Ecuaciones Diferenciales Parciales: Taller 5

quien sabe del 2024

Universidad Nacional de Colombia

Oscar Guillermo Riaño Castañeda

Andrés David Cadena Simons	acadenas@unal.edu.co
David Felipe Viuche Malaver	dviuchem@unal.edu.co

Problema 1:

Pregunta.

Solución:

Solución.

Problema 2:

Pregunta.

Solución:

Solución.

Problema 3:

Pregunta.

Solución:

Solución.

Problema 4:

Sea u solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = g(x), & \text{en } \mathbb{R}^n, \\ u_t(x,0) = h(x), & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

Dado $x \in \mathbb{R}^n, t > 0, r > 0$ definimos

$$U(x;r,t) := \fint_{\partial B(x,r)} u(y,t)dS(y),$$
$$G(x;r) := \fint_{\partial B(x,r)} g(y)dS(y)$$

y

$$H(x;r) := \fint_{\partial B(x,r)} h(y)dS(y).$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ fijo. Sean $m \geq 2$ entero y $u \in C^m(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ solución de (6). Muestre que U dada por (7) es de clase $C^m([0,\infty) \times [0,\infty))$ (como función de r y t) y U satisface el problema de Cauchy para la ecuación de Euler- Poisson -Darboux

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \dfrac{n-1}{r}U_r = 0, & \text{en } (0,\infty) \times (0,\infty), \\ U(r,0) = G(r), & \text{en } (0,\infty), \\ U_t(r,0) = H(r), & \text{en } (0,\infty). \end{cases}$$

Problema 4 continúa en la siguiente página. . .

Solución:

Comencemos calculando U_r:

$$\begin{aligned} U(x;r,t) &= \fint_{\partial B(x,r)} u(y,t)dS(y) \\ &= \fint_{\partial B(0,1)} u(x+rz,t)dS(z) \qquad \text{, de modo que} \\ U_r &= \fint_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rz,t)\cdot z dS(z) \\ &= \fint_{\partial B(x,r)} \nabla u(y,t)\cdot \frac{y-x}{r} dS(y) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} u(y,t)dy \\ &= \frac{r}{n}\frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} u(y,t)dy \\ &= \frac{r}{n}\fint_{B(x,r)} \Delta u(y,t)dy \end{aligned}$$

Con esto concluimos $\lim_{x\to 0^+} U_r(x;,r,t) = \lim_{x\to 0^+} \frac{r}{n}\fint_{B(0,1)} \Delta u(x+rz,t)dz = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{r}{n}\fint_{B(0,1)} \Delta u(x+rz,t)$ ya que Δu es continua y estamos en un compacto, luego $\lim_{x\to 0^+} U_r(x;,r,t) = \lim_{x\to 0^+} \frac{r}{n}\Delta u(x,t)\fint_{B(0,1)} dz = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{r}{n}\Delta u(x,t)\frac{n\alpha(n)r^n}{n\alpha(n)r^n} = 0$ Ahora hemos de calcular $U_{rr}(x;r,t)$.

$$\begin{aligned} U_{rr} = (U_r)_r &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{B(x,r)} \Delta u(y,t)dy\right) \\ &= \frac{1-n}{n\alpha(n)r^n}\int_{B(x,r)} \Delta u(y,t)dy + \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\int_{B(x,r)} \Delta u(y,t)dy, \end{aligned}$$

centrémonos en el último término

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\int_{B(x,r)} \Delta u(y,t)dy &= \frac{\partial}{\partial r}\int_{B(0,1)} \Delta u(x+rz,t)dz \\ &= \frac{\partial}{\partial r}\int_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rz,t)\cdot z dS(z) \\ &= \int_{\partial B(x,r)} \Delta u(y,t)\frac{|y-x|^2}{r^2} dS(y), \end{aligned}$$

dado que la región donde estamos integrando es la frontera de la bola con radio r y centro x, tenemos $|y-x|=r$, luego

$$\frac{\partial}{\partial r}\int_{B(x,r)} \Delta u(y,t)dy = \int_{\partial B(x,r)} \Delta u(y,t)dS(y)$$

al reemplazar este término en la cuenta que estábamos haciendo para U_{rr} obtenemos

$$\begin{aligned} U_{rr} &= \frac{1-n}{n\alpha(n)r^n}\int_{B(x,r)} \Delta u(y,t)dy + \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)} \Delta u(y,t)dS(y) \\ &= \fint_{B(x,r)} \Delta u dS + \left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\fint_{B(x,r)} \Delta u dy\right) \end{aligned}$$