Sobre el operador maximal de Hardy-Littlewood

Andrés David Cadena Simons   Oscar Riaño

Semillero de Análisis Armónico y Ecuaciones Diferenciales Parciales, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Conceptos y definiciones

Función de distribución

Sea (X, μ) un espacio de medida y sea $f : X \to \mathbb{C}$ una función medible. Se llama función de distribución de f asociadad a μ a la función:

$$\begin{aligned} a_f : (0, \infty) &\to [0, \infty] \\ \lambda &\to \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) \end{aligned}$$

Desigualdades débiles y fuertes

Sean (X, μ) y (Y, ν) dos espacios de medida y sea T un operador de $\mathcal{L}^p(X, \mu)$, en el espacio de funciones medibles de Y en $\mathbb{C}$.

$$T : \mathcal{L}^p(X, \mu) \to \mathcal{M}(Y, \mathbb{C})$$

i. Se dice que T es (p, q)-débil (con $q < \infty$) si para todo $\lambda > 0$ existe $C > 0$ tal que:

$$\nu(\{y \in Y : |(Tf)(y)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q .$$

ii. Se dice que T es (p, ∞)-débil si está acotado de $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ en $\mathcal{L}^\infty(Y, \nu)$.

iii. Se dice que T es (p, q)-fuerte si está acotado de $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ en $\mathcal{L}^q(Y, \nu)$.

Función Maximal de Hardy-Littlewood

Sea B_r la bola euclidea centrada en el origen y de radio r. Definiremos la función maximal de Hardy-Littlewood de una función localmente integrable f en $\mathbb{R}^n$ como:

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f(x-y)| dy$$

Espacios de Sobolev

Dado $1 \leq p \leq \infty$. Recordamos que el *espacio de Sobolev* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ comprende todas las funciones $f \in \mathcal{L}^p$ tales que f tiene gradiente débil y $\nabla f \in \mathcal{L}^p$. A este espacio se le asigna la norma

$$\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_{L^p} + \|\nabla f\|_{L^p}.$$

Resultados

Teorema (Teorema de interpolación de Marcinkiewicz). *Sean (X, μ) y (Y, ν) espacios medibles, $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, y tome T como un operador sublineal de $L^{p_0}(X, \mu) + L^{p_1}(X, \mu)$ a las funciones de medida de Y que es débil (p_0, p_0) y es débil (p_1, p_1). Entonces T es fuerte (p, p) para $p_0 < p < p_1$.*

Algunas consecuencias:

La función maximal establece un operador fuerte (∞, ∞). Para ver esto, sea $f \in \mathcal{L}^\infty$, entonces para $x \in \mathbb{R}^N$ y $r > 0$ arbitrarios se tiene

$$\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f(x-y)|\, dy \leq \|f\|_\infty .$$

Luego tomando el supremo en $r > 0$, tenemos $\mathcal{M}f(x) \leq \|f\|_\infty$. Ahora, como $x \in \mathbb{R}^N$ es arbitrario, se deduce que

$$\|\mathcal{M}f\|_\infty \leq \|f\|_\infty .$$

Luego $\mathcal{M}$ define un operador (∞, ∞).

Teorema. El operador $\mathcal{M}$ es débil $(1, 1)$. Para ver esto $\cdots$

Como consecuencia del teorema de interpolación de Marcinkiewicz y lo anterior, tenemos que $\mathcal{M}$ es un operador fuerte (p, p) para todo $1 < p \leq \infty$.

Notemos que dada $f \in \mathcal{L}^1$, $\mathcal{M}f \in \mathcal{L}^1$ si y solo si $f = 0$. Por lo que no se espera la acotación fuerte en $\mathcal{L}^1$.

Teorema (Teorema de diferenciación de Lebesgue).

Teorema Si ϕ es una función positiva, radial, decreciente (como función de $(0, \infty)$), entonces $\sup_t |\phi_t * f(x)| \leq \|\phi\|_1 \mathcal{M}f(x)$. Como consecuencia tenemos que la función maximal $\sup_t |\phi_t * f(x)|$ es débil $(1, 1)$ y fuerte (p, p), $1 \leq p \leq \infty$. Este resultado permite generalizar (sin usar secuencias $\{t_n\}$) el resultado de convergencia mencionado anteriormente para aproximaciones de la identidad.

Teorema [7] Se verifica que

$$\mathcal{M} : W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

establece un operador acotado cuando $1 < p \leq \infty$.

Trabajo Futuro

A different kind of highlighted block.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

Interdum et malesuada fames $\{1, 4, 9, \ldots\}$ ac ante ipsum primis in faucibus. Cras eleifend dolor eu nulla suscipit suscipit. Sed lobortis non felis id vulputate.

A heading inside a block

Praesent consectetur mi $x^2 + y^2$ metus, nec vestibulum justo viverra nec. Proin eget nulla pretium, egestas magna aliquam, mollis neque. Vivamus dictum $\mathbf{u}^\intercal\mathbf{v}$ sagittis odio, vel porta erat congue sed. Maecenas ut dolor quis arcu auctor porttitor.

Another heading inside a block

Sed augue erat, scelerisque a purus ultricies, placerat porttitor neque. Donec $P(y \mid x)$ fermentum consectetur $\nabla_x P(y \mid x)$ sapien sagittis egestas. Duis eget leo euismod nunc viverra imperdiet nec id justo.

Agradecimientos

Agradezco al Semillero de Análisis Armónico y Ecuaciones Diferenciales Parciales de la Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogotá, especialmente a los docentes Ricardo Ariel Pastrán Ramírez y Oscar Guillermo Riaño Castañeda, quienes orientaron el proceso de desarrollo de este póster, tanto en la parte teórica como en la presentación del mismo.

Referencias

[1] Joseph Bak and Donald J. Newman. *Complex analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, third edition, 2010. ISBN 978-1-4419-7287-3. doi: 10.1007/978-1-4419-7288-0. URL https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7288-0.

[2] Emanuel Carneiro. Regularity of maximal operators: recent progress and some open problems. In *New trends in applied harmonic analysis. Vol. 2—harmonic analysis, geometric measure theory, and applications*, Appl. Numer. Harmon. Anal., pages 69–92. Birkhäuser/Springer, Cham, 2019. ISBN 978-3-030-32352-3.

[3] Javier Duoandikoetxea. *Fourier analysis*, volume 29 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. ISBN 0-8218-2172-5. doi: 10.1090/gsm/029. URL https://doi.org/10.1090/gsm/029. Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Uribe.

[4] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010. ISBN 978-0-8218-4974-3. doi: 10.1090/gsm/019. URL https://doi.org/10.1090/gsm/019.

[5] Loukas Grafakos. *Classical Fourier analysis*, volume 249 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, third edition, 2014. ISBN 978-1-4939-1193-6. doi: 10.1007/978-1-4939-1194-3. URL https://doi.org/10.1007/978-1-4939-1194-3.

[6] Piotr Hajł asz and Jani Onninen. On boundedness of maximal functions in Sobolev spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 29 (1):167–176, 2004. ISSN 1239-629X,1798-2383.

[7] Juha Kinnunen. The Hardy-Littlewood maximal function of a Sobolev function. *Israel J. Math.*, 100:117–124, 1997. ISSN 0021-2172,1565-8511. doi: 10.1007/BF02773636. URL https://doi.org/10.1007/BF02773636.

[8] Juha Kinnunen and Peter Lindqvist. The derivative of the maximal function. *J. Reine Angew. Math.*, 503:161–167, 1998. ISSN 0075-4102,1435-5345.

[9] Felipe Linares and Gustavo Ponce. *Introduction to nonlinear dispersive equations*. Universitext. Springer, New York, second edition, 2015. ISBN 978-1-4939-2180-5. doi: 10.1007/978-1-4939-2181-2. URL https://doi.org/10.1007/978-1-4939-2181-2.

acadenas@unal.edu.co