Notes de cours
DEA, Université Paris 13, 2003/2004

Fabrice Planchon
Département de Mathématiques,
Institut Galilée

Avril 2004

Introduction

Le but de ce cours est d'introduire les outils nécessaires pour l'étude du problème de Cauchy à faible régularité pour des équations semi-linéaires, du type ondes ou dispersives. Le but étant d'être presque auto-contenu, la présentation ne respecte pas l'ordre habituel ou historique. La bibliographie contient des références qui couvrent les résultats présentés ici de façon exhaustive.
Donnons maintenant quelques références qui permettent d'approfondir ou simplement de retrouver tout ou partie du contenu présenté, parfois dans une exposition complètement différente.
Sur l'analyse de Littlewood-Paley, les espaces de Besov, et l'interpolation, on pourra commencer par [1], qui est principalement centré sur la théorie de l'interpolation. [24] est une référence exhaustive sur les espaces de Besov, [13] contient la philosophie de la chose. Concernant les paraproduits, [14] est une référence complète, on pourra commencer par [7] pour une présentation dans le contexte des EDPs, ou tout simplement lire [2]. Pour approfondir l'aspect analyse harmonique, il y a les ouvrages de référence, à commencer par [18] (et [19] pour les développements récents).
Concernant l'équation de Schrödinger, on pourra consulter [3], et pour les ondes, les premiers chapitres de [16]. Enfin, on trouvera dans [20] une excellente présentation du sujet.
Suggestions et corrections, *fab@math.univ-paris13.fr*.

Table des matières

Chapitre 1

Présentation générale

Le but de ce cours est d'étudier quelques exemples d'équations aux dérivées partielles d'évolution, semi-linéaires. Commençons par rappeler quelques éléments de terminologie : lorsque l'on considère une équation aux dérivées partielles, celle-ci s'écrit le plus souvent comme

$$F(\phi, \partial\phi) = 0, \tag{1.1}$$

où la fonction F est a priori vectorielle ($F : \mathbb{R}^M \to R^P$), et où ϕ est une fonction (éventuellement vectorielle) de $x = (x_1, \cdots, x_n)$. Comme l'on singularisera dans la suite une des variables comme étant le temps, on notera désormais la variable comme étant $(t, x) = (t, x_1, \cdots, x_n)$, et ϕ est ainsi une fonction de $n+1$ variables. La notation ∂ désigne indifféremment le gradient total $(\partial_t, \nabla) = (\partial_t, \partial_1, \cdots, \partial_n)$ ou l'une de ses coordonnées. Par contraste ∇ désignera le seul gradient spatial (ou, génériquement, l'une quelconque des dérivées partielles spatiales).
Indépendamment du choix de singulariser une variable comme étant "le temps", on classe les équations (1.1) en trois grands types. Pour les décrire nous nous limitons au cas simple où F est un polynôme :

- Complètement non-linéaire : l'équation est non-linéaire en $\partial\phi$, par exemple $|\partial\phi|^2 + \phi^3 = 0$. Même dans le cas le plus favorable, c'est-à-dire une équation de type elliptique, on ne sait pas dire grand chose, sauf cas très particulier. On notera que de toute façon à ce niveau de généralité, il ne faut pas non plus s'attendre à un miracle.
- Quasi-linéaire : l'équation est linéaire en $\partial\phi$, mais les coefficients de $\partial\phi$ dépendent de ϕ, par exemple $\phi\partial\phi + \phi^2 = 0$. De nombreuses équations issues de modèles physiques sont de ce type ou peuvent s'y ramener : équations de mécanique des fluides compressibles, équations de la relativité générale... On possède de nombreux outils pour attaquer ces problèmes.
- Semi-linéaire : l'équation est linéaire en $\partial\phi$, et les coefficients de $\partial\phi$ sont indépendants de ϕ : les termes non-linéaires ne font donc intervenir que ϕ : $\partial\phi + \phi^2 = 0$.

REMARQUE 1
On s'est volontairement limité à une équation du premier ordre : rappelons que l'on peut toujours s'y ramener par changement de fonction inconnue : par exemple, si l'équation dépend de u, ∂u, $\partial^2 u$ (comme dans beaucoup de modèles d'origine physique, où la présence de dérivées secondes provient souvent de l'application du principe de moindre action), on posera simplement $\phi = (u, \partial u)$. Cette transformation n'a pas toujours un intérêt pratique évident, au-delà de la classification précédente.

Nous nous intéresserons au problème de Cauchy pour une équation d'évolution semi-linéaire, c'est-à-dire que l'on se donne une fonction $\phi_0(x)$, la donnée à l'instant initial $t = 0$, et que l'on cherche une solution $\phi(x, t)$ aux temps ultérieurs. Les exemples classiques d'équations semi-linéaires sont

– Équations dissipatives : la partie linéaire est l'équation de la chaleur,

$$\partial_t - \Delta u = F(u, \partial u). \tag{1.2}$$

Un exemple très étudié est le système de Navier-Stokes incompressible,

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v + v \cdot \nabla v = -\nabla p \\ \nabla \cdot v = 0 \\ v_{|t=0} = v_0. \end{cases} \tag{1.3}$$

où l'on notera que la partie linéaire est en fait le système de Stokes, et que, formellement au moins, on peut éliminer la pression en écrivant $p = \Delta^{-1} \sum_{ij} \partial_i \partial_j (u_i u_j)$, ce qui nous donne bien une équation semi-linéaire, où la non-linéarité fait intervenir un opérateur pseudo-différentiel d'ordre un.

– Équations hyperboliques du type équation des ondes :

$$\Box u = \partial_t^2 u - \Delta u = F(u, \partial u), \tag{1.4}$$

où, l'équation étant d'ordre deux en temps, la donnée initiale est un couple de fonctions (u_0, u_1) représentant $u(t = 0)$ et $\partial_t u(t = 0)$. Ce type d'équations apparaît dans beaucoup d'endroits où il y a un phénomène de type propagation d'ondes, et aussi dans des modèles de théories des champs (Yang-Mills). Un exemple lié à Yang-Mills est l'équation des wave maps de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans la sphère $\mathbb{S}^m$:

$$\Box u = (|\nabla u|^2 - |\partial_t u|^2) u, \tag{1.5}$$

où u est un vecteur de $\mathbb{R}^m$ de longueur unité (exercice : vérifier formellement qu'effectivement si $|u_0| = 1$ et $u_1 \cdot u_0 = 0$ alors ultérieurement $|u| = 1$).

On notera que les trois classes d'équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme

$$\partial_t \phi + A\phi = N(\phi), \tag{1.6}$$

où A est un certain opérateur différentiel en espace (en toute généralité, ses coefficients pourraient dépendre du temps, ça n'est pas le cas ici), et où l'on se donne la donnée initiale $\phi(t = 0) = \phi_0$. On souhaite résoudre une telle équation comme on le ferait s'il s'agissait d'une équation différentielle ordinaire (EDO), c'est-à-dire comme si ϕ était un vecteur à composantes dépendant du temps et A une matrice. Dans ce cas la solution s'obtient par le théorème de Cauchy-Lipschitz, sous des hypothèses convenable sur N. La théorie des semi-groupes nous fournit un substitut pour l'équation (1.6) : on dispose d'un opérateur $S(t) = \exp(tA)$ qui nous donne la solution $S(t)\phi_0$ pour l'équation linéaire ($N = 0$), et l'on cherche alors à résoudre l'équation intégrale suivante, qui résulte formellement du principe de Duhamel :

$$\phi(t) = S(t)\phi_0 + \int_0^t S(t - s) N(\phi)(s) ds. \tag{1.7}$$

Il convient bien sûr de donner un sens convenable à cette équation, et après l'avoir résolu, de se poser la question de savoir si une solution de (1.7) est ou non une solution de (1.6).

Remarque 2
La réponse à cette dernière question n'est pas nécessairement automatique (elle ne l'est d'ailleurs déjà pas pour les EDOs), et tourne autour du concept de solution ; la réponse pourra varier suivant la définition qu'on en donnera. En pratique, on pourra simplement ignorer le problème : si l'on se donne une donnée régulière, on peut espérer montrer (pas nécessairement à la construction) que la solution de (1.7) l'est aussi, au moins pour un certain laps de temps, ce qui assure alors qu'il s'agit bien d'une solution de (1.6) au sens classique (en tout point (t, x)).

Il est clair que pour mener à bien l'étude de (1.7), il faut commencer par étudier les propriétés de l'équation linéaire, i.e. les propriétés de l'opérateur $S(t)$. Ceci permet souvent de dégager un cadre fonctionnel raisonnable, et dans un second temps, il s'agit de trouver, dans ce cadre fonctionnel, quels sont les espaces (de Banach) les mieux adaptés pour traiter la non-linéarité $N(\phi)$, sachant que l'on souhaite terminer par le classique théorème de Picard. Si l'on trouve des espaces qui se comportent bien à la fois sous l'action de $S(t)$ et de N, alors on pourra espérer résoudre.

Remarque 3
Une approche différente consiste à procéder par passage à la limite faible (compacité) : on écrit les invariants (quantités conservées ou au moins contrôlées) formellement, on en déduit un cadre fonctionnel, on régularise pour se ramener à une EDO que l'on sait résoudre, et on passe à la limite dans l'approximation (ce qui revient à faire un autre type de point fixe, théorème de Schauder). On remarquera que dans cette approche, la difficulté n'est pas le choix des espaces, mais plutôt le passage à la limite : il faut trouver la compacité.

Remarque 4
Les deux approches ont leurs mérites et leurs inconvénients. La seconde donne souvent, dans les cas où il existe des invariants globaux en temps, des solutions globales, mais elle ne donne pas leur unicité : il faut la montrer a posteriori, ce qui peut s'avérer une tâche très difficile (Navier-Stokes en 3D) ou tout simplement faux. A contrario, les points fixes à la Picard donnent une forme d'unicité, mais sont souvent restreints à un intervalle de temps fini ou à de petites données. Ils obligent aussi généralement à considérer des données relativement régulières.

Au-delà de l'étude du problème de Cauchy, un certain nombre de questions se posent naturellement : à supposer que l'on ait obtenu une solution locale en temps, que devient-elle à grand temps ? a-t-on existence globale à grande donnée ou explosion ? dans l'un ou l'autre cas, quel est le comportement de la solution (peut-on la comparer à un objet asymptotique plus simple, par exemple la solution d'une équation linéaire, ou obtenir des bornes sur le taux d'explosion) ? tous ces problèmes sont le prolongement de l'étude de Cauchy, et certains s'étudient avec les mêmes outils, comme nous le verrons ultérieurement.

Dans tout ce qui suivra, nos outils principaux seront issus de l'analyse harmonique, et plus particulièrement des techniques liées à la transformation de Fourier et ses raffinements. Pour cette raison, nous travaillerons toujours dans l'espace entier pour la variable d'espace : $x \in \mathbb{R}^n$, où $n = 2, 3$ en général.

Dans ce cadre, il y a une famille d'espaces fonctionnels qui apparaît naturellement, ce sont les espaces de Sobolev, dont nous rappelons la définition. On notera $\hat{f}$ la transformée de Fourier d'une distribution tempérée f ($\hat{f}(\xi) = \int \exp(-ix\cdot\xi)f(x)dx$) :

DÉFINITION 1
Soit $s \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ une distribution tempérée. On dira que f appartient à l'espace de Sobolev H^s si et seulement si $\int(1+|\xi|^2)^s|\hat{f}(\xi)|^2d\xi < \infty$, et cette quantité définit (le carré d') une norme hilbertienne.

Notons que l'espace d'énergie H^1 apparaît le plus souvent en connection avec diverses lois de conservation, tout comme L^2. Les espaces de Sobolev d'ordre entier plus grand que un sont un premier prolongement naturel, pour mesurer la régularité des solutions, les espaces d'ordre demi-entier s'introduisant ensuite, dans les problèmes à bord, comme les espaces adaptés pour prendre les traces. On verra ultérieurement que les s non entiers apparaissent relativement naturellement en fonction de l'équation et de la numérologie qui lui est associée (notamment les invariances d'échelle).
L'idée derrière l'utilisation de la transformée de Fourier est liée aux propriétés associées des opérateurs différentiels : une dérivation $-i\nabla$ se transforme en multiplication par ξ. Par exemple, si l'on veut résoudre l'équation de la chaleur linéaire, et que l'on cherche une solution dans les distributions tempérées, alors l'équation devient

$$\partial_t\hat{u} + |\xi|^2\hat{u} = 0,$$

qui est donc devenue une EDO, dont la solution est $\hat{u} = \exp(-t|\xi|^2)\hat{u}_0$. On peut procéder de même pour l'équation de Schrödinger et l'équation des ondes linéaires. On souhaite aller plus loin (ce qui se révèlera fort utile dans les problèmes non-linéaires), et remplacer en un sens convenable la dérivation par la multiplication par une constante. Considérons une fonction $f \in \mathcal{S}$; la transformée de Fourier de son gradient est $\xi\hat{f}(\xi)$. Supposons de plus que $\hat{f}$ soit relativement concentrée autour d'une taille de fréquence fixée λ : une façon de rendre cette affirmation quantitative est de demander que le support de $\hat{f}$ soit compris dans une bande autour de λ, $\operatorname{supp}\hat{f} \subset \{\xi \text{ t.q. } \lambda-\mu \leq |\xi| \leq \lambda+\eta\}$, avec $\mu,\eta > 0$. On souhaite finalement pouvoir dire que ∇f est de l'ordre de λf : on peut le mesurer en norme L^2, et grâce à Plancherel on a

$$(\lambda-\mu)\|\hat{f}\|_2 \leq \|\partial f\|_2 \leq (\lambda+\eta)\|\hat{f}\|_2.$$

Donc pour pouvoir quantifier l'affirmation précédente, il faut (et il suffit) que la taille de l'intervalle $[\lambda-\mu,\lambda+\eta]$ soit au pire de l'ordre de λ : alors on aura bien

$$\lambda\|\hat{f}\|_2 \approx \|\nabla f\|_2.$$

Ceci conduit naturellement à décomposer une fonction quelconque en somme de fonctions localisées en fréquence, sur des intervalles dont la taille est proportionnelle à la fréquence. Par exemple, notons $\hat{f}_j(\xi) = \chi_{2^j\leq|\xi|\leq 2^{j+1}}\hat{f}(\xi)$, alors

PROPOSITION 1
Une norme équivalente à la norme Sobolev H^s usuelle est

$$\|u\|^2_{H^s} \approx \|\chi_{|\xi|<1}f\|_2^2 + \sum_{j\geq 0} 2^{2js}\|f_j\|_2^2. \tag{1.8}$$

La démonstration est laissée au lecteur (elle repose sur l'observation précédente, appliquée non plus au gradient mais à $|\xi|^s$).
On peut alors légitimement se demander ce qu'il advient si l'on remplace la norme L^2 par une norme L^p générique, $p \in [1, +\infty]$. Malheureusement, le multiplicateur de Fourier $\chi_{2^j \leq |\xi| \leq 2^{j+1}}$ n'est pas continu sur L^p, pour $p \neq 2$, en dimension $n > 1$ (c'est un résultat plus profond qu'il n'y parait, [6]). D'une manière générale, l'action d'un multiplicateur de Fourier $m(\xi)$ n'est pas aussi facile à analyser sur L^p que sur L^2, où l'opérateur associé est borné si et seulement si $m \in L^\infty$. On verra dans le prochain chapitre comment contourner ces difficultés.
Pour conclure, indiquons cependant une première généralisation des espaces de Sobolev usuels, que l'on appellera les espaces de Sobolev homogènes :

DÉFINITION 2
Une distribution tempérée $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ appartient à l'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^s$ si $\hat{f} \in L^1_{loc}$ et si

$$\int |\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < +\infty. \tag{1.9}$$

Cette quantité définit (le carré d') une norme. Une norme équivalente est

$$\|u\|^2_{\dot{H}^s} \approx \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{2js} \|f_j\|_2^2.$$

REMARQUE 5
Le seul point vraiment nouveau par rapport à la définition du cas inhomogène est l'ajout de la condition $\hat{f} \in L^1_{loc}$. En effet, si la quantité de la définition est nulle pour une distribution tempérée f quelconque, alors $\hat{f}$ est nulle sur tous les intervalles de longueur dyadique, donc le support de $\hat{f}$ est réduit à zéro. Un exercice classique de théorie des distributions nous apprend que les distributions dont le support est réduit est réduit à un point sont des combinaisons linéaires du dirac et de ses dérivées en ce point. Ces distributions ne sont évidemment pas dans L^1_{loc}, donc la condition supplémentaire nous permet d'éliminer ce cas : on a, en quelque sorte, éliminé les fonctions polynômes, pour lesquelles la quantité qui définit la norme $\dot{H}^m$, $m \in \mathbb{N}$, est toujours nulle, c'est-à-dire que l'on a imposé une forme de décroissance à l'infini. On aurait pu alternativement définir la norme homogène sur la classe de Schwartz, et définir l'espace de Sobolev homogène comme le complété pour cette norme de $\mathcal{S}$.

Chapitre 2

Analyse de Littlewood-Paley

Dans ce chapitre, nous allons mettre en place l'heuristique indiquée précédemment : nous allons donc construire des espaces fonctionnels pour lequel "dériver" reviendra à multiplier par la taille de la fréquence. Nous commençons par les espaces de Sobolev homogènes : rappelons que la norme dans $\dot{H}^s$ est

$$\|f\|^2_{\dot{H}^s} = \int |\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Compte-tenu de la discussion du chapitre précédent, on souhaite partitionner l'espace des fréquences ξ, par rapport à la taille de $|\xi|$, en des zones où $|\xi| \approx \lambda$ ne varie pas plus que de $\lambda/2$. Le plus simple est d'utiliser une partition dyadique en couronnes, $\{2^j \leq |\xi| < 2^{j+1}\}$. La norme Sobolev homogène se réécrit en effet

$$\|f\|^2_{\dot{H}^s} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{2^j \leq |\xi| < 2^{j+1}} |\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi,$$

et comme à j fixé, sur le domaine d'intégration $2^{js} \leq |\xi|^s < 2^s 2^{js}$, si l'on définit une nouvelle norme

$$N(f)^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2js} \int_{2^j \leq |\xi| < 2^{j+1}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi,$$

on a une norme équivalente à la précédente, avec $N(f) \leq \|f\|_{\dot{H}^s} \leq 2^{2s} N(f)$.

2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Ultérieurement, on sera amené à travailler avec des espaces faisant intervenir non plus seulement L^2 mais aussi L^p, $p \neq 2$. On souhaite transposer le type de raisonnement de l'introduction dans ce cadre plus général. Il serait tentant de considérer les quantités $\|\mathcal{F}^{-1}(\chi_{2^j \leq |\xi| < 2^{j+1}} \hat{f}(\xi))\|_p$, mais l'indicatrice d'une boule (euclidienne !) $B(0,1)$ n'est pas un multiplicateur de Fourier continu sur L^p pour $p \neq 2$, en dimension $n \geq 2$.

Remarque 6
Cette dernière assertion est un théorème profond du à Fefferman ([6]).

Pour contourner ce problème, nous allons simplement "lisser" le multiplicateur de Fourier.

DÉFINITION 3
Fixons $\varepsilon < 1$ *(par exemple* $1/10$*). Soit* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *tel que* $\widehat{\phi} = 1$ *pour* $|\xi| \le 1$ *et* $\widehat{\phi} = 0$ *pour* $|\xi| > 1 + \varepsilon$*. On note* $\phi_j(x) = 2^{nj}\phi(2^j x)$*.*

- *On définit* S_j *comme l'opérateur de convolution par* ϕ_j*, i.e. l'opérateur de* $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ *qui à* f *associe* $\phi_j * f$*. On remarquera que le support de la transformée de Fourier de* $S_j f$ *est contenu dans la boule* $|\xi| \le (1+\varepsilon)2^j$*, et que pour* $|\xi| \le 2^j$*,* $\widehat{S_j f}(\xi) = \hat{f}(\xi)$*.*
- *Soit* $\varphi(\xi) = \widehat{\phi}(\xi/2) - \widehat{\phi}(\xi)$*,* $\varphi_j(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi)$*. On définit l'opérateur de localisation autour de la fréquence* 2^j *comme* $\Delta_j = S_{j+1} - S_j$*, autrement dit* $\Delta_j f = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_j(\xi)\hat{f}(\xi))$*. On remarquera que le support de la transformée de Fourier de* $\Delta_j f$ *est donc contenu dans la couronne* $2^j \le \xi \le 2(1+\varepsilon)2^j$*, et que sur la couronne* $2^j(1+\varepsilon) \le |\xi| \le 2^{j+1}$*,* $\widehat{\Delta_j f}(\xi) = \hat{f}(\xi)$*.*

Finalement, on note que $S_j = \sum_{k\in\mathbb{Z},\, k<j} \Delta_j$*, et que* $1 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi_j(\xi)$*.*

REMARQUE 7
Il n'existe pas de définition canonique des opérateurs S_j*,* Δ_j *et de la décomposition de Littlewood-Paley associée. Notre définition dépend de toute façon du choix de* ε *puis de* ϕ*. Une autre alternative souvent rencontrée consiste à définir une fonction* $\eta(\xi)$ *valant* 1 *sur la couronne* $1 \le |\xi| \le 2$ *et* 0 *à l'extérieur de* $1 - \varepsilon \le |\xi| \le 2 + \varepsilon$*, puis à la normaliser en remarquant que* $\sigma(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \eta(2^j\xi)$ *est une fonction bornée, strictement positive. On définit alors* $\varphi(\xi) = \eta(\xi)/\sigma(\xi)$*, puis* Δ_j *et enfin* S_j*.*

L'intérêt d'une telle décomposition réside dans les propriétés de presque-orthogonalité des opérateurs Δ_j (on pourra les comparer avec les multiplicateurs de Fourier $\chi_{2^j \le |\xi| < 2^{j+1}}$ qui sont eux orthogonaux). En effet, si $|j - j'| \ge 2$, alors $\Delta_j \Delta_{j'} = 0$ puisque les supports de φ_j et $\varphi_{j'}$ sont disjoints. Par exemple, considérons $f \in \dot{H}^s$: on écrit

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi)|^2 &= |\sum_j \widehat{\Delta_j f}(\xi)|^2 \\
&= \sum_j |\widehat{\Delta_j f}(\xi)|^2 + 2\sum_{j<j'} \widehat{\Delta_j f}(\xi)\widehat{\Delta_{j'} f}(\xi) \\
&= \sum_j |\widehat{\Delta_j f}(\xi)|^2 + 2\sum_j \widehat{\Delta_j f}(\xi)\widehat{\Delta_{j+1} f}(\xi).
\end{aligned}$$

On en déduit par Cauchy-Schwarz que

$$|\hat{f}(\xi)|^2 \le 3\sum_j |\widehat{\Delta_j f}(\xi)|^2.$$

Réciproquement, comme

$$\sum_j |\widehat{\Delta_j f}(\xi)|^2 = \left(\sum_j \varphi_j(\xi)^2\right) |\hat{f}(\xi)|^2,$$

et comme par construction, d'une part $1 = \sum_j \varphi_j(\xi)$ et d'autre part $0 \le \varphi_j(\xi) \le 1$, on a

$$\sum_j |\widehat{\Delta_j f}(\xi)|^2 \le |\hat{f}(\xi)|^2.$$

On peut alors facilement montrer (exercice !) qu'une norme équivalente à la norme de la définition est

$$(2.1) \qquad \|f\|_{\dot{H}^s}^2 \approx \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2js}\|\Delta_j f\|_2^2.$$

Jusqu'à présent, on a pu tirer avantage de Plancherel, c'est-à-dire l'isométrie de $\mathcal{F}$ de L^2 sur L^2. Le lemme suivant nous fournit l'outil équivalent sur les autres espaces de Lebesgue.

LEMME 1 (INÉGALITÉS DE BERNSTEIN)
Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, tel que $\operatorname{supp} \hat{f} \subset B(0,\lambda)$. Soit $p \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ avec $1 \leq p$, et supposons que $f \in L^p$. Alors il existe une constante $C = C(n)$ telle que l'on ait les inégalités suivantes.
– Pour tout $q \geq p$, $f \in L^q$, et

$$(2.2) \qquad \|f\|_q \leq C\lambda^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|f\|_p.$$

– De même, pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, on a $\partial^\alpha f \in L^p$ et

$$(2.3) \qquad \|\partial^\alpha f\|_p \leq C^{|\alpha|}\lambda^{|\alpha|}\|f\|_p.$$

– Si de plus $\hat{f}$ est supportée loin de zéro, i.e. $\operatorname{supp} \hat{f} \subset \mathbb{R}^n \setminus B(0,\lambda/2)$, alors

$$(2.4) \qquad C^{-|\alpha|}\lambda^{|\alpha|}\|f\|_p \leq \sup_{\alpha=|\alpha|} \|\partial^\alpha f\|_p \leq C^{|\alpha|}\lambda^{|\alpha|}\|f\|_p.$$

Démonstration: Par une simple dilatation, on peut se ramener au cas où $\lambda = 1$: en considérant une fonction g telle que $\hat{g}(\xi) = \lambda^n \hat{f}(\lambda\xi)$, il suffit de montrer le lemme pour g, dont le support de la transformée de Fourier est dans la boule unité, puisque les normes L^r de f se déduisent de celles de g par dilatation :

$$\|g\|_r^r = \int |f|^r\left(\frac{x}{\lambda}\right)dx = \lambda^r \int |f|^r(y)dy = \lambda^n\|f\|_r^r.$$

Soit $m \in \mathcal{S}$, telle que $\widehat{m} = 1$ sur $B(0,1)$ et $\widehat{m} = 0$ à l'extérieur de $B(0,2)$. Alors compte-tenu du support de g, on peut écrire

$$\hat{g} = \widehat{m}\hat{g}, \text{ ou encore } g(x) = m * g(x) = \int m(x-y)g(y)dy.$$

Rappelons l'inégalité de Young : pour tout $1 \leq \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r} \leq +\infty$, avec $\tilde{r}^{-1} = \tilde{p}^{-1} + \tilde{q}^{-1} - 1$, on a

$$(2.5) \qquad \|f * g\|_{\tilde{r}} \leq \|f\|_{\tilde{p}}\|g\|_{\tilde{q}}.$$

Compte-tenu des valeurs de p, q dans notre cas ($q \geq p$), il suffit de montrer que $m \in L^r$, pour tout $1 < r < +\infty$. Mais $m \in \mathcal{S}$, donc en particulier m décroit aussi vite que l'on veut à l'infini, soit par exemple $|m(x)| \leq C(1+|x|)^{n+1}$ ce qui donne le résultat. On a ainsi démontré (2.2). De la même façon, on montre (2.3), puisque

$$\partial^\alpha f = \partial^\alpha m * f.$$

En fait, il suffit de le faire pour $|\alpha| = 1$ (et en itérant, on obtiendra le résultat). Dans le cas où $|\alpha| = 1$, on a affaire à une seule dérivée partielle, et de nouveau,

$$\sup_{1\leq i\leq n} (1 + |x|^{n+1}|\partial_i m(x)| \leq C.$$

En ce qui concerne (2.3), nous venons déjà de montrer l'inégalité de droite, il reste à montrer l'inégalité de gauche, pour laquelle nous disposons d'une hypothèse de plus, à savoir que le support de $\hat{f}$ est disjoint d'un voisinage de $\xi = 0$. On appelle toujours m une fonction de $\mathcal{S}$ qui vaut 1 sur le support de $\hat{f}$ et 0 en dehors de $1/4 \leq |\xi| \leq 2$. On va découper $\widehat{m}$ suivant des secteurs angulaires dans toutes les directions ξ_i, $1 \leq i \leq n$. Pour cela, on considère une partition de la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ en $n-1$ fonctions régulières θ_i, valant pour la première, 1 autour de la direction ξ_1 et zéro en dehors de la zone où $|\xi'| \leq \sqrt{3}\xi_1$(cône d'aperture $\pi/3$, $\xi' = (\xi_2, \ldots, \xi_n)$), et ainsi de suite pour tous les autres ξ_i. On a donc

$$\widehat{m}(\xi) = \sum_i \theta_i\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) m(\xi),$$

et sur le support de $\theta_i\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) m(\xi)$, on aura $\xi_i \geq 1/8$ (faire un dessin!). Ainsi, on écrit

$$\hat{f}(\xi) = \sum_i \theta_i\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) \frac{m(\xi)}{\xi_i} \xi_i \hat{f}(\xi),$$

et chaque m_i, transformée de Fourier inverse de $\theta_i\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) m(\xi)/\xi_i$, est dans la classe de Schwartz, on conclue donc de la même façon que précédemment,

$$\|f\|_p \leq \sum_i C\|\partial_i f\|_p.$$

Et toutes les normes étant équivalentes en dimension finie, quite à changer la constante,

$$\|f\|_p \leq C \sup_i \|\partial_i f\|_p,$$

qui est le résultat recherché. Ceci achève la démonstration des inégalités de Bernstein. □

Remarque 8

Alternativement, on peut procéder de la manière (plus simple) suivante : la fonction $\widehat{m}$ est régulière, et $\widehat{m}(0) = 0$. On peut donc utiliser la forme de Taylor avec reste intégral, i.e.

$$\widehat{m}(\xi) = \widehat{m}(0) + \sum_i \xi_i \int_0^1 \partial_{\xi_i}\widehat{m}(t\xi)dt,$$

et continuer comme d'habitude, en prenant soin de vérifier que les conditions de support en ξ garantissent que l'on est toujours nul en $t = 0$, et plus précisément $t \geq 1/8$ (on écrira $\hat{f}(\xi) = \widehat{m}^2(\xi)\hat{f}(\xi)$).

Remarquons néanmoins que cette façon de procéder dissimule la sectorisation angulaire, qui est en fait l'ingrédient à retenir.

Remarque 9

Considérons l'opérateur Λ, *défini par* $\widehat{\Lambda f}(\xi) = |\xi|\hat{f}(\xi)$, *et* Λ^s *de façon similaire,* $\widehat{\Lambda^s f}(\xi) = |\xi|^s\hat{f}(\xi)$. *Si* $f \in L^p$ *et* $\operatorname{supp}\hat{f} \subset B(0,1) \cup \mathbb{R}^n \setminus B(0,1/2)$, *il est beaucoup plus facile de montrer que*

$$\|f\|_p \approx \|\Lambda^s f\|_p,$$

puisque le symbole de l'opérateur ne s'annule jamais sur le support de $\hat{f}$. *A l'avenir on travaillera plutôt avec* Λ *et ses puissances (éventuellement non-entières) qu'avec les dérivées usuelles.*

Montrons maintenant l'inégalité de Young : il existe plusieurs cas faciles.

– Cas où $\tilde{p} = \tilde{q} = \tilde{r} = 1$: en effet,

$$|f * g|(x) \leq \int |f|(x-y)|g|(y)dy,$$
$$\int |f * g|(x)dx \leq \int\int |f|(x-y)|g|(y)dydx,$$
$$\int |f * g|(x)dx \leq \int |f|(z)dz \int |g|(y)dy.$$

– Cas où $\tilde{p} = \infty$, $\tilde{q} = 1$ et $\tilde{r} = \infty$, puisqu'alors

$$|f * g|(x) \leq \int |f|(x-y)|g|(y)dy,$$
$$|f * g|(x) \leq \|f\|_\infty \int |g|(y)dy.$$

– Cas où $\tilde{p} = \tilde{q} = 2$ et $\tilde{r} = \infty$:

$$|f * g|(x) \leq \int |f|(x-y)|g|(y)dy,$$
$$|f * g|^2(x) \leq (\int |f|^2(x-y)dy)(\int |g|^2(y)dy),$$
$$|f * g|^2(x) \leq \int |f|^2(z)dz \int |g|^2(y)dy.$$

On pourrait alors procéder par interpolation/dualité. Nous proposons la démonstration directe. Le cas suivant est $1 < \tilde{p} < +\infty$, $\tilde{q} = 1$, donc $\tilde{r} = \tilde{p}$. On veut se ramener au premier cas traité. Pour cela, on utilise l'inégalité de Hölder,

$$\forall \alpha, \beta, \gamma > 0,\ \|fg\|_\gamma \leq \|f\|_\alpha \|g\|_\beta, \tag{2.6}$$

qui se démontre facilement à partir de l'inégalité de convexité $ab < \frac{a^\rho}{\rho} + \frac{b^{\rho'}}{\rho'}$, où $\rho^{-1} + \rho'^{-1} = 1$ (on utilisera dorénavant cette notation pour désigner un exposant conjugué).

Revenons à Young : on a

$$|f*g|(x) \le \int |f|(x-y)|g|^{\frac{1}{p}}(y)|g|^{\frac{1}{p'}}(y)dy,$$

$$|f*g|(x) \le \left(\int |f|^p(x-y)|g|(y)dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|(y)dy\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$|f*g|^p(x) \le \left(\int |f|^p(x-y)|g|(y)dy\right)\left(\int |g|(y)dy\right)^{p-1}$$

$$|f*g|^p(x) \le \left(\int |f|^p(x-y)|g|(y)dy\right)\|g\|_1^{p-1},$$

et on peut maintenant utiliser le premier cas traité pour la fonction $|f|^p * |g|$ qui apparaît à droite, pour obtenir

$$\|f*g\|_p^p \le \|f\|_p^p\|g\|_1\|g\|_1^{p-1},$$

qui est le résultat voulu (remarquons aussi que le troisième cas se généralise facilement en utilisant Hölder, pour obtenir $\|f*g\|_\infty \le \|f\|_p\|g\|_{p'}$).
Pour traiter le cas général, il suffit de nouveau de se ramener au cas précédent : n remarque enfin qu'il suffit de se limiter à des fonctions positives, et on oublie par conséquent les valeurs absolues. On écrit

$$f(x-y)g(y) = f^{\frac{1}{\alpha}}(x-y)g^{\frac{1}{\beta}}(y)f^{\frac{1}{\alpha'}}(x-y)g^{\frac{1}{\beta'}}(y)$$

et on veut choisir astucieusement α et β pour se ramener à une combinaison du cas précédents. On applique Hölder avec $\gamma + \gamma^{-1} = 1$,

$$\left(\int f(x-y)g(y)dy\right)^r \le \left(\int f^{\frac{\gamma}{\alpha}}(x-y)g^{\frac{\gamma}{\beta}}(y)dy\right)^{\frac{r}{\gamma}} \left(\int f^{\frac{\gamma'}{\alpha'}}(x-y)g^{\frac{\gamma'}{\beta'}}(y)dy\right)^{\frac{r}{\gamma'}}.$$

Pour se ramener au cas précédent, il est raisonnable de choisir $\gamma/\alpha = p$ et $\gamma'/\beta' = q$. Ceci impose $1/(\alpha p) + 1/(\beta' q) = 1$, et l'on fait alors le choix le plus simple : $\alpha = \beta' = 1 + 1/r$, ce qui donne $\alpha' = \beta = r + 1$. Ainsi

$$\left(\int f(x-y)g(y)dy\right)^r \le \left(\int f^p(x-y)g^{\frac{p}{r}}(y)dy\right)^{\frac{r}{\gamma}} \left(\int f^{\frac{q}{r}}(x-y)g^q(y)dy\right)^{\frac{r}{\gamma'}}$$

$$(f*g)^r(x) \le (f^p * g^{\frac{p}{r}})^{\frac{r}{\gamma}}(g^q * f^{\frac{q}{r}})^{\frac{r}{\gamma'}}.$$

Le premier produit de convolution est dans $L^{\frac{qr}{p}}$, et le second dans $L^{\frac{pr}{q}}$. En tenant compte des puissances, on a le produit de des fonctions respectivement dans $L^{\frac{q\gamma}{p}}$ et $L^{\frac{p\gamma'}{q}}$. On vérifie alors que

$$\frac{p}{q\gamma} + \frac{q}{p\gamma'} = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\frac{r}{r+1} = 1,$$

ce qui achève la démonstration (le lecteur attentif vérifiera que tous les exposants sont effectivement dans les plages autorisées). □

2.2 Espaces de Besov

On se propose de définir une classe d'espaces en s'inspirant de (2.1), sur laquelle on saura facilement contrôler l'action des dérivations en utilisant les inégalités de Bernstein. Pour cela, on s'appuie donc sur la décomposition de Littlewood-Paley introduite précédemment. Pour une présentation détaillée de ces espaces, on pourra consulter [1, 24].

DÉFINITION 4
Soit $1 \leq p, q \leq +\infty$, $s \in \mathbb{R}$. Soit f une distribution tempérée, $f \in S'(\mathbb{R}^n)$. On dira que f appartient à l'espace de Besov homogène $\dot{B}_p^{s,q}$ si et seulement si
- *Si $s < \frac{n}{p}$ ou $s = \frac{n}{p}$ et $q = 1$, la somme partielle $\sum_{-m}^{m} \Delta_j(f)$ converge vers f au sens des distributions tempérées. Dans tous les autres cas ($s > \frac{n}{p}$ et $s = n/p$, $q > 1$) on demandera que la convergence ait lieu modulo les polynômes.*
- *La séquence $\epsilon_j = 2^{js}\|\Delta_j(f)\|_p$ appartient à l^q.*

On définira la norme sur $\dot{B}_p^{s,q}$ comme

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{qjs}\|\Delta_j(f)\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.7}$$

REMARQUE 10
La condition de "réalisation" de f comme la somme de ses blocs dyadiques $\Delta_j f$ doit être vue comme équivalente à la condition $\hat{f} \in L^1_{loc}$ imposée précédemment dans la définition des espaces de Sobolev homogènes, qui sont un cas particulier des espaces de Besov : $\dot{H}^s = \dot{B}_2^{s,2}$.

REMARQUE 11
On montre facilement que l'opérateur Λ^l, $l \in \mathbb{N}^*$ est une bijection de $\dot{B}_p^{s,q}$ sur $\dot{B}_p^{s-l,q}$. Le lecteur ennuyé par le quotientage par les polynômes dans les cas $s > n/p$ pourra donc se ramener à l'autre cas en prenant pour l la partie entière de $s - n/p + 1$ et en considérant $\Lambda^l f$.

REMARQUE 12
La définition précédente est indépendante du choix de l'analyse de Littlewood-Paley. Pour cela, il suffit de remarquer que si $\tilde{\Delta}_j f$ est un bloc dyadique associé à une autre fonction $\tilde{\varphi}_j(\xi)$, on peut écrire $\tilde{\varphi}_j(\xi) = \sum_k \varphi_k(\xi)\tilde{\varphi}_j(\xi)$, et la somme sur k se réduit à une somme finie, $|k - j| \leq C$, compte-tenu des conditions de support (exercice : écrire proprement la démonstration !). En fait, on peut définir ces espaces de multiples façons, mais qui reposent toutes sur le même principe (que nous allons formuler de façon vague. On renvoie à [13] pour une excellente discussion à ce sujet) : on dispose d'une famille de fonctions $(\varphi_t)_{t>0}$ formant une résolution de l'identité, i.e. $f = \int_0^\infty \varphi_t * f \frac{dt}{t}$, et l'on définit des espaces comme les complétés de S pour la norme définie par

$$\|f\| = \left(\int_0^\infty t^{-sq}\|\varphi_t * f\|^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Dans notre cas, on a pris une mesure discrète (penser $t \approx 2^{-j}$) et une famille de φ_t très particulière (dilatées d'une fonction radiale à support compact en variable de Fourier, ne *rencontrant pas un voisinage de zéro). On peut considérablement affaiblir ces conditions, ce qui procure dans certains cas un grande flexibilité.*

On définit aussi les espaces de Sobolev inhomogènes de la façon suivante :

Définition 5
Soit $1 \leq p, q \leq +\infty$, $s \in \mathbb{R}$. Soit f une distribution tempérée, $f \in S'(\mathbb{R}^n)$. On dira que f appartient à l'espace de Besov inhomogène $B_p^{s,q}$ si et seulement si
– La fonction $S_0 f \in L^p$.
– Pour $j \in \mathbb{N}$, la séquence $\epsilon_j = 2^{js}\|\Delta_j(f)\|_p$ appartient à l^q.
On définira la norme sur $B_p^{s,q}$ comme

$$\|f\|_{B_p^{s,q}} = \|S_0 f\|_p + \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{qjs}\|\Delta_j(f)\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.8}$$

Remarque 13
Noter la différence principale entre le cas homogène et le cas inhomogène : dans le cas homogène, on considère l'ensemble des blocs dyadiques, i.e. $j \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire les basses comme les hautes fréquences; dans le cas inhomogène, on impose une condition différente aux basses fréquences ($S_0 f \in L^p$), et la condition habituelle sur les seules hautes fréquences ($j \in \mathbb{N}$). Pour $s > 0$, on en déduit immédiatement que $B_p^{s,q} = L^p \cap \dot{B}_p^{s,q} \subset \dot{B}_p^{s,q}$, et l'inclusion duale pour $s < 0$.

On notera que la norme homogène est essentiellement invariante par changement d'échelle (exercice!) : pour tout $\lambda > 0$,

$$\|f(\lambda\cdot)\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \approx \lambda^{s-\frac{n}{p}}\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}}. \tag{2.9}$$

Si l'on remplace la norme homogène par la norme inhomogène, ceci n'est vrai que pour les λ grands.
Pour finir, indiquons quelques propriétés élémentaires des espaces de Besov (on laisse au lecteur le soin de les adapter au cas inhomogène).
– Les espaces de Besov sont des Banach.
– Le dual de $\dot{B}_p^{s,q}$ est $\dot{B}_{p'}^{-s,q'}$ (lorsque $p < +\infty$).
– L'opérateur Λ^σ, $\sigma \in \mathbb{R}$, est continu de $\dot{B}_p^{s,q}$ dans $\dot{B}_p^{s-\sigma,q}$ (exercice : le démontrer!).
– Les transformées de Riesz, définies comme les opérateurs R_i, multiplicateurs de Fourier $\xi_i/|\xi|$, sont continues sur les espaces de Besov (facile : considérer un bloc).

Remarque 14
La dernière propriété permet essentiellement de ne considérer que Λf lorsque l'on rencontre ∇f, puisque $\partial_i f$ peut se réécrire $R_i \Lambda f$. Donc si l'on contrôle Λf on contrôlera $\partial_i f$.

2.3 Injections de Sobolev

On souhaite relier les espaces que l'on vient (viene) de définir avec ceux (auquel) que l'on connaît déjà (jà). On a remarqué que $\dot{H}^s = \dot{B}_2^{s,2}$. Considérons une fonction $f \in \dot{B}_p^{s,1}$, avec $s > 0$. Considérons r

tel que $s - n/p = -n/r$ (donc $r \geq p$) : en utilisant Bernstein,

$$\|\Delta_j f\|_r \leq 2^{js} \|\Delta_j f\|_p,$$

et l'on en déduit que

$$\|f\|_r \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\Delta_j f\|_r \leq \|f\|_{\dot{B}_p^{s,1}}.$$

On souhaite s'affranchir de la restriction $q = 1$. Tout d'abord, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 2
Soit $f \in \dot{B}_p^{s,q}$, et $\tilde{s}, \tilde{p}, \tilde{q}$, tels que $\tilde{s} < s$, $\tilde{q} \geq q$ et $s - n/p = \tilde{s} - n/\tilde{p}$. Alors

$$\|f\|_{\dot{B}_{\tilde{p}}^{\tilde{s},\tilde{q}}} \lesssim \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}}. \tag{2.10}$$

La proposition se démontre simplement en utilisant Bernstein et l'injection $l^q \subset l^{\tilde{q}}$. □
Dans le cas particulier où $s > 0$ et $\tilde{s} = 0$, on a donc un équivalent du cas $q = 1$, qui est

$$\|f\|_{\dot{B}_r^{0,q}} \lesssim \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}},$$

avec $s - n/p = -n/r$. Il est donc naturel de comparer la norme $\dot{B}_r^{0,q}$ avec la norme L^r. Pour le moment, nous savons qu'elles coïncident pour $q = r = 2$.

PROPOSITION 3
Soit $1 < p < +\infty$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On définit la fonction carrée de f comme étant

$$S(f) = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta_j f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.11}$$

Alors $\|f\|_p$ et $\|S(f)\|_p$ sont deux quantités équivalentes. Par densité, on en déduit qu'une fonction g est dans L^p si et seulement si sa fonction carrée $S(g)$ y est.

La démonstration de ce résultat profond d'analyse harmonique nécessite d'introduire des outils adhoc et nous la remettons à un chapitre ultérieur.
Em seguida
Dans la suite, on ne rencontrera majoritairement que des espaces de Besov avec $q \leq 2$. Aussi la proposition qui suit nous suffit.

PROPOSITION 4 (INJECTION DE SOBOLEV)
Soit $s > 0$ et $s - n/p = -n/r$, $r \in [2, +\infty)$, et $f \in \dot{B}_p^{s,2}$. Alors

$$\|f\|_r \lesssim \|f\|_{\dot{B}_p^{s,2}}. \tag{2.12}$$

Démonstration: Compte-tenu d'une observation précédente, il suffit en fait de montrer que $\dot{B}_r^{0,2} \hookrightarrow L^r$. Mais comme $r \geq 2$, ceci résulte de la proposition précédente et de l'inégalité de Minkowski, i.e. $l^2(L^r) \subset L^r(l^2)$. □
En fait, on a

PROPOSITION 5
Soit $1 < p < +\infty$.

– *Si $p > 2$, alors $\dot{B}^{0,2}_p \hookrightarrow L^p$.*
– *Si $p < 2$, alors $L^p \hookrightarrow \dot{B}^{0,2}_p$.*

Démonstration: On a déjà vu la première inclusion, la seconde s'en déduit par dualité (ou directement avec Minkowski dans l'autre sens). □

no entanto — dar

On peut cependant donner une démonstration directe des injections de Sobolev. Nous allons prouver le résultat suivant :

PROPOSITION 6 (INJECTION DE SOBOLEV)
Soit $s > 0$ et $s - n/p = -n/r$, $r, p \in (1, +\infty)$, et $f \in \dot{B}^{s,p}_p$. Alors

(2.13)
$$\|f\|_r \lesssim \|f\|_{\dot{B}^{s,p}_p}.$$

Démonstration: On procède comme d'habitude par densité. Soit f une fonction de la classe de Schwartz on peut écrire la majoration ponctuelle

$$|f(x)| \le \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j f|(x).$$

Fixons une valeur pivot J. Alors d'une part

$$\begin{aligned}\sum_{j\ge J} |\Delta_j f|(x) &\le \sum_{j\ge J} 2^{-sJ} \sup_j (2^{sj}|\Delta_j f|(x)) \\ &\le 2^{-sJ} H(x),\end{aligned}$$

où la fonction $H(x)$ est dans L^p, car $f \in \dot{B}^{s,p}_p$ donc

$$\|\sup_j (2^{sj}|\Delta_j f|(x))\|_{L^p} \le \|(\sum_j (2^{js}|\Delta_j f|(x))^p\|_{L^1}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\sum_{j<J} |\Delta_j f|(x) &\lesssim \sum_{j<J} 2^{-(s-\frac{n}{p})J} \sup_j (2^{(s-\frac{n}{p})j}|\Delta_j f|(x)) \\ &\lesssim 2^{(\frac{n}{p}-s)J} L(x),\end{aligned}$$

où la fonction $L(x)$ est dans L^∞, car $f \in \dot{B}^{-(\frac{n}{p}-s),\infty}_\infty$ en utilisant les injections entre espaces de Besov.
Finalement,

$$|f(x)| \lesssim 2^{(\frac{n}{p}-s)J} L(x) + 2^{-sJ} H(x).$$

On optimise alors en J, pour obtenir que

$$|f(x)| \lesssim H^{\frac{p}{r}}(x) L^{1-\frac{p}{r}},$$

de sorte que

$$\|f\|^r_{L^r} \lesssim \|H\|^p_{L^p} \|L\|^{r-p}_{L^\infty}.$$

terceiro — veremos — depois

On notera que la restriction sur le troisième indice, $q \le p$, n'est pas optimale, nous verrons plus tard qu'on peut en fait s'autoriser $q \le r$ (au prix d'une démonstration plus abstraite

uno pode de fato permitir — preço prêmio haciendo apelando a real

faisant appel à l'interpolation réelle). Enfin, on remarquera qu'on a en fait démontré mieux que l'injection de Sobolev :

$$\|f\|_{L^r} \lesssim \|f\|^{\frac{p}{r}}_{\dot{B}^{s,p}_p} \|f\|^{\frac{r-p}{r}}_{\dot{B}_\infty^{-(\frac{n}{p}-s),\infty}}.$$

Il s'agit là d'une inégalité de Sobolev précisée (elle est non seulement invariante par changement d'échelle, mais aussi par modulation, c'est à dire multiplication par un facteur oscillant $e^{i\omega\cdot x}$).
Dans la pratique, on rencontrera souvent des fonctions définies comme somme de fonctions plus ou moins localisées spectralement.

LEMME 2
Soit $f = \sum_j f_j$, *où* $\operatorname{supp} \hat{f}_j \subset B(0, \gamma 2^j) \setminus B(0, \gamma^{-1} 2^j)$, *avec* $(\eta_j = 2^{js}\|f_j\|_p)_j \in l^q$. *Alors* $f \in \dot{B}^{s,q}_p$ *et*

$$\|f\|_{\dot{B}^{s,q}_p} \lesssim \|(\eta_j)_j\|_{l^q}. \tag{2.14}$$

Démonstration: On souhaite contrôler un bloc dyadique de f : soit K tel que $2^{K-1} \leq \gamma < 2^K$, compte-tenu de la condition de support,

$$\Delta_j \sum_k f_k = \sum_{-K-1 \leq m \leq K+1} \Delta_j f_{j+m},$$

c'est-à-dire que l'on a une somme finie (dont le nombre de termes dépend évidemment de γ), et

$$2^{js}\|\Delta_j f\|_p \lesssim \sum_{-K-1 \leq m \leq K+1} 2^{-ms} 2^{s(j+m)} \|f_{j+m}\|_p,$$

$$2^{js}\|\Delta_j f\|_p \lesssim (2K+1) 2^{sK} 2^{sj} \|f_j\|_p,$$

$$\|(2^{js}\|\Delta_j f\|_p)_j\|_{l^q} \lesssim \|(2^{sj}\|f_j\|_p)_j\|_{l^q},$$

ce qui achève la démonstration. □
Nous énonçons maintenant deux lemmes, généralisations du précédent, qui nous seront très utiles dans la section suivante.

LEMME 3
Soit $s < 0$, $1 \leq p, q \leq +\infty$. *Alors* $f \in \dot{B}^{s,q}_p$ *si et seulement si*

$$(\eta_j = 2^{js}\|S_j f\|_p)_{j \in \mathbb{Z}} \in l^q, \tag{2.15}$$

et $\|(\eta_j)_j\|_{l^q}$ *est une norme équivalente à la norme usuelle.*

Démonstration: La condition suffisante est facile : si $(\eta_j)_j \in l^q$, alors comme

$$2^{js}\|\Delta_j f\|_p = 2^{js}\|(S_{j+1} - S_j) f\|_p \leq 2^{js}(\|(S_{j+1} f\|_p + \|S_j) f\|_p),$$

on obtient que $2^{js}\|\Delta_j f\|_p \lesssim \eta_j$ et on conclue en sommant en j. Pour la condition nécessaire, on écrit

$$2^{js}\|S_j f\|_p \leq \sum_{k<j} 2^{s(j-k)} 2^{sk} \|\Delta_k f\|_p.$$

Notons $\alpha_k = 2^{sk}\|\Delta_k f\|_p$. Par hypothèse, $(\alpha_j)_j \in l^q$. Le second membre ci-dessus n'est autre que la convolution entre la suite $(\alpha_k)_k$ et la suite $(0)_{m<0} \cup (2^{sm})_{m\geq 0}$, et comme $s < 0$, cette dernière suite est dans l^1. La convolution entre l^1 et l^q nous donne une suite de l^q (Young pour les suites), donc

$$\|(2^{js}\|S_j f\|_p)_j\|_{l^q} \lesssim \|(\alpha_j)_j\|_{l^q},$$

qui est bien le résultat demandé. □

REMARQUE 15
Ce lemme nous dit que lorsque la régularité est strictement négative, on peut remplacer l'opérateur Δ_j par S_j dans la définition. On remarquera que la constante de la condition nécessaire ci-dessus acima *se détériore si $s \to 0$ (puisque c'est la norme l^1 de $(2^{js})_{j>0}$).*

Le prochain lemme est une sorte especie de version duale du précédent.

LEMME 4
Soit $s > 0$, $f = \sum_j f_j$, où $\operatorname{supp} \hat{f}_j \subset B(0, \gamma 2^j)$, avec $(\eta_j = 2^{js}\|f_j\|_p)_j \in l^q$. Alors $f \in \dot{B}^{s,q}_p$ et

$$\|f\|_{B^{s,q}_p} \lesssim \|(\eta_j)_j\|_{l^q}. \tag{2.16}$$

Démonstration: On évalue un bloc dyadique de f : compte-tenu des conditions de support, et en remarquant que quitte à relabeler, $1 \leq \gamma < 2$,

$$\Delta_j f = \sum_{j\leq k} \Delta j f_k,$$

$$\|\Delta_j f\|_p \lesssim \sum_{k\geq j} \|f_k\|_p,$$

$$2^{js}\|\Delta_j f\|_p \lesssim \sum_{k\geq j} 2^{s(j-k)}\eta_k.$$

Comme précédemment, on a au second membre un convolution entre une suite dans l^q et une suite dans l^1, ce qui donne le résultat. □

2.4 Paraproduits

Le but de cette section est d'obtenir des estimations de produits dans les espaces de Besov. Pour cela, on introduit la notion de paraproduit ([2]).

DÉFINITION 6
Considérons deux fonctions $f, g \in \mathcal{S}$. On appelle paraproduit de g et f l'opérateur

$$\pi_g f = \sum_j S_{j-1} g \Delta_j f. \tag{2.17}$$

On peut alors décomposer le produit fg de la manière suivante :

$$fg = \pi_g f + \pi_f g + \sum_{|k-k'|\leq 1} \Delta_k f \Delta_{k'} g. \tag{2.18}$$

L'intérêt d'introduire l'opérateur $\pi_g f$ est lié à la localisation spectrale de $S_{j-1}g\Delta_j f$: comme

$$\mathrm{supp}\,\widehat{\Delta_j f} \subset \{2^j \leq |\xi| \leq (1+\varepsilon)2^{j+1}\} \text{ et } \mathrm{supp}\,\widehat{S_{j-1} f} \subset \{|\xi| \leq (1+\varepsilon)2^{j-1}\},$$

le support de $\mathcal{F}(S_{j-1}g\Delta_j f)$ est contenu dans la somme algébrique des supports, autrement dit

$$\mathrm{supp}\,\mathcal{F}(S_{j-1}g\Delta_j f) \subset \{2^{j-1}(1-\varepsilon) \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\frac{5+\varepsilon}{4}\} \subset \frac{1}{4}2^j \leq |\xi| \leq 4.2^j,$$

(si l'on prend $\varepsilon < 1/2$).
Pour décomposer le produit fg, on écrit simplement

$$\begin{aligned} fg &= \sum_j \Delta_j f \sum_k \Delta_k g \\ &= \sum_j (\sum_{k<j-1} \Delta_k g)\Delta_j f + \sum_k \sum_{k>j-2} \Delta_j f \Delta_k g \\ &= \sum_j S_{j-1}g\Delta_j f + \sum_k (\sum_{j<k-1} \Delta_j f)\Delta_k g + \sum_{k-2<j<k+2} \Delta_k g \Delta_j f \\ &= \pi_g f + \pi_f g + \sum_{|j-k|\leq 1} \Delta_k g \Delta_j f. \end{aligned}$$

On notera que par opposition aux deux paraproduits, le dernier terme n'est pas la somme de morceaux localisés dans des couronnes : chaque morceau est localisé dans une boule $\{|\xi| \leq 4.2^j\}$. C'est ce dernier terme qui est potentiellement problématique lorsque l'on veut définir le produit de deux distributions tempérées, par contraste avec le paraproduit. En pratique, plutôt que de chercher dans un catalogue une estimation de produit "toute faite", on montrera celle dont on a besoin. Nous donnons néanmoins deux exemples, qui ne couvrent pas nécessairement toutes les situations.

Proposition 7
Soit $f \in \dot{B}^{s_1,2}_{p_1} = B_1$ *et* $g \in \dot{B}^{s_2,2}_{p_2} = B_2$. *Supposons que* $s_i - \frac{n}{p_i} < 0$, *soit* r_i *tel que* $s_i - \frac{n}{p_i} = -\frac{n}{r_i}$ *et supposons de plus que* $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} < 1$.

1. *Supposons que* $s_1 > 0$ *et* $s_2 < 0$, *ainsi que* $r_1 \geq 2$. *Alors,* $fg = \pi_1 + \pi_2$ *où* $\pi_1 \in \dot{B}^{s_1+s_2,1}_{p}$, $\pi_2 \in \dot{B}^{s_2,2}_{P_2}$, *avec*
$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2},\ \frac{1}{P_2} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{r_1}.$$
2. *Supposons* $s_1, s_2 > 0$ *et* $r_i \geq 2$, *alors* $fg = \tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_2 + \tilde{\pi}_3$ *où* $\tilde{\pi}_3 \in \dot{B}^{s_1+s_2,1}_{p}$, $\tilde{\pi}_1 \in \dot{B}^{s_1,2}_{P_1}$ $\tilde{\pi}_2 \in \dot{B}^{s_2,2}_{P_2}$, *avec* p, q, P_2 *comme ci-dessus et*
$$\frac{1}{P_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{r_2}.$$

Démonstration: Considérons le premier cas : il n'est pas besoin de décomposer f en trois termes, on peut regrouper $\pi_g f$ et le terme de reste $R(f,g)$ en un seul terme :

$$fg = \pi_1 + \pi_2 = \sum_j S_{j+2}g\Delta_j f + \sum_j S_{j-1}f\Delta_j g.$$

Le second terme π_2 est une somme de fonctions localisées en fréquence, on peut donc lui appliquer le lemme 2.14 : il s'agit d'évaluer

$$2^{js_2}\|S_{j-1}f\Delta_j g\|_{P_2}.$$

Pour les basses fréquences $S_{j-2}f$, on utilise l'injection de Sobolev pour avoir

$$\|S_{j-2}f\|_{r_1} \lesssim \|f\|_{B_1}.$$

Pour les hautes fréquences $\Delta_j g$, par définition,

$$\|\Delta_j g\|_{p_2} \lesssim 2^{-s_2 j}\varepsilon_j\|g\|_{B_2},$$

où $\varepsilon_j \in l^{q_2}$. On obtient alors le résultat par Hø"lder.
Pour l'autre terme, π_1, il s'agit d'une somme de fonctions localisées dans des boules. On peut donc utiliser le lemme 2.16, et évaluer

$$2^{j(s_1+s_2)}\|\Delta_j f S_{j+2}g)\|_p.$$

Comme $s_2 < 0$, d'après le lemme 2.15,

$$\|S_{j+2}g\|_{p_2} \lesssim 2^{-s_2 j}\mu_j\|g\|_{B_2},$$

avec $\mu_j \in l^{q_2}$. Par ailleurs

$$\|\Delta_j f\|_{p_1} \lesssim 2^{-s_1 j}\eta_j\|f\|_{B_1},$$

et l'on conclue par Hölder.
Pour l'autre cas, on utilise la décomposition complète en paraproduit.

$$fg = \tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_2 + \tilde{\pi}_3 = \pi_g f + \pi_f g + R(f,g).$$

Le premier et le second terme se traitent comme π_2, et le terme $\tilde{\pi}_3$ se traite comme le terme π_1. $\square$

REMARQUE 16
Dans les deux cas, le produit complet est dans le plus "mauvais" des espaces (c'est-à-dire celui pour lequel la régularité est la plus faible), puisqu'ils sont inclus les uns dans les autres par l'inégalité de Sobolev. Mais il est parfois utile de garder la séparation en plusieurs termes de régularité/intégrabilité différente.

Pour finir ce chapitre, nous donnons une preuve simple de l'inégalité suivante, qui est un cas particulier de la proposition 5 : $\|f\|_4 \lesssim \|f\|_{B_4^{0,2}}$ (l'exposant 4 est privilégié en analyse harmonique, comme étant le carré de 2. La preuve que nous donnons peut (exercice !) être adaptée à des cas plus généraux).On réécrit f^2

$$f^2 = 2\pi_f f + R(f,f).$$

Pour montrer que $f^2 \in L^2$, il suffit de montrer que $\Delta_j(f^2) \in L^2$, l^2-sommable. La seconde somme est clairement contrôlée par la fonction carrée $S(f)^2$, puisque

$$\begin{aligned}\left|\sum_{|j-k|\le 1}\Delta_j f\Delta k f\right| &\le \sum_j |\Delta_j f|^2 + 2\sum_j |\Delta_j f||\Delta_{j+1}f| \\ &\le 3S(f)^2.\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant Minkowski,

$$\|R(f,f)\|_2 \lesssim \|S(f)\|_4 \leq \|f\|_{\dot{B}_4^{0,2}}.$$

Il reste à traiter la première somme, pour laquelle on peut appliquer le lemme 2.14,

$$\begin{aligned}\|S_{j-1}f\Delta_j f\|_2^2 &\leq \|S_{j-1}f\|_4^2\|\Delta_j f\|_4^2,\\ &\lesssim \|f\|_4^2\|\Delta_j f\|_4^2,\end{aligned}$$

et l'on en déduit

$$\|\pi_f f\|_2 \lesssim \|f\|_4\|f\|_{\dot{B}_4^{0,2}}.$$

En regroupant les deux estimations, on obtient

$$\|f\|_4^2 \lesssim \|f\|_4\|f\|_{\dot{B}_4^{0,2}} + \|f\|_{\dot{B}_4^{0,2}}^2,$$

qui permet de conclure facilement ($2ab \leq a^2+b^2$). $\square$

Chapitre 3

Interpolation

Le but de ce chapitre est de présenter les bases de l'interpolation, et plus particulièrement de l'interpolation réelle. Dans une première partie on présente le théorème de Riesz-Thorin, qui est la base de l'interpolation complexe. Dans la seconde, on démontre le théorème de Marcinkiewicz, base de l'interpolation réelle, puis on illustre son utilisation par quelques exemples classiques avant de présenter la théorie dans sa généralité.
Avant de rentrer dans le vif du sujet, donnons un lemme abstrait de portée assez générale, qui permet d'expliquer (une partie de) la numérologie rencontrée. Considérons $\mathbb{R}^n$, et appelons T_y l'opérateur de translation par y, soit $T_y(x) = x + y$.

LEMME 5
Soit K un opérateur défini de C_0^∞ dans $\mathcal{D}$ qui est invariant par translation, i.e. $K(f \circ T_y) = K(f) \circ T_y$. Alors une condition nécessaire pour que K soit continu de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$ est que $q \geq p$.

REMARQUE 17
On notera que si $K(x,z)$ est le noyau distribution de l'opérateur K, la condition d'invariance par translation s'écrit $K(x+y,z) = K(x, z-y)$, condition qui est par exemple toujours vérifiée si $K(x,z) = K(x-z)$ (opérateur de convolution).

Démonstration: On va commencer par montrer que

$$\lim_{|y|\to+\infty} \|f + f\circ T_y\|_{L^p} = 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p}.$$

On sépare $f = f_M + f^M$, où $f_M = f\chi_{|x|<M}$. On a donc $\lim_{M\to+\infty} \|f_M\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$. Prenons alors $M = |y|/2$, on a

$$f + f\circ T_y = f_M + f_M \circ T_y + f^M + f^M \circ T_y$$

et par définition de f_M, f_M et $f_M \circ T_y$ sont à support disjoints. Comme $\|f_M + f_M \circ T_y\|_p^p = 2\|f\|_p^p$, on en déduit le résultat par passage à la limite.
Supposons maintenant que T est continu de L^p dans L^q : alors $\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p$. En appliquant cette inégalité à $f + f\circ T_y$, on en déduit d'après le lemme précédent que $2^{\frac{1}{q}} \leq C2^{\frac{1}{p}}$, c'est-à-dire $p \leq q$. □

3.1 Interpolation complexe

Dans cette partie, nous allons démontrer le théorème de Riesz-Thorin, qui est à la base de la méthode d'interpolation complexe développée plus tard par Calderon. Nous renvoyons à [1] pour une présentation détaillée de l'interpolation complexe, et à [19] pour une version à paramètre qui se révèle très puissante dans certaines applications.

THÉORÈME 1
Soit T un opérateur linéaire continu de L^{p_i} dans L^{q_i}, avec $i \in \{0,1\}$, $1 \leq p_i, q_i \leq +\infty$ et C_i les constantes de continuité. Alors pour tout $\theta \in]0,1[$, l'opérateur T est continu de L^{p_θ} dans L^{q_θ}, avec

$$C_\theta \leq C_0^\theta C_1^{1-\theta}, \ \frac{1}{p_\theta} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}, \ \frac{1}{q_\theta} = \frac{\theta}{q_0} + \frac{1-\theta}{q_1}.$$

Démonstration: La démonstration s'appuie principalement sur une version appropriée du principe du maximum pour les fonctions analytiques :

LEMME 6 (PHRAGMEN-LINDELÖF)
Soit F une fonction de la variable complexe, bornée et continue de $S \to \mathbb{C}$ où $S = \{x+iy, \ 0 \leq x \leq 1\}$, analytique à l'intérieur de S. On note M_0, M_1, les bornes sur les frontières de S, i.e. $|F(y)| \leq M_0$ et $|F(1+iy)| \leq M_1$. Alors une borne uniforme dans S est donnée par

$$|F(x+iy)| \leq M_0^{1-x} M_1^x.$$

REMARQUE 18
Le lemme exprime en fait la convexité de la fonction $\log \sup_y |F(x+iy)|$.

Démontrons le lemme : comme F est analytique, elle atteint son maximum sur le bord, donc si M_0 ou M_1 est nul, il n'y a rien à démontrer. On peut donc supposer $M_0, M_1 > 0$ et les normaliser à 1 en remplaçant F par $F(z) M_0^{z-1} M_1^{-z}$ qui vérifie toujours les hypothèses qualitatives. On remarque ensuite que si

$$\lim_{|y| \to +\infty} F(x+iy) = 0 \text{ uniformément en } x \in [0,1],$$

alors on pourra conclure en appliquant le principe du maximum dans un rectangle assez grand, $0 \leq x \leq 1$ et $|y| \leq N$. Il suffit donc de se ramener à ce cas. On pose

$$F_n(z) = F(z) \exp\left(\frac{z^2-1}{n}\right).$$

Comme $|F_n(z)| \leq |F(z)| \exp(-y^2/n)$, on a bien la convergence uniforme désirée. De plus $|F_n(iy)|, |F_n(1+iy)| \leq 1$, et l'on en déduit que $|F_n(z)| \leq 1$. Il ne reste plus alors qu'à faire tendre n vers $+\infty$ pour conclure la démonstration du lemme.
Revenons à la démonstation du théorème : il suffit en fait de procéder par dualité, et l'on peut se restreindre (par densité) à des fonctions simples (sommes finies pondérées d'indicatrices d'ensembles mesurables disjoints), que l'on normalisera à 1 en norme. C'est-à-dire que nous allons montrer que pour tout $f \in L^{p_\theta}$ et tout $g \in L^{q'_\theta}$, normalisés,

$$\left| \int T(f) g \right| \leq C_\theta, \text{ avec } f = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{E_j} \text{ et } g = \sum_{k=1}^n b_k \chi_{F_k}.$$

Introduisons quelques notations : $\alpha_j = 1/p_i$, $\beta_i = 1/q_i$, où $i = 0, 1$, et $\alpha = 1/p_\theta$, $\beta = 1/q_\theta$. Enfin, on note

$$\alpha(z) = (1-z)\alpha_0 + z\alpha_1 \text{ et } \beta(z) = (1-z)\beta_0 + z\beta_1,$$

et l'on remarque que $\alpha(i) = \alpha_i$, $\beta(i) = \beta_i$ et $\alpha(\theta) = \alpha$, $\beta(\theta) = \beta$. Enfin, si θ est tel que $p_\theta < +\infty$ et $q_\theta > 1$, alors $\alpha > 0$ et $\beta < 1$, et l'on se placera dorénavant dans ce cas (modifier convenablement la démonstration dans les cas ainsi exclus). Les fonctions f, g sont à valeurs complexes, et on note $a_j = A_j e^{i\theta_j}$, $b_k = B_k e^{i\phi_k}$. On définit alors deux fonctions dépendant d'un paramètre complexe $z = x + iy$,

$$f_z = \sum_{j=1}^{m} A_j^{\frac{\alpha(z)}{\alpha}} e^{i\theta_j} \chi_{E_j} \text{ et } g_z = \sum_{k=1}^{n} B_k^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta}} e^{i\phi_k} \chi_{F_k}.$$

On va considérer $F(z) = \int T(f_z) g_z$, sachant que $F(\theta) = \int T(f) g$ est la quantité qui nous intéresse. Compte-tenu de sa définition, la fonction F est évidemment analytique, et, qui plus est, elle est bornée sur la bande $0 \le x \le 1$. Pour pouvoir appliquer le lemme, il suffit donc de contrôler sa borne sur les frontières de S ; considérons $F(iy)$: comme $\alpha(iy) = \alpha_0 + y(\alpha_1 - \alpha_0)$ on a

$$|f_{iy}|^{p_0} = |e^{i\mathrm{Arg} f} |f|^{iy\frac{\alpha_1-\alpha_0}{\alpha}} |f|^{\frac{p}{p_0}}|^{p_0} = |f|^p,$$

donc $f_{iy} \in L^{p_0}$ avec norme 1. De même, on obtient que $g_{iy} \in L^{q_0'}$ avec norme 1. On en déduit donc que

$$|F_{iy}| \le \|T(f_{iy})\|_{q_0} \|g_{iy}\|_{q_0'} \le M_0.$$

On procède ensuite de même avec $F(1+iy)$ pour obtenir la borne M_1. L'application du lemme donne alors le résutat en se souvenant que $F(\theta) = \int T(f) g$. $\square$

REMARQUE 19

On notera qu'aucune hypothèse particulière n'a été faite sur la mesure associée à L^{p_i} et L^{q_i}. On peut en fait considérer une mesure quelconque au départ et à l'arrivée (pourvu bien sûr que l'on ait bien la même pour p_0, p_1 d'une part, et q_0, q_1 d'autre part).

Les exemples classiques d'application du théorème de Riesz-Thorin sont l'inégalité de Hausdorff-Young, et une démonstration abstraite de l'inégalité de Young que l'on a déjà rencontrée.

L'inégalité de Hausdorff-Young dit que $\mathcal{F}$, la transformation de Fourier, est continue de $L^{p'}$ dans L^p, avec $p > 2$, et

$$\|f\|_p \le (2\pi)^{\frac{n}{p}} \|f\|_{p'}.$$

Il n'existe pas à ma connaissance de démonstration alternative...

En ce qui concerne l'inégalité de Young, il suffit d'interpoler d'abord entre les cas $f \in L^1, g \in L^1$ et $f \in L^\infty$, $g \in L^1$ pour obtenir le cas $f \in L^p$, $g \in L^1$. On réinterpole ensuite entre ce cas et le cas $f \in L^p$, $g \in L^{p'}$ qui lui est une conséquence directe de Hölder, pour obtenir le cas général.

On retiendra que le théorème de Riesz-Thorin est particulièrement flexible car il n'impose aucune restriction sur les différents indices rencontrés (et notamment sur le positionnement respectifs des p et des q). Il donne d'autre part une estimation précise de la constante de continuité C_θ.

3.2 Interpolation réelle

3.2.1 Le théorème de Marcinkiewicz

Le but de cette section est de donner une version simple du théorème de Marcinkiewicz, qui est à la base de la méthode d'interpolation réelle, développée par J.-L. Lions et J. Peetre. Ce théorème s'applique dans des cas où l'on ne peut appliquer Riesz-Thorin, mais le prix à payer est que l'on a une restriction plus grande sur les indices ($q \geq p$).
Introduisons la fonction maximale associée à une fonction,

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^n|B_r|^n} \int_{|y|<r} |f(x-y)|dy, \tag{3.1}$$

et sa variation $\bar{M}$,

$$\bar{M}f(x) = \sup_{Q_x} \frac{1}{|Q_x|^n} \int_{Q_x} |f(y)|dy, \tag{3.2}$$

où Q_x est un cube centré en x. Il est facile de voir que les deux fonctions sont équivalentes, et l'on pourra donc raisonner avec $\bar{M}$ plutôt que M et inversement. Ces fonctions sont à mettre en relation avec une classe plus générale de fonctions maximales,

$$M_\phi f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \phi_\varepsilon * f,$$

où ϕ_ε est une famille de fonctions (par exemple, les dilatées $\varepsilon^{-n}\phi(\varepsilon^{-1}\cdot)$). Dans le cas de M et $\bar{M}$, on a pris $\phi = \chi_{B(0,1)}$ et $\phi = \chi_{[0,1]^n}$. L'importance de Mf est qu'elle contrôle (ponctuellement) $M_\phi f$ pour ϕ_ε approximation de l'identité (le démontrer !).
Il est trivial de vérifer que M envoie L^∞ dans L^∞. Pour obtenir les propriétés de continuité de M, il est naturel de s'intéresser à Mf pour $f \in L^1$. Malheureusement, il est facile de voir que M n'est pas continu sur L^1 (et bien pire : l'image d'une fonction régulière à support compact n'est en général même pas dans L^1, prendre une bosse centrée en 0). On est donc hors du cadre du théorème de Riesz-Thorin (et on était de toute façon hors-cadre puisque M n'est pas linéaire mais simplement sous-linéaire).
Nous allons montrer que l'opérateur M envoie L^1 dans $L^{1,\infty}$, appelé L^1 faible, défini par

$$L^{1,\infty} = \{f \text{ t.q. } s|\{|f(x)| > s\}| < +\infty\}$$

Cet espace n'est pas normé et d'une façon générale n'a pas de très bonnes propriétés fonctionnelles (au contraire de son pendant $L^{p,\infty}$, $p > 1$, défini par $|f|^p \in L^{1,\infty}$, qui peut être normé et qui est un Banach). Cependant, on pourra appliquer le théorème de Marcinkiewciz.
Nous allons en fait travailler avec une variation de M, $\tilde{M}$, défini par

$$\tilde{M}f(x) = \sup_{x\in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|dy, \tag{3.3}$$

où B est une boule contenant x (on aurait pu prendre des cubes). Clairement, $\tilde{M}$ est équivalente à M (doubler les boules centrées). Pour montrer la propriété souhaitée, nous allons nous appuyer sur (une version simple d') un lemme de recouvrement :

Lemme 7 (Vitali)
Soit $E = \cup_{i \in I fini} B_i$ une réunion finie de boules. Alors il existe une collection $B_1, B_2, \ldots, B_n$ de boules disjointes telles que

$$\sum_{k=1}^{n} |B_k| \geq c|E|.$$

Démontrons ce lemme : soit B_1 la boule de plus grand rayon. On l'exclue alors de la collection ainsi que toutes les boules B_i qui ne sont pas disjointes de B_1 ; on sélectionne alors B_2 de la même manière dans la collection restante et ainsi de suite. Comme il y a un nombre fini de boules, le processus s'arrête après un nombre fini de sélections. Soit B_j les boules sélectionnées, et B_j^* les boules obtenues en doublant le rayon : compte-tenu du processus de sélection, chaque B_j^* contient l'ensemble des boules exclues en même temps que B_j. On en déduit que

$$E \subset \cup_{j=1}^{n} B_j^*,$$

et le résultat est alors immédiat (avec une constante c qui dépend de la dimension).

Remarque 20
On peut considérablement généraliser ce type de lemmes de recouvrement (Vitali, Whitney, Besicovitch...).

Revenons à l'estimation souhaitée. On considère $E_\alpha = \{x \text{ t.q. } \tilde{M}f(x) > \alpha\}$, et l'on veut montrer que $|E_\alpha| \leq C\alpha^{-1}$. Considérons E un sous-ensemble compact de E_α. Pour tout $x \in E$, il existe une boule B_x telle que

$$|B_x| \leq \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f|.$$

La collection $(B_x)_{x \in E}$ recouvre E, donc par compacité on peut en extraire un sous-recouvrement fini par des boules B_i. D'après le lemme, il existe des boules disjointes B_j telles que

$$|E| \lesssim \sum_{j=1}^{n} |B_j|,$$

donc

$$|E| \lesssim \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha} \int_{B_j} |f| \leq \frac{1}{\alpha} \int_E |f|.$$

Cette dernière estimation étant vraie pour tout $E \subset E_\alpha$, elle est donc vraie pour E_α, ce qui est le résultat désiré. □

Un corollaire simple de cette estimation est la propriété suivante (théorème de Lebesgue) :

$$\text{Soit } f \in L^1, \text{ p.p. } x, \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{|B(x,\delta)|} \int_{B(x,\delta)} f(y)dy = f(x).$$

Nous allons maintenant définir les espaces $L^{p,\infty}$, "L^p-faibles". Appelons

$$m(\sigma, f) = |x \text{ t.q. } |f(x)| > \sigma|,$$

la fonction de distribution de f. Il est facile de montrer que (Fubini)

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{|f(x)|} p\sigma^{p-1} d\sigma dx = p \int_0^{+\infty} \sigma^{p-1} m(\sigma, f) \frac{d\sigma}{\sigma}.$$

On définit alors $L^{p,\infty}$ comme l'ensemble des fonctions mesurables pour lesquelles la quantité suivante est finie :

$$\|f\|_{p,\infty}^* = \sup_\sigma \left(\sigma m(\sigma, f)^{\frac{1}{p}} \right),$$

ce qui coïncide bien avec $|f|^p \in L^{1,\infty}$ défini antérieurement. En utilisant l'inclusion (découlant de l'inégalité triangulaire)

$$\{|(f+g)(x)| > \sigma\} \subset \{|f(x)| > \frac{\sigma}{2}\} \cup \{|g(x)| > \frac{\sigma}{2}\},$$

on montre que la quantité $\|\cdot\|_{p,\infty}^*$ est une quasinorme, i.e.

$$\|f+g\|_{p,\infty}^* \leq 2(\|f\|_{p,\infty}^* + \|g\|_{p,\infty}^*).$$

Nous allons encore généraliser ces espaces, en définissant des espaces intermédiaires. On définit la fonction inverse de la fonction de distribution,

$$f^*(t) = \inf\{\sigma \text{ t.q. } m(\sigma, f) \leq t\}.$$

On voit que f^* est positive, décroissante et continue à droite. De plus, elle est équimesurable à f, c'est-à-dire que $m(\sigma, f) = m(\sigma, f^*)$, ce qui s'exprime encore (le vérifier !) par

$$\int_0^t f^* = \sup_{|E|<t} \int_E |f|.$$

On définit alors les espaces de Lorentz $L^{p,q}$, en demandant que la quantité suivante soit finie :

$$\|f\|_{p,q}^* = \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}},$$

pour lesquels on vérifie que $L^p = L^{p,p}$ et que l'on retrouve l'espace L^p faible. Malheureusement, cette dernière quantité n'est qu'une quasinorme. Pour obtenir une norme, on définit alors

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*$$

et

$$\|f\|_{p,q} = \|f^{**}\|_{p,q}^*$$

est une norme, et qui plus est cette quantité est équivalente à $\|f\|_{p,q}^*$ (tout cela se montre à l'aide d'inégalités de type Hardy).
Enfin, on peut montrer (exercice !) qu'une condition équivalente à $f \in L^{p,q}$ est l'existence d'une séquence positive $(a_j)_j \in l^q$ et d'ensembles E_j tels que $|E_j| \leq 2^j$ et

$$|f(x)| \leq \sum_j a_j 2^{-\frac{j}{p}} \chi_{E_j}(x).$$

Enonçons maintenant le théorème de Marcinkiewicz, dans une version simple.

THÉORÈME 2

Soit T un opérateur sous-linéaire, continu de L^{p_0} dans $L^{q_0,\infty}$ et de L^{p_1} dans $L^{q_1,\infty}$, avec $p_0 \neq p_1$. Alors T est continu de L^p dans L^q pour tout $0 < \theta < 1$ et $p \leq q$, avec

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}, \; \frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_0} + \frac{1-\theta}{q_1}, \quad \|Tf\|_q \leq C_\theta M_0^\theta M_1^{1-\theta} \|f\|_p.$$

REMARQUE 21

On notera que l'on a remplacé certains des espaces de Lebesgue présents dans Riesz-Thorin par les espaces faibles. Par contre, nous avons une restriction sur les indices ($p \leq q$), et l'estimation sur la constante est légèrement moins bonne. On verra ultérieurement que l'on peut encore affaiblir les hypothèses (espaces faibles partout) et améliorer un peu la conclusion (T continu de $L^{p,r} \to L^{q,r}$).

Démonstration: Nous allons simplement démontrer un cas particulier, $p_0 = q_0$ et $p_1 = q_1$, pour illustrer le principe général de l'interpolation réelle.
On rappelle que, pour g une fonction positive

$$\|g\|_p^p = p \int_0^\infty \lambda^p \left|\{g(x) > \lambda\}\right| \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

On va donc profiter de la sous-linéarité de T, pour écrire

$$|Tf|(x) \leq |T(f_\lambda)|(x) + |T(f^\lambda)|(x),$$

où l'on a décomposé $f = f_\lambda + f^\lambda$ de la façon suivante : sur l'ensemble de niveau $\{|f(x)| > \lambda\}$, on a $f_\lambda(x) = f(x)$ et ailleurs $f_\lambda = 0$, puis $f^\lambda = f - f_\lambda$. On voit en particulier que $f_\lambda \in L^{p_0}$ si $f \in L^p$ avec $p_0 < p$, et $f^\lambda \in L^{p_1}$ si $p_1 > p$. En utilisant l'inégalité triangulaire précédente, on a

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &\lesssim \int_0^\infty \lambda^p \left|\{|Tf_\lambda(x)| > \lambda/2\}\right| \frac{d\lambda}{\lambda} \\
&\quad + \int_0^\infty \lambda^p \left|\{|Tf^\lambda(x)| > \lambda/2\}\right| \frac{d\lambda}{\lambda} \\
&\lesssim \int_0^\infty \lambda^{p-p_0} \|f_\lambda\|_{p_0}^{p_0} \frac{d\lambda}{\lambda} + \int_0^\infty \lambda^{p-p_1} \|f^\lambda\|_{p_1}^{p_1} \frac{d\lambda}{\lambda}, \\
&\lesssim I_{p_0} + I_{p_1},
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé les hypothèses de continuité de T. Regardons le premier terme de la somme,

$$\begin{aligned}
I_{p_0} &= \int_0^\infty \lambda^{p-p_0} \|f_\lambda\|_{p_0}^{p_0} \frac{d\lambda}{\lambda} \\
&= \int_0^\infty \lambda^{p-p_0} p_0 \int_0^\infty \mu^{p_0} \left|\{|f_\lambda|(x) > \mu\}\right| \frac{d\mu}{\mu} \frac{d\lambda}{\lambda} \\
&= \int_0^\infty \lambda^{p-p_0} p_0 \int_0^\lambda \mu^{p_0} \left|\{|f_\lambda|(x) > \lambda\}\right| \frac{d\mu}{\mu} \frac{d\lambda}{\lambda} \\
&\quad + \int_0^\infty \lambda^{p-p_0} p_0 \int_\lambda^\infty \mu^{p_0} \left|\{|f_\lambda|(x) > \mu\}\right| \frac{d\mu}{\mu} \frac{d\lambda}{\lambda}
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'égalité des ensembles $\{|f_\lambda|(x) > \lambda\}$ et $\{|f_\lambda|(x) > \mu\}$ pour $\mu < \lambda$, compte-tenu de la définition de f_λ. On a alors

$$\begin{aligned}
I_{p_0} &\leq \int_0^\infty \lambda^p p_0 \left|\{|f|(x) > \lambda\}\right| \frac{d\lambda}{\lambda} \\
&\quad + \int_0^\infty \mu^{p_0} p_0 \int_0^\mu \lambda^{p-p_0} \left|\{|f|(x) > \mu\}\right| \frac{d\lambda}{\lambda}\frac{d\mu}{\mu} \\
&\leq \frac{p_0}{p}\|f\|_p^p + \int_0^\infty \mu^p p_0 \left|\{|f|(x) > \mu\}\right| \frac{d\mu}{\mu} \\
&\leq \frac{2p_0}{p}\|f\|_p^p,
\end{aligned}$$

où l'inégalité provient maintenant du remplacement de $f_\lambda(x)$ par $f(x)$ (inclusion des ensembles donc inégalité sur les mesures) pour pouvoir permuter les signes somme et retrouver la norme L^p de f. Pour la seconde somme, I_{p_1}, c'est encore plus simple :

$$\begin{aligned}
I_{p_1} &= \int_0^\infty \lambda^{p-p_1} \|f_\lambda\|_{p_1}^{p_1} \frac{d\lambda}{\lambda} \\
&= \int_0^\infty \lambda^{p-p_1} p_1 \int_0^\infty \mu^{p_1} \left|\{|f^\lambda|(x) > \mu\}\right| \frac{d\mu}{\mu}\frac{d\lambda}{\lambda} \\
&= \int_0^\infty \lambda^{p-p_1} p_1 \int_0^\lambda \mu^{p_1} \left|\{|f|(x) > \mu\}\right| \frac{d\mu}{\mu}\frac{d\lambda}{\lambda} \\
&= p_1 \int_0^\infty \mu^{p_1} \left|\{|f|(x) > \mu\}\right| \int_\mu^\infty \lambda^{p-p_1} \frac{d\lambda}{\lambda}\frac{d\mu}{\mu} \\
&= p_1 \int_0^\infty \mu^{p} \left|\{|f|(x) > \mu\}\right| \frac{d\mu}{\mu} \\
&= \frac{p_1}{p}\|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration, à ceci près que si l'on traque les constantes, on a obtenu $C_\theta \lesssim \sup(C_0, C_1)$. □

Nous allons maintenant présenter la théorie abstraite de l'interpolation. On considère deux espaces fonctionnels A_0, A_1, et l'on définit

$$\text{le couple } \bar{A} = (A_0, A_1), \text{ et } \Delta(\bar{A}) = A_0 \cap A_1,\ \Sigma(\bar{A}) = A_0 + A_1.$$

Si T est un opérateur continu sur A_0 et A_1, on dira que T est continu sur $\bar{A}$. Si A est un troisième espace fonctionnel tel que $\Delta(\bar{A}) \subset A \subset \Sigma(\bar{A})$, on dira que A est un espace d'interpolation (de $\bar{A}$) si T continu sur $\bar{A}$ implique T continu sur A.

3.2.2 La K-méthode

On définit une fonctionnelle sur $\Sigma(\bar{A})$,

$$K(t,a) = \inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}).$$

On vérifie aisément que K est positive, croissante, et concave en t. Il est aussi facile de voir que $K(t,\cdot)$ est une norme sur $\Sigma(\bar{A})$, à t fixé. Nous allons définir de nouveaux espaces, naturellement sous-espaces de $\Sigma(\bar{A})$, en imposant des conditions de croissance sur $K(t,\cdot)$.

On définit, pour une fonction positive $\varphi(t)$,

$$\phi_{\theta,q}(\varphi) = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta}\varphi(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}},$$

puis l'espace $K_{\theta,q}(\bar{A})$ par

$$K_{\theta,q}(\bar{A}) = \{ f \in \Sigma(\bar{A}) \text{ si } \phi_{\theta,q}(K(t,f)) < +\infty\}$$

où cette dernière quantité définit naturellement la norme sur l'espace, notée $\|\cdot\|_{\theta,q;K}$.

LEMME 8
On a

$$K(s,a) \leq C_{\theta,q} s^\theta \|a\|_{\theta,q;K}. \tag{3.4}$$

Compte-tenu de la définition de K, on remarque que

$$K(t,a) \leq \max(1, \frac{t}{s})K(s,a),$$

que l'on réécrit (échangeant les rôles de t et s)

$$\min(1, \frac{t}{s})K(s,a) \leq K(t,a),$$

on intègre et par changement de variable on voit que

$$\phi_{\theta,q}(\varphi(\frac{t}{s})) = s^{-\theta}\phi_{\theta,q}(\varphi(t)),$$

ce qui donne le résultat du lemme. □

PROPOSITION 8
L'espace $K_{\theta,q}(\bar{A})$ contient $\Delta(\bar{A})$.

En effet, on a

$$K(t,a) \leq \min(1,t)\|a\|_{\Delta(\bar{A})},$$

qui donne

$$\|a\|_{\theta,q;K} \leq \phi_{\theta,q}(min(t,1))\|a\|_{\Delta(\bar{A})}$$

par intégration. □

Après toutes ces définitions et propriétés élémentaires, le théorème d'interpolation réelle devient essentiellement une trivialité, la difficulté s'étant déplacée ailleurs : il faudra identifier les espaces définis à partir de la K fonctionnelle d'un couple $\bar{A}$.

THÉORÈME 3
Soit T un opérateur continu de $\bar{A}$ dans $\bar{B}$. Alors T est continu de $K_{\theta,q}(\bar{A})$ dans $K_{\theta,q}(\bar{B})$, et si M_θ est la constante de continuité, $M_\theta \leq M_0^{1-\theta}M_1^\theta$.

Démonstration: Par définition et continuité de T, on a

$$\begin{aligned}
K(t, Ta, \bar{B}) &\leq \inf_{a=a_0+a_1} (\|Ta_0\|_{B_0} + t\|Ta_1\|_{B_1} \\
&\leq \inf_{a=a_0+a_1} (M_0\|a_0\|_{A_0} + M_1 t\|a_1\|_{A_1} \\
&\leq M_0 K(\frac{M_1}{M_0}t, a, \bar{A})
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat souhaité par intégration en utilisant la propriété de changement d'échelle de $\phi_{\theta,q}$, i.e. le lemme 8. □

Avant de donner des exemples d'identification des espaces d'interpolation réelle, nous poursuivons cette présentation rapide avec différentes variantes.

Tout d'abord, une variante à paramètre discret, où l'on remplace le paramètre t par 2^j. On définit $\alpha_j = K(2^j, a; \bar{A})$ et l'espace d'interpolation est maintenant défini par $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in l_q^{-\theta}$, où ce dernier espace de séquences est défini par

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} (2^{-j\theta}|\alpha_j|)^q < +\infty.$$

On vérife aisément que

$$K(2^j, a) \leq K(t, a) \leq 2K(2^j, a) \text{ pour } 2^j \leq t \leq 2^{j+1},$$

et l'on en déduit l'équivalence des normes à paramètre continu et discret.

3.2.3 La J-méthode

Nous définissons maintenant une autre fonctionnelle, cette fois-ci sur $\Delta(\bar{A})$, par

$$J(t, a) = \max_{a\in\Delta(\bar{A})} (\|a_0\|_{A_0}, t\|a_1\|_{A_1}).$$

Nous allons donner une nouvelle approche pour définir les espaces d'interpolation, à partir de l'autre fonctionnelle, $J(t, a)$. On remarque d'abord que J, vue comme une fonction de t, est positive, croissante, et concave. De plus,

$$\begin{aligned}
J(t, a) &\leq \max(1, \frac{t}{s})J(s, a), \\
K(t, a) &\leq \min(1, \frac{t}{s})J(s, a).
\end{aligned}$$

On considère l'ensemble des $a \in \Sigma(\bar{A})$ tels que

$$a = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}, \quad u(t) \in \Delta(\bar{A}),$$

où l'égalité a lieu dans $\Sigma(\bar{A})$. Cette décomposition n'a pas de raison d'être unique. On peut alors définir un ensemble, appelé $J_{\theta,q}(\bar{A})$ comme le sous-ensemble de ces a pour lesquels il existe $u(t)$ tel que

$$\phi_{\theta,q}(J(t, u(t)) < +\infty,$$

et

$$\|a\|_{\theta,q;J} = \inf_{u(t)} \phi_{\theta,q}(J(t,u(t)).$$

On vérifie que cette dernière quantité est bien une norme, puis que si l'on définit l'alternative discrète (comme avec la K-méthode) on obtient le même espace avec une norme équivalente.

THÉORÈME 4
Pour $0 < \theta < 1$, $1 \le q \le +\infty$, *on a*

$$J_{\theta,q}(\bar{A}) = K_{\theta,q}(\bar{A}).$$

On notera dorénavant cet espace $\bar{A}_{\theta,q}$.

Démonstration: On considère $a \in J_{\theta,q}$: on sait alors que $a = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}$, donc

$$\begin{aligned} K(t,a) &\le \int_0^\infty K(t,u(s))\frac{ds}{s}, \\ &\le \int_0^\infty \min(\frac{t}{s},1)J(s,u(s))\frac{ds}{s} \\ &\le \int_0^\infty \min(1,\frac{1}{s})J(ts,u(ts))\frac{ds}{s} \\ \|a\|_{\theta,q;K} &\le \phi_{\theta,q}(J(t,u(t)) \int_0^\infty s^\theta \min(1,\frac{1}{s})\frac{ds}{s}, \end{aligned}$$

ce qui donne $J_{\theta,q}(\bar{A}) \subset K_{\theta,q}(\bar{A})$ en prenant l'infimum sur les décompositions u de a. Pour la réciproque, il nous faut montrer au préalable un lemme.

LEMME 9
Soit a *tel que*

$$\lim_{t\to 0}\left(\min(1,t^{-1})K(t,a)\right) = 0 = \lim_{t\to+\infty} \min\left((1,t^{-1})K(t,a)\right).$$

Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists (u_j)_{j\in\mathbb{Z}} \text{ t.q. } a = \sum_j u_j,$$

où l'égalité a lieu dans $\Sigma(\bar{A})$, *et*

$$J(2^j,u_j) \le (3+\varepsilon)K(2^j,a).$$

Admettons provisoirement le lemme : comme

$$K(t,a) \le C_{\theta,q}t^\theta \|a\|_{\theta,q;K},$$

on est dans les conditions d'application du lemme. On en déduit l'existence de $(u_j)_j$ tel que

$$J(2^j,u_j) \le (3+\varepsilon)K(2^j,a),$$

et en prenant la version discrète des normes, on obtient l'inclusion $K_{\theta,q}(\bar{A}) \subset J_{\theta,q}(\bar{A})$. □

Montrons le lemme : pour tout $j \in \mathbb{Z}$, il existe une décomposition $a = a_0^j + a_1^j$ telle que

$$\|a_0^j\|_{A_0} + 2^j\|a_1^j\|_{A_1} \leq (1+\varepsilon)K(2^j, a)$$

et l'on déduit de l'hypothèse que

$$\lim_{j\to-\infty} \|a_0^j\|_{A_0} = 0, \ \lim_{j\to+\infty} \|a_1^j\|_{A_1} = +\infty.$$

On définit $u_j = a_0^j - a_0^{j-1} = a_1^{j-1} - a_1^j$. Il est clair que $u_j \in \Delta(\bar{A})$, et comme, si $N, M \in \mathbb{N}$

$$a = \sum_{-N}^{M} a_j + a_0^{-N-1} + a_1^M,$$

on a bien $a = \sum_j a_j$ dans $\Sigma(\bar{A})$. Par ailleurs,

$$J(2^j, u_j) \leq \sup(\|a_0^j - a_0^{j-1}\|_{A_0}, 2^j\|a_1^{j-1} - a_1^j\|_{A_1}) \leq 3(1+\varepsilon)K(2^j, a),$$

qui donne le résultat. □

Nous allons maintenant démontrer une forme de stabilité de l'interpolation réelle, appelée principe de réitération.

THÉORÈME 5

Soient $\bar{A}, \bar{X}$, où X_0, X_1 sont des espaces intermédiaires par rapport à $\bar{A}$, i.e.

$$K(t, a, \bar{A}) \leq Ct^{\theta_0}\|a\|_{X_0}, \text{ et } K(t, a, \bar{A}) \leq Ct^{\theta_1}\|a\|_{X_1}$$

ainsi que

$$\|a\|_{X_0} + \|a\|_{X_1} \leq Ct^{-\theta} J(t, a, \bar{A}).$$

Supposons que $\theta_0 \neq \theta_1$, et soit $\theta = (1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1$, avec $0 < \eta < 1$. Alors

$$\bar{X}_{\eta,q} = \bar{A}_{\theta,q}. \tag{3.5}$$

Démonstration: On commence par montrer que $\bar{X}_{\eta,q} \subset \bar{A}_{\theta,q}$. Soit $a = a_0 + a_1 \in \bar{X}_{\eta,q}$, avec $a_0 \in X_0$, $a_1 \in X_1$, on a

$$\begin{aligned} K(t, a; \bar{A}) &\leq K(t, a_0; \bar{A}) + K(t, a_1, \bar{A}) \\ &\lesssim t^{\theta_0}\|a_0\|_{X_0} + t^{\theta_1}\|a_1\|_{\theta_1} \\ &\lesssim t^{\theta_0} K(t^{\theta_1-\theta_0}, a; \bar{X}), \end{aligned}$$

et en appliquant $\phi_{\theta,q}$ et après changement de variable à droite, on obtient l'inclusion désirée.

Pour l'inclusion inverse, on considère donc $a = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}$, et

$$\|a\|^q_{\bar{X}_{\theta,q}} = \int_0^\infty (t^{\theta-\theta_0} K(t^{\theta_1-\theta_0}, a; \bar{X}))^q \, \frac{dt}{t}.$$

On peut majorer la fonctionnelle K, avec

$$K(t^{\theta_1-\theta_0}, a; \bar{X}) \leq \int_0^\infty \inf(1, (\frac{t}{s})^{\theta_1-\theta_0}) J(s^{\theta_1-\theta_0}, u)\frac{ds}{s},$$

et en remplaçant, on obtient la majoration souhaitée après permutation des sommes et changement de variable. □

Il existe une version bilinéaire du théorème d'interpolation réelle qui est parfois utile.

THÉORÈME 6
Soit T un opérateur bilinéaire de $A_0 \times B_0 \to C_0$, de $A_0 \times B_1 \to C_1$, et de $A_1 \times B_0 \to C_1$. Soient p, q tels que $1 \leq p^{-1} + q^{-1}$, et $\theta = \theta_0 + \theta_1$, avec $0 < \theta, \theta_0, \theta_1 < 1$. Alors T est continu de $\bar{A}_{\theta_0,pr} \times \bar{B}_{\theta_1,qr}$ dans $\bar{C}_{\theta,r}$.

Démonstration: Appelons $h = T(f, g)$. On montre dans un premier temps que

$$K(t,h) \lesssim \|f\|_{A_0} K(t,g),\ g \in \Sigma(\bar{B}),$$

et

$$K(t,h) \lesssim \|g\|_{B_0} K(t,f),\ f \in \Sigma(\bar{A}).$$

On en déduit ensuite que, pour $f \in \sigma(\bar{A}), g \in \Sigma(\bar{B})$,

$$K(t,h) \lesssim \int_1^\infty \frac{1}{s} K(st,f) K(st,g) \frac{ds}{s},$$

et on obtient le résultat en appliquant ϕ.... □

3.2.4 Exemples

Dans la pratique, il s'agit d'identifier les K-fonctionnelles associées à un couple d'espaces connus. Nous commençons par les espaces de Lesbesgue.

THÉORÈME 7
Soit $f \in L^p + L^\infty$. Alors

$$K(t, f, (L^p, L^\infty)) \sim \left(\int_0^{t^p} (f^*(s))^p ds \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En conséquence,

$$(L^{p_0}, L^{p_1})_{\theta,q} = L^{p,q}.$$

Démonstration: On définit f_t par $f_t(x) = f(x) - f * (t^p) f(x) / |f(x)$ si $|f(x)| \geq f^*(t^p)$ et $f_t(x) = 0$ sinon, et $f^t = f - f_t$. Appelons $E = \{x \text{ t.q. } f_t(x) \neq 0\}$, on a $|E| \leq t^p$, et f^* est constante sur $[|E|, t^p]$. On a

$$\begin{aligned}
K(t,f) &\leq \|f_t\|_p + t\|f^t\|_\infty \\
&\leq \left(\int_E (|f| - f^*(t^p))^p \right)^{\frac{1}{p}} + t f^*(t^p) \\
&\leq \left(\int_0^{|E|} (f^*(s) - f^*(t^p))^p ds \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^{t^p} f^*(t^p) ds \right)^{\frac{1}{p}}, \\
&\leq \left(\int_0^{t^p} (f^*(s) - f^*(t^p))^p ds \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^{t^p} f^*(t^p) ds \right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

ce qui donne un sens de l'équivalence. En sens inverse : $f = f_0 + f_1$ avec $f_0 \in L^p$ et $f_1 \in L^\infty$. Comme

$$m(\sigma_0 + \sigma_1, f) \leq m(\sigma_0, f_0) + m(\sigma_1, f_1),$$

on a

$$f^*(s) \leq f_0^*((1-\eta)s) + f_1^*(\eta s),$$

soit

$$\int_0^{t^p} f*(s)^p ds \leq (1-\eta)\|f_0\|_p^p + t^p\|f_1\|_\infty^p.$$

En prenant l'infimum sur les décompositions et $\eta \to 0$, on obtient l'autre sens. Grâce à cette équivalence, on déduit immédiatement que $(L^{p_0}, L^\infty)_{\theta,q} = L^{p,q}$. Le résultat général s'obtient alors par réitération... □

On peut maintenant énoncer la version la plus générale du théorème de Marcinkiewicz.

THÉORÈME 8

Soit T un opérateur continu de $L^{p_0,r_0} \longrightarrow L^{q_0,s_0}$ et de $L^{p_1,r_1} \longrightarrow L^{q_1,s_1}$, avec $p_0 \neq p_1$ et $q_0 \neq q_1$. Alors T est continu de $L^{p,r}$ dans $L^{q,r}$, avec $p \leq q$ et $0 < \theta < 1$, $1 \leq r \leq +\infty$,

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}, \frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_0} + \frac{1-\theta}{q_1}.$$

Chapitre 4

Estimations de dispersion pour l'équation Schrödinger et l'équation des ondes linéaires

4.1 Équation de Schrödinger

Dans cette partie on s'intéresse à des estimations pour l'équation de Schrödinger linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} i\partial_t\phi + \Delta\phi & = & 0, \\ \phi(x,0) & = & \phi_0(x) \end{array} \right. \tag{4.1}$$

in $\mathbb{R}^n$. On pourra considérer que $\phi_0 \in \mathcal{S}$, ce qui permet d'éviter les problèmes de définition, et de se concentrer sur les estimations. Par transformation de Fourier, on peut montrer qu'il y a une unique solution au sens des distributions tempérées, qui s'écrit (en variable de Fourier)

$$\hat{\phi}(\xi,t) = e^{-it|\xi|^2}\phi_0(\xi), \tag{4.2}$$

et (en variable d'espace)

$$\phi(x,t) = \frac{1}{(-4i\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}} \phi_0(y)dy. \tag{4.3}$$

Dans la suite, on notera $\phi = S(t)\phi_0$. De la formulation en variable de Fourier, on tire immédiatement la conservation de l'énergie,

$$\|S(t)\phi_0\|_2 = \|\phi_0\|_2, \tag{4.4}$$

en utilisant Plancherel. De la formulation en variable d'espace, on obtient l'inégalité suivante, dite dispersive :

$$\|S(t)\phi_0\|_\infty \lesssim \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}\|\phi_0\|_1, \tag{4.5}$$

en majorant simplement l'exponentielle imaginaire par un.
Pour aller plus loin, nous rappelons un théorème d'interpolation (complexe, en l'occurrence) que l'on démontrera ultérieurement.

Théorème 9 (Riesz-Thorin)
Soit $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq +\infty$, $p_0 \neq p_1$; T un opérateur (linéaire) continu de $L^{p_0} \to L^{q_0}$, et de $L^{p_1} \to L^{q_1}$, avec

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0}, \quad \|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}.$$

Alors, pour tout $\theta \in (0,1)$ l'opérateur T est continu de $L^{p_\theta} \to L^{q_\theta}$, avec $\frac{1}{q_\theta} = \frac{\theta}{q_0} + \frac{1-\theta}{q_1}$ et $\frac{1}{p_\theta} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$,

$$\|Tf\|_{q_\theta} \leq M_\theta \|f\|_{p_\theta}, \quad M_\theta \leq M_0^\theta M_1^{1-\theta}. \tag{4.6}$$

On peut ainsi énoncer la

Proposition 9
Soit $\phi_0 \in L^{p'}$, $1 \leq p' \leq 2$, alors $S(t)\phi_0 \in L^p$ et

$$\|S(t)\phi_0\|_p \lesssim \frac{1}{t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p'}-\frac{1}{p})}} \|\phi_0\|_{p'}. \tag{4.7}$$

Démonstration: Il suffit d'appliquer le théorème précédent à l'opérateur T, compte-tenu de (4.4) et (4.5). □

Remarque 22
Il suffit en fait d'obtenir l'estimation pour $t = 1$, compte-tenu de l'invariance par changement d'échelle : si $\phi(x,t)$ est la solution associée à la donnée $\phi_0(x)$, alors $\phi_\lambda(x,t) = \phi(\lambda x, \lambda^2 t)$ est la solution associée à la donnée $\phi_{\lambda,0}(x) = \phi_0(\lambda x)$. Cette remarque en apparence anodine nous permet en fait de dire que la constante (dépendant de t) dans (4.7) est simplement obtenue par changement d'échelle (plutôt que par interpolation des constantes de continuité lorsqu'on applique un théorème d'interpolation. Dans notre contexte, on obtient la même chose mais cela n'est pas toujours le cas).

Notre souhait étant de résoudre une équation non-linéaire, il nous faudra évaluer la non-linéarité. La continuité sur L^2, et par extension sur H^s (les dérivées commutent avec l'opérateur linéaire), incitent à travailler avec des données initiales dans des espaces de type Sobolev. Si l'on considère le cas où $s > d/2$, alors H^s est une algèbre, et l'on peut espérer traiter une non-linéarité de type puissance. Ceci ne permet jamais d'obtenir mieux que des solutions locales en temps. Pour espérer mieux, il faut travailler à des niveaux de régularité plus faibles, et il est donc important d'améliorer le type d'estimations dont on dispose. Pour cela, considérons l'équation suivante, pour $n = 2$:

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u,$$

et sa version intégrale

$$u = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)|u|^2 u \, ds.$$

Alors, si l'on s'intéresse au terme de Duhamel, on a la majoration (au moins formellement)

$$\begin{aligned}
\|u\|_4(t) &\lesssim \int_0^t \|S(t-s)|u|^2u\|_4(s)\,ds \\
&\lesssim \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac12}} \||u|^2u\|_{\frac43}(s)\,ds \\
&\lesssim \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac12}} \|u\|_4^3(s)\,ds \\
&\lesssim \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac12}s^{\frac34}}\,ds\ \sup_t (t^{\frac14}\|u\|_4(t))^3
\end{aligned}$$

$$\sup_t t^{\frac14}\|u\|_4(t) \lesssim \int_0^1 \frac{1}{(1-\theta)^{\frac12}\theta^{\frac34}}\,d\theta\ \sup_t (t^{\frac14}\|u\|_4(t))^3.$$

Ceci indique qu'en utilisant la dispersion, on peut espérer par exemple faire un point fixe, si la donnée u_0 est telle que $\sup_t t^{\frac14}\|S(t)u_0\|_4$ est une quantité petite. Malheureusement il n'est pas aisé de déterminer les données initiales qui vérifient cette condition (en particulier, pour quels espaces de Sobolev pour la donnée initiale). Un simple changement d'échelle laissant l'équation invariante ($\phi_\lambda(x,t) = \lambda\phi(\lambda x, \lambda^2 t)$) laisse aussi cette quantité invariante, ce qui suggère de considérer des données ϕ_0 évaluées dans une norme elle aussi invariante : en l'occurrence, puisque $n = 2$, si l'on veut une norme Sobolev, il s'agit de la norme L^2. Le théorème suivant nous apprend que la "bonne" norme pour le problème non-linéaire considéré ci-dessus sera en fait la norme $L^4_{t,x}$ (qui n'est pas très éloignée de la quantité précédente, puisque $t^{-\frac14}$ n'est pas une fonction de L^4_t, mais peu s'en faut).

THÉORÈME 10 ([21],[10])
Soit (q,r) et $(\tilde q,\tilde r)$ des paires d'indices admissibles pour Schrödinger, c'est-à-dire. tels que $\frac{2}{q} + \frac{n}{r} = \frac{n}{2}$, $q \geq 2$ (ou $q > 2$ si $n = 2$, $q > 4$ si $n = 1$). Soit $\phi_0(x) \in L^2$, $F(t,x) \in L^{\tilde q'}(-T,T); L^{\tilde r'}_x)$. Alors il existe des constantes $C(n,q)$, $\tilde C(n,q,\tilde q)$ (mais indépendantes de $0 < T \leq +\infty$) telle que, si si $\phi(x,t)$ désigne la solution de

$$i\partial_t\phi + \Delta\phi = F,\ \ \phi(0,x) = \phi_0(x),$$

alors on a les estimations

$$\|S(t)\phi_0\|_{L^q_t(L^r_x)} \leq C(n,q)\|\phi_0\|_2, \tag{4.8}$$

$$\|\phi - S(t)\phi_0\|_{C_t(L^2_x)} \leq C(n,\tilde q)\|F(x,t)\|_{L^{\tilde q'}_t(L^{\tilde r'}_x)}, \tag{4.9}$$

$$\|\phi - S(t)\phi_0\|_{L^q_t(L^r_x)} \leq \tilde C(n,q,\tilde q)\|F(x,t)\|_{L^{\tilde q'}_t(L^{\tilde r'}_x)}, \tag{4.10}$$

où l'on a abrégé $C_t(L^2_x) = C([0,T],L^2)$ et $L^q_t(L^r_x) = L^q((0,T);L^r_x)$.

Démonstration: La démonstration se fait en plusieurs étapes, dont la principale repose sur un argument abstrait d'analyse fonctionnelle, que l'on appelle TT^* ("TT star"). Nous l'énonçons maintenant.

LEMME 10
Considérons H un espace de Hilbert, B et son dual B' des espaces de Banach, T un opérateur. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

– *L'opérateur T est continu de H dans B, $\|Tf\|_B \leq C\|f\|_H$.*
– *Son adjoint $T^\star$ est continu de B' dans H, $\|T^\star F\|_H \leq C\|F\|_{B'}$.*
– *L'opérateur $TT^\star$ est continu de B' dans B, $\|TT^\star F\|_B \leq C^2\|F\|_{B'}$.*

Démontrons donc le lemme : les deux propriétés sont clairement équivalentes, puisque duales l'une de de l'autre : rappelons que le dual $T^\star$ se définit comme l'opérateur tel que

$$\forall f \in H, \forall g \in B', < T^\star g, f >_{H,H} = < g, Tf >_{B',B}.$$

On va montrer que les deux dernières propriétés sont équivalentes : il est clair que la seconde (combinée avec la première !) implique la troisième. Montrons la réciproque. Pour cela on écrit

$$\begin{aligned}
\|T^\star g\|_H^2 &= < T^\star g, T^\star g >_{H,H} \\
&= < g, TT^\star g >_{B',B} \\
&\leq \|g\|_{B'}\|TT^\star g\|_B \\
&\leq C^2\|g\|_{B'}^2,
\end{aligned}$$

qui est la propriété désirée. Ceci achève la preuve du lemme. □

Revenons à notre théorème : il s'agit d'identifier H, B, B' et T. On prendra $H = L^2_x$, $B = L^q_t(L^r_x)$ et T est l'opérateur qui à ϕ_0 associe $\phi(x,t) = S(t)\phi_0$. L'opérateur adjoint $T^\star$ associe à $g(x,s)$ la fonction $\int_{s\in\mathbb{R}} S(-s)g(x,s)ds$ (qui est certainement bien définie, comme distribution, pour $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, et que l'on étend ensuite à B' par densité). On est donc ramené à étudier l'opérateur

$$TT^\star g(x,t) = \int_{s\in\mathbb{R}} S(t-s)g(x,s)ds.$$

Pour conclure, on utilise l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev, que l'on énonce dans toute sa généralité, même si pour nos besoins la version monodimensionnelle suffit.

Proposition 10 (Hardy-Littlewood-Sobolev)
Soit $f \in L^\gamma(\mathbb{R}^m)$, $1 < \gamma < +\infty$, $0 < \alpha < n$, alors l'opérateur de convolution par $|x|^{-\alpha}$ est continu de L^γ dans L^β où $\beta^{-1} - \gamma^{-1} = \alpha n^{-1} - 1$. Autrement dit,

$$\left\|\frac{1}{|x|^\alpha} * f\right\|_\beta \leq C(n,\gamma,\alpha)\|f\|_\gamma,\ \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta} + \frac{\alpha}{n} = 1. \tag{4.11}$$

On démontrera plus tard cette inégalité (que l'on peut voir comme une généralisation de l'inégalité de Young : la fonction $|x|^{-\alpha}$ est "presque" dans $L^{\frac{n}{\alpha}}$).

Remarque 23
Il s'agit d'une version appropriée des injections de Sobolev (dans un cadre fonctionnel légèrement différent de celui que l'on vu précédemment). Dans la plage restreinte où l'on en a besoin, i.e. $m = 1$, $\gamma = q'$ et $\beta = q$, soit $\alpha = 2/q$, il suffit pour montrer (4.11) de montrer que $\dot{H}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R})$ (exercice !). Cette dernière injection est en fait une conséquence de celle déjà montrée pour les Besov, puisqu'un Sobolev est un Besov avec $p = q = 2$.

REMARQUE 24
On trouve parfois l'inégalité sous son énoncé dual, soit $f \in L^\gamma$, $g \in L^\rho$ impliquent

$$| < |x|^{-\alpha} * f, g > | \lesssim \|f\|_\gamma \|g\|_\rho, \text{ avec } \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\rho} + \frac{\alpha}{n} = 2.$$

En dimension $n = 1$, on peut donc remplacer la convolution par $|x|^{-\alpha}$ par celle par $|x|^{-\alpha}\chi_{x>0}$ ou $|x|^{-\alpha}\chi_{x<0}$: en effet, pour des fonctions positives,

$$\int_{x<y} \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^\alpha} dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^\alpha} dxdy.$$

Nous pouvons maintenant achever notre argument TT^* : en utilisant la proposition 9,

$$\begin{aligned}
\|TT^*g\|_r(t) &\lesssim \int_{s\in\mathbb{R}} \|S(t-s)g(s)\|_r ds \\
&\lesssim \int_{s\in\mathbb{R}} \frac{1}{(t-s)^{\frac{2}{q}}} \|g(s)\|_{r'} ds \\
&\lesssim \frac{1}{(\cdot)^{\frac{2}{q}}} * (\|g(\cdot)\|_{r'})(t) \\
\|TT^*g\|_{L_t^q(L_x^r)} &\lesssim \|g\|_{L_t^{q'}(L_x^{r'})}.
\end{aligned}$$

La constante dans la dernière inégalité (qui est ce que l'on cherchait) est liée à celle de HLS, donc en particulier cette constante explose lorsque q se rapproche de 2.

REMARQUE 25
La démonstration que l'on effectue est donc restreinte aux indices $q > 2$. En fait, lorsque $n \geq 3$, la valeur (extrêmale) $q = 2$ est autorisée mais nécessite une démonstration sensiblement plus difficile ([10]), que l'on va reproduire ultérieurement.

Nous avons ainsi démontré l'estimation (4.8). Il nous reste à montrer les deux autres estimations du théorème. La seconde, (4.9), se déduit immédiatement de la première :

$$\begin{aligned}
\phi - S(t)\phi_0 &= \int_0^t S(t-s)F(s)ds \\
&= S(t)\int_{s\in\mathbb{R}} S(-s)\chi_{s\in(0,t)}F(s)ds \\
&= S(t)T^*(\chi_{s\in(0,t)}F(s)).
\end{aligned}$$

On a donc, à t fixé,

$$\begin{aligned}
\|\phi - S(t)\phi_0\|_2 &= \|S(t)T^*(\chi_{s\in(0,t)}F(s))\|_2 \\
&= \|T^*(\chi_{s\in(0,t)}F(s))\|_2 \\
&\lesssim \|\chi_{s\in(0,t)}F(s))\|_{L_s^{q'}L_x^{r'}},
\end{aligned}$$

qui est bien le résultat.
Il nous faut montrer maintenant la dernière estimation, (4.10). Il y a deux problèmes à surmonter : tout d'abord, on a $\int_{s<t} S(t-s)F(s)ds$ et non $\int_{\mathbb{R}} S(t-s)F(s)ds$,et ensuite, deux

paires (q,r) différentes apparaissent des deux cotés de l'inégalité. La première difficulté se traite grâce à la remarque 24 et la seconde sera réglée par interpolation avec les estimations précédentes, une fois démontré le cas où $(\tilde{q},\tilde{r}) = (q,r)$. Commençons par ce cas : on a déjà montré que

$$\|TT^*F\|_{L^q_t L^r_x} = \| \int_{\mathbb{R}} S(t-s)F(s)ds\|_{L^q_t L^r_x} \lesssim \|F\|_{L^{q'}_t L^{r'}}.$$

On note alors que $\int_0^t S(t-s)F(s)ds = \int_{s<t} S(t-s)\tilde{F}(s)ds$ où $\tilde{F}(s) = F(s)\chi_{s>0}$, on relabelle donc $\tilde{F}$ en F, et il s'agit de montrer que

$$\| \int_{s<t} S(t-s)F(s)ds\|_{L^q_t L^r_x} \lesssim \|F\|_{L^{q'}_t L^{r'}}.$$

Par dualité, on considère

$$\begin{aligned}\left|< \int_{s<t} S(t-s)F(s)ds, G(t) >_{\mathbb{R}^{n+1}}\right| &= \left|\int_{s<t} < S(t-s)F(s), G(s) >_{\mathbb{R}^n} dsdt\right| \\ &\lesssim \int_{s<t} \frac{1}{(t-s)^{\frac{2}{q}}} \|F(s)\|_{r'} \|G(s)\|_{r'} dsdt \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(t-s)^{\frac{2}{q}}} \|F(s)\|_{r'} \|G(s)\|_{r'} dsdt \\ &\lesssim \|F(s)\|_{L^{q'}_t L^{r'}_x} \|G(s)\|_{L^{q'}_t L^{r'}_x},\end{aligned}$$

qui est l'estimation souhaitée. Récapitulons : nous avons montré que pour une paire admissible (q,r) fixée,

$$\| \int_{s<t} S(t-s)F(s)ds\|_{L^\infty_t L^2_x} \lesssim \|F(s)\|_{L^{q'}_t L^{r'}_x}, \tag{4.12}$$

$$\| \int_{s<t} S(t-s)F(s)ds\|_{L^q_t L^r_x} \lesssim \|F(s)\|_{L^{q'}_t L^{r'}_x}. \tag{4.13}$$

Comme $\int_{t<s} S(t-s)F(s)ds = \int_{\mathbb{R}} S(t-s)F(s)ds - \int_{s<t} S(t-s)F(s)ds = S(t)T^*F - \int_{s<t} S(t-s)F(s)ds$, les mêmes inégalités sont aussi vraies pour $\int_{t<s} S(t-s)F(s)ds$. On commence par interpoler (4.12) et (4.13), en utilisant la version généralisée suivante du théorème d'interpolation précédemment énoncé.

PROPOSITION 11
Soit T un opérateur continu de $L^{q_i}_x L^{r_i}_y$ dans $L^{\alpha_i}_\xi L^{\beta_i}_\eta$ pour $i = 0,1$, $q_i, r_i, \alpha_i, \beta_i \in [1,+\infty]$, x, y, ξ, η des variables multidimensionnelles, M_i les constantes de continuité. Alors l'opérateur T est continu de $L^{q_\theta}_x L^{r_\theta}_y$ dans $L^{\alpha_\theta}_\xi L^{\beta_\theta}_\eta$, où les indices se calculent avec la même règle que dans le théorème 9, i.e. $\gamma_\theta^{-1} = \theta\gamma_0^{-1} + (1-\theta)\gamma_1^{-1}$.

En utilisant la proposition, on obtient que pour toute paire (q,r) avec $q > \tilde{q}$,

$$\| \int_{s<t} S(t-s)F(s)ds\|_{L^q_t L^r_x} \lesssim \|F(s)\|_{L^{\tilde{q}'}_t L^{\tilde{r}'}_x},$$

et la même inégalité pour $\int_{t<s} S(t-s)F(s)ds$. Pour obtenir les cas $q < \tilde{q}$, il suffit alors de remarquer que ce dernier opérateur est essentiellement le dual de celui qui nous intéresse :

$$\begin{aligned}
< \int_{s<t} S(t-s)F(s)ds, G(t) >_{\mathbb{R}^{n+1}} &= \int_{s<t} < S(t-s)F(s), G(t) >_{\mathbb{R}^n} dsdt, \\
&= \int_{s<t} < F(s), S(s-t)G(t) >_{\mathbb{R}^n} dsdt, \\
&= < F(s), \int_{s<t} S(s-t)G(t)dt >_{\mathbb{R}^{n+1}} .
\end{aligned}$$

Donc en considérant l'estimation duale de (4.1), on obtient exactement les cas $q < \tilde{q}$, ce qui achève la démonstration. □

REMARQUE 26
La continuité en temps est laissée au lecteur !

Il existe en fait un théorème récent ([5]) qui permet d'éviter ces raisonnements pour déduire directement les estimations du terme provenant de Duhamel à partir de (4.8). La preuve qui suit est essentiellement extraite de [17], qui donne une version plus faible que le résultat original mais suffisante pour nos besoins.

LEMME 11
Considérons un opérateur T sur des fonctions d'une variable $f(t)$,

$$Tf(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t,s)f(s)\,ds\,.$$

Supposons que

$$\|Tf\|_{L^q_t} \lesssim \|f\|_{L^p_t}, \tag{4.14}$$

où $q > p$. Soit

$$Wf(t) = \int_{s<t} K(t,s)f(s)\,ds.$$

Alors

$$\| Wf \|_{L^q_t} \lesssim \|f\|_{L^p_t},$$

et la constante explose lorque $q \to p$.

REMARQUE 27
Le lecteur énoncera aisément une version vectorielle, où T est continu de $L^p_t(X)$ dans $L^q_t(Y)$, où X et Y sont des Banach. La démonstration reste la même en mettant les normes adéquates partout. On pourrait aussi adapter le résultat pour $X(L^p_t)$ et $Y(L^q_t)$, sous des hypothèses appropriées sur X et Y.

On va seulement considérer les cas p, q finis. On commence par normaliser f tel que $\|f\|_{L^p_t} = 1$, f régulière et à support compact et l'on va supposer que la fonction

$$F(t) = \int_{s<t} |f(s)|^p\,ds$$

est une bijection de $\operatorname{supp} f \to [0,1]$ (ce qui ne constitue pas une restriction, y réfléchir...). Considérons $I \subset [0,1]$ un intervalle fini, on veut prouver que

$$\|\chi_{F^{-1}(I)}(s)f(s)\|_{L^p_t} \lesssim |I|^{\frac{1}{p}}. \tag{4.15}$$

Prenons $I = [a,b]$ $F^{-1}(I) = [t_a, t_b]$, et appelons $J(t) = \int_{s<t} |f(s)|^p\,ds$. Alors

$$\begin{aligned} \|\chi_{F^{-1}(I)}(s)f(s)\|^p_{L^p_t} &= \int_{t_a}^{t_b} |f(s)|^p\,ds, \\ &= J(t_b, x) - J(t_a, x), \\ &\lesssim b - a, \end{aligned}$$

qui est ce que l'on voulait.
Ensuite on considère l'ensemble des intervalles dyadiques de $[0,1]$. On définit alors une relation sur cet ensemble : si I et J sont deux de ces intervalles, $I \sim J$ si I et J ont la

même longueur et si I est à la gauche de J et I et J ne sont pas adjacents mais ont des parents adjacents (c'est un exemple de décomposition de Whitney, un outil fréquemment utilisé en analyse harmonique).
L'important est de voir que si J est fixé, il y a au plus deux $I \sim J$. De plus, pour toute paire $(x,y) \in [0,1]^2$ avec $x < y$ il y a une unique paire d'intervalles dyadiques I, J avec $I \sim J$ et $x \in I$ and $y \in J$ (dessin!!). Nous reviendrons en détail sur ce point après la fin de la démonstration.
Ainsi, en posant $x = F(s)$ et $y = F(t)$, on a la relation

$$\begin{aligned} \chi_{s<t}(s,t) &= \chi_{\{(x,y)\in[0,1]^2 : x<y\}}(x,y) \\ &= \sum_{\{I,J:I\sim J\}} \chi_I(x)\chi_J(y) \\ &= \sum_{\{I,J:I\sim J\}} \chi_{F^{-1}(I)}(s)\chi_{F^{-1}(J)}(t). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$Wf = \sum_{\{I,J:I\sim J\}} \chi_{F^{-1}(J)} T(\chi_{F^{-1}(I)} f).$$

On peut alors écrire

$$\|Wf\|_{L^q_t} \lesssim \sum_{j\geq 2} \Big\| \sum_{\{I,J:I\sim J, |I|=2^{-j}\}} \chi_{F^{-1}(J)} T(\chi_{F^{-1}(I)} f) \Big\|_{L^q_t}. \tag{4.16}$$

Puisque pour tout J il y a au plus deux I tels que $I \sim J$, et que les J avec $|J| = 2^{-j}$ sont deux à deux disjoints, on peut éliminer la sommation en J, et obtenir (j est fixé, et l'on sait que les intervalles dyadiques J sont une partition de $[0,1]$)

$$\Big\| \sum_{\{I,J:I\sim J, |I|=2^{-j}\}} \chi_{F^{-1}(J)} T(\chi_{F^{-1}(I)} f) \Big\|^q_{L^q_t} \lesssim 2 \sum_{\{I:|I|=2^{-j}\}} \| T(\chi_{F^{-1}(I)} f)\|^q_{L^q_t}.$$

Ainsi

$$\|Wf\|_{L^q_t} \lesssim \sum_{j\geq 2} \left(\sum_{\{I:|I|=2^{-j}\}} \| \chi_{F^{-1}(I)} f \|^q_{L^p_t} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.17}$$

Cette dernière somme se calcule compte-tenu de ce que l'on sait :

$$\left(\sum_{\{I:|I|=2^{-j}\}} 2^{-jq/p} \right)^{1/q} = 2^{-\eta j}$$

où $\eta > 0$, et ainsi l'on peut sommer sur j, ce qui termine la preuve. □
Revenons à la décomposition de Whitney : on peut en fait montrer (voir par exemple [18])

Proposition 12
Soit F un ensemble fermé dans $\mathbb{R}^n$, et O son complémentaire (qui est donc ouvert !). Alors on peut voir O comme une réunion de cubes Q_k, $k \in \mathbb{N}$, d'intérieurs disjoints, de cotés parallèles aux axes, et dont les diamètres sont de l'ordre de la distance à F :

1. $O = \cup_{k=0}^{\infty} Q_k$.
2. $Q_k \cap Q_j = \varnothing$ si $j \neq k$.
3. $|Q_k| \leq (d(Q_k, F))^n \leq 4^n |Q_k|$.

Nous allons nous contenter de montrer le cas (explicite !) précédent, où l'on ne s'intéresse qu'à $[0,1]\times[0,1]$ et où F est la diagonale $x=y$. On décrit simplement la partie supérieure, $x<y$. Les intervalles I (celui qui contient x) et J (celui qui contient y) sont les cotés du carré qui est a distance environ $y-x$ de l'axe, et de taille environ $y-x$. Comme on veut des carrés à cotés parallèles aux axes, on utilise la distance du sup, pour laquelle les boules de rayon dyadique sont bien les carrés que l'on recherche. Clairement on ne peut pas mettre un cube à distance $1/2$ au dessus de la diagonale, il serait hors carré $[0,1]\times[0,1]$. On commence donc à distance $1/4$: c'est le carré $[0,1/4[\times]3/4,1]$. Les points qui sont dans ce carrés sont associés à la paire $I=[0,1/4[$ et $J=]3/4,1]$ qui est bien en relation : ils ne sont pas adjacents, mais leurs parents $[0,1/2[$ et $]1/2,1]$ le sont. Par ailleurs, c'est bien la seule paire en relation pour un tel couple (x,y) : supposons qu'il y en ait une autre, alors $x\in I'$, dyadique. I' est un sous-intervalle dyadique de $[0,1/4[$ (il n'y a pas de paire plus grande en relation). Soit il est de taille inférieure ou égale à $1/16$ et alors tout J' qui est en relation avec lui est aussi dans $[0,3/8[$ ce qui est impossible. Soit sa taille est $1/8$: c'est donc soit $[0,1/8[$, mais alors au pire J' est dans $[1/4,1/2]$, impossible ! ou c'est $[1/8,1/4]$ et alors J' doit aussi être dans $[1/4,1/2]$, ce qui est encore impossible ! Il y a encore deux autres couples d'intervalles en relation qui donnent des cubes approximativement à distance $1/4$: $[0,1/4[\times]1/2,3/4]$ et son symétrique par rapport à $y+x=1$, i.e. $[1/4,1/2[\times]3/4,1]$. Faisons le premier : les deux couples sont bien en relation, et si $x\in I'$ un sous-intervalle dyadique, le même raisonnement que précédemment nous dit que J' tel que $y\in J'$ ne peut exister ! On poursuit ensuite la construction de façon autosimilaire, c'est-à-dire que l'on remplit avec 3 cubes de coté $1/8$ le coin supérieur gauche des carrés de taille $1/2$ centrés successivement en $(1/4,1/4)$, $(1/2,1/2)$ et $(3/4,3/4)$, et ainsi de suite...

REMARQUE 28
On peut numéroter les zones en labellant les cube complémentaires de la zone délimitée à l'échelle j : au premier niveau, $j=1$, il s'agit du cube $1/4<x<1/2, 1/2<y<3/4$, que l'on peut repérer par son coin inférieur droit, $(1/2,1/2)$; au niveau j, 2^j-1 cubes de coté 2^{-j-1}, de coin inférieur droit $2^{-j}k$ avec $1\leq k\leq 2^j-1$. On peut alors évaluer la paire (I,J) associée à un (x,y) donné (exercice !).

REMARQUE 29
La preuve s'adapte verbatim au cas de la dimension n, lorsque F est toujours l'hyperplan $\{x=y\}$.

On va maintenant s'intéresser au cas du point extrémal des estimations de Strichartz. La démonstation qui suit est tirée de [10]. On commence par remarquer que l'on peut écrire la conservation de la norme L^2 ainsi que la dispersion de façon bilinéaire : si F,G sont deux fonctions de x,t, d'une part

$$|<S(-s)F(s), S(-t)G(t)>| \leq \|F(s)\|_{L^2_x}\|G(t)\|_{L^2_x}, \tag{4.18}$$

et d'autre part

$$|<S(-s)F(s), S(-t)G(t)>| \lesssim \frac{1}{|t-s|^{\frac{n}{2}}}\|F(s)\|_{L^1_x}\|G(t)\|_{L^1_x} \tag{4.19}$$

et de même en utilisant l'estimation $L^{p'} - L^p$ obtenue par interpolation,

$$(4.20) \qquad |< S(-s)F(s), S(-t)G(t) >| \lesssim \frac{1}{|t-s|^{1+\beta(r,r)}} \|F(s)\|_{L_x^{r'}} \|G(t)\|_{L_x^{r'}}$$

où $\beta(r,\rho) = \frac{n}{2}(1 - \frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}) - 1$. On note qu'en raison de la symétrie, il suffit de montrer le résultat pour la zone $s < t$.
On va décomposer la partie du plan (t,s) définie par $s < t$ en bandes diagonales, définies par $2^j \leq t - s < 2^{j+1}$. On écrit donc

$$T(F,G) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{T}_j(F,G) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{2^j \leq t-s<2^{j+1}} < S(-s)F(s), S(-t)G(t) > \, ds\, dt,$$

et pour conclure il suffit de majorer $|T_j(F,G)|$ par une série sommable en j. Notons $r' = \frac{2n}{n+2}$, on va montrer que

PROPOSITION 13
L'estimation suivante est vraie pour tout $j \in \mathbb{Z}$, et tout couple d'exposants (a,b) dans un voisinage de (r,r),

$$(4.21) \qquad |T_j(F,G)| \lesssim 2^{-j\beta(a,b)} \|F\|_{L_t^2(L_x^{a'})} \|G\|_{L_t^2(L_x^{b'})}.$$

Il est facile de vérifier que l'inégalité (4.21) est invariante par changement d'échelle. Il suffit donc de montrer la proposition pour $j = 0$. De cette façon, comme $1 < t - s < 2$ sur la zone d'intégration, on peut découper $F = \sum_n F_n$ et $G = \sum_m G_m$ pour écrire

$$T_0(F,G) = \sum_{m,n} T_0(F_n, G_m) = \sum_{n\sim m} T_0(F_n, G_m),$$

ce qui signifie que l'on peut en fait se restreindre au cas $n = m$ sans perte de généralité.
Etudions donc $T_0(F_n, G_n)$: il suffit en fait de faire deux cas.
– Le cas $a = b = \infty$. On intègre la dispersion bilinéaire, et il vient

$$|T_0(F_n, G_n)| \lesssim \|F_n\|_{L_t^1(L_x^1)} \|G_n\|_{L_t^1(L_x^1)},$$

et par Hölder,

$$|T_0(F_n, G_n)| \lesssim \|F_n\|_{L_t^2(L_x^1)} \|G_n\|_{L_t^2(L_x^1)}.$$

– Le cas $2 \leq a < r$, $b = 2$. Là on sépare les intégrales,

$$|T_0(F_n, G_n)| \leq \sup_t \| \int_{1<t-s<2} S(-s)F_n(s)ds\|_{L_x^2} \int_t \|S(-t)G_n(t)\|_{L_x^2} dt,$$

et pour traiter la première intégrale on utilise une estimation de Strichartz déjà démontrée, puisque $a' > r'$, donc si (A, a) est une paire, $A' < 2$ et

$$|T_0(F_n, G_n)| \leq \|F_n(s)\|_{L_t^{A'}(L_x^{a'})} \|G_n(t)\|_{L_t^1 L_x^2},$$

et finalement par Hölder il vient

$$|T_0(F_n, G_n)| \leq \|F_n(s)\|_{L_t^2(L_x^{a'})} \|G_n(t)\|_{L_t^2 L_x^2}.$$

Il s'agit ensuite de resommer sur n, mais si on a choisi $F_n(t) = \chi_{n<t<n+1}F(t)$, cela résulte simplement de Hölder sur la suite $(\|F_n(t)\|_{L_t^2})_n$ qui est dans l^2 et dont la somme est $\|F(t)\|_{L_t^2}$. Ceci termine la preuve de la proposition.
Pour achever la preuve, on fait appel à un théorème abstrait d'interpolation bilinéaire, que l'on va énoncer maintenant.

THÉORÈME 11
Soit $A_0, A_1, B_0, B_1, C_0, C_1$ *des Banach, et* T *un opérateur bilinéaire borné de* $A_0 \times B_0 \to C_0$*, de* $A_1 \times B_0 \to C_1$ *et de* $A_0 \times B_1 \to C_1$*. Alors si* $0 < \theta_0, \theta_1 < \theta < 1$*,* $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ *tels que* $1 \leq 1/p + 1/q$ *et* $\theta = \theta_0 + \theta_1$*, l'opérateur* T *est continu de* $(A_0, A_1)_{\theta_0, pr} \times (B_0, B_1)_{\theta_1, qr} \to (C_0, C_1)_{\theta, r}$.

Les couples sont ici les interpolées au sens de l'interpolation réelle que l'on définira ultérieurement. Pour l'heure, il nous suffit de savoir que d'une part, si $1/p = \theta/p_0 + (1-\theta)/p_1$,

$$(L_t^2, L_x^{p_0})_{\theta,2} = L_t^2 L_x^{p,2},$$

où $L_x^{p,2} \hookrightarrow L_x^p$ si $p \geq 2$, et d'autre part

$$(l_\infty^{s_0}, l_\infty^{s_1})_{\theta,1} = l_1^s$$

avec $s = \theta s_0 + (1-\theta)s_1$, et où $l_p^s = l^p(2^{js}dj)$ est un espace de suites avec poids.
Ainsi, l'estimation du lemme se réécrit donc

$$T \text{ est continu de} L_t^2 L_x^{a'} \times L_t^2 L_x^{b'} \text{ dans } l_\infty^{\beta(a,b)},$$

où T est l'opérateur vectoriel de coordonnées T_j, $j \in \mathbb{Z}$. On peut alors lui appliquer le théorème, avec $p = q = 2$, $r = 1$ et des a_0, a_1, b_0, b_1 tels que $\beta(a_0, a_1) = \beta(a_1, b_0) \neq \beta(a_0, b_0)$, ce qui nous donne donc que dans un voisinage de (r, r), on a

$$T \text{ est continu de} L_t^2 L_x^{a',2} \times L_t^2 L_x^{b',2} \text{ dans } l_1^{\beta(a,b)},$$

et en prenant en particulier $a = b = r$, on obtient le résultat désiré, ce qui termine la preuve. □

REMARQUE 30
La preuve "abstraite" par interpolation réelle cache en fait la réalité simple suivante : prenons F, G *deux fonctions simples, i.e.* $F(t) = 2^{-\frac{k}{r'}} f(t)\chi_{E(t)}$ *et* $G(s) = 2^{-\frac{l}{r'}}(s)\chi_{H(s)}$*, où* $|E(t)| = 2^k$*,* $|G(s)| = 2^l$*. Alors on a*

$$|T_j(F,G)| \lesssim 2^{(k-j\frac{n}{2})(\frac{1}{r}-\frac{1}{a})+(l-j\frac{n}{2})(\frac{1}{r}-\frac{1}{b})}\|f\|_{L_t^2}\|g\|_{L_t^2}.$$

Le fait d'avoir ceci pour tout (a, b) *dans un voisinage de* (r, r) *permet d'optimiser pour obtenir*

$$|T_j(F,G)| \lesssim 2^{-\varepsilon(|k-j\frac{n}{2}||l-j\frac{n}{2}|}\|f\|_{L_t^2}\|g\|_{L_t^2},$$

qui peut être sommé sur j.

4.2 Équation des ondes

On considère maintenant l'équation des ondes (rappelons que $\Box = \partial_t^2 - \Delta$)

$$(4.22)\qquad \left\{\begin{array}{rcl} \Box\phi & = & 0, \\ \phi(x,0) & = & \phi_0(x), \\ \partial_t\phi(x,0) & = & \phi_1(x). \end{array}\right.$$

dans tous l'espace $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$. De la même façon que pour l'équation de Schrödinger, on peut montrer qu'il existe une unique solution au sens des distributions tempérées, qui est donnée par la représentation suivante en variable de Fourier :

$$(4.23)\qquad \widehat{\phi}(\xi,t) = \cos(t|\xi|)\widehat{\phi}_0(\xi) + \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\widehat{\phi}_1(\xi).$$

On note usuellement $W(t)$ l'opérateur défini par $W(t)\phi_1 = \mathcal{F}^{-1}(\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\widehat{\phi}_1(\xi))$, et par $\dot{W}(t)$ celui défini par $\dot{W}(t)\phi_0 = \mathcal{F}^{-1}(\cos(t|\xi|)\widehat{\phi}_0(\xi))$. Ainsi la solution s'écrit

$$\phi(x,t) = \dot{W}(t)\phi_0 + W(t)\phi_1.$$

Pareillement la solution de l'équation inhomogène s'obtient par Duhamel : si

$$(4.24)\qquad \left\{\begin{array}{rcl} \Box\phi & = & F, \\ \phi(x,0) & = & 0, \\ \partial_t\phi(x,0) & = & 0. \end{array}\right.$$

alors la solution est

$$(4.25)\qquad \phi(x,t) = \int_0^t W(t-s)F(s)ds = \mathcal{F}^{-1}\left(\int_0^t \frac{\sin((t-s)|\xi|)}{|\xi|}\widehat{F}(\xi,s)ds\right).$$

En pratique, il sera parfois commode de travailler plutôt avec l'opérateur suivant :

$$(4.26)\qquad U^{\pm}(t)f(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{\pm it|\xi|}\hat{f}(\xi)).$$

En effet, on a $\dot{W} = (U^+ + U^-)/2$ et $W = (U^+ - U^-)/(2i\sqrt{-\Delta})$.
Compte-tenu de l'expression en terme de transformée de Fourier, il est facile de voir que

$$(4.27)\qquad \|\Delta_j\phi\|_2 \lesssim \|\Delta_j\phi_0\|_2 + 2^{-j}\|\Delta_j\phi_1\|_2 \text{ ou encore } \|\Delta_j U^{\pm}g\|_2 = \|\Delta_j g\|_2.$$

On en déduit que si $(\phi_0,\phi_1) \in \dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$, alors $(\phi, \partial_t\phi) \in C_t(\dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1})$, simplement en sommant les blocs dans l^2. C'est l'inégalité d'énergie dans $\dot{H}^s$,

$$(4.28)\qquad \|\phi\|_{\dot{H}^s} \lesssim \|\phi_0\|_{\dot{H}^s} + \|\phi_1\|_{\dot{H}^{s-1}}.$$

Remarque 31

On peut tout aussi bien obtenir cette inégalité directement : compte-tenu de l'expression de l'opérateur d'évolution comme multiplicateur de Fourier, la localisation fréquentielle avec Δ_j commute avec l'évolution, on peut donc considérer

$$(4.29)\qquad \left\{\begin{array}{rcl} \Box\Delta_j\phi & = & 0, \\ \Delta_j\phi(x,0) & = & \Delta_j\phi_0(x), \\ \partial_t\Delta_j\phi(x,0) & = & \Delta_j\phi_1(x). \end{array}\right.$$

multiplier par $\partial_t \Delta_j \phi$ et intégrer en temps (entre 0 et T) et en espace, ce qui conduit à

$$(4.30) \qquad (\|\partial_t \Delta_j \phi\|_2^2 + \|\nabla \Delta_j \phi\|_2^2)(T) = (\|\Delta_j \phi_1\|_2^2 + \|\nabla \Delta_j \phi_0\|_2^2.$$

Ceci montre que plutôt que de travailler avec ϕ et $\partial_t \phi$, il est préférable de travailler avec $\partial \phi$, le gradient temps-espace (certainement cela permet d'alléger les notations !). En pratique, si l'on considère des fonctions localisées en fréquence, cela n'a pas d'importance.

REMARQUE 32
Lorsque l'on est en dimension $n = 3$, on peut aussi obtenir une formule de représentation relativement simple en variable d'espace (en se ramenant à la dimension 1 grâce aux moyennes sphériques). On obtient

$$(4.31) \qquad \phi(x,t) = \frac{1}{4\pi}(t \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} \phi_1(x + t\omega) dS + \partial_t (t \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} \phi_0(x + t\omega) dS).$$

Ce type de formule se généralise en dimension impaire, et des formules (compliquées) peuvent être obtenues en dimension paire par la méthode de descente. La formule précédente, spécifique à $n = 3$, nous dit que la solution fondamentale est en fait la convolution par $(4\pi t)^{-1}\delta(t - |x|)$, la mesure portée par le cône $t = |x|$. Un exercice de théorie des distributions nous apprend que la transformée de Fourier de cette mesure est $|\xi|^{-1} \sin(t|\xi|)$, ce qui est bien consistant avec la formulation en variable de Fourier. Enfin, la vitesse finie de propagation se voit directement sur cette formule : pour des données localisées (dans l'espace physique) dans une boule de rayon un, la solution au temps t sera dans une boule de rayon $1 + t$, et même dans une couronne, $t - 1 \leq |x| \leq 1 + t$.

On veut maintenant montrer que la solution de l'équation des ondes possède aussi des propriétés de dispersion. Nous allons montrer le résultat suivant :

PROPOSITION 14
Soit $f_j \in L^1$ une fonction telle que $\operatorname{supp} \hat{f}_j \subset B(0, 2^j)$, alors $U^{\pm}(t) f_j \in L^\infty$ et

$$(4.32) \qquad \|U^{\pm}(t) f\|_\infty \lesssim \frac{2^{\frac{n+1}{2}j}}{t^{\frac{n-1}{2}}} \|f_j\|_1.$$

REMARQUE 33
On trouvera souvent dans la littérature cette estimation sous la forme

$$(4.33) \qquad \|W(t)\phi_1\|_\infty \lesssim \frac{1}{t^{\frac{n-1}{2}}} \|\phi_1\|_{\dot{B}_1^{\frac{n-1}{2},1}},$$

voire avec l'espace de Sobolev $\dot{W}_1^{\frac{n-1}{2}}$ à la place de l'espace de Besov en dimension impaire. En particulier, pour $n = 3$, on peut très facilement obtenir cette estimation à partir de (4.31) en utilisant le théorème de Stokes (exercice !). Dans les situations qui nous intéressent, l'approche par Fourier est plus pratique, et elle permet de mettre l'accent sur les estimations **localisées en fréquence** *qui sont indispensables ultérieurement.*

Démonstration: Nous allons donc montrer (4.32). Tout d'abord, on peut se ramener au cas $j = 1$ par changement d'échelle :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \phi_0(x) & \longrightarrow & \phi_{0,\lambda}(x) = \phi_0(\lambda x) \\ \phi_1(x) & \longrightarrow & \phi_{1,\lambda}(x) = \lambda\phi_1(\lambda x) \\ \phi(x,t) & \longrightarrow & \phi_\lambda(x,t) = \phi(\lambda x, \lambda t). \end{array} \right. \tag{4.34}$$

si ϕ est une solution alors ϕ_λ en est une aussi. Puisque $\hat{f}_j$ est à support dans $|\xi| \leq 2^j$, on va considérer $\lambda = 2^{-j}$, et ainsi $\widehat{f}_{j,\lambda}(\xi) = 2^{nj}\widehat{f}_j(2^j\xi) = \hat{f}(\xi)$ qui est bien une fonction à support dans $|\xi| \leq 1$. On va donc démonter

$$\|U^{\pm}(s)f\|_\infty \lesssim s^{-\frac{n-1}{2}}\|f\|_1,$$

et comme $U^{\pm}(\lambda s)f_j(\lambda y) = U^{\pm}(\lambda s)f(y)$, on en déduira l'estimation pour $U^{\pm}(t)f_j(x)$ en prenant $s = t/\lambda$ et en changeant de variable $x = \lambda y$.
Considérons donc

$$\begin{aligned} U^{\pm}(t)f &= \int e^{i(x\cdot\xi \pm t|\xi|)}\hat{f}(\xi)\,d\xi, \\ &= \int e^{i(x\cdot\xi \pm t|\xi|)}\hat{g}(\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi, \\ &= \int e^{i((x-y)\cdot\xi \pm t|\xi|)}\hat{g}(\xi)f(y)\,dy\,d\xi \\ &= \int \left(\int e^{i((x-y)\cdot\xi \pm t|\xi|)}\hat{g}(\xi)d\xi \right) f(y)dy, \end{aligned}$$

où l'on a intercalé la fonction $\hat{g}$ qui vaut un sur le support de $\hat{f}$, est à support compact et régulière, et que l'on peut même prendre radiale. La dernière expression est en fait la convolution de $U^{\pm}(t)g$ avec f, donc pour obtenir l'estimation désirée, il suffit simplement de montrer que pour tout $z \in \mathbb{R}^n$

$$\| \int e^{i(z\cdot\xi \pm t|\xi|)}\hat{g}(\xi)d\xi\|_\infty \lesssim t^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Cette estimation se montre génériquement, en toute dimension, par phase stationnaire, comme on va le voir ultérieurement. Nous allons commencer par tricher et s donner une démontration simple pour $n = 3$, cas pour lequel on a une expression intégrable, si l'on fixe z et que l'on prend pour paramétrer ξ une base $(e_1, \ldots, e_n)$ où $e_n = z/\|z\|$. En effet,

$$\begin{aligned} \int e^{i(z\cdot\xi \pm t|\xi|)}\hat{g}(\xi)d\xi &= \int e^{i(|z||\xi|\cos\theta \pm t|\xi|)}\hat{g}(|\xi|)\sin\theta|\xi|^2 d\theta d\varphi d|\xi| \\ &\approx \frac{1}{|z|}\int \sin(|z||\xi|)e^{\pm it|\xi|}\hat{g}(|\xi|)|\xi|d|\xi|. \end{aligned}$$

Cette dernière expression se réécrit

$$\frac{1}{|z|}\int_0^2 \sin(|z|\rho)e^{\pm it\rho}\hat{g}(\rho)\rho d\rho,$$

et si $|z| > t/2$, on a démontré le résultat. Si $|z| < t/2$, on intègre par parties, pour obtenir

$$\frac{1}{it}\left(\int_0^2 \frac{\sin(|z|\rho)}{|z|} e^{\pm it\rho}\partial_\rho(\hat{g}(\rho)\rho)d\rho + \int_0^2 \cos(|z|\rho)e^{\pm it\rho}\hat{g}(\rho)\rho d\rho\right),$$

qui est clairement majoré en valeur absolue par

$$\frac{1}{t}\int_0^2 (\rho|\partial_\rho(\hat{g}(\rho)\rho)| + \hat{g}(\rho)\rho)d\rho = \frac{C}{t},$$

ce qui démontre le résultat. □

REMARQUE 34
On pourrait tirer partie de cette formulation pour monter qu'en fait, pour $t > 0$, et $N \in \mathbb{N}$ aussi grand que l'on veut,

$$|U^{\pm}(t)g(z)| \lesssim \frac{1}{|t||t-|z||^N}$$

c'est-à-dire que le maximum est nécessairement situé près du cône $t = |z|$ (ce qui n'est pas très surprenant si l'on repense à la formulation en variable d'espace). Ce type d'estimation s'avère utile pour introduire certaines estimations qui sont des raffinements des estimations de Strichartz pour les ondes ([22]).

Par interpolation entre l'estimation (4.27) et (4.32), on obtient

$$\|\Delta_1 U^{\pm}(t)f\|_p \lesssim t^{\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p'}-\frac{1}{p})}\|\Delta_1 f\|_{p'},\ 2 < p < +\infty, \tag{4.35}$$

où l'on pourra dilater pour obtenir l'estimation analogue pour Δ_j. On peut alors procéder comme Schrödinger et obtenir des estimations de Strichartz pour l'équation des ondes. Nous les énonçons sous forme localisée en fréquence.

THÉORÈME 12 ([21, 8, 10])
Soit $n \geq 2$, (q, r) et $(\tilde{q}, \tilde{r})$ des paires admissibles pour les ondes, c'est-à-dire telles que $\frac{2}{q} + \frac{n-1}{r} = \frac{n-1}{2}$, $q \geq 2$ (ou $q > 4$ pour $n = 2$), $(q, r) \neq (2, \infty)$. Soit $f(x)$, $F(t, x)$ deux fonctions dont le spectre est localisé dans une couronne $c^{-1}2^j \leq |\xi| \leq c2^j$, alors

$$\|U^{\pm}(t)f(x)\|_{L^q_t(L^r_x)} \lesssim 2^{\frac{1}{q}\frac{n+1}{n-1}j}\|f(x)\|_{L^2}, \tag{4.36}$$

et, si $\phi(x, t) = U^{\pm}f(x) + \square^{-1}F(x, t)$,

$$2^{-\frac{1}{q}\frac{n+1}{n-1}j}\|\phi(x,t)\|_{L^q_t(L^r_x)} + \|\phi(x,t)\|_{L^\infty_t(L^2_x)} \lesssim \|f(x)\|_{L^2} + 2^{(\frac{1}{\tilde{q}}\frac{n+1}{n-1}-1)j}\|F(x,t)\|_{L^{\tilde{q}'}_t(L^{\tilde{r}'}_x)} \tag{4.37}$$

où $\square^{-1}F(x, t) = \int_0^t W(t-s)F(s)ds$ est une notation pour la solution de l'équation des ondes inhomogène avec données de Cauchy nulles.

Démonstration: La démonstration se fait exactement comme pour Schrödinger, à ceci près que l'on travaille en étant localisé en fréquence. Tout d'abord, on se ramène au cas $j = 0$ par changement d'échelle, car toutes les estimations du théorème sont invariantes par le changement d'échelle usuel $(x, t) \to (\lambda x, \lambda t)$. Dans ce contexte, l'opérateur $\square^{-1}$ peut être en fait remplacé par $\int_0^t U^{\pm}(t-s)Fds$, et l'on peut alors dérouler la même démonstration :

seule la numérologie associée change légèrement, puisque les paires admissibles ne sont pas les mêmes (la numérologie des ondes en dimension n est celle de Schrödinger dans la dimension $n-1$). Nous nous dispensons donc de la démonstration que le lecteur est vivement invité à écrire à titre d'exercice. $\square$

REMARQUE 35
On trouvera dans la littérature diverses formes resommées du théorème. Par exemple, (4.36) entraîne par sommation dans l^2 et Minkowski,

$$\|U^{\pm}(t)f(x)\|_{L^q_t(L^r_x)} \lesssim \|U^{\pm}(t)f(x)\|_{L^q_t(B^{0,2}_r)} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^{\frac{1}{q}\frac{n+1}{n-1}}}.$$

L'important dans notre cadre est de remarquer qu'il est plus intéressant de conserver l'estimation au niveau localisé, et de traiter le problème non-linéaire en utilisant cette estimation, qui contient potentiellement plus d'informations.

Revenons maintenant sur l'estimation de phase stationnaire en dimension quelconque. On va montrer que

PROPOSITION 15
Soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\hat{g}$ est à support compact dans $B(0,1)$, alors pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left|\int e^{i(z\cdot\xi \pm t|\xi|)}\hat{g}(\xi)d\xi\right| \lesssim t^{-\frac{n-1}{2}}. \tag{4.38}$$

Démonstration: Pour commencer, il n'est pas nécessaire de traiter le cas du support de $\hat{g}$ dans $B(0,1)$ mais seulement le cas $1/2 < |\xi| < 1$. En effet, avec une partition dyadique $1 = \sum_{j\geq 0}\phi_j(\xi)$ et ϕ_j supportée dans $2^{-j-1} < |\xi| < 2^{-j+1}$, si l'on a montré l'estimation pour ϕ_0, on s'y ramène pour ϕ_j en changeant de variable $\xi = 2^{-j}\eta$, et il restera un facteur $2^{\frac{1-n}{2}}$ pour resommer lorsqu'on applique l'estimation rescalée. On est donc ramené à un cas où l'on a une phase régulière, et l'on peut aller chercher dans la littérature le théorème adéquat de phase stationnaire. Nous allons procéder directement : la phase est $\psi(z,\xi,t) = z\cdot\xi + t|\xi|$ (on fait le cas $+$, il suffit de renverser z et de conjuguer pour avoir le cas $-$), on souhaite intégrer par partie, donc il s'agit d'éviter l'ensemble où $\nabla_\xi\psi = 0$, c'est-à-dire l'ensemble $z + t\xi/|\xi| = 0$. Comme on peut évidemment paramétrer l'intégrale en ξ comme bon nous semble, on va prendre comme première direction $e_1 = z/|z|$. les ennuis sont donc pour les points $z_1 + t\xi_1/|\xi| = 0$ et $\xi' = 0$. On introduit le champ de vecteurs (en ξ')

$$L = \frac{1 - i\nabla_{\xi'}|\xi|\cdot\nabla_{\xi'}}{1 + t(\frac{|\xi'|}{|\xi|})^2}$$

pour lequel on vérifie facilement que $L(\exp(i|x|\xi_1 + t|\xi|) = \exp(i|x|\xi_1 + t|\xi)$. On a donc l'intégrale

$$I(t,z) = \int e^{i|z|\xi_1 + t|\xi|}g(\xi)d\xi,$$

et en intégrant par parties avec L,

$$I(t,z) = \int \frac{1}{(1 + t(\frac{|\xi'|}{|\xi|})^2)^N}e^{i|z|\xi_1 + t|\xi|}g_N(\xi)d\xi,$$

où l'on montre par récurrence que $g_N(\xi)$ est uniformément borné. A ce stade, on peut éliminer les zones où $10|\xi_1| < |\xi'|$ (loin d'un secteur conique centré sur l'axe ξ_1) ; l'intégrale correspondante décroit aussi vite qu'on le veut. Reste l'intégrale sur le secteur conique $C = 10|\xi_1| > |\xi'|$: si $|\xi'|$ est nul on a rien gagné et on a encore les zones où la phase stationne. Cependant, dans cette zone on peut changer de variable (noter que le cas intéressant est $t > 1$, sinon il n'y a rien à prouver), et poser $\eta' = \sqrt{t}\xi'/|\xi|$, ce qui nous donne une intégrale (faire un dessin ! ! on est en train de faire le difféomorphisme habituel de la phase stationnaire, les esprits scrupuleux pourront d'abord "redresser" le secteur de sphère adéquat à une partie d'hyperplan, puis dilater)

$$I'(t,z) \lesssim \int_{\xi_1 \sim 1, \eta' \in \mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{1+|\eta'|^N} \frac{d\eta'}{t^{\frac{n-1}{2}}} d\xi_1,$$

qui donne la bonne décroissance et s'intègre en η' pour N assez grand. On notera que l'on peut en fait en plus réintégrer par parties, mais cette fois-ci dans la direction ξ_1 : on introduit pour cela

$$L_1 = \frac{\partial_{\xi_1}}{|z| + t\frac{\xi_1}{|\xi|}}.$$

On peut alors intégrer par parties autant de fois que l'on veut, et les nouveaux g_N sont toujours uniformément bornés (encore une fois, par récurrence), ce qui donne autant de décroissance que l'on veut, pourvu que $|z| + t\frac{\xi_1}{|\xi'|}$ ne s'annule pas sur le secteur conique. Compte-tenu des restrictions sur ξ, ceci n'arrive que si $|z| \sim t$, et on a montré que l'on gagnait de la décroissance loin du cône (i.e. une généralisation du phénomène déjà observé dans le cas $n = 3$).

4.3 Strichartz et le problème de la restriction

Si historiquement, les estimations espace-temps sont apparues avec une estimation du à Segal pour l'équation de Klein-Gordon 1D, les développements présentés ici trouvent leur fondement dans [21] où est clairement établi le lien entre les estimations espace-temps pour les ondes et Schrödinger et un problème classique d'analyse harmonique, appelé la conjecture de restriction. Considérons pour simplifier une fonction f de la classe de Schwartz en $\mathbb{R}^{n+1}$ variables. Sa transformée de Fourier est bien définie et dans la même classe. Il est clair que

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} \lesssim \|f\|_1,$$

donc si l'on restreint $\hat{f}$ à une hypersurface quelconque H, on aura bien évidemment

$$\|\hat{f}_{|H}\|_{L^\infty} \lesssim \|f\|_1.$$

On peut se demander s'il est possible de faire mieux que la norme L^1 à droite : il n'est pas bien difficile de voir qu'il est impossible de la remplacer par exemple par la norme L^2 : seule la norme L^2 de $\hat{f}$ est contrôlée par $\|f\|_{L^2}$, et l'on ne peut restreindre une fonction de L^2 à une hypersurface a priori. Par ailleurs, il est clair que si l'on accepte de perdre une demi-dérivée dans la direction normale à l'hypersurface, un théorème de trace permettra de contrôler une norme $L^p(H)$ par $B_p^{\frac{1}{2},1}(\mathbb{R}^{n+1})$. Pour $\hat{f}$, et si l'on oublie l'indice q, cette dernière quantité est controlée par une norme $L^{p'}(|x|^{p'/2}dx)$ (si $p \geq 2$, mais on va "oublier" cette importante restriction pour l'heuristique qui repose simplement sur les changements d'échelle). Cette dernière quantité contrôle à son tour une certaine norme L^q, avec un $q \leq p$. Il se trouve que lorsque l'hypersurface H est de courbure non nulle, on peut parfois contrôler $\|\hat{f}\|_{L^p(H)}$ directement par $\|f\|_{L^q}$. Un argument de changement d'échelle donne les valeurs optimales du couple (p, q), et par ailleurs le cas de l'hyperplan montre que l'hypothèse de courbure non nulle est indispensable. La conjecture de restriction dit que les valeurs optimales sont atteintes, elle n'est effectivement démontrée pour $n+1 = 1, 2$, la raison étant que pour $n+1 = 2$, les exposants optimaux sont $4, 4/3$, et que comme toujours l'exposant 4 est privilégié comme carré de 2. L'intéressant de notre point de vue est qu'un cas particulier des estimations de Strichartz vues précédemment correspond à un théorème de restriction pour $p = 2$, ou plus exactement au problème dual : on considère une densité g sur l'hypersurface courbe H, soit si $d\sigma$ désigne la mesure de simple couche sur H, la distribution $gd\sigma$, et l'on s'intéresse à la transformée de Fourier (inverse...) de $gd\sigma$, et l'on voudrait une estimation du type

$$\|\mathcal{F}^{-1}(gd\sigma)\|_{L^a(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim \|g\|_{L^b(H)}.$$

L'opérateur de restriction et ce nouvel opérateur, appelé opérateur d'extension, sont clairement duaux l'un de l'autre, donc montrer cette estimation revient à montrer l'estimation pour la restriction avec la paire (b', a').

Il est maintenant facile de faire le lien avec par exemple Schödinger : à la fonction $\hat{u}_0(\xi)$ où $\xi \in \mathbb{R}^n$, on peut associer une distribution de simple couche sur le paraboloïde $\tau = |\xi|^2$, en l'occurence la distribution $\delta(\tau - |\xi|^2)\hat{u}_0(\xi)$ et réciproquement. La norme $\|\hat{u}_0\|_{L^2}$ est par Plancherel égale à $\|\hat{u}_0\|_{L^2}$, et la transformée de Fourier inverse de $\delta(\tau - |\xi|^2)\hat{u}_0(\xi)$ est la solution $u(x, t)$, on a donc

$$\|u\|_{L_{t,x}^{\frac{2(n+2)}{n}}} \lesssim \|\hat{u}_0\|_{L_\xi^2},$$

ou vu comme une estimation duale de restriction,

$$\|\mathcal{F}^{-1}(gd\sigma)\|_{L^{\frac{2(n+2)}{n}}(\mathbb{R}^{n+1}} \lesssim \|g\|_{L^2(P)},$$

où P désigne le paraboloïde de dimension n. De même, si C est un cone de dimension n, d'aperture 1, vu comme une hypersurface plongée dans $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$\|\mathcal{F}^{-1}(gd\sigma)\|_{L^{\frac{2(n+1)}{n}-1}(\mathbb{R}^{n+1}} \lesssim \|g\|_{L^2(C)}.$$

Historiquement, l'observation du phénomène de restriction pour les hypersurfaces courbées est dûe à Stein, le résultat quasi-optimal dans le cas $p = 2$ étant dû à Tomas ([23]) en 1975 dans un très joli (et très court !) papier. Le point extrémal donné ci-dessus est attribué à Stein un peu après, non publié. La démonstration "moderne" que nous donnons est plus simple et plus générale que l'argument originel de Stein, repris par Strichartz dans [21], et qui fait appel à la version (dûe à Stein !) la plus générale, à paramètre, du théorème d'interpolation complexe.

Chapitre 5

Équations semi-linéaires

Dans ce chapitre, nous allons combiner les estimations sur les équations linéaires avec les techniques de produit présentés dans les chapitres précédents pour traiter des non-linéarités de type puissance. Pour ne pas rendre la présentation inutilement compliquée, nous allons présenter quatre exemples typiques, l'équation de Schödinger cubique en dimension deux et trois d'espace, et l'équation des ondes cubique puis quintique, en dimension trois d'espace.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, nous rappelons le principe général que nous allons suivre, en utilisant les mêmes notations qu'au premier chapitre

$$\partial_t \phi + A\phi = N(\phi), \tag{5.1}$$

avec une donnée $\phi(t=0) = \phi_0$. On introduit la solution linéaire, $S(t)\phi_0$ où $S(t) = \exp(tA)$, et l'on réécrit l'équation sous forme intégrale,

$$\phi(t) = S(t)\phi_0 + \int_0^t S(t-s)N(\phi)(s)ds = \phi_L + K(\phi). \tag{5.2}$$

On cherche alors à résoudre cette équation en appliquant le classique théorème de point fixe de Picard. Énonçons deux lemmes qui nous seront utiles :

Lemme 12 (Existence)
Soit X un espace de Banach, K un opérateur multilinéaire d'ordre k tel que

$$\forall (x_1, \ldots, x_k) \in X^k, \quad \|B(x_1, \ldots, x_k)\|_X \leq \gamma \|x_1\|_X \ldots \|x_k\|_X,$$

alors, pour tout $x_1 \in X$ tel que

$$\|x_1\|_X < C(\gamma)$$

la suite définie par

$$\begin{cases} x^{(0)} = & 0 \\ x^{(n+1)} = & x_1 + L(x^{(n)}) + B(x^{(n)}, \ldots, x^{(n)}) \end{cases}$$

converge dans X vers l'unique solution de

$$x = x_1 + L(x) + B(x, \ldots, x)$$

telle que

$$\|x\|_X < \tilde{C}(\gamma).$$

Démonstration: La preuve est un exercice d'analyse fonctionnelle : on commence par prouver que la suite $\|x_n\|_X$ est uniformément bornée si $\|x_1\|_X$ est suffisamment petit. On montre ensuite la convergence de la série télescopique $\sum \|x_{n+1} - x_n\|_X$, ce qui donne la convergence de $x = \sum(x_{n+1} - x_n)$. □

Le lemme suivant est utile lorsque l'on a une autre information sur la donnée initiale que l'on souhaite propager (régularité, décroissance... l'important étant qu'elle se mesure en terme d'un espace fonctionnel et que celui-ci se comporte raisonnablement par rapport au flot linéaire et à la non-linéarité).

LEMME 13 (PROPAGATION)
Soit x la solution du lemme précédent, et supposons de plus que $x_1 \in E$ pour un autre espace de Banach E, et K vérifie

$$\|K(x_1, \dots, x_k)\|_E < \eta \sum_i \|x_1\|_X \dots \|x_i\|_E \dots \|x_k\|_X$$

Alors, quitte à renforcer la condition de petitesse, la solution x appartient à E, et

$$\|x\|_E \lesssim \|x_1\|_E.$$

Démonstration: La preuve est là aussi élémentaire, on vérifie que la suite $x^{(n)}$ est bornée dans E, puis qu'il y a convergence de la série. □

5.1 Équation de Schrödinger cubique

On s'intéresse à l'équation

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u &= \pm |u|^2 u, \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{cases} \tag{5.3}$$

dans $\mathbb{R}^2$ puis $\mathbb{R}^3$. En préliminaire, remarquons que compte-tenu du type de résultat que l'on va présenter, le signe de la non-linéarité importe peu, pas plus que la présence du module : nous allons donc dorénavant noter u^3 pour la non-linéarité.

REMARQUE 36
Ce fait reflète la principale limitation de la technique que nous allons employer : par contraction. En effet, nous perturbons simplement la solution linéaire, et le terme non-linéaire est donc petit par rapport aux autres, son signe et sa phase n'ont donc pas grande importance. Par contraste, aussi bien pour les problèmes d'existence globale ou d'explosion, il est nécessaire de développer d'autres outils qui prennent plus efficacement en compte la non-linéarité.

Avant d'énoncer un résultat, nous allons nous intéresser à l'invariance par changement d'échelle : nous avons déjà vu l'intérêt d'exploiter une telle invariance dans le cadre des estimations linéaires. La partie linéaire de l'équation dicte le changement d'échelle en x et en t : la non-linéarité impose le coefficient devant la solution. Pour l'équation cubique, le changement d'échelle suivant laisse l'équation non-linéaire invariante :

$$\begin{cases} u_0(x) &\longrightarrow & u_{0,\lambda}(x) = \lambda u_0(\lambda x) \\ u(x,t) &\longrightarrow & u_\lambda(x,t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t). \end{cases} \tag{5.4}$$

Considérons une donnée $u_0 \in \dot{H}^s$: alors

$$\|u_{0,\lambda}\|_{\dot{H}^s} = \lambda^{1+s-2/2}\|u_0\|_{\dot{H}^s}.$$

On peut voir λ comme l'inverse d'une longueur caractéristique (ou le carré de l'inverse d'un temps caractéristique). Cette identité nous donne une indication sur les valeurs de s raisonnables, i.e. pour lesquelles on peut espérer résoudre, au moins localement. supposons que $s < 0$: alors, si l'on a une donnée u_0 telle qu'il existe une solution u dans $\dot{H}^s$ dont la norme $\dot{H}^s$ se concentre au temps $t = 1$, si l'on rescale (λ grand), on obtient une solution u_λ qui se concentre au temps $t = \lambda^{-1}$ (très petit), avec une norme de la donnée initiale $u_{0,\lambda}$ qui est de taille λ^s, donc très petite. Ceci signifie que l'on ne peut pas raisonnablement attendre que le problème soit bien posé pour $s < 0$.

Remarque 37
Ce type de raisonnement lié aux transformations qui laissent l'équation invariante sont très utiles pour déterminer différents seuils de régularité critique. L'invariance par le groupe des dilations est en quelque sorte le plus simple, mais ça n'est pas nécessairement celui qui est déterminant (pour les ondes, on connaît des situations où c'est les transformations de Lorentz, et pour Schrödinger, où c'est les transformations de Galilée).

Nous pouvons maintenant énoncer un théorème, qui nous montre que nous avons en fait le résultat "optimal".

Théorème 13
L'équation (5.3) est localement bien posée pour des données initiales dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, et globalement bien posée pour des données suffisamment petites. La solution $u \in C_t(L^2)$ appartient en outre à $L^4_{t,x}$, et elle est unique dans cette classe.

Démonstration: On veut suivre la stratégie de l'introduction. L'espace X sera en fait $L^4_{t,x}$. Compte-tenu du théorème 10, on a en vertu de 4.8,

$$\|S(t)u_0\|_{L^4_{t,x}} \lesssim \|u_0\|_2,$$

ce qui garantit que $S(t)u_0 \in X$, avec une petite norme si, au choix,
- la donnée initiale est petite,
- on restreint l'intervalle de temps suffisamment pour avoir une petite norme dans $L^4(-T,T;L^4_x)$, et c'est alors cet espace que l'on prend pour X.

D'après le lemme 12, il nous faut montrer que

$$\| \int_0^t S(t-s)u_1u_2u_3 ds\|_{L^4_{t,x}} \lesssim \prod_i \|u_i\|_{L^4_{t,x}}.$$

Mais ceci est une conséquence directe de (4.10), puisque

$$\| \int_0^t S(t-s)u_1u_2u_3 ds\|_{L^4_{t,x}} \lesssim \|u_1u_2u_3\|_{L^{\frac{4}{3}}_{t,x}}.$$

Le lemme 12 nous donne donc l'existence dans X, et l'unicité dans une boule de X. Pour obtenir le théorème, il nous faut d'abord montrer que la solution est $C_t(L^2)$. Mais ceci est une conséquence de (4.9), puisque la solution linéaire l'est certainement, et que (4.9) nous apprend

$$\| \int_0^t S(t-s)u^3 ds\|_{C_t(L^2)} \lesssim \|u^3\|_{L^{\frac{4}{3}}_{t,x}} \leq \|u\|_{L^4_{t,x}}.$$

Reste le problème de l'unicité dans $L^4_{t,x}$. Supposons que l'on ait deux solutions u, v de même donnée initiale, et supposons qu'elle coïncident jusqu'à un temps t_0, strictement inférieur au plus petit des temps d'existence maximaux des deux solutions : alors

$$\|u-v\|_{L^4(t_0,t_0+\varepsilon;L^4_x)} \lesssim (\||u\|^2_{L^4(t_0,t_0+\varepsilon;L^4_x)} + \||v\|^2_{L^4(t_0,t_0+\varepsilon;L^4_x)})\||u-v\|_{L^4(t_0,t_0+\varepsilon;L^4_x)},$$

et si on prend ε assez petit, $\||u\|^2_{L^4(t_0,t_0+\varepsilon;L^4_x)} + \||v\|^2_{L^4(t_0,t_0+\varepsilon;L^4_x)} < 1/2$, ce qui entraîne une contradiction. Donc $u = v$. □

Supposons maintenant que l'on considère le cas tridimensionnel. Si l'on effectue le changement d'échelle (qui reste bien sûr le même), on a maintenant sur la donnée $u_0 \in \dot{H}^s$

$$\|u_{0,\lambda}\|_{\dot{H}^s} = \lambda^{1+s-3/2}\|u_0\|_{\dot{H}^s}.$$

Donc on peut espérer $s \geq 1/2$. Effectivement,

THÉORÈME 14
L'équation (5.3) est localement bien posée pour des données initiales dans $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, et globalement bien posée pour des données suffisamment petites. La solution $u \in C_t(\dot{H}^{\frac{1}{2}})$ appartient en outre à $L^4_t(\dot{B}_3^{\frac{1}{2},2}$, et elle est unique dans cette classe.

Démonstration: Nous allons commencer par le cas des données petites, qui illustre le procédé général : on considère la donnée $u_0 \in \dot{H}^{\frac{1}{2}} = \dot{B}_2^{\frac{1}{2},2}$. La solution du problème linéaire, u_L vérifie, d'après le théorème 10,

$$\|\Delta_j u_L\|_{C_t L^2_x} + \|\Delta_j u_L\|_{L^2_t L^6_x} \lesssim \|\Delta_j u_0\|_2.$$

On peut donc essayer de prendre pour espace X l'espace des $f(x,t)$ tels que

$$\|\Delta_j f\|_{C_t L^2_x} + \|\Delta_j f\|_{L^2_t L^6_x} \in l^2,$$

et ainsi $\|u_L\|_X \lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}$ est petit.

REMARQUE 38
Compte-tenu de l'inégalité de Minkowski, cet espace contient $C_t(\dot{H}^{\frac{1}{2}}) \cap L^2_t \dot{B}_6^{\frac{1}{2},2}$, et l'on pourrait d'ailleurs travailler avec lui. Mais pratiquement, il est aussi simple de travailler directement avec les blocs dyadiques.

Nous devons montrer que si $f_1, f_2, f_3 \in X$, alors $\int_0^t S(t-s)f_1 f_2 f_3 ds \in X$. Encore une fois, compte-tenu du théorème 10 et plus particulièrement de (4.9) et (4.10), il suffit finalement de montrer que

$$\|\Delta_j(f_1 f_2 f_3)\|_{L^2_t L^{\frac{6}{5}}_x} \in l^2,$$

c'est-à-dire que $f_1 f_2 f_3 \in L^2_t(\dot{B}_{\frac{6}{5}}^{\frac{1}{2},2})$. Pour évaluer $f_1 f_2 f_3$, on va utiliser la variation suivante sur le paraproduit : comme on chercher à évaluer l'appartenance à un espace de Besov à régularité positive, il suffit, compte-tenu du lemme 4 du chapitre 2, de décomposer ce produit en somme de termes spectralement localisés dans des boules. On écrit

$$\begin{aligned}
f_1f_2f_3 &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} S_{j+1}f_1S_{j+1}f_2S_{j+1}f_3 - S_jf_1S_jf_2S_jf_3 \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_jf_1S_{j+1}f_2S_{j+1}f_3 + S_jf_1(S_{j+1}f_2S_{j+1}f_3 - S_jf_2S_jf_3) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_jf_1S_{j+1}f_2S_{j+1}f_3 + S_jf_1\Delta_jf_2S_{j+1}f_3 + S_jf_1S_jf_2\Delta_jf_3, \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_jf_1S_{j+1}f_2S_{j+1}f_3 + \Delta_jf_2S_jf_1S_{j+1}f_3 + \Delta_jf_3S_jf_1S_jf_2,
\end{aligned}$$

et cette dernière somme est effectivement la somme de trois termes, chacun lui-même somme de termes localisés spectralement dans des boules $B(0, c2^j)$. Au décalage d'indice près, chacun de ces trois termes est identique si l'on permute les indices, il suffit donc d'en traiter un seul. Et comme chacun des f_i joue le même rôle, on prend $f_1 = f_2 = f_3 = f$ pour simplifier l'écriture. Pour résumer, on souhaite estimer f^3, et il suffit d'estimer

$$\sum_j \Delta_j f(S_jf)^2.$$

REMARQUE 39
On n'a pas justifié l'écriture de la série télescopique. Comme chacun des f_i est dans $\dot H^{\frac12}$, par injection de Sobolev $f_i \in L^3$. Ainsi, $(S_jf)^3 \in L^1$ et est bien défini comme distribution. Par ailleurs, $\lim_{j\to-\infty}(S_jf)^3 = 0$ (le support de la transformée de Fourier tend vers zéro), et de la même façon, $\lim_{j\to+\infty}(S_jf)^3 = f^3$, puisque $f^3-(S_jf)^3 = (f-S_jf)(f^2+fS_jf+(S_jf)^2)$, que ce dernier produit tend vers zéro via son premier terme.

Comme $\|S_jf\|_3 \lesssim \|f\|_3 \lesssim \|f\|_{\dot H^{\frac12}}$, on a, via Hölder,

$$2^{\frac12 j}\|\Delta_jf(S_jf)^2\|_{\frac65} \le 2^{\frac12 j}\|\Delta_jf\|_6\|f\|^2_{\dot H^{\frac12}},$$

ce qui garantit que $g = \sum_j \Delta_jf(S_jf)^2 \in \dot B^{\frac12,2}_{\frac65}$, et

$$\|g\|_{\dot B^{\frac12,2}_{\frac65}} \lesssim \|f\|_{\dot B^{\frac12,2}_{6}}\|f\|^2_{\dot H^{\frac12}},$$

et en prenant la norme L^2_t, on obtient $g \in L^2_t\dot B^{\frac12,2}_{\frac65}$, soit encore

$$2^{\frac12 j}\|\Delta_jg\|_{L^2_tL^{\frac65}_x} \in l^2,$$

de norme contrôlée par $\|f\|^3_X$, qui est bien ce que l'on souhaitait.

REMARQUE 40
Ici, compte-tenu des exposants, il n'y a pas de problème potentiel avec l'intégration en temps. Dans la suite, lorsque que l'on a L^p_t, on peut toujours, en utilisant Minkowski,

"sortir" la norme temporelle. On préférera en fait la laisser sur les blocs. D'un point de vue théorique, cela signifie que l'on devrait retraverser le chapitre sur les espaces de Besov et rajouter une dépendance en temps. Le lecteur se convaincra aisément que l'intégralité de ce que l'on a dit (en particulier les lemmes de caractérisation) reste vrai. Il convient simplement de faire attention si l'on utilise l'inégalité de Sobolev (sortir préalablement la norme en temps). Finalement, on travaille avec des espaces qui sont définis par une condition du type

$$2^{js}\|\Delta_j f(x,t)\|_{L^p_t(L^r_x)} \in l^q,$$

et l'on se garde bien d'employer une quelconque autre notation pour désigner cet espace : la lisibilité y gagne ce que l'abstraction y perd, aussi bien les estimations de produit que les estimations linéaires étant transparentes dans cette formulation.

On va maintenant s'intéresser au cas où $s = 1$. Si la donnée initiale est dans H^1 (non-homogène) alors elle est dans $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$ et le théorème précédent nous donne une solution, pour laquelle il n'est pas difficile de montrer qu'elle reste dans H^1. Nous allons en fait directement traiter le cas homogène, et obtenir une solution globale si l'on considère le cas dit défocalisant, i.e.

$$\text{(5.5)} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} i\partial_t u + \Delta u &=& +|u|^2 u, \\ u(x,0) &=& u_0(x) \end{array}\right.$$

THÉORÈME 15
L'équation (5.5) est globalement bien posée pour des données initiales dans $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$. La solution $u \in C_t(\dot{H}^1)$ est unique dans cette classe, et elle appartient en outre à $L^2_{t,loc}(\dot{B}_6^{\frac{1}{2},2})$.

Démonstration: On veut procéder comme précédemment, i.e. commencer par montrer qu'il y a une solution locale : on fixe donc un temps T (que l'on va prendre petit), et l'on choisit pour espace X l'espace suivant :

$$2^j\|\Delta_j u(x,t)\|_{C_T L^2_x} + 2^j\|\Delta_j u(x,t)\|_{L^2_T L^6_x} \in l^2,$$

où l'on remarque que la premier des deux termes contrôle la norme $C_T(\dot{H}^1)$, donc aussi par Sobolev $C_T(L^6_x)$. Le choix est bien sûr conditionné par la fait que $u_L \in X$ grâce aux estimations de Strichartz (4.8). On s'intéresse ensuite à u^3 : pour les mêmes raisons que précédemment, il suffit d'évaluer $\Delta_j u(S_j u)^2$, et

$$\begin{aligned} 2^j\|\Delta_j u(S_j u)^2\|_{L^2_T L^2_x} &\lesssim 2^j\|\Delta_j u\|_{L^2_T L^6_x}\|S_j u\|_6^2, \\ &\lesssim 2^j\|\Delta_j u\|_{L^2_T L^6_x}\|u\|_6^2, \\ &\lesssim 2^j\|\Delta_j u\|_{L^2_T L^6_x}\|u\|^2_{C_T\dot{H}^1}, \\ 2^j\|\Delta_j u(S_j u)^2\|_{L^1_T L^2_x} &\lesssim T^{\frac{1}{2}}2^j\|\Delta_j u\|_{L^2_T L^6_x}\|u\|^2_{C_T\dot{H}^1}. \end{aligned}$$

Comme $(1,2)$ est une paire duale de la paire $(\infty,2)$, on en déduit que l'opérateur de Duhamel nous renvoie dans X, avec une constante $CT^{\frac{1}{2}}$, que l'on peut donc choisir petite pour assurer une contraction : en fait puisque $\|u_L\|_X \lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^1}$, il convient de choisir T tel que

$$T^{\frac{1}{2}}\|u_0\|_{\dot{H}^1} \lesssim 1.$$

On a ainsi obtenu une solution locale en temps, dont le temps d'existence T dépend de la norme $\dot{H}^1$ de la donnée initiale : montrons comment la prolonger jusqu'à $t = +\infty$. Pour cela on utilise l'inégalité à priori suivante,

$$H(t) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{4}\|u\|_4^4 = H(0). \tag{5.6}$$

Ceci s'obtient formellement en multipliant l'équation par $\partial_t \bar{u}$, en prenant la partie réelle du résultat et en intégrant en espace puis en temps. Notons évidemment que dans le cadre relativement faible en terme de régularité où nous nous sommes placés, il convient de justifier rigoureusement cette égalité (par régularisation et passage à la limite. On peut en particulier le faire à l'aide de l'équation écrite pour $\Delta_j u$ puis en sommant). Nous ne le ferons pas. Comme $H(t)$ est la somme de la norme $\dot{H}^1$ et d'un terme positif, on peut itérer la construction de la solution locale, sur $(T, 2T)$ puis $(2T, 3T)$ et ainsi de suite : en effet, $\|u(T)\|_{\dot{H}^1} \leq \|u_0\|_{\dot{H}^1}$, donc la solution construite à partir de $u(T)$ existe au moins jusqu'au temps $T + T = 2T$. La solution ainsi obtenue sera donc $C([0, +\infty), \dot{H}^1)$ et sa norme $\dot{H}^1$ reste bornée ; par contre, la propriété d'intégrabilité supplémentaire que nous a donné le point fixe n'est que locale, i.e. $u \in L^2_{t,loc}(\dot{B}^{1,2}_6)$.
Il nous reste l'unicité, que l'on a annoncé dans la classe $C_t(\dot{H}^1)$: considérons deux solutions u, v ayant la même donnée initiale, alors

$$u - v = \int_0^t S(t-s)(|u|^2 u - |v|^2 v)ds,$$

et comme $u, v \in C_t(L^6_x)$, on a en particulier $u - v \in L^2(0, \varepsilon; L^6_x)$. On écrit alors, grâce à l'inégalité de Hölder,

$$\||u|^2 u - |v|^2 v\|_{L^1(0,\varepsilon)} \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|u - v\|_{L^2(0,\varepsilon;L^6_x)} (\|u\|^2_{C_t(L^6_x)} + \|v\|^2_{C_t(L^6_x)})$$

et de nouveau, par Strichartz, on estime

$$\|u - v\|_{L^2(0,\varepsilon;L^6_x)} \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|u - v\|_{L^2(0,\varepsilon;L^6_x)} (\|u\|^2_{C_t(L^6_x)} + \|v\|^2_{C_t(L^6_x)}),$$

ce qui garantie que pour ε petit on aura $u = v$. Ceci achève la preuve. □

REMARQUE 41
On pourrait montrer de la même manière (exercice!) que l'équation de Schrödinger cubique défocalisante dans $\mathbb{R}^2$ est globalement bien posée dans $\dot{H}^1$.

5.2 Équation des ondes

On se propose de reproduire le type de résultat précédent dans le cadre de l'équation des ondes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Box u u & = & -|u|^{p-1}u, \\ (u(x,0), \partial_t u(x,0)) & = & (u_0(x), u_1(x)) \end{array} \right. \tag{5.7}$$

pour $x \in \mathbb{R}^3$, $p = 3, 5$, et des données à valeurs réelles (pour simplifier). Le cas $p = 3$ est l'exact analogue du cas de Schrödinger cubique en dimension deux d'espace. Nous énonçons de façon condensée deux théorèmes, dont la démonstration est laissée au lecteur. Le premier concerne la régularité minimale pour que le problème soit bien posé, le second l'existence globale.

THÉORÈME 16
L'équation (5.7), avec $p = 3$, est localement bien posée pour des données initiales dans $(\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3), dotH^{-\frac12}(\mathbb{R}^3))$, et globalement si ces données sont petites. La solution $u \in C_t(H^{\frac12}) \cap C_t^1(H^{-\frac12}) \cap L^4_{t,x}$, elle est unique dans $L^4_{t,x}$.

Comme l'on a choisi le bon signe dans l'équation (5.7) (le cas défocalisant), un calcul formel (multiplier l'équation par $\partial_t u$) montre que la quantité suivante est conservée :

$$H(t) = \frac12\|\partial_t u\|_2^2 + \frac12\|\nabla u\|_2^2 + \frac14\|u\|_4^4 = H(0).$$

Grâce à cette conservation, on peut obtenir le théorème suivant.

THÉORÈME 17
L'équation (5.7), avec $p = 3$, est globalement bien posée pour des données initiales dans $(\dot H^1(\mathbb{R}^3), L^2(\mathbb{R}^3))$. La solution u appartient à $C_t(H^1) \cap C_t^1(L^2)$ et elle est unique.

Nous allons donc nous consacrer pour le reste de cette partie au cas $p = 5$, c'est-à-dire à l'équation des ondes quintique dans $\mathbb{R}^3$. Le changement d'échelle associé à l'équation est ici

$$(5.8) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} u_0(x) & \longrightarrow & u_{0,\lambda}(x) = \lambda^{\frac12} u_0(\lambda x) \\ u_1(x) & \longrightarrow & u_{1,\lambda}(x) = \lambda^{\frac32} u_1(\lambda x) \\ u(x,t) & \longrightarrow & u_\lambda(x,t) = \lambda^{\frac12} u(\lambda x, \lambda t). \end{array} \right.$$

Si l'on calcule la norme $\dot H^s$ de u_λ, on est conduit à la condition $s \geq 1$. On a alors

THÉORÈME 18
L'équation (5.7), avec $p = 5$, est localement bien posée pour des données initiales dans $(\dot H^1(\mathbb{R}^3), L^2(\mathbb{R}^3))$, et globalement si ces données sont petites. La solution $u \in C_t(H^1) \cap C_t^1(L^2) \cap L_t^5(L_x^{10})$, elle est unique dans $L_t^5(L_x^{10})$.

Démonstration: La numérologie particulière à ce cas nous permet de nous dispenser des blocs dyadiques (à l'exception du fait que l'on va de toute façon utiliser Strichartz). En effet, on peut prendre $X = L_t^5(L_x^{10})$. Alors $u^5 \in L_t^1(L_x^2)$, donc (Minkowski),

$$\|\Delta_j(u^5)\|_{L_t^1 L_x^2} \in l^2,$$

et grâce à Strichartz (4.37), $g = \int_0^t W(t-s)u^5 ds$ est tel que

$$(5.9) \qquad 2^j\|\Delta_j g\|_{C_t(L^2)} + 2^{j(1-\frac2q)}\|\Delta_j g\|_{L_t^q L_x^r} \in l^2,$$

pour toutes les paires (q, r) admissibles pour les ondes. On vérifie que $q = 5, r = 10/3$ est admissible, et l'on a

$$2^{\frac35 j}\|\Delta_j g\|_{L_t^5 L^{\frac{1}{0}}3_x} \in l^2,$$

donc par Minkowski, $g \in L_t^5(\dot B^{\frac35,2}_{\frac{1}{0}}3)$, et par l'injection de Sobolev, $g \in L_t^5(L_x^{10}) = X$. De plus (5.9) nous assure que la solution est $C_t(\dot H^1)$. Pour assurer la contraction, il est nécessaire que $\|u_L\|_X$ soit petit, ce qui est vrai soit si T est petit (existence locale) soit si la donnée initiale est petite, puisque

$$\|u_L\|_{L^5_t(L^10_x)} \leq \|u_L\|_{L^5_t(\dot{B}^{\frac{3}{5},2}_{\frac{1}{0}}3)} \lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^1} + \|u_1\|_2.$$

Au moins formellement, on a aussi une quantité conservée, qui est

$$H(t) = \frac{1}{2}\|\partial_t u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{6}\|u\|_6^6 = H(0).$$

Cependant, parce que $s = 1$ est l'indice critique par rapport au changement d'échelle, on ne peut pas espérer répéter la construction locale en temps, même si la norme $\dot{H}^1$ ne peut exploser. Il peut y avoir des phénomènes de concentration, et pour montrer qu'ils n'ont pas lieu est obtenir des solutions globales, il est nécessaire d'établir des résultats de non-concentration (qui se basent sur l'utilisation d'autres invariants,en plus de $H(t)$) qui ramènent le problème au cas des données petites que l'on vient de traiter. Dans ce type d'argument, la vitesse de propagation finie, qui est très spécifique aux ondes, joue un rôle crucial. On renvoie à [16] pour un exposé détaillé.

5.3 Asymptotique

Lorsque l'on dispose de solutions globales, il est naturel d'étudier leur comportement à grand temps. Pour les ondes et Schrödinger, on rencontre souvent un phénomène de type scattering. Le résultat suivant est un exemple simple d'un tel phénomène. On pourra retenir que le cas des données petites est en général une simple conséquence de la construction des solutions, mais que le cas des grandes données est sensiblement plus difficile.

THÉORÈME 19
Considérons la solution de l'équation de Schödinger cubique (indépendamment du signe) en dimension deux d'espace, pour une petite donnée $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Alors il existe une fonction $v^+(x)$ telle que

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(x,t) - S(t)v^+(x)\|_2 = 0. \tag{5.10}$$

Autrement dit, en norme L^2, la solution se rapproche d'une solution linéaire (qui n'est **pas** *la solution $S(t)u_0$).*

Démonstration: On a obtenu $u \in L^4_{t,x}$ telle que

$$u(x,t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)u^3 ds.$$

On écrit

$$u_(x,t) - S(t)v^+(x) = S(t)\int_t^+ \infty S(-s)u^3 ds,$$

où

$$v^+ = u_0 + \int_0^+ \infty S(-s)u^3 ds.$$

On a alors, en utilisant Strichartz, que

$$\begin{aligned}\|u(x,t) - S(t)v^+(x)\|_2 &= \| \int_t^{+\infty} S(-s)u^3 ds\|_2 \\ &\lesssim \|u\|^3_{L^4(t,+\infty;L^4_x)},\end{aligned}$$

et cette dernière quantité tend vers zéro lorsque $t \to +\infty$, ce qui montre le résultat. □

Bibliographie

[1] Jöran Bergh and Jörgen Löfström. *Interpolation spaces. An introduction.* Springer-Verlag, Berlin, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223.

[2] Jean-Michel Bony. Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 14(2) :209–246, 1981.

[3] Thierry Cazenave. *An introduction to nonlinear Schrödinger equations.* Instituto de Matematica, Brazil, 1989.

[4] Thierry Cazenave and Fred B. Weissler. The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s. *Nonlinear Anal.*, 14(10) :807–836, 1990.

[5] Michael Christ and Alexander Kiselev. Maximal functions associated to filtrations. *J. Funct. Anal.*, 179(2) :409–425, 2001.

[6] C. Fefferman. The multiplier problem for the ball. *Annals of Math.*, 94 :330–336, 1971.

[7] P. Gérard and S. Alinhac. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser.* InterEditions, 1991.

[8] Jean Ginibre and Giorgio Velo. Generalized Strichartz inequalities for the wave equation. *J. Funct. Anal.*, 133(1) :50–68, 1995.

[9] Lev Kapitanski. Weak and yet weaker solutions of semilinear wave equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 19(9-10) :1629–1676, 1994.

[10] Markus Keel and Terence Tao. Endpoint Strichartz estimates. *Amer. J. Math.*, 120(5) :955–980, 1998.

[11] Hans Lindblad. Counterexamples to local existence for semi-linear wave equations. *Amer. J. Math.*, 118(1) :1–16, 1996.

[12] Hans Lindblad and Christopher D. Sogge. On existence and scattering with minimal regularity for semilinear wave equations. *J. Funct. Anal.*, 130(2) :357–426, 1995.

[13] Jaak Peetre. *New thoughts on Besov spaces.* Mathematics Department, Duke University, Durham, N.C., 1976. Duke University Mathematics Series, No. 1.

[14] Thomas Runst and Winfried Sickel. *Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators, and nonlinear partial differential equations.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1996.

[15] Jalal Shatah and Michael Struwe. Regularity results for nonlinear wave equations. *Ann. of Math. (2)*, 138(3) :503–518, 1993.

[16] Jalal Shatah and Michael Struwe. *Geometric wave equations*, volume 2 of *Courant Lecture Notes in Mathematics.* New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1998.

[17] Hart F. Smith and Christopher D. Sogge. Global Strichartz estimates for nontrapping perturbations of the Laplacian. *Comm. Partial Differential Equations*, 25(11-12) :2171–2183, 2000.

[18] E. M. Stein. *Singular Integral and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press, 1970.

[19] Elias M. Stein. *Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.

[20] Walter Strauss. *Nonlinear Wave Equations*. Number 73 in CBMS. AMS, 1989.

[21] Robert S. Strichartz. Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. *Duke Math. J.*, 44(3) :705–714, 1977.

[22] Terence Tao. Low regularity semi-linear wave equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 24(3-4) :599–629, 1999.

[23] Peter A. Tomas. A restriction theorem for the Fourier transform. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 81 :477–478, 1975.

[24] Hans Triebel. *Theory of function spaces*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.