Apuntes de Análisis Armónico

Autor: Andrés David Cadena Simons

6 de abril de 2025

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Sede Bogotá

Departamento de Matemáticas

2029662 ANÁLISIS ARMÓNICO

Programa: Maestría en Ciencias Matemáticas
Créditos de la asignatura: 4
Profesor: Ricardo Pastrán. Edificio: 404. Oficina: 314. **Atención:** L y C: 16-17
Email: rapastranr@unal.edu.co

DESCRIPCIÓN

Este curso ofrece una exploración profunda del análisis armónico, un área central en el análisis moderno con amplias aplicaciones en ecuaciones diferenciales parciales y teoría de números. El curso cubrirá tanto resultados clásicos como técnicas modernas, centrándose en el estudio de funciones y operadores a través del análisis de Fourier y herramientas relacionadas. Los estudiantes comenzarán repasando el operador transformada de Fourier, conceptos fundamentales que descomponen las funciones en sus componentes de frecuencia. A partir de ahí, el curso profundizará en temas avanzados como la teoría de Calderón-Zygmund, funciones maximales, integrales singulares, la teoría de Littlewood-Paley y aplicaciones a la teoría analítica de números y a las ecuaciones diferenciales parciales. El papel del análisis armónico en la comprensión de la regularidad y el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales también será un área clave de enfoque.

OBJETIVOS

- Adquirir un dominio sólido de las técnicas clásicas y modernas del análisis armónico.
- Comprender y aplicar métodos avanzados de análisis armónico a diversos problemas matemáticos.
- Utilizar las herramientas que proporciona el análisis armónico en el estudio de las EDP.

CONTENIDO

1. **Transformada de Fourier e Interpolación de Operadores**.
   - 1.1. Definición de la Transformada de Fourier
   - 1.2. La transformada en espacios L^p
   - 1.3. Teoremas de Interpolación para operadores lineales
2. **Función Maximal de Hardy-Littlewood**.
   - 2.1. Aproximaciones de la identidad
   - 2.2. Desigualdades tipo fuerte y tipo débil
   - 2.3. Teorema de interpolación de Marcinkiewicz
   - 2.4. La función maximal de Hardy-Littlewood

3. **Transformada de Hilbert**.
    3.1. El conjugado del núcleo de Poisson
    3.2. Los teoremas de Riesz y Kolmogorov
    3.3. Integrales truncadas y convergencia puntual
    3.4. Multiplicadores
4. **Integrales singulares**.
    4.1. Definición de operadores integrales singulares
    4.2. El método de las rotaciones
    4.3. Integrales singulares con núcleo par
    4.4. Integrales singulares con núcleo variable
5. **Teorema de Calderón-Zygmund y generalizaciones**.
    5.1. El teorema de Calderón-Zygmund
    5.2. Integrales truncadas y el valor principal
    5.3. Operadores generalizados de Calderón-Zygmund
    5.4. Integrales singulares de Calderón-Zygmund
6. **Propiedades de diferenciabilidad en términos de espacios de funciones**.
    6.1. Potenciales de Riesz
    6.2. Espacios de Sobolev
    6.3. Potenciales de Bessel
    6.4. Los espacios de funciones continuas de Lipschitz
7. **Espacios H^1 y BMO**.
    7.1. El espacio atómico H^1
    7.2. El espacio BMO
    7.3. Un resultado de interpolación
    7.4. La desigualdad John-Nirenberg
8. **Teoría de Littlewood-Paley y Multiplicadores**.
    8.1. Teoría de Littlewood-Paley
    8.2. Teorema del multiplicador de Hörmander
    8.3. Multiplicadores de Bochner-Riesz
    8.4. La función maximal y la transformada de Hilbert a lo largo de una parábola
9. **Aplicaciones a la Teoría Analítica de Números y a las Ecuaciones Diferenciales Parciales** (Por ejemplo: teoremas de restricción y estimativas de Strichartz).

REFERENCIAS

1. J. DUOANDIKOETXEA, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, 29, AMS 2001.

2. E. M. STEIN, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, 1970.

3. E. M. STEIN y G. WEISS, *Fourier Analysis on Euclidean spaces*, Princeton University Press, 1971.

4. E. M. STEIN, *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, 1993.

5. C. MUSCALU y W. SCHLAG, *Classical and multilinear harmonic analysis*, Vol. I. Cambridge University Press, 2013.

6. L. GRAFAKOS, *Classical Fourier Analysis*, Tercera edición, Grad. Text in Math., 269, Springer, 2014.

CALIFICACIÓN

Dos exámenes parciales valiendo cada uno el 25% de la nota. Otro 25% se obtendrá de talleres. El 25% restante se obtendrá de un trabajo investigativo desarrollado por el estudiante a lo largo del semestre que abarque o use algunos de los temas del curso. El primer examen parcial se realizará el día miércoles 28 de mayo y el segundo examen parcial el día miércoles 23 de julio.

Índice general

Capítulo 1

Transformada de Fourier e Interpolación de Operadores.

1.1. Transformada de Fourier.

La transformada de Fourier tiene sus orígenes a principios del siglo XIX, cuando el matemático y físico francés Joseph Fourier (1768–1830) introdujo una revolucionaria idea al estudiar la propagación del calor. En 1807, presentó ante la Academia de Ciencias de París un manuscrito titulado *Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides*, en el cual proponía que cualquier función, bajo ciertas condiciones, podía expresarse como una serie infinita de senos y cosenos. Aunque sus ideas no fueron inmediatamente aceptadas —en parte por las dudas de sus contemporáneos sobre la legitimidad de representar funciones discontinuas mediante series trigonométricas—, con el tiempo se reconoció la profundidad de su enfoque y su enorme potencial analítico.
Joseph Fourier nació en Auxerre, Francia, en 1768. Huérfano desde pequeño, ingresó a una escuela militar donde recibió una sólida formación matemática. Participó activamente en los cambios políticos de su época, y más tarde acompañó a Napoleón en la expedición a Egipto, donde mostró gran interés por la ciencia y la cultura de aquel país. A su regreso a Francia, ocupó diversos cargos administrativos y académicos, y fue nombrado prefecto del departamento de Isère. Durante su estancia en Grenoble desarrolló gran parte de sus investigaciones sobre la ecuación del calor, trabajo que culminó en su obra maestra *Théorie analytique de la chaleur*, publicada en 1822.
El impacto de las ideas de Fourier ha sido inmenso, extendiéndose mucho más allá de la física del calor. La noción de representar funciones como sumas de funciones armónicas abrió las puertas al análisis de señales, la mecánica cuántica, la teoría de la información, y múltiples ramas de la matemática pura y aplicada. La transformada de Fourier, como se conoce hoy en día, constituye una herramienta esencial en análisis armónico, proporcionando un puente entre el dominio temporal o espacial y el dominio frecuencial.

Todo esto inspirado en la ecuación del calor

$$\begin{cases} \partial_t U = \partial_x^2 u, & \text{con } (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & \text{para todo } t \geq 0 \ , \\ u(x,0) = f(x) & f(0) = f(\pi) = 0. \end{cases}$$

Fourier se inspira en buscar una solución de la forma separación de variables

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Esto motiva a pensar en qué condiciones tiene que cumplir una función f periódica de periodo 2π para poderla escribir como combinación lineal de funciones trigonométricas, es decir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx).$$

Por cuestiones de facilidad en la escritura vamos a pensar el problema en funciones de periodo 1, para esto recordemos que

$$e^{ixk} = \cos(kx) + i \operatorname{sen}(kx),$$

luego podemos reescribir la expresión anterior de la forma

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i x k}$$

donde

$$c_k = \widehat{f}(k) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i x k} \, dx, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

El restante de teoría de Fourier se deja como lectura o motivante para entrar al curso de Series de Fourier.

1.2. La transformada de Fourier en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Definición 1.2.1: Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, llamaremos la transformada de Fourier de f a $\widehat{f}$ definida por

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} \, dx, \tag{1.1}$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^n$ y $x \cdot \xi$ es el producto punto entre x y ξ.

Nota 1.2.1:

Veamos que $\widehat{f}$ tiene sentido como integral.
Para ver esto note que

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f}(\xi)\right| &\leq \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx\right|,\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|f(x)e^{2\pi i x\cdot\xi}\right|\,dx,\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx,\\ &\leq \|f\|_1 .\end{aligned}$$

luego se puede ver que

$$\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1 < \infty.$$

Lo que nos permite definir la transformada de Fourier como un operador $\widehat{\ } : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Para ver el comportamiento de la transformada de Fourier anteriormente definida en $L^p(\mathbb{R}^n)$, veamos la siguiente definición.

Definición 1.2.2:

Una función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ es diferenciable en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con respecto a la k-ésima variable si existe $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{|h|\to 0}\left\|\frac{f(x+he_k - f(x))}{h} - g(x)\right\|_p = 0,$$

en donde e_k es el vector k-ésimo de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Si tal función g existe es llamada la derivada parcial respecto a la k-ésima variable de f en $L^p(\mathbb{R}^n)$, lo denotaremos por $\frac{\partial f}{\partial x_k}$.

Ahora sí veamos el siguiente resultado.

Teorema 1.2.1:

Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces se satisface que

1. $\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$.
2. Si $\tau_h f(x) = f(x-h)$ con $h \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned}\widehat{\tau_h f}(\xi) &= e^{-2\pi i h\cdot\xi}\widehat{f}(\xi),\\ \tau_h\widehat{f}(\xi) &= \widehat{e^{2\pi i x\cdot h} f}(\xi).\end{aligned}$$

3. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es transformación lineal invertible y $S = (T^{-1})^t = (T^t)^{-1}$, entonces

$$\widehat{f \circ T} = |det(T)|^{-1} \left(\widehat{f} \circ S\right).$$

En particular, si T es una rotación

$$\widehat{f \circ T} = \widehat{f} \circ T.$$

Si T es dilatación (o contracción) $Tx = rx$, entonces

$$\widehat{f \circ T}(\xi) = \frac{1}{r^n}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{r}\right).$$

4. Si $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, para $|\alpha| \leq k$ entonces $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y $\partial^\alpha \widehat{f} = (-\widehat{2\pi i x})^\alpha f$.

   - Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $x_k f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces

   $$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_k} = -\widehat{2\pi i x_k} f(\xi)$$

   en la norma de $L^1(\mathbb{R}^n)$.

5. Si $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $|\alpha| \leq k$ y $\partial^\alpha f \in C^0_\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $|\alpha| \leq k-1$, entonces

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

   - Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g = \frac{\partial f}{\partial x_k}$ en la norma de $L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces

   $$\widehat{g}(\xi) = \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}(\xi) = 2\pi i \xi_k \widehat{f}(\xi)$$

6. $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

7. $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\xi} g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\, ds$

Demostración

1. Demostrado en la nota (1.2).

2. Note que

$$\begin{aligned}
\widehat{\tau_h f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-h)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx \qquad\qquad \text{Haciendo } u = x-h,\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-2\pi i(u+h)\cdot\xi}\,du,\\
&= e^{-2\pi i h\cdot\xi}\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-2\pi i u\cdot\xi}\,du,\\
&= e^{-2\pi i h\cdot\xi}\widehat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\tau_h\widehat{f}(\xi) &= \widehat{f}(\xi-h),\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot(\xi-h)}\,dx,\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot h} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx,\\
&= \widehat{e^{2\pi i x\cdot h}f}(\xi).
\end{aligned}$$

3. Note que

$$\begin{aligned}
\widehat{f\circ T}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(Tx)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx \qquad\qquad \text{Haciendo } u = Tx,\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-2\pi i u\cdot S\xi}\,\frac{du}{|det(T)|},\\
&= |det(T)|^{-1}\widehat{f}(S\xi),\\
&= |det(T)|^{-1}(\widehat{f}\circ S)(\xi).
\end{aligned}$$

Ahora, note que si T es una rotación, entonces $|det(T)| = 1$

4. Note que esto se puede reducir a verlo en una primera derivada y de manera inductiva se concluye el resultado, por lo que será suficiente ver el siguiente ítem.

    - X

5. Si $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $|\alpha| \leq k$ y $\partial^\alpha f \in C^0_\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $|\alpha| \leq k-1$, entonces

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

    - Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g = \frac{\partial f}{\partial x_k}$ en la norma de $L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}(\xi) = 2\pi i\xi_k\widehat{f}(\xi)$$

6. $\widehat{f*g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

Continuará...

Lema 1.2.1: Riemman-Lebesgue

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\widehat{f} \in C^0_\infty(\mathbb{R}^n)$. (Poder de la cancelación)

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$$

Nota 1.2.2:

$(L^1(\mathbb{R}^n), +, \cdot, *)$ es un álgebra y además $\widehat{\ }$ lleva $(L^1(\mathbb{R}^n), +, \cdot, *)$ a $(C^0_\infty(\mathbb{R}^n), +, \cdot, \cdot)$ en dónde el segundo es el producto de funciones.
$\widehat{\ }$ no es sobreyectiva.

Bibliografía