LISTA DE EJERCICIOS 2: ANÁLISIS FUNCIONAL

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, BOGOTÁ

PRIMER SEMESTRE 2025

PROFESOR: OSCAR RIAÑO

Observación. Salvo que se diga lo contrario, los espacios vectoriales considerados tienen como campo escalar $\mathbb{R}$.

$E^\star$ denota el espacio de todos los funcionales continuos de E en $\mathbb{R}$. Hacemos esta observación, pues en otros contextos también se usa la notación E^* para denotar este espacio dual.

1. Topología débil y débil $\star$

Ejercicio 1. *Sea $\{Y_i\}_{i\in I}$ ($I \neq \emptyset$) una familia de espacios topológicos y $\{\phi_i\}_{i\in I}$ una familia de funciones $\phi_i : X \to Y_i$. Le asignamos a X la topología inicial $\mathcal{F}$ asociada a la familia $\{\phi_i\}_{i\in I}$.*

(a) Muestre que $x_n \to x$ en $\mathcal{F}$ si y solo si $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$, para todo $i \in I$.

(b) Sea Z un espacio topológico. Muestre que $\psi : Z \to X$ es continua si y solo si $\phi_i \circ \psi$ es continua de Z en Y_i, para todo $i \in I$.

Ejercicio 2. *Sea E un espacio vectorial, $g, f_1, f_2, \dots, f_k$, $(k+1)$ funcionales lineales sobre E tales que*

$$\langle f_i, x\rangle = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k \implies \langle g, x\rangle = 0.$$

Muestre que existen constante $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $g = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$. Es decir, g es combinación lineal de los f_i.

Sugerencia*: considere la función*

$$H : E \to \mathbb{R}^{k+1}$$

dada por $H(x) = (g(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$. Utilice el teorema de Hahn-Banach para separar $\{(1, 0, 0, \dots, 0)\}$ del rango de H (recuerde que los funcionales de $\mathbb{R}^k$ se identifican por el producto interno usual por un vector). Concluya con esto el resultado deseado.

Ejercicio 3. *Muestre que si E es de dimensión finita. La topología débil y la fuerte son las mismas.*

Ejercicio 4. *(a) Sea E un espacio de Banach, $A \subseteq E$ un subconjunto que es compacto en la topología débil $\sigma(E, E^*)$. Demuestre que A es acotado.*

Sugerencia. *Recordemos la función canónica $J : E \to E^{\star\star}$, dada por $Jx = J_x$, donde $J_x : E^\star \to \mathbb{R}$ se define por $\langle J_x, f\rangle = \langle f, x\rangle$. Aplique el principio de acotación uniforme a la familia $\{J_x\}_{x\in A}$.*

(b) *Sea E un espacio de Banach y $\{x_n\}$ una secuencia tal que $x_n \rightharpoonup x$ en la topología $\sigma(E^\star, E)$. Defina*

$$\sigma_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

Demuestre que $\sigma_n \rightharpoonup x$ en la topología $\sigma(E^\star, E)$.

Ejercicio 5. *Sea E un espacio de Banach y $\{x_n\}$ una secuencia en E tal que $x_n \rightharpoonup x$ en la topología débil $\sigma(E, E^\star)$.*

(a) *Muestre que existe una secuencia $\{y_n\} \subseteq E$ tal que $y_n \in conv\Big(\bigcup_{i=n}^{\infty}\{x_i\}\Big)$, para cada n y tal que $y_n \to x$ fuertemente. Recuerde que $conv(X)$ denota la envolvente convexa (*convex hull*) de X.*

(b) *Muestre que existe una secuencia $\{z_n\} \subseteq E$ tal que $z_n \in conv\Big(\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}\Big)$, para cada n y tal que $z_n \to x$ fuertemente.*

Ejercicio 6. *Sea E un espacio de Banach y $K \subseteq E$ compacto en la topología fuerte de E. Sea $\{x_n\} \subseteq K$ una sucesión tal que $x_n \rightharpoonup x$ en la topología débil $\sigma(E, E^*)$. Muestre que $x_n \to x$ fuertemente.*

Sugerencia. *Argumente por contradicción. Como K es compacto existe una subsucesión de $\{x_n\}$ que converge a un elemento $y \neq x$. Utilice que la topología débil es Hausdorff para llegar a un contradicción.*

Ejercicio 7. *Asuma que H es un hiperplano en $E^\star$ que es cerrado en $\sigma(E^*, E)$ (topología débil $\star$). Entonces H es de la forma*

$$H = \{f \in E^* : \langle f, x_0 \rangle = \alpha\}$$

para algún $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$ y algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sugerencia: *complete con todo detalle la demostración del Corolario 3.15 del libro de Brezis, Functional Analysis, Sobolev spaces and PDEs.*

Ejercicio 8. (a) *Sea E un espacio de Banach y W un subespacio cerrado de E. Muestre que la topología débil sobre W (es decir, $\sigma(W, W^*)$) es la topología inducida sobre W por la topología débil de E (es decir, $\sigma(E, E^*)$).*

(b) *Sea E un espacio de Banach tal que $x_n \rightharpoonup x$ em E. Si $\|x_n\| \leq \|x\|$ para todo n, muestre que $\|x_n\| \to \|x\|$.*

Ejercicio 9. *Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Muestre que cada vecindad débil $\star$ del origen de $E^\star$ no es acotada.*

Sugerencia. *Considere la vecindad de cero en la topología $\sigma(E^\star, E)$ dada por $V = \{f \in E^\star : |\langle f, x_j \rangle| < \epsilon_j,\ j = 1, \ldots, n\}$, para algunos $x_j \in E$, $\epsilon_j > 0$. Utilizando el teorema de separación de Hahn Banach encuentre un funcional f tal que $\langle f, x_j \rangle = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$ con $f \neq 0$. Utilice que cualquiera múltiplo escalar de f pertenece a V para deducir que el conjunto V no puede ser acotado.*

Ejercicio 10. *Sea E un espacio de Banach y W un subespacio de E. Muestre que $W^\perp$ es débil $\star$ cerrado.*

2. Espacios reflexivos y separables

Ejercicio 11. *Sea K un espacio métrico compacto que no es finito. Demuestre que $C(K)$ (con la norma del supremo $\|\cdot\|_{L^\infty}$) no es reflexivo.*

Sugerencia. *Considere una secuencia $\{a_n\} \subseteq K$ de elementos distintos tal que $a_n \to a$, donde $a \neq a_n$ para todo $n \geq 1$ (explique por qué existe tal secuencia). Utilice el teorema de Tietze–Urysohn–Brouwer para construir una sucesión $\{g_n\} \subseteq C(K)$ tal que: $g_n(a_m) = 1$ para todo $1 \leq m \leq n$, $g_n(a_m) = 0$ para todo $m > n$, $\|g_n\|_{L^\infty} = 1$. Concluya que la sucesión $\{g_n\}$ no puede tener una subsecuencia débilmente convergente. Caso contrario, utilice los funcionales de evaluación $\pi_{a_n}(g) = g(a_n)$, $g \in C(K)$ para obtener una contradicción.*

Ejercicio 12.
(a) *Sean E y F espacios de Banach reflexivos y $T : E \to F$ una isometría lineal sobreyectiva. Entonces E es reflexivo si y solo si F es reflexivo.*
(b) *Sea E un espacio vectorial normado reflexivo. Muestre que todo subespacio cerrado de E es reflexivo.*

Ejercicio 13. *Sea E un espacio de Banach.*

(a) *Sea $\{f_n\}$ una secuencia en $E^\star$ tal que para todo $x \in E$, $\langle f_n, x\rangle$ converge a un límite. Muestre que existe $f \in E^\star$ tal que $f_n \rightharpoonup f$ en $\sigma(E^\star, E)$.*
(b) *Asuma que E es reflexivo. Sea $\{x_n\}$ una secuencia en E tal que para todo $f \in E^\star$, $\langle f, x_n\rangle$ converge a un límite. Demuestre que existe $x \in E$ tal que $x_n \rightharpoonup x$ en $\sigma(E, E^*)$.*

Ejercicio 14. *Denotamos el espacio vectorial de todas las secuencias $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ de números reales que son acotadas como sigue:*

$$l^\infty = \Big\{\{a_n\}_{n=1}^\infty : a_n \in \mathbb{R},\ \text{para todo } n \geq 1,\ \sup_{n\geq 1}|a_n| < \infty\Big\}.$$

Le asignamos la norma $\|\{a_n\}_{n=1}^\infty\|_{l^\infty} = \sup_{n\geq 1}|a_n|$. Por otro lado, para cada $n \geq 1$, definimos $e^n = \{e^n_k\}$ como la secuencia dada por $e^n_k = 0$ si $n \neq k$ y $e^n_k = 1$, si $n = k$, para cada $k \geq 1$.

(a) *Muestre que la secuencia $\{e^n\} \subseteq l^\infty$ no tiene subsecuencias convergentes en la topología débil (esto es en $\sigma(l^\infty, (l^\infty)^\star)$).*
(b) *¿Es el espacio l^∞ reflexivo?*

Ejercicio 15. *Sea E un espacio de Banach reflexivo. Sea $a : E\times E \to \mathbb{R}$ una forma bilineal que es continua, es decir, existe $M > 0$ tal que $|a(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|$, para todo $x, y \in E$. Asuma que a es* coerciva, *esto es, existe $\alpha > 0$ tal que para todo $x \in E$*

$$a(x, x) \geq \alpha\|x\|^2.$$

(a) *Dado $x \in E$, defina $A_x(y) = a(x, y)$, para todo $y \in E$. Muestre que $A_x \in E^\star$, para cada $x \in E$. Además, concluya que la función $x \mapsto A(x) = A_x$ satisface $A \in \mathcal{L}(E, E^\star)$.*
(b) *Muestre que A como en (a) es una función sobreyectiva.*
(c) *Deduzca que para cada $f \in E^\star$, existe un único $x \in E$ tal que $a(x, y) = \langle f, y\rangle$, $\forall y \in E$. Esto es, la forma bilineal coerciva a representa todo funcional lineal continuo.*

Ejercicio 16. *Sea E un espacio de Banach tal que $E^\star$ es separable. Muestre que $B_E = \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$ es metrizable en la topología débil $\sigma(E, E^\star)$.*

Ejercicio 17. *Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Nuestro objetivo es mostrar que E con la topología débil no es metrizable. Argumentando por contradicción, suponga que existe una métrica $d : E \times E \to [0, \infty)$ que genera la topología $\sigma(E, E^\star)$.*

(i) *Para cada $k \geq 1$, sea V_k una vecindad de cero de la topología $\sigma(E, E^\star)$ tal que*
$$V_k \subset \left\{x \in E : d(x, 0) < \frac{1}{k}\right\}.$$
Asuma (por qué esto es válido?) que
$$V_k = \{x \in E : \langle f_k, x\rangle < \epsilon_k, \quad \text{para cada } f_k \in \Phi_k\},$$
donde $\Phi_k \subseteq E^\star$ es un subconjunto finito. Considere el conjunto $V = \{x \in E : |\langle g, x\rangle| \leq 1\}$. Muestre que existe un $m \geq 1$ tal que $V_m \subseteq V$. Utilizando el Ejercicio 2, concluya que g es combinación lineal de los Φ_k.

(ii) *Muestre que $E^\star$ es de dimensión finita. Para esto, utilizando lo deducido en el paso (i), aplique el teorema de categoría de Baire con los conjuntos $F_k = \text{generado}(\Phi_k)$.*

(iii) *Concluya que E es de dimensión finita.*

Ejercicio 18. *Sea E un espacio de Banach*

(a) *Demuestre que existe un espacio topológico compacto K y una isometría de E en $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$.*

Sugerencia. *Considere $K = B_{E^\star} = \{f \in E^\star : \|f\|_{E^\star} \leq 1\}$. Defina la función, $T : E \to C(K)$ dada por $x \mapsto Tx$, donde $(Tx)(f) = \langle f, x\rangle$, para $f \in K$.*

(b) *Asuma que E es separable. Entonces muestre que existe una isometría de E en l^∞ (vea el Ejercicio 14 para la definición del espacio).*

Sugerencia. *Como K es metrizable y compacto en $\sigma(E^*, E)$, existe un subconjunto denso contable $\{f_n\} \subseteq K$. Utilice este conjunto para definir la isometría buscada.*

Ejercicio 19. *Sea E un espacio de Banach separable y $\{f_n\}$ una secuencia acotada de $E^\star$. Usando un argumento diagonal, demuestre directamente, sin usar que $E^\star$ es metrizable, que existe una subsecuencia de $\{f_{n_k}\}$ que converge em $\sigma(E^\star, E)$.*

Ejercicio 20. *Recordemos el espacio*
$$c_0 = \{u = \{u_n\}_{n\geq 1} : \text{tales que } u_n \in \mathbb{R},\, n \geq 1,\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0\},$$
con la norma $\|u\|_{l^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} |u_n|$.

(a) *Muestre que c_0 es separable.*

Sugerencia: *considere el conjunto de secuencias racionales $\{q_n\}$ para las cuales $q_n \in \mathbb{Q}$ para todo n y existe $N \geq 1$, tal que $q_n = 0$ para cada $N \geq 1$.*

(b) *Muestre que* l^∞ *(definido en el Ejercicio 14) no es separable.*

Sugerencia: *Considere el conjunto* $\mathcal{A}$ *formado por las secuencias de ceros y unos; es decir,* $\mathcal{A}$ *está compuesto por todas las secuencias* $\{x_n\}$ *tales que* $x_n \in \{0, 1\}$ *para todo* $n \geq 1$. *Muestre que la familia de bolas* $\{B(x, \frac{1}{2})\}_{x \in \mathcal{A}}$ *es no enumerable y que no contiene dos elementos de* $\mathcal{A}$ *simultáneamente, con el fin de mostrar que* l^∞ *no puede ser separable.*

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá
Email address: ogrianoc@unal.edu.co