UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
Sede Bogotá
Departamento de Matemáticas

2029662 ANÁLISIS ARMÓNICO

LISTA DE EJERCICIOS 2

Prof.: **Ricardo Pastrán** 14 de abril de 2025

1. Convolución

($i.$) Pruebe que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p \leq 2$, entonces

$$(f * g)^\wedge(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$$

en $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

($ii.$) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, donde $1 < p < \infty$, entonces $f * g \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$. ¿Qué se puede afirmar cuando $p = 1$ o $p = \infty$?

2. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, f es continua en 0 y $\widehat{f} \geq 0$ entonces $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

3. Producto de convolución $\mathcal{S}' * \mathcal{S}$

($i.$) Sean f, ϕ y $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pruebe que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f * \phi(x)\ \psi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ \widetilde{\phi} * \psi(x)\, dx,$$

donde $\widetilde{\phi}(x) = \phi(-x)$. Esto motiva la siguiente definición: Sean $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$T * \phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \psi \longmapsto T * \phi(\psi) := T(\widetilde{\phi} * \psi).$$

Pruebe que $T * \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y que

$$(T * \phi)^\wedge = \widehat{T}\widehat{\phi} \quad \text{en} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

($ii.$) Por otro lado, si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se define:

$$T *_1 \phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longmapsto T *_1 \phi(x) := T(\tau_x\widetilde{\phi}),$$

donde $\tau_x\phi(y) = \phi(y - x)$. Pruebe entonces que

$$T *_1 \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{y} \quad T *_1 \phi = T * \phi.$$

4. Topología sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} d : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (\phi, \psi) &\longmapsto \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n} 2^{-(|\alpha|+|\beta|)} \frac{\|\phi - \psi\|_{\alpha,\beta}}{1 + \|\phi - \psi\|_{\alpha,\beta}} \end{aligned}$$

($i.$) Pruebe que $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n); d)$ es un espacio métrico completo.
($ii.$) Pruebe que para cualquier sucesión $(\phi_k)_k \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, vale

$$\phi_k \xrightarrow{d} \phi \text{ si y solo si } \|\phi_k - \phi\|_{\alpha,\beta} \to 0,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

($iii.$) Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pruebe que

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ si y solo si } x^\alpha \partial^\beta f \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

($iv.$) Muestre que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ \phi &\longmapsto \widehat{\phi} \end{aligned}$$

es un isomorfismo topológico.

5. Valor principal

Definimos

$$\text{v.p.}\left(\frac{1}{x}\right) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \phi \mapsto \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx.$$

Pruebe que v.p. $\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y calcule $\left(\text{v.p.}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^\wedge$.