Análisis Armónico: Taller 3

25 de julio de 2025

Universidad Nacional de Colombia

Ricardo Ariel Pastrán Ramirez

Andrés David Cadena Simons acadenas@unal.edu.co

Problema 1:

Pruebe que el operador $\mathcal{F}$ de la transformada de Fourier es un isomorfismo de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ en si mismo. Dada $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-índice, pruebe que:

(I) $\widehat{\partial^\alpha \Psi} = (2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{\Psi}$;

(II) $(-2\pi i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha \Psi} = \partial^\alpha \widehat{\Psi}$;

(III) $\check{\widehat{\Psi}} = \Psi = \widehat{\check{\Psi}}$;

(IV) $\mathcal{F}^4 = Id$.

Solución:

Veamos que el operador $\mathcal{F}$ de la transformada de Fourier es un isomorfismo de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ en si mismo.
Para esto primero mostremos que es un operador inyectivo, esto ya que si suponemos que dados $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tales que $\widehat{\Psi_1} = \widehat{\Psi_2}$ se puede concluir que para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\Psi_1(\widehat{\phi}) &= \widehat{\Psi_1}(\phi), \\
&= \widehat{\Psi_2}(\phi), \\
&= \Psi_2(\widehat{\phi}).
\end{aligned}$$

De lo que se puede afirmar que $\Psi_1 = \Psi_2$, lo que demuestra que $\mathcal{F}$ es un operador inyectivo.
Ahora veamos que $\mathcal{F}$ es un operador sobreyectivo, ya que si definimos $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que si tomamos $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, entonces $\check{\Psi}(\phi) = \Psi(\check{\phi})$, entonces de forma análoga a $\mathcal{F}$ se puede demostrar que $\mathcal{F}^{-1}$ es un operador inyectivo, luego dado $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se sabe que existe $\check{\Psi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{\check{\Psi}} = \Psi$, lo que demuestra que $\mathcal{F}$ es un operador sobreyectivo y por ende biyectivo.
Ahora, veamos que es un operador continuo, sea $\{\psi_j\} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi_j \to \psi$ cuando $j \to \infty$ en el sentido de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, veamos que $\widehat{\psi_j} \to \widehat{\psi}$ cuando $j \to \infty$ en el sentido de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ya que

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} \widehat{\psi_j}(\phi) &= \lim_{j\to\infty} \psi_j(\widehat{\phi}), \\
&= \phi_{\widehat{\phi}}, \\
&= \widehat{\psi}(\phi).
\end{aligned}$$

Luego aplicando el mismo razonamiento con $\mathcal{F}^{-1}$ nosotros podemos concluir que el operador $\mathcal{F}$ de la transformada de Fourier es un isomorfismo de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ en si mismo.

1.

Problema 2:

Pregunta

Solución:

Solución

Problema 3:

Pregunta

Solución:

Solución

Problema 4:

Pregunta

Solución:

Solución

Problema 5:

Pregunta

Solución:

Solución