UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ANÁLISIS FUNCIONAL
TALLER 1: ESPACIOS VECTORIALES NORMADOS
(I-2025)

Profesor: Oscar Guillermo Riaño Castañeda
Integrantes: Andrés David Cadena Simons, Jairo Sebastián Niño Castro, Iván Felipe Salamanca Medina
Fecha: 03 de Junio del 2025

Ejercicio 2. Sea E un espacio vectorial y $g, f_1, ..., f_k$, $k+1$ funcionales lineales sobre E tales que

$$\langle f_i; x\rangle = 0 \text{ para todo } i = 1, ..., k \Longrightarrow \langle g; x\rangle = 0.$$

Muestre que existen constantes $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que $g = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$. Es decir, g es combinación lineal de los f_i's.

Demostración. Considere

$$\begin{aligned} H : &E \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1} \\ &x \longrightarrow (g(x), f_1(x), ..., f_k(x)) \end{aligned}$$

Y sea el rango de H, $ran(H) := V$. En primer lugar, note que V es un subespacio de $\mathbb{R}^{k+1}$, lo cual sigue de la linealidad de los f_i y g. Para ello:
✓Sea $u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Así, existen $x, y \in E$ tales que $u = (g(x), f_1(x), ..., f_k(x))$ y $v = (g(y), f_1(y))..., f_k(y))$. Luego, usando que $x + \lambda y \in E$ y la linealidad de los f_i y g, se sigue que

$$\begin{aligned} u + \lambda v &= (g(x), f_1(x), ..., f_k(x)) + \lambda(g(y), f_1(y))..., f_k(y)) \\ &= (g(x + \lambda y), f_1(x + \lambda y), ..., f_k(x + \lambda y)) \in V. \end{aligned}$$

De esta forma, como V es subespacio, se sigue que es conexo. Además, siendo V subespacio de dimensión finita, se tiene que V es cerrado. Por otro lado, se tiene que $u_0 = (1, 0, .., 0) \notin V$: en caso contrario, existiria $x \in E$ tal que $H(x) = (g(x), f_1(x), ..., f_k(x)) = u_0$ lo que querría decir que $g(x) = 1$ y $f_i(x) = 0$ para todo $i = 1, .., k$, lo cual contradice la hipótesis.
Así, por Teorema Hahn- Banach, existe $h \in (\mathbb{R}^{k+1})^\star$ tal que

$$h(x) < h(u_0) \qquad \forall x \in V$$

Como $h \in (\mathbb{R}^{k+1})^\star$, existe $r = (\lambda, \lambda_1, ..., \lambda_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tal que $h(x) = \langle r, x\rangle$ (producto interno usual en $\mathbb{R}^{k+1}$) para todo $x \in V$. Así:

$$\lambda g(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x) < \lambda \qquad \forall x \in E$$

Como V es subespacio, tomando $t > 0$

$$\lambda g(x/t) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x/t) < \lambda$$
$$\lambda g(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x) < \lambda/t$$

y haciendo $t \to \infty$, se tiene que $\lambda g(x/t) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x/t) \leq 0$. Similarmente, tomando $t < 0$

$$\lambda g(x/t) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x/t) < \lambda$$
$$\lambda g(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x) > \lambda/t$$

y haciendo $t \to -\infty$, se tiene que $\lambda g(x/t) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x/t) \geq 0$. De modo que

$$\lambda g(x/t) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x/t) = 0$$

y como $\lambda > 0$, se tiene que

$$g(x) = \sum_{i=1}^{k} \tilde{\lambda_i} f_i(x) \quad \tilde{\lambda_i} = -\frac{\lambda_i}{\lambda}$$

$\square$

Ejercicio 9. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Muestre que cada vecindad débil* del origen de $E^\star$ es no acotada.

Demostración. Sea V una vecindad del origen de $E^\star$ con la topología $\sigma(E^\star, E)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$V = \{f \in E^\star : |\langle f; x_i \rangle| < \varepsilon \text{ para todo } i = 1, ..., k\},$$

para algunos $x_1, ..., x_k \in E$ y $\varepsilon > 0$. Si $x_i = \mathbf{0}$ para todo $i = 1, .., k$, entonces $V = E^\star$ y queda claro que V es no acotado.

Supongamos que no todos los x_i's son nulos. Considere $W = \text{gen}\{x_1, ..., x_k\}$. Como E es de dimensión infinita, tenemos que $W \subset E$ estrictamente. Queremos usar la segunda forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach para garantizar que existe $g \in E^\star$ con $g \neq 0$ tal que $\langle g; v \rangle = 0$ para todo $v \in W$, pero para esto, debemos ver que W es cerrado.

Sea $(w_n)_{n\in\mathbb{Z}^+} \subset W$ una sucesión convergente y sea $\{v_1, ..., v_l\}$ una base de W. Como (w_n) es convergente, en particular, es una sucesión de Cauchy, por tanto, dado $\delta > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $n, m \geq N$, entonces

$$\|w_n - w_m\| < \delta.$$

Como $w_n, w_m \in W$, estos se pueden expresar de manera única como

$$w_n = \sum_{i=1}^{l} \lambda_{i,n} v_i, \quad w_m = \sum_{i=1}^{l} \lambda_{i,m} v_i$$

con $\lambda_{i,n}, \lambda_{i,m} \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, ..., k$, luego

$$\|w_n - w_m\| = \left\| \sum_{i=1}^{l} (\lambda_{i,n} - \lambda_{i,m}) v_i \right\|.$$

Como W es de dimensión finita, existe una constante $C_1 > 0$ tal que $C_1 \|v\|_\infty \leq \|v\|$ para todo $v \in W$, donde C_1 no depende del vector v, con

$$\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq l} |\lambda_i| \quad \text{y} \quad v = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i,$$

por tanto

$$C_1 \|w_n - w_m\|_\infty \leq \|w_n - w_m\|,$$

de esta manera

$$C_1 \|w_n - w_m\|_\infty = C_1 \max_{1 \leq i \leq l} |\lambda_{i,n} - \lambda_{i,m}| \leq \|w_n - w_m\| < \delta,$$

así, para cada $i = 1, ..., l$, las sucesiones $(\lambda_{i,n})_{n \in \mathbb{Z}^+}$ son de Cauchy en $\mathbb{R}$ y, por ser $\mathbb{R}$ completo, son sucesiones convergentes. Así, $\lambda_{i,n} \to \lambda_i$ para algunos $\lambda_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, ..., l$. Entonces, $w_n \to w$ en la norma $\|\cdot\|_\infty$ donde

$$w = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i,$$

en efecto

$$\|w_n - w\|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^{l} (\lambda_{i,n} - \lambda_i) v_i \right\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq l} |\lambda_{n,i} - \lambda_i| \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Ahora, nuevamente por ser W de dimensión finita, también existe $C_2 > 0$ tal que $\|v\| \leq C_2 \|v\|_\infty$ para todo $v \in W$, entonces

$$\|w_n - w\| \leq C_2 \|w_n - w\|_\infty,$$

así, $w_n \to w \in W$ en la norma $\|\cdot\|$. Tenemos entonces que W es cerrado.
Sea $x_0 \in E \setminus W$, así, por la segunda forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach, existe un hiperplano que separa estrictamente a W y a $\{x_0\}$, más precisamente, existe $g \in E^\star$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle g; v \rangle < \alpha < \langle g; x_0 \rangle,$$

para todo $v \in W$. Como W es un subespacio, tenemos que $|\langle g; v\rangle| < \alpha$ para todo $v \in W$, ya que podemos cambiar v por $-v$. Además, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, tenemos

$$|\langle g; nv\rangle| = n|\langle g; v\rangle| < \alpha \Longrightarrow |\langle g; v\rangle| < \frac{\alpha}{n}$$

de manera que $\langle g; v\rangle = 0$ para todo $v \in W$, y $g \neq 0$, dado que $\langle g; x_0\rangle > \alpha > 0$. Así, por la definición de W, $x_1, ..., x_k \in W$ y tenemos que $|\langle g; x_i\rangle| = 0 < \varepsilon$ para todo $i = 1, ..., k$, es decir, $g \in V$, más aún para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, $|\langle ng; v\rangle| = n|\langle g; v\rangle| = 0$, es decir, $ng \in V$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Como $g \neq 0$, $\|g\|_{E^\star} > 0$ y así, $\|ng\|_{E^\star} = n\,\|g\|_{E^\star}$. Así, por la propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$, $\|ng\|_{E^\star}$ es "tan grande como se quiera", para $n \in \mathbb{Z}^+$ suficientemente grande. Así, tenemos que V no es acotado.

□

Ejercicio 11. Sea K un espacio métrico compacto infinito. Demuestre que $C(K)$ (con la norma del supremo $\|\cdot\|_{L^\infty}$) no es reflexivo.

Demostración. Primero veamos que $(C(K), \|\cdot\|_{L^\infty})$ es un espacio de Banach.
Primero, note que como K es un espacio métrico compacto infinito, las funciones continuas con dominio en K alcanzan su máximo y su mínimo en K, por lo que sabemos que la norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$ se encuentra bien definida en el espacio.
Por otro lado verificar que las propiedades de norma se dan, es suficiente con notar que estas se cumplen bajo las propiedades del máx (recordando que $\|f\|_{L^\infty} = \max_{x\in K}|f(x)|$) y de ser funciones continuas, por lo que solo nos centraremos en ver que es un espacio completo.
Sea $\{f_k\} \subset C(K)$ una sucesión de Cauchy, es decir, dado $\epsilon > 0$ sabemos que existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$, entonces

$$\|f_n - f_m\|_{L^\infty} < \epsilon.$$

Veamos que $f_k \to f \in C(K)$ cuando $k \to \infty$.
Note que dado $x \in K$ se cumple que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{L^\infty} < \epsilon. \tag{1}$$

Luego $\{f_k(x)\} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión de Cauchy, por lo tanto existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f_k(x) \to a$ cuando $k \to \infty$, luego como se puede realizar el mismo razonamiento para todo $x \in K$, definamos

$$\begin{aligned} f : K &\to \mathbb{R}, \\ x &\to \lim_{k\to\infty} f_k(x). \end{aligned}$$

Ahora veamos que $f \in C(K)$, entonces, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (este δ depende de la continuidad de las funciones f_k) tal que si tomamos $x, y \in K$ que satisfacen

$$|x - y| < \delta,$$

entonces, si tomamos un k adecuado (de la condición) y aprovechando que las funciones f_k con continuas en K, sabemos que

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\leq |f(x)-f_m(x)+f_m(x)-f_m(y)+f_m(y)-f(y)|,\\ &\leq |f(x)-f_k(x)|+|f_k(x)-f_k(y)|+|f_k(y)-f(y)|,\\ &\leq \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3},\\ &\leq \epsilon.\end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir que $f \in C(K)$.
Ahora veamos que $f_k \to f$ en la norma de $L^\infty(K)$ cuando $k \to \infty$.
Note que como $\{f_k\}$ es una sucesión de Cauchy, entonces dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$ se satisface que

$$\|f_n - f_m\|_{L^\infty} = \max_{x\in K} |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Luego, si fijamos n y hacemos que $m \to \infty$, entonces $f_m(x) \to f(x)$, por lo que podemos asegurar que

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_{L^\infty} &= \max_{x\in K} |f_n(x) - f(x)|,\\ &< \epsilon,\end{aligned}$$

lo que nos permite concluir que $f_k \to f$ cuando $k \to \infty$ en la norma de L^∞, es decir, el espacio $(C(K), \|\cdot\|_{L^\infty})$ es Banach.
Ahora veamos que $(C(K), \|\cdot\|_{L^\infty})$ no es un espacio reflexivo.
Note que como K es compacto, entonces podemos construir una sucesión $\{a_k\} \subset K$ tal que $a_k \to a$ con $a_k \neq a$ para todo k, esto ya que como K es un espacio métrico compacto el teorema de Bolzano-Weierstrass nos afirma que en un espacio métrico compacto toda sucesión tiene una subsucesión convergente en la que se pueden tomar puntos distintos que convergen a un punto límite que no pertenece al conjunto de sucesión de puntos.
Ahora, definamos $g_n \in C(K)$ tal que

$$g_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{Si } x = a_m \text{ con } 1 \leq m \leq n,\\ 0, & \text{Si } x = a_m \text{ con } m > n,\\ 0, & \text{Si } x = a.\end{cases}$$

Con $\|g_n\|_\infty = 1$, esto se puede ya que como K es un espacio normal (pues este es métrico y admite la propiedad de separación normal) y los conjuntos $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ y $B = \{a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\} \cup \{a\}$ son disyuntos y cerrados ya que A es un conjunto finito y B son los puntos de la sucesión convergente con su punto límite a, entonces por el lema de Urysohn si lo aplicamos en el subespacio normal $A \cup B$, sabemos que existe nuestra función continua g_n tal que $g_n(A) = \{1\}$ y $g_n(B) = \{0\}$, luego $\|g_n\|_{L^\infty(A\cup B)} = 1$, además usando el teorema de extensión de Tietze–Urysohn–Brouwer esta se puede extender de forma continua y que preserve la norma en todo el espacio K el cual es compacto y normal.
Ahora, razonaremos por contradicción y vamos a suponer que $C(K)$ es un espacio reflexivo.
Como anteriormente demostramos que $C(K)$ es de Banach y la sucesión $\{g_n\} \subset C(K)$

es acotada, entonces como $C(K)$ es un espacio reflexivo, debe de existir una subsucesión $\{g_{n_k}\} \subset C(K)$ débilmente convergente a una función $g \in C(K)$, es decir que para todo funcional $\phi \in C(K)^*$ se satisface que $\phi(g_{n_k}) \to \phi(g)$. En particular, definamos para cada a_n

$$\begin{aligned} \pi_{a_n} : C(K) &\to \mathbb{R}, \\ f &\to f(a_n). \end{aligned}$$

Note que $\pi_{a_n} \in C(K)^*$ ya que la linealidad del operador se da por la suma y producto por escalar de evaluaciones en funciones continuas y la continuidad de que $|\pi_{a_n}(f)| \leq f(a_n) \leq \|f\|_{L^\infty}$.
Siendo así, es fácil ver que dado a_n

$$\pi_{a_n}(g_{n_k}) = g_{n_k}(a_n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \leq n_k, \\ 0, & \text{si } n > n_k. \end{cases}$$

Luego se puede calcular que si tomamos $k \to \infty$, entonces eventualmente $n \leq n_k$, por lo que se puede afirmar que

$$\pi_{a_n}(g) = g(a_n) = 1.$$

para todo a_n dado, en particular si tomamos $n \to \infty$, entonces se concluye que

$$\pi_a(g) = g(a) = 1.$$

contradicción, pues en un principio por construcción $g(a) = 0$, lo que nos permite concluir que la sucesión acotada $\{g_n\} \subset C(K)$ no tiene una subsucesión débilmente convergente, es decir, el espacio $(C(K), \|\cdot\|_{L^\infty})$ no es reflexivo. □

Ejercicio 15. Sea E un espacio de Banach reflexivo. Sea $a : E \times E \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua, es decir, existe $M > 0$ tal que $|a(x,y)| \leq M \|x\| \|y\|$ para todo $x, y \in E$. Asuma que a es coerciva, esto es, existe $\alpha > 0$ tal que para todo $x \in E$

$$a(x,x) \geq \alpha \|x\|^2.$$

(a) Dado $x \in E$, defina $A_x(y) = a(x,y)$ para todo $y \in E$. Muestre que $A_x \in E^\star$ para cada $x \in E$. Además, concluya que la función $x \mapsto A(x) = A_x$ satisface que $A \in \mathcal{L}(E, E^\star)$.

(b) Muestre que A definida como en (a) es una función sobreyectiva.

(c) Deduzca que para $f \in E^\star$, existe un único $x \in E$ tal que $a(x,y) = \langle f; y \rangle$, para todo $y \in E$. Esto es, la forma bilineal coerciva a representa todo funcional lineal continuo.

Demostración. (a) Sea $x \in E$ cualquiera. Como a es una forma bilineal, dados $y_1, y_2 \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} A_x(y_1 + y_2) = a(x, y_1 + y_2) = a(x,y_1) + a(x,y_2) = A_x(y_1) + A_x(y_2) \\ A_x(\lambda y_1) = a(x, \lambda y_1) = \lambda a(x,y_1) = \lambda A_x(y_1), \end{aligned}$$

es decir, A_x es lineal para todo $x \in E$. Además, por hipótesis, dado $y \in E$

$$|A_x(y)| = |a(x,y)| \leq M \|x\| \|y\|,$$

es decir, $A_x \in E^\bigstar$ y $\|A_x\|_{E^\bigstar} \le M\,\|x\|$. Consideremos ahora la aplicación

$$\begin{aligned} A : E &\longrightarrow E^\bigstar \\ x &\longmapsto A(x) = A_x. \end{aligned}$$

Veamos que A es lineal. Sean $x_1, x_2, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces, dado que a es bilineal

$$\begin{aligned} [A(x_1 + x_2)](y) &= A_{x_1+x_2}(y) \\ &= a(x_1 + x_2, y) \\ &= a(x_1, y) + a(x_2, y) \\ &= A_{x_1}(y) + A_{x_2}(y) \\ &= [A(x_1) + A(x_2)](y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [A(\lambda x_1)](y) &= A_{\lambda x_1}(y) \\ &= a(\lambda x_1, y) \\ &= \lambda a(x_1, y) \\ &= \lambda A_{x_1}(y) \\ &= [\lambda A(\lambda x_1)](y), \end{aligned}$$

es decir, $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$ y $A(\lambda x_1) = \lambda A(x_1)$ para todo $x_1, x_2 \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, así, A es lineal. Veamos ahora que A es acotada (y por tanto continua). Por lo que vimos anteriormente,

$$\|A(x)\|_{E^\bigstar} = \|A_x\|_{E^\bigstar} \le M\,\|x\|\,,$$

por tanto, $A \in \mathcal{L}(E, E^\bigstar)$ y $\|A\| \le M$ (la norma de operador).

(b) Veamos que

$$\|A_x\|_{E^\bigstar} \ge \alpha\,\|x\| \qquad \text{para todo } x \in E. \tag{2}$$

Si $x = \mathbf{0}$, la desigualdad se tiene de manera inmediata. Si $x \neq \mathbf{0}$, como a es bilineal y coerciva

$$\left|A_x\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| = \left|a\left(x, \frac{x}{\|x\|}\right)\right| = \frac{1}{\|x\|}|a(x,x)| \ge \frac{1}{\|x\|}\alpha\,\|x\|^2 = \alpha\,\|x\|\,,$$

de manera que

$$\|A_x\|_{E^\bigstar} = \sup_{\substack{z\in E\\ \|z\|=1}} |A_x(z)| \ge \left|A_x\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| \ge \alpha\,\|x\|\,.$$

Queremos probar que $F = A(E)$, la imagen del operador A, es cerrado, viendo que $\overline{F} = F$. Recordemos que, por ser A lineal, F es un subespacio de $E^\bigstar$.

Sea $f \in \overline{F}$, entonces existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+} \subset F$ tal que $f_n \to f$. Por la definición de F, existen $x_n \in E$ tales que $f_n = A_{x_n}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Como la sucesión $(A_{x_n})_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es convergente, en particular, es de Cauchy, entonces, dado

$\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $n, m \geq N$, entonces $\|A_{x_n} - A_{x_m}\|_{E^\star} < \varepsilon$. Por la desigualdad (2), tenemos que para $n, m \geq N$

$$\varepsilon > \|A_{x_n} - A_{x_m}\|_{E^\star} = \|A_{x_n - x_m}\|_{E^\star} \geq \alpha \|x_n - x_m\|,$$

por tanto, la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ es de Cauchy en E, y como E es un espacio de Banach, existe $x \in E$ tal que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Consideremos entonces el operador A_x y veamos que $A_{x_n} \to A_x$ en $E^\star$. Por lo que probamos en la parte (a), se tiene que

$$\|A_{x_n} - A_x\|_{E^\star} = \|A_{x_n - x}\|_{E^\star} \leq M \|x_n - x\|,$$

entonces, como $x_n \to x$, la desigualdad anterior nos garantiza que $A_{x_n} \to A_x \in E^\star$. Por la unicidad del límite, se debe tener que $f = A_x$ y por tanto $f \in F$. De esta manera, $F = \overline{F}$, es decir, F es cerrado. Supongamos por contradicción que $F \subset E^\star$ estrictamente y sea $f_0 \in E^\star \setminus F$, entonces, por la segunda forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach, análogamente a lo hecho en el **Ejercicio 9**, existe $\xi \in E^{\star\star}$ con $\xi \neq 0$ tal que $\langle \xi; A_x \rangle = 0$ para todo $x \in E$.

Como E es reflexivo, existe un único $x_0 \in E$ tal que $\xi = Jx_0$, por tanto

$$\langle \xi; A_x \rangle = \langle Jx_0; A_x \rangle = \langle A_x; x_0 \rangle = A_x(x_0) = a(x, x_0) = 0.$$

para todo $x \in E$. Como $\xi \neq 0$, entonces $x_0 \neq \mathbf{0}$, y por ser a coerciva, para el caso en que $x = x_0$

$$a(x_0, x_0) \geq \alpha \|x_0\|^2 > 0,$$

lo cuál contradice que $a(x, x_0) = 0$ para todo $x \in E$. De esta manera, concluimos que $F = E^\star$.

(c) Sea $x \in E$ tal que $A_x = 0$, por la desigualdad (2), tenemos

$$0 = \|A_x\|_{E^\star} \geq \alpha \|x\|,$$

luego $\|x\| = 0$, es decir, $x = \mathbf{0}$. Esto quiere decir que el núcleo del operador lineal A es $\{\mathbf{0}\}$, o lo que es lo mismo, A es inyectivo.

Por el ítem (b) concluimos que $A : E \to E^\star$ es una biyección, en otras palabras, para todo $f \in E^\star$ existe un único $x \in E$ tal que

$$\langle f; y \rangle = f(y) = A_x(y) = a(x, y),$$

que es lo que se quería probar.

$\square$

Ejercicio 18. Sea E un espacio de Banach.

(a) Demuestre que existe un espacio topológico compacto K y una isometría de E en $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$.

(b) Asuma que E es separable y muestre que existe una isometría de E en l^∞.

Demostración. (a) En primer lugar, se tiene que

$$\{f \in E^\star : \|f\| \leq 1\}$$

es compacto en la topología $\sigma(E^\star, E)$. Considere ahora $(C(K), \|\cdot\|_\infty$. Ahora, note que $\|\cdot\|_\infty$ está bien definida, pues dada

$$f \in C(K) = \{f : K \to \mathbb{R} | f \text{ es continua}\}$$

Como f es continua, $f(K)$ es compacto es $\mathbb{R}$, y por tanto, $f(K)$ es cerrado y acotado. Esto garantiza que

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)| \quad \text{existe}$$

Ahora, defina la función $T : E \to C(K)$ dada por $x \mapsto Tx$, donde $(Tx)(f) = \langle f, x\rangle$ para $f \in K$. Así, dado $x \in E$

$$\|Tx\|_\infty = \sup_{f \in K} |(Tx)(f)| = \sup_{f \in K} |\langle f, x\rangle| = \sup_{\substack{f \in E^\star \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x\rangle| = \|x\|$$

donde la última igualdad se sigue del coralario visto en clase: "Para todo $x \in E$,

$$\max_{\substack{f \in E^\star \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x\rangle| = \sup_{\substack{f \in E^\star \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x\rangle| = \|x\|$$

(b) Recordamos que

$$l^\infty = \{\{a_n\}_{n=1}^\infty : a_n \in \mathbb{R},\ \forall n \geq 1,\ \sup_{n \geq 1} |a_n| < \infty\}$$

con la norma $\|\{a_n\}_{n=1}^\infty\|_{l^\infty} = \sup_{n \geq 1} |a_n|$. Con el objetivo de simplificar la notación, escribiremos $\{a_n\} := \{a_n\}_{n=1}^\infty$.
Ahora, como E es separable, entonces K es metrizable en $\sigma(E^\star, E)$ y además es compacto. Así, usando que "*Todo espacio métrico compacto es separable*", se tiene que K es separable, de modo que existe un subconjunto denso contable $\{f_n\} \subseteq K$. Definimos

$$\begin{aligned} F : & E \longrightarrow l^\infty \\ & x \longmapsto F(x) = \{\langle f_n, x\rangle\} \end{aligned}$$

En primer lugar, F está bien definida pues como $f_n \in K$ para todo $n \geq 1$, $\|f_n\| \leq 1$ (norma en $E^\star$) y por tanto

$$|\langle f_n, x\rangle| \leq \|f_n\| \, \|x\| \leq \|x\| \qquad \forall n \geq 1$$

lo que garantiza que $\sup_{n \geq 1} |\langle f_n, x\rangle| < \infty$, o lo que es lo mismo, $\{\langle f_n, x\rangle\} \in l^\infty$. Además, F resulta lineal, pues $f_n \in E^\star$ para todo $n \geq 1$. Veamos que F es una isometría. Por lo hecho en el numeral (a), $\|x\| = \|Tx\|_\infty$ para todo $x \in E$. Veremos que

$$\|Tx\|_\infty = \sup_{f\in K} |(Tx)(f)| = \sup_{n\geq 1} |(Tx)(f_n)|$$

lo que permitirá concluir que F es una isometría. Sea $x \in E$.
✓Como $\{f_n\} \subseteq K$, se tiene que

$$\sup_{n\geq 1} |(Tx)(f_n)| \leq \sup_{f\in K} |(Tx)(f)|$$

✓Por la definición de supremo, dado $\varepsilon > 0$, existe $g \in K$ tal que

$$\sup_{f\in K} |(Tx)(f)| < (Tx)(g) + \varepsilon$$
$$\sup_{f\in K} |(Tx)(f)| - \varepsilon < (Tx)(g)$$

Como Tx es continua (recuerde que $Tx \in C(K)$), existe $U \subseteq K$ vecindad de g (en $\sigma(E^\star, E)$ tal que

$$\forall f \in U : \quad |(Tx)(f) - (Tx)(g)| < \varepsilon$$

Como $\{f_n\}$ es denso en K, existe $f_k \in U \cap \{f_n\}$ de modo que,

$$|(Tx)(f_k) - (Tx)(g)| < \varepsilon$$

Por lo tanto

$$\sup_{f\in K} |(Tx)(f)| - 2\varepsilon < (Tx)(g) - \varepsilon < (Tx)(f_k) \leq \sup_{n\geq 1} |(Tx)(f_n)|$$

Así, haciendo $\varepsilon \to 0$, se tiene

$$\sup_{f\in K} |(Tx)(f)| \leq \sup_{n\geq 1} |(Tx)(f_n)|$$

Con lo cual,$\|Tx\|_\infty = \sup_{f\in K} |(Tx)(f)| = \sup_{n\geq 1} |(Tx)(f_n)|$. Así:

$$\begin{aligned}
\|Fx\|_{l^\infty} = \|\{\langle f_n, x\rangle\}\| &= \sup_{n\geq 1} |\langle f_n, x\rangle| \\
&= \sup_{n\geq 1} |(Tx)(f_n)| \\
&= \sup_{f\in K} |(Tx)(f)| \\
&= \|Tx\|_\infty \\
&= \|x\|
\end{aligned}$$

□