Resolución de Ecuaciones Diferenciales Parciales con Polinomios de Zernike

Andrés David Cadena Simons

Universidad Nacional de Colombia

4 de marzo de 2025

Introducción

- ¿Por qué resolver EDPs en regiones circulares?
- Aplicaciones en óptica, fluidos, electromagnetismo.
- Métodos espectrales tradicionales tienen dificultades con condiciones de frontera discontinuas.
- Se propone el uso de los polinomios de Zernike, que son ortogonales en el disco unitario y permiten una mejor representación de soluciones en regiones circulares.

Datta & Datta (2022)

- Definición y propiedades.
- Expansión en términos de **parte radial** y **parte azimutal**.
- Comparación con bases ortogonales en el disco unitario.

Los polinomios de Zernikel han sido usados convenientemente para hablar sobre funciones del tipo ondas ópticas, como ya antes hemos mencionado, estos están definidos sobre el disco unitario $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Ellos son solución de la EDP

$$\Delta U + \alpha \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 U + \beta \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) U + \gamma U = 0$$

En coordenadas polares:

$$(1 + \alpha r^2) \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} + (\alpha + \beta) r \right) \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \gamma U = 0$$

Tomando $\alpha = -1$ y $\beta = -1$, y $\gamma = n(n+2)$ obtenemos la ecuación hipergeométrica

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (1-2x)\frac{dy}{dx} + \frac{1}{4}\left[n(n+2) - \frac{m^2}{x}\right]y = 0$$

1. Se encuentra en la solución de la ecuación de Schrödinger para ciertos potenciales efectivamente atractivos o confinantes.
2. Puede modelar la ecuación radial de la función de onda en coordenadas esféricas o parabólicas en problemas de separación de variables.
3. La presencia del término $\frac{m^2}{x}$ sugiere una relación con las ecuaciones de los armónicos esféricos en coordenadas esféricas.
4. En algunos casos, se relaciona con la ecuación de Laplace en espacios curvos o con la ecuación de Helmholtz en el contexto de ondas.
5. En teoría de la difracción y la propagación de ondas electromagnéticas en medios con simetría esférica, aparecen ecuaciones similares.
6. Está relacionada con los polinomios de Jacobi e hipergeométricos, que aparecen en la expansión de funciones en términos de soluciones de ecuaciones diferenciales especiales.

En particular

$$U_n^m(r,\phi) = R_n^m(r)(C_1 \cos m\phi + C_2 \sin m\phi), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad n - m \geq 0, \quad n$$

donde

$$R_n^m(r) = \sum_{\ell=0}^{\frac{n-m}{2}} (-1)^\ell \frac{(n-\ell)!}{\ell!(\frac{n-m}{2}-\ell)!(\frac{n+m}{2}-\ell)!} r^{n-2\ell}.$$

Son una base que genera un espacio denso en $L^2(B_1(0))$.

En dónde podemos dar la aproximación de una función f como:

$$f(r,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{0\leq m\leq n \\ n-m \text{ par}}} (A_{nm}\cos m\phi + B_{nm}\sin m\phi)R_n^m(r)$$

donde

$$A_{nm} = \frac{\epsilon_m(n+1)}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} f(r,\phi)\cos m\phi R_n^m(r) r d\phi dr,$$

$$B_{nm} = \frac{\epsilon_m(n+1)}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} f(r,\phi)\sin m\phi R_n^m(r) r d\phi dr,$$

y ϵ_m es el factor de Neumann:

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0, \\ 2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Una aproximación de f de orden (m, n) se puede calcular como

$$f(r,\phi) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\substack{0\leq j\leq i \\ i-j \text{ par}}} (A_{ij}\cos j\phi + B_{ij}\sin j\phi) R_i^j(r).$$

Resolución de EDPs de Primer Orden

- Forma general: $\alpha(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma(x,y)u = f(x,y)$.
- Transformación a coordenadas polares.
- Uso de matrices operacionales de integración (IOM) para representar operadores diferenciales.
- Expandir $u(r,\theta)$ en polinomios de Zernike.
- Usar la matriz IOM para expresar derivadas como combinaciones de términos conocidos.
- La estrategia es convertir la PDE en un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$.
- Se obtienen aproximaciones mediante minimización l_1 (más precisa) y l_2 (mínimos cuadrados).

Ejemplo de PDE de Primer Orden

Ejemplo:

$$r \cos 2\theta \frac{\partial u}{\partial r} - \sin 2\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + u = e^{r \cos \theta}(1 + r \cos \theta)$$

Resultados:

- Se comparan soluciones con minimización l_1 y l_2.
- El método l_1 produce errores menores y es más estable.

El problema consiste en resolver la ecuación diferencial parcial de primer orden:

$$r \cos 2\theta \frac{\partial u}{\partial r} - \sin 2\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + u = e^{r \cos \theta}(1 + r \cos \theta). \tag{1}$$

con las condiciones de frontera:

$$u(0, \theta) = 1, \quad u(r, 0) = e^{r}. \tag{2}$$

La solución analítica de la ecuación es:

$$u(r, \theta) = e^{r \cos \theta}. \tag{3}$$

Ahora veamos que sucede con el método

Expresamos la solución $u(r,\theta)$ como una combinación de polinomios de Zernike:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} (A_{nm} \cos m\theta + B_{nm} \sin m\theta) R_n^m(r). \tag{4}$$

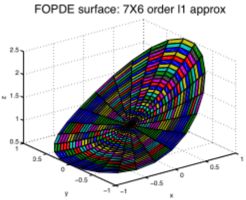
Donde los coeficientes A_{nm} y B_{nm} se calculan mediante:

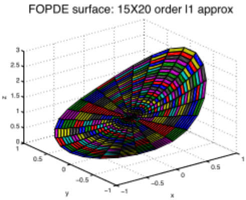
$$A_{nm} = \frac{\epsilon_m(n+1)}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} u(r,\theta) \cos m\theta R_n^m(r)\, r d\theta dr, \tag{5}$$

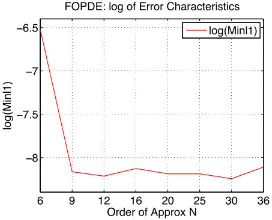
$$B_{nm} = \frac{\epsilon_m(n+1)}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} u(r,\theta) \sin m\theta R_n^m(r)\, r d\theta dr. \tag{6}$$

Matriz Operacional de Integración (IOM)

Para transformar la ecuación en un sistema lineal $Ax = b$, utilizamos matrices de integración y aproximamos usando el método de Zernikel resultandonos estás gráficas.







Resolución de PDEs de Segundo Orden

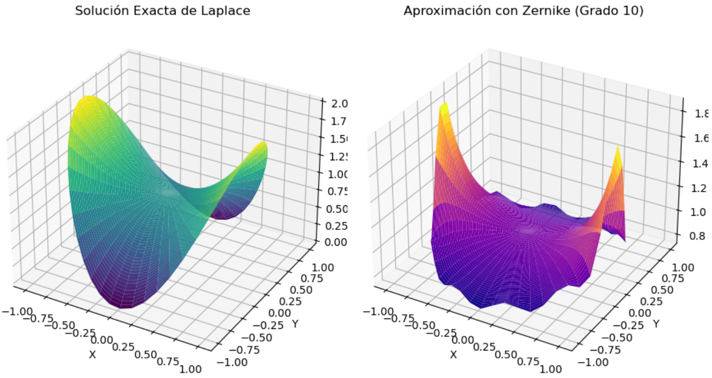
Ecuación general:

$$\Delta u + \alpha(x\partial_x + y\partial_y)^2 u + \beta(x\partial_x + y\partial_y)u + \gamma u = f$$

Pasos:

- Convertir a coordenadas polares y expandir $u(r, \theta)$ en polinomios de Zernike.
- Aplicar integración dos veces para eliminar términos de derivadas de segundo orden.
- Transformar la ecuación en un sistema lineal $Ax = b$ resoluble con métodos numéricos.

Tras realizar las aproximaciones encontramos cosas como



Comparación con Métodos Tradicionales

- Los métodos espectrales tradicionales (p.ej. Chebyshev) requieren condiciones de frontera bien definidas en puntos específicos.
- Las condiciones de frontera discontinuas no pueden manejarse fácilmente con métodos tradicionales.
- El uso de polinomios de Zernike permite una mejor representación y aproximación en discos.

Conclusiones

- Se presenta un método eficiente para resolver PDEs en regiones circulares.
- Se usa la matriz IOM con polinomios de Zernike para transformar la PDE en un sistema lineal.
- Se logra una solución más estable con la minimización l_1.
- Futuras aplicaciones pueden extender este método a ecuaciones más generales en geometrías distintas.

Bibliografía. I

Datta, K. B., & Datta, S. 2022. Application of Zernike polynomials in solving certain first and second order partial differential equations. *arXiv preprint*, **2207.07380v1**.

¡Gracias!