta recta tangente, puede escribirse como

$$x_1 \cos(\varphi) + x_2 \operatorname{sen}(\varphi) = p(\varphi),$$

donde $p(\varphi)$ es la distancia del origen a la recta tangente, una función periódica de período 2π. El par $(\varphi, p(\varphi))$ reciben el nombre de **coordenadas polares tangenciales** del punto (x_1, x_2).

Derivando $-x_1\operatorname{sen}(\varphi) + x_2\cos(\varphi) = p'(\varphi)$. Esto nos da una representación paramétrica de

$$\alpha(\varphi) = (x_1(\varphi), x_2(\varphi)),$$

con $x_1(\varphi) = p(\varphi)\cos(\varphi) - p'(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi)$ y $x_2(\varphi) = p'(\varphi)\cos(\varphi) + p(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi)$. Luego, la longitud y área de α

$$L = \int_0^{2\pi} |\alpha'(\varphi)| d\varphi = \int_0^{2\pi} (p(\varphi) + p''(\varphi)) d\varphi = \int_0^{2\pi} p(\varphi) d\varphi \quad \textbf{Fórmula de Cauchy}$$

donde en la última igualdad usamos el hecho que $p'(\varphi)$ es una función periódica de período 2π ya que $p(\varphi)$ lo es.

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha p\,ds = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p(\varphi)|\alpha'(\varphi)| d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p(\varphi)(p(\varphi) + p''(\varphi)) d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (p(\varphi)^2 - p'(\varphi)^2) d\varphi \quad \textbf{Fórmula de Blaschke}$$

La desigualdad isoperimétrica

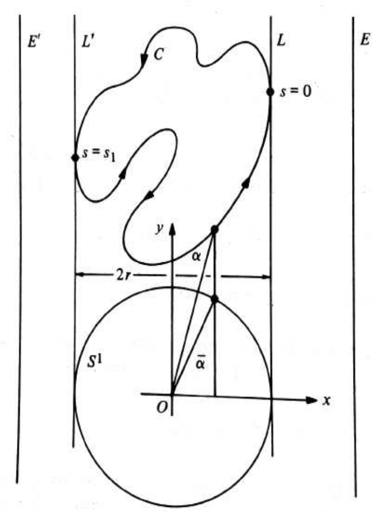
¿Qué curva dibujó con la cinta para abarcar un recinto de área máxima, considerando que estoy junto a las costas del Mediterráneo?

Esta pregunta es equivalente a decir que si α es una curva cerrada en el plano con área A y longitud L, entonces $L^2 \geqslant 4\pi A$, dándose la igualdad si, y sólo si, α es una circunferencia. Esta relación se conoce como la desigualdad isoperimétrica clásica.

Teorema 32 (**Desigualdad Isoparamétrica**).
Entre todas las curvas simples y cerradas de longitud dada l, la que encierra mayor área es la circunferencia. En otras palabras; si A es el área de la región acotada por una curva simple y cerrada α de longitud l, entonces

$$l^2 \geqslant 4\pi A$$

alcanzándose la igualdad si, y sólo si, α es una circunferencia.



Dem:

1. Supongamos que α está p.p.a por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, $s \in [0, l]$.
2. Sea E,E' dos rectas paralelas que no cortan a α.
3. Desplace E, E' hasta que corten por primera vez a α. Observe que α esta contenida enteramente en la banda de L y L'.
4. Considere $\mathbb{S}^1$ que es tangente a L y L' y no corta a α. Su parametrización es $\overline{\alpha}(t) = (\overline{x}(t), \overline{y}(t)) = (x(t), \overline{y}(t))$, $s \in [0, l]$.
5. Usando Fórmula de Green sabemos que

$$\frac{1}{2}\int_\alpha x dy - y dx = \frac{1}{2}\iint_R (Q_x - P_y) dA = \iint_R dA = A.$$

- en nuestro caso

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^l x dy - y dx = \frac{1}{2}\int_0^l (xy' - yx' ds = \frac{1}{2}\int_0^l (xy)' ds - 2yx' ds \\ &= -\int_0^l yx' ds \\ &= \int_0^l xy' ds. \end{aligned}$$

En conclusión tenemos que

$$A = \int_0^l xy'ds \qquad \overline{A} = \pi r^2 = -\int_0^l \overline{y}\,\overline{x}'ds = \int_0^l \overline{y}x'ds.$$

- Por tanto,

$$A + \pi r^2 = \int_0^l (xy' - \overline{y}x')ds \leqslant \int_0^l \|xy' - \overline{y}x'\|ds = \int_0^l \|\langle (x', y'), (-\overline{y}, x)\rangle\|ds \tag{1.4}$$

$$\leqslant \int_0^l \|(x', y')\|\,\|(-\overline{y}, x)\|ds = \int_0^l \|(-\overline{y}, x)\|ds = \int_0^l rds = rl. \tag{1.5}$$

- Recordemos desigualdad existente entre las medias geométrica y aritmética de $a, b \in \mathbb{R}$, $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ (dándose la igualdad $\iff a = b$), tomando $a = A$ y $b = \pi r^2$ encontramos que

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} \leqslant \frac{A + \pi r^2}{2} \leqslant \frac{rl}{2}. \tag{1.6}$$

  Por tanto, $4\pi Ar^2 \leqslant l^2 r^2$ y esto no lleva a $l^2 \geqslant 4\pi A$.

Para concluir supongamos que $l^2 = 4\pi A$. Entonces, todas las desigualdades que aparecen en la demostración, esto es, (1.4), (1.5) y (1.6), deben ser igualdades.

- De (1.6) implica $A = \pi r^2$. en cuyo caso, $L^2 = 4\pi^2 r^2$. Esto es, $l^2 = 2\pi r$ lo que prueba que el radio r es constante, no dependiendo de la elección de las rectas L y L'.
- La igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz (1.5) se tiene si, y sólo sí, los dos vectores son proporcionales. Luego existe una constante c tal que

$$(-\overline{y}, x) = c(x', y') \qquad \text{luego} \qquad r = \|(-\overline{y}, x)\| = \|c(x', y')\| = |c|.$$

  Por otro lado,

$$xy' - \overline{y}x' = \left\langle -\overline{(}y, x), (x', y') \right\rangle = \langle c(x', y'), (x', y')\rangle = c = \pm r.$$

  La igualdad en (1.23) implica que $xy' - \overline{y}x' > 0$, y en consecuencia, por el apartado anterior, que $c = r$.

En particular, se tiene que $x = ry'$. Finalmente, debido a que r es constante y no depende de las rectas L y L', será también independiente de la elección de los ejes coordenados. Podemos por tanto intercambiar x e y en la última relación, obteniéndose así que $y = rx'$. En consecuencia,

$$x^2 + y^2 = r^2(x'^2 + y'^2) = r^2,$$

lo que prueba que $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ es una circunferencia. Esto concluye la demostración de la desigualdad isoperimétrica. ■