# Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales de Segundo Orden con Polinomios de Zernike

## 1 Método de solución

Consideramos la ecuación diferencial parcial de segundo orden en coordenadas cartesianas:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_1\frac{\partial u}{\partial x} + a_2\frac{\partial u}{\partial y} + a_0 u = f(x, y). \tag{1}$$

Para problemas en regiones circulares, se usa una forma rotacionalmente invariante:

$$\Delta u + \alpha\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + \beta\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) u + \gamma u = f. \tag{2}$$

En coordenadas polares $(r, \phi)$ la ecuación se reescribe como:

$$(1 + \alpha r^2)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} + (\alpha + \beta) r\right)\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \gamma u = f. \tag{3}$$

### 1.1 Transformación a un sistema lineal

Se usa una base de polinomios de Zernike $R_n^m(r)e^{im\phi}$ para aproximar $u(r, \phi)$. Luego, se integran las ecuaciones dos veces respecto a $r$ y dos veces respecto a $\phi$, lo que permite expresar la ecuación en términos de matrices operacionales $E$, transformando la ecuación en un sistema lineal:

$$Ax = b, \tag{4}$$

donde $A$ es una matriz dispersa de tamaño $MN \times MN$, $x$ es el vector de coeficientes de la solución y $b$ representa los términos forzantes y las condiciones de frontera.

## 2 Ejemplo: Ecuación de Laplace

Consideremos la ecuación de Laplace:

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0. \tag{5}$$

Supongamos que la condición de frontera en $r = r_0$ es $u(r_0, \phi) = g(\phi)$ y el valor inicial $u(0, \phi) = 1$. Expandiendo $u(r, \phi)$ en polinomios de Zernike hasta grado 3:

$$u(r, \phi) \approx 1 + r\cos\phi + \frac{1}{4}r^2(1 + \cos 2\phi) - \frac{3}{2}r^3\cos\phi. \tag{6}$$

El sistema $Ax = b$ se resuelve con dos métodos:

- **Mínimos cuadrados ($\ell_2$)** usando la pseudo-inversa de Moore-Penrose.
- **Minimización** $\ell_1$, obteniendo mejor precisión.

La solución por minimización $\ell_1$ es:

$$u(r, \phi) = 1 + \frac{1}{4}r^2(1 + \cos 2\phi) - \frac{3}{2}r^3\cos\phi. \tag{7}$$

Este método muestra que la representación en términos de polinomios de Zernike es eficaz para resolver ecuaciones diferenciales parciales en dominios circulares.