Análisis Armónico: Taller 1

28 de abril de 2025

Universidad Nacional de Colombia

Ricardo Ariel Pastrán Ramirez

Andrés David Cadena Simons acadenas@unal.edu.co

Problema 1:

El objetivo de este ejercicio es probar que la transformada de Fourier

$$\widehat{\ } = \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C^0_\infty(\mathbb{R})$$
$$f \to \widehat{f}$$

no es sobreyectiva.

(I) Pruebe que $(C^0_\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

(II) Use la fórmula de inversión de Fourier para probar que $\mathcal{F}$ es inyectiva.

(III) Suponga que $\mathcal{F}$ es sobreyectiva. Use el teorema de la aplicación abierta para deducir que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|f\|_1 \leq C \left\|\widehat{f}\right\|_\infty, \text{ para toda } f \in L^1(\mathbb{R}).$$

(IV) Sea $A \leq 1$, definase

$$\phi_A := \chi_{[-A,A]}, \quad \psi_A := \phi_A * \phi_1 \quad \text{y} \quad g_A := \widehat{\psi_A}.$$

Pruebe que

$$\|\widehat{g_A}\|_\infty < \infty, \quad g_A(x) = \frac{\sin(2\pi Ax)\sin(2\pi x)}{(\pi x)^2}, \quad \|g_A\|_1 \to +\infty \text{ cuando } A \to +\infty,$$

y concluya una contradicción con (III).

Solución:

(I) Sea $\{\phi_n\} \subset C^0_\infty(\mathbb{R})$ una sucesión de Cauchy que converge a ϕ cuando $n \to \infty$, veamos que $\phi \to C^0_\infty(\mathbb{R})$.
Sabemos que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$, entonces

$$\|\phi_n - \phi_m\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\phi_n(x) - \phi_m(x)| < \epsilon,$$

Veamos primero que $\phi \in C^0(\mathbb{R})$.
Note que

$$\begin{aligned}|\phi(x) - \phi(y)| &\leq |\phi(x) - \phi_n(x)| + |\phi_n(x) - \phi_n(y)| + |\phi_n(y) - \phi(y)|\,, \\ &\leq \|\phi - \phi_n\|_\infty + |\phi_n(x) - \phi_n(y)| + \|\phi_n - \phi\|_\infty\,, \\ &\leq 2I + J.\end{aligned}$$

Note que como $\{\phi_n\} \subset C^0_\infty(\mathbb{R})$, entonces estas son continuas, por lo que sabemos que dado $\frac{\epsilon}{3} > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces $|\phi_n(x) - \phi_n(y)| < \frac{\epsilon}{3}$. Por otro lado note que como $\{\phi_n\}$ es de Cauchy, entonces dado $\frac{\epsilon}{3} > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$, entonces

$$\|\phi_m - \phi_n\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}.$$

Fije n y haga $m \to \infty$, luego

$$I = \|\phi - \phi_n\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}.$$

Ahora, sabemos que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si tomamos n fijo y adecuado se satisface que

$$\begin{aligned}
|\phi(x) - \phi(y)| &\leq 2I + J, \\
&< \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}, \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Lo que concluye que $\phi \in C^0(\mathbb{R})$.
Ahora veamos que $\phi \to 0$ cuando $x \to \infty$.
Note que dado $\frac{\epsilon}{2} > 0$ existe $N > 0$ y $R > 0$ tal que si $|x| > R$, entonces

$$|\phi_N(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Luego note que fijando ese N y R se cumple que

$$\begin{aligned}
|\phi(x)| &\leq |\phi(x) - \phi_N(x)| + |\phi_N(x)|, \\
&\leq \|\phi - \phi_N\|_\infty + |\phi_N(x)|, \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}, \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Lo que termina por concluir que $\phi \in C^0_\infty(\mathbb{R})$.

(II) Suponga $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ tales que $\widehat{f} = \widehat{g}$, entonces veamos que $f = g$ en casi toda parte. Como $\widehat{f} = \widehat{g}$, entonces $\widehat{f} - \widehat{g} = \widehat{f - g} = 0$, luego usando la fórmula de inversión de Fourier

$$\begin{aligned}
(f - g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f - g}(\xi) e^{2\pi i x \xi}\, d\xi, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} 0\, d\xi, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De lo que se puede concluir que $f = g$ bajo la medida de Lebesgue, es decir, en casi toda parte.

(III) Teorema en cuestión.

Theorem 1: Teorema de la aplicación abierta

Si $T : X \to Y$ es un operador lineal, continuo y biyectivo entre espacios de Banach, entonces la inversa T^{-1} es también continua, es decir que existe $C > 0$ tal que

$$\left\|T^{-1}f\right\|_X \leq C\left\|f\right\|_Y.$$

Suponga que $\mathcal{F}$ es sobreyectiva, entonces como $L^1(\mathbb{R})$ es Banach, $C^0_\infty(\mathbb{R})$ es Banach, $\mathcal{F}$ satisface ser un operador lineal y además

$$\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \left\|f\right\|_1,$$

es decir, es continua, por el teorema de la aplicación abierta se satisface que $\mathcal{F}^{-1}$ es también continua, es decir que existe $C > 0$ tal que

$$\left\|f\right\|_1 \leq C\left\|\widehat{f}\right\|_\infty.$$

(IV) calculemos $g_A(x)$, para esto

$$\begin{aligned} g_A(x) &= \widehat{\psi_A}(x), \\ &= \widehat{\phi_A * \phi_1}(x), \\ &= \widehat{\phi_A}(x)\widehat{\phi_1}(x). \end{aligned}$$

Siendo así, hallemos $\widehat{\phi_A}$, será útil recordar que ϕ_A es una función par, luego

$$\begin{aligned} \widehat{\phi_A}(x) &= \int_{-A}^{A} \cos(2\pi x\xi)\, d\xi, \\ &= \left.\frac{\sin(2\pi\xi x)}{2\pi x}\right|_{-A}^{A}, \\ &= \frac{\sin(2\pi A x)}{\pi x}. \end{aligned}$$

Por lo que podemos afirmar que

$$g_A(x) = \frac{\sin(2\pi A x)\sin(2\pi x)}{(\pi x)^2}$$

Ahora, veamos que $\left\|g_A\right\|_\infty < \infty$.
Note que

$$g_A(x) = \frac{\sin(2\pi A x)}{2\pi A x} \cdot \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} \cdot 4A.$$

Luego es claro que $g_A \to 0$ cuando $|x| \to \infty$, además así como $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$ cuando $x \to 0$, también se tiene que $g_A \to 4A$ cuando $x \to 0$, luego g_A es continua (en casi toda parte) y es acotada en el infinito, entonces $\|g_A\|_\infty < \infty$. Ahora veamos que $\|\psi_A\|_1 \to \infty$ cuando $A \to \infty$.

$$\begin{aligned}
\|\psi_A\|_1 &= \|\phi_A * \phi_1\|_1 \,, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi_A(y)\phi_1(x-y)\,dy\,dx, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_A(x) \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(x-y)\,dy\,dx, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_A(x) \int_{y-1}^{y+1} \,dx\,dy, \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} \phi_A(x)\,dx, \\
&= 4A.
\end{aligned}$$

Luego $\|\psi_A\|_1 \to \infty$ cuando $A \to \infty$, entonces por (III) se cumple que

$$\|\psi_A\|_1 \leq C\,\|g_A\|_\infty\,, \quad \text{para toda } A \text{ con } C \text{ uniforme.}$$

lo que nos lleva a una contradicción de la forma $\infty < M < \infty$, por lo que podemos concluir que (III) es falsa y por ende $\mathcal{F}$ no es sobreyectiva.

Problema 2:

Pregunta

Solución:

Solución

Problema 3:

Pregunta

Solución:

Solución

Problema 4:

Pregunta

Solución:

Solución

Problema 5:

Pregunta

Solución:

Solución