Teoría local de curvas en $\mathbb{R}^3$

El estudio de curvas en $\mathbb{R}^3$ es, en bastantes aspectos, muy diferente al de curvas en el plano. El motivo principal es que una curva en $\mathbb{R}^3$ tiene mucha más libertad para **((moverse))**. De hecho, tiene una dirección adicional en la que puede curvarse, y su libertad está **((menos controlada))** que en el caso de una curva plana. Esta exposición es igualmente válida para curvas en dimensión superior: a mayor dimensión, mayor libertad, pero el estudio de esas curvas se complica cada vez más.

El estudio de curvas en $\mathbb{R}^3$ es, en bastantes aspectos, muy diferente al de curvas en el plano. El motivo principal es que una curva en $\mathbb{R}^3$ tiene mucha más libertad para **((moverse))**. De hecho, tiene una dirección adicional en la que puede curvarse, y su libertad está **((menos controlada))** que en el caso de una curva plana. Esta exposición es igualmente válida para curvas en dimensión superior: a mayor dimensión, mayor libertad, pero el estudio de esas curvas se complica cada vez más. Siendo exhaustivos, podríamos apuntar tres diferencias fundamentales con respecto a la sección anterior:

Teoría local de curvas en $\mathbb{R}^3$

El estudio de curvas en $\mathbb{R}^3$ es, en bastantes aspectos, muy diferente al de curvas en el plano. El motivo principal es que una curva en $\mathbb{R}^3$ tiene mucha más libertad para **((moverse))**. De hecho, tiene una dirección adicional en la que puede curvarse, y su libertad está **((menos controlada))** que en el caso de una curva plana. Esta exposición es igualmente válida para curvas en dimensión superior: a mayor dimensión, mayor libertad, pero el estudio de esas curvas se complica cada vez más. Siendo exhaustivos, podríamos apuntar tres diferencias fundamentales con respecto a la sección anterior:

i) la curvatura de una curva en $\mathbb{R}^3$ no tiene signo y ofrece menos información que en el caso de curvas planas;

El estudio de curvas en $\mathbb{R}^3$ es, en bastantes aspectos, muy diferente al de curvas en el plano. El motivo principal es que una curva en $\mathbb{R}^3$ tiene mucha más libertad para **((moverse))**. De hecho, tiene una dirección adicional en la que puede curvarse, y su libertad está **((menos controlada))** que en el caso de una curva plana. Esta exposición es igualmente válida para curvas en dimensión superior: a mayor dimensión, mayor libertad, pero el estudio de esas curvas se complica cada vez más. Siendo exhaustivos, podríamos apuntar tres diferencias fundamentales con respecto a la sección anterior:

i) la curvatura de una curva en $\mathbb{R}^3$ no tiene signo y ofrece menos información que en el caso de curvas planas;

ii) la existencia de un vector normal a la curva no está garantizada;

Teoría local de curvas en $\mathbb{R}^3$

El estudio de curvas en $\mathbb{R}^3$ es, en bastantes aspectos, muy diferente al de curvas en el plano. El motivo principal es que una curva en $\mathbb{R}^3$ tiene mucha más libertad para **((moverse))**. De hecho, tiene una dirección adicional en la que puede curvarse, y su libertad está **((menos controlada))** que en el caso de una curva plana. Esta exposición es igualmente válida para curvas en dimensión superior: a mayor dimensión, mayor libertad, pero el estudio de esas curvas se complica cada vez más. Siendo exhaustivos, podríamos apuntar tres diferencias fundamentales con respecto a la sección anterior:

i) la curvatura de una curva en $\mathbb{R}^3$ no tiene signo y ofrece menos información que en el caso de curvas planas;

ii) la existencia de un vector normal a la curva no está garantizada;

iii) es necesario contar con una función adicional ((la torsión)) para explicar y caracterizar cómo se comporta una curva en el espacio.

Teoría local de curvas en $\mathbb{R}^3$

El estudio de curvas en $\mathbb{R}^3$ es, en bastantes aspectos, muy diferente al de curvas en el plano. El motivo principal es que una curva en $\mathbb{R}^3$ tiene mucha más libertad para **((moverse))**. De hecho, tiene una dirección adicional en la que puede curvarse, y su libertad está **((menos controlada))** que en el caso de una curva plana. Esta exposición es igualmente válida para curvas en dimensión superior: a mayor dimensión, mayor libertad, pero el estudio de esas curvas se complica cada vez más. Siendo exhaustivos, podríamos apuntar tres diferencias fundamentales con respecto a la sección anterior:

i) la curvatura de una curva en $\mathbb{R}^3$ no tiene signo y ofrece menos información que en el caso de curvas planas;

ii) la existencia de un vector normal a la curva no está garantizada;

iii) es necesario contar con una función adicional ((la torsión)) para explicar y caracterizar cómo se comporta una curva en el espacio.

¿Qué tiene de especial el caso $n = 3$ dentro de nuestro estudio general de las curvas en $\mathbb{R}^n$?

Teoría local de curvas en $\mathbb{R}^3$

El estudio de curvas en $\mathbb{R}^3$ es, en bastantes aspectos, muy diferente al de curvas en el plano. El motivo principal es que una curva en $\mathbb{R}^3$ tiene mucha más libertad para **((moverse))**. De hecho, tiene una dirección adicional en la que puede curvarse, y su libertad está **((menos controlada))** que en el caso de una curva plana. Esta exposición es igualmente válida para curvas en dimensión superior: a mayor dimensión, mayor libertad, pero el estudio de esas curvas se complica cada vez más. Siendo exhaustivos, podríamos apuntar tres diferencias fundamentales con respecto a la sección anterior:

i) la curvatura de una curva en $\mathbb{R}^3$ no tiene signo y ofrece menos información que en el caso de curvas planas;

ii) la existencia de un vector normal a la curva no está garantizada;

iii) es necesario contar con una función adicional ((la torsión)) para explicar y caracterizar cómo se comporta una curva en el espacio.

¿Qué tiene de especial el caso $n = 3$ dentro de nuestro estudio general de las curvas en $\mathbb{R}^n$? Una respuesta es que solo $\mathbb{R}^3$ tiene una operación de producto vectorial, que es el núcleo algebraico de la mayoría de sus propiedades geométricas especiales.

Definición (producto cruz en $\mathbb{R}^3$)

Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, *entonces*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \Big(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1\Big) \in \mathbb{R}^3.$$

Definición (producto cruz en $\mathbb{R}^3$)

Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, *entonces*

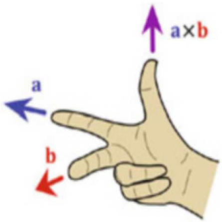
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \Big(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1\Big) \in \mathbb{R}^3.$$

Las propiedades geométricas conocidas se dan en el siguiente lema.

Lema (Propiedades producto cruz en $\mathbb{R}^3$)

Sea $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *es ortogonal a* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$.
2. $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\||\sin(\theta)| = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2\,\|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle^2}$ = *el área del paralelogramo generado por* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$ *(donde* $\theta = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$*).*
3. *La dirección de* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *se da por la regla de la mano derecha.*
4. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$



El producto vectorial permite una fórmula conveniente para la curvatura de una curva espacial:

Proposición (Curvatura en términos de v y a)

Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *es una curva regular, entonces para todo* $t \in I$*,*

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^3}$$

El producto vectorial permite una fórmula conveniente para la curvatura de una curva espacial:

Proposición (Curvatura en términos de v y a)

Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva regular, entonces para todo $t \in I$,

$$\kappa(t) = \frac{||\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)||}{||\mathbf{v}(t)||^3}$$

DEM: Suprimiendo la variable de entrada t, la figura muestra que $||\mathbf{a}^{\perp}|| = ||\mathbf{a}|| \sin(\theta)$,

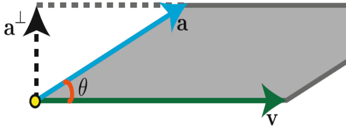
El producto vectorial permite una fórmula conveniente para la curvatura de una curva espacial:

Proposición (Curvatura en términos de v y a)

Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *es una curva regular, entonces para todo* $t \in I$*,*

$$\kappa(t) = \frac{||\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)||}{||\mathbf{v}(t)||^3}$$

DEM: Suprimiendo la variable de entrada t, la figura muestra que $||\mathbf{a}^{\perp}|| = ||\mathbf{a}|| \sin(\theta)$, por lo que



$$\kappa = \frac{||\mathbf{a}^{\perp}||}{||\mathbf{v}||^2} = \frac{||\mathbf{a}|| \sin(\theta)}{||\mathbf{v}||^2} = \frac{||\mathbf{v}|| \, ||\mathbf{a}|| \sin(\theta)}{||\mathbf{v}||^3}$$
$$= \frac{||\mathbf{v} \times \mathbf{a}||}{||\mathbf{v}||^3}$$

t

■

EJEMPLO: Sea α la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 + 2(y - x) - 2 = 0$ con el plano $x - y - 2z - 2 = 0$ Determine la curvatura κ de α en el punto $(3, -1, 1)$.

Sol:

EJEMPLO: Sea α la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 + 2(y - x) - 2 = 0$ con el plano $x - y - 2z - 2 = 0$ Determine la curvatura κ de α en el punto $(3, -1, 1)$.

Sol: No es difícil ver que $x^2 + y^2 + 2(y - x) - 2 = 0$, es igual a $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$,

EJEMPLO: Sea α la curva de intersección del cilindro $x^2+y^2+2(y-x)-2=0$ con el plano $x-y-2z-2=0$ Determine la curvatura κ de α en el punto $(3,-1,1)$.

Sol: No es difícil ver que $x^2+y^2+2(y-x)-2=0$, es igual a $(x-1)^2+(y+1)^2=4$, es decir, su parametrización está dada por:

$$\alpha(t)=(1+2\cos t, 2\text{sin}t-1, \cos t-\text{sin}t), \qquad \text{donde} \qquad \alpha(0)=(3,-1,1)$$

EJEMPLO: Sea α la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 + 2(y - x) - 2 = 0$ con el plano $x - y - 2z - 2 = 0$ Determine la curvatura κ de α en el punto $(3, -1, 1)$.

Sol: No es difícil ver que $x^2 + y^2 + 2(y - x) - 2 = 0$, es igual a $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$, es decir, su parametrización está dada por:

$$\alpha(t) = (1 + 2\cos t, 2\text{sin}t - 1, \cos t - \text{sin}t), \qquad \text{donde} \qquad \alpha(0) = (3, -1, 1)$$

De donde resulta

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) &= (-2\text{sin}t, 2\cos t, -\text{sin}t - \cos t), \\
\mathbf{a}(t) &= (-2\cos t, -2\text{sin}t, -\cos t + \text{sin}t),
\end{aligned}$$

EJEMPLO: Sea α la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 + 2(y - x) - 2 = 0$ con el plano $x - y - 2z - 2 = 0$ Determine la curvatura κ de α en el punto $(3, -1, 1)$.

Sol: No es difícil ver que $x^2 + y^2 + 2(y - x) - 2 = 0$, es igual a $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$, es decir, su parametrización está dada por:

$$\alpha(t) = (1 + 2\cos t, 2\text{sin}t - 1, \cos t - \text{sin}t), \qquad \text{donde} \qquad \alpha(0) = (3, -1, 1)$$

De donde resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= (-2\text{sin}t, 2\cos t, -\text{sin}t - \cos t),\\ \mathbf{a}(t) &= (-2\cos t, -2\text{sin}t, -\cos t + \text{sin}t),\end{aligned}$$

Luego, $\mathbf{v}(0) = (0, 2, -1)$ $\mathbf{a}(0) = (-2, 0, -1)$ $\mathbf{v}(0) \times \mathbf{a}(0) = (-2, 2, 4)$

EJEMPLO: Sea α la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 + 2(y - x) - 2 = 0$ con el plano $x - y - 2z - 2 = 0$ Determine la curvatura κ de α en el punto $(3, -1, 1)$.

Sol: No es difícil ver que $x^2 + y^2 + 2(y - x) - 2 = 0$, es igual a $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$, es decir, su parametrización está dada por:

$$\alpha(t) = (1 + 2\cos t, 2\mathrm{sin}t - 1, \cos t - \mathrm{sin}t), \qquad \text{donde} \qquad \alpha(0) = (3, -1, 1)$$

De donde resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= (-2\mathrm{sin}t, 2\cos t, -\mathrm{sin}t - \cos t), \\ \mathbf{a}(t) &= (-2\cos t, -2\mathrm{sin}t, -\cos t + \mathrm{sin}t), \end{aligned}$$

Luego, $\mathbf{v}(0) = (0, 2, -1)$ $\mathbf{a}(0) = (-2, 0, -1)$ $\mathbf{v}(0) \times \mathbf{a}(0) = (-2, 2, 4)$
Por tanto, la curvatura de la curva α en el punto $\alpha(0) = (3, -1, 1)$ es

$$\kappa(0) = \frac{\|\mathbf{v}(0) \times \mathbf{a}(0)\|}{\|\mathbf{v}(0)\|^3} = \frac{2\sqrt{6}}{5\sqrt{5}} \qquad \bigstar$$

EJEMPLO: Sea la curva

$$\alpha(t) = \left(\frac{t^2}{2} + t, \frac{t^2}{2} - t, \frac{\sqrt{2}}{2}\ln t\right)$$

Halle la curvatura en el punto donde α corta al xy-plano. R: $\kappa(1) = \frac{2\sqrt{2}}{9}$

Definición (Marco de Frenet)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Sea $t \in I$ con $\kappa(t) \neq 0$. El marco de Frenet en t es la base $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ de $\mathbb{R}^3$ definido como

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}, \qquad \mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{a}^{\perp}(t)}{\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\|} = \frac{\mathbf{t}'(t)}{\|\mathbf{t}'(t)\|}, \qquad \mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t).$$

Individualmente se denominan vectores **tangente unitario**, **normal unitario** *y* **binormal unitario** *en t.*

Definición (Marco de Frenet)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Sea $t \in I$ con $\kappa(t) \neq 0$. El marco de Frenet en t es la base $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ de $\mathbb{R}^3$ definido como

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}, \qquad \mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{a}^{\perp}(t)}{\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\|} = \frac{\mathbf{t}'(t)}{\|\mathbf{t}'(t)\|}, \qquad \mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t).$$

Individualmente se denominan vectores **tangente unitario**, **normal unitario** *y* **binormal unitario** *en t.*

Siempre que no cause confusión, omitiremos el parámetro y simplemente escribiremos $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$. Por construcción, este marco es b.o.n de $\mathbb{R}^3$.

Definición (Marco de Frenet)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Sea $t \in I$ con $\kappa(t) \neq 0$. El marco de Frenet en t es la base $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ de $\mathbb{R}^3$ definido como

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}, \qquad \mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{a}^{\perp}(t)}{\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\|} = \frac{\mathbf{t}'(t)}{\|\mathbf{t}'(t)\|}, \qquad \mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t).$$

Individualmente se denominan vectores **tangente unitario**, **normal unitario** *y* **binormal unitario** *en t.*

Siempre que no cause confusión, omitiremos el parámetro y simplemente escribiremos $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$. Por construcción, este marco es b.o.n de $\mathbb{R}^3$.

Proposición (Marco de Frenet para curva p.p.a)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. Sea $t \in I$ con $\kappa(t) \neq 0$. El **marco de Frenet** *en t es la base $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ de $\mathbb{R}^3$ definido como*

$$\mathbf{t}(t) = \mathbf{v}(t), \qquad \mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{a}(t)}{\|\mathbf{a}(t)\|}, \qquad \mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t).$$

Definición (Marco de Frenet)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Sea $t \in I$ con $\kappa(t) \neq 0$. El marco de Frenet en t es la base $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ de $\mathbb{R}^3$ definido como

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}, \quad \mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{a}^{\perp}(t)}{\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\|} = \frac{\mathbf{t}'(t)}{\|\mathbf{t}'(t)\|}, \quad \mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t).$$

Individualmente se denominan vectores **tangente unitario**, **normal unitario** *y* **binormal unitario** *en t.*

Siempre que no cause confusión, omitiremos el parámetro y simplemente escribiremos $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$. Por construcción, este marco es b.o.n de $\mathbb{R}^3$.

Proposición (Marco de Frenet para curva p.p.a)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. Sea $t \in I$ con $\kappa(t) \neq 0$. El **marco de Frenet** *en t es la base $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ de $\mathbb{R}^3$ definido como*

$$\mathbf{t}(t) = \mathbf{v}(t), \quad \mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{a}(t)}{\|\mathbf{a}(t)\|}, \quad \mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t).$$

DEM: Solo recuerde que si α en p.p.a entonces $\|\mathbf{v}(t)\| = 1$ y que $\mathbf{a}^{\perp}(t) = \mathbf{a}(t)$. Por tanto la demostración es directa. ∎

$\boxed{\text{Otra forma de hallar } \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}}$ Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva regular.

Las expresiones de $\mathbf{t}(t)$, $\mathbf{n}(t)$ y $\mathbf{b}(t)$ en términos de la función $\alpha(t)$ y sus derivadas son

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}, \quad \mathbf{n} = \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{v}}{\|[\mathbf{v} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{v}\|}$$

$\boxed{\textbf{Otra forma de hallar } \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}}$ Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva regular.

Las expresiones de $\mathbf{t}(t)$, $\mathbf{n}(t)$ y $\mathbf{b}(t)$ en términos de la función $\alpha(t)$ y sus derivadas son

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}, \quad \mathbf{n} = \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{v}}{\|[\mathbf{v} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{v}\|}$$

Si $\mathbf{b}(t) = b$ (b vector constante) $\forall t \in I$, entonces la curva es plana. Así, la curva está en el plano osculador.

EJEMPLO: En el espacio tridimensional la posición de una partícula en movimiento está dada por la función vectorial $\alpha(t) = (2\cos t, 2\mathrm{sint}, 3t)$. Encuentre los vectores $\mathbf{t}(t)$, $\mathbf{n}(t)$ y $\mathbf{b}(t)$. Determine la curvatura $\kappa(t)$.

Sol:

EJEMPLO: En el espacio tridimensional la posición de una partícula en movimiento está dada por la función vectorial $\alpha(t) = (2\cos t, 2\mathrm{sin}t, 3t)$. Encuentre los vectores $\mathbf{t}(t)$, $\mathbf{n}(t)$ y $\mathbf{b}(t)$. Determine la curvatura $\kappa(t)$.

Sol: Puesto que $\mathbf{v}(t) =$, $\|\mathbf{v}(t)\| =$. Luego encontramos que

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|} =$$

para hallar **n** necesitamos hallar

$$\mathbf{t}'(t) = \qquad \|\mathbf{t}'(t)\| = \qquad \mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{t}'(t)}{\|\mathbf{t}'(t)\|}$$

Ahora el binormal es

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t) =$$

Por último encontramos la curvatura

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{\|\,\|\mathbf{v}(t)\|\mathbf{t}'\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{\|\mathbf{t}'(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|} =$$

EJEMPLO: Halle los vectores **t**, **n** y **b** de la espiral cónica $\alpha(t) = e^t(\cos t, sent, 1)$ en un punto arbitrario.

Sol: Recuerde que

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}, \quad \mathbf{n} = \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{v}}{\|[\mathbf{v} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{v}\|}$$

EJEMPLO: Sea C la curva intersección entre las superficies

$$y = (x-2)^2 \qquad z = (x-2)^2$$

Halle la ecuación cartesiana del plano osculador a la curva C en los puntos $(2,0,0)$, $(3,1,1)$ y (x_0, y_0, z_0) R/: $P_O : y - z = 0$, $B(t)$ es const

EJEMPLO: Dada la curva $\alpha(t) = \left(\frac{1-2t}{2}, \int_{2\pi}^{t} e^{\sin u} du, t\right)$.

a) Halle la ecuación del plano osculador de α en el punto donde α corta al plano $x + y + z = \frac{1}{2}$.

b) Halle el radio (centro de curvatura) de la circunferencia osculatriz en el punto del item (a)

Sol:

EJEMPLO: Dada la curva $\alpha(t) = \left(\dfrac{1-2t}{2}, \displaystyle\int_{2\pi}^{t} e^{\sin u} du, t\right)$.

a) Halle la ecuación del plano osculador de α en el punto donde α corta al plano $x + y + z = \frac{1}{2}$.

Sol:

EJEMPLO: Dada la curva $\alpha(t) = \left(\frac{1-2t}{2}, \int_{2\pi}^{t} e^{\sin u} du, t\right)$.

a) Halle la ecuación del plano osculador de α en el punto donde α corta al plano $x + y + z = \frac{1}{2}$.

Sol: Hallemos el punto de corte con el plano, para ello las componentes de $\alpha(t)$ deben satisfacer la ecuación del plano, esto es,

$$\frac{1-2t}{2} + \int_{2\pi}^{t} e^{\sin u} du + t = \frac{1}{2}, \quad \Leftrightarrow \quad \int_{2\pi}^{t} e^{\sin u} du = 0, \quad \Leftrightarrow \quad t = 2\pi$$

EJEMPLO: Dada la curva $\alpha(t) = \Big(\dfrac{1-2t}{2}, \displaystyle\int_{2\pi}^{t} e^{\sin u} du, t\Big)$.

a) Halle la ecuación del plano osculador de α en el punto donde α corta al plano $x + y + z = \frac{1}{2}$.

Sol: Hallemos el punto de corte con el plano, para ello las componentes de $\alpha(t)$ deben satisfacer la ecuación del plano, esto es,

$$\frac{1-2t}{2} + \int_{2\pi}^{t} e^{\sin u} du + t = \frac{1}{2}, \quad \Leftrightarrow \quad \int_{2\pi}^{t} e^{\sin u} du = 0, \quad \Leftrightarrow \quad t = 2\pi$$

Luego, α corta al plano $\alpha(2\pi) = P_0\big(\frac{1-4\pi}{2}, 0, 2\pi\big)$

EJEMPLO: Dada la curva $\alpha(t) = \left(\frac{1-2t}{2}, \int_{2\pi}^{t} e^{\sin u} du, t\right)$.

a) Halle la ecuación del plano osculador de α en el punto donde α corta al plano $x + y + z = \frac{1}{2}$.

Sol: Hallemos el punto de corte con el plano, para ello las componentes de $\alpha(t)$ deben satisfacer la ecuación del plano, esto es,

$$\frac{1-2t}{2} + \int_{2\pi}^{t} e^{\sin u} du + t = \frac{1}{2}, \quad \Leftrightarrow \quad \int_{2\pi}^{t} e^{\sin u} du = 0, \quad \Leftrightarrow \quad t = 2\pi$$

Luego, α corta al plano $\alpha(2\pi) = P_0\left(\frac{1-4\pi}{2}, 0, 2\pi\right)$ Por otro lado,

$$\mathbf{v}(t) = (-1, e^{\sin t}, 1), \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}(2\pi) = (-1, 1, 1)$$
$$\mathbf{a}(t) = (0, e^{\sin t}\cos t, 0), \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}(2\pi) = (0, 1, 0)$$

EJEMPLO: Dada la curva $\alpha(t) = \Big(\dfrac{1-2t}{2}, \displaystyle\int_{2\pi}^{t} e^{\sin u} du, t\Big)$.

a) Halle la ecuación del plano osculador de α en el punto donde α corta al plano $x + y + z = \frac{1}{2}$.

Sol: Hallemos el punto de corte con el plano, para ello las componentes de $\alpha(t)$ deben satisfacer la ecuación del plano, esto es,

$$\frac{1-2t}{2} + \int_{2\pi}^{t} e^{\sin u} du + t = \frac{1}{2}, \quad \Leftrightarrow \quad \int_{2\pi}^{t} e^{\sin u} du = 0, \quad \Leftrightarrow \quad t = 2\pi$$

Luego, α corta al plano $\alpha(2\pi) = P_0\big(\frac{1-4\pi}{2}, 0, 2\pi\big)$ Por otro lado,

$$\mathbf{v}(t) = (-1, e^{\sin t}, 1), \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}(2\pi) = (-1, 1, 1)$$
$$\mathbf{a}(t) = (0, e^{\sin t}\cos t, 0), \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}(2\pi) = (0, 1, 0)$$

Luego $\mathbf{v}(2\pi) \times \mathbf{a}(2\pi) = (-1, 0, -1)$ es un vector **normal al plano osculador**.

EJEMPLO: Dada la curva $\alpha(t) = \Big(\frac{1-2t}{2}, \int_{2\pi}^{t} e^{\sin u} du, t\Big)$.

a) Halle la ecuación del plano osculador de α en el punto donde α corta al plano $x + y + z = \frac{1}{2}$.

Sol: Hallemos el punto de corte con el plano, para ello las componentes de $\alpha(t)$ deben satisfacer la ecuación del plano, esto es,

$$\frac{1-2t}{2} + \int_{2\pi}^{t} e^{\sin u} du + t = \frac{1}{2}, \quad \Leftrightarrow \quad \int_{2\pi}^{t} e^{\sin u} du = 0, \quad \Leftrightarrow \quad t = 2\pi$$

Luego, α corta al plano $\alpha(2\pi) = P_0\big(\frac{1-4\pi}{2}, 0, 2\pi\big)$ Por otro lado,

$$\mathbf{v}(t) = (-1, e^{\sin t}, 1), \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}(2\pi) = (-1, 1, 1)$$
$$\mathbf{a}(t) = (0, e^{\sin t}\cos t, 0), \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}(2\pi) = (0, 1, 0)$$

Luego $\mathbf{v}(2\pi) \times \mathbf{a}(2\pi) = (-1, 0, -1)$ es un vector **normal al plano osculador**. Luego su ecuación es

$$\textbf{tn}\text{-Plano}; \quad \Big[(x, y, z) - \big(\frac{1-4\pi}{2}, 0, 2\pi\big)\Big] \cdot (-1, 0, -1) = 0, \quad \Leftrightarrow \quad x + z = \frac{1}{2}$$

EJEMPLO: Dada la curva $\alpha(t) = \left(\frac{1-2t}{2}, \int_{2\pi}^{t} e^{\sin u} du, t\right)$.

b) Halle el radio (centro de curvatura) de la circunferencia osculatriz en el punto del item (a)

Sol:

EJEMPLO: Dada la curva $\alpha(t) = \left(\frac{1-2t}{2}, \int_{2\pi}^{t} e^{\sin u} du, t\right)$.

b) Halle el radio (centro de curvatura) de la circunferencia osculatriz en el punto del item (a)

Sol: El centro de la circunferencia osculatriz (centro de curvatura) viene dada por la ecuación

$$\epsilon(2\pi) = \alpha(2\pi) + \frac{1}{\kappa(2\pi)}\mathbf{n}(2\pi)$$

Así que hallemos $\kappa(2\pi)$ y $\mathbf{n}(2\pi)$,

EJEMPLO: Dada la curva $\alpha(t) = \Big(\frac{1-2t}{2}, \int_{2\pi}^{t} e^{\sin u} du, t\Big)$.

b) Halle el radio (centro de curvatura) de la circunferencia osculatriz en el punto del item (a)

Sol: El centro de la circunferencia osculatriz (centro de curvatura) viene dada por la ecuación

$$\epsilon(2\pi) = \alpha(2\pi) + \frac{1}{\kappa(2\pi)}\mathbf{n}(2\pi)$$

Así que hallemos $\kappa(2\pi)$ y $\mathbf{n}(2\pi)$, Sabemos que

$$\mathbf{n}(2\pi) = \frac{\big[\mathbf{v}(2\pi)\times\mathbf{a}(2\pi)\big]\times\mathbf{v}(2\pi)}{\|\big[\mathbf{v}(2\pi)\times\mathbf{a}(2\pi)\big]\times\mathbf{v}(2\pi)\|} = \frac{(-1,0,-1)\times(-1,1,1)}{\|(-1,0,-1)\times(-1,1,1)||} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$$

EJEMPLO: Dada la curva $\alpha(t) = \Big(\dfrac{1-2t}{2}, \displaystyle\int_{2\pi}^{t} e^{\sin u} du, t\Big)$.

b) Halle el radio (centro de curvatura) de la circunferencia osculatriz en el punto del item (a)

Sol: El centro de la circunferencia osculatriz (centro de curvatura) viene dada por la ecuación

$$\epsilon(2\pi) = \alpha(2\pi) + \frac{1}{\kappa(2\pi)}\mathbf{n}(2\pi)$$

Así que hallemos $\kappa(2\pi)$ y $\mathbf{n}(2\pi)$, Sabemos que

$$\mathbf{n}(2\pi) = \frac{\big[\mathbf{v}(2\pi)\times\mathbf{a}(2\pi)\big]\times\mathbf{v}(2\pi)}{\|\big[\mathbf{v}(2\pi)\times\mathbf{a}(2\pi)\big]\times\mathbf{v}(2\pi)\|} = \frac{(-1,0,-1)\times(-1,1,1)}{\|(-1,0,-1)\times(-1,1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$$

$$\kappa(2\pi) = \frac{\|\mathbf{v}(2\pi)\times\mathbf{a}(2\pi)\|}{\|\mathbf{v}(2\pi)\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^3} = \frac{2}{3\sqrt{6}}$$

EJEMPLO: Dada la curva $\alpha(t) = \left(\frac{1-2t}{2}, \int_{2\pi}^{t} e^{\sin u} du, t\right)$.

b) Halle el radio (centro de curvatura) de la circunferencia osculatriz en el punto del item (a)

Sol: El centro de la circunferencia osculatriz (centro de curvatura) viene dada por la ecuación

$$\epsilon(2\pi) = \alpha(2\pi) + \frac{1}{\kappa(2\pi)}\mathbf{n}(2\pi)$$

Así que hallemos $\kappa(2\pi)$ y $\mathbf{n}(2\pi)$, Sabemos que

$$\mathbf{n}(2\pi) = \frac{\left[\mathbf{v}(2\pi)\times\mathbf{a}(2\pi)\right]\times\mathbf{v}(2\pi)}{\|\left[\mathbf{v}(2\pi)\times\mathbf{a}(2\pi)\right]\times\mathbf{v}(2\pi)\|} = \frac{(-1,0,-1)\times(-1,1,1)}{\|(-1,0,-1)\times(-1,1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$$

$$\kappa(2\pi) = \frac{\|\mathbf{v}(2\pi)\times\mathbf{a}(2\pi)\|}{\|\mathbf{v}(2\pi)\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^3} = \frac{2}{3\sqrt{6}}$$

Así, el centro de curvatura de la curva C en el punto $\alpha(2\pi)$ es

$$\epsilon(2\pi) = \alpha(2\pi) + \frac{1}{\kappa(2\pi)}\mathbf{n}(2\pi) = \left(\frac{1-4\pi}{2}, 0, 2\pi\right) + \frac{3\sqrt{6}}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)\right]$$

EJEMPLO: Dada la curva $\alpha(t) = \left(\frac{1-2t}{2}, \int_{2\pi}^{t} e^{\sin u} du, t\right)$.

b) Halle el radio (centro de curvatura) de la circunferencia osculatriz en el punto del item (a)

Sol: El centro de la circunferencia osculatriz (centro de curvatura) viene dada por la ecuación

$$\epsilon(2\pi) = \alpha(2\pi) + \frac{1}{\kappa(2\pi)}\mathbf{n}(2\pi) = \left(2-2\pi, 3, \frac{4\pi-3}{2}\right).$$

Así que hallemos $\kappa(2\pi)$ y $\mathbf{n}(2\pi)$, Sabemos que

$$\mathbf{n}(2\pi) = \frac{\left[\mathbf{v}(2\pi)\times\mathbf{a}(2\pi)\right]\times\mathbf{v}(2\pi)}{\left\|\left[\mathbf{v}(2\pi)\times\mathbf{a}(2\pi)\right]\times\mathbf{v}(2\pi)\right\|} = \frac{(-1,0,-1)\times(-1,1,1)}{\|(-1,0,-1)\times(-1,1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$$

$$\kappa(2\pi) = \frac{\|\mathbf{v}(2\pi)\times\mathbf{a}(2\pi)\|}{\|\mathbf{v}(2\pi)\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^3} = \frac{2}{3\sqrt{6}}$$

Así, el centro de curvatura de la curva C en el punto $\alpha(2\pi)$ es

$$\epsilon(2\pi) = \alpha(2\pi) + \frac{1}{\kappa(2\pi)}\mathbf{n}(2\pi) = \left(\frac{1-4\pi}{2}, 0, 2\pi\right) + \frac{3\sqrt{6}}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)\right]$$

Observe que las coordenadas del centro de curvatura del ejemplo anterior

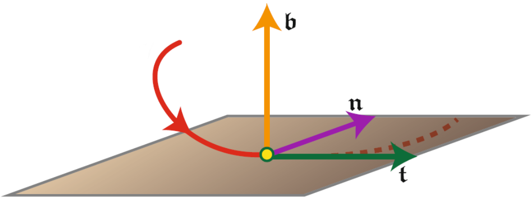
$$\epsilon(2\pi) = \left(2 - 2\pi, 3, \frac{4\pi - 3}{2}\right)$$

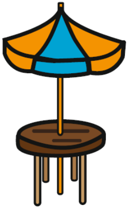
satisfacen la ecuación del **tn**-plano osculador

$$x - z = \frac{1}{2},$$

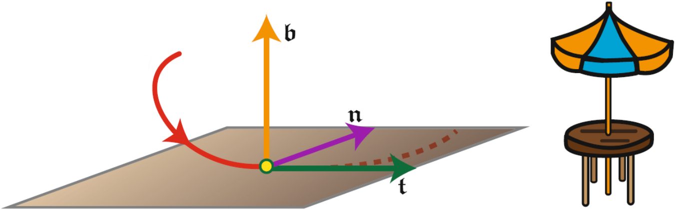
entonces la circunferencia osculatriz ((circunferencia de curvatura)) se encuentra sobre el **tn**-plano osculador.

El **plano osculador** está generador por **t** y **n**, por lo que su producto vectorial **b** es un vector normal unitario al plano osculador. Puede imaginar el plano osculador como una mesa y **b** como el mástil de la sombrilla que sobresale de ella y, por lo tanto, codifica la inclinación de la mesa;



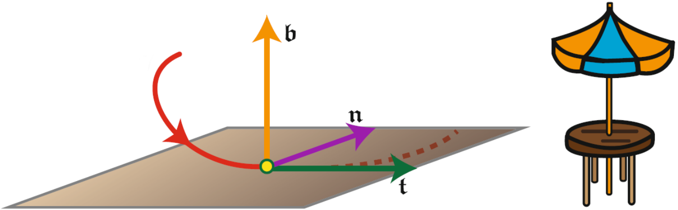


El **plano osculador** está generador por **t** y **n**, por lo que su producto vectorial **b** es un vector normal unitario al plano osculador. Puede imaginar el plano osculador como una mesa y **b** como el mástil de la sombrilla que sobresale de ella y, por lo tanto, codifica la inclinación de la mesa;



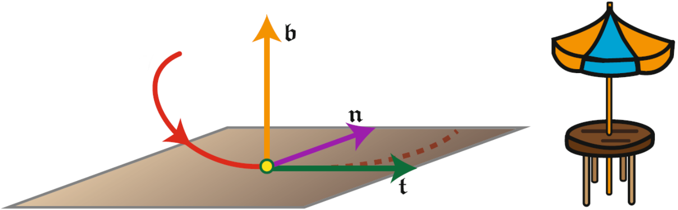
- Considere $t \to \mathbf{b}(t)$ como una trayectoria en la esfera $\mathbb{S}^2$

El **plano osculador** está generador por **t** y **n**, por lo que su producto vectorial **b** es un vector normal unitario al plano osculador. Puede imaginar el plano osculador como una mesa y **b** como el mástil de la sombrilla que sobresale de ella y, por lo tanto, codifica la inclinación de la mesa;



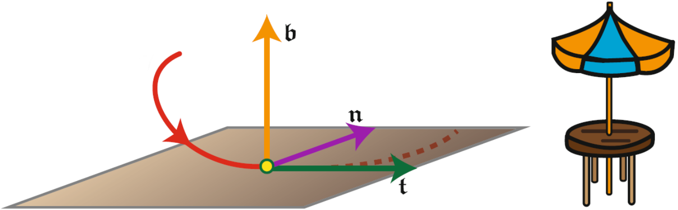
- Considere $t \to \mathbf{b}(t)$ como una trayectoria en la esfera $\mathbb{S}^2$
- Visualice $\mathbb{S}^2$ como un globo físico, un dispositivo "**inclinómetro**" que le permite desde el origen de $\mathbb{S}^2$ monitorear forma remota el movimiento el objeto, gracias a la fecha $\mathbf{b}(t)$.

El **plano osculador** está generador por **t** y **n**, por lo que su producto vectorial **b** es un vector normal unitario al plano osculador. Puede imaginar el plano osculador como una mesa y **b** como el mástil de la sombrilla que sobresale de ella y, por lo tanto, codifica la inclinación de la mesa;



- Considere $t \to \mathbf{b}(t)$ como una trayectoria en la esfera $\mathbb{S}^2$
- Visualice $\mathbb{S}^2$ como un globo físico, un dispositivo "**inclinómetro**" que le permite desde el origen de $\mathbb{S}^2$ monitorear forma remota el movimiento el objeto, gracias a la fecha $\mathbf{b}(t)$.
- $\mathbf{b}(t)$ siempre codifica la inclinación del plano osculador.

El **plano osculador** está generador por **t** y **n**, por lo que su producto vectorial **b** es un vector normal unitario al plano osculador. Puede imaginar el plano osculador como una mesa y **b** como el mástil de la sombrilla que sobresale de ella y, por lo tanto, codifica la inclinación de la mesa;



- Considere $t \to \mathbf{b}(t)$ como una trayectoria en la esfera $\mathbb{S}^2$
- Visualice $\mathbb{S}^2$ como un globo físico, un dispositivo "**inclinómetro**" que le permite desde el origen de $\mathbb{S}^2$ monitorear forma remota el movimiento el objeto, gracias a la fecha $\mathbf{b}(t)$.
- $\mathbf{b}(t)$ siempre codifica la inclinación del plano osculador.
- Por lo tanto, $||\mathbf{b}'||$ mide la velocidad a la que cambia la inclinación del plano osculador.

La siguiente idea clave es definir la torsión de γ como una medida de la rapidez con la que cambia la inclinación del plano osculador.

La siguiente idea clave es definir la torsión de γ como una medida de la rapidez con la que cambia la inclinación del plano osculador.
Entonces

$$\tau = \left\| \mathbf{b}' \right\|$$

La siguiente idea clave es definir la torsión de γ como una medida de la rapidez con la que cambia la inclinación del plano osculador. Entonces

$$\tau = \left\|\mathbf{b}'\right\|$$

Casi funciona para esto, pero hay dos insuficiencias.

La siguiente idea clave es definir la torsión de γ como una medida de la rapidez con la que cambia la inclinación del plano osculador.
Entonces

$$\tau = \left\|\mathbf{b}'\right\|$$

Casi funciona para esto, pero hay dos insuficiencias.

- Primero, preferiríamos una medida que sea independiente de la parametrización.

La siguiente idea clave es definir la torsión de γ como una medida de la rapidez con la que cambia la inclinación del plano osculador. Entonces

$$\tau = \left|\left|\mathbf{b}'\right|\right|$$

Casi funciona para esto, pero hay dos insuficiencias.

- Primero, preferiríamos una medida que sea independiente de la parametrización.
- Segundo, podemos hacerlo mejor definiendo una medida con **signo** de la tasa a la que cambia la inclinación.

La siguiente idea clave es definir la torsión de γ como una medida de la rapidez con la que cambia la inclinación del plano osculador. Entonces

$$\tau = \left\|\mathbf{b}'\right\|$$

Casi funciona para esto, pero hay dos insuficiencias.

- Primero, preferiríamos una medida que sea independiente de la parametrización.
- Segundo, podemos hacerlo mejor definiendo una medida con **signo** de la tasa a la que cambia la inclinación.

Para entender cómo, observe que

$$\mathbf{b}' = \mu_1 \mathbf{t} + \mu_2 \mathbf{n} + \mu_3 \mathbf{b}$$

La siguiente idea clave es definir la torsión de γ como una medida de la rapidez con la que cambia la inclinación del plano osculador. Entonces

$$\tau = \left\| \mathbf{b}' \right\|$$

Casi funciona para esto, pero hay dos insuficiencias.

- Primero, preferiríamos una medida que sea independiente de la parametrización.
- Segundo, podemos hacerlo mejor definiendo una medida con **signo** de la tasa a la que cambia la inclinación.

Para entender cómo, observe que

$$\mathbf{b}' = \mu_1 \mathbf{t} + \mu_2 \mathbf{n} + \mu_3 \mathbf{b}$$

y veamos que $\mu_3 = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \right\rangle = 0$ y $\mu_1 = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \right\rangle = 0$.

La siguiente idea clave es definir la torsión de γ como una medida de la rapidez con la que cambia la inclinación del plano osculador. Entonces

$$\tau = \left\|\mathbf{b}'\right\|$$

Casi funciona para esto, pero hay dos insuficiencias.

- Primero, preferiríamos una medida que sea independiente de la parametrización.
- Segundo, podemos hacerlo mejor definiendo una medida con **signo** de la tasa a la que cambia la inclinación.

Para entender cómo, observe que

$$\mathbf{b}' = \mu_1\mathbf{t} + \mu_2\mathbf{n} + \mu_3\mathbf{b}$$

y veamos que $\mu_3 = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \right\rangle = 0$ y $\mu_1 = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \right\rangle = 0$. En efecto, $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 1$ y $\langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle = 0$, y al derivar,

$$0 = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \right\rangle + \left\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}' \right\rangle = 2\left\langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \right\rangle$$

$$0 = \langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle' = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \right\rangle + \left\langle \mathbf{b}, \mathbf{t}' \right\rangle = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \right\rangle + \left\langle \mathbf{b}, \|\mathbf{t}'\|\mathbf{n} \right\rangle = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \right\rangle + \|\mathbf{t}'\|\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \right\rangle$$

La siguiente idea clave es definir la torsión de γ como una medida de la rapidez con la que cambia la inclinación del plano osculador. Entonces

$$\tau = \left\|\mathbf{b}'\right\|$$

Casi funciona para esto, pero hay dos insuficiencias.

- Primero, preferiríamos una medida que sea independiente de la parametrización.
- Segundo, podemos hacerlo mejor definiendo una medida con **signo** de la tasa a la que cambia la inclinación.

Para entender cómo, observe que

$$\mathbf{b}' = \mu_1\mathbf{t} + \mu_2\mathbf{n} + \mu_3\mathbf{b}$$

y veamos que $\mu_3 = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \right\rangle = 0$ y $\mu_1 = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \right\rangle = 0$. Por lo tanto,

$$\mathbf{b}' = \mu_2\mathbf{n} \text{ donde } \mu_2 = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \right\rangle \text{ por lo que } \left\|\mathbf{b}'\right\| = \left| \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \right\rangle \right|,$$

La siguiente idea clave es definir la torsión de γ como una medida de la rapidez con la que cambia la inclinación del plano osculador. Entonces

$$\tau = \left\| \mathbf{b}' \right\|$$

Casi funciona para esto, pero hay dos insuficiencias.

- Primero, preferiríamos una medida que sea independiente de la parametrización.
- Segundo, podemos hacerlo mejor definiendo una medida con **signo** de la tasa a la que cambia la inclinación.

Para entender cómo, observe que

$$\mathbf{b}' = \mu_1 \mathbf{t} + \mu_2 \mathbf{n} + \mu_3 \mathbf{b}$$

y veamos que $\mu_3 = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \right\rangle = 0$ y $\mu_1 = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \right\rangle = 0$. Por lo tanto,

$$\mathbf{b}' = \mu_2 \mathbf{n} \text{ donde } \mu_2 = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \right\rangle \text{ por lo que } \left\| \mathbf{b}' \right\| = \left| \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \right\rangle \right|,$$

pero esta medida lleva un signo que resultará ser geométricamente significativo. Para que esta medida sea independiente de la parametrización, debemos dividir por la velocidad, de esta manera:

Definición (Torsión de una curva)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva regular. Sea* $t \in I$ *con* $\kappa(t) = 0$*. La* **torsión** *de* α *en* t*, denotada por* $\tau(t)$*, es*

$$\tau(t) = \frac{-\left\langle \mathbf{b}'(t), \mathbf{n}(t) \right\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|}$$

Definición (Torsión de una curva)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Sea $t \in I$ con $\kappa(t) = 0$. La **torsión** *de α en t, denotada por $\tau(t)$, es*

$$\tau(t) = \frac{-\left\langle \mathbf{b}'(t), \mathbf{n}(t) \right\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|}$$

Lema (Propiedad)

La torsión τ es independiente de la parametrización.

DEM:

Definición (Torsión de una curva)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Sea $t \in I$ con $\kappa(t) = 0$. La **torsión** *de α en t, denotada por $\tau(t)$, es*

$$\tau(t) = \frac{-\left\langle \mathbf{b}'(t), \mathbf{n}(t) \right\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|}$$

Lema (Propiedad)

La torsión τ es independiente de la parametrización.

DEM: Supongamos primero que $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ h$ es una reparametrización que preserva la orientación (esto es, $h > 0$).

Definición (Torsión de una curva)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Sea $t \in I$ con $\kappa(t) = 0$. La **torsión** *de α en t, denotada por $\tau(t)$, es*

$$\tau(t) = \frac{-\left\langle \mathbf{b}'(t), \mathbf{n}(t) \right\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|}$$

Lema (Propiedad)

La torsión τ es independiente de la parametrización.

DEM: Supongamos primero que $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ h$ es una reparametrización que preserva la orientación (esto es, $h > 0$). Primero observe que el marco de Frenet no cambia: $\widetilde{\mathbf{t}} = \mathbf{t} \circ h$, $\widetilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \circ h$ y $\widetilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} \circ h$.

Definición (Torsión de una curva)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Sea $t \in I$ con $\kappa(t) = 0$. La **torsión** *de α en t, denotada por $\tau(t)$, es*

$$\tau(t) = \frac{-\left\langle \mathbf{b}'(t), \mathbf{n}(t) \right\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|}$$

Lema (Propiedad)

La torsión τ es independiente de la parametrización.

DEM: Supongamos primero que $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ h$ es una reparametrización que preserva la orientación (esto es, $h > 0$). Primero observe que el marco de Frenet no cambia: $\widetilde{\mathbf{t}} = \mathbf{t} \circ h$, $\widetilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \circ h$ y $\widetilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} \circ h$. Por lo tanto,

$$\widetilde{\tau}(t) = \frac{-\left\langle \widetilde{\mathbf{b}}'(t), \widetilde{\mathbf{n}}(t) \right\rangle}{\|\widetilde{\mathbf{v}}(t)\|} = \frac{\left\langle -h'(t)\mathbf{b}'(h(t)), \mathbf{n}(h(t)) \right\rangle}{\|h'(t)\mathbf{v}(h(t))\|} = \frac{-\left\langle \mathbf{b}'(h(t)), \mathbf{n}(h(t)) \right\rangle}{\|\mathbf{v}(h(t))\|} = \tau(h$$

Definición (Torsión de una curva)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Sea $t \in I$ con $\kappa(t) = 0$. La **torsión** *de α en t, denotada por $\tau(t)$, es*

$$\tau(t) = \frac{-\left\langle \mathbf{b}'(t), \mathbf{n}(t) \right\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|}$$

Lema (Propiedad)

La torsión τ es independiente de la parametrización.

DEM: Supongamos primero que $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ h$ es una reparametrización que preserva la orientación (esto es, $h > 0$). Primero observe que el marco de Frenet no cambia: $\widetilde{\mathbf{t}} = \mathbf{t} \circ h$, $\widetilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \circ h$ y $\widetilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} \circ h$. Por lo tanto,

$$\widetilde{\tau}(t) = \frac{-\left\langle \widetilde{\mathbf{b}}'(t), \widetilde{\mathbf{n}}(t) \right\rangle}{\|\widetilde{\mathbf{v}}(t)\|} = \frac{\left\langle -h'(t)\mathbf{b}'(h(t)), \mathbf{n}(h(t)) \right\rangle}{\|h'(t)\mathbf{v}(h(t))\|} = \frac{-\left\langle \mathbf{b}'(h(t)), \mathbf{n}(h(t)) \right\rangle}{\|\mathbf{v}(h(t))\|} = \tau(h$$

Por otra parte, si $\widetilde{\alpha}$ es una reparametrización con inversión de orientación (esto es, $h < 0$), entonces $\widetilde{\mathbf{t}} = -\mathbf{t} \circ h$, $\widetilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \circ h$ y $\widetilde{\mathbf{b}} = -\mathbf{b} \circ h$. Los cambios de signo requeridos en la fórmula anterior se cancelan, lo que lleva a la misma conclusión: $\widetilde{\tau} = \tau \circ h$.

Proposición (Torsión de una curva p.p.a)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva regular p.p.a. Si* $t \in I$ *con* $\kappa(t) \neq 0$ *entonces*

$$\tau(t) = \frac{-\left\langle \mathbf{b}'(t), \mathbf{n}(t) \right\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|} = -\left\langle \mathbf{b}'(t), \mathbf{n}(t) \right\rangle = \frac{\det(\alpha'(t); \alpha''(t); \alpha'''(t))}{\|\alpha''(t)\|^2}$$

DEM:

Proposición (Torsión de una curva p.p.a)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva regular p.p.a. Si* $t \in I$ *con* $\kappa(t) \neq 0$ *entonces*

$$\tau(t) = \frac{-\left\langle \mathbf{b}'(t), \mathbf{n}(t) \right\rangle}{||\mathbf{v}(t)||} = -\left\langle \mathbf{b}'(t), \mathbf{n}(t) \right\rangle = \frac{\det(\alpha'(t); \alpha''(t); \alpha'''(t))}{||\alpha''(t)||^2}$$

DEM: Como α es p.p.a entonces omitiendo el parámetro, tenemos $||\mathbf{v}|| = 1$, luego $\mathbf{t} = \mathbf{v}$ y $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||}$.

Proposición (Torsión de una curva p.p.a)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. Si $t \in I$ con $\kappa(t) \neq 0$ entonces

$$\tau(t) = \frac{-\left\langle \mathbf{b}'(t), \mathbf{n}(t) \right\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|} = -\left\langle \mathbf{b}'(t), \mathbf{n}(t) \right\rangle = \frac{\det(\alpha'(t); \alpha''(t); \alpha'''(t))}{\|\alpha''(t)\|^2}$$

DEM: Como α es p.p.a entonces omitiendo el parámetro, tenemos $\|\mathbf{v}\| = 1$, luego $\mathbf{t} = \mathbf{v}$ y $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$. Por la ecuación (**??**), tenemos $\mathbf{t}' = |\mathbf{t}'|\mathbf{n}$. Por tanto,

$$\mathbf{b}' = (\mathbf{t} \times \mathbf{n})' = (\mathbf{t}' \times \mathbf{n}) + (\mathbf{t} \times \mathbf{n}') = \left(|\mathbf{t}'|\mathbf{n} \times \mathbf{n}\right) + (\mathbf{t} \times \mathbf{n}') = \mathbf{t} \times \mathbf{n}'$$

Proposición (Torsión de una curva p.p.a)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. Si $t \in I$ con $\kappa(t) \neq 0$ entonces

$$\tau(t) = \frac{-\left\langle \mathbf{b}'(t), \mathbf{n}(t) \right\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|} = -\left\langle \mathbf{b}'(t), \mathbf{n}(t) \right\rangle = \frac{\det(\alpha'(t); \alpha''(t); \alpha'''(t))}{\|\alpha''(t)\|^2}$$

DEM: Como α es p.p.a entonces omitiendo el parámetro, tenemos $\|\mathbf{v}\| = 1$, luego $\mathbf{t} = \mathbf{v}$ y $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$. Por la ecuación (**??**), tenemos $\mathbf{t}' = |\mathbf{t}'|\mathbf{n}$. Por tanto,

$$\mathbf{b}' = (\mathbf{t} \times \mathbf{n})' = (\mathbf{t}' \times \mathbf{n}) + (\mathbf{t} \times \mathbf{n}') = \left(|\mathbf{t}'|\mathbf{n} \times \mathbf{n}\right) + (\mathbf{t} \times \mathbf{n}') = \mathbf{t} \times \mathbf{n}'$$

Entonces,

$$\tau(t) = \frac{-\left\langle \mathbf{b}'(t), \mathbf{n}(t) \right\rangle}{\|\mathbf{v}(t)\|} = -\left\langle \mathbf{t} \times \mathbf{n}', \mathbf{n} \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} -\det(\mathbf{t}; \mathbf{n}'; \mathbf{n}) = -\det\Big(\mathbf{v}; (\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|})'; \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}\Big)$$

$$= -\det\Big(\mathbf{v}; (\frac{1}{\|\mathbf{a}\|})'\mathbf{a} + \frac{\mathbf{a}'}{\|\mathbf{a}\|}; \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}\Big) = \det\Big(\mathbf{v}; \frac{\mathbf{a}'}{|\mathbf{a}|}; \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}\Big) = \frac{\det(\mathbf{v}; \mathbf{a}; \mathbf{a}')}{\|\mathbf{a}\|^2}$$

$$= \frac{\det(\alpha'; \alpha''; \alpha''')}{\|\alpha''\|^2} \blacksquare$$

El problema que se plantea a continuación es

$$\boxed{\textbf{¿cómo calcular la torsión de una curva en } \mathbb{R}^3 \textbf{ si ésta no es p.p.a?}}$$

El problema que se plantea a continuación es

¿cómo calcular la torsión de una curva en $\mathbb{R}^3$ si ésta no es p.p.a?

Vamos a ello. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular con parámetro arbitrario t, y consideremos $\widetilde{\alpha}(s) = \alpha(h(s))$ su p.p.a. Recuérdese que

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{v}(u)\| du \qquad \text{y} \qquad h = g^{-1}$$

El problema que se plantea a continuación es

¿cómo calcular la torsión de una curva en $\mathbb{R}^3$ si ésta no es p.p.a?

Vamos a ello. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular con parámetro arbitrario t, y consideremos $\widetilde{\alpha}(s) = \alpha(h(s))$ su p.p.a. Recuérdese que

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{v}(u)\| du \qquad \text{y} \qquad h = g^{-1}$$

Ahora observe que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}'(s) &= h'(s)\alpha'(h(s)) \\
\widetilde{\alpha}''(s) &= h''(s)\alpha'(h(s)) + (h'(s))^2\alpha''(h(s)) \\
\widetilde{\alpha}'''(s) &= h'''(s)\alpha'(h(s)) + 3h''(s)h'(s)\alpha''(h(s)) + (h'(s))^3\alpha'''(h(s))
\end{aligned}$$

El problema que se plantea a continuación es

¿cómo calcular la torsión de una curva en $\mathbb{R}^3$ si ésta no es p.p.a?

Vamos a ello. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular con parámetro arbitrario t, y consideremos $\widetilde{\alpha}(s) = \alpha(h(s))$ su p.p.a. Recuérdese que

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{v}(u)\| du \qquad \text{y} \qquad h = g^{-1}$$

Ahora observe que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}'(s) &= h'(s)\alpha'(h(s)) \\
\widetilde{\alpha}''(s) &= h''(s)\alpha'(h(s)) + (h'(s))^2\alpha''(h(s)) \\
\widetilde{\alpha}'''(s) &= h'''(s)\alpha'(h(s)) + 3h''(s)h'(s)\alpha''(h(s)) + (h'(s))^3\alpha'''(h(s))
\end{aligned}$$

Adicionalmente, sabemos que $\kappa = \dfrac{\|\mathbf{a}^{\perp}\|}{\|\mathbf{v}\|^2} = \dfrac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3}$ ((si es p.p.a, tenemos $\kappa = \|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|$))

$$\widetilde{\alpha}'(s) = h'(s)\alpha'(h(s))$$
$$\widetilde{\alpha}''(s) = h''(s)\alpha'(h(s)) + (h'(s))^2\alpha''(h(s))$$
$$\widetilde{\alpha}'''(s) = h'''(s)\alpha'(h(s)) + 3h''(s)h'(s)\alpha''(h(s)) + (h'(s))^3\alpha'''(h(s))$$

Como la *torsión* debe ser invariante bajo cualquier re-parametrizaciones (que conserve la orientación), encontramos que

$$\tau(h(s)) = \widetilde{\tau}(s) = \frac{\det\big(\widetilde{\alpha}'(s); \widetilde{\alpha}''(s); \widetilde{\alpha}'''(s)\big)}{\|\alpha''(s)\|^2}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}'(s) &= h'(s)\alpha'(h(s))\\ \widetilde{\alpha}''(s) &= h''(s)\alpha'(h(s)) + (h'(s))^2\alpha''(h(s))\\ \widetilde{\alpha}'''(s) &= h'''(s)\alpha'(h(s)) + 3h''(s)h'(s)\alpha''(h(s)) + (h'(s))^3\alpha'''(h(s))\end{aligned}$$

Como la *torsión* debe ser invariante bajo cualquier re-parametrizaciones (que conserve la orientación), encontramos que

$$\tau(h(s)) = \widetilde{\tau}(s) = \frac{\det\big(\widetilde{\alpha}'(s); \widetilde{\alpha}''(s); \widetilde{\alpha}'''(s)\big)}{\|\alpha''(s)\|^2} = \frac{\big(\widetilde{\alpha}'(s) \times \widetilde{\alpha}''(s)\big) \cdot \widetilde{\alpha}'''(s)}{\|\widetilde{\alpha}'(s) \times \widetilde{\alpha}''(s)\|^2}$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}'(s) &= h'(s)\alpha'(h(s)) \\
\widetilde{\alpha}''(s) &= h''(s)\alpha'(h(s)) + (h'(s))^2\alpha''(h(s)) \\
\widetilde{\alpha}'''(s) &= h'''(s)\alpha'(h(s)) + 3h''(s)h'(s)\alpha''(h(s)) + (h'(s))^3\alpha'''(h(s))
\end{aligned}
$$

Como la *torsión* debe ser invariante bajo cualquier re-parametrizaciones (que conserve la orientación), encontramos que

$$
\begin{aligned}
\tau(h(s)) = \widetilde{\tau}(s) &= \frac{\det\big(\widetilde{\alpha}'(s); \widetilde{\alpha}''(s); \widetilde{\alpha}'''(s)\big)}{\|\alpha''(s)\|^2} = \frac{\big(\widetilde{\alpha}'(s) \times \widetilde{\alpha}''(s)\big) \cdot \widetilde{\alpha}'''(s)}{\|\widetilde{\alpha}'(s) \times \widetilde{\alpha}''(s)\|^2} \\
&= \frac{(h'(s))^3\Big(\alpha'(h(s)) \times \alpha''(h(s))\Big) \cdot \widetilde{\alpha}'''(s)}{\|(h'(s))^3(\alpha'(h(s)) \times \alpha''(h(s))\|^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}'(s) &= h'(s)\alpha'(h(s)) \\
\widetilde{\alpha}''(s) &= h''(s)\alpha'(h(s)) + (h'(s))^2\alpha''(h(s)) \\
\widetilde{\alpha}'''(s) &= h'''(s)\alpha'(h(s)) + 3h''(s)h'(s)\alpha''(h(s)) + (h'(s))^3\alpha'''(h(s))
\end{aligned}
$$

Como la *torsión* debe ser invariante bajo cualquier re-parametrizaciones (que conserve la orientación), encontramos que

$$
\begin{aligned}
\tau(h(s)) = \widetilde{\tau}(s) &= \frac{\det\big(\widetilde{\alpha}'(s);\widetilde{\alpha}''(s);\widetilde{\alpha}'''(s)\big)}{\|\alpha''(s)\|^2} = \frac{\big(\widetilde{\alpha}'(s)\times\widetilde{\alpha}''(s)\big)\cdot\widetilde{\alpha}'''(s)}{\|\widetilde{\alpha}'(s)\times\widetilde{\alpha}''(s)\|^2} \\
&= \frac{(h'(s))^3\Big(\alpha'(h(s))\times\alpha''(h(s))\Big)\cdot\widetilde{\alpha}'''(s)}{\|(h'(s))^3(\alpha'(h(s))\times\alpha''(h(s))\|^2} = \frac{(h'(s))^3\Big(\alpha'(h(s))\times\alpha''(h(s))\Big)\cdot(h'(}{\|(h'(s))^3(\alpha'(h(s)\times\alpha''(h(}
\end{aligned}
$$

$$\widetilde{\alpha}'(s) = h'(s)\alpha'(h(s))$$
$$\widetilde{\alpha}''(s) = h''(s)\alpha'(h(s)) + (h'(s))^2\alpha''(h(s))$$
$$\widetilde{\alpha}'''(s) = h'''(s)\alpha'(h(s)) + 3h''(s)h'(s)\alpha''(h(s)) + (h'(s))^3\alpha'''(h(s))$$

Como la *torsión* debe ser invariante bajo cualquier re-parametrizaciones (que conserve la orientación), encontramos que

$$\tau(h(s)) = \widetilde{\tau}(s) = \frac{\det\big(\widetilde{\alpha}'(s);\widetilde{\alpha}''(s);\widetilde{\alpha}'''(s)\big)}{\|\alpha''(s)\|^2} = \frac{\big(\widetilde{\alpha}'(s)\times\widetilde{\alpha}''(s)\big)\cdot\widetilde{\alpha}'''(s)}{\|\widetilde{\alpha}'(s)\times\widetilde{\alpha}''(s)\|^2}$$
$$= \frac{(h'(s))^3\Big(\alpha'(h(s))\times\alpha''(h(s))\Big)\cdot\widetilde{\alpha}'''(s)}{\|(h'(s))^3(\alpha'(h(s))\times\alpha''(h(s))\|^2} = \frac{(h'(s))^3\Big(\alpha'(h(s))\times\alpha''(h(s))\Big)\cdot(h'(}{\|(h'(s))^3(\alpha'(h(s)\times\alpha''(h(}$$
$$= \frac{(\alpha'(h(s))\times\alpha''(h(s)))\cdot\alpha'''(h(s))}{\|(\alpha'(h(s))\times\alpha''(h(s))\|^2}$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}'(s) &= h'(s)\alpha'(h(s)) \\
\widetilde{\alpha}''(s) &= h''(s)\alpha'(h(s)) + (h'(s))^2\alpha''(h(s)) \\
\widetilde{\alpha}'''(s) &= h'''(s)\alpha'(h(s)) + 3h''(s)h'(s)\alpha''(h(s)) + (h'(s))^3\alpha'''(h(s))
\end{aligned}
$$

Como la *torsión* debe ser invariante bajo cualquier re-parametrizaciones (que conserve la orientación), encontramos que

$$
\begin{aligned}
\tau(h(s)) = \widetilde{\tau}(s) &= \frac{\det\big(\widetilde{\alpha}'(s); \widetilde{\alpha}''(s); \widetilde{\alpha}'''(s)\big)}{\|\alpha''(s)\|^2} = \frac{\big(\widetilde{\alpha}'(s) \times \widetilde{\alpha}''(s)\big) \cdot \widetilde{\alpha}'''(s)}{\|\widetilde{\alpha}'(s) \times \widetilde{\alpha}''(s)\|^2} \\
&= \frac{(h'(s))^3\Big(\alpha'(h(s)) \times \alpha''(h(s))\Big) \cdot \widetilde{\alpha}'''(s)}{\|(h'(s))^3(\alpha'(h(s)) \times \alpha''(h(s))\|^2} = \frac{(h'(s))^3\Big(\alpha'(h(s)) \times \alpha''(h(s))\Big) \cdot (h'(}{\|(h'(s))^3(\alpha'(h(s) \times \alpha''(h(} \\
&= \frac{(\alpha'(h(s)) \times \alpha''(h(s))) \cdot \alpha'''(h(s))}{\|(\alpha'(h(s)) \times \alpha''(h(s))\|^2}
\end{aligned}
$$

Por tanto, denotando $h(s) = t$ encontramos una definición general para la función torsión τ

$$
\tau(t) = \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|(\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2} = \frac{\det\big(\alpha'(t); \alpha''(t)); \alpha'''(t)\big)}{\|(\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}
$$

Definición (Torsión $\tau(t)$ en general)

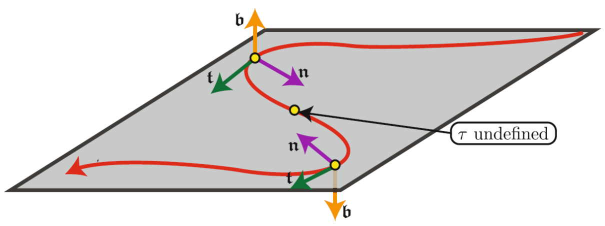
Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *es curva regular con parámetro arbitrario* t. *Entonces para todo* $t \in I$

$$\tau(t) = \frac{\det\big(\alpha'(t); \alpha''(t)); \alpha'''(t)\big)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$$

EJEMPLO (Torsión de una curva plana).
Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva en $\mathbb{R}^3$ confinada en el plano xy; es decir,

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), 0).$$

.

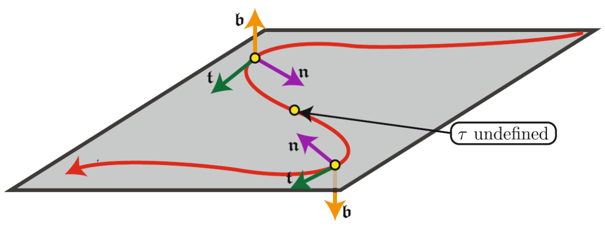


EJEMPLO (Torsión de una curva plana).
Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva en $\mathbb{R}^3$ confinada en el plano xy; es decir,

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), 0).$$

En cada instante $t \in I$ para el cual $\kappa(t) = 0$, los valores $\mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)$ y $\tau(t)$ no están definidos.

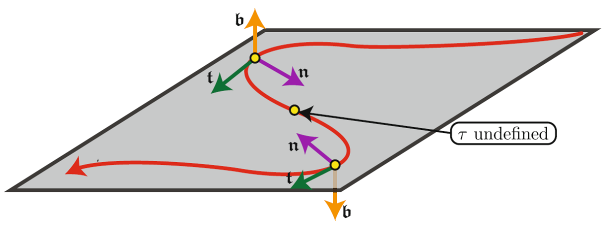
.



EJEMPLO (Torsión de una curva plana).
Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva en $\mathbb{R}^3$ confinada en el plano xy; es decir,

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), 0).$$

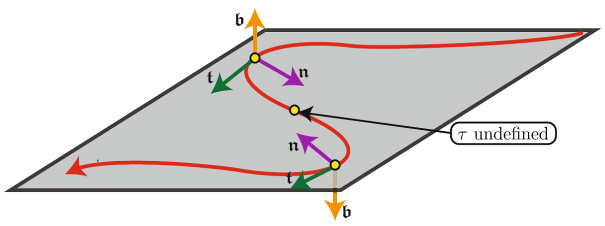
En cada instante $t \in I$ para el cual $\kappa(t) = 0$, los valores $\mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)$ y $\tau(t)$ no están definidos. Mientras que si $\kappa(t) \neq 0$, entonces $\mathbf{t}(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ se encuentran en el plano xy, por lo que su producto vectorial es $\mathbf{b}(t) = (0, 0, \pm 1)$.



EJEMPLO (Torsión de una curva plana).
Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva en $\mathbb{R}^3$ confinada en el plano xy; es decir,

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), 0).$$

En cada instante $t \in I$ para el cual $\kappa(t) = 0$, los valores $\mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)$ y $\tau(t)$ no están definidos. Mientras que si $\kappa(t) \neq 0$, entonces $\mathbf{t}(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ se encuentran en el plano xy, por lo que su producto vectorial es $\mathbf{b}(t) = (0, 0, \pm 1)$.

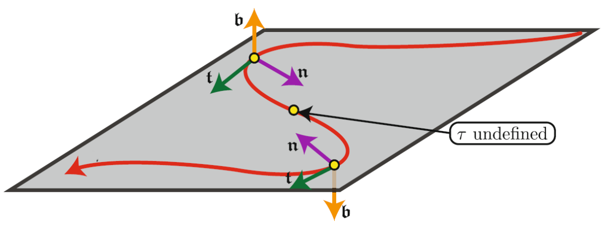


De acuerdo con la regla de la mano derecha, **el signo** $\pm$ refleja si la curva plana $t \to (x(t), y(t))$ gira en sentido horario o antihorario;

EJEMPLO (Torsión de una curva plana).
Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva en $\mathbb{R}^3$ confinada en el plano xy; es decir,

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), 0).$$

En cada instante $t \in I$ para el cual $\kappa(t) = 0$, los valores $\mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)$ y $\tau(t)$ no están definidos. Mientras que si $\kappa(t) \neq 0$, entonces $\mathbf{t}(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ se encuentran en el plano xy, por lo que su producto vectorial es $\mathbf{b}(t) = (0, 0, \pm 1)$.

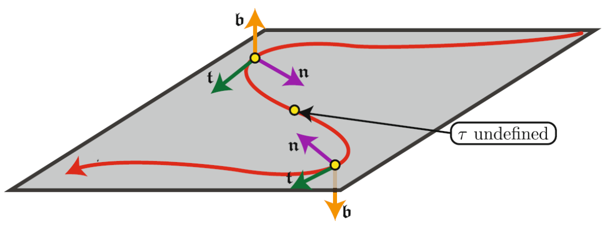


De acuerdo con la regla de la mano derecha, **el signo** $\pm$ refleja si la curva plana $t \to (x(t), y(t))$ gira en sentido horario o antihorario; en otras palabras, codifica el signo de κ_s de esta curva plana.

EJEMPLO (Torsión de una curva plana).
Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva en $\mathbb{R}^3$ confinada en el plano xy; es decir,

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), 0).$$

En cada instante $t \in I$ para el cual $\kappa(t) = 0$, los valores $\mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)$ y $\tau(t)$ no están definidos. Mientras que si $\kappa(t) \neq 0$, entonces $\mathbf{t}(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ se encuentran en el plano xy, por lo que su producto vectorial es $\mathbf{b}(t) = (0, 0, \pm 1)$.

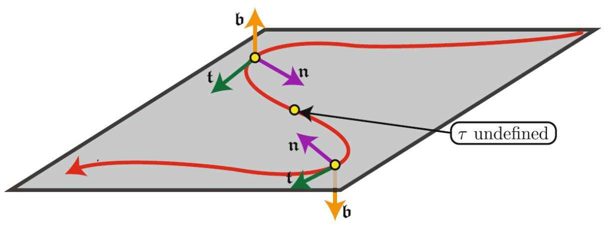


De acuerdo con la regla de la mano derecha, **el signo** $\pm$ refleja si la curva plana $t \to (x(t), y(t))$ gira en sentido horario o antihorario; en otras palabras, codifica el signo de κ_s de esta curva plana. Observe que **b** es constante en cada intervalo en el que está definida, por lo que $\tau = 0$ dondequiera que esté definida

EJEMPLO (Torsión de una curva plana).
Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva en $\mathbb{R}^3$ confinada en el plano xy; es decir,

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), 0).$$

En cada instante $t \in I$ para el cual $\kappa(t) = 0$, los valores $\mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)$ y $\tau(t)$ no están definidos. Mientras que si $\kappa(t) \neq 0$, entonces $\mathbf{t}(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ se encuentran en el plano xy, por lo que su producto vectorial es $\mathbf{b}(t) = (0, 0, \pm 1)$.

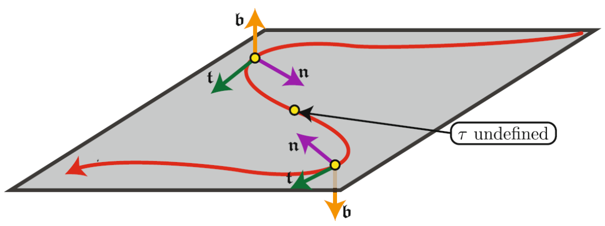


La torsión cero significa que la **inclinación del plano osculador no cambia**.

EJEMPLO (Torsión de una curva plana).
Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva en $\mathbb{R}^3$ confinada en el plano xy; es decir,

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), 0).$$

En cada instante $t \in I$ para el cual $\kappa(t) = 0$, los valores $\mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)$ y $\tau(t)$ no están definidos. Mientras que si $\kappa(t) \neq 0$, entonces $\mathbf{t}(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ se encuentran en el plano xy, por lo que su producto vectorial es $\mathbf{b}(t) = (0, 0, \pm 1)$.



La torsión cero significa que la **inclinación del plano osculador no cambia**. Como en el ejemplo anterior, este fenómeno ocurre cuando el trazo de la curva está restringido a un plano.

EJEMPLO: Sea una curva dada por

$$\alpha(t) = \left(\frac{2t+1}{t-1}, \frac{t^2}{t-1}, t+2\right)$$

EJEMPLO: Sea una curva dada por

$$\alpha(t) = \left(\frac{2t+1}{t-1}, \frac{t^2}{t-1}, t+2\right)$$

1. Halle la torsión τ de la curva α para todo $t \neq 1$. R: $\tau = 0$
2. Halle la ecuación del plano osculador en la que se encuentra la curva dada $\forall t \neq 1$. R: $P_0 : x - 3y + 3z - 5 = 0$

EJEMPLO: Sea una curva dada por

$$\alpha(t) = \left(\frac{2t+1}{t-1}, \frac{t^2}{t-1}, t+2\right)$$

1. Halle la torsión τ de la curva α para todo $t \neq 1$. R: $\tau = 0$
2. Halle la ecuación del plano osculador en la que se encuentra la curva dada $\forall t \neq 1$. R: $P_0 : x - 3y + 3z - 5 = 0$

Recuerde que

$$\tau(t) = \frac{\det\big(\alpha'(t); \alpha''(t)); \alpha'''(t)\big)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$$

EJEMPLO: Dada la curva

$$\alpha(t) = \Big(t - \sin t, 1 - \cos t, 4\sin(\frac{t}{2})\Big),$$

EJEMPLO: Dada la curva

$$\alpha(t) = \Big(t - \sin t, 1 - \cos t, 4\sin(\frac{t}{2})\Big),$$

- Halle κ y la τ de la curva α en el punto donde el plano normal principal a la curva es paralelo al plano $z = 1$.

SOLUCIÓN: $\alpha(0) = (0, 0, 0)$, $k(0) = \frac{1}{4}$, $\tau(0) = -\frac{1}{2}$

EJEMPLO: Dada la curva

$$\alpha(t) = \Big(t - \sin t, 1 - \cos t, 4\sin(\frac{t}{2})\Big),$$

- Halle κ y la τ de la curva α en el punto donde el plano normal principal a la curva es paralelo al plano $z = 1$.

SOLUCIÓN: $\alpha(0) = (0,0,0)$, $k(0) = \frac{1}{4}$, $\tau(0) = -\frac{1}{2}$

Recuerde que

$$\tau(t) = \frac{\det\big(\alpha'(t); \alpha''(t)); \alpha'''(t)\big)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$$

Proposición (Las ecuaciones de Frenet)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva regular. En cada instante* $t \in I$ *con* $\kappa(t) \neq 0$*, las derivadas de los vectores en el marco de Frenet son*

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}' &= && \|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{n} && \\
\mathbf{n}' &= -\|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{t} && && +\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{b} \\
\mathbf{b}' &= && -\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{n} &&
\end{aligned}$$

DEM:

Las ecuaciones de Frenet y interpretación dela torsión

Proposición (Las ecuaciones de Frenet)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. En cada instante $t \in I$ con $\kappa(t) \neq 0$, las derivadas de los vectores en el marco de Frenet son

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}' &= && \|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{n} & \\
\mathbf{n}' &= -\|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{t} && & +\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{b} \\
\mathbf{b}' &= && -\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{n} &
\end{aligned}$$

DEM: Recordemos que $\mathbf{t}' = \kappa\|\mathbf{v}\|\mathbf{n}$ y que $-\langle \mathbf{n}', \mathbf{t}\rangle = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}\rangle = \kappa\|\mathbf{v}'\|$,

Proposición (Las ecuaciones de Frenet)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. En cada instante $t \in I$ con $\kappa(t) \neq 0$, las derivadas de los vectores en el marco de Frenet son

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}' &= && \|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{n} && \\
\mathbf{n}' &= -\|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{t} && && +\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{b} \\
\mathbf{b}' &= && -\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{n} &&
\end{aligned}$$

DEM: Recordemos que $\mathbf{t}' = \kappa\|\mathbf{v}\|\mathbf{n}$ y que $-\langle \mathbf{n}', \mathbf{t}\rangle = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}\rangle = \kappa\|\mathbf{v}'\|$, Usando álgebra lineal sabemos que

$$\mathbf{n}' = \theta_1\mathbf{t} + \theta_2\mathbf{n} + \theta_3\mathbf{b}, \qquad \mathbf{b}' = \mu_1\mathbf{t} + \mu_2\mathbf{n} + \mu_3\mathbf{b}$$

Proposición (Las ecuaciones de Frenet)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. En cada instante $t \in I$ con $\kappa(t) \neq 0$, las derivadas de los vectores en el marco de Frenet son

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= & \|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{n} & \\ \mathbf{n}' &= -\|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{t} & & +\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= & -\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{n} & \end{aligned}$$

DEM: Recordemos que $\mathbf{t}' = \kappa\|\mathbf{v}\|\mathbf{n}$ y que $-\langle \mathbf{n}', \mathbf{t}\rangle = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}\rangle = \kappa\|\mathbf{v}'\|$, Usando álgebra lineal sabemos que

$$\mathbf{n}' = \theta_1\mathbf{t} + \theta_2\mathbf{n} + \theta_3\mathbf{b}, \qquad \mathbf{b}' = \mu_1\mathbf{t} + \mu_2\mathbf{n} + \mu_3\mathbf{b}$$

Así que hallemos θ_i, μ_i. Dado que, $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle = 1$ y $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle = 1$ entonces al derivar cada una de estas expresiones, nos lleva a afirmar que $\theta_2 = \mu_3 = 0$.

Las ecuaciones de Frenet y interpretación dela torsión

Proposición (Las ecuaciones de Frenet)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. En cada instante $t \in I$ con $\kappa(t) \neq 0$, las derivadas de los vectores en el marco de Frenet son

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= && \|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{n} && \\ \mathbf{n}' &= -\|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{t} && && +\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= && -\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{n} && \end{aligned}$$

DEM: Recordemos que $\mathbf{t}' = \kappa\|\mathbf{v}\|\mathbf{n}$ y que $-\langle \mathbf{n}', \mathbf{t}\rangle = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}\rangle = \kappa\|\mathbf{v}'\|$, Usando álgebra lineal sabemos que

$$\mathbf{n}' = \theta_1\mathbf{t} + \theta_2\mathbf{n} + \theta_3\mathbf{b}, \qquad \mathbf{b}' = \mu_1\mathbf{t} + \mu_2\mathbf{n} + \mu_3\mathbf{b}$$

Así que hallemos θ_i, μ_i. Dado que, $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle = 1$ y $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle = 1$ entonces al derivar cada una de estas expresiones, nos lleva a afirmar que $\theta_2 = \mu_3 = 0$. Observe que

$$\theta_1 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{t}\rangle \qquad \theta_3 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{b}\rangle$$

$$\mu_1 = \langle \mathbf{b}', \mathbf{t}\rangle \qquad \mu_2 = \langle \mathbf{b}', \mathbf{n}\rangle$$

Proposición (Las ecuaciones de Frenet)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. En cada instante $t \in I$ con $\kappa(t) \neq 0$, las derivadas de los vectores en el marco de Frenet son

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= && \|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{n} & \\ \mathbf{n}' &= -\|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{t} && & +\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= && -\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{n} & \end{aligned}$$

DEM: Recordemos que $\mathbf{t}' = \kappa\|\mathbf{v}\|\mathbf{n}$ y que $-\langle\mathbf{n}', \mathbf{t}\rangle = \langle\mathbf{t}', \mathbf{n}\rangle = \kappa\|\mathbf{v}'\|$, Usando álgebra lineal sabemos que

$$\mathbf{n}' = \theta_1\mathbf{t} + \theta_2\mathbf{n} + \theta_3\mathbf{b}, \qquad \mathbf{b}' = \mu_1\mathbf{t} + \mu_2\mathbf{n} + \mu_3\mathbf{b}$$

Así que hallemos θ_i, μ_i. Dado que, $\langle\mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle = 1$ y $\langle\mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle = 1$ entonces al derivar cada una de estas expresiones, nos lleva a afirmar que $\theta_2 = \mu_3 = 0$. Observe que

$$\theta_1 = \langle\mathbf{n}', \mathbf{t}\rangle = -\kappa\|\mathbf{v}\| \qquad \theta_3 = \langle\mathbf{n}', \mathbf{b}\rangle$$

$$\mu_1 = \langle\mathbf{b}', \mathbf{t}\rangle \qquad \mu_2 = \langle\mathbf{b}', \mathbf{n}\rangle$$

Proposición (Las ecuaciones de Frenet)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. En cada instante $t \in I$ con $\kappa(t) \neq 0$, las derivadas de los vectores en el marco de Frenet son

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= && \|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{n} & \\ \mathbf{n}' &= -\|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{t} && & +\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= && -\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{n} & \end{aligned}$$

DEM: Recordemos que $\mathbf{t}' = \kappa\|\mathbf{v}\|\mathbf{n}$ y que $-\langle \mathbf{n}', \mathbf{t}\rangle = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}\rangle = \kappa\|\mathbf{v}'\|$, Usando álgebra lineal sabemos que

$$\mathbf{n}' = \theta_1\mathbf{t} + \theta_2\mathbf{n} + \theta_3\mathbf{b}, \qquad \mathbf{b}' = \mu_1\mathbf{t} + \mu_2\mathbf{n} + \mu_3\mathbf{b}$$

Así que hallemos θ_i, μ_i. Dado que, $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle = 1$ y $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle = 1$ entonces al derivar cada una de estas expresiones, nos lleva a afirmar que $\theta_2 = \mu_3 = 0$. Observe que

$$\theta_1 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{t}\rangle = -\kappa\|\mathbf{v}\| \qquad \theta_3 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{b}\rangle = -\left\langle \mathbf{n}, \mathbf{b}'\right\rangle := \|\mathbf{v}\|\tau$$

$\mu_1 = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{t}\right\rangle$ $\qquad\qquad$ $\mu_2 = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{n}\right\rangle$

Proposición (Las ecuaciones de Frenet)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. En cada instante $t \in I$ con $\kappa(t) \neq 0$, las derivadas de los vectores en el marco de Frenet son

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= && \|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{n} & \\ \mathbf{n}' &= -\|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{t} && & +\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= && -\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{n} & \end{aligned}$$

DEM: Recordemos que $\mathbf{t}' = \kappa\|\mathbf{v}\|\mathbf{n}$ y que $-\langle \mathbf{n}', \mathbf{t}\rangle = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}\rangle = \kappa\|\mathbf{v}'\|$, Usando álgebra lineal sabemos que

$$\mathbf{n}' = \theta_1\mathbf{t} + \theta_2\mathbf{n} + \theta_3\mathbf{b}, \qquad \mathbf{b}' = \mu_1\mathbf{t} + \mu_2\mathbf{n} + \mu_3\mathbf{b}$$

Así que hallemos θ_i, μ_i. Dado que, $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle = 1$ y $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle = 1$ entonces al derivar cada una de estas expresiones, nos lleva a afirmar que $\theta_2 = \mu_3 = 0$. Observe que

$$\theta_1 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{t}\rangle = -\kappa\|\mathbf{v}\| \qquad \theta_3 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{b}\rangle = -\left\langle \mathbf{n}, \mathbf{b}'\right\rangle := \|\mathbf{v}\|\tau$$

$$\mu_1 = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{t}\right\rangle = -\left\langle \mathbf{b}, \mathbf{t}'\right\rangle \qquad \mu_2 = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{n}\right\rangle$$

Las ecuaciones de Frenet y interpretación dela torsión

Proposición (Las ecuaciones de Frenet)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. En cada instante $t \in I$ con $\kappa(t) \neq 0$, las derivadas de los vectores en el marco de Frenet son

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= && \|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{n} && \\ \mathbf{n}' &= -\|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{t} && && +\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= && -\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{n} && \end{aligned}$$

DEM: Recordemos que $\mathbf{t}' = \kappa\|\mathbf{v}\|\mathbf{n}$ y que $-\langle \mathbf{n}', \mathbf{t}\rangle = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}\rangle = \kappa\|\mathbf{v}'\|$, Usando álgebra lineal sabemos que

$$\mathbf{n}' = \theta_1\mathbf{t} + \theta_2\mathbf{n} + \theta_3\mathbf{b}, \qquad \mathbf{b}' = \mu_1\mathbf{t} + \mu_2\mathbf{n} + \mu_3\mathbf{b}$$

Así que hallemos θ_i, μ_i. Dado que, $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle = 1$ y $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle = 1$ entonces al derivar cada una de estas expresiones, nos lleva a afirmar que $\theta_2 = \mu_3 = 0$. Observe que

$$\theta_1 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{t}\rangle = -\kappa\|\mathbf{v}\| \qquad \theta_3 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{b}\rangle = -\left\langle \mathbf{n}, \mathbf{b}'\right\rangle := \|\mathbf{v}\|\tau$$

$$\mu_1 = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{t}\right\rangle = -\langle \mathbf{b}, \mathbf{t}'\rangle = -\langle \mathbf{b}, \kappa\|\mathbf{v}\|\mathbf{n}\rangle \qquad \mu_2 = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{n}\right\rangle$$

Proposición (Las ecuaciones de Frenet)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. En cada instante $t \in I$ con $\kappa(t) \neq 0$, las derivadas de los vectores en el marco de Frenet son

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= && \|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{n} && \\ \mathbf{n}' &= -\|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{t} && && +\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= && -\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{n} && \end{aligned}$$

DEM: Recordemos que $\mathbf{t}' = \kappa\|\mathbf{v}\|\mathbf{n}$ y que $-\langle \mathbf{n}', \mathbf{t}\rangle = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}\rangle = \kappa\|\mathbf{v}'\|$, Usando álgebra lineal sabemos que

$$\mathbf{n}' = \theta_1\mathbf{t} + \theta_2\mathbf{n} + \theta_3\mathbf{b}, \qquad \mathbf{b}' = \mu_1\mathbf{t} + \mu_2\mathbf{n} + \mu_3\mathbf{b}$$

Así que hallemos θ_i, μ_i. Dado que, $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle = 1$ y $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle = 1$ entonces al derivar cada una de estas expresiones, nos lleva a afirmar que $\theta_2 = \mu_3 = 0$. Observe que

$$\theta_1 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{t}\rangle = -\kappa\|\mathbf{v}\| \qquad \theta_3 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{b}\rangle = -\left\langle \mathbf{n}, \mathbf{b}'\right\rangle := \|\mathbf{v}\|\tau$$

$$\mu_1 = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{t}\right\rangle = -\langle \mathbf{b}, \mathbf{t}'\rangle = -\langle \mathbf{b}, \kappa\|\mathbf{v}\|\mathbf{n}\rangle = -\kappa\|\mathbf{v}\|\langle \mathbf{b}, \mathbf{n}\rangle = 0 \quad \mu_2 = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{n}\right\rangle$$

Las ecuaciones de Frenet y interpretación dela torsión

Proposición (Las ecuaciones de Frenet)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. En cada instante $t \in I$ con $\kappa(t) \neq 0$, las derivadas de los vectores en el marco de Frenet son

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{t}' & = & \|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' & = & -\|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{t} \qquad\qquad +\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' & = & -\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{n} \end{array}$$

DEM: Recordemos que $\mathbf{t}' = \kappa\|\mathbf{v}\|\mathbf{n}$ y que $-\langle \mathbf{n}', \mathbf{t}\rangle = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}\rangle = \kappa\|\mathbf{v}'\|$, Usando álgebra lineal sabemos que

$$\mathbf{n}' = \theta_1\mathbf{t} + \theta_2\mathbf{n} + \theta_3\mathbf{b}, \qquad \mathbf{b}' = \mu_1\mathbf{t} + \mu_2\mathbf{n} + \mu_3\mathbf{b}$$

Así que hallemos θ_i, μ_i. Dado que, $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle = 1$ y $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle = 1$ entonces al derivar cada una de estas expresiones, nos lleva a afirmar que $\theta_2 = \mu_3 = 0$. Observe que

$$\theta_1 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{t}\rangle = -\kappa\|\mathbf{v}\| \qquad \theta_3 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{b}\rangle = -\left\langle \mathbf{n}, \mathbf{b}'\right\rangle := \|\mathbf{v}\|\tau$$

$$\mu_1 = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{t}\right\rangle = -\langle \mathbf{b}, \mathbf{t}'\rangle = -\langle \mathbf{b}, \kappa\|\mathbf{v}\|\mathbf{n}\rangle = -\kappa\|\mathbf{v}\|\langle \mathbf{b}, \mathbf{n}\rangle = 0 \quad \mu_2 = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{n}\right\rangle = -\tau\|$$

Las ecuaciones de Frenet y interpretación dela torsión

Proposición (Las ecuaciones de Frenet)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva regular. En cada instante* $t \in I$ *con* $\kappa(t) \neq 0$*, las derivadas de los vectores en el marco de Frenet son*

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{t}' &=& \quad\quad\quad \|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &=& -\|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{t} \quad\quad\quad\quad\quad\quad + \|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &=& \quad\quad\quad -\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{n} \end{array}$$

DEM: Recordemos que $\mathbf{t}' = \kappa\|\mathbf{v}\|\mathbf{n}$ y que $-\langle \mathbf{n}', \mathbf{t}\rangle = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}\rangle = \kappa\|\mathbf{v}'\|$, Usando álgebra lineal sabemos que

$$\mathbf{n}' = \theta_1\mathbf{t} + \theta_2\mathbf{n} + \theta_3\mathbf{b}, \qquad \mathbf{b}' = \mu_1\mathbf{t} + \mu_2\mathbf{n} + \mu_3\mathbf{b}$$

Así que hallemos θ_i, μ_i. Dado que, $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle = 1$ y $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle = 1$ entonces al derivar cada una de estas expresiones, nos lleva a afirmar que $\theta_2 = \mu_3 = 0$. Observe que

$$\theta_1 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{t}\rangle = -\kappa\|\mathbf{v}\| \qquad \theta_3 = \langle \mathbf{n}', \mathbf{b}\rangle = -\left\langle \mathbf{n}, \mathbf{b}'\right\rangle := \|\mathbf{v}\|\tau$$

$$\mu_1 = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{t}\right\rangle = -\langle \mathbf{b}, \mathbf{t}'\rangle = -\langle \mathbf{b}, \kappa\|\mathbf{v}\|\mathbf{n}\rangle = -\kappa\|\mathbf{v}\|\langle \mathbf{b}, \mathbf{n}\rangle = 0 \quad \mu_2 = \left\langle \mathbf{b}', \mathbf{n}\right\rangle = -\tau\|$$

Esto concluye la demostración de la proposición. ■

Proposición (Las ecuaciones de Frenet)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. En cada instante $t \in I$ con $\kappa(t) \neq 0$, las derivadas de los vectores en el marco de Frenet son

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{t}' & = & \|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' & = & -\|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{t} \qquad +\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' & = & -\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{n} \end{array}$$

DEM:

Proposición (Las ecuaciones de Frenet)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. En cada instante $t \in I$ con $\kappa(t) \neq 0$, las derivadas de los vectores en el marco de Frenet son

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= && \|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{n} && \\ \mathbf{n}' &= -\|\mathbf{v}\|\kappa\mathbf{t} && && +\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= && -\|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{n} && \end{aligned}$$

DEM: Las **ecuaciones de Frenet** se pueden escribir simbólicamente y de forma compacta con notación matricial:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}' = \|\mathbf{v}\| \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Proposición

Una curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *con curvatura* $\kappa(t) \neq 0$ *para todo* $t \in I$*. La traza de* α *esta contenida en un plano si, y sólo si, su torsión* $\tau(t) = 0$*.*

Dem: $(\Longrightarrow)$

Proposición

Una curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura $\kappa(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. La traza de α esta contenida en un plano si, y sólo si, su torsión $\tau(t) = 0$.

Dem: ($\Longrightarrow$) Supongamos que α es plana, y sea Π el plano que la contiene.

Proposición

Una curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura $\kappa(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. La traza de α esta contenida en un plano si, y sólo si, su torsión $\tau(t) = 0$.

Dem: ($\Longrightarrow$) Supongamos que α es plana, y sea Π el plano que la contiene. Entonces

$$\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t) \subset \Pi, \quad \text{para todo } t \in I,$$

Proposición

Una curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura $\kappa(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. La traza de α esta contenida en un plano si, y sólo si, su torsión $\tau(t) = 0$.

Dem: ($\Longrightarrow$) Supongamos que α es plana, y sea Π el plano que la contiene. Entonces

$$\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t) \subset \Pi, \quad \text{para todo } t \in I,$$

por lo que $\mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t)$ es **constante**.

Proposición

Una curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura $\kappa(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. La traza de α esta contenida en un plano si, y sólo si, su torsión $\tau(t) = 0$.

Dem: ($\Longrightarrow$) Supongamos que α es plana, y sea Π el plano que la contiene. Entonces

$$\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t) \subset \Pi, \quad \text{para todo } t \in I,$$

por lo que $\mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t)$ es **constante**. En consecuencia,

$$\mathbf{b}'(t) = 0 = -\|\mathbf{v}(t)\|\tau(t)\mathbf{n}(t),$$

Proposición

Una curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura $\kappa(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. La traza de α esta contenida en un plano si, y sólo si, su torsión $\tau(t) = 0$.

Dem: ($\Longrightarrow$) Supongamos que α es plana, y sea Π el plano que la contiene. Entonces

$$\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t) \subset \Pi, \quad \text{para todo } t \in I,$$

por lo que $\mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t)$ es **constante**. En consecuencia,

$$\mathbf{b}'(t) = 0 = -\|\mathbf{v}(t)\|\tau(t)\mathbf{n}(t),$$

como α es regular $\|\mathbf{v}(t)\| \neq 0$, necesariamente

$$\tau(t) \equiv 0.$$

Proposición

Una curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura $\kappa(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. La traza de α esta contenida en un plano si, y sólo si, su torsión $\tau(t) = 0$.

Dem: $(\Longleftarrow)$

Proposición

Una curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura $\kappa(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. La traza de α esta contenida en un plano si, y sólo si, su torsión $\tau(t) = 0$.

Dem: ($\Longleftarrow$) Si $\tau(t) \equiv 0$, entonces

$$\mathbf{b}'(t) = -\|\mathbf{v}(t)\|\tau(t)\mathbf{n}(t) \equiv 0,$$

Proposición

Una curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura $\kappa(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. La traza de α esta contenida en un plano si, y sólo si, su torsión $\tau(t) = 0$.

Dem: ($\Longleftarrow$) Si $\tau(t) \equiv 0$, entonces

$$\mathbf{b}'(t) = -\|\mathbf{v}(t)\|\tau(t)\mathbf{n}(t) \equiv 0,$$

es decir, el vector binormal **b** es **constante.**

Proposición

Una curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura $\kappa(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. La traza de α esta contenida en un plano si, y sólo si, su torsión $\tau(t) = 0$.

Dem: ($\Longleftarrow$) Si $\tau(t) \equiv 0$, entonces

$$\mathbf{b}'(t) = -\|\mathbf{v}(t)\|\tau(t)\mathbf{n}(t) \equiv 0,$$

es decir, el vector binormal **b** es **constante.** Esto implica que la curva α está contenida en un plano.

Proposición

Una curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura $\kappa(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. La traza de α esta contenida en un plano si, y sólo si, su torsión $\tau(t) = 0$.

Dem: ($\Longleftarrow$) Si $\tau(t) \equiv 0$, entonces

$$\mathbf{b}'(t) = -\|\mathbf{v}(t)\|\tau(t)\mathbf{n}(t) \equiv 0,$$

es decir, el vector binormal **b** es **constante.** Esto implica que la curva α está contenida en un plano. En efecto, definiendo

$$f(t) := \langle \alpha(t), \mathbf{b} \rangle ,$$

Proposición

Una curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura $\kappa(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. La traza de α esta contenida en un plano si, y sólo si, su torsión $\tau(t) = 0$.

Dem: ($\Longleftarrow$) Si $\tau(t) \equiv 0$, entonces

$$\mathbf{b}'(t) = -\|\mathbf{v}(t)\|\tau(t)\mathbf{n}(t) \equiv 0,$$

es decir, el vector binormal $\mathbf{b}$ es **constante.** Esto implica que la curva α está contenida en un plano. En efecto, definiendo

$$f(t) := \langle \alpha(t), \mathbf{b} \rangle \,,$$

se tiene que $f'(t) = \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{b} \rangle = 0$, es decir, $f(t) = const$; escribiendo entonces

$$\mathbf{b} = (a, b, c) \quad y \quad \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$f(t) = \langle \alpha(t), \mathbf{b} \rangle = ax(t) + by(t) + cz(t) = d$$

Proposición

Una curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura $\kappa(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. La traza de α esta contenida en un plano si, y sólo si, su torsión $\tau(t) = 0$.

Dem: $(\Longleftarrow)$ Si $\tau(t) \equiv 0$, entonces

$$\mathbf{b}'(t) = -\|\mathbf{v}(t)\|\tau(t)\mathbf{n}(t) \equiv 0,$$

es decir, el vector binormal **b** es **constante.** Esto implica que la curva α está contenida en un plano. En efecto, definiendo

$$f(t) := \langle \alpha(t), \mathbf{b} \rangle \,,$$

se tiene que $f'(t) = \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{b} \rangle = 0$, es decir, $f(t) = const$; escribiendo entonces

$$\mathbf{b} = (a, b, c) \quad y \quad \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$f(t) = \langle \alpha(t), \mathbf{b} \rangle = ax(t) + by(t) + cz(t) = d$$

Por tanto la curva α verifica la ecuación de un plano. ∎

Proposición

Una curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura $\kappa(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. La traza de α esta contenida en un plano si, y sólo si, su torsión $\tau(t) = 0$.

Dem:

Proposición

Una curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura $\kappa(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. La traza de α esta contenida en un plano si, y sólo si, su torsión $\tau(t) = 0$.

Dem:

NOTA: Observese que, si la curvatura

$$\kappa(t) \equiv 0,$$

entonces α es una **recta**, y por tanto siempre es una curva plana.

Proposición

Una curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura $\kappa(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. La traza de α esta contenida en un plano si, y sólo si, su torsión $\tau(t) = 0$.

Dem:

NOTA: Observese que, si la curvatura

$$\kappa(t) \equiv 0,$$

entonces α es una **recta**, y por tanto siempre es una curva plana.

Este caso se excluye en el enunciado de la proposición porque, si $\kappa(t) = 0$, **la torsión no puede definirse**, y el resultado no tendría sentido.

$\boxed{\textbf{Análisis de la Torsión}}$ Describamos con más precisión cómo la torsión mide "**lo que falla**" para que de la traza de α viva en un solo plano.

$\boxed{\textbf{Análisis de la Torsión}}$ Describamos con más precisión cómo la torsión mide "**lo que falla**" para que de la traza de α viva en un solo plano.

- Sea $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva p.p.a, y que $t_0 \in I$ con $\kappa(t_0) \neq 0$.

Análisis de la Torsión Describamos con más precisión cómo la torsión mide "**lo que falla**" para que de la traza de α viva en un solo plano.

- Sea $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva p.p.a, y que $t_0 \in I$ con $\kappa(t_0) \neq 0$.
- Vimos en días pasados que **la traza del 2-polinomio de Taylor** para γ en t_0 es una parábola en el plano osculador (trasladado).

Análisis de la Torsión Describamos con más precisión cómo la torsión mide "**lo que falla**" para que de la traza de α viva en un solo plano.

- Sea $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva p.p.a, y que $t_0 \in I$ con $\kappa(t_0) \neq 0$.
- Vimos en días pasados que **la traza del 2-polinomio de Taylor** para γ en t_0 es una parábola en el plano osculador (trasladado).
- Calcular la torsión implica tomar **tres derivadas**. Si $\tau(t_0) \neq 0$, demostraremos que el 3-polinomio de Taylor para γ en t_0 **abandona** este plano osculador.

Análisis de la Torsión Describamos con más precisión cómo la torsión mide "**lo que falla**" para que de la traza de α viva en un solo plano.

- Sea $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva p.p.a, y que $t_0 \in I$ con $\kappa(t_0) \neq 0$.
- Vimos en días pasados que **la traza del 2-polinomio de Taylor** para γ en t_0 es una parábola en el plano osculador (trasladado).
- Calcular la torsión implica tomar **tres derivadas**. Si $\tau(t_0) \neq 0$, demostraremos que el 3-polinomio de Taylor para γ en t_0 **abandona** este plano osculador.
- De hecho, el signo de $\tau(t_0)$ significará si abandona cayendo por debajo o elevándose por encima de este plano osculador.

Análisis de la Torsión Describamos con más precisión cómo la torsión mide "**lo que falla**" para que de la traza de α viva en un solo plano.

- Sea $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva p.p.a, y que $t_0 \in I$ con $\kappa(t_0) \neq 0$.
- Vimos en días pasados que **la traza del 2-polinomio de Taylor** para γ en t_0 es una parábola en el plano osculador (trasladado).
- Calcular la torsión implica tomar **tres derivadas**. Si $\tau(t_0) \neq 0$, demostraremos que el 3-polinomio de Taylor para γ en t_0 **abandona** este plano osculador.
- De hecho, el signo de $\tau(t_0)$ significará si abandona cayendo por debajo o elevándose por encima de este plano osculador.

El **3-polinomio de Taylor** en $t_0 \in I$ da

$$D(h) = \gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0) \approx h\gamma'(t_0) + \frac{h^2}{2}\gamma''(t_0) + \frac{h^3}{2}\gamma'''(t_0).$$

Análisis de la Torsión Describamos con más precisión cómo la torsión mide "**lo que falla**" para que de la traza de α viva en un solo plano.

- Sea $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva p.p.a, y que $t_0 \in I$ con $\kappa(t_0) \neq 0$.
- Vimos en días pasados que **la traza del 2-polinomio de Taylor** para γ en t_0 es una parábola en el plano osculador (trasladado).
- Calcular la torsión implica tomar **tres derivadas**. Si $\tau(t_0) \neq 0$, demostraremos que el 3-polinomio de Taylor para γ en t_0 **abandona** este plano osculador.
- De hecho, el signo de $\tau(t_0)$ significará si abandona cayendo por debajo o elevándose por encima de este plano osculador.

El **3-polinomio de Taylor** en $t_0 \in I$ da

$$D(h) = \gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0) \approx h\gamma'(t_0) + \frac{h^2}{2}\gamma''(t_0) + \frac{h^3}{2}\gamma'''(t_0).$$

Cuando usemos $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, nos referimos al momento t_0. Observe que

$$\begin{aligned}
\gamma' &= 1\mathbf{t}, \\
\gamma'' &= \kappa\mathbf{n}, \\
\gamma''' &= (\kappa\mathbf{n})' = \kappa'\mathbf{n} + \kappa\mathbf{n}' = \kappa'\mathbf{n} + \kappa(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) = \kappa(-\kappa\mathbf{t} + \kappa\tau\mathbf{b}) \\
&= \kappa'\mathbf{n} - \kappa^2\mathbf{t} + \kappa\tau\mathbf{b}
\end{aligned}$$

Luego, 3-polinomio de Taylor para los componentes de $\mathbf{D}(h)$

$$
\begin{aligned}
D(h) &\approx h1\mathbf{t} + \frac{h^2}{2}\kappa\mathbf{n} + \frac{h^3}{6}\Big(\kappa'\mathbf{n} - \kappa^2\mathbf{t} + \kappa\tau\mathbf{b}\Big). \\
&= \Big(h - \frac{\kappa^2}{6}h^3\Big)\mathbf{t} + \Big(\frac{\kappa}{2}h^2 + \frac{\kappa'}{6}h^3\Big)\mathbf{n} + \Big(\frac{\kappa\tau}{6}h^3\Big)\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

Luego, 3-polinomio de Taylor para los componentes de $\mathbf{D}(h)$

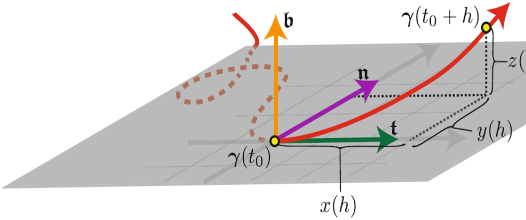
$$
\begin{aligned}
D(h) &\approx h1\mathbf{t} + \frac{h^2}{2}\kappa\mathbf{n} + \frac{h^3}{6}\Big(\kappa'\mathbf{n} - \kappa^2\mathbf{t} + \kappa\tau\mathbf{b}\Big). \\
&= \left(h - \frac{\kappa^2}{6}h^3\right)\mathbf{t} + \left(\frac{\kappa}{2}h^2 + \frac{\kappa'}{6}h^3\right)\mathbf{n} + \left(\frac{\kappa\tau}{6}h^3\right)\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

en las direcciones de los vectores del marco de Frenet son:

$$x(h) = \langle \mathbf{D}(h), \mathbf{t}\rangle \approx h - \frac{\kappa^2}{6}h^3,$$

$$y(h) = \langle \mathbf{D}(h), \mathbf{n}\rangle \approx \frac{\kappa}{2}h^2 + \frac{\kappa'}{6}h^3$$

$$z(h) = \langle \mathbf{D}(h), \mathbf{b}\rangle \approx \frac{\kappa\tau}{6}h^3.$$

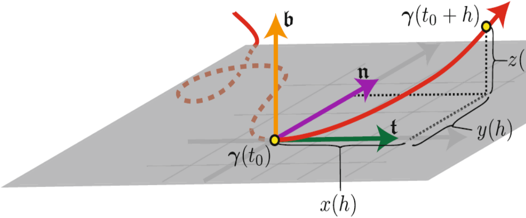


Luego, 3-polinomio de Taylor para los componentes de $\mathbf{D}(h)$

$$D(h) \approx h1\mathbf{t} + \frac{h^2}{2}\kappa\mathbf{n} + \frac{h^3}{6}\left(\kappa'\mathbf{n} - \kappa^2\mathbf{t} + \kappa\tau\mathbf{b}\right).$$
$$= \left(h - \frac{\kappa^2}{6}h^3\right)\mathbf{t} + \left(\frac{\kappa}{2}h^2 + \frac{\kappa'}{6}h^3\right)\mathbf{n} + \left(\frac{\kappa\tau}{6}h^3\right)\mathbf{b}$$

en las direcciones de los vectores del marco de Frenet son:

$$x(h) = \langle \mathbf{D}(h), \mathbf{t}\rangle \approx h - \frac{\kappa^2}{6}h^3,$$
$$y(h) = \langle \mathbf{D}(h), \mathbf{n}\rangle \approx \frac{\kappa}{2}h^2 + \frac{\kappa'}{6}h^3$$
$$z(h) = \langle \mathbf{D}(h), \mathbf{b}\rangle \approx \frac{\kappa\tau}{6}h^3.$$



Las etiquetas $x(h)$, $y(h)$ y $z(h)$ son **apropiadas** si imaginas que reposicionas e inclinas tu cabeza hacia un punto de observación desde el cual parece que $\gamma(t_0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{t} = (1,0,0)$, $\mathbf{n} = (0,1,0)$ y $\mathbf{b} = (0,0,1)$.

Luego, 3-polinomio de Taylor para los componentes de $\mathbf{D}(h)$

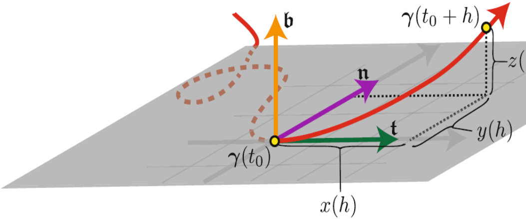
$$
\begin{aligned}
D(h) &\approx h1\mathbf{t} + \frac{h^2}{2}\kappa\mathbf{n} + \frac{h^3}{6}\Big(\kappa'\mathbf{n} - \kappa^2\mathbf{t} + \kappa\tau\mathbf{b}\Big).\\
&= \left(h - \frac{\kappa^2}{6}h^3\right)\mathbf{t} + \left(\frac{\kappa}{2}h^2 + \frac{\kappa'}{6}h^3\right)\mathbf{n} + \left(\frac{\kappa\tau}{6}h^3\right)\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

en las direcciones de los vectores del marco de Frenet son:

$$x(h) = \langle \mathbf{D}(h), \mathbf{t}\rangle \approx h - \frac{\kappa^2}{6}h^3,$$

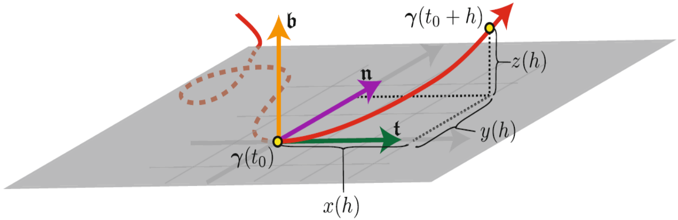
$$y(h) = \langle \mathbf{D}(h), \mathbf{n}\rangle \approx \frac{\kappa}{2}h^2 + \frac{\kappa'}{6}h^3$$

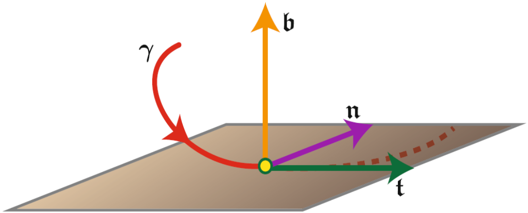
$$z(h) = \langle \mathbf{D}(h), \mathbf{b}\rangle \approx \frac{\kappa\tau}{6}h^3.$$



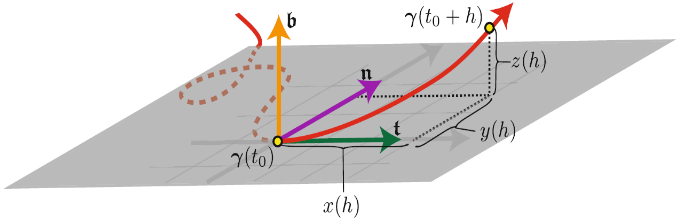
Como $\kappa > 0$, el 3-polinomio de Taylor para $z(h)$ implica que

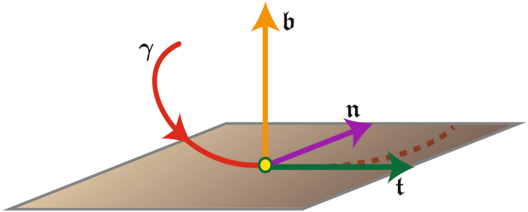
- si $\tau > 0$, entonces $z(h) > 0$ para h positiva suficientemente pequeña.
- si $\tau < 0$, entonces $z(h) < 0$ para h positiva suficientemente pequeña.





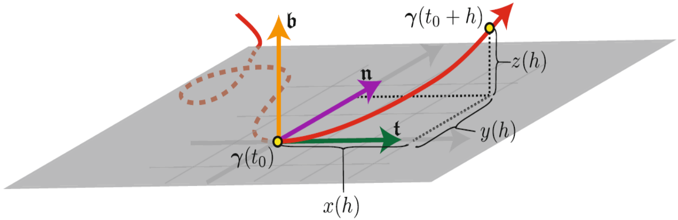
La primera figura ilustra la **torsión positiva**, mientras que la segunda figura ilustra la **torsión negativa**.

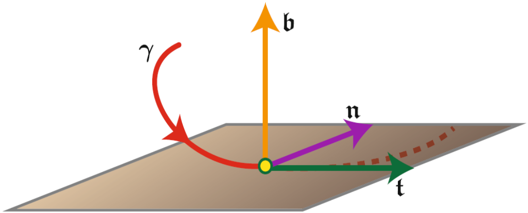




La primera figura ilustra la **torsión positiva**, mientras que la segunda figura ilustra la **torsión negativa**.

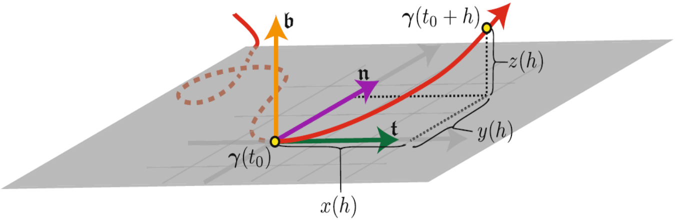
- En resumen, la torsión positiva en t_0 implica que γ pasa a través del plano osculador (trasladado) en t_0 **desde abajo hacia arriba**.

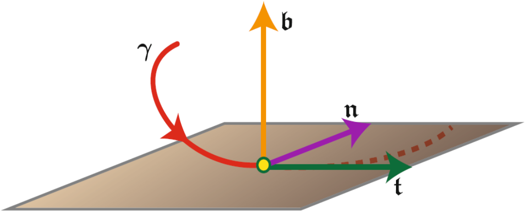




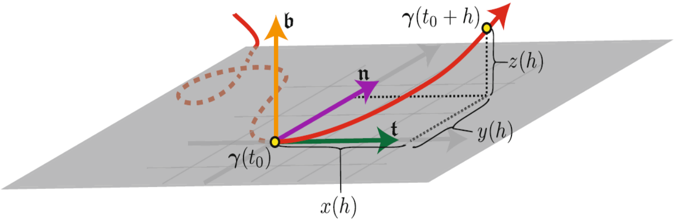
La primera figura ilustra la **torsión positiva**, mientras que la segunda figura ilustra la **torsión negativa**.

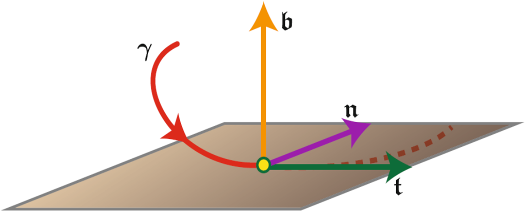
- En resumen, la torsión positiva en t_0 implica que γ pasa a través del plano osculador (trasladado) en t_0 **desde abajo hacia arriba**.
- La torsión negativa implica que pasa de **arriba hacia abajo**. Aquí, "*arriba*" realmente significa en la dirección de **b**;



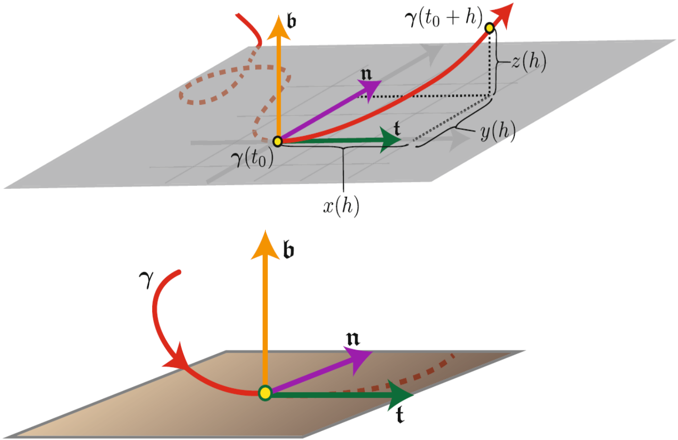


Metáfora del paraguas, es el lado sombreado por el paraguas.

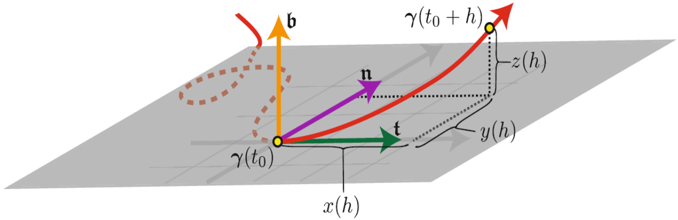


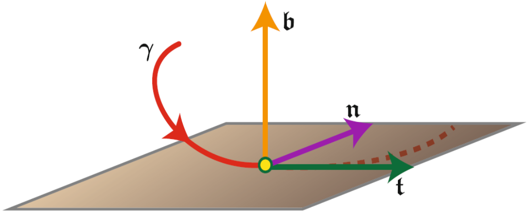


Metáfora del paraguas, es el lado sombreado por el paraguas. Si la curva con $\tau > 0$, se reparametrizara $h < 0$, seguiría teniendo $\tau > 0$,



Metáfora del paraguas, es el lado sombreado por el paraguas. Si la curva con $\tau > 0$, se reparametrizara $h < 0$, seguiría teniendo $\tau > 0$, porque **b** *cambiaría de signo, por lo que el paraguas* **sombrearía el otro lado** *del plano osculador, por lo que la curva seguiría pasando del lado no sombreado al lado sombreado.*





((**Recuerde el truco**)) de que "La torsión positiva implica que la curva pasa por el plano osculador desde abajo".

Una estrategia recurrente en este capítulo es "**inclinar la cabeza**" hacia otro marco de referencia; es decir, utilizar un conjunto ortonormal adaptado al problema en cuestión.

Una estrategia recurrente en este capítulo es "**inclinar la cabeza**" hacia otro marco de referencia; es decir, utilizar un conjunto ortonormal adaptado al problema en cuestión. Una forma concreta de implementar esta estrategia es aplicar un movimiento rígido.

Una estrategia recurrente en este capítulo es "**inclinar la cabeza**" hacia otro marco de referencia; es decir, utilizar un conjunto ortonormal adaptado al problema en cuestión. Una forma concreta de implementar esta estrategia es aplicar un movimiento rígido.

Por ejemplo, podríamos re-describir el cálculo del polinomio de Taylor de la sección anterior comenzando así: "Después de aplicar un movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\gamma(t_0) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{t} = (1,0,0), \qquad \mathbf{n} = (0,1,0)."$$

Una estrategia recurrente en este capítulo es "**inclinar la cabeza**" hacia otro marco de referencia; es decir, utilizar un conjunto ortonormal adaptado al problema en cuestión. Una forma concreta de implementar esta estrategia es aplicar un movimiento rígido.

Por ejemplo, podríamos re-describir el cálculo del polinomio de Taylor de la sección anterior comenzando así: "Después de aplicar un movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\gamma(t_0) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{t} = (1,0,0), \qquad \mathbf{n} = (0,1,0).''$$

Definición (Movimiento Rígido)

Una aplicación $\mathbf{R} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *se dice que es movimiento rígido de* $\mathbb{R}^n$ *si* **conserva las distancias**; *es decir, para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{dist}(\mathbf{R}(\mathbf{p}), \mathbf{R}(\mathbf{q})) = \operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

Una estrategia recurrente en este capítulo es "**inclinar la cabeza**" hacia otro marco de referencia; es decir, utilizar un conjunto ortonormal adaptado al problema en cuestión. Una forma concreta de implementar esta estrategia es aplicar un movimiento rígido.

Por ejemplo, podríamos re-describir el cálculo del polinomio de Taylor de la sección anterior comenzando así: "Después de aplicar un movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\gamma(t_0) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{t} = (1,0,0), \qquad \mathbf{n} = (0,1,0).''$$

Definición (Movimiento Rígido)

Una aplicación $\mathbf{R} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *se dice que es movimiento rígido de* $\mathbb{R}^n$ *si* **conserva las distancias**; *es decir, para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$

$$|\mathbf{R}(\mathbf{p}) - \mathbf{R}(\mathbf{q})| = \mathrm{dist}(\mathbf{R}(\mathbf{p}), \mathbf{R}(\mathbf{q})) = \mathrm{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$$

Una clase importante de movimientos rígidos es la clase de los **movimientos lineales**.

Una clase importante de movimientos rígidos es la clase de los **movimientos lineales**. Como las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ se representan mediante **matrices**, debemos establecer alguna notación para analizar las matrices.

Una clase importante de movimientos rígidos es la clase de los **movimientos lineales**. Como las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ se representan mediante **matrices**, debemos establecer alguna notación para analizar las matrices.

Sea $\mathcal{M}_n = \left\{\mathbf{A} : \mathbf{A} \text{ es una matriz real } n \times n\right\}$. Si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$, sea

$$\mathbf{L_A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{L_A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Una clase importante de movimientos rígidos es la clase de los **movimientos lineales**. Como las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ se representan mediante **matrices**, debemos establecer alguna notación para analizar las matrices.

Sea $\mathcal{M}_n = \left\{\mathbf{A} : \mathbf{A} \text{ es una matriz real } n \times n\right\}$. Si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$, sea

$$\mathbf{L_A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{L_A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

la trasformación lineal $\mathbf{L_A}$ es la "multiplicación por la izquierda por $\mathbf{A}$".

Una clase importante de movimientos rígidos es la clase de los **movimientos lineales**. Como las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ se representan mediante **matrices**, debemos establecer alguna notación para analizar las matrices.

Sea $\mathcal{M}_n = \{\mathbf{A} : \mathbf{A} \text{ es una matriz real } n \times n\}$. Si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$, sea

$$\mathbf{L_A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{L_A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

la trasformación lineal $\mathbf{L_A}$ es la "multiplicación por la izquierda por $\mathbf{A}$". ((**también llamada transformación matricial**)) En otras palabras, $\mathbf{A}$ es la matriz que representa la transformación lineal $\mathbf{L_A}$ con respecto a la base ortonormal estándar de $\mathbb{R}^n$.

Una clase importante de movimientos rígidos es la clase de los **movimientos lineales**. Como las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ se representan mediante **matrices**, debemos establecer alguna notación para analizar las matrices.

Sea $\mathcal{M}_n = \{\mathbf{A} : \mathbf{A} \text{ es una matriz real } n \times n\}$. Si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$, sea

$$\mathbf{L_A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{L_A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

la trasformación lineal $\mathbf{L_A}$ es la “multiplicación por la izquierda por $\mathbf{A}$”.

Una clase importante de movimientos rígidos es la clase de los **movimientos lineales**. Como las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ se representan mediante **matrices**, debemos establecer alguna notación para analizar las matrices.

Sea $\mathcal{M}_n = \{\mathbf{A} : \mathbf{A} \text{ es una matriz real } n \times n\}$. Si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$, sea

$$\mathbf{L_A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{L_A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

la trasformación lineal $\mathbf{L_A}$ es la "multiplicación por la izquierda por $\mathbf{A}$".

Qué propiedad especial debe tener $\mathbf{A}$ para que $\mathbf{L_A}$ sea un movimiento rígido

Una clase importante de movimientos rígidos es la clase de los **movimientos lineales**. Como las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ se representan mediante **matrices**, debemos establecer alguna notación para analizar las matrices.

Sea $\mathcal{M}_n = \{\mathbf{A} : \mathbf{A} \text{ es una matriz real } n \times n\}$. Si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$, sea

$$\mathbf{L_A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{L_A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

la trasformación lineal $\mathbf{L_A}$ es la "multiplicación por la izquierda por $\mathbf{A}$".

Qué propiedad especial debe tener $\mathbf{A}$ para que $\mathbf{L_A}$ sea un movimiento rígido

Necesitamos al menos que

$$|\mathbf{L}_A(\mathbf{x}) - \mathbf{L_A}(\mathbf{0})| = |\mathbf{x} - \mathbf{0}| \qquad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Una clase importante de movimientos rígidos es la clase de los **movimientos lineales**. Como las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ se representan mediante **matrices**, debemos establecer alguna notación para analizar las matrices.

Sea $\mathcal{M}_n = \{\mathbf{A} : \mathbf{A} \text{ es una matriz real } n \times n\}$. Si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$, sea

$$\mathbf{L}_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

la trasformación lineal $\mathbf{L}_{\mathbf{A}}$ es la "multiplicación por la izquierda por $\mathbf{A}$".

Qué propiedad especial debe tener $\mathbf{A}$ para que $\mathbf{L}_{\mathbf{A}}$ sea un movimiento rígido

Necesitamos al menos que

$$|\mathbf{L}_A(\mathbf{x}) - \mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{0})| = |\mathbf{x} - \mathbf{0}| \qquad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Dado que las transformaciones lineales fijan el origen ($\mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$), esto se convierte en $|\mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})| = |\mathbf{x}|$.

Una clase importante de movimientos rígidos es la clase de los **movimientos lineales**. Como las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ se representan mediante **matrices**, debemos establecer alguna notación para analizar las matrices.

Sea $\mathcal{M}_n = \{\mathbf{A} : \mathbf{A} \text{ es una matriz real } n \times n\}$. Si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$, sea

$$\mathbf{L_A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{L_A}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$$

la trasformación lineal $\mathbf{L_A}$ es la "multiplicación por la izquierda por $\mathbf{A}$".

Qué propiedad especial debe tener $\mathbf{A}$ para que $\mathbf{L_A}$ sea un movimiento rígido

Necesitamos al menos que

$$|\mathbf{L}_A(\mathbf{x}) - \mathbf{L_A}(\mathbf{0})| = |\mathbf{x} - \mathbf{0}| \qquad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Dado que las transformaciones lineales fijan el origen ($\mathbf{L_A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$), esto se convierte en $|\mathbf{L_A}(\mathbf{x})| = |\mathbf{x}|$. Ahora observe el siguiente razonamiento

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = |\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{L_A}(\mathbf{x})|^2 = |\mathbf{Ax}|^2 = \langle \mathbf{Ax}, \mathbf{Ax} \rangle = (\mathbf{Ax})^T\mathbf{Ax} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Ax}$$

Una clase importante de movimientos rígidos es la clase de los **movimientos lineales**. Como las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ se representan mediante **matrices**, debemos establecer alguna notación para analizar las matrices.

Sea $\mathcal{M}_n = \{\mathbf{A} : \mathbf{A} \text{ es una matriz real } n \times n\}$. Si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$, sea

$$\mathbf{L_A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{L_A}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$$

la trasformación lineal $\mathbf{L_A}$ es la "multiplicación por la izquierda por $\mathbf{A}$".

Qué propiedad especial debe tener $\mathbf{A}$ para que $\mathbf{L_A}$ sea un movimiento rígido

Necesitamos al menos que

$$|\mathbf{L}_A(\mathbf{x}) - \mathbf{L_A}(\mathbf{0})| = |\mathbf{x} - \mathbf{0}| \qquad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Dado que las transformaciones lineales fijan el origen ($\mathbf{L_A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$), esto se convierte en $|\mathbf{L_A}(\mathbf{x})| = |\mathbf{x}|$. Ahora observe el siguiente razonamiento

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = |\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{L_A}(\mathbf{x})|^2 = |\mathbf{Ax}|^2 = \langle \mathbf{Ax}, \mathbf{Ax} \rangle = (\mathbf{Ax})^T\mathbf{Ax} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Ax}$$

como esto es cierto para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ podemos afirmar que $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$.

Una clase importante de movimientos rígidos es la clase de los **movimientos lineales**. Como las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ se representan mediante **matrices**, debemos establecer alguna notación para analizar las matrices.

Sea $\mathcal{M}_n = \{\mathbf{A} : \mathbf{A} \text{ es una matriz real } n \times n\}$. Si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$, sea

$$\mathbf{L_A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{L_A}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$$

la trasformación lineal $\mathbf{L_A}$ es la "multiplicación por la izquierda por $\mathbf{A}$".

Qué propiedad especial debe tener $\mathbf{A}$ para que $\mathbf{L_A}$ sea un movimiento rígido

Necesitamos al menos que

$$|\mathbf{L}_A(\mathbf{x}) - \mathbf{L_A}(\mathbf{0})| = |\mathbf{x} - \mathbf{0}| \qquad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Dado que las transformaciones lineales fijan el origen ($\mathbf{L_A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$), esto se convierte en $|\mathbf{L_A}(\mathbf{x})| = |\mathbf{x}|$. Ahora observe el siguiente razonamiento

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = |\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{L_A}(\mathbf{x})|^2 = |\mathbf{Ax}|^2 = \langle \mathbf{Ax}, \mathbf{Ax} \rangle = (\mathbf{Ax})^T\mathbf{Ax} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Ax}$$

como esto es cierto para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ podemos afirmar que $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$. En otras palabras, $\mathbf{A}$ sea una matriz ortogonal.

Definición (Matriz ortogonal)

Una matriz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ *se llama ortogonal si*

$$|\mathbf{L_A}(\mathbf{p})| = |\mathbf{p}|$$

para todo $p \in \mathbb{R}^n$. *El conjunto de todas las matrices ortogonales en* $\mathcal{M}_n$ *se denota por* $O(n)$.

Definición (Matriz ortogonal)

Una matriz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ *se llama ortogonal si*

$$|\mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{p})| = |\mathbf{p}|$$

para todo $p \in \mathbb{R}^n$. *El conjunto de todas las matrices ortogonales en* $\mathcal{M}_n$ *se denota por* $O(n)$.

Por definición, $\mathbf{A}$ se llama ortogonal si $\mathbf{L}_A$ preserva las normas,

Definición (Matriz ortogonal)

Una matriz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ *se llama ortogonal si*

$$|\mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{p})| = |\mathbf{p}|$$

para todo $p \in \mathbb{R}^n$*. El conjunto de todas las matrices ortogonales en* $\mathcal{M}_n$ *se denota por* $O(n)$*.*

Por definición, $\mathbf{A}$ se llama ortogonal si $\mathbf{L}_A$ preserva las normas, que es lo mismo que **preservar las distancias al origen**;

Definición (Matriz ortogonal)

Una matriz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ *se llama ortogonal si*

$$|\mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{p})| = |\mathbf{p}|$$

para todo $p \in \mathbb{R}^n$*. El conjunto de todas las matrices ortogonales en* $\mathcal{M}_n$ *se denota por* $O(n)$*.*

Por definición, $\mathbf{A}$ se llama ortogonal si $\mathbf{L}_A$ preserva las normas, que es lo mismo que **preservar las distancias al origen**; en otras palabras, $\mathbf{L}_{\mathbf{A}}$ envía cada punto de la **esfera**,

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{p}| = 1\},$$

a otro punto de esta esfera.

Definición (Matriz ortogonal)

Una matriz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ *se llama ortogonal si*

$$|\mathbf{L}_\mathbf{A}(\mathbf{p})| = |\mathbf{p}|$$

para todo $p \in \mathbb{R}^n$. *El conjunto de todas las matrices ortogonales en* $\mathcal{M}_n$ *se denota por* $O(n)$.

Por definición, $\mathbf{A}$ se llama ortogonal si $\mathbf{L}_A$ preserva las normas, que es lo mismo que **preservar las distancias al origen**; en otras palabras, $\mathbf{L}_\mathbf{A}$ envía cada punto de la **esfera**,

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{p}| = 1\},$$

a otro punto de esta esfera. Junto con el hecho de que $\mathbf{L}_\mathbf{A}$ es una transformación lineal, demostraremos que esto obliga a $\mathbf{L}_\mathbf{A}$ a preservar **todas** las distancias.

Definición (Matriz ortogonal)

Una matriz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ *se llama ortogonal si*

$$|\mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{p})| = |\mathbf{p}|$$

para todo $p \in \mathbb{R}^n$*. El conjunto de todas las matrices ortogonales en* $\mathcal{M}_n$ *se denota por* $O(n)$*.*

Por definición, **A** se llama ortogonal si $\mathbf{L}_A$ preserva las normas, que es lo mismo que **preservar las distancias al origen**; en otras palabras, $\mathbf{L}_{\mathbf{A}}$ envía cada punto de la **esfera**,

$$\mathbb{S}^{n-1} = \left\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{p}| = 1\right\},$$

a otro punto de esta esfera. Junto con el hecho de que $\mathbf{L}_{\mathbf{A}}$ es una transformación lineal, demostraremos que esto obliga a $\mathbf{L}_{\mathbf{A}}$ a preservar **todas** las distancias.

Esta afirmación, entre otras, se establece mediante la siguiente proposición:

Proposición (Propiedades asociado a un Movimiento Rígido)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

DEM:

Proposición (Propiedades asociado a un Movimiento Rígido)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*

DEM:

Proposición (Propiedades asociado a un Movimiento Rígido)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*

DEM:

Proposición (**Propiedades asociado a un Movimiento Rígido**)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

DEM:

Proposición (**Propiedades asociado a un Movimiento Rígido**)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$*. Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$*.*
4. $\mathbf{L_A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$*, entonces* $\{\mathbf{L_A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*

DEM:

Proposición (Propiedades asociado a un Movimiento Rígido)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mathbf{L_A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\{\mathbf{L_A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$.

DEM:

Proposición (Propiedades asociado a un Movimiento Rígido)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$*. Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L}_\mathbf{A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L}_\mathbf{A}(\mathbf{p}), \mathbf{L}_\mathbf{A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$*.*
4. $\mathbf{L}_\mathbf{A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$*, entonces* $\{\mathbf{L}_\mathbf{A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L}_\mathbf{A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L}_\mathbf{A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$*.*
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$*, donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$*.*

DEM:

Proposición (**Propiedades asociado a un Movimiento Rígido**)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L}_{\mathbf{A}}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}), \mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mathbf{L}_{\mathbf{A}}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\{\mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$.
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$, *donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$.

DEM: (1)⇔(2)

Proposición (Propiedades asociado a un Movimiento Rígido)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mathbf{L_A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\{\mathbf{L_A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$.
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$, *donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$.

DEM: (1)$\Leftrightarrow$(2) Si $\mathbf{L_A}$ es un movimiento rígido, entonces para todo $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $|\mathbf{L_A}\mathbf{p}| = |\mathbf{p}|$.

Proposición (Propiedades asociado a un Movimiento Rígido)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mathbf{L_A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\{\mathbf{L_A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$.
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$, *donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$.

DEM: (1)⇔(2) Si $\mathbf{L_A}$ es un movimiento rígido, entonces para todo $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $|\mathbf{L_A}\mathbf{p}| = |\mathbf{p}|$. En efecto,

$$|\mathbf{L_A}(\mathbf{p})| = |\mathbf{L_A}(\mathbf{p}) - \mathbf{0}| = |\mathbf{L_A}(\mathbf{p}) - \mathbf{L_A}(\mathbf{0})| \overbrace{=}^{hip} |\mathbf{p} - \mathbf{0}| = |\mathbf{p}|,$$

Proposición (Propiedades asociado a un Movimiento Rígido)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mathbf{L_A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\{\mathbf{L_A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$.
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$, *donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$.

DEM: (1)⇔(2) Si $\mathbf{L_A}$ es un movimiento rígido, entonces para todo $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $|\mathbf{L_A}\mathbf{p}| = |\mathbf{p}|$. En efecto,

$$|\mathbf{L_A}(\mathbf{p})| = |\mathbf{L_A}(\mathbf{p}) - \mathbf{0}| = |\mathbf{L_A}(\mathbf{p}) - \mathbf{L_A}(\mathbf{0})| \overbrace{=}^{hip} |\mathbf{p} - \mathbf{0}| = |\mathbf{p}|,$$

por lo que $\mathbf{A}$ es ortogonal.

Proposición (Propiedades asociado a un Movimiento Rígido)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mathbf{L_A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\{\mathbf{L_A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$.
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$, *donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$.

DEM: (1)⇔(2) Si $\mathbf{L_A}$ es un movimiento rígido, entonces para todo $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $|\mathbf{L_A}\mathbf{p}| = |\mathbf{p}|$. En efecto,

$$|\mathbf{L_A}(\mathbf{p})| = |\mathbf{L_A}(\mathbf{p}) - \mathbf{0}| = |\mathbf{L_A}(\mathbf{p}) - \mathbf{L_A}(\mathbf{0})| \overbrace{=}^{hip} |\mathbf{p} - \mathbf{0}| = |\mathbf{p}|,$$

por lo que $\mathbf{A}$ es ortogonal. Por el contrario, si $\mathbf{A}$ es ortogonal, entonces para todo $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$,

$$|\mathbf{L_A}(\mathbf{p} - \mathbf{q})| \overbrace{=}^{hip} |\mathbf{p} - \mathbf{q}|,$$

Proposición (Propiedades asociado a un Movimiento Rígido)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$*. Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$*.*
4. $\mathbf{L_A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$*, entonces* $\{\mathbf{L_A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$*.*
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$*, donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$*.*

DEM: (1)⇔(2) Si $\mathbf{L_A}$ es un movimiento rígido, entonces para todo $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $|\mathbf{L_A p}| = |\mathbf{p}|$. En efecto,

$$|\mathbf{L_A}(\mathbf{p})| = |\mathbf{L_A}(\mathbf{p}) - \mathbf{0}| = |\mathbf{L_A}(\mathbf{p}) - \mathbf{L_A}(\mathbf{0})| \overbrace{=}^{hip} |\mathbf{p} - \mathbf{0}| = |\mathbf{p}|,$$

por lo que $\mathbf{A}$ es ortogonal. Por el contrario, si $\mathbf{A}$ es ortogonal, entonces para todo $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$,

$$|\mathbf{L_A}(\mathbf{p}) - \mathbf{L_A}(\mathbf{q})| = |\mathbf{L_A}(\mathbf{p} - \mathbf{q})| \overbrace{=}^{hip} |\mathbf{p} - \mathbf{q}|,$$

Proposición (**Propiedades asociado a un Movimiento Rígido**)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mathbf{L_A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\{\mathbf{L_A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$.
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$, *donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$.

DEM: (1)⇔(2) Si $\mathbf{L_A}$ es un movimiento rígido, entonces para todo $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $|\mathbf{L_A p}| = |\mathbf{p}|$. En efecto,

$$|\mathbf{L_A}(\mathbf{p})| = |\mathbf{L_A}(\mathbf{p}) - \mathbf{0}| = |\mathbf{L_A}(\mathbf{p}) - \mathbf{L_A}(\mathbf{0})| \overbrace{=}^{hip} |\mathbf{p} - \mathbf{0}| = |\mathbf{p}|,$$

por lo que $\mathbf{A}$ es ortogonal. Por el contrario, si $\mathbf{A}$ es ortogonal, entonces para todo $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$,

$$|\mathbf{L_A}(\mathbf{p}) - \mathbf{L_A}(\mathbf{q})| = |\mathbf{L_A}(\mathbf{p} - \mathbf{q})| \overbrace{=}^{hip} |\mathbf{p} - \mathbf{q}|,$$

por lo que $\mathbf{L_A}$ es un **movimiento rígido**.

Proposición (Propiedades asociado a un Movimiento Rígido)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mathbf{L_A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\{\mathbf{L_A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$.
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$, *donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$.

DEM: (2)⇔(3)

Proposición (Propiedades asociado a un Movimiento Rígido)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mathbf{L_A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\{\mathbf{L_A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$.
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$, *donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$.

DEM: (2)⇔(3) Si (3) es cierto, entonces para todo $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, tenemos

$$\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}) \rangle^{1/2} \overbrace{=}^{hip} \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle^{1/2} \qquad ,$$

Proposición (Propiedades asociado a un Movimiento Rígido)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mathbf{L_A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\{\mathbf{L_A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$.
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$, *donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$.

DEM: (2)⇔(3) Si (3) es cierto, entonces para todo $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, tenemos

$$|\mathbf{L_A}(\mathbf{p})| = \langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}) \rangle^{1/2} \overbrace{=}^{hip} \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle^{1/2} = |\mathbf{p}|,$$

Proposición (**Propiedades asociado a un Movimiento Rígido**)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mathbf{L_A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\{\mathbf{L_A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$.
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$, *donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$.

DEM: (2)⇔(3) Si (3) es cierto, entonces para todo $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, tenemos

$$|\mathbf{L_A}(\mathbf{p})| = \langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}) \rangle^{1/2} \overbrace{=}^{hip} \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle^{1/2} = |\mathbf{p}|,$$

Por lo tanto, (2) es verdadera. En otras palabras, si $\mathbf{L_A}$ preserva los productos internos, entonces preserva las normas.

Proposición (Propiedades asociado a un Movimiento Rígido)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mathbf{L_A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\{\mathbf{L_A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$.
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$, *donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$.

DEM: (2)⇔(3) Supongamos ahora que (2) es cierto, para ello necesitamos el siguiente artilugio:

Proposición (**Propiedades asociado a un Movimiento Rígido**)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mathbf{L_A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\{\mathbf{L_A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$.
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$, *donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$.

DEM: (2)⇔(3) Supongamos ahora que (2) es cierto, para ello necesitamos el siguiente artilugio: para $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ obtenemos

$$|\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2 = \langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle - 2 \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$$

Proposición (**Propiedades asociado a un Movimiento Rígido**)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mathbf{L_A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\{\mathbf{L_A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$.
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$, *donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$.

DEM: (2)⇔(3) Supongamos ahora que (2) es cierto, para ello necesitamos el siguiente artilugio: para $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ obtenemos

$$|\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2 = \langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle - 2 \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$$

Ahora despejando $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ y usando la hipótesis de que $\mathbf{A}$ es ortogonal, es decir, $|\mathbf{L_A}(\cdot)| = |(\cdot)|$ encontramos que:

Proposición (Propiedades asociado a un Movimiento Rígido)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$*. Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L}_\mathbf{A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L}_\mathbf{A}(\mathbf{p}), \mathbf{L}_\mathbf{A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$*.*
4. $\mathbf{L}_\mathbf{A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$*, entonces* $\{\mathbf{L}_\mathbf{A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L}_\mathbf{A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L}_\mathbf{A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$*.*
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$*, donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$*.*

DEM: (2)⇔(3) Supongamos ahora que (2) es cierto, para ello necesitamos el siguiente artilugio: para $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ obtenemos

$$|\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2 = \langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle - 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$$

Ahora despejando $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ y usando la hipótesis de que $\mathbf{A}$ es ortogonal, es decir, $|\mathbf{L}_\mathbf{A}(\cdot)| = |(\cdot)|$ encontramos que:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle &= \frac{1}{2}\left(|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2\right) \qquad (1) \\ &= \frac{1}{2}\left(|\mathbf{L}_\mathbf{A}(\mathbf{p})|^2 + |\mathbf{L}_\mathbf{A}(\mathbf{q})|^2 - |\mathbf{L}_\mathbf{A}(\mathbf{p} - \mathbf{q})|^2\right) = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{L}_\mathbf{A}(\mathbf{p})|^2 + |\mathbf{L}_\mathbf{A}(\mathbf{q})|^2 - |\mathbf{L} \right. \\ &= \frac{1}{2}\left(|\mathbf{L}_\mathbf{A}(\mathbf{p})|^2 + |\mathbf{L}_\mathbf{A}(\mathbf{q})|^2 - \left(|\mathbf{L}_\mathbf{A}(\mathbf{p})|^2 + |\mathbf{L}_\mathbf{A}(\mathbf{q})|^2 - 2\langle \mathbf{L}_\mathbf{A}(\mathbf{p}), \mathbf{L}_\mathbf{A}(\mathbf{q}) \rangle\right)\right) \end{aligned}$$

Proposición (Propiedades asociado a un Movimiento Rígido)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L}_{\mathbf{A}}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}), \mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mathbf{L}_{\mathbf{A}}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\{\mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$.
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$, *donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$.

DEM: (2)⇔(3) Supongamos ahora que (2) es cierto, para ello necesitamos el siguiente artilugio: para $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ obtenemos

$$|\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2 = \langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle - 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$$

Ahora despejando $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ y usando la hipótesis de que $\mathbf{A}$ es ortogonal, es decir, $|\mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\cdot)| = |(\cdot)|$ encontramos que:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle &= \frac{1}{2}\left(|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2\right) \qquad (1)\\
&= \frac{1}{2}\left(|\mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{p})|^2 + |\mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{q})|^2 - |\mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{p} - \mathbf{q})|^2\right) = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{p})|^2 + |\mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{q})|^2 - |\mathbf{L}\right.\\
&= \frac{1}{2}\left(|\mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{p})|^2 + |\mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{q})|^2 - \left(|\mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{p})|^2 + |\mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{q})|^2 - 2\langle \mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}), \mathbf{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{q}) \rangle\right)\right)
\end{aligned}$$

Proposición (Propiedades asociado a un Movimiento Rígido)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$*. Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$*.*
4. $\mathbf{L_A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$*, entonces* $\{\mathbf{L_A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$*.*
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$*, donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$*.*

DEM: (3)$\Rightarrow$(4) es obvio.

Proposición (Propiedades asociado a un Movimiento Rígido)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mathbf{L_A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\{\mathbf{L_A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$.
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$, *donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$.

DEM: (4)$\Rightarrow$(5)

Proposición (**Propiedades asociado a un Movimiento Rígido**)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$*. Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$*.*
4. $\mathbf{L_A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$*, entonces* $\{\mathbf{L_A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$*.*
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$*, donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$*.*

DEM: (4)⇒(5) porque las columnas de $\mathbf{A}$ son

$$\{\mathbf{L_A}(\mathbf{e}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{e}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{e}_n)\}.$$

Proposición (**Propiedades asociado a un Movimiento Rígido**)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mathbf{L_A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\{\mathbf{L_A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$.
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$, *donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$.

DEM: (5)⇔(6)

Proposición (Propiedades asociado a un Movimiento Rígido)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mathbf{L_A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\{\mathbf{L_A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$.
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$, *donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$.

DEM: (5)⇔(6) porque la entrada (i, j) de $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ es

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{ij} = \left\langle fila_i(\mathbf{A}^T), colum_j(\mathbf{A}) \right\rangle = \langle colum_i(\mathbf{A}), colum_j(\mathbf{A}) \rangle = \delta_{ij}$$

Proposición (Propiedades asociado a un Movimiento Rígido)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mathbf{L_A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\{\mathbf{L_A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$.
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$, *donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$.

DEM: (5)⇒(3)

Proposición (**Propiedades asociado a un Movimiento Rígido**)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mathbf{L_A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\{\mathbf{L_A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$.
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$, *donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$.

DEM: (5)⇒(3) porque si las columnas de $\mathbf{A}$ son ortonormales, entonces para todos los pares $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, tenemos

$$\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L}_A(\mathbf{q}) \rangle = \left\langle \mathbf{L_A}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k \mathbf{e}_k\right), \mathbf{L_A}\left(\sum_{s=1}^{n} q_s \mathbf{e}_s\right) \right\rangle$$

■

Proposición (**Propiedades asociado a un Movimiento Rígido**)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mathbf{L_A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\{\mathbf{L_A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$.
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$, *donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$.

DEM: (5)⇒(3) porque si las columnas de $\mathbf{A}$ son ortonormales, entonces para todos los pares $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, tenemos

$$\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L}_A(\mathbf{q}) \rangle = \left\langle \mathbf{L_A}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k \mathbf{e}_k\right), \mathbf{L_A}\left(\sum_{s=1}^{n} q_s \mathbf{e}_s\right) \right\rangle = \sum_{k,s=1}^{n} p_k q_s \langle \mathbf{L_A}(\mathbf{e}_k), \mathbf{L_A}(\mathbf{e}_s$$

$$= \sum_{k,s=1}^{n} p_k q_s \delta_{ks}$$

■

Proposición (Propiedades asociado a un Movimiento Rígido)

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{L_A}$ *es un movimiento rígido.*
2. $\mathbf{A}$ *es ortogonal.*
3. $\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L_A}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ *para todos los pares* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mathbf{L_A}$ *conserva b.o.n; es decir, si* $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *es b.o.n* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\{\mathbf{L_A}(\mathbf{p}_1), \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathbf{L_A}(\mathbf{p}_n)\}$ *es b.o.n.*
5. *Las columnas de* $\mathbf{A}$ *forman una b.o.n de* $\mathbb{R}^n$.
6. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$, *donde* $\mathbf{A}^T$ *denota la transpuesta de* $\mathbf{A}$.

DEM: (5)⇒(3) porque si las columnas de **A** son ortonormales, entonces para todos los pares $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, tenemos

$$\langle \mathbf{L_A}(\mathbf{p}), \mathbf{L}_A(\mathbf{q}) \rangle = \left\langle \mathbf{L_A}\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k \mathbf{e}_k\Big), \mathbf{L_A}\Big(\sum_{s=1}^{n} q_s \mathbf{e}_s\Big) \right\rangle = \sum_{k,s=1}^{n} p_k q_s \langle \mathbf{L_A}(\mathbf{e}_k), \mathbf{L_A}(\mathbf{e}_s$$

$$= \sum_{k,s=1}^{n} p_k q_s \delta_{ks} = \sum_{k=1}^{n} p_k q_k = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$$

■

Ahora tenemos una buena comprensión de los movimientos rígidos lineales. A continuación, demostramos que **todo movimiento rígido que fija el origen debe ser lineal.**

Ahora tenemos una buena comprensión de los movimientos rígidos lineales. A continuación, demostramos que **todo movimiento rígido que fija el origen debe ser lineal.**

Proposición (**Cuando $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$**)

Si $\mathbf{R}$ *es un movimiento rígido de* $\mathbb{R}^n$ *que fija el origen* ($\mathbf{R}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$)*, entonces* $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$ *para algún* $\mathbf{A} \in O(n)$*. En particular,* $\mathbf{R}$ *es lineal.*

DEM:

Proposición (Cuando $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$)

Si $\mathbf{R}$ *es un movimiento rígido de* $\mathbb{R}^n$ *que fija el origen* ($\mathbf{R}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$), *entonces* $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$ *para algún* $\mathbf{A} \in O(n)$. *En particular,* $\mathbf{R}$ *es lineal.*

DEM:

Proposición (Cuando $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$)

Si $\mathbf{R}$ *es un movimiento rígido de* $\mathbb{R}^n$ *que fija el origen* ($\mathbf{R}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$)*, entonces* $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$ *para algún* $\mathbf{A} \in O(n)$*. En particular,* $\mathbf{R}$ *es lineal.*

DEM: La ecuación $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{2}\Big(|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2\Big)$ puede **re-expresarse** en términos de distancias:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{2}\Big(|\mathbf{p} - \mathbf{0}|^2 + |\mathbf{q} - \mathbf{0}|^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2\Big).$$

Proposición (Cuando $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$)

Si $\mathbf{R}$ *es un movimiento rígido de* $\mathbb{R}^n$ *que fija el origen* ($\mathbf{R}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$), *entonces* $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$ *para algún* $\mathbf{A} \in O(n)$. *En particular,* $\mathbf{R}$ *es lineal.*

DEM: La ecuación $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{2}\Big(|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2\Big)$ puede **re-expresarse** en términos de distancias:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{2}\Big(|\mathbf{p} - \mathbf{0}|^2 + |\mathbf{q} - \mathbf{0}|^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2\Big).$$

Como $\mathbf{R}$ conserva las distancias y fija el origen, entonces

Proposición (Cuando $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$)

Si $\mathbf{R}$ *es un movimiento rígido de* $\mathbb{R}^n$ *que fija el origen* ($\mathbf{R}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$)*, entonces* $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$ *para algún* $\mathbf{A} \in O(n)$*. En particular,* $\mathbf{R}$ *es lineal.*

DEM: La ecuación $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{2}\Big(|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2\Big)$ puede **re-expresarse** en términos de distancias:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{2}\Big(|\mathbf{p} - \mathbf{0}|^2 + |\mathbf{q} - \mathbf{0}|^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2\Big).$$

Como $\mathbf{R}$ conserva las distancias y fija el origen, entonces

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{2}\Big(|\mathbf{R}(\mathbf{p}) - \mathbf{R}(\mathbf{0})|^2 + |\mathbf{R}(\mathbf{q}) - \mathbf{R}(\mathbf{0})|^2 - |\mathbf{R}(\mathbf{p}) - \mathbf{R}(\mathbf{q})|^2\Big)$$

Proposición (Cuando $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$)

Si $\mathbf{R}$ *es un movimiento rígido de* $\mathbb{R}^n$ *que fija el origen* ($\mathbf{R}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$), *entonces* $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$ *para algún* $\mathbf{A} \in O(n)$. *En particular,* $\mathbf{R}$ *es lineal.*

DEM: La ecuación $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{2}\Big(|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2\Big)$ puede **re-expresarse** en términos de distancias:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{2}\Big(|\mathbf{p} - \mathbf{0}|^2 + |\mathbf{q} - \mathbf{0}|^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2\Big).$$

Como $\mathbf{R}$ conserva las distancias y fija el origen, entonces

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle &= \frac{1}{2}\Big(|\mathbf{R}(\mathbf{p}) - \mathbf{R}(\mathbf{0})|^2 + |\mathbf{R}(\mathbf{q}) - \mathbf{R}(\mathbf{0})|^2 - |\mathbf{R}(\mathbf{p}) - \mathbf{R}(\mathbf{q})|^2\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(|\mathbf{R}(\mathbf{p})|^2 + |\mathbf{R}(\mathbf{q})|^2 - \langle \mathbf{R}(\mathbf{p}) - \mathbf{R}(\mathbf{q}), \mathbf{R}(\mathbf{p}) - \mathbf{R}(\mathbf{q}) \rangle\Big) = \langle \mathbf{R}(\mathbf{p}), \mathbf{R}(\mathbf{q}) \rangle \end{aligned}$$

Proposición (Cuando $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$)

Si $\mathbf{R}$ *es un movimiento rígido de* $\mathbb{R}^n$ *que fija el origen* ($\mathbf{R}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$), *entonces* $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$ *para algún* $\mathbf{A} \in O(n)$. *En particular,* $\mathbf{R}$ *es lineal.*

DEM: La ecuación $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{2}\Big(|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2\Big)$ puede **re-expresarse** en términos de distancias:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{2}\Big(|\mathbf{p} - \mathbf{0}|^2 + |\mathbf{q} - \mathbf{0}|^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2\Big).$$

Como $\mathbf{R}$ conserva las distancias y fija el origen, entonces

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle &= \frac{1}{2}\Big(|\mathbf{R}(\mathbf{p}) - \mathbf{R}(\mathbf{0})|^2 + |\mathbf{R}(\mathbf{q}) - \mathbf{R}(\mathbf{0})|^2 - |\mathbf{R}(\mathbf{p}) - \mathbf{R}(\mathbf{q})|^2\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(|\mathbf{R}(\mathbf{p})|^2 + |\mathbf{R}(\mathbf{q})|^2 - \langle \mathbf{R}(\mathbf{p}) - \mathbf{R}(\mathbf{q}), \mathbf{R}(\mathbf{p}) - \mathbf{R}(\mathbf{q}) \rangle\Big) = \langle \mathbf{R}(\mathbf{p}), \mathbf{R}(\mathbf{q}) \rangle\end{aligned}$$

Tomando la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $\{\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n\}$, definamos la matriz $\mathbf{A} = [\mathbf{R}(e_1), \mathbf{R}(e_2), \ldots, \mathbf{R}(e_n)]$, por lo que

$$\mathbf{R}(e_i) = \mathbf{A}\mathbf{e}_i \qquad \text{para todos los } i = 1, \ldots, n.$$

Proposición (Cuando $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$)

Si $\mathbf{R}$ *es un movimiento rígido de* $\mathbb{R}^n$ *que fija el origen* ($\mathbf{R}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$)*, entonces* $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$ *para algún* $\mathbf{A} \in O(n)$. *En particular,* $\mathbf{R}$ *es lineal.*

DEM: La ecuación $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2\right)$ puede **re-expresarse** en términos de distancias:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{p} - \mathbf{0}|^2 + |\mathbf{q} - \mathbf{0}|^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2\right).$$

Como $\mathbf{R}$ conserva las distancias y fija el origen, entonces

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle &= \frac{1}{2}\left(|\mathbf{R}(\mathbf{p}) - \mathbf{R}(\mathbf{0})|^2 + |\mathbf{R}(\mathbf{q}) - \mathbf{R}(\mathbf{0})|^2 - |\mathbf{R}(\mathbf{p}) - \mathbf{R}(\mathbf{q})|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(|\mathbf{R}(\mathbf{p})|^2 + |\mathbf{R}(\mathbf{q})|^2 - \langle \mathbf{R}(\mathbf{p}) - \mathbf{R}(\mathbf{q}), \mathbf{R}(\mathbf{p}) - \mathbf{R}(\mathbf{q}) \rangle\right) = \langle \mathbf{R}(\mathbf{p}), \mathbf{R}(\mathbf{q}) \rangle\end{aligned}$$

Tomando la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $\left\{\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_n\right\}$, definamos la matriz $\mathbf{A} = [\mathbf{R}(e_1), \mathbf{R}(e_2), \dots, \mathbf{R}(e_n)]$, por lo que

$$\mathbf{R}(e_i) = \mathbf{A}\mathbf{e}_i \qquad \text{para todos los } i = 1, \dots, n.$$

Nótese que $\mathbf{A} \in O(n)$, ya que sus columnas son ortonormales. ((En efecto, $\langle \mathbf{R}(\mathbf{e}_i), \mathbf{R}(\mathbf{e}_j) \rangle = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$)).

Proposición (Cuando $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$)

Si $\mathbf{R}$ *es un movimiento rígido de* $\mathbb{R}^n$ *que fija el origen* ($\mathbf{R}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$)*, entonces* $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$ *para algún* $\mathbf{A} \in O(n)$*. En particular,* $\mathbf{R}$ *es lineal.*

DEM: La ecuación $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{2}\Big(|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2\Big)$ puede **re-expresarse** en términos de distancias:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{2}\Big(|\mathbf{p} - \mathbf{0}|^2 + |\mathbf{q} - \mathbf{0}|^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2\Big).$$

Como $\mathbf{R}$ conserva las distancias y fija el origen, entonces

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle &= \frac{1}{2}\Big(|\mathbf{R}(\mathbf{p}) - \mathbf{R}(\mathbf{0})|^2 + |\mathbf{R}(\mathbf{q}) - \mathbf{R}(\mathbf{0})|^2 - |\mathbf{R}(\mathbf{p}) - \mathbf{R}(\mathbf{q})|^2\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(|\mathbf{R}(\mathbf{p})|^2 + |\mathbf{R}(\mathbf{q})|^2 - \langle \mathbf{R}(\mathbf{p}) - \mathbf{R}(\mathbf{q}), \mathbf{R}(\mathbf{p}) - \mathbf{R}(\mathbf{q}) \rangle\Big) = \langle \mathbf{R}(\mathbf{p}), \mathbf{R}(\mathbf{q}) \rangle\end{aligned}$$

Tomando la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $\{\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_n\}$, definamos la matriz $\mathbf{A} = [\mathbf{R}(e_1), \mathbf{R}(e_2), \dots, \mathbf{R}(e_n)]$, por lo que

$$\mathbf{R}(e_i) = \mathbf{A}\mathbf{e}_i \equiv \mathbf{L_A}(\mathbf{e}_i) \quad \text{para todos los } i = 1, \dots, n.$$

Nótese que $\mathbf{A} \in O(n)$, ya que sus columnas son ortonormales. ((En efecto, $\langle \mathbf{R}(\mathbf{e}_i), \mathbf{R}(\mathbf{e}_j) \rangle = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$)).

Proposición (Cuando $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$)

Si $\mathbf{R}$ *es un movimiento rígido de* $\mathbb{R}^n$ *que fija el origen* ($\mathbf{R}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$)*, entonces* $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$ *para algún* $\mathbf{A} \in O(n)$*. En particular,* $\mathbf{R}$ *es lineal.*

DEM:

Proposición (Cuando $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$)

Si $\mathbf{R}$ *es un movimiento rígido de* $\mathbb{R}^n$ *que fija el origen* ($\mathbf{R}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$)*, entonces* $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$ *para algún* $\mathbf{A} \in O(n)$*. En particular,* $\mathbf{R}$ *es lineal.*

DEM: Probaremos que $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$ (y por lo tanto que $\mathbf{T}$ es lineal) mostrando que

$$\mathbf{G} = (\mathbf{L_A})^{-1} \circ \mathbf{R}$$

es la identidad.

Proposición (Cuando $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$)

Si $\mathbf{R}$ *es un movimiento rígido de* $\mathbb{R}^n$ *que fija el origen* ($\mathbf{R}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$), *entonces* $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$ *para algún* $\mathbf{A} \in O(n)$. *En particular,* $\mathbf{R}$ *es lineal.*

DEM: Probaremos que $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$ (y por lo tanto que $\mathbf{T}$ es lineal) mostrando que

$$\mathbf{G} = (\mathbf{L_A})^{-1} \circ \mathbf{R}$$

es la identidad. Nótese que G es un **movimiento rígido** y

Proposición (Cuando $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$)

Si $\mathbf{R}$ *es un movimiento rígido de* $\mathbb{R}^n$ *que fija el origen* ($\mathbf{R}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$), *entonces* $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$ *para algún* $\mathbf{A} \in O(n)$. *En particular,* $\mathbf{R}$ *es lineal.*

DEM: Probaremos que $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$ (y por lo tanto que $\mathbf{T}$ es lineal) mostrando que

$$\mathbf{G} = (\mathbf{L_A})^{-1} \circ \mathbf{R}$$

es la identidad. Nótese que G es un **movimiento rígido** y $\mathbf{G}(\mathbf{0}) = (\mathbf{L_A})^{-1}\big(\mathbf{R}(0)\big) = (\mathbf{L_A})^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ((por lo que $\mathbf{G}$ preserva las normas y los productos internos))

Proposición (Cuando $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$)

Si $\mathbf{R}$ *es un movimiento rígido de* $\mathbb{R}^n$ *que fija el origen* ($\mathbf{R}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$), *entonces* $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$ *para algún* $\mathbf{A} \in O(n)$. *En particular,* $\mathbf{R}$ *es lineal.*

DEM: Probaremos que $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$ (y por lo tanto que $\mathbf{T}$ es lineal) mostrando que

$$\mathbf{G} = (\mathbf{L_A})^{-1} \circ \mathbf{R}$$

es la identidad. Nótese que G es un **movimiento rígido** y $\mathbf{G}(\mathbf{0}) = (\mathbf{L_A})^{-1}\big(\mathbf{R}(0)\big) = (\mathbf{L_A})^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ((por lo que $\mathbf{G}$ preserva las normas y los productos internos)) y

$$\mathbf{G}(\mathbf{e}_i) = (\mathbf{L_A})^{-1}\big(\mathbf{R}(\mathbf{e}_i)\big) = (\mathbf{L_A})^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i, \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, n.$$

Proposición (Cuando $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$)

Si $\mathbf{R}$ *es un movimiento rígido de* $\mathbb{R}^n$ *que fija el origen* ($\mathbf{R}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$), *entonces* $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$ *para algún* $\mathbf{A} \in O(n)$. *En particular,* $\mathbf{R}$ *es lineal.*

DEM: Probaremos que $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$ (y por lo tanto que $\mathbf{T}$ es lineal) mostrando que

$$\mathbf{G} = (\mathbf{L_A})^{-1} \circ \mathbf{R}$$

es la identidad. Nótese que G es un **movimiento rígido** y $\mathbf{G}(\mathbf{0}) = (\mathbf{L_A})^{-1}\big(\mathbf{R}(0)\big) = (\mathbf{L_A})^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ((por lo que $\mathbf{G}$ preserva las normas y los productos internos)) y

$$\mathbf{G}(\mathbf{e}_i) = (\mathbf{L_A})^{-1}\big(\mathbf{R}(\mathbf{e}_i)\big) = (\mathbf{L_A})^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i, \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, n.$$

Ahora demostremos que $\mathbf{G}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ para todo $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$.

Proposición (Cuando $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$)

Si $\mathbf{R}$ *es un movimiento rígido de* $\mathbb{R}^n$ *que fija el origen* ($\mathbf{R}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$), *entonces* $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$ *para algún* $\mathbf{A} \in O(n)$. *En particular,* $\mathbf{R}$ *es lineal.*

DEM: Probaremos que $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$ (y por lo tanto que $\mathbf{T}$ es lineal) mostrando que

$$\mathbf{G} = (\mathbf{L_A})^{-1} \circ \mathbf{R}$$

es la identidad. Nótese que G es un **movimiento rígido** y $\mathbf{G}(\mathbf{0}) = (\mathbf{L_A})^{-1}\big(\mathbf{R}(0)\big) = (\mathbf{L_A})^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ((por lo que $\mathbf{G}$ preserva las normas y los productos internos)) y

$$\mathbf{G}(\mathbf{e}_i) = (\mathbf{L_A})^{-1}\big(\mathbf{R}(\mathbf{e}_i)\big) = (\mathbf{L_A})^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i, \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, n.$$

Ahora demostremos que $\mathbf{G}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ para todo $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Escribamos $\mathbf{p} = \sum a_i \mathbf{e}_i$ y supongamos que $\mathbf{G}(\mathbf{p}) = \sum b_i \mathbf{e}_i$.

Proposición (Cuando $\mathbf{R} = \mathbf{L}_\mathbf{A}$)

Si $\mathbf{R}$ *es un movimiento rígido de* $\mathbb{R}^n$ *que fija el origen* ($\mathbf{R}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$), *entonces* $\mathbf{R} = \mathbf{L}_\mathbf{A}$ *para algún* $\mathbf{A} \in O(n)$. *En particular,* $\mathbf{R}$ *es lineal.*

DEM: Probaremos que $\mathbf{R} = \mathbf{L}_\mathbf{A}$ (y por lo tanto que $\mathbf{T}$ es lineal) mostrando que

$$\mathbf{G} = (\mathbf{L}_\mathbf{A})^{-1} \circ \mathbf{R}$$

es la identidad. Nótese que G es un **movimiento rígido** y $\mathbf{G}(\mathbf{0}) = (\mathbf{L}_\mathbf{A})^{-1}\big(\mathbf{R}(0)\big) = (\mathbf{L}_\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ((por lo que $\mathbf{G}$ preserva las normas y los productos internos)) y

$$\mathbf{G}(\mathbf{e}_i) = (\mathbf{L}_\mathbf{A})^{-1}\big(\mathbf{R}(\mathbf{e}_i)\big) = (\mathbf{L}_\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i, \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, n.$$

Ahora demostremos que $\mathbf{G}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ para todo $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Escribamos $\mathbf{p} = \sum a_i \mathbf{e}_i$ y supongamos que $\mathbf{G}(\mathbf{p}) = \sum b_i \mathbf{e}_i$. Observe que,

$$b_i = \langle \mathbf{G}(\mathbf{p}), \mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{G}(\mathbf{p}), \mathbf{G}(\mathbf{e}_i) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{e}_i \rangle = a_i,$$

Proposición (Cuando $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$)

Si $\mathbf{R}$ *es un movimiento rígido de* $\mathbb{R}^n$ *que fija el origen* ($\mathbf{R}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$), *entonces* $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$ *para algún* $\mathbf{A} \in O(n)$. *En particular,* $\mathbf{R}$ *es lineal.*

DEM: Probaremos que $\mathbf{R} = \mathbf{L_A}$ (y por lo tanto que $\mathbf{T}$ es lineal) mostrando que

$$\mathbf{G} = (\mathbf{L_A})^{-1} \circ \mathbf{R}$$

es la identidad. Nótese que G es un **movimiento rígido** y $\mathbf{G}(\mathbf{0}) = (\mathbf{L_A})^{-1}\big(\mathbf{R}(0)\big) = (\mathbf{L_A})^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ((por lo que $\mathbf{G}$ preserva las normas y los productos internos)) y

$$\mathbf{G}(\mathbf{e}_i) = (\mathbf{L_A})^{-1}\big(\mathbf{R}(\mathbf{e}_i)\big) = (\mathbf{L_A})^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i, \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, n.$$

Ahora demostremos que $\mathbf{G}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ para todo $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Escribamos $\mathbf{p} = \sum a_i \mathbf{e}_i$ y supongamos que $\mathbf{G}(\mathbf{p}) = \sum b_i \mathbf{e}_i$. Observe que,

$$b_i = \langle \mathbf{G}(\mathbf{p}), \mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{G}(\mathbf{p}), \mathbf{G}(\mathbf{e}_i) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{e}_i \rangle = a_i,$$

lo que demuestra que $\mathbf{G}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$, por lo que $\mathbf{G}$ es la función identidad. ■

¿**Qué sucede con los movimientos rígidos que no fijan el origen**?

,

¿Qué sucede con los movimientos rígidos que no fijan el origen?

Para cualquier $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, la función de traslación $\mathbf{T_q} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida como

$$\mathbf{T_q}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \mathbf{q},$$

es claramente un **movimiento rígido** que envía el origen a $\mathbf{q}$.

,

¿Qué sucede con los movimientos rígidos que no fijan el origen?

Para cualquier $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, la función de traslación $\mathbf{T_q} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida como

$$\mathbf{T_q}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \mathbf{q},$$

es claramente un **movimiento rígido** que envía el origen a $\mathbf{q}$. En efecto,

$$|\mathbf{T_q}(\mathbf{x}) - \mathbf{T_q}(\mathbf{y})| = |\mathbf{y} + \mathbf{q} - (\mathbf{x} + \mathbf{q})| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

,

¿**Qué sucede con los movimientos rígidos que no fijan el origen**?

Para cualquier $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, la función de traslación $\mathbf{T_q} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida como

$$\mathbf{T_q}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \mathbf{q},$$

es claramente un **movimiento rígido** que envía el origen a $\mathbf{q}$. En efecto,

$$|\mathbf{T_q}(\mathbf{x}) - \mathbf{T_q}(\mathbf{y})| = |\mathbf{y} + \mathbf{q} - (\mathbf{x} + \mathbf{q})| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Probaremos a continuación que no hay movimientos rígidos más que composiciones de traslaciones con movimientos rígidos lineales.

,

¿**Qué sucede con los movimientos rígidos que no fijan el origen**?

Para cualquier $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, la función de traslación $\mathbf{T_q} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida como

$$\mathbf{T_q}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \mathbf{q},$$

es claramente un **movimiento rígido** que envía el origen a $\mathbf{q}$. En efecto,

$$|\mathbf{T_q}(\mathbf{x}) - \mathbf{T_q}(\mathbf{y})| = |\mathbf{y} + \mathbf{q} - (\mathbf{x} + \mathbf{q})| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Probaremos a continuación que no hay movimientos rígidos más que composiciones de traslaciones con movimientos rígidos lineales.

Proposición (Movimiento Rígido en general)

Si $\mathbf{R}$ *es un movimiento rígido de* $\mathbb{R}^n$*, entonces* $\mathbf{R} = \mathbf{T_q} \circ \mathbf{L_A}$ *para una elección única de* $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ *y* $\mathbf{A} \in O(n)$*.*

DEM:

,

¿Qué sucede con los movimientos rígidos que no fijan el origen?

Para cualquier $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, la función de traslación $\mathbf{T_q} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida como

$$\mathbf{T_q}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \mathbf{q},$$

es claramente un **movimiento rígido** que envía el origen a $\mathbf{q}$. En efecto,

$$|\mathbf{T_q}(\mathbf{x}) - \mathbf{T_q}(\mathbf{y})| = |\mathbf{y} + \mathbf{q} - (\mathbf{x} + \mathbf{q})| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Probaremos a continuación que no hay movimientos rígidos más que composiciones de traslaciones con movimientos rígidos lineales.

Proposición (Movimiento Rígido en general)

Si $\mathbf{R}$ es un movimiento rígido de $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathbf{R} = \mathbf{T_q} \circ \mathbf{L_A}$ para una elección única de $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{A} \in O(n)$.

DEM: Defina $\mathbf{q} = \mathbf{R}(\mathbf{0})$.

,

¿**Qué sucede con los movimientos rígidos que no fijan el origen**?

Para cualquier $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, la función de traslación $\mathbf{T_q} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida como

$$\mathbf{T_q}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \mathbf{q},$$

es claramente un **movimiento rígido** que envía el origen a $\mathbf{q}$. En efecto,

$$|\mathbf{T_q}(\mathbf{x}) - \mathbf{T_q}(\mathbf{y})| = |\mathbf{y} + \mathbf{q} - (\mathbf{x} + \mathbf{q})| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Probaremos a continuación que no hay movimientos rígidos más que composiciones de traslaciones con movimientos rígidos lineales.

Proposición (Movimiento Rígido en general)

Si $\mathbf{R}$ es un movimiento rígido de $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathbf{R} = \mathbf{T_q} \circ \mathbf{L_A}$ para una elección única de $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{A} \in O(n)$.

DEM: Defina $\mathbf{q} = \mathbf{R}(\mathbf{0})$. Nótese que $\mathbf{T_q}^{-1} \circ \mathbf{R}$ es un movimiento rígido que fija el origen.

$$(\mathbf{T_q}^{-1} \circ \mathbf{R})(\mathbf{0}) = \mathbf{T_q}^{-1}(\mathbf{q}) = \mathbf{q} - \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Por lo que fija el cero,

¿**Qué sucede con los movimientos rígidos que no fijan el origen**?

Para cualquier $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, la función de traslación $\mathbf{T_q} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida como

$$\mathbf{T_q}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \mathbf{q},$$

es claramente un **movimiento rígido** que envía el origen a $\mathbf{q}$. En efecto,

$$|\mathbf{T_q}(\mathbf{x}) - \mathbf{T_q}(\mathbf{y})| = |\mathbf{y} + \mathbf{q} - (\mathbf{x} + \mathbf{q})| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Probaremos a continuación que no hay movimientos rígidos más que composiciones de traslaciones con movimientos rígidos lineales.

Proposición (Movimiento Rígido en general)

Si $\mathbf{R}$ *es un movimiento rígido de* $\mathbb{R}^n$*, entonces* $\mathbf{R} = \mathbf{T_q} \circ \mathbf{L_A}$ *para una elección única de* $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ *y* $\mathbf{A} \in O(n)$*.*

DEM: Defina $\mathbf{q} = \mathbf{R}(\mathbf{0})$. Nótese que $\mathbf{T_q}^{-1} \circ \mathbf{R}$ es un movimiento rígido que fija el origen.

$$(\mathbf{T_q}^{-1} \circ \mathbf{R})(\mathbf{0}) = \mathbf{T_q}^{-1}(\mathbf{q}) = \mathbf{q} - \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Por lo que fija el cero, Proposición anterior, $\mathbf{T_q}^{-1} \circ \mathbf{R} = \mathbf{L}_A$ para algún $\mathbf{A} \in O(n)$.

¿**Qué sucede con los movimientos rígidos que no fijan el origen**?

Para cualquier $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, la función de traslación $\mathbf{T_q} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida como

$$\mathbf{T_q}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \mathbf{q},$$

es claramente un **movimiento rígido** que envía el origen a $\mathbf{q}$. En efecto,

$$|\mathbf{T_q}(\mathbf{x}) - \mathbf{T_q}(\mathbf{y})| = |\mathbf{y} + \mathbf{q} - (\mathbf{x} + \mathbf{q})| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Probaremos a continuación que no hay movimientos rígidos más que composiciones de traslaciones con movimientos rígidos lineales.

Proposición (Movimiento Rígido en general)

Si $\mathbf{R}$ *es un movimiento rígido de* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $\mathbf{R} = \mathbf{T_q} \circ \mathbf{L_A}$ *para una elección única de* $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ *y* $\mathbf{A} \in O(n)$.

DEM: Defina $\mathbf{q} = \mathbf{R}(\mathbf{0})$. Nótese que $\mathbf{T_q}^{-1} \circ \mathbf{R}$ es un movimiento rígido que fija el origen.

$$(\mathbf{T_q}^{-1} \circ \mathbf{R})(\mathbf{0}) = \mathbf{T_q}^{-1}(\mathbf{q}) = \mathbf{q} - \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Por lo que fija el cero, Proposición anterior, $\mathbf{T_q}^{-1} \circ \mathbf{R} = \mathbf{L}_A$ para algún $\mathbf{A} \in O(n)$. Por lo tanto, $\mathbf{R} = \mathbf{T_q} \circ \mathbf{L_A}$. ((esto es, $\mathbf{R}(\mathbf{p}) = A\mathbf{p} + \mathbf{q}$)). La afirmación de unicidad se deja al lector.

Hay dos tipos cualitativamente **diferentes de movimientos rígidos**, que corresponden a las dos posibilidades para el determinante de una matriz ortogonal:

Hay dos tipos cualitativamente **diferentes de movimientos rígidos**, que corresponden a las dos posibilidades para el determinante de una matriz ortogonal:

Lema

Si $A \in O(n)$, *entonces* $\det(A) = 1$ *o* $\det(A) = -1$.

DEM:

Hay dos tipos cualitativamente **diferentes de movimientos rígidos**, que corresponden a las dos posibilidades para el determinante de una matriz ortogonal:

Lema

Si $A \in O(n)$, *entonces* $\det(A) = 1$ *o* $\det(A) = -1$.

DEM: Dado que $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$, entonces

$$1 = \det(I) = \det(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)\det(\mathbf{A}) = (\det(A))^2.$$

Hay dos tipos cualitativamente **diferentes de movimientos rígidos**, que corresponden a las dos posibilidades para el determinante de una matriz ortogonal:

Lema

Si $A \in O(n)$, *entonces* $\det(A) = 1$ *o* $\det(A) = -1$.

DEM: Dado que $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$, entonces

$$1 = \det(I) = \det(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)\det(\mathbf{A}) = (\det(A))^2.$$

Definición (Movimiento Rígido propio e impropio)

El movimiento rígido $\mathbf{R} = \mathbf{T_q} \circ \mathbf{L}_A$ *((como en la Proposición 41)) se llama* *propio* *si* $\det(\mathbf{A}) = 1$, *e* *impropio* *si* $\det(\mathbf{A}) = -1$.