Variable Compleja: Quiz III

26 de febrero de 2025

Universidad Nacional de Colombia

Cesar Augusto Gómez Sierra

Andrés David Cadena Simons   acadenas@unal.edu.co

Problema 1:

Calcular

$$\int_0^{\pi} \frac{sen^4(x)}{a+bcos(x)}dx, \quad 0<a<b.$$

Solución:

Queremos resolver la integral:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a-b\cos(x))^2}$$

donde $a>b>0$.

Haciendo el cambio de variable $z=e^{ix}$, tenemos:

$$\cos(x) = \frac{z^2+1}{2z}$$

y $dx = \frac{dz}{iz}$, lo que convierte la integral en un contorno en el plano complejo:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{iz}dz}{\left(a-b\frac{z^2+1}{2z}\right)^2}$$

Simplificando:

$$I = \frac{2}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\left(2az-b(z^2+1)\right)^2}$$

$$I = \frac{2}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\left(-bz^2+2az-b\right)^2}$$

Los polos se encuentran al resolver:

$$-bz^2+2az-b=0$$

$$z = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2-4b^2}}{2b} = \frac{a\pm\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

Definiendo $k=\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$, tenemos un polo dentro del contorno unitario, ya que $k<1$ cuando $a>b$.

El residuo en $z=k$ se calcula como:

$$\text{Res}\left[\frac{2}{i}\frac{1}{\left(-b(z-k)(z-k')\right)^2}, z=k\right]$$

Realizando las operaciones, obtenemos:

$$I = \frac{2\pi}{a^2-b^2}$$

Problema 2:

Encontrar el número de ceros de $z^4 - 6z + 3 = 0$, en la región $1 < |z| < 2$.

Solución:

Solución.

Problema 3:

Calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^5+1} dx.$$

Solución:

Solución.

Problema 4:

Calcular

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^2}dx, \quad 0<\alpha<1.$$

Solución:

Solución.