Análisis Armónico: Taller 2

22 de junio de 2025

Universidad Nacional de Colombia

Ricardo Ariel Pastrán Ramirez

Andrés David Cadena Simons acadenas@unal.edu.co

Problema 1:

Convolución

(I) Pruebe que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p \leq 2$, entonces

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$$

en $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

(II) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, donde $1 < p < \infty$, entonces $f * g \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$. ¿Qué se puede afirmar cuando $p = 1$ o $p = \infty$?

Antes de comenzar será de utilidad demostrar la siguiente desigualdad.

Lema 1: Desigualdad de Young

Suponga $p, q, r \leq 1$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. Luego dadas $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Definamos T_g al operador

$$T_g(f) = f * g.$$

Veamos que $T_g : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ es un operador acotado ya que usando la desigualdad de Minkowski.

$$\begin{aligned}
\|T_g(f)\|_q &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}, \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) \, dy \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y) g(x-y)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} dy, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} dy, \\
&\leq \|g\|_q \|f\|_1 .
\end{aligned}$$

Por otro lado también podemos ver que $T_g : L^{q'}(\mathbb{R}^n) \to L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ ya que usando la desigualdad de Hölder podemos ver que

$$\begin{aligned}
\|T_g(f)\|_\infty &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dx \right|, \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|\,dy \right|, \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{q'}\,dy \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^{q}\,dy \right)^{\frac{1}{q}}, \\
&\leq \|g\|_q \|f\|_{q'}.
\end{aligned}$$

Luego, usando el teorema de interpolación de Riesz-Thorin sabemos que podemos definir $T_g : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^r(\mathbb{R}^n)$ con

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} &= \frac{1-t}{1} + \frac{t}{q'}, \\
\frac{1}{r} &= \frac{1-t}{q}.
\end{aligned}$$

Lo que implica

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1,$$

lo que concluye el lema.

Solución:

(I) Veamos que $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ya que usando la desigualdad integral de Minkowski's se cumple que

$$\begin{aligned}
\|f*g\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}}, \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}} dy, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}} dy, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \|g\|_p\,dy, \\
&\leq \|f\|_1 \|g\|_p.
\end{aligned}$$

Ahora veamos que $\widehat{f*g} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, ya que usando el teorema de interpolación de

Riesz-Thorin podemos ver que como

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n),$$
$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n).$$

Luego podemos definir $\mathcal{F} : L^p \to L^q(\mathbb{R}^n)$ con

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{1} + \frac{t}{2},$$
$$\frac{1}{q} = \frac{t}{2}.$$

Lo que implica que

$$\frac{1}{p} - 1 + \frac{2}{q} = \frac{1}{q},$$

que a su vez implica que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

en donde sabemos que $q = p'$, lo que nos permite concluir que $\widehat{f * g} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.
Ahora veamos que se cumple la propiedad.
Recuerde que si $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces $g \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$, suponga $g_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que $g = g_1 + g_2$, además, suponga $\{g_k\} \subseteq L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que $g_k \to g_2$ cuando $k \to \infty$, entonces

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= (f * \widehat{(g_1 + g_2)})(\xi), \\
&= \widehat{f * g_1}(\xi) + \widehat{f * g_2}(\xi), \\
&= \widehat{f * g_1}(\xi) + \lim_{k\to\infty} \widehat{f * g_k}(\xi), \\
&= \widehat{f}(\xi)\widehat{g_1}(\xi) + \lim_{k\to\infty} \widehat{f}(\xi)\widehat{g_k}(\xi), \\
&= \widehat{f}(\xi)\widehat{g_1}(\xi) + \widehat{f}(\xi)\widehat{g_2}(\xi), \\
&= \widehat{f}(\xi)\left(\widehat{g_1}(\xi) + \widehat{g_2}(\xi)\right), \\
&= \widehat{f}(\xi)\widehat{g_1 + g_2}(\xi), \\
&= \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

Lo que concluye el resultado.

(II) Veamos que $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$.
Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (este viene dado por la continuidad de las traslaciones en $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, es decir que $\lim_{h\to 0} \|g(x+h) - g(x)\|_{p'} = 0$) tal que si

$$|x - y| < \delta,$$

entonces usando la desigualdad de Young y la continuidad de las traslaciones de la norma en $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ (es este caso tomamos ese ϵ como $\frac{\epsilon}{\|f\|_p}$) se tiene que

$$\begin{aligned}
|(f*g)(x)-(f*g)(y)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)\,dz - \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(y-z)\,dz\right|, \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(z)\left(g(x-z)-g(y-z)\right)\,dz\right|, \\
&\leq \sup_{z\in\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(z)\left(g(x-z)-g(y-z)\right)\,dz\right|, \\
&\leq \left\|f*(g(y-\cdot)-g(x-\cdot))\right\|_\infty, \\
&\leq \|f\|_p \left\|g(y)-g(x)\right\|_{p'} \\
&< \|f\|_p \frac{\epsilon}{\|f\|_p}, \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir que $f*g \in C(\mathbb{R}^n)$.
Ahora veamos que $f*g(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$.
Suponga $\{g_k\} \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ (continua de soporte compacto) tal que $g_k \to g$ cuando $k \to \infty$, sin pérdida de generalidad suponga $supp(g_k) \subset B_k(0)$, luego dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $k > N$, entonces

$$\|g-g_k\|_{p'} < \epsilon.$$

Además, note que como $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, podemos asegurar que dado $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que si $k > R$, entonces

$$\left(\int_{|x|>k} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Luego tomando k adecuado que cumpla las 2 condiciones anteriores se cumple que

$$\begin{aligned}
|(f*g)(x)| &= |(f*(g_k+g-g_k))(x)|, \\
&= |(f*g_k(x))| + |(f*(g-g_k))(x)|, \\
&= I + J.
\end{aligned}$$

Estudiemos I y supongamos $|x| > 2k$, entonces

$$\begin{aligned}
|(f * g_k)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g_k(x-y)\, dy \right|, \\
&\leq \int_{B_k(x)} |f(y) g_k(x-y)|\ dy, \\
&\leq \|g_k\|_\infty \int_{B_k(x)} |f(y)|\, dy, \\
&\leq \|g_k\|_\infty \int_{|y| \geq k} |f(y)|\, dy, \\
&< \|g_k\|\, \epsilon.
\end{aligned}$$

Ahora estudiemos J, usando la desigualdad de Young se tiene que

$$\begin{aligned}
|(f * (g - g_k))(x)| &\leq \|(f * (g - g_k))\|_\infty, \\
&\leq \|f\|_p \|g - g_k\|_{p'}, \\
&< \|f\|_p\, \epsilon.
\end{aligned}$$

luego tenemos que tomando x suficientemente grande y un k adecuado se cumple que

$$\begin{aligned}
|(f * g)(x)| &= I + J, \\
&< \|g_k\|\, \epsilon + \|f\|\, \epsilon, \\
&< M\epsilon.
\end{aligned}$$

Por lo que podemos asegurar que $(f * g)(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$, lo que concluye el ejercicio.
¿Qué podemos afirmar cuando $p = 1$ o $p = \infty$?
Veamos que si $p = 1$, entonces $p' = \infty$, luego se puede ver que $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ya que

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_\infty &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\, dy \right|, \\
&= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|g\|_\infty \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, dy \right|, \\
&= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|g\|_\infty \|f\|_1, \\
&= \|f\|_1 \|g\|_\infty.
\end{aligned}$$

Además, se puede rescatar con un argumento similar a cuando $1 < p < \infty$ que

$f * g \in C(\mathbb{R}^n)$, ya que

$$\begin{aligned}
|(f*g)(x)-(f*g)(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\left(g(x-z)-g(y-z)\right)\, dz \right|, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| \left\| g(x-\cdot)-g(z-\cdot)\right\|_\infty dz, \\
&\leq \|f\|_1 \frac{\epsilon}{\|f\|_1}.
\end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir que $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$.
Por otro lado también se puede ver que $f * g \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$, ya que, de nuevo, se puede repetir el mismo argumento realizado anteriormente hasta la parte en la que se estudia la integral J, en este caso se procede con

$$\begin{aligned}
|(f*(g-g_k))(x)| &\leq \left\| f*(g-g_k)\right\|_\infty, \\
&\leq \|f\|_1 \left\| g-g_k\right\|_\infty, \\
&\leq \|f\|_1 \epsilon.
\end{aligned}$$

Lo que de nuevo nos permite concluir que $f * g \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$.
Note que si $p=\infty$, $p'=1$, por lo que se puede concluir lo mismo que en el caso anterior cambiando los papeles de f y g.

Problema 2:

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, f es continua en 0 y $\widehat{f} \geq 0$ entonces $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Solución:

Usemos el núcleo del calor

$$g_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|}{4t}},$$

en donde

$$\widehat{g_t}(\xi) = e^{-4\pi^2 t|\xi|^2}.$$

Note que usando que g_t es par y propiedades de la transformada de Fourier se cumple que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_t(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_t(-x)\, dx,\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{\widehat{g_t}}(x)\, dx,\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \widehat{g_t}(\xi)\, d\xi.\end{aligned}$$

Además si tomamos $t \to 0$, como f es continua en 0 (es decir que 0 es un punto de Lebesgue) entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_t(x)\, dx = f(0).$$

Luego como $\widehat{f} \geq 0$ y $\widehat{f}(\xi) e^{-4\pi^2 t|\xi|^2} \to \widehat{f}(\xi)$ de manera creciente y monótona cuando $t \to 0$, usando el teorema de la convergencia monótona tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{f}\right\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\, d\xi,\\ &= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \widehat{g_t}(\xi)\, d\xi,\\ &= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_t(x)\, dx,\\ &= f(0).\end{aligned}$$

Problema 3:

Producto de convolución $\mathcal{S}' * \mathcal{S}$.

(I) Sean f, ϕ y $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pruebe que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f * \phi(x)\psi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widetilde{\phi} * \psi(x)\, dx,$$

donde $\widetilde{\phi}(x) = \phi(-x)$. Esto motiva la siguiente definición: Sean $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$T * \phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \psi \longmapsto T * \phi(\psi) := T(\widetilde{\phi} * \psi).$$

Pruebe que $T * \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y que

$$\widehat{(T * \phi)} = \widehat{T}\widehat{\phi} \quad \text{en} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

(II) Por otro lado, si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se define:

$$T *_1 \phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longmapsto T *_1 \phi(x) := T(\tau_x\widetilde{\phi}),$$

donde $\tau_x\phi(y) = \phi(y - x)$. Pruebe entonces que

$$T *_1 \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{y} \quad T *_1 \phi = T * \phi.$$

Solución:

(I)
Veamos que $T * \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Por claridad defina el operador $T_T(\phi) = T * \phi$, note que como $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y la convolución para funciones en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es lineal, entonces T_T es lineal, ya que si tomamos $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y λ escalar, entonces

$$\begin{aligned}
T_T(\phi + \lambda\psi) &= (T * (\phi + \lambda\psi))\,(f), \\
&= T\left((\widetilde{\phi + \lambda\psi}) * f\right), \\
&= T\left(\widetilde{\phi} * f + \lambda\widetilde{\psi} * f\right), \\
&= (T * \phi)\,(f) + \lambda\,(T * \psi)\,(f), \\
&= T_T(\phi) + \lambda T_T(\psi).
\end{aligned}$$

Ahora veamos que T_T es un operador acotado, para esto recuerde que como $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces se satisface que existe una constante $C > 0$ y enteros m, l tales que

$$|T(\phi)| \leq C \sum_{\substack{|\alpha|\leq l \\ |\beta|\leq m}} \rho_{\alpha,\beta}(\phi)$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Asumiendo esto podemos ver que como $\widetilde{\phi} * f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned}
|T_T(\phi)| &= |(T * \phi)(f)|, \\
&= \left|T\left(\widetilde{\phi} * f\right)\right|, \\
&\leq C \sum_{\substack{|\alpha|\leq l \\ |\beta|\leq m}} \rho_{\alpha,\beta}(\widetilde{\phi} * f)
\end{aligned}$$

Lo que concluye que T_T es un operador lineal continuo, es decir, $T * \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Ahora, veamos que $(\widehat{T * \phi}) = \widehat{T}\widehat{\phi}$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Note que

$$\begin{aligned}
(\widehat{T * \phi})(f) &= (T * \phi)(\widehat{f}), \\
&= T\left(\widetilde{\phi} * \widehat{f}\right), \\
&= T\left(\widehat{\widehat{\phi}} * \widehat{f}\right), \\
&= T\left(\widehat{\left(\widehat{\phi} f\right)}\right), \\
&= \widehat{T}\left(\widehat{\phi} f\right), \\
&= \widehat{T}\widehat{\phi}(f).
\end{aligned}$$

Lo que concluye el ejercicio.
(II)
Veamos que $T *_1 \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cup \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Primero veamos que $T *_1 \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, para esto note que como T es continuo, entonces

$$\begin{aligned}
\partial_{x_j}\left(T *_1 \phi\right)(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(T *_1 \phi)(x+h\epsilon_j) - (T * \phi)(x)}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{T\left(\tau_{x+h\epsilon_j}\widetilde{\phi}(y)\right) - T\left(\tau_x\widetilde{\phi}(y)\right)}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{T\left(\phi\left(x+h\epsilon_j - y\right)\right) - T\left(\phi\left(x-y\right)\right)}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} T\left(\frac{\phi(x+h\epsilon - y) - \phi(x-y)}{h}\right), \\
&= T\left(\lim_{h\to 0} \frac{\phi(x+h\epsilon_j - y) - \phi(x-y)}{h}\right), \\
&= T\left(\partial_{x_j}\phi(x-y)\right), \\
&= T\left(\tau_x\widetilde{\partial_{x_j}\phi}(y)\right), \\
&= \left(T *_1 \partial_{x_j}\phi\right)(x),
\end{aligned}$$

luego usando un argumento inductivo, como $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ podemos concluir que $T *_1 \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ahora veamos que $T *_1 \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, para esto con el fin de ser más claros definiremos el operador $T_T(\phi) = T *_1 \phi$, note que como las traslaciones y reflexiones son lineales, entonces dadas $\phi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con λ escalar se cumple que

$$\begin{aligned}
T_T(\phi + \lambda\varphi) &= T *_1 \left(\phi + \lambda\varphi\right), \\
&= T\left(\tau_x\widetilde{\phi + \lambda\varphi}\right), \\
&= T\left(\tau_x\widetilde{\phi} + \lambda\tau_x\widetilde{\varphi}\right), \\
&= T\left(\tau_x\widetilde{\phi}\right) + \lambda T\left(\tau_x\widetilde{\varphi}\right), \\
&= T *_1 \phi + \lambda T *_1 \varphi.
\end{aligned}$$

Ahora veamos la continuidad, note que como $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, entonces existe una constante $C > 0$ y enteros m y l tales que para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se cumple que

$$|T(\phi)| \leq C \sum_{\substack{|\alpha|\leq l \\ |\beta|\leq m}} \rho_{\alpha,\beta}(\phi),$$

usando esto se puede ver que

$$\begin{aligned}
|T_T(\phi)| &= \left|T *_1 \phi(x)\right|, \\
&= \left|T\left(\tau_x\widetilde{\phi}(y)\right)\right|, \\
&\leq C \sum_{\substack{|\alpha|\leq l \\ |\beta|\leq m}} \rho_{\alpha,\beta}(\tau_x\widetilde{\phi}),
\end{aligned}$$

lo que nos permite concluir que $T_T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, es decir que $T *_1 \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Ahora, con el fin de ver que $T *_1 \phi = T * \phi$, usaremos que la transformada de Fourier es un isomorfismo en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, es decir, demostraremos que $\left(\widehat{T *_1 \phi}\right) = \widehat{T}\widehat{\phi}$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y como la transformada de Fourier es un isomorfismo en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, entonces $T *_1 \phi = T * \phi$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Siendo así, note que como $T *_1 \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es localmente integrable, entonces si tomamos $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
(T *_1 \phi)(f) &= \left(T(\tau_x \widetilde{\phi})\right)(f), \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} T(\tau_x \widetilde{\phi})(y) f(y)\, dy, \\
&= T\left(\int_{\mathbb{R}^n} \tau_x \widetilde{\phi}(y) f(y)\, dy\right), \\
&= T\left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y) f(y)\, dy\right), \\
&= T\left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) f(x-y)\, dy\right), \\
&= T\left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) f(y)\, dy\right),
\end{aligned}$$

Problema 4:

Topología sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} d : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) &\longrightarrow \mathbb{R}+ \\ (\phi, \psi) &\longmapsto \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n} 2^{-(|\alpha|+|\beta|)} \frac{\|\phi-\psi\|_{\alpha,\beta}}{1+\|\phi-\psi\|_{\alpha,\beta}} \end{aligned}$$

(I) Pruebe que $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n); d)$ es un espacio métrico completo.

(II) Pruebe que para cualquier sucesión $(\phi_k)_k \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, vale

$$\phi_k \xrightarrow{d} \phi \text{ si y solo si } \|\phi_k - \phi\|_{\alpha,\beta} \to 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$$

(III) Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pruebe que

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ si y solo si } x^\alpha \partial^\beta f \in L^2(\mathbb{R}^n), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

(IV) Muestre que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ \phi &\longmapsto \widehat{\phi} \end{aligned}$$

es un isomorfismo topológico.

Problema 4 continúa en la siguiente página. . .

Solución:

(I)
Primero veamos que d está bien definida, ya que

$$\begin{aligned}
d(\phi,\psi) &\leq \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|||\phi-\psi|||_{(\alpha,\beta)}}{1+|||\phi-\psi|||_{(\alpha,\beta)}},\\
&\leq \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}},\\
&\leq \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|}}\frac{1}{2^{|\beta|}},\\
&\leq \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|}} \sum_{\beta\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\beta|}},\\
&\leq \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|}}\right)^2,\\
&\leq \left(\sum_{\alpha_1=0}^{\infty}\sum_{\alpha_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{\alpha_n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}\right)^2,\\
&\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right)^{2n},\\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Ahora veamos que $d(\phi,\psi)=0$ si y sólo si $\phi=\psi$.
Note que, en la definición de d, todos los sumandos son reales positivos, nosotros afirmamos que $d(\phi,\psi)=0$ si y sólo si $|||\phi-\psi|||_{(\alpha,\beta)}=0$ para todo $(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^{2n}$.
Ahora, suponga que $\alpha=0$ y $\beta=0$, entonces:

$$\begin{aligned}
|||\phi-\psi|||_{(0,0)} &= \|x^0\partial^0(\phi-\psi)\|_\infty,\\
&= \|\phi-\psi\|_\infty,\\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\phi-\psi| = 0.
\end{aligned}$$

Entonces, $\phi(x)=\psi(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$.
Por otro lado, note que $d(\phi,\psi)=d(\psi,\phi)$ es inmediato, ya que $|||\phi-\psi||_{(\alpha,\beta)}=|||\psi-\phi|||_{(\alpha,\beta)}$ para todo α y β.
Ahora veamos que d satisface la desigualdad triangular.

Usando las desigualdades triangulares de las seminormas $|||\cdot|||_{(\alpha,\beta)}$, nosotros tenemos que

$$\begin{aligned}|||\phi-\psi|||_{(\alpha,\beta)} &\leq |||\phi-\varphi|||_{(\alpha,\beta)} + |||\varphi-\psi|||_{(\alpha,\beta)},\\ 1+|||\phi-\psi|||_{(\alpha,\beta)} &\leq 1+|||\phi-\varphi|||_{(\alpha,\beta)} + |||\varphi-\psi|||_{(\alpha,\beta)},\\ \frac{1}{1+|||\phi-\varphi|||_{(\alpha,\beta)} + |||\varphi-\psi|||_{(\alpha,\beta)}} &\leq \frac{1}{1+|||\phi-\psi|||_{(\alpha,\beta)}},\\ -\frac{1}{1+|||\phi-\psi|||_{(\alpha,\beta)}} &\leq -\frac{1}{1+|||\phi-\varphi|||_{(\alpha,\beta)} + |||\varphi-\psi|||_{(\alpha,\beta)}}.\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}d(\phi,\psi) &\leq \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|||\phi-\psi|||_{(\alpha,\beta)}}{1+|||\phi-\psi|||_{(\alpha,\beta)}},\\ &\leq \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \left(1-\frac{1}{1+|||\phi-\psi|||_{(\alpha,\beta)}}\right),\\ &\leq \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \left(1-\frac{1}{1+|||\phi-\varphi|||_{(\alpha,\beta)} + |||\varphi-\psi|||_{(\alpha,\beta)}}\right),\\ &\leq \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|||\phi-\varphi|||_{(\alpha,\beta)} + |||\varphi-\psi|||_{(\alpha,\beta)}}{1+|||\phi-\varphi|||_{(\alpha,\beta)} + |||\varphi-\psi|||_{(\alpha,\beta)}},\\ &\leq \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|||\phi-\varphi|||_{(\alpha,\beta)}}{1+|||\phi-\varphi|||_{(\alpha,\beta)} + |||\varphi-\psi|||_{(\alpha,\beta)}}\\ &\quad+\sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|||\varphi-\psi|||_{(\alpha,\beta)}}{1+|||\phi-\varphi|||_{(\alpha,\beta)} + |||\varphi-\psi|||_{(\alpha,\beta)}},\\ &\leq \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|||\phi-\varphi|||_{(\alpha,\beta)}}{1+|||\phi-\varphi|||_{(\alpha,\beta)}} + \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|||\varphi-\psi|||_{(\alpha,\beta)}}{1+|||\varphi-\psi|||_{(\alpha,\beta)}},\\ &\leq d(\phi,\varphi)+d(\varphi,\psi).\end{aligned}$$

Luego, podemos concluir que d es una métrica para el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Ahora veamos que $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), d)$ es un espacio completo.
Suponga $\{f_k\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ una sucesión de Cauchy, es decir que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $k, l > N$, entonces

$$d(f_n, f_m) < \epsilon.$$

(II)
Note que si $\|\phi_k - \phi\| \to 0$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, entonces como d está bien definida es válido

afirmar que

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} d(\phi_k,\phi) &= \lim_{k\to\infty} \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{\|\phi-\psi\|_{\alpha,\beta}}{1+\|\phi-\psi\|_{\alpha,\beta}}, \\
&= \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \lim_{k\to\infty} \frac{\|\phi_k-\phi\|_{\alpha,\beta}}{1+\|\phi_k-\phi\|_{\alpha,\beta}}, \\
&= \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} (0), \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Luego podemos afirmar que $\phi_k \xrightarrow{d} \phi$ cuando $k\to\infty$.
Ahora veamos que si $\phi_k \xrightarrow{d} \phi$, entonces $\|\phi_k-\phi\|_{\alpha,\beta} \to 0$, para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$.
Razonemos por contradicción, suponga que $\phi_k \xrightarrow{d} \phi$ y que existe $\alpha_0,\beta_0 \in \mathbb{N}^n$ tal que $\|\phi_k-\phi\|_{\alpha_0,\beta_0} \not\to 0$, luego

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{k\to\infty} d(\phi_k,\phi), \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{\|\phi_k-\phi\|_{\alpha,\beta}}{1+\|\phi_k-\phi\|_{\alpha,\beta}}, \\
&= \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \lim_{k\to\infty} \frac{\|\phi_k-\phi\|_{\alpha,\beta}}{1+\|\phi_k-\phi\|_{\alpha,\beta}}, \\
&= \frac{1}{2^{|\alpha_0|+|\beta_0|}} \frac{\|\phi_k-\phi\|_{\alpha_0,\beta_0}}{1+\|\phi_k-\phi\|_{\alpha_0,\beta_0}} \neq 0.
\end{aligned}
$$

Lo cuál es una contradicción, por lo que podemos afirmar que si $\phi_k \xrightarrow{d} \phi$, entonces $\|\phi_k-\phi\|_{\alpha,\beta} \to 0$ para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$, lo que concluye el resultado.
(III)
Note que si $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces dados $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$ se cumple que

$$
\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < C.
$$

Luego, como también se satisface que dado $\gamma\in\mathbb{N}^n$ con $|\gamma|>|\alpha|$ se cumple que

$$
\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\gamma \partial^\beta f(x)| < C.
$$

Podemos deducir que $x^\alpha\partial^\beta f(x)$ además de ser acotada es una función que decrece más rápido que cualquier polinomio, es decir, dado α existe un $N>0$ suficientemente grande que satisface que

$$
|x^\alpha \partial^\beta f(x)| \le \frac{C}{(1+|x|)^N},
$$

luego usando cambio a coordenadas polares y algunos cálculos se puede ver que

$$\begin{aligned}\left\|x^\alpha \partial^\beta f\right\|_2^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|^2\, dx,\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C}{(1+|x|)^N}\, dx < \infty.\end{aligned}$$

Lo que concluye una dirección de la implicación. Ahora veamos que si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $x^\alpha \partial^\beta f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, entonces $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Razonemos por contradicción, suponga que $f \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, es decir que existe $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{N}^n$ tales que $x^{\alpha_0}\partial^{\beta_0} f \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$, luego existe una subsucesión $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ que satisface que

$$|x_k^{\alpha_0}\partial^{\beta_0} f(x_k)| \geq k,$$

pero note que como $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces $x^\alpha \partial^\beta f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, luego sabemos que esta función debe de ser localmente acotada y además uniformemente continua en compactos, por lo que podemos asegurar que en compactos la función es Lipschitz, por lo que si tomamos $R > 0$ sabemos que dado $x \in \overline{B_R(x_k)}$ entonces

$$|x^{\alpha_0}\partial^\beta f(x) - x_k^{\alpha_0}\partial^\beta f(x_k)| < L(x - x_k),$$

luego si tomamos $x \in \overline{B_\epsilon(x_k)}$, entonces

$$\begin{aligned}|x^{\alpha_0}\partial^{\beta_0} f(x)| &\geq |x_k^{\alpha_0}\partial^{\beta_0} f(x_k)| - |x^{\alpha_0}\partial^{\beta_0} f(x) - x_k^{\alpha_0}\partial^{\beta_0} f(x_k)|,\\ &\geq |x_k^{\alpha_0}\partial^{\beta_0} f(x_k)| - L(x - x_k),\\ &\geq |x_k^{\alpha_0}\partial^{\beta_0} f(x_k)| - L\epsilon.\end{aligned}$$

Ahora, tomando $\epsilon_k = \text{mín}\{\frac{|x_k^{\alpha_0}\partial^{\beta_0} f(x_k)|}{2L}, R\}$ se satisface que para todo $x \in \overline{B_{\epsilon_k}(x_k)}$ se cumple que

$$|x^{\alpha_0}\partial^{\beta_0} f(x)| \geq \frac{|x_k^{\alpha_0}\partial^{\beta_0} f(x_k)|}{2}.$$

Luego note que

$$\begin{aligned}\left\|x^{\alpha_0}\partial^{\beta_0} f\right\|_2^2 &\geq \int_{\mathbb{R}^n} |x^{\alpha_0}\partial^{\beta_0} f(x)|^2\, dx,\\ &\geq \int_{\overline{B_{\epsilon_k}(x_k)}} |x^{\alpha_0}\partial^{\beta_0} f(x)|^2\, dx,\\ &\geq \int_{\overline{B_{\epsilon_k}(x_k)}} \frac{|x_k^{\alpha_0}\partial^{\beta_0} f(x_k)|^2}{4}\, dx,\\ &\geq \frac{k^2}{4}|\overline{B_{\epsilon_k}(x_k)}|\end{aligned}$$

Ahora bien, como $\epsilon_k = \text{mín}\{\frac{|x_k^{\alpha_0}\partial^{\beta_0} f(x_k)|}{2L_k}, R\}$ y $|x_k^{\alpha_0}\partial^{\beta_0} f(x_k)| \geq k$, entonces para k suficientemente grande:

$$\epsilon_k \geq \frac{k}{2L_k}, \quad \text{y por tanto} \quad \varepsilon_k^n \geq \left(\frac{k}{2L_k}\right)^n.$$

Así,

$$\|x^{\alpha_0}\partial^{\beta_0} f\|_2^2 \geq \frac{k^2}{4} \cdot C_n \left(\frac{k}{2L_k}\right)^n = C_n' \cdot \frac{k^{n+2}}{L_k^n}.$$

Como L_k depende solo de derivadas de f en bolas de radio fijo (y por tanto acotadas por ser $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$), el cociente anterior crece como una potencia de k, y en particular tiende a infinito cuando $k \to \infty$, lo que nos permite concluir que

$$\|x^{\alpha_0}\partial^{\beta_0} f\|_2^2 = \infty,$$

lo cual contradice la hipótesis, lo que nos permite concluir que $x^\alpha \partial^\beta f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo α, β, y por ende $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. (IV)
Primero veamos que si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Note que como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$, entonces $\phi \in L(\mathbb{R}^n)$, por lo que nosotros podremos usar las propiedades de la transformada de Fourier en el sentido de $L(\mathbb{R}^n)$, así se sigue que

$$\partial^\beta \widehat{\phi}(\xi) = [\widehat{(-2\pi i x)^\beta}\phi(x)](\xi).$$

Entonces, como para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, nosotros sabemos que $x^\alpha \phi \in L(\mathbb{R}^n)$, luego podemos afirmar que $\widehat{\phi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Ahora, note que $\|\widehat{\phi}\|_{(\alpha,\beta)} < \infty$ para todo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}$, así

$$\begin{aligned}\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \partial^\beta \widehat{\phi}(\xi)| &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\alpha ((\widehat{-2\pi i x)^\beta}\phi(x))(\xi)|, \\ &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{[\partial^\alpha (\widehat{-2\pi i x)^\beta}\phi(x)]}{(2\pi i)^\alpha}(\xi) \right|,\end{aligned}$$

luego $x^\beta \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\partial^\alpha (-2\pi i x)^\beta \phi \in L(\mathbb{R}^n)$, por lo que podemos asegurar que $\partial^\alpha (\widehat{-2\pi i x})^\beta \phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, lo que implica que para todo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}$ nosotros tenemos que $\|\widehat{\phi}\|_{\alpha,\beta} < \infty$, es decir, $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Ahora veamos que la transformada de Fourier es un operador inyectivo. Suponga $\widehat{\phi} = \widehat{\psi}$, entonces como $\phi, \psi \in L(\mathbb{R}^n)$, usando la fórmula de inversión se tiene que

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(\xi) e^{2\pi i (x \cdot \xi)} e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} d\xi \\ &= \lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\psi}(\xi) e^{2\pi i (x \cdot \xi)} e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} d\xi \\ &= \psi(x)\end{aligned}$$

Luego se puede concluir que $\phi = \psi$. Ahora, veamos que es un operador sobreyectivo.
De manera similar, como en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es válida la fórmula de inversión de fourier en el sentido de $L(\mathbb{R}^n)$, sabemos que si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, de lo que se puede ver que si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\check{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, así que para cada $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, sabemos que existe $\check{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{\check{\phi}} = \phi$, lo que demuestra que la transformada de Fourier es un operador sobreyectivo.
Ahora, veamos que la transformada de Fourier es un operador continuo, es decir que si tomamos una sucesión $\{\phi_j\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tal que $\phi_j \to \phi$ cuando $j \to \infty$, entonces $\widehat{\phi_j} \to \widehat{\phi}$ cuando $j \to \infty$.
De este modo, nosotros queremos ver que para todo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}$, $\|\widehat{\phi_j} - \widehat{\phi}\|_{\alpha,\beta} \to 0$ cuando $j \to \infty$. Note que

$$
\begin{aligned}
\|\xi^\alpha \partial^\beta (\widehat{\phi_j} - \widehat{\phi})\|_\infty &= \|\xi^\alpha \partial^\beta (\widehat{\phi_j - \phi})\|_\infty, \\
&= \|\xi^\alpha ((-2\pi i \widehat{x)^\beta (\phi_j} - \phi))\|_\infty, \\
&= \|\frac{(-2\pi i)^\beta \partial^\alpha [(x^{\widehat{\beta})(\phi_j} - \phi)]}{(2\pi i)^\alpha}\|_\infty, \\
&\leq \|\frac{(-2\pi i)^\beta \partial^\alpha [(x^\beta)(\phi_j - \phi)]}{(2\pi i)^\alpha}\|_1, \\
&\leq c\|\partial^\alpha [(x^\beta)(\phi_j - \phi)]\|_\infty + c \sum_{|\gamma| \leq 2m} \|\partial\alpha + \gamma[(x^\beta)(\phi_j - \phi)]\|_\infty, \\
&\leq k \sum_{|\gamma_1|,|\gamma_2| \leq 2m+|\alpha|+|\beta|} |\|\phi_j - \phi\||_{(\gamma_1,\gamma_2)}.
\end{aligned}
$$

Luego para todo $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{N}^{2n}$, $\|\phi_j - \phi\|_{(\gamma_1,\gamma_2)} \to 0$ cuando $j \to \infty$, entonces para todo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n$, nosotros tenemos que $\|\widehat{\phi_j} - \widehat{\phi}\|_{(\alpha,\beta)} \to 0$ cuando $j \to \infty$.
Note que ver que el operador inverso es continuo es un caso análogo, solo que usando la transformada inversa de Fourier por lo que queda demostrado que $\widehat{\ }: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es un isomorfismo.

Problema 5:

Valor principal.
Definimos

$$v.p.\left(\frac{1}{x}\right) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C},$$
$$\phi \longmapsto \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx.$$

Pruebe que $v.p.\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y calcule $\left(\widehat{v.p.\left(\frac{1}{x}\right)}\right)$.

Solución:

Note que la linealidad se rescata de la linealidad de la integral y del límite, ya que si tomamos $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y λ escalar, entonces

$$\begin{aligned}
v.p.\left(\frac{1}{x}\right)(\phi+\lambda\psi) &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)+\lambda\psi(x)}{x}\, dx,\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} + \lambda\frac{\psi(x)}{x}\, dx,\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx + \lambda\int_{|x|>\epsilon} \frac{\psi(x)}{x}\, dx,\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx + \lambda\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon} \frac{\psi(x)}{x}\, dx,\\
&= v.p.\left(\frac{1}{x}\right)(\phi) + \lambda v.p.\left(\frac{1}{x}\right)(\psi).
\end{aligned}$$

Problema 5 continúa en la siguiente página. . .

Ahora veamos que $v.p.\left(\frac{1}{x}\right)$ es un operador acotado, ya que

$$
\begin{aligned}
\left|v.p.\left(\frac{1}{x}\right)(\phi)\right| &= \left|\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x|<\frac{1}{\epsilon}}\frac{\phi(x)}{x}dx\right|,\\
&\leq \left|\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x|<1}\frac{\phi(x)}{x}dx+\int_{1<|x|<\frac{1}{\epsilon}}\frac{\phi(x)}{x}dx\right|,\\
&\leq \left|\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x|<1}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx+\int_{1<|x|<\frac{1}{\epsilon}}\frac{\phi(x)}{x}dx\right|,\\
&\leq \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x|<1}\left|\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\right|dx+\int_{1<|x|<\frac{1}{\epsilon}}\left|\frac{\phi(x)}{x}\right|dx,\\
&\quad \text{Usando la desigualdad del valor medio.}\\
&\leq \lim_{\epsilon\to 0}\|\phi'\|_\infty\int_{\epsilon<|x|<1}\frac{|x|}{|x|}dx+\int_{1<|x|<\frac{1}{\epsilon}}\left|\frac{\phi(x)}{x}\right|dx,\\
&\leq \lim_{\epsilon\to 0}2(1-\epsilon)|||\phi|||_{(0,1)}+\int_{1<|x|<\frac{1}{\epsilon}}\left|\frac{\phi(x)}{x}\right|dx,\\
&\leq \lim_{\epsilon\to 0}2(1-\epsilon)|||\phi|||_{(0,1)}+\int_{1<|x|<\frac{1}{\epsilon}}\left|\frac{x\phi(x)}{x^2}\right|dx,\\
&\leq \lim_{\epsilon\to 0}2(1-\epsilon)|||\phi|||_{(0,1)}+\|x\phi\|_\infty\int_{1<|x|<\frac{1}{\epsilon}}\left|\frac{1}{x^2}\right|dx,\\
&\leq \lim_{\epsilon\to 0}2(1-\epsilon)|||\phi|||_{(0,1)}+c\|x\phi\|_\infty,\\
&\leq \lim_{\epsilon\to 0}2(1-\epsilon)|||\phi|||_{(0,1)}+c|||\phi|||_{(1,0)},\\
&\leq k(|||\phi|||_{(0,1)}+|||\phi|||_{(1,0)}).
\end{aligned}
$$

Lo que nos permite concluir que $v.p.\left(\frac{1}{x}\right)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Ahora calculemos $\left(\widehat{v.p.\left(\frac{1}{x}\right)}\right)$, note que realizando un par de manipulaciones algebraicas se puede asegurar que

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{v.p.\left(\frac{1}{x}\right)}\right)(\phi) &= v.p.\left(\frac{1}{x}\right)(\widehat{\phi}),\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|\xi|>\epsilon}\frac{\widehat{\phi}(\xi)}{\xi}\,d\xi,\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|\xi|>\epsilon}\int_{\mathbb{R}}\frac{\phi(x)}{\xi}e^{-2\pi ix\xi}\,dx\,d\xi,\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\int_{|\xi|>\epsilon}\frac{\phi(x)}{\xi}e^{-2\pi ix\xi}\,d\xi\,dx,\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\phi(x)\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{1}{\xi}e^{-2\pi ix\xi}\,d\xi+\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{1}{\xi}e^{-2\pi ix\xi}\,d\xi\right)dx,\\
&\quad\text{Haciendo el cambio de variable } u=-\xi \text{ en la primera integral de } \xi.\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\phi(x)\left(-\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{1}{\xi}e^{2\pi ix\xi}\,d\xi+\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{1}{\xi}e^{-2\pi ix\xi}\,d\xi\right)dx,\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\phi(x)\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{e^{-2\pi ix\xi}-e^{2\pi ix\xi}}{\xi}\,d\xi\,dx,\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\phi(x)\int_{\epsilon}^{\infty}-\frac{2i\,\mathrm{sen}(2\pi x\xi)}{\xi}\,d\xi\,dx,\\
&= \int_{\mathbb{R}}\phi(x)\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{\infty}-\frac{2i\,\mathrm{sen}(2\pi x\xi)}{\xi}\,d\xi\,dx,\\
&= \int_{\mathbb{R}}\phi(x)\int_{0}^{\infty}-\frac{2i\,\mathrm{sen}(2\pi x\xi)}{\xi}\,d\xi\,dx,\\
&= \int_{\mathbb{R}}\phi(x)(-2i)\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(2\pi x\xi)}{\xi}\,d\xi\,dx,\\
&= \int_{\mathbb{R}}\phi(x)(-2i)\frac{\pi}{2}sgn(2\pi x)\,dx,\\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(-i\pi sgn(x)\right)\phi(x)\,dx,\\
&= -i\pi sgn(x)\,(\phi)\,.
\end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir que $\left(\widehat{v.p.\left(\frac{1}{x}\right)}\right) = -i\pi sgn(x)$ en el sentido de las distribuciones temperadas.