

Análisis Armónico: Taller 1

30 de abril de 2025

Universidad Nacional de Colombia

Ricardo Ariel Pastrán Ramirez

Andrés David Cadena Simons

acadenas@unal.edu.co

Problema 1:

El objetivo de este ejercicio es probar que la transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \widehat{} &= \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_\infty^0(\mathbb{R}) \\ f &\rightarrow \widehat{f} \end{aligned}$$

no es sobreyectiva.

- (I) Pruebe que $(C_\infty^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.
- (II) Use la fórmula de inversión de Fourier para probar que \mathcal{F} es inyectiva.
- (III) Suponga que \mathcal{F} es sobreyectiva. Use el teorema de la aplicación abierta para deducir que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|f\|_1 \leq C \|\widehat{f}\|_\infty, \text{ para toda } f \in L^1(\mathbb{R}).$$

- (IV) Sea $A \geq 1$, definase

$$\phi_A := \chi_{[-A, A]}, \quad \psi_A := \phi_A * \phi_1 \quad \text{y} \quad g_A := \widehat{\psi_A}.$$

Pruebe que

$$\|\widehat{g_A}\|_\infty < \infty, \quad g_A(x) = \frac{\sin(2\pi Ax) \sin(2\pi x)}{(\pi x)^2}, \quad \|g_A\|_1 \rightarrow +\infty \text{ cuando } A \rightarrow +\infty,$$

y concluya una contradicción con (III).

Solución:

- (I) Sea $\{\phi_n\} \subset C_\infty^0(\mathbb{R})$ una sucesión de Cauchy que converge a ϕ cuando $n \rightarrow \infty$, veamos que $\phi \in C_\infty^0(\mathbb{R})$.

Sabemos que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$, entonces

$$\|\phi_n - \phi_m\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi_n(x) - \phi_m(x)| < \epsilon,$$

Veamos primero que $\phi \in C^0(\mathbb{R})$.

Note que

$$\begin{aligned} |\phi(x) - \phi(y)| &\leq |\phi(x) - \phi_n(x)| + |\phi_n(x) - \phi_n(y)| + |\phi_n(y) - \phi(y)|, \\ &\leq \|\phi - \phi_n\|_\infty + |\phi_n(x) - \phi_n(y)| + \|\phi_n - \phi\|_\infty, \\ &\leq 2I + J. \end{aligned}$$

Note que como $\{\phi_n\} \subset C_\infty^0(\mathbb{R})$, entonces estas son continuas, por lo que sabemos que dado $\frac{\epsilon}{3} > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces $|\phi_n(x) - \phi_n(y)| < \frac{\epsilon}{3}$. Por otro

lado note que como $\{\phi_n\}$ es de Cauchy, entonces dado $\frac{\epsilon}{3} > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$, entonces

$$\|\phi_m - \phi_n\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}.$$

Fije n y haga $m \rightarrow \infty$, luego

$$I = \|\phi - \phi_n\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}.$$

Ahora, sabemos que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si tomamos n fijo y adecuado se satisface que

$$\begin{aligned} |\phi(x) - \phi(y)| &\leq 2I + J, \\ &< \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}, \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Lo que concluye que $\phi \in C^0(\mathbb{R})$.

Ahora veamos que $\phi \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Note que dado $\frac{\epsilon}{2} > 0$ existe $N > 0$ y $R > 0$ tal que si $|x| > R$, entonces

$$|\phi_N(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Luego note que fijando ese N y R se cumple que

$$\begin{aligned} |\phi(x)| &\leq |\phi(x) - \phi_N(x)| + |\phi_N(x)|, \\ &\leq \|\phi - \phi_N\|_\infty + |\phi_N(x)|, \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}, \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Lo que termina por concluir que $\phi \in C_\infty^0(\mathbb{R})$.

- (II) Suponga $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ tales que $\widehat{f} = \widehat{g}$, entonces veamos que $f = g$ en casi toda parte. Como $\widehat{f} = \widehat{g}$, entonces $\widehat{f} - \widehat{g} = \widehat{f - g} = 0$, luego usando la fórmula de inversión de Fourier

$$\begin{aligned} (f - g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f - g}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 0 d\xi, \\ &= 0. \end{aligned}$$

De lo que se puede concluir que $f = g$ bajo la medida de Lebesgue, es decir, en casi toda parte.

(III) Teorema en cuestión.

Teorema 1: Teorema de la aplicación abierta

Si $T : X \rightarrow Y$ es un operador lineal, continuo y biyectivo entre espacios de Banach, entonces la inversa T^{-1} es también continua, es decir que existe $C > 0$ tal que

$$\|T^{-1}f\|_X \leq C \|f\|_Y.$$

Suponga que \mathcal{F} es sobreyectiva, entonces como $L^1(\mathbb{R})$ es Banach, $C_\infty^0(\mathbb{R})$ es Banach, \mathcal{F} satisface ser un operador lineal y además

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1,$$

es decir, es continua, por el teorema de la aplicación abierta se satisface que \mathcal{F}^{-1} es también continua, es decir que existe $C > 0$ tal que

$$\|f\|_1 \leq C \|\widehat{f}\|_\infty.$$

(IV) calculemos $g_A(x)$, para esto

$$\begin{aligned} g_A(x) &= \widehat{\psi_A}(x), \\ &= \widehat{\phi_A * \phi_1}(x), \\ &= \widehat{\phi_A}(x) \widehat{\phi_1}(x). \end{aligned}$$

Siendo así, hallemos $\widehat{\phi_A}$, será útil recordar que ϕ_A es una función par, luego

$$\begin{aligned} \widehat{\phi_A}(x) &= \int_{-A}^A \cos(2\pi x\xi) d\xi, \\ &= \frac{\sin(2\pi\xi x)}{2\pi x} \Big|_{-A}^A, \\ &= \frac{\sin(2\pi Ax)}{\pi x}. \end{aligned}$$

Por lo que podemos afirmar que

$$g_A(x) = \frac{\sin(2\pi Ax) \sin(2\pi x)}{(\pi x)^2}$$

Ahora, veamos que $\|\widehat{g_A}\|_\infty < \infty$.

Note que

$$\begin{aligned}
 |\widehat{g_A}(x)| &= \left| \widehat{\psi_A}(x) \right|, \\
 &= |\psi_A(-x)|, \\
 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \phi_A(y) \phi_1(-x-y) dy \right|, \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_A(y) \phi_1(x+y) dy, \\
 &= \int_{-x-1}^{-x+1} \phi_A(y) dy, \\
 &\leq \int_{-x-1}^{-x+1} dy, \\
 &\leq 2.
 \end{aligned}$$

Luego es claro que

$$\|\widehat{g_A}\|_{\infty} \leq 2,$$

por lo que podemos concluir que $\|\widehat{g_A}\|_{\infty} < \infty$ para todo $A \geq 1$.

Ahora calculemos $\|g_A\|_1$, para esto usaremos el comportamiento del seno alrededor de una vecindad cercana a 0 en la que $\frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}$ es positivo, decreciente y acotado inferiormente

$$\begin{aligned}
 \|g_A\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |g_A(x)| dx, \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(2\pi Ax) \sin(2\pi x)}{(\pi x)^2} \right| dx \\
 &\geq \int_0^{3/8} \frac{|\sin(2\pi Ax)|}{\pi x} \cdot \frac{\sin(2\pi x)}{\pi x} \cdot \frac{4A}{4A} dx, \\
 &\geq \int_0^{3/8} \frac{|\sin(2\pi Ax)|}{2\pi Ax} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \cdot 4A dx, \\
 &\geq \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \cdot 4A \int_0^{3/8} \frac{|\sin(2\pi Ax)|}{2\pi Ax} dx, && \text{Haciendo } u = 2\pi Ax. \\
 &\geq \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \cdot 4A \int_0^{3\pi A/4} \frac{|\sin(u)|}{u} du, \\
 &\geq \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \cdot 4A \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \frac{|\sin(u)|}{u} du, \\
 &\geq \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \cdot 4A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \frac{1}{u} du, \\
 &\geq M \cdot A && \text{con } M \text{ constante positiva.}
 \end{aligned}$$

Luego si $A \rightarrow \infty$, entonces $\|g_A\|_1 \rightarrow \infty$.

Pero note que usando (III) se debe de satisfacer que

$$\|g_A\|_1 \leq C \|\widehat{g_A}\|_\infty,$$

para todo A , lo que nos lleva a

$$\|g_A\|_1 \rightarrow \infty \leq C \|\widehat{g_A}\|_\infty \rightarrow 2.$$

Contradicción ($\infty < 2C < \infty$), luego podemos concluir que \mathcal{F} no puede ser sobreyectiva.

Problema 2:

Sean $B_R := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ y χ_{B_R} la función característica del conjunto B_R . Se define

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_R : L^2(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \\ f &\longmapsto \widehat{(\chi_{B_R} f)}.\end{aligned}$$

- (I) Probar que $\mathcal{S}_R \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$ y que $\|\mathcal{S}_R\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq 1$.
- (II) Mostrar que para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}_R f \rightarrow f$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ cuando $R \rightarrow +\infty$.
- (III) Deducir que para cualquier $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, existe una sucesión $R_n \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$ tal que

$$\int_{B_{R_n}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \longrightarrow f(x), \quad \text{cuando } n \rightarrow +\infty, \quad \text{c.t.p. } x \in \mathbb{R}^n.$$

- (IV) Probar que para cualquier $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\xi \longmapsto \int_{B_R} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \longrightarrow \widehat{f}, \quad \text{cuando } R \rightarrow +\infty, \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Solución:

Nota 1:

$\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$ es el espacio de los operadores lineales acotados de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

- (i) Sea $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y α escalar, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_R(\alpha f + g) &= \widehat{(\chi_{B_R}(\alpha f + g))}, \\ &= \widehat{(\alpha \chi_{B_R} f + \chi_{B_R} g)}, \\ &= \alpha \widehat{(\chi_{B_R} f)} + \widehat{(\chi_{B_R} g)}, \\ &= \alpha \mathcal{S}_R(f) + \mathcal{S}_R(g).\end{aligned}$$

Ahora veamos que este es un operador acotado

$$\begin{aligned}\|\mathcal{S}_R(f)\|_2 &= \left\| \left(\widetilde{\chi_{B_R} \hat{f}} \right) \right\|_2, \\ &= \left\| \chi_{B_R} \hat{f} \right\|_2, \\ &\leq \left\| \hat{f} \right\|_2, \\ &\leq \|f\|_2.\end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir que $\mathcal{S}_R \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$.

(II) Note que lo que buscamos es equivalente a

$$\begin{aligned}\lim_{R \rightarrow \infty} \|\mathcal{S}_R f - f\|_2 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\| \left(\left(\widetilde{\chi_{B_R} \hat{f}} \right) - \check{\hat{f}} \right) \right\|_2, \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\| \chi_{B_R} \hat{f} - \hat{f} \right\|_2, \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\| (\chi_{B_R} - 1) \hat{f} \right\|_2, \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\| \chi_{B_R^c} \hat{f} \right\|_2, \\ &= 0.\end{aligned}$$

Siendo así, note que como $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Además, esto implica que dado $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que si $r \geq R$, entonces

$$\left(\int_{|x| \geq r} |\hat{f}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon.$$

Note que esto implica que

$$\begin{aligned}\left\| \chi_{B_r^c} \hat{f} \right\|_2 &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \chi_{B_r^c}(x) \hat{f}(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\ &= \left(\int_{|x| \geq r} |\hat{f}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

Lo que implica que $\chi_{B_R^c} \hat{f} \rightarrow 0$ y por ende $\mathcal{S}_R f \rightarrow f$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ cuando $R \rightarrow \infty$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(III) Note que como $\mathcal{S}_R f \rightarrow f$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ cuando $R \rightarrow \infty$, entonces existe una sucesión $\{R_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{S}_{R_n} f \rightarrow g$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, luego $f - g = 0$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, es decir:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |0|^2 dx, \\ &= 0.\end{aligned}$$

Luego $f = g$ bajo la medida de Lebesgue, es decir, $f(x) = g(x)$ en casi toda parte.

(iv) Note que

$$\begin{aligned} \int_{B_R} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_R}(x) f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \\ &= \widehat{\chi_{B_R} f}(\xi). \end{aligned}$$

Luego lo que buscamos es equivalente a

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left\| \widehat{\chi_{B_R} f} - \widehat{f} \right\|_2 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\| \chi_{B_R} f - f \right\|_2, \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\| (\chi_{B_R} - 1) f \right\|_2, \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\| \chi_{B_R^c} f \right\|_2, \\ &= 0. \end{aligned}$$

posteriormente podemos ver que si razonamos similarmente a (II) podemos ver que dado $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que si $r \geq R$, entonces

$$\left\| \chi_{B_r^c} f \right\| < \epsilon.$$

Lo que nos permite concluir el ejercicio.

Problema 3:

Pruebe que para todo $\lambda > 0$

$$\widehat{e^{-\lambda\pi|x|^2}}(\xi) = \lambda^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi\frac{|\xi|^2}{\lambda}}.$$

Solución:

Para esto veamos el caso base $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$ ($\lambda = 1$), aquí completando cuadrados y usando el teorema de Fubini se cumple que

$$\begin{aligned} \widehat{e^{-\pi|x|^2}}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi(|x|^2 + 2ix \cdot \xi)} dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi(|x|^2 + 2ix \cdot \xi - |\xi|^2)} e^{-\pi|\xi|^2} dx, \\ &= e^{-\pi|\xi|^2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi(x+i\xi) \cdot (x+i\xi)} dx, \\ &= e^{-\pi|\xi|^2} \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x_j + i\xi_j)^2} dx, \\ &= e^{-\pi|\xi|^2} \prod_{j=1}^n 1, \\ &= e^{-\pi|\xi|^2}. \end{aligned}$$

Ahora, suponga $f(x) = e^{-\pi\lambda|x|^2}$ y note que $f(x) = g\left(\lambda^{\frac{1}{2}}x\right)$, entonces, haciendo uso de la propiedad de las dilataciones en la transformada de Fourier sabemos que se cumple que

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \widehat{g\left(\lambda^{\frac{1}{2}}x\right)}(\xi), \\ &= \frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}} \widehat{g}\left(\frac{\xi}{\lambda^{\frac{1}{2}}}\right), \\ &= \lambda^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi\frac{|\xi|^2}{\lambda}}. \end{aligned}$$

Lo que concluye el resultado.

Problema 4:

Pruebe que para todo $\lambda > 0$

$$\widehat{e^{-2\pi\lambda|x|}}(\xi) = c_n \frac{\lambda}{(\lambda^2 + |\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

donde $c_n = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \pi^{-\frac{n+1}{2}}$.

Lema 1:

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du.$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx &= \int_{-\infty}^0 f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx + \int_0^{\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx, \\ &= I + J. \end{aligned}$$

Luego realizando el cambio de variable $u = x - \frac{1}{x}$ se tiene que

$$\begin{aligned} ux &= x^2 - 1, \\ 0 &= x^2 - ux - 1. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \left(u \pm \sqrt{u^2 + 4} \right), \\ dx &= \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4}} \right) du. \end{aligned}$$

Tomamos $x = \frac{1}{2} (u - \sqrt{u^2 + 4})$ para I , luego

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left(1 - \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4}} \right) du, \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4}} du, \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du - K. \end{aligned}$$

Por otro lado tomamos $x = \frac{1}{2}(u + \sqrt{u^2 + 4})$ para J , luego

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty f(u) \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4}}\right) du, \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty f(u) du + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty f(u) \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4}} du, \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty f(u) du + K. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty f(u) du - K + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty f(u) du + K, \\ &= \int_{-\infty}^\infty f(u) du. \end{aligned}$$

Lo que demuestra el Lema planteado.

Lema 2: Identidad de subordinación

$$e^{-2t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-y - \frac{t^2}{y}}}{\sqrt{y}} dy, \quad \text{donde } t > 0.$$

Note que si suponemos $f(x) = e^{-tx^2} \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} &= \int_{-\infty}^\infty f(x) dx, \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-t(x - \frac{1}{x})^2} dx, \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-t(x - \frac{1}{x})^2} dx && \text{Hacemos } x = \sqrt{y}, \\ &= \int_0^\infty e^{-t(\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}})^2} \frac{1}{\sqrt{y}} dy, \\ &= \int_0^\infty e^{-t(y - 2 + \frac{1}{y})} \frac{1}{\sqrt{y}} dy, \\ &= e^{2t} \int_0^\infty e^{-t(y + \frac{1}{y})} \frac{1}{\sqrt{y}} dy. \end{aligned}$$

Lo que implica que

$$\begin{aligned}
e^{-2t} &= \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t(y+\frac{1}{y})} \frac{1}{\sqrt{y}} dy && \text{Hacemos } u = ty, \\
&= \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u-\frac{t^2}{u}} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{u}} \frac{1}{t} du, \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-y-\frac{t^2}{y}}}{\sqrt{y}} dy.
\end{aligned}$$

Con $t > 0$, lo que concluye el lema previamente mencionado.

Solución:

Note que usando el lema de la identidad de subordinación, el teorema de Fubinni y el ejercicio (3) se tiene que

$$\begin{aligned}
\widehat{e^{-2\pi\lambda|x|}}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi\lambda|x|} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-y-\frac{(\lambda\pi|x|)^2}{y}}}{\sqrt{y}} dy e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{(\lambda\pi|x|)^2}{y}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx dy, \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi \left| \sqrt{\frac{\lambda^2 \pi}{y}} x \right|^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx dy, \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} \left(\frac{\lambda^2 \pi}{y} \right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi \frac{y|\xi|^2}{\lambda^2 \pi}} dy, \\
&= \pi^{-\frac{n+1}{2}} \lambda^{-n} \int_0^\infty y^{\frac{n-1}{2}} e^{-y \left(1 + \frac{|\xi|^2}{\lambda^2} \right)} dy && \text{Haciendo } u = y \left(1 + \frac{|\xi|^2}{\lambda^2} \right), \\
&= \pi^{-\frac{n+1}{2}} \lambda^{-n} \int_0^\infty \frac{u^{\frac{n-1}{2}}}{\left(1 + \frac{|\xi|^2}{\lambda^2} \right)^{\frac{n-1}{2}}} e^{-u} \frac{1}{\left(1 + \frac{|\xi|^2}{\lambda^2} \right)} du, \\
&= \pi^{-\frac{n+1}{2}} \lambda^{-n} \frac{1}{\left(1 + \frac{|\xi|^2}{\lambda^2} \right)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^\infty u^{\frac{n-1}{2}} e^{-u} du, \\
&= \pi^{-\frac{n+1}{2}} \frac{\lambda}{(\lambda^2 + |\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right), \\
&= \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \pi^{-\frac{n+1}{2}} \frac{\lambda}{(\lambda^2 + |\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \\
&= c_n \frac{\lambda}{(\lambda^2 + |\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir el ejercicio.

Problema 5:

Muestre que $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{1+x^2} \in L^2(\mathbb{R}) - L^1(\mathbb{R})$. Además, pruebe que:

$$\widehat{\frac{1}{\pi} \frac{x}{1+x^2}}(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi) e^{-2\pi|\xi|}.$$

Solución:

Veamos que $f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

Para esto note que

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left| \frac{x}{1+x^2} \right| dx, \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx, \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx, && \text{Haciendo } u = 1+x^2, \\ &= \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{1}{u} du, \\ &= \frac{1}{\pi} \ln(u) \Big|_1^{\infty}, \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Ahora veamos que $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Para esto note que

$$\begin{aligned}
 \|f\|_2^2 &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{x}{1+x^2} \right|^2 dx, \\
 &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx && \text{Haciendo } x = \tan(\theta), \\
 &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2(\theta)}{\sec^4(\theta)} \sec^2(\theta) d\theta, \\
 &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2(\theta)}{\sec^2(\theta)} d\theta, \\
 &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \sin^2(\theta) d\theta, \\
 &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta, \\
 &= \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/2} \cos(2\theta) d\theta \right) && \text{Haciendo } u = 2\theta, \\
 &= \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(u) du \right), \\
 &= \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2} \left(\sin(x) \Big|_0^{\pi} \right), \\
 &= \frac{1}{2\pi}.
 \end{aligned}$$

Ahora calculemos su transformada, para esto vamos a usar que $\widehat{xg(x)} = (-2\pi i)^{-1} \frac{d}{d\xi} \widehat{g}(\xi)$, entonces

$$\widehat{\frac{1}{1+x^2}}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{1+x^2} dx.$$

Para hallar esta transformada usaremos variable compleja usando $h(x) = \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{(x+i)(x-i)}$.

Tenemos 2 casos, primero pensemos cuando $\xi \geq 0$, para esto consideraremos el contorno semicircular en el semiplano inferior, aquí, el único polo existente es cuando $x = -i$, por lo que estudiaremos su residuo ahí

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(h, -i) &= \lim_{x \rightarrow -i} \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{x - i}, \\
 &= -\frac{e^{-2\pi \xi}}{2i}.
 \end{aligned}$$

Luego usando el teorema de los residuos podemos concluir que

$$\begin{aligned}\widehat{\frac{1}{1+x^2}}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{1+x^2} dx, \\ &= (-2\pi i) \cdot \text{Res}(h, -i), \\ &= (-2\pi i) \left(-\frac{e^{-2\pi \xi}}{2i} \right), \\ &= \pi e^{-2\pi \xi}.\end{aligned}$$

Veamos el caso contrario, en el que $\xi < 0$, para esto consideraremos el contorno semicircular en el semiplano superior, aquí el único polo existente es cuando $x = i$, por lo que estudiaremos su residuo ahí

$$\begin{aligned}\text{Res}(h, i) &= \lim_{x \rightarrow i} \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{x + i}, \\ &= \frac{e^{2\pi \xi}}{2i}.\end{aligned}$$

Luego usando el teorema de los residuos podemos concluir que

$$\begin{aligned}\widehat{\frac{1}{1+x^2}}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{1+x^2} dx, \\ &= (2\pi i) \cdot \text{Res}(h, i), \\ &= (2\pi i) \left(\frac{e^{2\pi \xi}}{2i} \right), \\ &= \pi e^{2\pi \xi}.\end{aligned}$$

Luego podemos afirmar que en general

$$\widehat{\frac{1}{1+x^2}} = \pi e^{-2\pi|\xi|}.$$

Luego

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \widehat{\frac{x}{1+x^2}} &= \frac{1}{\pi} (-2\pi i)^{-1} \frac{d}{d\xi} \pi e^{-2\pi|\xi|}, \\ &= \frac{1}{\pi} (-2i)^{-1} (-2\pi \text{sgn}(\xi)) e^{-2\pi|\xi|}, \\ &= -i \text{sgn}(\xi) e^{-2\pi|\xi|}.\end{aligned}$$

Lo que concluye el ejercicio.