LISTA DE EJERCICIOS 3: ANÁLISIS FUNCIONAL
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, BOGOTÁ
PRIMER SEMESTRE 2025

PROFESOR: OSCAR RIAÑO

Observación. Salvo que se diga lo contrario, los espacios vectoriales considerados tienen como campo escalar $\mathbb{R}$.

$E^\star$ denota el espacio de todos los funcionales continuos de E en $\mathbb{R}$. Hacemos esta observación, pues en otros contextos también se usa la notación E^* para denotar este espacio dual.

1. Espacios L^p

Ejercicio 1. *(I) Sea $\mathbb{R}$ con la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

(a) Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, considere δ_{x_0} la medida de Dirac centrada en x_0 dada por: $\delta_{x_0}(A) = 1$ si $x_0 \in A$, y $\delta_{x_0}(A) = 0$ si $x_0 \notin A$, para cada $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Muestre que δ_{x_0} es una medida.

(b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible. Muestre que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\delta_{x_0} = f(x_0).$$

Sugerencia. *Comience mostrando la afirmación para funciones simples positivas, luego para funciones medibles no negativas y concluya el resultado general.*

(c) De un ejemplo de una función que sea integrable con la medida δ_{x_0} para algún x_0, pero que no sea integrable con la medida de Lebesgue.

(II) Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ con la σ-álgebra $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(a) Considere la medida contadora μ dada por: $\mu(A) = cardinal(A)$ si A es finito y $\mu(A) = \infty$ caso contrario, para cada $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Muestre que μ es una medida.

(b) Dada $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función medible, es decir, f es una secuencia, $f = \{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, para algunos $a_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$. Muestre que si f es integrable (es decir, $\int_{\mathbb{N}} |f|\, d\mu < \infty$), entonces

$$\int_{\mathbb{N}} f\, dx = \sum_{j=1}^{\infty} a_j.$$

Ejercicio 2. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medible.*

(I) Sea $1 \le p < \infty$. Para $t > 0$, defina $h_f(t) = \mu(\{|f| > t\})$. Muestre que si $f \in L^p(X, \mu)$ vale

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty t^{p-1} h_f(t)\, dt.$$

Sugerencia. *Note que $h_f(t) = \int_{\{|f|>t\}} d\mu$ y aplique el teorema de Fubini.*

(II) *Decimos que una secuencia de funciones medibles* $\{f_n\}$ **converge en medida** *en* X *a una función* f*, si para todo* $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(\{|f_n - f| \geq \epsilon\}\big) = 0.$$

Si $1 \leq p < \infty$*, muestre que si* $f_n \to f$ *en* $L^p(X,\mu)$*, entonces* f_n *converge a* f *en medida. De un ejemplo, que muestre que la convergencia en medida no implica convergencia en* L^p*.*

Ejercicio 3. *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *abierto. Sea* $1 \leq p \leq \infty$*. Entonces* $L^p(\Omega)$ *es un espacio de Banach.*

Sugerencia. *Vea la demostración del Teorema 4.8 de Brezis.*

Ejercicio 4. *Sean* $1 \leq p \leq q \leq \infty$*,* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *abierto y acotado. Esto implica que* $\lambda(\Omega) < \infty$*, donde* λ *denota la medida de Lebesgue.*

(I) *Muestre que* $L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ *y la función inyección es continua. Más aún, vale que*

$$\|f\|_{L^p} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q},$$

para todo $f \in L^q(\Omega)$*.*

(II) *Si* $f \in L^\infty(\Omega)$*. Muestre que* $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$*.*

(III) *Muestre que si* $f \in l^q$*, para algún* $1 \leq q \leq \infty$*, entonces* $f \in l^\infty$*. Se puede mostrar que,* $l^q \subseteq l^\infty$ *y la inclusión es continua.*

(IV) *Muestre que si* $f \in l^q$*, para algún* $1 \leq q < \infty$*, también vale que* $\|f\|_{l^\infty} = \lim_{p\to\infty} \|f\|_{l^p}$*.* **Sugerencia**. *Primero, muestre que* $f \in l^p$ *para todo* $p \geq q$*. Para esto, si* $f = \{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$*, utilice la desigualdad* $|a_j|^p = |a_j|^{p-q}|a_j|^q \leq \|f\|_{l^\infty}^{p-q}|a_j|^q$ *y sume sobre* j*.*

Ejercicio 5. *Considere el espacio* $L^p(\mathbb{R}^n)$*,* $1 \leq p \leq \infty$*. Sean*

$$f_0(x) = \begin{cases} |x|^{-\alpha}, & si\ |x| \leq 1, \\ 0, & si\ |x| > 1. \end{cases} \qquad f_1(x) = \begin{cases} 0, & si\ |x| \leq 1, \\ |x|^{\alpha}, & si\ |x| > 1. \end{cases}$$

(I) *¿Para qué valores de* $\alpha \in \mathbb{R}$*,* $f_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$*?*

(II) *¿Para qué valores de* $\alpha \in \mathbb{R}$*,* $f_1 \in L^p(\mathbb{R}^n)$*?*

(III) *¿Para qué valores de* $\alpha \in \mathbb{R}$*,* $\frac{1}{1+|x|^\alpha} \in L^p(\mathbb{R}^n)$*?*

Sugerencia*: Utilice coordenadas polares en* $\mathbb{R}^n$*.*

Ejercicio 6. *Considere el intervalo* $(0,1)$ *equipado con la* σ*-álgebra de Borel y la medida de Lebesgue.*

(I) *Considere la secuencia de funciones* $\{f_n\}$ *dada por* $f_n(x) = ne^{-nx}$*. Muestre que:*
  (a) $f_n \to 0$ *en casi toda parte en* $(0,1)$*.*
  (b) f_n *está acotada en* $L^1(0,1)$*.*
  (c) f_n *no converge fuertemente (es decir, en norma) a* 0 *en* $L^1(0,1)$*.*
  (d) f_n *no converge débilmente a* 0 *en* $\sigma(L^1, L^\infty)$*.*

(II) *Dado* $1 < p < \infty$*. Considere la secuencia de funciones* $\{g_n\}$ *dada por* $g_n(x) = n^{\frac{1}{p}}e^{-nx}$*. Muestre que:*
  (a) $g_n \to 0$ *en casi toda parte en* $(0,1)$*.*
  (b) $\{g_n\}$ *está acotada en* $L^p(0,1)$*.*
  (c) g_n *no converge fuertemente (es decir, en norma) a* 0 *en* $L^p(0,1)$*.*
  (d) g_n *converge débilmente a* 0 *en* $\sigma(L^p, L^{p'})$*.*

Ejercicio 7. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto.*

(I) *Considere la secuencia de funciones $\{f_n\} \subseteq L^p(\Omega)$ y $f \in L^p(\Omega)$ con $1 < p < \infty$. Asuma que*
 (a) *$f_n \rightharpoonup f$ débilmente $\sigma(L^p, L^{p'})$.*
 (b) *$\|f_n\|_{L^p} \to \|f\|_{L^p}$.*
 Demuestre que $f_n \to f$ fuertemente (es decir, en norma) en $L^p(\Omega)$.

(II) *Construya una secuencia $\{f_n\}$ en $L^1(\Omega)$, $f_n \geq 0$ tales que*
 (a) *$f_n \rightharpoonup f$ débilmente $\sigma(L^1, L^\infty)$.*
 (b) *$\|f_n\|_{L^1} \to \|f\|_{L^1}$.*
 (c) *$\|f_n - f\|_{L^1}$ no se aproxime a cero.*

Sugerencia (I). *Sin pérdida de generalidad, asuma que $\|f\|_{L^p} = 1$. Definiendo $\widetilde{f}_n := \frac{f_n}{\|f_n\|_{L^p}}$, muestre que $\widetilde{f}_n \rightharpoonup f$ cuando $n \to \infty$. Concluya que podemos asumir que la secuencia $\{f_n\}$ en (I) satisface que $\|f_n\| = 1$, para todo n. Ahora, sea $h \in L^{p'}(\Omega)$ tal que $\|h\|_{L^{p'}} = 1$ y $\langle f, h\rangle = \int_\Omega fh\, dx = 1$, ¿por qué existe tal h? Con esto concluya que para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces*

$$1 - \epsilon < \int_\Omega \Big(\frac{f_n + f}{2}\Big) h \leq \Big\|\frac{f_n + f}{2}\Big\|_{L^p}.$$

Utilice las desigualdades de Clarkson y la anterior para concluir el resultado deseado.

Ejercicio 8. (I) *Sea $1 < p < \infty$. Considere las secuencias $x_n = \{x_n^j\}_{j=1}^\infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x = \{x^j\}_{j=1}^\infty$. Asuma que $x_n, x \in l^p$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Muestre que $x_n \rightharpoonup x$ en l^p si y solo si $\{x_n\}$ es acotada (en l^p) y $x_n^j \to x^j$ para cada entero positivo j.

(II) *Considere la secuencia $x_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, 0, \ldots)$. ¿En qué espacios l^p, con $1 \leq p \leq \infty$, converge débilmente?*

2. Espacios de Hilbert

Ejercicio 9. (I) *Dado un espacio vectorial normado $(E, \|\cdot\|)$. Muestre que la norma de E proviene de un producto interno (real) si y solamente si se satisface la ley del paralelogramo:*

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\big(\|a\|^2 + \|b\|^2\big),$$

para todo $a, b \in E$. En particular, un espacio de Banach es de Hilbert si y solo si su norma satisface la ley del paralelogramo.

(II) *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ abierto. Muestre que $L^p(\Omega)$ es de Hilbert si, y solo si, $p = 2$.*

Ejercicio 10. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto. Sea $w : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible positiva en casi toda parte. Verifique que el siguiente espacio (módulo clase de equivalencias) es de Hilbert*

$$L^2(\Omega, w) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : \ f \text{ es medible y } \int_\Omega |f(x)|^2 w(x)\, dx < \infty\}$$

con el producto interno $(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)w(x)\, dx$. ¿Qué condiciones se le pueden asignar a w para garantizar que $L^2(\Omega, w) \subseteq L^2(\Omega)$?

Ejercicio 11. *Sea H un espacio de Hilbert y $\{x_n\}$ una secuencia en H.*

(I) *Suponga que $x_n \rightharpoonup x$ en H y $\|x_n\| \to \|x\|$. Muestre que $x_n \to x$ en H.*

(II) Suponga que $x_n \rightharpoonup x$ *en* H *y* $\limsup \|x_n\| \leq \|x\|$. *Muestre que* $x_n \to x$ *en* H.

Ejercicio 12. *Sea* H *un espacio de Hilbert*

(I) Sea $\{K_n\}_{n\geq 1}$ *una secuencia decreciente* $K_{n+1} \subseteq K_n$ *de conjuntos convexos cerrados de* H *tal que* $\bigcap K_n \neq \emptyset$. *Demuestre que la secuencia de proyecciones* $P_{K_n} f$ *converge fuertemente a un límite e identifique este límite.*

(II) Sea $\{K_n\}_{n\geq 1}$ *una secuencia creciente* $K_n \subseteq K_{n+1}$ *de conjuntos convexos cerrados no vacíos de* H. *Demuestre que la secuencia de proyecciones* $P_{K_n} f$ *converge fuertemente a un límite e identifique este límite.*

Ejercicio 13. *(I) Muestre que los siguientes conjuntos* M *son subespacios cerrados no vacíos de* $L^2((-1,1))$ *y determine explícitamente la proyección* P_M *en cada caso.*

(a) $M = \{f \in L^2((-1,1)) : f(x) = f(-x)$ *para casi todo* $x \in (-1,1)\}$.

(b) $M = \{f \in L^2((-1,1)) : \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0\}$.

(c) $M = \{f \in L^2((-1,1)) : f(x) = 0$ *para casi todo* $x \in (-1,0)\}$.

(II) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto acotado. Considere*

$$K = \{f \in L^2(\Omega) : \int_\Omega f(x)\,dx \geq 1\}.$$

(a) Muestre que K *es un conjunto cerrado convexo de* $L^2(\Omega)$.

(b) Determine la proyección sobre K, *es decir, el operador* P_K.

Ejercicio 14. *Sea* H *un espacio de Hilbert y* $A \in L(H) = L(H,H)$ *(el conjunto de funciones lineales continuas de* H *en* H*).*

(I) Para $y \in H$ *fijo, muestre que el funcional* $\Phi_y : H \to \mathbb{R}$ *dado por* $x \mapsto (Ax, y)$ *es lineal y continuo. Deduzca que existe un único elemento en* H, *que denotaremos por* $A^\star y$, *tal que*

$$(Ax, y) = (x, A^\star y), \quad \forall x \in H.$$

(II) Muestre que $A^\star \in L(H)$. $A^\star$ *se llama el adjunto de* A. **Sugerencia**. *Para la continuidad utilice el teorema del gráfico cerrado.*

(III) Verifique que $\left(A^\star\right)^\star = A$ *y que* $\|A^\star\| = \|A\|$.

Ejercicio 15. *Sea* H *un espacio de Hilbert y* $M \subseteq H$ *un subespacio cerrado. Considera la proyección ortogonal* P_M. *Muestre que*

(I) P_M *es lineal.*

(II) $P_M^2 = P_M$ *(esto es, aplicar dos veces el operador proyección da el mismo resultado).*

(III) $P_M^\star = P_M$, *donde* $P_M^\star$ *denota el adjunto de* P_M *(vea el Ejercicio 14).*

(IV) Rango$(P_M) = M$ *y Kernel*$(P_M) = M^\perp$.

(V) Suponga que $P \in L(H)$. *Entonces* P *es una proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado de* H *si, y solo si,* $P = P^2 = P^\star$.

Ejercicio 16. *Sea* $A \in L(H)$. *Para cada* $t \geq 0$, *definimos* $e^{tA} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$, *donde* I *denota el operador identidad,* A^n *denota la composición de* A *consigo mismo* n *veces.*

(I) Muestre que e^{tA}, $t \geq 0$ *está bien definida como elemento de* $L(H)$. *Es decir, el límite* $m \to \infty$ *de* $I + \sum_{n=1}^{m} \frac{(tA)^n}{n!}$ *existe en* $L(H)$. *Más aún,*

$$\|e^{tA}\|_{L(H)} \leq e^{t\|A\|_{L(H)}}.$$

(II) *Muestre que para todo* $t, t' \geq 0$, $e^{tA}e^{t'A} = e^{(t+t')A}$ *(en el sentido de composición de operadores).*

(III) *Muestre que*

$$\lim_{t \to 0^+} \|e^{tA} - I\|_{L(H)} = 0.$$

y

$$\lim_{t \to 0^+} \|\frac{e^{tA} - I}{t} - A\|_{L(H)} = 0.$$

(IV) *Encuentre el adjunto de* e^{tA}, $t \geq 0$. *Para la definición de adjunto, vea el Ejercicio 14.*

A la familia $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ *se le llama un semigrupo de operadores acotados sobre* H, *que son uniformemente continuos.*

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá
Email address: `ogrianoc@unal.edu.co`