UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR

FACULTAD DE INGENIERÍA,
CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA

CARRERA DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Construcción de la función de Kolmogórov cuya serie de Fourier diverge en todas partes

Trabajo de titulación modalidad Proyecto de Investigación,
previo a la obtención del Título de Ingeniero Matemático.

Autor: Danilo Javier Vera Ponce

Tutor: Dr. Borys Yamil Álvarez Samaniego, Ph.D.

Quito, 2019

DERECHOS DE AUTOR

Danilo Javier Vera Ponce
CI: 1004167399
E-mail: djvera@uce.edu.ec

APROBACIÓN DEL TUTOR

En mi calidad de Tutor del Trabajo de Titulación, prsentado por **DANILO JAVIER VERA PONCE**, para optar por el Grado de Ingeniero Matemático; cuyo título es **CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN DE KOLMOGÓROV CUYA SERIE DE FOURIER DIVERGE EN TODAS PARTES**, considero que dicho trabajo reúne los requisitos y méritos suficientes para ser sometido a la presentación pública y evaluación por parte del tribunal examinador que se designe.

En la ciudad de Quito, a los 11 días del mes de diciembre de 2018.

Dr. Borys Yamil Álvarez Samaniego, Ph.D.
DOCENTE−TUTOR
C.C.: 1709065229

DEDICATORIA

A

mi mamá Esperanza, mi papá Rigoberto,

mis hermanos Gladys, Franklin, Nelly, Luis y Viviana.

A

la memoria de

David Chóez.

AGRADECIMIENTO

Un eterno agradecimiento a Dios por darme fuerza, motivación y capacidad para estudiar esta carrera tan hermosa. Además, le agradezco profundamente a mi maravillosa familia, la cual siempre confió en mí y me apoyó a pesar de todo.

Mi enorme gratitud con el Dr. Borys Álvarez Samaniego, Ph.D. por confiarme tan excelente problema de investigación y guiarme en el desarrollo del mismo en base a principios éticos, académicos y profesionales. Este proceso me permitió comprender lo difícil que puede llegar a ser escribir una línea en Matemática, pero también me ayudó a sentir una satisfacción enorme por las cosas bien hechas. De igual manera, agradezco al Dr. Petronio Álvarez Samaniego, Ph.D. por estar siempre presto a cualquier inquietud.

Un agradecimiento especial a mis amigos y compañeros con quienes compartí clases y a todos y cada uno de los profesores de la Carrera de Ingeniería Matemática.

CONTENIDO

TEMA: Construcción de la función de Kolmogórov cuya serie de Fourier diverge en todas partes.

Autor: Danilo Javier Vera Ponce

Tutor: Dr. Borys Álvarez Samaniego, Ph.D.

RESUMEN

El presente trabajo de investigación pretende desempolvar el famoso artículo referente a series de Fourier publicado en el ano de 1926 por A. Kolmogórov. En su trabajo, Kolmogórov asevera la existencia de una función integrable en el sentido de Lebesgue cuya serie de Fourier diverge en todo punto. Usando diferentes resultados de áreas como Análisis de Fourier, Teoría de la Medida y Teoría de Números, ha sido posible descifrar casi en su totalidad las afirmaciones que Kolmogórov plantea en su paper. Partiendo desde la idea original, se describe en detalle el proceso de la construcción de la función de Kolmogórov y se muestra de manera rigurosa que su serie de Fourier diverge en todos los puntos de su dominio.

PALABRAS CLAVE: FUNCION DE KOLMOGÓROV / SERIES DE FOURIER / DIVERGENCIA EN TODO PUNTO

TITLE: Construction of the Kolmogorov's function whose Fourier series diverges everywhere.

Author: Danilo Javier Vera Ponce

Advisor: Dr. Borys Álvarez Samaniego, Ph.D.

ABSTRACT

This research work aims to dust off the famous article about Fourier series published in the year 1926 by A. Kolmogorov. In his work, Kolmogorov asserts the existence of an integrable function in the Lebesgue sense whose Fourier series diverges at every point. Using different results from areas such as Fourier Analysis, Measure Theory and Number Theory, it has been possible to decipher almost entirely the statements that Kolmogorov raises in his paper. Starting from the original idea, the process of the construction of the Kolmogorov function is described in detail and it is shown in a rigorous way that its Fourier series diverges in all the points of its domain.

KEYWORDS: KOLMOGOROV'S FUNCTION / FOURIER SERIES / DIVERGENCE AT EVERY POINT

NOTACIONES

En el presente trabajo, se denota por $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales; incluido el cero. Además, se escribe con $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ para describir a los conjuntos de los números enteros, números reales y números complejos, respectivamente. Asimismo, se designa por $\mathbb{Z}^+$ al conjunto de los enteros positivos. El conjunto de los número racionales se representa por $\mathbb{Q}$ y si un número x es irracional se dice que $x \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$.

Se tiene que $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

Si a, $b \in \mathbb{R}$, entonces $[a, b]$ denota el conjunto de todos los valores $w \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq w \leq b$, correspondientemente, $[a, b)$ por $a \leq w < b$; (a, b) por $a < w < b$ y $(a, b]$ por $a < w \leq b$.

La notación $f : A \to B$ indica que f es una función de A en B y $b = f(a)$ como el valor de f en a. La manera de definir una función f es la siguiente:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) := y, \end{aligned}$$

donde $:=$ indica que se está definiendo lo de la izquierda.

Se dice que $f \in \mathcal{C}\big(A\big)$, si $f : A \to \mathbb{C}$ es una función continua en A.

Dado el conjunto X, la $\sigma-$álgebra $\mathbb{X}$ y la medida μ, se dice que $(X, \mathbb{X}, \mu)$ es un espacio de medida y se escribe por

$$M(X, \mathbb{X}) := \big\{ f : X \to \mathbb{C};\ f \text{ es } \mathbb{X}\text{−medible} \big\},$$

$$L(X, \mathbb{X}, \mu) := \left\{ f \in M(X, \mathbb{X});\ \int_X |f| d\mu < +\infty \right\}.$$

Si $f \in L(X, \mathbb{X}, \mu)$, se dice que f es integrable. Adicionalmente, si en $M(X, \mathbb{X})$ se establece la relación de equivalencia $\sim$, donde para todo g, $h \in M(X, \mathbb{X})$,

$$g \sim h \text{ si y solamente si } g = h, \ \mu - \text{casi todas partes.}$$

La clase de equivalencia de $f \in M(X, \mathbb{X})$ se nota por $[f]$ y se observa que

$$M(X, \mathbb{X})/_{\sim} := \big\{[f]; f \in M(X, \mathbb{X})\big\}.$$

Para todo $p \in [1, +\infty)$, se define el espacio

$$L^p(X, \mathbb{X}, \mu) := \left\{[f] \in M(X, \mathbb{X})/_{\sim};\ f \in M(X, \mathbb{X}),\ \int_X |f|^p \, d\mu < +\infty\right\}.$$

Asimismo, se define la función (norma)

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : L^p(X, \mathbb{X}, \mu) &\rightarrow [0, +\infty) \\ [f] &\mapsto \big\|[f]\big\| := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

En algunas ocasiones, cuando no hay peligro de confusión, se escribe $L^p(X)$ en lugar de $L^p(X, \mathbb{X}, \mu)$. Además, se escribe $f \in L^p(X, \mathbb{X}, \mu)$ para referirse a $[f] \in L^p(X, \mathbb{X}, \mu)$.

Adicionalmente, se denota por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ a las $\sigma-$álgebras de Borel y Lebesgue, respectivamente y λ es la medida de Lebesgue en la recta. Si restringimos la medida λ al intervalo $[0, 2\pi]$, esto es, $\lambda_{|_{[0,2\pi]}}$ y se considera el espacio de medida $\Big([0, 2\pi], \mathcal{L}([0, 2\pi]), \lambda_{|_{[0,2\pi]}}\Big)$, se tiene que

$$L^1\Big([0, 2\pi], \mathcal{L}([0, 2\pi]), \lambda_{|_{[0,2\pi]}}\Big) := \left\{\zeta \in M\big([0, 2\pi], \mathcal{L}([0, 2\pi])\big);\ \int_{[0,2\pi]} |\zeta| \, d\lambda < +\infty\right\}$$

Para todo $\zeta \in L^1\Big([0, 2\pi], \mathcal{L}([0, 2\pi]), \lambda_{|_{[0,2\pi]}}\Big)$, se denota por $\mathcal{S}(\zeta; \cdot)$ la serie de Fourier generada por la función ζ y dado $k \in \mathbb{N}$, la $k-$ésima suma parcial de la serie de Fourier de ζ se nota por $\mathcal{S}_k(\zeta; \cdot)$.

INTRODUCCIÓN

La posibilidad de representar una función por medio de una serie trigonométrica fue considerada primero por Euler en 1753 en conexión con el trabajo de Daniel Bernoulli *Sur les cordes vibrantes*, sin embargo, Euler notó que una de las afirmaciones hecha por Bernoulli conducía a resultados contradictorios para aquella época. En 1822, la idea de una representación, para las funciones, mediante series trigonométricas fue nuevamente planteada por Fourier, problema que enfrenta en su obra titulada *Theorie analytique de la chaleur*, donde realiza un planteamiento formal de resultados existentes junto a métodos totalmente originales y novedosos, contribuyendo enormemente al desarrollo de las series trigonométricas y lo que actualmente es llamada serie de Fourier y que forma parte de un área muy importante de las Matemáticas llamada Análisis de Fourier ([7]).

De manera general, el área de las series de Fourier está fundamentalmente asociada con las siguientes relaciones

$$\mathcal{S}(f;t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt) \Big), \tag{0.1}$$

donde para cada $n \in \{1, 2, \ldots\}$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \tag{0.2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx. \tag{0.3}$$

Estas expresiones que pueden ser simplificadas mediante la *identidad de Euler*, la cual para todo $x \in \mathbb{R}$, establece que

$$e^{ix} = \cos(x) + i \operatorname{sen}(x), \tag{0.4}$$

donde i representa la unidad imaginaria, con $i^2 = -1$. De (0.4), se deducen las siguientes identidades (ver página 56 de [13]), para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{0.5}$$

y

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \tag{0.6}$$

Podemos observar que a partir de (0.5) y (0.6), la relación (0.1) puede ser escrita en la forma

$$\mathcal{S}(f;t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} dt, \tag{0.7}$$

donde

$$c_0 := \frac{a_0}{2}$$

y para todo $n \in \{1, 2, \ldots\}$,

$$c_n := \frac{a_n - ib_n}{2}, \;\; c_{-n} := \frac{a_n - ib_n}{2}.$$

A continuación, para todo $n \in \mathbb{Z}$ y para todo $t \in \mathbb{R}$, se consideran las funciones

$$\Psi_n(t) = e^{int},$$

las cuales satisfacen las relaciones de ortogonalidad (ver Lema 2.11 de la página 66 de [12]), es decir,

$$(\Psi_k|\Psi_j) = \int_0^{2\pi} \Psi_k(t)\overline{\Psi_j(t)} dt = \int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-ijt} dt = \begin{cases} 0 & , \text{si } j \neq k, \\ 2\pi & , \text{si } j = k. \end{cases} \tag{0.8}$$

Si se supone ahora que la serie dada en (0.7) converge uniformemente a la función f. De (0.8) y tomando en cuenta la Proposición 2.11 de la página 67 de [12], se tiene que

$$(f|\Psi_n) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j(\Psi_j|\Psi_n) = 2\pi c_n$$

y por tanto

$$c_n = \frac{1}{2\pi}(f|\Psi_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

De (0.7), se tiene que

$$f(t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)e^{int}dt, \tag{0.9}$$

donde

$$\widehat{f}(n) = c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx. \tag{0.10}$$

Es importante precisar que el análisis de las series de Fourier trata de resolver cuestiones como ¿Qué tipo de función satisface (0.7), suponiendo que la serie trigonométrica es convergente?, ¿En qué sentido y bajo que condiciones la serie trigonométrica representa (converge) a la función f?, ¿Cuándo se puede calcular (0.8)?, etc.

Es evidente que los problemas de la teoría de series de Fourier están estrechamente ligados a la noción de integración. En la fórmula (0.8) tácitamente asumimos que el producto $fe^{-in\cdot}$ es integrable (¿en qué sentido?). Así, podemos considerar series de Fourier-Riemann o series de Fourier-Lebesgue, de acuerdo al sentido en el cual las integrales están definidas ([20]). En este trabajo excepto cuando se mencione lo contrario, las integrales son siempre en el sentido de Lebesgue y como no hay peligro de confusión, únicamente se dice series de Fourier.

Cuando el problema de la representación de funciones por series trigonométricas fue planteado de forma precisa, los intentos de probar la convergencia de la serie de Fourier aparecieron inmediatamente, Poisson y Cauchy publicaron algunas pruebas incorrectas. En 1829, Dirichlet presenta el primer resultado concreto de convergencia de series de Fourier, donde impuso ciertas restricciones a la función f. Al tener la posibilidad de considerar integrales en el sentido de Lebesgue podemos hablar de convergencia (o divergencia) en casi todo punto de las series de Fourier. En 1923 Kolmogórov demostró la existencia de una función integrable en el sentido de Lebesgue cuya serie de Fourier diverge en casi todo punto en su artículo *Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout* ([14]). Luego, en 1926 fue capaz de llevar la divergencia a todo punto en su trabajo *Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout* ([15]). El presente trabajo pretende descifrar el resultado de

Kolmogórov de 1926.

En el Capítulo I se muestra una breve descripción del problema, su justificación y los objetivos de la presente investigación. En el Capítulo II, se presentan algunos resultados importantes que serán utilizados en el Capítulo III; en el cual se realiza un análisis detallado del paper de Kolmogórov de 1926 ([15]) partiendo de la construcción de una sucesión de polinomios trigonométricos $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$, cuyas propiedades permitirán determinar la existencia de función de Kolmogórov Φ cuya serie de Fourier diverge en todas partes.

CAPÍTULO I

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

"There is a familiar formula -perhaps the most compact and famous of all formulas- developed by Euler from a discovery of De Moivre: $e^{i\pi} + 1 = 0$. ...It appeals equally to the mystic, the scientist, the philosopher, the mathematician.".
Edward Kasner, James R. Newman (1940)

1.1. Formulación del problema

El principal propósito del presente trabajo de investigación es construir una función $\Phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ tal que $\Phi \in L^1([0, 2\pi])$, cuya serie de Fourier diverge en todas partes. Con el fin de esclarecer la problemática y haciendo hincapié en el paper de Kolmogórov de 1926 ([15]), se abordan los siguientes cuatro puntos fundamentales.

1) La construcción de una sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ de polinomios trigonométricos no negativos. Esto es, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que

$$\varphi_n(x) \geq 0, \text{para todo } x \in [0, 2\pi]$$

y adicionalmente, se verifica que

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(y)dy = \pi.$$

2) El análisis riguroso de la sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$, que incluye sus diversas formas de representación. Además, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y para cierto $l \in \mathbb{Z}^+$, la formulación de una suma parcial $S_l(\cdot)$ asociada a la función φ_n. Se examina el comportamiento de las sumas parciales S_l y se determinan segmentos de la recta donde estas poseen cierto tipo de acotaciones.

3) La existencia de una sucesión real $\left(Q_p\right)_{\in\mathbb{Z}^+}$ tal que

$$\lim_{p\to+\infty} Q_p = +\infty$$

y de una sucesión de números enteros $\left(n_m\right)_{m\in\mathbb{Z}^+}$ estrictamente creciente, que satisface ciertas propiedades de crecimiento (suficientemente rápido).

A partir de las tres sucesiones mencionadas, $\left((\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}, (Q_p)_{p\in\mathbb{Z}^+} \text{ y } (n_m)_{m\in\mathbb{Z}^+}\right)$, se define la función de Kolmogórov Φ, por

$$\Phi(x) := \sum_{m=1}^{+\infty} M_{n_m}\varphi_{n_m}(x), \text{ para todo } x \in [0, 2\pi],$$

donde para todo $m \in \mathbb{Z}^+$, $M_{n_m} := \dfrac{1}{\sqrt{Q_{n_m}}}$.

4) Para cierto $n \in \{2, 3, \ldots\}$ suficientemente grande. Se denota por $v_n \in \mathbb{Z}^+$ el orden del polinomio trigonométrico φ_n. Entonces, es posible determinar números $\lambda_n \in \mathbb{Z}^+$ y un conjunto $F_n \subset [0, 2\pi]$ tales que

   i) $F_2 \subset \cdots \subset \bigcup_{p=2}^{+\infty} F_p = [0, 2\pi]$,

   ii) $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$ y

   iii) para todo $x \in F_n$, existe un $k := k_x \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\lambda_n \leq k < v_n$ y

   $$\mathcal{S}_k(\varphi_n; x) > Q_n,$$

   donde $\mathcal{S}_k(\varphi_n, \cdot)$, es la $k-$ésima suma parcial de la serie de Fourier de la función φ_n.

Las propiedades tanto de las funciones φ_n como de las sumas parciales S_l permiten concluir que efectivamente existe una función integrable Φ cuya serie de Fourier $\mathcal{S}(\Phi; .)$ diverge en todas partes, es decir, diverge en todos los puntos de su dominio.

1.2. Justificación del problema

Cuando Joseph Fourier mostró la idea de serie de Fourier a la comunidad matemática, él consideraba que cualquier función podría ser representada de tal manera (una suma infinita de senos y cosenos), pero a falta de demostraciones generales de sus resultados, lo que Fourier nos legó no fue un teorema sobre la representación de una función mediante una serie trigonométrica, sino un problema. Un problema en el que estaban implicados los conceptos de función, integral, suma de series y, posteriormente, tipo de convergencia. La influencia de este tipo de cuestiones en el desarrollo de los conceptos del Análisis Matemático fue considerable ([9]).

Posteriormente, A. N. Kolmogórov publicó alrededor de diez artículos sobre la teoría de las series trigonométricas (series de Fourier) y series ortogonales. De hecho, cada uno de ellos fue el comienzo de una investigación a gran escala, que continúa en la actualidad. El número de artículos de otros autores cuyo contenido está relacionado con alguno de los trabajos de Kolmogórov en esta área es muy grande ([18]).

El famoso ejemplo de Kolmogórov [14] de una serie de Fourier divergente en casi todas partes, sentó las bases para una nueva dirección importante en la teoría de las series trigonométricas. Este ejemplo fue uno de los primeros resultados de Kolmogórov; lo publicó en 1923, siendo un estudiante de diecinueve años. Un ejemplo verdaderamente sorprendente que aún atrae la atención, por su profundidad ideológica y claridad geométrica. Tres años después, y aún con la motivación por el estudio de las series trigonométricas, Kolmogórov mejora su resultado de 1923 y logra llevar la divergencia de las series de Fourier a todo punto y lo publica en diciembre de 1926 en su trabajo [15].

Ahora, se cuenta con trabajos detallados sobre la teoría de las series trigonométricas, los cuales contienen necesariamente un ejemplo de Kolmogórov. Sin embargo, en los conocidos trabajos de A. Zygmund ([20]) y N. K. Bary ([7]), que son las referencias importantes del presente trabajo, la autenticidad y claridad geométrica del ejemplo original de A. N. Kolmogórov [15] están algo ocultas.

En vista de lo anterior, resulta oportuno brindar aquí una exposición bastante detallada de este ejemplo en la forma en que fue construido por primera vez por A. N. Kolmogórov en 1926.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Estudiar de manera detallada y rigurosa algunos de los pasos fundamentales en el proceso de construcción de la función de Kolmogórov Φ y examinar su serie de Fourier asociada.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Contruir la sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ y estudiar el comportamiento que esta posee en sus diferentes formas de representación.
- Establecer una sucesión real $(M_p)_{p\in\mathbb{Z}^+}$ y una sucesión de números enteros $(n_m)_{m\in\mathbb{Z}^+}$ adecuadas.
- Determinar la función de Kolmogórov Φ a partir de las sucesiones $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$, $(M_p)_{p\in\mathbb{Z}^+}$ y $(n_m)_{m\in\mathbb{Z}^+}$, estudiar su serie de Fourier y el conjunto de puntos en la cual esta diverge.

CAPÍTULO II

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS IMPORTANTES

"Profound study of nature is the most fertile source of mathematical discoveries".
Joseph Fourier (1878)

Las identidades trigonométricas son igualdades matemáticas que involucran funciones trigonométricas, por ejemplo, $\operatorname{sen}:\mathbb{R}\to[-1,1]$, $\cos:\mathbb{R}\to[-1,1]$ y $\tan:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$. En el presente capítulo, se exponen algunas identidades trigonométicas minuciosamente probadas que serán utilizadas en las demostraciones de algunos resultados presentes en el Capítulo 3. Las identidades trigonométricas tratadas en este capítulo y más precisamente en la Sección 2.1 guardan estrecha relación con el Núcleo de Dirichlet, el cual puede ser encontrado en las referencias [12] y [13]. Además, algunos resultados similares se discuten en [7] y [20].

2.1. Relaciones con sumas trigonométricas

En esta sección, se presentan resultados clásicos de sumas trigonométricas de las funciones seno y coseno que serán utilizadas en las demostraciones de varias proposiciones y lemas sintetizados en las Secciones 3.1 y 3.2. Los lemas que se enuncian y se demuestran aquí, se los realizan de manera totalmente diferente a los presentados en referencias como [7] o [12].

En primer lugar, para todo $L\in\mathbb{N}$, se presenta una identidad para la suma de funciones de la forma $\cos(k\cdot)$, con $k\in\{0,\dots,L\}$.

Lema 2.1. *Para todo $L\in\mathbb{N}$, se tiene que*

$$\sum_{k=0}^{L} \cos(kx) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2L+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x\right)} & , \; si\; x \in \mathbb{R} \setminus \{2r\pi;\; r \in \mathbb{Z}\}, \\ \\ L+1 & , \; si\; x \in \{2r\pi;\; r \in \mathbb{Z}\}. \end{cases}$$

Demostración. Sea $L \in \mathbb{N}$. Se supone primero que $x = 2r\pi$, para algún $r \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$\sum_{k=0}^{L} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{L} \cos(2kr\pi) = \sum_{k=0}^{L} 1 = L+1. \tag{2.1}$$

Se supone ahora que $x \in \mathbb{R} \setminus \{2r\pi;\; r \in \mathbb{Z}\}$. Usando (0.5), se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{L} \cos(kx) &= \sum_{k=0}^{L} \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{L} e^{ikx} + \sum_{k=0}^{L} e^{-ikx}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1 - e^{i(L+1)x}}{1 - e^{ix}} + \frac{1 - e^{-i(L+1)x}}{1 - e^{-ix}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(1 - e^{-ix})(1 - e^{i(L+1)x}) + (1 - e^{ix})(1 - e^{-i(L+1)x})}{(1 - e^{ix})(1 - e^{-ix})}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1 - e^{i(L+1)x} - e^{-ix} + e^{iLx} + 1 - e^{-i(L+1)x} - e^{ix} + e^{-iLx}}{1 - e^{ix} - e^{-ix} + 1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2 + (e^{iLx} + e^{-iLx}) - (e^{i(L+1)x} + e^{-i(L+1)x}) - (e^{ix} + e^{-ix})}{2 - (e^{ix} + e^{-ix})}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2 + 2\cos(Lx) - 2\cos\big((L+1)x\big) - 2\cos(x)}{2 - 2\cos(x)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1 + \cos(Lx) - \cos\big((L+1)x\big) - \cos(x)}{1 - \cos(x)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\cos(Lx) - \cos\big((L+1)x\big)}{1 - \cos(x)}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\cos(Lx) - \cos\big((L+1)x\big)}{1 - \cos(x)}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

De (2.2) y haciendo uso de las Identidades A.3 y A.4, se sigue que

$$\sum_{k=0}^{L} \cos(kx) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{2L+1}{2}x\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{2}x\right)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2L+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x\right)}. \tag{2.3}$$

De (2.1) y (2.3), el resultado se sigue. $\square$

Observación 2.1. *Para todo $L \in \mathbb{Z}^+$, se tiene del Lema 2.1 que*

$$\sum_{k=1}^{L} \cos(kx) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2L+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x\right)} & , \ si\ x \in \mathbb{R} \setminus \{2r\pi;\ r \in \mathbb{Z}\}, \\ L & , \ si\ x \in \{2r\pi;\ r \in \mathbb{Z}\}. \end{cases}$$

El polinomio trigonométrico de la Observación 2.1 está relacionado con el *Núcleo de Dirichlet* de orden L, el cual es notado por $D_L(\cdot)$ (ver [12]).

Ahora, para todo $L \in \mathbb{Z}^+$, se establece una identidad para la suma de términos de la forma $\operatorname{sen}(k\cdot)$, con $k \in \{1, \ldots, L\}$.

Lema 2.2. *Para todo $L \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{L} \operatorname{sen}(kx) = \begin{cases} \dfrac{\cos\left(\dfrac{1}{2}x\right) - \cos\left(\dfrac{2L+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x\right)} & , \ si\ x \in \mathbb{R} \setminus \{2r\pi;\ r \in \mathbb{Z}\}, \\ 0 & , \ si\ x \in \{2r\pi;\ r \in \mathbb{Z}\}. \end{cases}$$

Demostración. Sea $L \in \mathbb{Z}^+$. En primer lugar, se supone que $x = 2r\pi$, para algún $r \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$\sum_{k=1}^{L} \operatorname{sen}(kx) = \sum_{k=1}^{L} \operatorname{sen}(2kr\pi) = \sum_{k=1}^{L} 0 = 0. \tag{2.4}$$

Ahora, se supone que $x \in \mathbb{R} \setminus \{2r\pi;\ r \in \mathbb{Z}\}$. Usando (0.5) y (0.6), se ve que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{L} \operatorname{sen}(kx) &= \sum_{k=1}^{L} \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \\ &= \frac{1}{2i}\left(\sum_{k=1}^{L} e^{ikx} - \sum_{k=1}^{L} e^{-ikx}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{ix}(1-e^{iLx})}{1-e^{ix}} - \frac{e^{-ix}(1-e^{-iLx})}{1-e^{-ix}}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{(1-e^{-ix})(e^{ix}-e^{i(L+1)x}) - (1-e^{ix})(e^{-ix}-e^{-i(L+1)x})}{(1-e^{ix})(1-e^{-ix})}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{ix}-e^{i(L+1)x}-1+e^{iLx}-e^{-ix}+e^{-i(L+1)x}+1-e^{-iLx}}{1-e^{-ix}-e^{ix}+1}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{(e^{iLx}-e^{-iLx})-(e^{i(L+1)x}-e^{-i(L+1)x})+(e^{ix}-e^{-ix})}{2-(e^{ix}+e^{-ix})}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{2i\operatorname{sen}(Lx)-2i\operatorname{sen}\big((L+1)x\big)+2i\operatorname{sen}(x)}{2-2\cos(x)}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(Lx)-\operatorname{sen}\big((L+1)x\big)+\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)}\right). \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

De (2.5) y utilizando las Identidades A.3 y A.5, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{L}\operatorname{sen}(kx) &= \frac{1}{2}\,\frac{-2\cos\left(\frac{2L+1}{2}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)+2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}x\right)}\\
&= \frac{\cos\left(\frac{1}{2}x\right)-\cos\left(\frac{2L+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)}. \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

De (2.4) y (2.6), el resultado se sigue. □

El Lema 2.3 busca para todo $L \in \mathbb{Z}^+$ una identidad que represente la suma de términos de la forma $k\cos(k\cdot)$, con $k \in \{1,\ldots,L\}$

Lema 2.3. *Para todo $L \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que*

$$
\sum_{k=1}^{L} k\cos(kx) = \begin{cases}
\dfrac{L\operatorname{sen}\left(\frac{2L+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)} - \dfrac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{L}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}x\right)} & ,\ si\ x \in \mathbb{R}\setminus\{2r\pi;\ r\in\mathbb{Z}\},\\[2ex]
\dfrac{L(L+1)}{2} & ,\ si\ x \in \{2r\pi;\ r\in\mathbb{Z}\}.
\end{cases}
$$

Demostración. Sea $L \in \mathbb{Z}^+$. Primero, se supone que $x = 2r\pi$, para algún $r \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{L} k\cos(kx) &= \sum_{k=1}^{L} k\cos(2kr\pi)\\ &= \sum_{k=1}^{L} k(1)\\ &= \frac{L(L+1)}{2}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Se supone ahora que $x \in \mathbb{R} \setminus \{2r\pi;\ r \in \mathbb{Z}\}$. Se observa que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{L} k\cos(kx) &= \sum_{k=1}^{L} \frac{d}{dx}\Big(\operatorname{sen}(kx)\Big)\\ &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{L} \operatorname{sen}(kx)\right).\end{aligned} \tag{2.8}$$

De (2.8) y usando el Lema 2.2 y la Identidad A.3, se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{L} k\cos(kx) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \cos\left(\frac{2L+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)}\right)\\
&= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}x\right)}\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{2L+1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2L+1}{2}x\right)\right)\\
&\quad - \frac{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}x\right)}\left(\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \cos\left(\frac{2L+1}{2}x\right)\right)\\
&= \frac{1}{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}x\right)}\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{2L+1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2L+1}{2}x\right)\right.\\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\left(\frac{2L+1}{2}x\right)\right)\\
&= \frac{1}{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}x\right)}\left(-\frac{1}{2} + L\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2L+1}{2}x\right)\right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2L+1}{2}x\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\left(\frac{2L+1}{2}x\right)\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{L \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2L+1}{2}x\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2L+1}{2}x - \frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{2}}{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

$$= \frac{L \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2L+1}{2}x\right) + \frac{1}{2}\cos(Lx) - \frac{1}{2}}{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

$$= \frac{L \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2L+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}x\right)} - \frac{\frac{1}{2}\Big(1-\cos(Lx)\Big)}{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

$$= \frac{L \operatorname{sen}\left(\frac{2L+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)} - \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{L}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}x\right)}. \tag{2.9}$$

De (2.7) y (2.9), se sigue el resultado. $\square$

De manera similar a lo realizado en el lema anterior, el siguiente lema propone, para todo $L \in \mathbb{Z}^+$, una identidad para la suma de funciones de la forma $k \operatorname{sen}(k\cdot)$, con $k \in \{1, \ldots, L\}$.

Lema 2.4. *Para todo $L \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{L} k \operatorname{sen}(kx) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(Lx)}{4\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}x\right)} - \dfrac{L\cos\left(\frac{2L+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)} & , \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \{2r\pi;\ r \in \mathbb{Z}\}, \\ 0 & , \text{ si } x \in \{2r\pi;\ r \in \mathbb{Z}\}. \end{cases}$$

Demostración. Sea $L \in \mathbb{Z}^+$. Se supone en primer lugar que $x = 2r\pi$, para algún $r \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$\sum_{k=1}^{L} k \operatorname{sen}(kx) = \sum_{k=1}^{L} k \operatorname{sen}(2kr\pi) = \sum_{k=1}^{L} k(0) = 0. \tag{2.10}$$

Ahora, se supone que $x \in \mathbb{R} \setminus \{2r\pi;\ r \in \mathbb{Z}\}$. Se observa que

$$\sum_{k=1}^{L} k \operatorname{sen}(kx) = \sum_{k=1}^{L} \left(-\frac{d}{dx}\Big(\cos(kx)\Big)\right) = -\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{L}\cos(kx)\right). \tag{2.11}$$

De (2.11) y haciendo uso de la Observación 2.1, se sigue que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{L} k \operatorname{sen}(kx) &= -\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2L+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x\right)}\right) \\
&= -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{2}x\right)}\left(\frac{2L+1}{2}\cos\left(\frac{2L+1}{2}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2L+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right) \\
&= \frac{1}{2\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{2}x\right)}\left(-L\cos\left(\frac{2L+1}{2}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2L+1}{2}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2L+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right) \\
&= \frac{1}{2\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{2}x\right)}\left(-L\cos\left(\frac{2L+1}{2}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2L+1}{2}x - \frac{1}{2}x\right)\right) \\
&= \frac{1}{2\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{2}x\right)}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(Lx) - L\cos\left(\frac{2L+1}{2}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)\right) \\
&= \frac{\operatorname{sen}(Lx)}{4\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{2}x\right)} - \frac{L\cos\left(\dfrac{2L+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x\right)}. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

De (2.10) y (2.12), se sigue el resultado. □

En resumen, la Sección 2.1 presenta identidades para la suma de funciones trigonométricas (sen y cos). Estos resultados serán de gran utilidad en las demostraciones de las Proposiciones 3.1, 3.8, 3.10 y del Lema 3.1, más adelante.

2.2. Combinación lineal de funciones trigonométricas

Esta sección, se compone de resultados importantes que serán utilizados en la demostración de la Proposición 3.7 y del Lema 3.2.

Definición 2.1. *Sea* $n \in \mathbb{Z}^+$. *Sean* $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *funciones complejo-valuadas y* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. *Se define*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j \right)(x) := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(x). \end{aligned}$$

Se dice que $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j$ *forma una combinación lineal de las funciones* $f_1, \ldots, f_n$.

La siguiente proposición es un resultado clásico de la combinación lineal de las funciones $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ y $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, la cual indica que esta suma es equivalente a una sola onda sinusoidal con parámetros adecuados.

Proposición 2.1 (Combinación lineal de seno y coseno)**.** *Para todo* y, α, $\beta \in \mathbb{R}$, *existen* A, $\theta \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$\alpha \cos(y) + \beta \operatorname{sen}(y) = A \operatorname{sen}(y + \theta). \tag{2.13}$$

Demostración. Sean y, α, $\beta \in \mathbb{R}$. Se consideran los siguientes cuatro casos.

(a) Si $\alpha = 0 = \beta$, entonces existen una infinidad de valores A, $\theta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha \cos(y) + \beta \operatorname{sen}(y) = 0 = A \operatorname{sen}(y + \theta).$$

Sin embargo, como se verá más adelante, resulta conveniente tomar $A := 0$ y $\theta := \frac{\pi}{2}$.

(b) Se supone ahora que $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$. Tomando $A := \beta$ y $\theta := 0$, se sigue que

$$\alpha \cos(y) + \beta \operatorname{sen}(y) = \beta \operatorname{sen}(y) = A \operatorname{sen}(y + \theta).$$

(c) Se supone esta vez que $\alpha \neq 0$ y $\beta = 0$. Usando el hecho que para todo $z \in \mathbb{R}$, $\cos(z) = \operatorname{sen}(z + \frac{\pi}{2})$ y tomando $A := \alpha$ y $\theta := \dfrac{\pi}{2}$, se tiene que

$$\alpha \cos(y) + \beta \operatorname{sen}(y) = \alpha \cos(y) = \alpha \operatorname{sen}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = A \operatorname{sen}(y + \theta).$$

(d) Finalmente, se supone que $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$. Así, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. Entonces,

$$\alpha \cos(y) + \beta \operatorname{sen}(y) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cos(y) + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \operatorname{sen}(y) \right). \quad (2.14)$$

Además, se ve que

$$\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right)^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = 1.$$

Luego, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \neq 0 \quad (2.15)$$

y

$$\cos(\theta) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \neq 0. \quad (2.16)$$

Tomando $A := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ y usando (2.14)-(2.16), se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha \cos(y) + \beta \operatorname{sen}(y) &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \Big(\operatorname{sen}(\theta) \cos(y) + \cos(\theta) \operatorname{sen}(y) \Big) \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \ \operatorname{sen}(y + \theta) \\ &= A \operatorname{sen}(y + \theta). \end{aligned}$$

A continuación, se va a obtener un valor determinado para θ. Hasta el fin de esta prueba, se considera la función $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ como la función inversa de $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$.

i) Si $\beta > 0$, entonces $\cos(\theta) > 0$. Tomando $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, de (2.15) y (2.16), se ve que $\theta := \arctan\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$.

ii) Si $\beta < 0$, entonces $\cos(\theta) < 0$. Tomando $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, de (2.15) y (2.16), se tiene que $\theta := \arctan\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) + \pi$.

De i) y ii), se observa que

$$\theta := \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) & , \text{ si } \beta > 0, \\ \arctan\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) + \pi & , \text{ si } \beta < 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Enseguida, se va a mostrar que θ dado en (2.17), satisface (2.15) y (2.16) arriba. Primero, se considera el caso cuando $\beta > 0$, es decir, $|\beta| = \beta$. De (2.17) y utilizando las Identidades A.6 y A.7, se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\theta) &= \operatorname{sen}\left(\arctan\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right) \\ &= \frac{\dfrac{\alpha}{\beta}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2}} \\ &= \frac{\dfrac{\alpha}{\beta}}{\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{|\beta|}} \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \cos\left(\arctan\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{|\beta|}} \\ &= \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}. \end{aligned}$$

Ahora, si $\beta < 0$, es decir, $|\beta| = -\beta$, de (2.17) y utilizando nuevamente las

Identidades A.6 y A.7, se ve que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\theta) &= \operatorname{sen}\left(\arctan\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+\pi\right)\\
&= \operatorname{sen}\left(\arctan\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right)\cos(\pi)+\cos\left(\arctan\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right)\operatorname{sen}(\pi)\\
&= -\operatorname{sen}\left(\arctan\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right)\\
&= -\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}\\
&= -\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{|\beta|}}\\
&= \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \cos\left(\arctan\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+\pi\right)\\
&= \cos\left(\arctan\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right)\cos(\pi)-\operatorname{sen}\left(\arctan\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right)\operatorname{sen}(\pi)\\
&= -\cos\left(\arctan\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right)\\
&= -\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}\\
&= -\frac{1}{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{|\beta|}}\\
&= \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.
\end{aligned}$$

En conclusión, de (a)-(d), se tiene que existen A, $\theta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha\cos(y)+\beta\operatorname{sen}(y)=A\operatorname{sen}(y+\theta),$$

donde

$$A := \begin{cases} \beta & , \text{ si } \alpha = 0 \text{ y } \beta \neq 0, \\ \alpha & , \text{ si } \alpha \neq 0 \text{ y } \beta = 0, \\ \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} & , \text{ caso contrario} \end{cases} \tag{2.18}$$

y

$$\theta := \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) + \pi & , \text{ si } \alpha \neq 0 \text{ y } \beta < 0, \\ \arctan\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) & , \text{ si } \alpha \neq 0 \text{ y } \beta > 0, \\ \dfrac{\pi}{2} & , \text{ si } \alpha \in \mathbb{R} \text{ y } \beta = 0, \\ 0 & , \text{ si } \alpha = 0 \text{ y } \beta \neq 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

□

Corolario 2.1. *Para todo* y, α, $\beta \in \mathbb{R}$, *existen* B, $\gamma \in \mathbb{R}$ *de manera que*

$$\alpha \cos(y) + \beta \operatorname{sen}(y) = B \cos(y + \gamma).$$

Demostración. Sean y, α, $\beta \in \mathbb{R}$. A partir de la Propoición 2.1, se tiene que existen A, $\theta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha \cos(y) + \beta \operatorname{sen}(y) = A \operatorname{sen}(y + \theta),$$

donde A y θ están dados en (2.18) y (2.19), respectivamente. Usando el hecho que para todo $z \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sen}(z) = \cos\left(z - \dfrac{\pi}{2}\right)$, se tiene que existen B, $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} \alpha \cos(y) + \beta \operatorname{sen}(y) &= A \operatorname{sen}(y + \theta) \\ &= A \cos\left(y + \theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= B \cos(y + \gamma), \end{aligned}$$

con

$$B := A := \begin{cases} \beta & , \text{ si } \alpha = 0 \text{ y } \beta \neq 0, \\ \alpha & , \text{ si } \alpha \neq 0 \text{ y } \beta = 0, \\ \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} & , \text{ caso contrario} \end{cases} \tag{2.20}$$

y

$$\gamma := \theta - \frac{\pi}{2} := \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) + \dfrac{\pi}{2} & , \text{ si } \alpha \neq 0 \text{ y } \beta < 0, \\ \arctan\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) - \dfrac{\pi}{2} & , \text{ si } \alpha \neq 0 \text{ y } \beta > 0, \\ 0 & , \text{ si } \alpha \in \mathbb{R} \text{ y } \beta = 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} & , \text{ si } \alpha = 0 \text{ y } \beta \neq 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

$\square$

CAPÍTULO III

ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN DE KOLMOGÓROV

"Every mathematician believes that he is ahead over all others. The reason why they don't say this in public, is because they are intelligent people".
Andrei Kolmogorov

La existencia de una función integrable cuya serie de Fourier diverge en todas partes se publicó por primera vez en [15] por Andréi Kolmogórov. En un trabajo anterior ([14]), Kolmogórov a la edad de 19 años obtuvo un primer resultado significativo en esta área, se exhiben los pasos que conducen a mostrar la existencia de una función integrable en el sentido de Lebesgue cuya serie de Fourier diverge en casi todas partes, es decir, excepto en un conjunto de medida cero. Un estudio detallado y minucioso de [14] se puede encontrar en [12].

En el presente capítulo se analiza el enunciado principal de [15], esto es, se estudia en detalle el proceso fundamental para la construcción de una función integrable en el sentido de Lebesgue cuya serie de Fourier diverge en todas partes. Vale la pena mencionar que existen bosquejos de la demostración de este resultado realizados por N. K. Bary ([7]) y A. Zygmund ([20]) basados en la misma idea de Kolmogórov, sin embargo, estas pruebas difieren esencialmente de los 5 puntos que se manifiestan en el artículo [15], pero brindan pautas importantes para la realización del presente trabajo de investigación.

En las siguientes cinco secciones, correspondientes a los cinco puntos fundamentales descritos en [15], se pormenoriza la idea original plasmada por Kolmogórov.

3.1. Construcción de una sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ de polinomios trigonométricos no negativos

El objetivo principal de esta sección es demostrar detalladamente las aseveraciones expuestas en el punto 1° de [15]. En otras palabras, para todo $m \in \mathbb{Z}^+$, se define la función σ_m, la cual está dada en (3.1) abajo, y se analizan algunas de sus características. A partir de la definición de la función σ_m, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y para todo $p \in \{0, \dots, n\}$, se define la función auxiliar $\phi_p := \phi_{p,n}$, que está dada en (3.8) abajo. Luego, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se define la función $\varphi_n := \phi_{n,n}$, dada en (3.9) y se estudian ciertas propiedades de esta función que permiten justificar prolijamente el punto 1° de [15].

La función que se define a continuación, corresponde a la función σ_m, con $m \in \mathbb{Z}^+$, mencionada en el párrafo anterior y será usada en la definición de la función φ_n, con $n \in \mathbb{Z}^+$ (Definición 3.2), más adelante.

Definición 3.1. *Para todo $m \in \mathbb{Z}^+$, se define la función*

$$\begin{aligned} \sigma_m : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sigma_m(x) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{m-k}{m}\cos(kx). \end{aligned} \tag{3.1}$$

El siguiente resultado será utilizado en la Observación 3.2.

Observación 3.1. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que*

$$\sigma_1(x) = \frac{1}{2}.$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. De (3.1), se tiene que

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) &:= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{1} \frac{1-k}{1}\cos(kx) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1-1}{1}\cos(x) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$\square$

A continuación, para todo $m \in \mathbb{Z}^+$, se reescribe la función σ_m dada en (3.1), en una forma conveniente de tal manera que resulte inmediato deducir que esta función es no negativa.

Proposición 3.1. *Para todo $m \in \mathbb{Z}^+$, la función σ_m dada en* (3.1) *se puede reescribir como*

$$\sigma_m(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{m}{2}x\right)}{2m\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{2}x\right)} & , \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \{2l\pi;\ l \in \mathbb{Z}\}, \\ \dfrac{m}{2} & , \text{ si } x \in \{2l\pi;\ l \in \mathbb{Z}\}. \end{cases}$$

Demostración. Sea $m \in \mathbb{Z}^+$. Se supone primero que $x = 2l\pi$, para algún $l \in \mathbb{Z}$. De (3.1), se ve que

$$\begin{aligned} \sigma_m(x) &:= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{m-k}{m}\cos(2kl\pi) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{m-k}{m}(1) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} 1 - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} k \\ &= \frac{1}{2} + m - \frac{1}{m}\frac{m(m+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{m-1}{2} \\ &= \frac{m}{2}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Se supone ahora que $x \in \mathbb{R} \setminus \{2l\pi;\ l \in \mathbb{Z}\}$. De (3.1), de la Observación 2.1 y del Lema 2.3, se tiene que

$$\begin{aligned} \sigma_m(x) &:= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{m-k}{m}\cos(kx) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m}\cos(kx) - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} k\cos(kx) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2m+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x\right)} - \frac{1}{m}\left(\frac{m\operatorname{sen}\left(\dfrac{2m+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x\right)} - \frac{\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{m}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{2}x\right)}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2m+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)} - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2m+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)} + \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{m}{2}x\right)}{2m\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{m}{2}x\right)}{2m\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}x\right)}. \tag{3.3}$$

De (3.2) y (3.3), el resultado se sigue. □

El siguiente resultado se desprende de la proposición anterior y será usado en las demostraciones de la Proposición 3.3 y de las Observaciones 3.4 y 3.5, más adelante.

Proposición 3.2. *Para todo $m \in \mathbb{Z}^+$, la función σ_m dada en* (3.1) *cumple que*

$$0 \leq \sigma_m(x) \leq \frac{m}{2}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Sean $m \in \mathbb{Z}^+$ y $x \in \mathbb{R}$. La función σ_m dada en (3.1) es no negativa. En efecto, usando la Proposición 3.1, se verifica de forma inmediata que

$$\sigma_m(x) \geq 0. \tag{3.4}$$

Ahora, de (3.4), (3.1) y usando el hecho que para todo $z \in \mathbb{R}$, $|\cos(z)| \leq 1$, se observa que

$$\begin{aligned}
0 \leq \sigma_m(x) &= |\sigma_m(x)| \\
&:= \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{m-k}{m} \cos(kx) \right| \\
&\leq \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{m-k}{m} \big| \cos(kx) \big| \\
&\leq \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{m-k}{m} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} 1 - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} k \\
&= \frac{1}{2} + m - \frac{1}{m} \frac{m(m+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{m-1}{2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{m}{2},$$

lo que muestra el resultado. $\square$

En la siguiente definición, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se determina la función φ_n. La sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ representa la sucesión de polinomios trigonométricos que se manifiesta en el enunciado de esta sección y representan un fragmento importante dentro del presente trabajo. Las características de estas funciones resultan fundamentales para determinar la existencia de la función de Kolmogórov cuya serie de Fourier diverge en todo punto.

Definición 3.2. *Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Se determina la sucesión finita y creciente de enteros positivos dada por*

$$m_j := m_{j,n} := n^{4(j+1)}, \text{ para todo } j \in \{0, \dots, n\}. \tag{3.5}$$

Además, se establece

$$A_j := A_{j,n} := \frac{4j\pi}{2n+1}, \text{ para todo } j \in \{0, \dots, n\}. \tag{3.6}$$

Se observa que

$$A_n := A_{n,n} := 2\pi - \frac{2\pi}{2n+1}. \tag{3.7}$$

A partir de (3.5) *y* (3.6), *para todo $p \in \{0, \dots, n\}$, se define la función $\phi_p := \phi_{p,n}$ dada por*

$$\begin{array}{rcl} \phi_p : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \phi_p(x) := \dfrac{1}{p+1} \displaystyle\sum_{j=0}^{p} \sigma_{m_j}(A_j - x), \end{array} \tag{3.8}$$

donde para todo $r \in \mathbb{Z}^+$, la función σ_r está dada en (3.1).

Usando (3.8), *se define la función φ_n como*

$$\begin{array}{rcl} \varphi_n := \phi_{n,n} : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \varphi_n(x) := \phi_{n,n}(x) := \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \sigma_{m_j}(A_j - x). \end{array} \tag{3.9}$$

En la siguiente observación se examina el caso cuando $n = 1$ en (3.9).

Observación 3.2. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que*

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}.$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. De (3.9), (3.5) y haciendo uso de la Observación 3.1, se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &:= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{1} \sigma_{m_j}(A_j - x) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{1} \sigma_1(A_j - x) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{1} \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

Hasta ahora, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se ha definido la función φ_n, dada en (3.9) arriba. En lo que sigue y hasta el final de esta sección, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se estudian ciertas propiedades de la función φ_n, las cuales permiten justificar detalladamente las afirmaciones expuestas en el punto 1° de [15].

La siguiente propiedad será de gran utilidad para la demostración de los resultados presentados en la Sección 3.5.

Proposición 3.3. *Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, la función φ_n dada en* (3.9) *es no negativa.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y $x \in \mathbb{R}$. Usando la Proposición 3.2, se observa que para todo $j \in \{0, \dots, n\}$,

$$\sigma_{m_j}(A_j - x) \geq 0.$$

Luego,

$$\sum_{j=0}^{n} \sigma_{m_j}(A_j - x) \geq 0.$$

De (3.9), se ve que

$$\varphi_n(x) := \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\sigma_{m_j}(A_j - x) \geq 0.$$

$\square$

Proposición 3.4. *Para todo* $n \in \mathbb{Z}^+$*, la función* φ_n *dada en* (3.9) *es* 2π*-periódica, es decir, para todo* $x \in \mathbb{R}$*, se tiene que*

$$\varphi_n(x + 2\pi) = \varphi_n(x).$$

Demostración. Sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y $x \in \mathbb{R}$. De (3.9), (3.1) y usando el hecho que $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ es 2π-periódica, se ve que

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x + 2\pi) &:= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\sigma_{m_j}\big(A_j - (x + 2\pi)\big) \\
&:= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m_j}\frac{m_j - k}{m_j}\cos\big(k(A_j - x - 2\pi)\big)\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m_j}\frac{m_j - k}{m_j}\cos\big(k(A_j - x) - 2k\pi\big)\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m_j}\frac{m_j - k}{m_j}\cos\big(k(A_j - x)\big)\right) \\
&=: \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\sigma_{m_j}(A_j - x) \\
&=: \varphi_n(x),
\end{aligned}$$

donde para todo $j \in \{0, \dots, n\}$, $m_j := m_{j,n}$ y $A_j := A_{j,n}$ están dados en (3.5) y (3.6), respectivamente. $\square$

Proposición 3.5. *Para todo* $n \in \mathbb{Z}^+$*, la función* φ_n *dada en* (3.9) *es continua.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Se va a probar que la función φ_n dada en (3.9) es continua en x_0. Primero, de (3.9), (3.1) y de la Identidad A.1, se sigue que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
\big|\varphi_n(x)-\varphi_n(x_0)\big| &:= \left|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\sigma_{m_j}(A_j-x)-\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\sigma_{m_j}(A_j-x_0)\right| \\
&= \frac{1}{n+1}\left|\sum_{j=0}^{n}\Big(\sigma_{m_j}(A_j-x)-\sigma_{m_j}(A_j-x_0)\Big)\right| \\
&:= \frac{1}{n+1}\left|\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m_j}\frac{m_j-k}{m_j}\cos\big(k(A_j-x)\big)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.-\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{m_j}\frac{m_j-k}{m_j}\cos\big(k(A_j-x_0)\big)\right)\right| \\
&= \frac{1}{n+1}\left|\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{m_j-k}{m_j}\Big(\cos\big(k(A_j-x)\big)-\cos\big(k(A_j-x_0)\big)\Big)\right| \\
&\le \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{m_j-k}{m_j}\Big|\cos\big(k(A_j-x)\big)-\cos\big(k(A_j-x_0)\big)\Big| \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{m_j-k}{m_j}\left|-2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\Big(k(A_j-x)+k(A_j-x_0)\Big)\right)\right. \\
&\qquad \left.\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\Big(k(A_j-x)-k(A_j-x_0)\Big)\right)\right| \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{m_j-k}{m_j}2\left|\operatorname{sen}\left(kA_j-\frac{k}{2}(x+x_0)\right)\right| \\
&\qquad \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k}{2}(x_0-x)\right)\right|, \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

donde para todo $j\in\{0,\dots,n\}$, $m_j:=m_{j,n}$ y $A_j:=A_{j,n}$ están dados en (3.5) y (3.6), respectivamente.

Ahora, usando el hecho que para todo $z_1\in\mathbb{R}$, $|\operatorname{sen}(z_1)|\le 1$, se tiene que para todo $j\in\{0,\dots,n\}$, para todo $k\in\{1,\dots,m_j\}$ y para todo $x\in\mathbb{R}$,

$$
\left|\operatorname{sen}\left(kA_j-\frac{k}{2}(x+x_0)\right)\right|\le 1, \qquad (3.11)
$$

donde $m_j:=m_{j,n}$ y $A_j:=A_{j,n}$ están dados en (3.5) y (3.6), respectivamente.

Asimismo, tomando en cuenta que para todo $z_2\in\mathbb{R}$, $|\operatorname{sen}(z_2)|\le|z_2|$, se ve que para todo $j\in\{0,\dots,n\}$, para todo $k\in\{1,\dots,m_j\}$ y para todo $x\in\mathbb{R}$,

$$
\left|\operatorname{sen}\left(\frac{k}{2}(x_0-x)\right)\right|\le\frac{k}{2}|x-x_0|, \qquad (3.12)
$$

donde $m_j:=m_{j,n}$ está dado en (3.5).

Además, para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$ y para todo $k \in \{1, \ldots, m_j\}$,

$$\frac{m_j - k}{m_j} \leq 1, \tag{3.13}$$

donde $m_j := m_{j,n}$ está dado en (3.5).

De (3.10)-(3.13), de (3.5) y del hecho que para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$ y para todo $k \in \{1, \ldots, m_j\}$, $k \leq m_j \leq m_n$, se desprende que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)| &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} 2 \cdot \frac{k}{2} |x - x_0| \\
&\leq \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} m_n |x - x_0| \\
&= \frac{m_n}{n+1} |x - x_0| \sum_{j=0}^{n} m_j \\
&\leq \frac{m_n}{n+1} |x - x_0| \sum_{j=0}^{n} m_n \\
&= \frac{{m_n}^2}{n+1} |x - x_0| (n+1) \\
&= {m_n}^2 |x - x_0| \\
&= n^{8(n+1)} |x - x_0|. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Se toma $\delta := \delta(\varepsilon, n) := \dfrac{\varepsilon}{n^{8(n+1)}} > 0$. Para todo $x \in \mathbb{R}$, si $|x - x_0| < \delta$, usando (3.14), se tiene

$$|\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)| \leq n^{8(n+1)} \delta = \varepsilon.$$

Luego, φ_n es continua en x_0. Como $x_0 \in \mathbb{R}$ es fijo pero arbitrario, se concluye que φ_n es continua. □

Definición 3.3. *Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Se define la función $\widetilde{\varphi}_n$ como*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_n := \varphi_{n|_{[0,2\pi]}} : [0, 2\pi] &\to \mathbb{R} \\
y &\mapsto \widetilde{\varphi}_n(y) := \varphi_{n|_{[0,2\pi]}}(y) = \varphi_n(y),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

donde para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, la función φ_n está dada en (3.9).

Proposición 3.6. *Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que*

$$\widetilde{\varphi}_n \in \mathcal{L}([0,2\pi]) \tag{3.16}$$

y además

$$\int_{[0,2\pi]} \widetilde{\varphi}_n \, d\lambda = \pi, \tag{3.17}$$

donde λ es la medida de Lebesgue en la recta y para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, la función $\widetilde{\varphi}_n$ está dada en (3.15).

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Usando el ejercicio 9.V de [6], (3.15), (3.9), (3.1) y dado que $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ es 2π-periódica, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{[0,2\pi]} \widetilde{\varphi}_n \, d\lambda &= \int_0^{2\pi} \widetilde{\varphi}_n(x) \, dx \\
&= \int_0^{2\pi} \varphi_n(x) \, dx \\
&:= \int_0^{2\pi} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \sigma_{m_j}(A_j - x) \, dx \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \int_0^{2\pi} \sigma_{m_j}(A_j - x) \, dx \\
&:= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m_j} \frac{m_j - k}{m_j} \cos\big(k(A_j - x)\big) \right) dx \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \left(\pi + \sum_{k=1}^{m_j} \frac{m_j - k}{m_j} \int_0^{2\pi} \cos\big(k(A_j - x)\big) \, dx \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \left(\pi + \sum_{k=1}^{m_j} \frac{m_j - k}{m_j} \int_{A_j}^{A_j - 2\pi} \big(-\cos(ky)\big) \, dy \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \left(\pi + \sum_{k=1}^{m_j} \frac{m_j - k}{m_j} \int_{A_j - 2\pi}^{A_j} \cos(ky) \, dy \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \left(\pi + \sum_{k=1}^{m_j} \frac{m_j - k}{m_j} \left(\frac{\operatorname{sen}(ky)}{k} \bigg|_{A_j - 2\pi}^{A_j} \right) \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \left(\pi + \sum_{k=1}^{m_j} \frac{m_j - k}{k m_j} \Big(\cos(kA_j) - \cos\big(k(A_j - 2\pi)\big) \Big) \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \left(\pi + \sum_{k=1}^{m_j} \frac{m_j - k}{k m_j} \Big(\cos(kA_j) - \cos(kA_j - 2k\pi) \Big) \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\left(\pi + \sum_{k=1}^{m_j}\frac{m_j-k}{km_j}(0)\right)\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}(\pi+0)\\
&= \frac{1}{n+1}(n+1)\pi\\
&= \pi, \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

donde para todo $j \in \{0,\ldots,n\}$, $m_j := m_{j,n}$ y $A_j := A_{j,n}$ están dados en (3.5) y (3.6), respectivamente.

Ahora, usando la Proposición 3.5, el hecho que toda restricción de una función continua es continua (Teorema 1 de la página 176 de [16]) y el ejemplo 2.5-(c) de [6], se ve que $\widetilde{\varphi}_n : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ es una función real-valuada $\mathcal{B}([0,2\pi])$-medible y por tanto $\mathcal{L}([0,2\pi])$-medible.

Además, haciendo uso de la Definition 6.8 de [6], a partir de (3.18) y usando la Proposición 3.2, la cual permite ver que $\widetilde{\varphi}_n \geq 0$, se observa que

$$
\int_{[0,2\pi]} \left|\widetilde{\varphi}_n\right| d\lambda = \pi < +\infty,
$$

de donde

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{\varphi}_n] &\in L^1([0,2\pi], \mathcal{B}([0,2\pi]), \lambda_{|_{[0,2\pi]}})\\
&\subset L^1([0,2\pi], \mathcal{L}([0,2\pi]), \lambda_{|_{[0,2\pi]}})\\
&=: L^1([0,2\pi]).
\end{aligned}
$$

□

En conclusión, en la presente sección se ha definido una sucesión de polinomios trigonométricos $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ y se han probado en detalle algunas de sus propiedades. De este modo, en esta sección, se han justificado prolijamente las afirmaciones presentadas en el punto 1° de [15].

3.2. Formulación y análisis de una suma parcial asociada a la función φ_n dada en (3.9)

En esta sección se procede a examinar en detalle el punto 2° de [15]. Es decir, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se propone una representación adicional para la función φ_n dada en (3.9) y mediante esta nueva representación, se formula y analiza una suma parcial asociada a la función φ_n. De este manera, se justifica pormenorizadamente los pasos necesarios para la deducción de las Ecuaciones (1) y (2) de [15].

La siguiente proposición, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, brinda una demostración detallada de una representación alternativa de la función φ_n, dada en (3.9). Este resultado será de gran importancia a lo largo del trabajo, principalmente en la Sección 3.5.

Proposición 3.7. *Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, la función φ_n dada en* (3.9) *satisface, para todo $x \in \mathbb{R}$, la siguiente representación*

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & , \ \textit{si } n = 1, \\ \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{m_n} a_k \cos(kx + \lambda_k) & , \ \textit{si } n \in \{2, 3, \ldots\}, \end{cases} \tag{3.19}$$

donde $m_n := m_{n,n}$ está dado en (3.5) *y para todo $k \in \{1, \ldots, m_n\}$, $a_k := a_{k,n}$ y $\lambda_k := \lambda_{k,n}$ están dados en* (3.28) *y* (3.29) *abajo, respectivamente.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. En primer lugar, se considera el caso cuando $n = 1$. De la Observación 3.2, se tiene que

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}. \tag{3.20}$$

Se considera ahora el caso cuando $n \in \{2, 3, \ldots\}$. Usando (3.9) y (3.1), se sigue que

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &:= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \sigma_{m_j}(A_j - x) \\ &:= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m_j} \frac{m_j - k}{m_j} \cos\big(k(A_j - x)\big) \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{m_j - k}{m_j} \cos\big(k(A_j - x)\big) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{m_j - k}{m_j} \cos\big(k(A_j - x)\big), \tag{3.21}$$

donde para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$, $m_j := m_{j,n}$ y $A_j := A_{j,n}$ están dados en (3.5) y (3.6), respectivamente y para todo $r \in \mathbb{Z}^+$, la función σ_r está dada en (3.1).

Para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$, se definen los coeficientes

$$\alpha_{j,k} := \alpha_{j,k,n} := \begin{cases} \dfrac{m_j - k}{m_j} & , \text{ si } \quad k \in \{1, \ldots, m_j - 1\}, \\ 0 & , \text{ si } \quad k \in \{m_j, \ldots, m_n\}, \end{cases} \tag{3.22}$$

donde para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$, $m_j := m_{j,n}$ está dado en (3.5).

De (3.21) y (3.22), se ve que

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=1}^{m_n} \alpha_{j,k} \cos\big(k(A_j - x)\big) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{j=0}^{n} \alpha_{j,k} \cos\big(k(A_j - x)\big) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{j=0}^{n} \alpha_{j,k} \cos\big(kA_j - kx\big) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{j=0}^{n} \alpha_{j,k} \Big(\cos(kA_j)\cos(kx) + \operatorname{sen}(kA_j)\operatorname{sen}(kx) \Big) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m_n} \Bigg[\left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \alpha_{j,k} \cos(kA_j) \right) \cos(kx) \\
&\quad + \left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \alpha_{j,k} \operatorname{sen}(kA_j) \right) \operatorname{sen}(kx) \Bigg].
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Ahora, para todo $k \in \{1, \ldots, m_n\}$, se escribe

$$\beta_k := \beta_{k,n} := \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \alpha_{j,k} \cos(kA_j) \tag{3.24}$$

y

$$\gamma_k := \gamma_{k,n} := \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \alpha_{j,k} \operatorname{sen}(kA_j), \tag{3.25}$$

donde $m_n := m_{n,n}$ está dado en (3.5).

De (3.23)-(3.25), se tiene que

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m_n} \Big(\beta_k \cos(kx) + \gamma_k \operatorname{sen}(kx) \Big). \tag{3.26}$$

Haciendo uso del Corolario 2.1, se tiene que para todo $k \in \{1, \ldots, m_n\}$, existen a_k, $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$\beta_k \cos(kx) + \gamma_k \operatorname{sen}(kx) = a_k \cos(kx + \lambda_k), \tag{3.27}$$

donde

$$a_k := a_{k,n} := \begin{cases} \gamma_k & , \text{ si } \beta_k = 0 \text{ y } \gamma_k \neq 0, \\ \beta_k & , \text{ si } \beta_k \neq 0 \text{ y } \gamma_k = 0, \\ \sqrt{{\beta_k}^2 + {\gamma_k}^2} & , \text{ caso contrario} \end{cases} \tag{3.28}$$

y

$$\lambda_k := \lambda_{k,n} := \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{\beta_k}{\gamma_k}\right) + \dfrac{\pi}{2} & , \text{ si } \beta_k \neq 0 \text{ y } \gamma_k < 0, \\ \arctan\left(\dfrac{\beta_k}{\gamma_k}\right) - \dfrac{\pi}{2} & , \text{ si } \beta_k \neq 0 \text{ y } \gamma_k > 0, \\ 0 & , \text{ si } \beta_k \in \mathbb{R} \text{ y } \gamma_k = 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} & , \text{ si } \beta_k = 0 \text{ y } \gamma_k \neq 0. \end{cases} \tag{3.29}$$

Usando (3.26) y (3.27), se tiene que

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m_n} a_k \cos(kx + \lambda_k). \tag{3.30}$$

De (3.20) y (3.30), el resultado se sigue. □

El siguiente lema será usado en las demostraciones de las Proposiciones 3.8 y 3.10 abajo.

Lema 3.1. *Para todo $L \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{L} k \cos(kx) = \begin{cases} \dfrac{L \operatorname{sen}\left(\dfrac{2L+1}{2} x\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2} x\right)} - L\, \sigma_L(x), & si \;\; x \in \mathbb{R} \setminus \{2r\pi;\; r \in \mathbb{Z}\}, \\ \dfrac{L(L+1)}{2} & , si \;\; x \in \{2r\pi;\; r \in \mathbb{Z}\}, \end{cases}$$

donde para todo $r \in \mathbb{Z}^+$, la función σ_r está dada en (3.1).

Demostración. Sea $L \in \mathbb{Z}^+$. Primero, se considera el caso cuando $x = 2r\pi$, para algún $r \in \mathbb{Z}$. Usando el Lema 2.3, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{L} k\cos(kx) = \frac{L(L+1)}{2}. \tag{3.31}$$

Se supone ahora que $x \in \mathbb{R} \setminus \{2r\pi;\ r \in \mathbb{Z}\}$. Del Lema 2.3 y de la Proposición 3.1, se ve que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{L} k\cos(kx) &= \frac{L\operatorname{sen}\left(\frac{2L+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)} - \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{L}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}x\right)} \\
&= \frac{L\operatorname{sen}\left(\frac{2L+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)} - \frac{L}{L}\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{L}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}x\right)} \\
&= \frac{L\operatorname{sen}\left(\frac{2L+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)} - L\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{L}{2}x\right)}{2L\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}x\right)} \\
&= \frac{L\operatorname{sen}\left(\frac{2L+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)} - L\,\sigma_L(x),
\end{aligned} \tag{3.32}$$

donde para todo $r \in \mathbb{Z}^+$, la función σ_r está dada en (3.1).

De (3.31) y (3.32), el resultado se sigue. □

La siguiente observación será de utilidad en el estudio de los dominios descritos en los enunciados de las Proposiciones 3.8 y 3.10 abajo.

Observación 3.3. *Para todo $z \in \mathbb{R}$, se ve que*

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(z-y)\right) = 0 \textit{ si y solo si } y = z - 2q\pi, \textit{ para algún } q \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Sea $z \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(z-y)\right) = 0 \text{ si y solo si existe } q \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \frac{1}{2}(z-y) = q\pi.$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(z-y)\right) = 0 \text{ si y solo si } y = z - 2q\pi, \text{ para algún } q \in \mathbb{Z}.$$

□

La siguiente notación está directamente relacionada con la ecuación (1) de [15] y hace referencia a la suma parcial que se menciona en el enunciado de esta sección.

Notación 3.1. *Sean $n \in \{2, 3, \ldots\}$ y $k \in \{1, \ldots, m_n\}$, donde $m_n := m_{n,n}$ está dado en* (3.5)*. A partir de* (3.19)*, se denota por $S_k := S_{k,n}$ a la suma parcial dada por*

$$S_k(x) := S_{k,n}(x) := \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{k} a_l \cos(lx + \lambda_l), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \tag{3.33}$$

donde para todo $l \in \{1, \ldots, k\}$, $a_l := a_{l,n}$ y $\lambda_l := \lambda_{l,n}$, están dados en (3.28) *y* (3.29)*, respectivamente.*

Hasta aquí, se ha probado que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, la función φ_n dada en (3.9) posee la representación adicional enunciada en (3.19), mientras que si $n \in \{2, 3, \ldots\}$, se ha formulado una suma parcial asociada a dicha función, dada en la Notación 3.1.

A partir de ahora y hasta el final de esta sección, los propósitos principales subsiguientes son mostrar las Proposiciones 3.8 y 3.10. En la Proposición 3.8, se va a probar que para todo $n \in \{2, 3, \ldots\}$ y en el caso cuando $k = n^2 \in \mathbb{Z}^+$, la suma parcial $S_k := S_{k,n}$ dada en (3.33) puede ser reescrita de una forma conveniente como la expuesta en (3.39) abajo. Del mismo modo, en la Proposición 3.10 se va a mostrar que para todo $n \in \{2, 3, \ldots\}$, para todo $p \in \{0, \ldots, n-1\}$, para todo $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $m_p \leq k < m_{p+1}$ y para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{A_j - 2q\pi; q \in \mathbb{Z}\}$, la suma parcial $S_k := S_{k,n}$ dada en (3.33), se puede reescribir en la forma (3.47) abajo. Es importante indicar que la Proposición 3.10 permite justificar en forma prolija, la ecuación (2) de [15], lo cual será tratado en la Observación 3.5, más adelante. Por otro lado, haciendo uso de la Proposición 3.8, se demuestra minuciosamente un resultado parecido al de la ecuación (2) de [15] para el caso de la suma parcial

$S_{n^2} := S_{n^2,n}$, con $n \in \{2, 3, \ldots\}$, lo cual será analizado en la Observación 3.4.

Vale la pena señalar que las Observaciones 3.4 y 3.5, serán usadas para justificar detalladamente los puntos 3° y 4° de [15], lo cual será realizado en las Secciones 3.3 y 3.4, respectivamente.

Los siguientes dos lemas contribuyen a las demostraciones de las Proposiciones 3.8 y 3.10 abajo.

Lema 3.2. *Para todo* $n \in \{2, 3, \ldots\}$ *y para todo* $k \in \{1, \ldots, m_n\}$*, se tiene que*

$$a_k \cos(kz + \lambda_k) = \beta_k \cos(kz) + \gamma_k \operatorname{sen}(kz), \text{ para todo } z \in \mathbb{R}, \tag{3.34}$$

donde $m_n := m_{n,n}$*,* $a_k := a_{k,n}$*,* $\lambda_k := \lambda_{k,n}$*,* $\beta_k := \beta_{k,n}$ *y* $\gamma_k := \gamma_{k,n}$ *están dados en* (3.5)*,* (3.28)*,* (3.29)*,* (3.24) *y* (3.25)*, respectivamente.*

Demostración. Sean $n \in \{2, 3, \ldots\}$, $k \in \{1, \ldots, m_n\}$ y $z \in \mathbb{R}$, donde $m_n := m_{n,n}$ está dado en (3.5). Se consideran los siguientes cinco casos referentes a $\beta_k := \beta_{k,n}$ y $\gamma_k := \gamma_{k,n}$, los cuales están dados en (3.24) y (3.25), respectivamente.

(a) Si $\beta_k = 0 = \gamma_k$, de (3.28) y (3.29), se ve que

$$\begin{aligned} a_k \cos(kz + \lambda_k) &= \sqrt{{\beta_k}^2 + {\gamma_k}^2} \cos(kz) \\ &= 0 \\ &= \beta_k \cos(kz) + \gamma_k \operatorname{sen}(kz). \end{aligned}$$

(b) Ahora, se supone que $\beta_k = 0$ y $\gamma_k \neq 0$. Nuevamente, de (3.28) y (3.29), se observa que

$$\begin{aligned} a_k \cos(kz + \lambda_k) &= \gamma_k \cos\left(kz - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \gamma_k \left(\cos(kz) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}(kz) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \gamma_k \operatorname{sen}(kz) \\ &= \beta_k \cos(kz) + \gamma_k \operatorname{sen}(kz). \end{aligned}$$

(c) Se supone esta vez que $\beta_k \neq 0$ y $\gamma_k = 0$. Usando de nuevo (3.28) y (3.29), se sigue que

$$
\begin{aligned}
a_k \cos(kz + \lambda_k) &= \beta_k \cos(kz) \\
&= \beta_k \cos(kz) + \gamma_k \operatorname{sen}(kz).
\end{aligned}
$$

(d) Se supone ahora que $\beta_k \neq 0$ y $\gamma_k < 0$ $\big(|\gamma_k| = -\gamma_k\big)$. De (3.28), (3.29) y de las Identidades A.6 y A.7, se tiene que

$$
\begin{aligned}
a_k \cos(kz + \lambda_k) &= \sqrt{{\beta_k}^2 + {\gamma_k}^2}\, \cos\left(kz + \arctan\left(\frac{\beta_k}{\gamma_k}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sqrt{{\beta_k}^2 + {\gamma_k}^2} \left[\cos\left(kz + \arctan\left(\frac{\beta_k}{\gamma_k}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right. \\
&\quad \left. -\ \operatorname{sen}\left(kz + \arctan\left(\frac{\beta_k}{\gamma_k}\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= \sqrt{{\beta_k}^2 + {\gamma_k}^2} \left[-\operatorname{sen}\left(kz + \arctan\left(\frac{\beta_k}{\gamma_k}\right)\right)\right] \\
&= \sqrt{{\beta_k}^2 + {\gamma_k}^2} \left[-\operatorname{sen}(kz) \cos\left(\arctan\left(\frac{\beta_k}{\gamma_k}\right)\right)\right. \\
&\quad \left. -\ \cos(kz) \operatorname{sen}\left(\arctan\left(\frac{\beta_k}{\gamma_k}\right)\right)\right] \\
&= \sqrt{{\beta_k}^2 + {\gamma_k}^2} \left(-\operatorname{sen}(kz) \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta_k}{\gamma_k}\right)^2}} - \cos(kz) \frac{\frac{\beta_k}{\gamma_k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta_k}{\gamma_k}\right)^2}}\right) \\
&= \sqrt{{\beta_k}^2 + {\gamma_k}^2} \left(-\operatorname{sen}(kz) \frac{1}{\frac{\sqrt{{\beta_k}^2 + {\gamma_k}^2}}{|\gamma_k|}} - \cos(kz) \frac{\frac{\beta_k}{\gamma_k}}{\frac{\sqrt{{\beta_k}^2 + {\gamma_k}^2}}{|\gamma_k|}}\right) \\
&= \sqrt{{\beta_k}^2 + {\gamma_k}^2} \left(\frac{\gamma_k \operatorname{sen}(kz)}{\sqrt{{\beta_k}^2 + {\gamma_k}^2}} + \frac{\beta_k \cos(kz)}{\sqrt{{\beta_k}^2 + {\gamma_k}^2}}\right) \\
&= \beta_k \cos(kz) + \gamma_k \operatorname{sen}(kz).
\end{aligned}
$$

(e) Por último, se supone que $\beta_k \neq 0$ y $\gamma_k > 0$ $\big(|\gamma_k| = \gamma_k\big)$. Usando (3.28), (3.29) y las Identidades A.6 y A.7, se observa que

$$
\begin{aligned}
a_k \cos(kz + \lambda_k) &= \sqrt{{\beta_k}^2 + {\gamma_k}^2}\, \cos\left(kz + \arctan\left(\frac{\beta_k}{\gamma_k}\right) - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sqrt{{\beta_k}^2 + {\gamma_k}^2} \left[\cos\left(kz + \arctan\left(\frac{\beta_k}{\gamma_k}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \operatorname{sen}\left(kz + \arctan\left(\frac{\beta_k}{\gamma_k}\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\Bigg] \\
&= \sqrt{{\beta_k}^2 + {\gamma_k}^2}\, \operatorname{sen}\left(kz + \arctan\left(\frac{\beta_k}{\gamma_k}\right)\right) \\
&= \sqrt{{\beta_k}^2 + {\gamma_k}^2}\left[\operatorname{sen}(kz)\cos\left(\arctan\left(\frac{\beta_k}{\gamma_k}\right)\right)\right. \\
&\left. + \cos(kz)\operatorname{sen}\left(\arctan\left(\frac{\beta_k}{\gamma_k}\right)\right)\right] \\
&= \sqrt{{\beta_k}^2 + {\gamma_k}^2}\left(\operatorname{sen}(kz)\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta_k}{\gamma_k}\right)^2}} + \cos(kz)\frac{\frac{\beta_k}{\gamma_k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta_k}{\gamma_k}\right)^2}}\right) \\
&= \sqrt{{\beta_k}^2 + {\gamma_k}^2}\left(\operatorname{sen}(kz)\frac{1}{\frac{\sqrt{{\beta_k}^2 + {\gamma_k}^2}}{|\gamma_k|}} + \cos(kz)\frac{\frac{\beta_k}{\gamma_k}}{\frac{\sqrt{{\beta_k}^2 + {\gamma_k}^2}}{|\gamma_k|}}\right) \\
&= \sqrt{{\beta_k}^2 + {\gamma_k}^2}\left(\frac{\gamma_k \operatorname{sen}(kz)}{\sqrt{{\beta_k}^2 + {\gamma_k}^2}} + \frac{\beta_k \cos(kz)}{\sqrt{{\beta_k}^2 + {\gamma_k}^2}}\right) \\
&= \beta_k \cos(kz) + \gamma_k \operatorname{sen}(kz).
\end{aligned}
$$

De (a)-(e), se obtiene (3.34). □

Lema 3.3. *Para todo $n \in \{2, 3, \ldots\}$ y para todo $k \in \{1, \ldots, m_n\}$, se tiene que la suma parcial $S_k := S_{k,n}$, dada en* (3.33), *cumple*

$$S_k(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=0}^{n} \alpha_{j,l}\cos\big(l(A_j - x)\big), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \tag{3.35}$$

donde $m_n := m_{n,n}$ está dado en (3.5) *y para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$ y para todo $l \in \{1, \ldots, m_n\}$, $A_j := A_{j,n}$ y $\alpha_{j,l} := \alpha_{j,l,n}$ están dados en* (3.6) *y* (3.22)*, respectivamente.*

Demostración. Sean $n \in \{2, 3, \ldots\}$, $k \in \{1, \ldots, m_n\}$ y $x \in \mathbb{R}$, donde $m_n := m_{n,n}$ está dado en (3.5). De (3.33), se sigue que

$$S_k(x) := S_{k,n}(x) := \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{k} a_l \cos(lx + \lambda_l), \tag{3.36}$$

donde para todo $l \in \{1, \ldots, k\}$, $a_l := a_{l,n}$ y $\lambda_l := \lambda_{l,n}$ están dados en (3.28) y (3.29), respectivamente. Haciendo uso del Lema 3.2, se ve que para todo $l \in \{1, \ldots, k\}$,

$$a_l \cos(lx + \lambda_l) = \beta_l \cos(lx) + \gamma_l \operatorname{sen}(lx), \tag{3.37}$$

donde $\beta_l := \beta_{l,n}$ y $\gamma_l := \gamma_{l,n}$ están dados en (3.24) y (3.25), respectivamente. De (3.36) y (3.37), se sigue que

$$S_k(x) = \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{k} \Big(\beta_l \cos(lx) + \gamma_l \operatorname{sen}(lx) \Big). \tag{3.38}$$

De (3.38) y usando (3.24) y (3.25), se tiene que

$$\begin{aligned} S_k(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{k} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \alpha_{j,l} \cos(lA_j) \cos(lx) + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \alpha_{j,l} \operatorname{sen}(lA_j) \operatorname{sen}(lx) \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=0}^{n} \alpha_{j,l} \Big(\cos(lA_j) \cos(lx) + \operatorname{sen}(lA_j) \operatorname{sen}(lx) \Big) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=0}^{n} \alpha_{j,l} \cos(lA_j - lx) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=0}^{n} \alpha_{j,l} \cos \big(l(A_j - x) \big), \end{aligned}$$

donde para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$ y para todo $l \in \{1, \ldots, k\}$, $A_j := A_{j,n}$ y $\alpha_{j,l} := \alpha_{j,l,n}$ están dados en (3.6) y (3.22), respectivamente. De esta manera se concluye la prueba del lema. □

A continuación, se procede a enunciar y demostrar la Proposición 3.8, la cual consiste en reescribir la suma parcial $S_{n^2} := S_{n^2,n}$ en forma adecuada; este resultado es análogo al que se presentará en la Proposición 3.10. La siguiente proposición será usada posteriormente en la demostración de la Observación 3.4.

En la Sección 3.3 se analiza esta suma parcial a partir de la Observación 3.4 con el objetivo de justificar detalladamente el punto 3° de [15].

Proposición 3.8. *Para todo $n \in \{2, 3, \ldots\}$, para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$ y para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{A_j - 2q\pi;\ q \in \mathbb{Z}\}$, la suma parcial $S_{n^2} := S_{n^2,n}$, dada en* (3.33)*, cumple*

$$
\begin{aligned}
S_{n^2}(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{n^2}{m_j}\sigma_{n^2}(A_j - x) \\
+\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{m_j - n^2}{m_j}\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2n^2+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}(A_j - x)\right)},
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

donde para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$, $m_j := m_{j,n}$ *y* $A_j := A_{j,n}$ *están dados en* (3.5) *y* (3.6)*, respectivamente y para todo* $r \in \mathbb{Z}^+$*, la función* σ_r *está dada en* (3.1).

Demostración. Sean $n \in \{2, 3, \ldots\}$, $j \in \{0, \ldots, n\}$ y $x \in \mathbb{R} \setminus \{A_j - 2q\pi;\ q \in \mathbb{Z}\}$, donde $A_j := A_{j,n}$ está dado en (3.6). De la Notación 3.1 y del Lema 3.3, se tiene que

$$
\begin{aligned}
S_{n^2}(x) := S_{n^2,n}(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{n^2} a_l \cos(lx + \lambda_l) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{n^2}\sum_{j=0}^{n}\alpha_{j,l}\cos\big(l(A_j - x)\big),
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

donde para todo $l \in \{1, \ldots, n^2\}$ y para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$, $a_l := a_{l,n}$, $\lambda_l := \lambda_{l,n}$ y $\alpha_{j,l} := \alpha_{j,l,n}$ están dados en (3.28), (3.29) y (3.22), respectivamente.

Por otro lado, de (3.5), se observa que para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$ y para todo $l \in \{1, \ldots, n^2\}$,

$$
1 \leq l \leq n^2 < n^4 =: m_0 \leq m_j. \tag{3.41}
$$

De (3.41) y usando (3.22), se ve que

$$
0 \neq \alpha_{j,l} = \frac{m_j - l}{m_j}. \tag{3.42}
$$

De (3.40), (3.42) y haciendo uso de la Observación 2.1 y del Lema 3.1, se sigue que

$$
\begin{aligned}
S_{n^2}(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\sum_{l=1}^{n^2}\frac{m_j - l}{m_j}\cos\big(l(A_j - x)\big) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n^2}\cos\big(l(A_j - x)\big) - \frac{1}{m_j}\sum_{l=1}^{n^2} l\cos\big(l(A_j - x)\big)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\left[-\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2n^2+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)}\right.\\
&\qquad \left. -\frac{1}{m_j}\left(\frac{n^2\operatorname{sen}\left(\frac{2n^2+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)} - n^2\,\sigma_{n^2}(A_j - x)\right)\right]\\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2n^2+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)}\\
&\qquad - \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{n^2}{m_j}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2n^2+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)} + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{n^2}{m_j}\,\sigma_{n^2}(A_j - x)\\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{m_j - n^2}{m_j}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2n^2+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)}\\
&\qquad + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{n^2}{m_j}\sigma_{n^2}(A_j - x)\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{n^2}{m_j}\sigma_{n^2}(A_j - x)\\
&\qquad + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{m_j - n^2}{m_j}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2n^2+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)},
\end{aligned}
$$

donde para todo $r \in \mathbb{Z}^+$, la función σ_r está dada en (3.1). Con esto, el resultado queda probado. □

Observación 3.4. *Para todo $n \in \{2, 3, \ldots\}$, para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$ y para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{A_j - 2q\pi;\ q \in \mathbb{Z}\}$, la suma parcial $S_{n^2} := S_{n^2,n}$, dada en (3.33), satisface*

$$
S_{n^2}(x) \geq \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{m_j - n^2}{m_j}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2n^2+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)},
$$

donde para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$, $m_j := m_{j,n}$ y $A_j := A_{j,n}$ están dados en (3.5) y (3.6), respectivamente.

Demostración. Sean $n \in \{2, 3, \ldots\}$, $j \in \{0, \ldots, n\}$ y $x \in \mathbb{R} \setminus \{A_j - 2q\pi;\, q \in \mathbb{Z}\}$, donde $A_j := A_{j,n}$ está dado en (3.6). Haciendo uso de la Proposición 3.8, se tiene que

$$\begin{aligned} S_{n^2}(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \frac{n^2}{m_j} \sigma_{n^2}(A_j - x) \\ &+ \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \frac{m_j - n^2}{m_j} \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2n^2+1}{2}(A_j - x)\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}(A_j - x)\right)}, \end{aligned} \tag{3.43}$$

donde para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$, $m_j := m_{j,n}$ está dado en (3.5) y para todo $r \in \mathbb{Z}^+$, la función σ_r está dada en (3.1). Por otro lado, de la Proposición 3.2, se tiene que para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$,

$$\sigma_{n^2}(A_j - x) \geq 0,$$

de donde

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \frac{n^2}{m_j} \sigma_{n^2}(A_j - x) \geq 0. \tag{3.44}$$

De (3.43) y (3.44), se sigue que

$$S_{n^2}(x) \geq \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \frac{m_j - n^2}{m_j} \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2n^2+1}{2}(A_j - x)\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}(A_j - x)\right)},$$

lo cual muestra el resultado. $\square$

El siguiente lema será utilizado en la demostración de la Proposición 3.9 abajo.

Lema 3.4. *Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y para todo $p \in \{0, \ldots, n\}$, se tiene que*

$$\sum_{j=0}^{p} \frac{1}{m_j} = \begin{cases} p+1 & , \quad si \quad n = 1, \\ \dfrac{n^{4(p+1)} - 1}{n^{4(p+1)}(n^4 - 1)} & , \quad si \quad n \in \{2, 3, \ldots\}, \end{cases}$$

donde para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$, $m_j := m_{j,n}$ está dado en (3.5).

Demostración. Sean $n = 1$ y $p \in \{0, \ldots, n\}$. Usando (3.5), se ve que

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{p} \frac{1}{m_j} &= \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{n^{4(j+1)}} \\
&= \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{1^{4(j+1)}} \\
&= \sum_{j=0}^{p} 1 \\
&= p+1. \qquad (3.45)
\end{aligned}
$$

Ahora, sean $n \in \{2,3,\ldots\}$ y $p \in \{0,\ldots,n\}$. Nuevamente, haciendo uso de (3.5), se observa que

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{p} \frac{1}{m_j} &= \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{n^{4(j+1)}} \\
&= \frac{1}{n^4} \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{n^{4j}} \\
&= \frac{1}{n^4} \left(\frac{1 - \frac{1}{n^{4(p+1)}}}{1 - \frac{1}{n^4}} \right) \\
&= \frac{1}{n^4} \left(\frac{n^4(n^{4(p+1)} - 1)}{n^{4(p+1)}(n^4 - 1)} \right) \\
&= \frac{n^{4(p+1)} - 1}{n^{4(p+1)}(n^4 - 1)}. \qquad (3.46)
\end{aligned}
$$

De (3.45) y (3.46), el resultado se sigue. □

En la siguiente proposición, para todo $n \in \{2,3,\ldots\}$, se estudia el valor de la suma parcial $S_{n^2} := S_{n^2,n}$, dada en (3.33), evaluada en aquellos puntos que no fueron considerados en los dominios descritos en la Proposición 3.8 arriba.

Proposición 3.9. *Para todo $n \in \{2,3,\ldots\}$, para todo $j \in \{0,\ldots,n\}$ y para todo $x \in \{A_j - 2q\pi;\ q \in \mathbb{Z}\}$, la suma parcial $S_{n^2} := S_{n^2,n}$, dada en* (3.33), *obedece*

$$
S_{n^2}(x) = \frac{1}{2} + n^2 - \frac{n^{4(n+1)} - 1}{2n^{4n+2}(n+1)(n^2-1)},
$$

donde para todo $j \in \{0,\ldots,n\}$, $A_j := A_{j,n}$ está dado en (3.6).

Demostración. Sean $n \in \{2, 3, \ldots\}$, $j \in \{0, \ldots, n\}$ y $x = A_j - 2q\pi$, para algún $q \in \mathbb{Z}$, donde $A_j := A_{j,n}$ está dado en (3.6). Usando el Lema 3.3 y (3.42), se tiene que

$$\begin{aligned}
S_{n^2}(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=1}^{n^2} \frac{m_j - l}{m_j} \cos\Big(l\big(A_j - (A_j - 2q\pi)\big)\Big) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=1}^{n^2} \frac{m_j - l}{m_j} \cos\big(2ql\pi\big) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=1}^{n^2} \frac{m_j - l}{m_j},
\end{aligned}$$

donde para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$, $m_j := m_{j,n}$ está dado en (3.5). De la última igualdad y haciendo uso del Lema 3.4, se sigue que

$$\begin{aligned}
S_{n^2}(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n^2} 1 - \frac{1}{m_j} \sum_{l=1}^{n^2} l \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \left(n^2 - \frac{n^2(n^2+1)}{2m_j} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} n^2 - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \frac{n^2(n^2+1)}{2m_j} \\
&= \frac{1}{2} + n^2 - \frac{n^2(n^2+1)}{2(n+1)} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{m_j} \\
&= \frac{1}{2} + n^2 - \frac{n^2(n^2+1)}{2(n+1)} \left(\frac{n^{4(n+1)} - 1}{n^{4(n+1)}(n^4 - 1)} \right) \\
&= \frac{1}{2} + n^2 - \frac{n^2(n^2+1)}{2(n+1)} \; \frac{n^{4(n+1)} - 1}{n^2\, n^{4n+2}(n^2+1)(n^2-1)} \\
&= \frac{1}{2} + n^2 - \frac{n^{4(n+1)} - 1}{2n^{4n+2}(n+1)(n^2-1)},
\end{aligned}$$

lo cual muestra el resultado. □

Se procede ahora a la enunciación y demostración de la Proposición 3.10. Este resultado, al igual que la Notación 3.1, está asociado a la ecuación (1) de [15]. A partir de la siguiente proposición, se prueba más adelante la Observación 3.5

Proposición 3.10. *Para todo $n \in \{2, 3, \ldots\}$, para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{A_j - 2q\pi;\ q \in \mathbb{Z}\}$, para todo $p \in \{0, \ldots, n-1\}$ y para todo $k \in \mathbb{Z}^+$ tales que*

$m_p \leq k < m_{p+1}$, la suma parcial $S_k := S_{k,n}$, dada en (3.33), cumple la siguiente igualdad

$$S_k(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{p}\sigma_{m_j}(A_j - x) + \frac{1}{n+1}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{k}{m_j}\sigma_k(A_j - x)$$
$$+\frac{1}{n+1}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{m_j - k}{m_j}\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2k+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}(A_j - x)\right)}, \tag{3.47}$$

donde para todo $j \in \{0,\ldots,n\}$, $m_j := m_{j,n}$ y $A_j := A_{j,n}$ están dados en (3.5) y (3.6), respectivamente y para todo $r \in \mathbb{Z}^+$, la función σ_r está dada en (3.1).

Demostración. Sean $n \in \{2,3,\ldots\}$, $j \in \{0,\ldots,n\}$ y $x \in \mathbb{R}\setminus\{A_j - 2q\pi;\, q \in \mathbb{Z}\}$, donde $A_j := A_{j,n}$ está dado en (3.6). Sean $p \in \{0,\ldots,n-1\}$ y $k \in \mathbb{Z}^+$ tales que $m_p \leq k < m_{p+1}$, donde para todo $j \in \{0,\ldots,n\}$, $m_j := m_{j,n}$ está dado en (3.5). Usando la Notación 3.1 y el Lema 3.3, se tiene que la suma parcial $S_k := S_{k,n}$, dada en (3.33), cumple

$$\begin{aligned} S_k(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{k} a_l \cos(lx + \lambda_l) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=0}^{n}\alpha_{j,l}\cos\big(l(A_j - x)\big), \end{aligned} \tag{3.48}$$

donde para todo $l \in \{1,\ldots,k\}$ y para todo $j \in \{0,\ldots,n\}$, $a_l := a_{l,n}$, $\lambda_l := \lambda_{l,n}$ y $\alpha_{j,l} := \alpha_{j,l,n}$ están dados en (3.28), (3.29) y (3.22), respectivamente. De (3.48), se sigue que

$$\begin{aligned} S_k(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=0}^{p}\alpha_{j,l}\cos\big(l(A_j - x)\big) \\ &\quad + \frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=p+1}^{n}\alpha_{j,l}\cos\big(l(A_j - x)\big) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{m_p}\sum_{j=0}^{p}\alpha_{j,l}\cos\big(l(A_j - x)\big) \\ &\quad + \frac{1}{n+1}\sum_{l=m_p+1}^{k}\sum_{j=0}^{p}\alpha_{j,l}\cos\big(l(A_j - x)\big) \\ &\quad + \frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=p+1}^{n}\alpha_{j,l}\cos\big(l(A_j - x)\big). \end{aligned} \tag{3.49}$$

Usando la función $\phi_p := \phi_{p,n}$, definida en (3.8) y además (3.21) y (3.22), se tiene que

$$\begin{aligned}
\phi_p(x) &:= \frac{1}{p+1}\sum_{j=0}^{p}\sigma_{m_j}(A_j - x) && (3.50)\\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{p+1}\sum_{j=0}^{p}\sum_{l=1}^{m_j}\frac{m_j - l}{m_j}\cos\big(l(A_j - x)\big)\\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{p+1}\sum_{j=0}^{p}\sum_{l=1}^{m_p}\alpha_{j,l}\cos\big(l(A_j - x)\big), && (3.51)
\end{aligned}$$

donde para todo $j \in \{0, \ldots, p\}$ y para todo $l \in \{1, \ldots, m_p\}$, $m_j := m_{j,n}$, $A_j := A_{j,n}$ y $\alpha_{j,l} := \alpha_{j,l,n}$ están dados en (3.5), (3.6) y (3.22), respectivamente, y para todo $r \in \mathbb{Z}^+$, la función σ_r está dada en (3.5). De (3.50) y (3.51), se desprende que

$$\sum_{j=0}^{p}\sum_{l=1}^{m_p}\alpha_{j,l}\cos\big(l(A_j - x)\big) = \sum_{j=0}^{p}\sigma_{m_j}(A_j - x) - \frac{p+1}{2}. \tag{3.52}$$

Por otro lado, haciendo uso de (3.5), se ve que para todo $j \in \{0, \ldots, p\}$ y para todo $l \in \{m_p + 1, \ldots, k\}$,

$$m_j \leq m_p < m_p + 1 \leq l \leq k < m_{p+1} \leq m_n. \tag{3.53}$$

De (3.53) y usando (3.22), se tiene que para todo $j \in \{0, \ldots, p\}$ y para todo $l \in \{m_p + 1, \ldots, k\}$,

$$\alpha_{j,l} = 0. \tag{3.54}$$

Ahora, volviendo a usar (3.5) y considerando que $k < m_{p+1}$, se observa que para todo $j \in \{p + 1, \ldots, n\}$ y para todo $l \in \{1, \ldots, k\}$,

$$1 \leq l \leq k < m_{p+1} \leq m_j. \tag{3.55}$$

De (3.55) y usando otra vez (3.22), se sigue que para todo $j \in \{p+1, \ldots, n\}$ y para todo $l \in \{1, \ldots, k\}$,

$$0 \neq \alpha_{j,l} = \frac{m_j - l}{m_j}. \tag{3.56}$$

De (3.49), (3.52), (3.54), (3.56) y utilizando la Observación 2.1 y el Lema 3.1, se tiene que

$$
\begin{aligned}
S_k(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=0}^{p} \sigma_{m_j}(A_j - x) - \frac{p+1}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{n+1}\sum_{j=p+1}^{n}\sum_{l=1}^{k}\frac{m_j - l}{m_j}\cos\big(l(A_j - x)\big) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{p}\sigma_{m_j}(A_j - x) - \frac{p+1}{2(n+1)} \\
&\quad + \frac{1}{n+1}\sum_{j=p+1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k}\cos\big(l(A_j - x)\big) - \frac{1}{m_j}\sum_{l=1}^{k} l\cos\big(l(A_j - x)\big)\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{p}\sigma_{m_j}(A_j - x) - \frac{p+1}{2(n+1)} \\
&\quad + \frac{1}{n+1}\sum_{j=p+1}^{n}\left[-\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)}\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{m_j}\left(\frac{k\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)} - k\,\sigma_k(A_j - x)\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{p}\sigma_{m_j}(A_j - x) - \frac{p+1}{2(n+1)} \\
&\quad - \frac{1}{n+1}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)} \\
&\quad - \frac{1}{n+1}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{k}{m_j}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)} + \frac{1}{n+1}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{k}{m_j}\,\sigma_k(A_j - x) \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{p}\sigma_{m_j}(A_j - x) + \frac{1}{n+1}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{m_j - k}{m_j}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)} \\
&\quad + \frac{1}{n+1}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{k}{m_j}\,\sigma_k(A_j - x) + \frac{1}{2} - \frac{p+1}{2(n+1)} - \frac{n-p}{2(n+1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{p}\sigma_{m_j}(A_j - x) + \frac{1}{n+1}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{m_j - k}{m_j}\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2k+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}(A_j - x)\right)} \\
&\quad + \frac{1}{n+1}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{k}{m_j}\,\sigma_k(A_j - x) + \frac{1}{2} - \frac{p+1+n-p}{2(n+1)} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{p}\sigma_{m_j}(A_j - x) + \frac{1}{n+1}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{k}{m_j}\,\sigma_k(A_j - x) \\
&\quad + \frac{1}{n+1}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{m_j - k}{m_j}\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2k+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}(A_j - x)\right)},
\end{aligned}
$$

lo cual prueba el resultado. □

El resultado de la siguiente observación se desprende de las Proposiciones 3.2 y 3.10 y brinda una deducción detallada de la ecuación (2) de [15], con lo que se completa la justificación pormenorizada del punto 2° de [15]. Luego, se hará uso de esta observación para solventar las afirmaciones del punto 4° de [15], lo cual se desarrolla en la Sección 3.4, abajo.

Observación 3.5. *Para todo* $n \in \{2, 3, \ldots\}$, *para todo* $j \in \{0, \ldots, n\}$, *para todo* $x \in \mathbb{R} \setminus \{A_j - 2q\pi;\ q \in \mathbb{Z}\}$, *para todo* $p \in \{0, \ldots, n-1\}$ *y para todo* $k \in \mathbb{Z}^+$ *tales que* $m_p \leq k < m_{p+1}$, *la suma parcial* $S_k := S_{k,n}$, *dada en* (3.33), *satisface*

$$
S_k(x) \geq \frac{1}{n+1}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{m_j - k}{m_j}\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2k+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}(A_j - x)\right)},
$$

donde para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$, $m_j := m_{j,n}$ *y* $A_j := A_{j,n}$ *están dados en* (3.5) *y* (3.6), *respectivamente.*

Demostración. Sean $n \in \{2, 3, \ldots\}$, $j \in \{0, \ldots, n\}$ y $x \in \mathbb{R} \setminus \{A_j - 2q\pi;\ q \in \mathbb{Z}\}$, donde $A_j := A_{j,n}$ está dado en (3.6). Sean $p \in \{0, \ldots, n-1\}$ y $k \in \mathbb{Z}^+$ tales que $m_p \leq k < m_{p+1}$, donde para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$, $m_j := m_{j,n}$ está dado en (3.5). Usando la Proposición 3.10, se tiene que

$$
\begin{aligned}
S_k(x) = {} & \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{p}\sigma_{m_j}(A_j-x)+\frac{1}{n+1}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{k}{m_j}\,\sigma_k(A_j-x)\\
& +\frac{1}{n+1}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{m_j-k}{m_j}\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2k+1}{2}(A_j-x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}(A_j-x)\right)},
\end{aligned}
\tag{3.57}
$$

donde para todo $r\in\mathbb{Z}^+$, la función σ_r está dada en (3.1).

Ahora, usando la Proposición 3.2, se observa que para todo $j\in\{0,\ldots,n\}$,

$$
\sigma_{m_j}(A_j-x)\geq 0
$$

y

$$
\sigma_k(A_j-x)\geq 0.
$$

Luego,

$$
\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{p}\sigma_{m_j}(A_j-x)\geq 0 \tag{3.58}
$$

y

$$
\frac{1}{n+1}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{k}{m_j}\,\sigma_k(A_j-x)\geq 0. \tag{3.59}
$$

De (3.57)-(3.59), se tiene que

$$
S_k(x)\geq\frac{1}{n+1}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{m_j-k}{m_j}\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2k+1}{2}(A_j-x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}(A_j-x)\right)},
$$

lo cual muestra el resultado. □

En conclusión, en la presente sección, para todo $n\in\{2,3,\ldots\}$ y para todo $k\in\{1,\ldots,m_n\}$, con $m_n:=m_{n,n}$ dado en (3.5), se ha definido una suma parcial $S_k:=S_{k,n}$, dada en (3.33), la cual está asociada a la función φ_n, dada en (3.9), y se han demostrado en detalle los pasos que permiten justificar prolijamente las Ecuaciones (1) y (2) de [15]. De este modo, en esta sección, se han justificado pormenorizadamente las aseveraciones expuestas en el punto 2° de [15].

3.3. Determinación de cotas inferiores para la suma parcial S_{n^2} dada en (3.39)

En esta sección, se analiza en detalle el punto 3° del paper de Kolmogórov de 1926 ([15]), es decir, se determinan ciertos segmentos de la recta real contenidos en $[0, 2\pi]$, donde la suma parcial S_{n^2}, dada en (3.39) y estudiada en las Proposiciones 3.8, 3.9 y en la Observación 3.4, puede ser acotada inferiormente y además cumple con la desigualdad expuesta en la ecuación (3) de [15].

En la siguiente notación, se enuncian los intervalos presentes en el punto 3° de [15].

Notación 3.2. *Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, se escribe*

$$I_j := I_{j,n} := \left(A_j - \frac{1}{n^3}, A_j + \frac{1}{n^3} \right), \tag{3.60}$$

donde $A_j := A_{j,n}$ está dado en (3.6)*.*

A continuación, se realiza un estudio minucioso de los segmentos definidos en la notación anterior.

Lema 3.5. *Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se satisface que*

$$A_1 - \frac{1}{n^3} > 0,$$

donde $A_1 := A_{1,n}$ está dado en (3.6)*.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Usando (3.6), se tiene que

$$\begin{aligned} A_1 - \frac{1}{n^3} &:= A_{1,n} - \frac{1}{n^3} \\ &:= \frac{4\pi}{2n+1} - \frac{1}{n^3} > 0 \Leftrightarrow \frac{4\pi n^3 - 2n - 1}{n^3(2n+1)} > 0 \\ &\qquad \Leftrightarrow 4\pi n^3 - 2n - 1 > 0. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Para verificar que la desigualdad (3.61) es verdadera, se procede por inducción sobre n. Primero, se analiza el caso cuando $n = 1$. Así,

$$4\pi n^3 - 2n - 1 = 4\pi(1)^3 - 2(1) - 1 = 4\pi - 3 \approx 9.566 > 0. \tag{3.62}$$

Ahora, se supone que la desigualdad (3.61) es verdadera para $n = k \in \mathbb{Z}^+$, es decir, se dispone de la siguiente hipótesis de inducción

$$\textbf{HI: } 4\pi k^3 - 2k - 1 > 0. \tag{3.63}$$

Se observa que

$$\begin{aligned}
4\pi(k+1)^3 - 2(k+1) - 1 &= 4\pi(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - 2k - 2 - 1 \\
&= 4\pi k^3 + 12\pi k^2 + 12\pi k + 4\pi - 2k - 3 \\
&= (4\pi k^3 - 2k - 1) + (12\pi k^2 + 12\pi k + 1) \\
&\quad + (4\pi - 3).
\end{aligned}$$

De la última igualdad y usando (3.62) y (3.63), se tiene que

$$4\pi(k+1)^3 - 2(k+1) - 1 > 0. \tag{3.64}$$

De (3.62)-(3.64), se concluye que para todo $m \in \mathbb{Z}^+$,

$$4\pi m^3 - 2m - 1 > 0,$$

lo que muestra el resultado. □

Lema 3.6. *Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se verifica que*

$$A_n + \frac{1}{n^3} < 2\pi,$$

donde $A_n := A_{n,n}$ está dado en (3.7).

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Haciendo uso de (3.7), se sigue que

$$\begin{aligned}
A_n + \frac{1}{n^3} &:= A_{n,n} + \frac{1}{n^3} \\
&:= 2\pi - \frac{2\pi}{2n+1} + \frac{1}{n^3} < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{2n+1} + \frac{1}{n^3} < 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \frac{2\pi}{2n+1} - \frac{1}{n^3} > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{2\pi n^3 - 2n - 1}{n^3(2n+1)} > 0 \\
&\Leftrightarrow 2\pi n^3 - 2n - 1 > 0. \qquad (3.65)
\end{aligned}$$

Se emplea inducción sobre n para verificar que la desigualdad (3.65) es verdadera. En el caso cuando $n = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
2\pi n^3 - 2n - 1 &= 2\pi(1)^3 - 2(1) - 1 \\
&= 2\pi - 3 \\
&\approx 3.283 > 0. \qquad (3.66)
\end{aligned}$$

Se supone ahora que la desigualdad (3.65) es verdadera cuando $n = k \in \mathbb{Z}^+$, esto es,

$$\textbf{HI: } 2\pi k^3 - 2k - 1 > 0. \qquad (3.67)$$

Además, se ve que

$$\begin{aligned}
2\pi(k+1)^3 - 2(k+1) - 1 &= 2\pi(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - 2k - 2 - 1 \\
&= 2\pi k^3 + 6\pi k^2 + 6\pi k + 2\pi - 2k - 3 \\
&= (2\pi k^3 - 2k - 1) + (6\pi k^2 + 6\pi k + 1) \\
&\quad + (2\pi - 3).
\end{aligned}$$

De esta última igualdad y haciendo uso de (3.66) y (3.67), se sigue que

$$2\pi(k+1)^3 - 2(k+1) - 1 > 0. \qquad (3.68)$$

De (3.66)-(3.68), se concluye que para todo $m \in \mathbb{Z}^+$,

$$2\pi m^3 - 2m - 1 > 0, \qquad (3.69)$$

lo cual demuestra el resultado. □

Lema 3.7. *Para todo $n \in \{2, 3, \ldots\}$ y para todo $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, se tiene que*

$$A_j + \frac{1}{n^3} < A_{j+1} - \frac{1}{n^3},$$

donde $A_j := A_{j,n}$ *está dado en* (3.6).

Demostración. Sean $n \in \{2, 3, \ldots\}$ y $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Usando (3.6), se tiene que

$$\begin{aligned} A_j + \frac{1}{n^3} < A_{j+1} - \frac{1}{n^3} &\Leftrightarrow \frac{4j\pi}{2n+1} + \frac{1}{n^3} < \frac{4(j+1)\pi}{2n+1} - \frac{1}{n^3} \\ &\Leftrightarrow \frac{4j\pi}{2n+1} + \frac{1}{n^3} < \frac{4j\pi}{2n+1} + \frac{4\pi}{2n+1} - \frac{1}{n^3} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n^3} < \frac{4\pi}{2n+1} - \frac{1}{n^3} \\ &\Leftrightarrow \frac{4\pi}{2n+1} - \frac{2}{n^3} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4\pi n^3 - 4n - 2}{n^3(2n+1)} > 0 \\ &\Leftrightarrow 4\pi n^3 - 4n - 2 > 0 \\ &\Leftrightarrow 2\pi n^3 - 2n - 1 > 0. \end{aligned}$$

Puesto que la última desigualdad se verificó en la prueba del Lema 3.5, el resultado se sigue. □

Observación 3.6. *Sea* $n \in \mathbb{Z}^+$. *A partir de la Notación 3.2 y de los Lemas 3.5 y 3.6, se tiene que para todo* $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$I_j := I_{j,n} := \left(A_j - \frac{1}{n^3}, A_j + \frac{1}{n^3} \right) \subset (0, 2\pi) \subset [0, 2\pi]. \tag{3.70}$$

Luego,

$$\bigcup_{j=1}^{n} I_j \subset (0, 2\pi) \subset [0, 2\pi]. \tag{3.71}$$

Además, usando el Lema 3.7, se observa que para todo $n \in \{2, 3, \ldots\}$,

$$\begin{aligned} 0 < A_1 - \frac{1}{n^3} < A_1 + \frac{1}{n^3} < \cdots \\ < A_n - \frac{1}{n^3} < A_n + \frac{1}{n^3} < 2\pi \end{aligned}$$

y asimismo para todo $k, l \in \{1, \ldots, n\}$, *con* $k \neq l$,

$$I_k \cap I_l = \varnothing. \tag{3.72}$$

De (3.71) *y* (3.72), *se ve adicionalmente que*

$$\biguplus_{j=1}^{n} I_j \subset (0, 2\pi) \subset [0, 2\pi]. \tag{3.73}$$

Los siguientes resultados serán usados en la demostración de la Proposición 3.11, abajo.

Lema 3.8. *Para todo* $n \in \{2, 3, \ldots\}$ *y para todo* $p \in \{1, \ldots, n\}$*, se tiene que*

$$\frac{m_p - n^2}{m_p} \geq \frac{3}{4}, \tag{3.74}$$

donde $m_p := m_{p,n}$ *está dado en* (3.5).

Demostración. Sean $n \in \{2, 3, \ldots\}$ y $p \in \{0, \ldots, n\}$. Usando (3.5), se sigue que

$$\begin{aligned} n^{4(j+1)} =: m_p \geq m_0 := n^4 &\Rightarrow \frac{1}{m_p} \leq \frac{1}{n^4} \\ &\Rightarrow \frac{n^2}{m_p} \leq \frac{1}{n^2} \\ &\Rightarrow -\frac{n^2}{m_p} \geq -\frac{1}{n^2}. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Por otro lado, se observa que

$$\begin{aligned} n^2 \geq 4 &\Rightarrow \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow -\frac{1}{n^2} \geq -\frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{3.76}$$

De (3.75) y (3.76), se tiene que

$$\frac{m_p - n^2}{m_p} = 1 - \frac{n^2}{m_p} \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

lo cual muestra el resultado. $\square$

Lema 3.9. *Para todo* $n \in \{2, 3, \ldots\}$*, para todo* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *y para todo* $x \in I_j \setminus \{A_j\}$*, se tiene que*

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2n^2+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)} > \frac{9}{10}\, n^2, \tag{3.77}$$

donde $A_j := A_{j,n}$ *e* $I_j := I_{j,n}$ *están dados en* (3.6) *y* (3.60), *respectivamente.*

Demostración. Sean $n \in \{2, 3, \ldots\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ y $x \in I_j \backslash \{A_j\}$, donde $A_j := A_{j,n}$ e $I_j := I_{j,n}$ están dados en (3.6) y (3.60), respectivamente. Usando (3.60), se sigue que

$$\begin{aligned} x \in I_j &\Leftrightarrow A_j - \frac{1}{n^3} < x < A_j + \frac{1}{n^3} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{n^3} < A_j - x < \frac{1}{n^3}. \end{aligned} \tag{3.78}$$

De (3.78), se observa que para todo $k \in \{1, \ldots, n^2\}$,

$$-\frac{1}{n} < k(A_j - x) < \frac{1}{n}. \tag{3.79}$$

De (3.79) y usando el hecho que para todo $y \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $\cos(y) > \cos\left(\frac{1}{n}\right)$, se tiene que para todo $k \in \{1, \ldots, n^2\}$,

$$\cos\big(k(A_j - x)\big) > \cos\left(\frac{1}{n}\right) \geq \cos\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,9999619213 > 0,9 = \frac{9}{10}. \tag{3.80}$$

Usando la Observación 2.1 y (3.80), se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2n^2+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}(A_j - x)\right)} &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n^2} \cos\big(k(A_j - x)\big) \\ &> \sum_{k=1}^{n^2} \cos\big(k(A_j - x)\big) \\ &> \sum_{k=1}^{n^2} \frac{9}{10} \\ &= \frac{9}{10} n^2, \end{aligned}$$

lo cual muestra el resultado. $\square$

El siguiente lema será utilizado en la demostración del Lema 3.12, abajo.

Lema 3.10. *Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y para todo $x \in (0, 2\pi)$, se tiene que*

$$\left| \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)} \right| \leq \frac{1}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)}. \tag{3.81}$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ y $x \in (0, 2\pi)$. Como para todo $y \in \mathbb{R}$, $|\operatorname{sen}(y)| \leq 1$, se tiene que

$$\left| \operatorname{sen}\left(\frac{2n+1}{2}x\right) \right| \leq 1. \tag{3.82}$$

Por otro lado, se sabe que para todo $z \in (0, \pi)$, $\operatorname{sen}(z) > 0$, de donde

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right) > 0 \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)} > 0. \tag{3.83}$$

De (3.82) y (3.83), se tiene que

$$\left| \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)} \right| \leq \frac{1}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)}.$$

□

El siguiente resultado se aplica en la demostración del Lema 3.12.

Lema 3.11. *Para todo $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, se tiene que*

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \geq \frac{2}{\pi}. \tag{3.84}$$

Demostración. Se considera la siguiente función

$$\begin{aligned} u : \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto u(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}. \end{aligned} \tag{3.85}$$

Se va a mostrar que la función u es decreciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Para esto, encontramos la primera derivada de esta función y probaremos que para todo $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, $u'(t) \leq 0$. En efecto,

$$u'(t) = \frac{t\cos(t) - \operatorname{sen}(t)}{t^2} \leq 0 \Leftrightarrow t\cos(t) - \operatorname{sen}(t) \leq 0. \tag{3.86}$$

Ahora, se toma en cuenta la función

$$\begin{aligned} v : \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto v(t) = t\cos(t) - \operatorname{sen}(t). \end{aligned} \tag{3.87}$$

Para todo $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, se ve que

$$v'(t) = -t\operatorname{sen}(t) \leq 0, \tag{3.88}$$

lo cual indica que la función v es decreciente. Además, se observa que

$$\lim_{t\to 0^+} v(t) = \lim_{t\to 0^+} \big(t\cos(t) - \operatorname{sen}(t)\big) = 0 \tag{3.89}$$

y

$$v\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0. \tag{3.90}$$

De (3.88)-(3.90) y usando el hecho que v es continua, se sigue que para todo $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$v(t) = t\cos(t) - \operatorname{sen}(t) \leq 0,$$

lo cual prueba (3.86).

Finalmente, de (3.86), se tiene que

$$\begin{aligned} x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] &\Rightarrow 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow u(x) \geq u\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \geq \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} \\ &\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \geq \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

□

El Lema 3.12, que se presenta a continuación, será utilizado en la demostración la Proposición 3.11.

Lema 3.12. *Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |x| \leq \pi$, se tiene que*

$$\left| \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2n+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x\right)} \right| \leq \frac{\pi}{2|x|}. \tag{3.91}$$

Demostración. Sean $n \in \mathbb{Z}^+$. Se supone primero el caso cuando $x \in (0, \pi]$. Usando el Lema 3.10, se tiene que

$$\left| \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2n+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x\right)} \right| \leq \frac{1}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x\right)}. \tag{3.92}$$

Por otro lado, utilizando el Lema 3.11, se ve que

$$\frac{1}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x\right)} \leq \frac{\pi}{2x}. \tag{3.93}$$

De (3.92) y (3.93), se tiene que

$$\left| \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2n+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x\right)} \right| \leq \frac{\pi}{2x} = \frac{\pi}{2|x|}. \tag{3.94}$$

Ahora, se supo que $x \in [-\pi, 0)$. Luego, $-x \in (0, \pi]$. Haciendo uso del Lema 3.10 y tomando en cuenta que la función $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ es impar, se observa que

$$\left| \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2n+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x\right)} \right| = \left| \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2n+1}{2}(-x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}(-x)\right)} \right| \leq \frac{1}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}(-x)\right)}. \tag{3.95}$$

Asimismo, usando nuevamente el Lema 3.11, se sigue que

$$\frac{1}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}(-x)\right)} \leq \frac{\pi}{2(-x)}. \tag{3.96}$$

De (3.95) y (3.96), se tiene que

$$\left|\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2n+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x\right)}\right| \leq \frac{\pi}{2(-x)} = \frac{\pi}{2|x|}. \tag{3.97}$$

A partir de (3.94) y (3.97), el resultado se sigue. □

El siguiente lema junto con el Lema 3.12 permiten acotar la suma parcial en la Proposición 3.11.

Lema 3.13. *Para todo $n \in \{2, 3, \ldots\}$, para todo $p \in \{1, \ldots, n\}$, para todo $x \in I_p$ y para todo $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, se tiene que*

$$|A_j - x| \leq \pi \Leftrightarrow |j - p| \leq \left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right], \tag{3.98}$$

donde $I_p := I_{p,n}$ y $A_j := A_{j,n}$ están dados en (3.60) y (3.6), respectivamente y $[\![\,\cdot\,]\!] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, es la función parte entera (ver Definición C.1).

Demostración. Sean $n \in \{2, 3, \ldots\}$, $p \in \{1, \ldots, n\}$, $x \in I_p$ y $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. De (3.60), se observa que

$$\begin{aligned} x \in I_p &\Leftrightarrow A_p - \frac{1}{n^3} < x < A_p + \frac{1}{n^3} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{n^3} < A_p - x < \frac{1}{n^3} \qquad (3.99)\\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{n^3} < x - A_p < \frac{1}{n^3}, \qquad (3.100) \end{aligned}$$

donde $A_p := A_{p,n}$ está dado en (3.6).

Se supone primero que $|A_j - x| \leq \pi$. De (3.100) y haciendo uso de (3.6), se ve que

$$\begin{aligned} |A_j - x| \leq \pi &\Leftrightarrow -\pi \leq A_j - x \leq \pi \\ &\Leftrightarrow x - A_p - \pi \leq A_j - A_p \leq x - A_p + \pi \\ &\Rightarrow -\frac{1}{n^3} - \pi \leq A_j - A_p \leq \frac{1}{n^3} + \pi \\ &\Leftrightarrow |A_j - A_p| \leq \pi + \frac{1}{n^3} \\ &\Rightarrow \left|\frac{4j\pi}{2n+1} - \frac{4p\pi}{2n+1}\right| \leq \pi + \frac{1}{n^3} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{4\pi}{2n+1}|j-p| \leq \pi + \frac{1}{n^3}\\
&\Rightarrow |j-p| \leq \frac{2n+1}{4\pi}\left(\pi + \frac{1}{n^3}\right)\\
&\Rightarrow |j-p| \leq \frac{n}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2n+1}{4\pi n^3}.
\end{aligned} \tag{3.101}
$$

De (3.101) y utilizando el Lema B.1, se tiene que

$$
|j-p| \leq \left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right], \tag{3.102}
$$

donde $[\![\,\cdot\,]\!] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, es la función parte entera (ver Definición C.1).

Ahora, se supone que $|j-p| \leq \left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right]$. Usando (3.6) y (3.99), se observa que

$$
\begin{aligned}
|j-p| \leq \left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right] &\Rightarrow |j-p| \leq \frac{n}{2}\\
&\Rightarrow -\frac{n}{2} \leq j-p \leq \frac{n}{2}\\
&\Rightarrow -\frac{4\pi}{2n+1}\left(\frac{n}{2}\right) \leq \frac{4\pi}{2n+1}(j-p) \leq \frac{4\pi}{2n+1}\left(\frac{n}{2}\right)\\
&\Rightarrow -\frac{2n\pi}{2n+1} \leq \frac{4j\pi}{2n+1} - \frac{4p\pi}{2n+1} \leq \frac{2n\pi}{2n+1}\\
&\Rightarrow -\frac{2n\pi}{2n+1} \leq A_j - A_p \leq \frac{2n\pi}{2n+1}\\
&\Rightarrow A_p - x - \frac{2n\pi}{2n+1} \leq A_j - x \leq A_p - x + \frac{2n\pi}{2n+1}\\
&\Rightarrow -\frac{1}{n^3} - \frac{2n\pi}{2n+1} \leq A_j - x \leq \frac{1}{n^3} + \frac{2n\pi}{2n+1}\\
&\Leftrightarrow |A_j - x| \leq \frac{1}{n^3} + \frac{2n\pi}{2n+1}.
\end{aligned} \tag{3.103}
$$

De (3.103) y utilizando el Lema B.2, se tiene que

$$
|A_j - x| \leq \pi. \tag{3.104}
$$

Usando (3.102) y (3.104), se concluye el resultado. □

La siguiente observación permite identificar los índices de la sumatoria bajo los cuales se pueden aplicar los Lemas 3.12 y 3.13 en la demostración de la Proposición 3.11

Observación 3.7. *Sean $n \in \{2, 3, \ldots\}$, $p \in \{1, \ldots, n\}$ y $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, se observa que*

$$si\ 1 \leq p \leq \left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right]\ \ y\ \ 0 \leq j \leq p + \left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right],\ \ entonces\ |j-p| \leq \left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right],$$

además

$$si\ \left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right] < p \leq n\ \ y\ \ p - \left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right] \leq j \leq n,\ \ entonces\ |j-p| \leq \left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right],$$

donde $[\![\,\cdot\,]\!] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, *es la función parte entera (ver Definición C.1).*

Observación 3.8. *Sean* $n \in \{2, 3, \ldots\}$, $p \in \{1, \ldots, n\}$, $x \in I_p$, *con* $I_p := I_{p,n}$ *dado en* (3.60), *y* $j \in \{0, \ldots, n\}$. *Si* $|A_j - x| > \pi$, *entonces*

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2n^2+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}(A_j - x)\right)} \geq 0,$$

donde $A_j := A_{j,n}$ *está dado en* (3.6).

La siguiente proposición hace referencia a la desigualdad expuesta en la ecuación (3) de [15] y será de gran importancia en la demostración de los resultados presentes en la Sección 3.5.

Proposición 3.11. *Existe una constante (absoluta)* $C_1 > 0$ *tal que para todo* $n \in \{2, 3, \ldots\}$, *para todo* $p \in \{1, \ldots, n\}$ *y para todo* $x \in I_p$, *se tiene que*

$$S_{n^2}(x) > C_1\, n, \tag{3.105}$$

donde $I_p := I_{p,n}$ *está dado en* (3.60).

Demostración. Sean $n \in \{2, 3, \ldots\}$ y $p \in \{1, \ldots, n\}$. En primer lugar, se supone que $x \in I_p \setminus \{A_p\}$, donde $A_p := A_{p,n}$ e $I_p := I_{p,n}$ están dados en (3.6) y (3.60), respectivamente. Como $x \in I_p \setminus \{A_p\}$, de (3.73), se sigue que $x \notin \{A_0, \ldots, A_n\}$. De la Observación 3.4, se ve que

$$S_{n^2}(x) \geq \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \frac{m_j - n^2}{m_j} \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2n^2+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}(A_j - x)\right)}, \tag{3.106}$$

donde para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$, $m_j := m_{j,n}$ está dado en (3.5).

A continuación, en base a la Observación 3.7, se consideran los siguientes casos sobre $p \in \{1, \ldots, n\}$.

a) Primero, se analiza el caso cuando $1 \leq p \leq \left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right]$, donde $[\![\cdot]\!] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ es la función parte entera (ver Definición C.1). De (3.106), se sigue que

$$\begin{aligned} S_{n^2}(x) \geq \frac{1}{n+1} \sum_{\substack{0 \leq j \leq p + [\![\frac{n}{2}]\!] \\ j \neq p}} \frac{m_j - n^2}{m_j} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2n^2+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)} \\ + \frac{1}{n+1} \frac{m_p - n^2}{m_p} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2n^2+1}{2}(A_p - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_p - x)\right)} \\ + \frac{1}{n+1} \sum_{p + [\![\frac{n}{2}]\!] < j \leq n} \frac{m_j - n^2}{m_j} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2n^2+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)}. \end{aligned} \tag{3.107}$$

Usando los Lemas 3.8 y 3.9 y la Observación 3.8, de (3.107), se tiene que

$$\begin{aligned} S_{n^2}(x) &> -\frac{1}{n+1} \sum_{\substack{0 \leq j \leq p + [\![\frac{n}{2}]\!] \\ j \neq p}} \frac{m_j - n^2}{m_j} \left| \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2n^2+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)} \right| \\ &\quad + \frac{1}{n+1} \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{9}{10} n^2\right) \\ &= -\frac{1}{n+1} \sum_{\substack{0 \leq j \leq p + [\![\frac{n}{2}]\!] \\ j \neq p}} \frac{m_j - n^2}{m_j} \left| \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2n^2+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)} \right| \\ &\quad + \frac{n}{n+1} \left(\frac{27}{40} n\right). \end{aligned} \tag{3.108}$$

De (3.108), tomando en cuenta que para todo $N \in \{2, 3, \ldots\}$, $\dfrac{N}{N+1} \geq \dfrac{2}{3}$ y que para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$, $\dfrac{m_j - n^2}{m_j} \leq 1$, se sigue que

$$S_{n^2}(x) > -\frac{1}{n+1}\sum_{\substack{0\leq j\leq p+\left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right]\\ j\neq p}}\left|\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2n^2+1}{2}(A_j-x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}(A_j-x)\right)}\right| + \frac{2}{3}\left(\frac{27}{40}\,n\right)$$

$$= -\frac{1}{n+1}\sum_{\substack{0\leq j\leq p+\left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right]\\ j\neq p}}\left|\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2n^2+1}{2}(A_j-x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}(A_j-x)\right)}\right| + \frac{9}{20}\,n. \tag{3.109}$$

De (3.109), haciendo uso de la Observación 3.7 y de los Lemas 3.13 y 3.12, se ve que

$$S_{n^2}(x) > -\frac{1}{n+1}\sum_{\substack{0\leq j\leq p+\left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right]\\ j\neq p}}\frac{\pi}{2|A_j-x|} + \frac{9}{20}\,n. \tag{3.110}$$

A partir de (3.110), tomando en consideración que para todo $q \in \{0,\ldots,n\}$, $|A_q - x| \geq \dfrac{1}{2}|A_p - A_q| = \dfrac{2\pi|p-q|}{2n+1}$ y el hecho que para todo $N \in \{2,3,\ldots\}$, $\dfrac{2N+1}{N+1} < 2$, se tiene que

$$\begin{aligned}
S_{n^2}(x) &> -\frac{1}{n+1}\sum_{\substack{0\leq j\leq p+\left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right]\\ j\neq p}}\frac{\pi}{2}\left(\frac{2n+1}{2\pi|j-p|}\right) + \frac{9}{20}\,n\\
&= -\frac{2n+1}{4(n+1)}\sum_{\substack{0\leq j\leq p+\left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right]\\ j\neq p}}\frac{1}{|j-p|} + \frac{9}{20}\,n\\
&> -\frac{1}{2}\sum_{\substack{0\leq j\leq p+\left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right]\\ j\neq p}}\frac{1}{|j-p|} + \frac{9}{20}\,n\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\substack{-p\leq j-p\leq\left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right]\\ j-p\neq 0}}\frac{1}{|j-p|} + \frac{9}{20}\,n\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\substack{-p\leq s\leq\left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right]\\ s\neq 0}}\frac{1}{|s|} + \frac{9}{20}\,n\\
&= \frac{1}{2}\sum_{s=-p}^{-1}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{\left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right]}\frac{1}{s} + \frac{9}{20}\,n\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{p}\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{\left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right]}\frac{1}{s} + \frac{9}{20}\,n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq -\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{[\![\frac{n}{2}]\!]}\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\sum^{[\![\frac{n}{2}]\!]}\frac{1}{s} + \frac{9}{20}n \\
&= -\sum_{s=1}^{[\![\frac{n}{2}]\!]}\frac{1}{s} + \frac{9}{20}n \\
&\geq -1 - \log\left(\left[\!\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\!\right]\right) + \frac{9}{20}n,
\end{aligned} \tag{3.111}$$

donde $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es la función logaritmo natural.

Tomando en cuenta que para todo $N \in \{2, 3, \ldots\}$, $\frac{9}{20}N - 1 \geq \frac{1}{20}N$, de (3.111), se deduce que

$$S_{n^2}(x) > \frac{1}{20}n - \log\left(\left[\!\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\!\right]\right). \tag{3.112}$$

De (3.112), se tiene que existe una constante (absoluta) $C_0 > 0$ tal que

$$S_{n^2}(x) > C_0\, n. \tag{3.113}$$

b) En el caso cuando $\left[\!\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\!\right] < p \leq n$, se procede de manera similar a lo realizado en el ítem a) y se prueba que existe una constante (absoluta) $c_0 > 0$ tal que

$$S_{n^2}(x) > c_0\, n. \tag{3.114}$$

Se supone ahora que $x = A_p \in I_p$, donde $A_p := A_{p,n}$ e $I_p := I_{p,n}$ están dados en (3.6) y (3.60), respectivamente. Usando la Proposición 3.9, se tiene que

$$S_{n^2}(x) = \frac{1}{2} + n^2 - \frac{n^{4(n+1)} - 1}{2n^{4n+2}(n+1)(n^2-1)}.$$

De la igualdad anterior y usando el hecho que para todo $N \in \{2, 3, \ldots\}$, $N^2 \geq 2N$ y $-\frac{1}{N^2 - 1} \geq -\frac{1}{3}$, se ve que

$$\begin{aligned}
S_{n^2}(x) &= \frac{1}{2} + n^2 - \frac{n^2}{2(n+1)(n^2-1)} + \frac{1}{2n^{4n+2}(n+1)(n^2-1)} \\
&\geq 2n - \frac{n^2}{2(n+1)(n^2-1)} \\
&\geq 2n - \frac{1}{6}\left(\frac{n}{n+1}\right)n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&> 2n - \frac{1}{6}\,n \\
&= \frac{11}{6}\,n, \qquad (3.115)
\end{aligned}
$$

donde también se ha usado el hecho que para todo $L \in \mathbb{Z}^+$, $-\dfrac{L}{L+1} > -1$.

De (3.113)$-$(3.115) y tomando $C_1 := \text{mín}\left\{C_0,\, c_0,\, \dfrac{11}{6}\right\}$, se sigue que

$$
S_{n^2}(x) > C_1\, n, \qquad (3.116)
$$

lo cual muestra el resultado. □

En resumen, en la presente sección y más precisamente en la Proposición 3.11, se ha presentado una demostración detallada de la deducción de la desigualdad dada en la ecuación (3) de [15]. De esta manera, en esta sección, se ha expuesto las justificaciones requeridas para solventar las afirmaciones expuestas en el punto 3° [15].

3.4. Determinación de cotas inferiores para la suma parcial S_k dada en (3.47)

En esta sección se analiza pormenorizadamente el punto 4° del [15]. Esto es, se determinan segmentos de la recta real contenidos en $[0, 2\pi]$ donde para cierto $k \in \mathbb{Z}^+$, la suma parcial $S_k := S_{k,n}$ dada en (3.47) y que fue estudiada en la Proposición 3.10 y en la Observación 3.5 puede ser acotada inferiormente y además satisface las desigualdades expuestas en la ecuación (4) de [15].

En la siguiente notación, se determinan los intervalos enunciados en el punto 4° de [15].

Notación 3.3. *Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y para todo $p \in \{0, \ldots, n-1\}$, se escribe*

$$
E_p := E_{p,n} := \left[A_p + \frac{1}{n^3},\, A_{p+1} - \frac{1}{n^3}\right], \qquad (3.117)
$$

donde $A_p := A_{p,n}$ está dado en (3.6).

A continuación, se realiza un estudio de los intevalos E_p dados en la notación anterior.

Lema 3.14. *Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y para todo $p \in \{0, \dots, n-1\}$, se tiene que*

$$A_p + \frac{1}{n^3} < A_{p+1} - \frac{1}{n^3}, \tag{3.118}$$

donde $A_p := A_{p,n}$, está dado en (3.6).

Demostración. Sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y $p \in \{0, \dots, n-1\}$. De (3.6), se tiene que

$$\begin{aligned}
A_p + \frac{1}{n^3} < A_{p+1} - \frac{1}{n^3} &\Leftrightarrow \frac{4p\pi}{2n+1} + \frac{1}{n^3} < \frac{4(p+1)\pi}{2n+1} - \frac{1}{n^3} \\
&\Leftrightarrow \frac{4p\pi}{2n+1} + \frac{1}{n^3} < \frac{4p\pi}{2n+1} + \frac{4\pi}{2n+1} - \frac{1}{n^3} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{n^3} < \frac{4\pi}{2n+1} - \frac{1}{n^3} \\
&\Leftrightarrow \frac{4\pi}{2n+1} - \frac{2}{n^3} > 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{4\pi n^3 - 4n - 2}{n^3(2n+1)} > 0 \\
&\Leftrightarrow 4\pi n^3 - 4n - 2 > 0 \\
&\Leftrightarrow 2\pi n^3 - 2n - 1 > 0.
\end{aligned}$$

Haciendo uso de (3.69), la última desigualdad se verifica y el resultado se sigue. □

Lema 3.15. *Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple que*

$$A_n - \frac{1}{n^3} < 2\pi, \tag{3.119}$$

donde $A_n := A_{n,n}$, esta dado en (3.7).

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Utilizando (3.7), se sigue que

$$\begin{aligned}
A_n - \frac{1}{n^3} < 2\pi &\Leftrightarrow 2\pi - \frac{2\pi}{2n+1} - \frac{1}{n^3} < 2\pi \\
&\Leftrightarrow \frac{-2\pi n^3 - (2n+1)}{n^3(2n+1)} < 0 \\
&\Leftrightarrow -2\pi n^3 - (2n+1) < 0 \\
&\Leftrightarrow 2\pi n^3 + 2n + 1 > 0.
\end{aligned}$$

Como la última desigualdad es verdadera, el resultado se sigue. $\square$

Lema 3.16. *Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple que*

$$A_0 + \frac{1}{n^3} > 0,$$

donde $A_0 := A_{0,n}$, esta dado en (3.6).

Demostración. El resultado es inmediato. $\square$

Observación 3.9. *Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. A partir de la Notación 3.3 y de los Lemas 3.15 y 3.16, se tiene que para todo $p \in \{0, \dots, n-1\}$,*

$$E_p := E_{p,n} := \left[A_p + \frac{1}{n^3}, A_{p+1} - \frac{1}{n^3}\right] \subset (0, 2\pi) \subset [0, 2\pi]. \tag{3.120}$$

Por lo tanto,

$$\bigcup_{p=0}^{n-1} E_p \subset (0, 2\pi) \subset [0, 2\pi]. \tag{3.121}$$

Además, tomando en cuenta que para todo $j \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$A_j - \frac{1}{n^3} < A_j + \frac{1}{n^3},$$

se observa que para todo $n \in \{2, 3, \dots\}$,

$$\begin{aligned} 0 < A_0 + \frac{1}{n^3} < A_1 - \frac{1}{n^3} < \cdots \\ < A_{n-1} + \frac{1}{n^3} < A_n - \frac{1}{n^3} < 2\pi \end{aligned}$$

y también para todo j, $p \in \{0, \dots, n-1\}$, con $j \neq p$,

$$E_j \cap E_p = \varnothing. \tag{3.122}$$

De (3.121) *y* (3.122)*, se ve finalmente que*

$$\biguplus_{p=0}^{n-1} E_p \subset (0, 2\pi) \subset [0, 2\pi]. \tag{3.123}$$

La siguiente proposición será usada en la demostración de la Proposición (3.13) más adelante.

Lema 3.17. *Para todo* $n \in \{2, 3, \ldots\}$*, para todo* $p \in \{0, \ldots, n-1\}$*, para todo* $j \in \{p+1, \ldots, n\}$ *y para todo* $x \in E_p$*, se tiene que*

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)} > \frac{2n+1}{4\pi(j-p)} > 0,$$

donde $E_p := E_{p,n}$ *y* $A_j := A_{j,n}$*, están dados en* (3.117) *y* (3.6)*, respectivamente.*

Demostración. Sean $n \in \{2, 3, \ldots\}$, $p \in \{0, \ldots, n-1\}$, $j \in \{p+1, \ldots, n\}$ y $x \in E_p$, con $E_p := E_{p,n}$ dado en (3.117). De (3.117), se ve que

$$\begin{aligned} x \in E_p &\Leftrightarrow A_p + \frac{1}{n_3} \leq x \leq A_{p+1} - \frac{1}{n_3} \\ &\Leftrightarrow -A_{p+1} + \frac{1}{n_3} \leq -x \leq -A_p - \frac{1}{n_3}, \end{aligned} \tag{3.124}$$

donde para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$, $A_j := A_{j,n}$ está dado en (3.6).

Ahora, usando (3.6) y (3.124), se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{4\pi}{2n+1}\big(j - (p+1)\big) + \frac{1}{n^3} &= A_j - A_{p+1} + \frac{1}{n^3} \\ &\leq A_j - x \\ &\leq A_j - A_p - \frac{1}{n^3} \\ &< A_j - A_p \\ &= \frac{4\pi}{2n+1}\big(j-p\big) \\ &< \frac{4\pi}{2n}\big(j-p\big) \\ &= \frac{2\pi}{n}\big(j-p\big) < 2\pi. \end{aligned}$$

De la última cadena de desigualdades, se observa que

$$0 \leq A_j - x < \frac{4\pi}{2n+1}\big(j-p\big) < 2\pi.$$

Por tanto,

$$0 \leq \frac{1}{2}(A_j - x) < \frac{2\pi}{2n+1}\big(j-p\big) < \pi. \tag{3.125}$$

Luego, de (3.125) y usando el hecho que para todo $z \in [0,\pi]$, $\operatorname{sen}(z) < z$, se sigue que

$$0 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right) < \frac{2\pi}{2n+1}\big(j-p\big) < \pi.$$

Por último,

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)} > \frac{2n+1}{2\pi(j-p)} \geq 0.$$

$\square$

La siguiente proposición será utilizada en la demostración de la Proposición 3.13. Este resultado hace referencia a la existencia de un índice $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que cumple ciertas propiedades correspondientes a las afirmaciones de las líneas $5-7$ y 9 de la segunda página del paper de Kolmogórov ([15]).

Proposición 3.12. *Para todo $n \in \{2,3,\ldots\}$, para todo $p \in \{0,\ldots,n-1\}$ y para todo $x \in E_p$, es posible determinar un $k := k_x \in \mathbb{Z}^+$ tal que*

(a) $2k+1$ *es múltiplo de* $2n+1$,

(b) $-\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}x\right) \geq \frac{1}{2}$,

donde $E_p := E_{p,n}$ está dado en (3.117).

Demostración. Sean $n \in \{2,3,\ldots\}$, $p \in \{0,\ldots,n-1\}$ y $x \in E_p$, con $E_p := E_{p,n}$ dado en (3.117). Haciendo uso de (3.6), se observa que

$$\begin{aligned} A_{p+1} - x &= \frac{4(p+1)\pi}{2n+1} - x \\ &= \frac{4(p+1)\pi - (2n+1)x}{2n+1} \\ &= \frac{4\pi\left(p+1-\frac{2n+1}{4\pi}x\right)}{2n+1}. \end{aligned} \tag{3.126}$$

Sea $\omega \in \mathbb{R}$ dado por

$$\omega := \omega_x := \omega_{x,p,n} := p + 1 - \frac{2n+1}{4\pi}\,x. \tag{3.127}$$

De (3.126) y (3.127), se tiene que

$$A_{p+1} - x = \frac{4\pi\omega}{2n+1}. \tag{3.128}$$

Por otro lado, usando (3.117), (3.6) y (3.127), se ve que

$$\begin{aligned} x \in E_p &\Leftrightarrow x \in \left[A_p + \frac{1}{n^3} \ , \ A_{p+1} - \frac{1}{n^3} \right] \\ &\Leftrightarrow A_p + \frac{1}{n^3} \leq x \leq A_{p+1} - \frac{1}{n^3} \\ &\Leftrightarrow -A_{p+1} + \frac{1}{n^3} \leq -x \leq -A_p - \frac{1}{n^3} \\ &\Leftrightarrow -\frac{4(p+1)\pi}{2n+1} + \frac{1}{n^3} \leq -x \leq -\frac{4p\pi}{2n+1} - \frac{1}{n^3} \\ &\Leftrightarrow -(p+1) + \frac{2n+1}{4\pi n^3} \leq -\frac{2n+1}{4\pi} \leq< -p - \frac{2n+1}{4\pi n^3} \\ &\Leftrightarrow \frac{2n+1}{4\pi n^3} \leq p+1 - \frac{2n+1}{4\pi} x \leq 1 - \frac{2n+1}{4\pi n^3} \\ &\Leftrightarrow \frac{2n+1}{4\pi n^3} \leq \omega \leq 1 - \frac{2n+1}{4\pi n^3}. \end{aligned} \tag{3.129}$$

Sean $\xi \in \mathbb{R}$ y $T \subset \mathbb{R}$ dados por

$$\xi := \xi_n := \frac{2n+1}{4\pi n^3}, \tag{3.130}$$

$$T := T_n := \left[\xi \ , \ 1 - \xi\right] := \left[\frac{2n+1}{4\pi n^3} \ , \ 1 - \frac{2n+1}{4\pi n^3} \right]. \tag{3.131}$$

De (3.129) y (3.131), se observa que

$$x \in E_p \Leftrightarrow \omega \in T. \tag{3.132}$$

Sea $k \in \mathbb{Z}^+$. Se supone la existencia de $\rho \in \mathbb{Z}^+$ (necesariamente impar), tal que

$$2k + 1 = \rho(2n+1). \tag{3.133}$$

Usando (3.133), (3.126) y (3.6), se aprecia que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}(A_{p+1} - x) \right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\rho(2n+1)}{2} \frac{4\pi\omega}{2n+1} \right) = \operatorname{sen}\left(2\pi\rho\omega\right) \tag{3.134}$$

y

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}(A_{p+1}-x)\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\left(\frac{4(p+1)\pi}{2n+1}-x\right)\right)\\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\,\frac{4(p+1)\pi}{2n+1}-\frac{2k+1}{2}x\right)\\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{\rho(2n+1)}{2}\,\frac{4(p+1)\pi}{2n+1}-\frac{2k+1}{2}x\right)\\
&= \operatorname{sen}\left(2\pi\rho(p+1)-\frac{2k+1}{2}x\right)\\
&= \operatorname{sen}\left(-\frac{2k+1}{2}x\right)\\
&= -\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}x\right). \qquad (3.135)
\end{aligned}$$

De (3.134) y (3.135), se tiene que

$$-\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}(A_{p+1}-x)\right) = \operatorname{sen}\left(2\pi\rho\omega\right). \qquad (3.136)$$

A partir de (3.136) y (3.133), se establece que para probar el ítem **(b)**, es suficiente mostrar que para todo $\omega \in T$, existe $\rho := \rho_\omega \in \mathbb{Z}^+$ (impar) tal que

$$\operatorname{sen}(2\pi\rho\omega) \geq \frac{1}{2}.$$

Para esto, tomamos $\rho_0 \in \mathbb{Z}^+$ (impar) y se afirma que para todo $\omega \in T$, existe $\rho := \rho_\omega \in \mathbb{Z}^+$ (impar), con $\rho \geq \rho_0$, tal que

$$\operatorname{sen}(2\pi\rho\omega) \geq \frac{1}{2}. \qquad (3.137)$$

En efecto, sean $\omega \in T$ y $\rho \in \mathbb{Z}^+$ (impar). Se observa que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2\pi\rho\omega) \geq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \operatorname{sen}\Big(2\pi\big([\![\rho\omega]\!]+\{\rho\omega\}\big)\Big) \geq \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen}\Big(2\pi[\![\rho\omega]\!]+2\pi\{\rho\omega\}\Big) \geq \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen}\big(2\pi\{\rho\omega\}\big) \geq \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \leq 2\pi\{\rho\omega\} \leq \frac{5\pi}{6}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{12} \leq \{\rho\omega\} \leq \frac{5}{12},$$

donde $[\![\,\cdot\,]\!] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ y $\{\,\cdot\,\} : \mathbb{R} \to [0\,,\,1)$ son las funciones parte entera y parte fraccionaria dadas en las Definiciones C.1 y C.2, respectivamente.

Sea $V \subset \mathbb{R}$ dado por

$$V := \left[\frac{1}{12}\,,\,\frac{5}{12}\right]. \tag{3.138}$$

Ahora, se debe probar que dado $\omega \in T$, existen infinitos número de la forma $\omega, 3\,\omega, 5\,\omega, \ldots$, cuyas partes fraccionarias están en V, lo cual permite determinar la existencia de $\rho \in \mathbb{Z}^+$ (impar), tal que (3.137) se cumple; y con esto culminaría la demostración de esta proposición. Para ello, se consideran los siguientes casos sobre $\omega \in T$.

A) Se analiza primero el caso cuando $\omega \in \big(T \setminus \mathbb{Q}\big)$, es decir, $\omega \in T$ es irracional. Haciendo uso del Corolario C.2, se observa que la sucesión $\big(t_r\big)_{r=0}^{+\infty}$, donde para todo $r \in \mathbb{N}$, $t_r := t_{r,\omega} := (2r+1)\,\omega$, es una sucesión equidistribuida, lo cual indica que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, se verifica que

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \Big| \big\{\{t_0\}, \{t_1\}, \ldots, \{t_N\}\big\} \cap (\alpha\,,\,\beta) \Big| = \beta - \alpha > 0,$$

donde $\{\,\cdot\,\} : \mathbb{R} \to [0\,,\,1)$ es la función parte fraccionaria, dada en la Definición C.2. En particular, tomando $\alpha = \dfrac{1}{12}$ y $\beta = \dfrac{5}{12}$, de (3.138), se ve que

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \Big| \big\{\{t_0\}, \{t_1\}, \ldots, \{t_N\}\big\} \cap V \Big| = \frac{1}{3}. \tag{3.139}$$

De (3.139), se puede determinar un $\lambda \in \mathbb{N}$ tal que $t_\lambda := t_{\lambda,\omega} := (2\lambda + 1)\,\omega$, satisface que $t_\lambda \geq \rho_0\,\omega$ y $\dfrac{1}{12} \leq \{t_\lambda\} \leq \dfrac{5}{12}$. Luego, existe $\rho := \rho_\omega := \dfrac{t_\lambda}{\omega} = 2\lambda + 1 \in \mathbb{Z}^+$ (impar) tal que cumple (3.137).

B) Se estudia ahora el caso cuando $\omega \in \big(T \cap \mathbb{Q}\big)$, es decir, $\omega \in T$ es racional. Dicho de otro modo, dados $a := a_\omega$, $b := b_\omega \in \mathbb{Z}^+$, con $a < b$, se tiene que $\omega = \dfrac{a}{b}$ (fracción irreducible).

A continuación, se analizan los siguientes dos casos sobre $b \in \mathbb{Z}^+$.

B.1) Se supone en primer lugar que $b \in \mathbb{Z}^+$ es impar. Luego, el conjunto $W \subset \mathbb{Z}^+$ de b elementos dado por

$$W = \{\rho_0 \, a, \, (\rho_0 + 2)a, \ldots, (\rho_0 + 2(b-1))a\}$$

forma un Sistema Completo de Residuos módulo b (Ver Apéndice D). Lo cual indica que al dividir por b cada elemento del conjunto W y obtener la parte fraccionaria, el resultate formará parte del conjunto

$$\widetilde{W} = \left\{0, \frac{1}{b}, \ldots, \frac{b-1}{b}\right\}.$$

Si $3 \le b \in \mathbb{Z}^+$ (impar), al menos un elemento de $\widetilde{W}$ estará en V, lo cual muestra que existe un $s \in \{0, \ldots, b-1\}$ tal que $u_s := (\rho_0 + 2s)a$, satisface que $u_s \ge \rho_0 \, a$ y $\frac{1}{12} \le \left\{\frac{u_s}{b}\right\} \le \frac{5}{12}$, donde

$$\frac{u_s}{b} := \frac{(\rho_0 + 2s)a}{b} = (\rho_0 + 2s)\frac{a}{b} = (\rho_0 + 2s)\omega.$$

Luego, existe $\rho := \rho_\omega := \frac{u_s}{b\,\omega} = \frac{u_s}{a} = \rho_0 + 2s \in \mathbb{Z}^+$ (impar) tal que (3.137) se cumple.

B.2) Finalmente, se supone que $b \in \mathbb{Z}^+$ es par, entonces $a \in \mathbb{Z}^+$ debe ser necesariamente impar. Luego, el conjunto $X \subset \mathbb{Z}^+$ de b elementos dado por

$$X = \{\rho_0 \, a, \, (\rho_0 + 1)a, \ldots, (\rho_0 + b - 1)a\}$$

forma un sistema Completo de Residuos módulo b (Ver Apéndice D). Se toma el subconjunto $Y \subset X$ dado por

$$Y = \{\rho_0 \, a, \, (\rho_0 + 2)a, \ldots, (\rho_0 + b - 2)a\}$$

y haciendo uso del Algoritmo de la División, se tiene que para cada $y \in Y$ existen $z, \, r \in \mathbb{Z}^+$ tales que $y = zb + r$, con $0 \le r < b$, donde r forzosamente debe ser impar. Ahora, al dividir por b cada elemento de Y y obtener su parte fraccionaria, ésta formará parte del conjunto $\widetilde{X}$ dado por

$$\widetilde{X} = \left\{ \frac{1}{b}, \frac{3}{b}, \dots, \frac{b-1}{b} \right\}.$$

Si $4 \leq b \in \mathbb{Z}^+$, al menos un elemento de $\widetilde{X}$ estará en V, lo cual muestra la existencia de un $s \in \{1, 3, \dots, b-1\}$ tal que $v_s := (\rho_0 + s - 1)a$ satisface que $v_s \geq \rho_0\, a$ y $\frac{1}{12} \leq \left\{ \frac{v_s}{b} \right\} \leq \frac{5}{12}$, donde

$$\frac{v_s}{b} := \frac{(\rho_0 + s - 1)a}{b} = (\rho_0 + s - 1)\frac{a}{b} = (\rho_0 + s - 1)\omega.$$

Luego, existe $\rho := \rho_\omega := \dfrac{v_s}{b\,\omega} = \dfrac{v_s}{a} = \rho_0 + s - 1 \in \mathbb{Z}^+$ (impar) tal que cumple (3.137).

$\square$

La siguiente observación hace referencia a la existencia de un índice $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que cumple con las desigualdades expuestas en la línea 8 de la segunda página del paper de Kolmogórov ([15]). Aquí, se presentan las ideas de la demostración de dicho resultado.

Observación 3.10. *Sean $n \in \{2, 3, \dots\}$, $p \in \{0, \dots, n-1\}$ y $x \in E_p$, con $E_p := E_{p,n}$ dado en* (3.117)*. En base a la Proposición 3.12, dado $\rho_0 \in \mathbb{Z}^+$ (impar), se puede garantizar, para todo $\omega \in T$, la existencia de $\rho := \rho_\omega \in \mathbb{Z}^+$ (impar), con $\rho \geq \rho_0$, tal que*

$$\operatorname{sen}\big(2\pi\rho\omega\big) \geq \frac{1}{2}, \tag{3.140}$$

donde $\omega := \omega_x$ y $T := T_n$ están dados en (3.127) *y* (3.131)*, respectivamente. Lo cual garantiza, para todo $x \in E_p$, la existencia de un $k = k_x \in \mathbb{Z}^+$ tal que $2k+1 = \rho(2n+1)$ y*

$$-\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}x\right) \geq \frac{1}{2}. \tag{3.141}$$

Como $\rho_0 \in \mathbb{Z}^+$ (impar) es arbitrario, se establece ρ_0 de tal manera que

$$\frac{2m_p + 1}{2n+1} \leq \rho_0, \tag{3.142}$$

donde para todo $p \in \{0, \dots, n\}$, $m_p := m_{p,n}$ está dado en (3.5)*.*

Además, de (3.140) *y tomando en cuenta que para todo $\rho \in \mathbb{Z}^+$ (impar), la función* sen$(2\pi\rho\,\cdot\,) : T \to [-1,1]$, *es continua. Usando el Corolario de la página 176 de [16], se tiene que existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\operatorname{sen}\bigl(2\pi\rho\nu\bigr) \geq \frac{1}{2}, \text{ para todo } \nu \in (\omega - \delta\,,\, \omega + \delta), \tag{3.143}$$

De (3.143) *y haciendo uso del Teorema de Heine-Borel, es posible establecer la existencia de una cota superior para* $\{\rho \in \mathbb{Z}^+;\ \rho \geq \rho_0$ *y se cumple* $(3.140)\}$ *(ver [20] página 315). Se nota por* $\rho_1 \in \mathbb{Z}^+$ *a esta cota superior y se asume que*

$$\rho_1 \leq \frac{m_{p+1}+1}{2n+1}, \tag{3.144}$$

donde para todo $p \in \{0, \ldots, n\}$, $m_p := m_{p,n}$ *está dado en* (3.5).

De (3.142) *y* (3.144), *se desprende que*

$$\frac{2m_p+1}{2n+1} \leq \rho_0 \leq \rho \leq \rho_1 \leq \frac{m_{p+1}+1}{2n+1},$$

de donde

$$m_p \leq k \leq \frac{m_{p+1}}{2}.$$

La siguiente proposición sintetiza los resultados probados en esta sección y hace referencia a la ecuación (4) de [15].

Proposición 3.13. *Para todo* $n \in \{2, 3, \ldots\}$, *para todo* $p \in \{0, \ldots, n-1\}$ *y para todo* $x \in E_p$, *es posible determinar un* $k = k_x \in \mathbb{Z}^+$ *y una constante (absoluta)* $C_2 > 0$, *tales que*

$$S_k(x) \geq C_2 \log(n-p), \tag{3.145}$$

donde $E_p := E_{p,n}$ *está dado en* (3.117).

Demostración. Sean $n \in \{2, 3, \ldots\}$, $p \in \{0, \ldots, n-1\}$ y $x \in E_p$, con $E_p := E_{p,n}$ dado en (3.117). Usando la Proposición 3.12 y la Observación 3.10, se cuenta con la posibilidad de determinar un $k := k_x \in \mathbb{Z}^+$ tal que

i) $2k+1$ es múltiplo de $2n+1$, es decir, existe $\rho \in \mathbb{Z}^+$ (necesariamente impar) tal que $2k+1 = \rho(2n+1)$,

ii) $-\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}x\right) \geq \frac{1}{2}$,

iii) $m_p \leq k \leq \frac{m_{p+1}}{2}$,

donde $m_p := m_{p,n}$ está dado en (3.5).

Por otro lado, haciendo uso de la Observación 3.5, tomando en cuenta el ítem iii), y el hecho que $x \notin \{A_1, \ldots, A_n\}$, se tiene que

$$S_k(x) \geq \frac{1}{n+1} \sum_{j=p+1}^{n} \frac{m_j - k}{m_j} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}(A_j - x)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)}, \tag{3.146}$$

donde para todo $k \in \mathbb{Z}^+$, $S_k := S_{k,n}$ está dado en (3.33) y para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$, $m_j := m_{j,n}$ y $A_j := A_{j,n}$ están dados en (3.5) y (3.6), respectivamente.

Usando (3.146), (3.6) y el ítem i), se observa que

$$\begin{aligned}
S_k(x) &\geq \frac{1}{n+1} \sum_{j=p+1}^{n} \frac{m_j - k}{m_j} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\left(\frac{4j\pi}{2n+1} - x\right)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=p+1}^{n} \frac{m_j - k}{m_j} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\frac{4j\pi}{2n+1} - \frac{2k+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=p+1}^{n} \frac{m_j - k}{m_j} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\rho(2n+1)}{2}\frac{4j\pi}{2n+1} - \frac{2k+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=p+1}^{n} \frac{m_j - k}{m_j} \frac{\operatorname{sen}\left(2\pi j\rho - \frac{2k+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=p+1}^{n} \frac{m_j - k}{m_j} \frac{\operatorname{sen}\left(-\frac{2k+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)} \\
&= \operatorname{sen}\left(-\frac{2k+1}{2}x\right) \frac{1}{2(n+1)} \sum_{j=p+1}^{n} \frac{m_j - k}{m_j} \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j - x)\right)}
\end{aligned}$$

$$= -\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}x\right)\frac{1}{2(n+1)}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{m_j-k}{m_j}\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(A_j-x)\right)}. \tag{3.147}$$

De (3.147), ii), del Lema 3.17 y tomando en cuenta que $\frac{m_j-k}{m_j} \geq \frac{1}{2}$, se tiene que

$$\begin{aligned} S_k(x) &> \frac{1}{4(n+1)}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{1}{2}\frac{2n+1}{4\pi(j-p)} \\ &= \frac{2n+1}{32\pi(n+1)}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{1}{(j-p)} \\ &= \frac{2n+1}{32\pi(n+1)}\sum_{s=1}^{n-p}\frac{1}{s}. \end{aligned} \tag{3.148}$$

A partir de (3.148), considerando que para todo $N \in \{2,3,\ldots\}$, $\frac{2N+1}{N+1} \geq \frac{5}{3}$ y haciendo uso del Lema 3.10 de la página 116 de [12], se desprende que

$$S_k(x) > \frac{1}{32\pi}\left(\frac{5}{3}\log(n-p+1)\right) \tag{3.149}$$

$$> \frac{5}{96\pi}\log(n-p+1), \tag{3.150}$$

donde $\log : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ es la función logaritmo natural.

Finalmente, tomando $C_2 := \frac{5}{96\pi} > 0$, de (3.150), se concluye que

$$S_k(x) > C_2 \log(n-p), \tag{3.151}$$

lo cual muestra el resultado. □

En conscuencia, en esta sección y más precisamente en la Proposición 3.13, se ha presentado una demostración detallada de la deducción de la desigualdad dada en la ecuación (4) de [15]. De esta manera se ha justificado minuciosamente las afirmaciones expuestas en el punto 4° [15].

3.5. Existencia de una función integrable Φ cuya serie de Fourier diverge en todas partes

La existencia de una función cuya serie de Fourier divergente en todo punto fue descubierta en 1926 por Kolmogórov, pero en su paper ([15]) que contiene sólo dos páginas, únicamente se presentan las propiedades de los prolinomios trigonométricos a partir de los cuales la función está construida. Una descripción más detallada puede ser encontrada en los trabajos de Zygmund ([20]) y Bary ([7]). Por su parte Zygmund menciona que las modificaciones realizadas y presentadas en su texto le fueron sugeridas por el mismo Kolmogórov y Bary realiza un desarrollo del ejemplo de Kolmogórov a partir del trabajo de Zygmund. Sin lugar a duda, la labor realizada por Zygmund brinda una mejor comprensión de una función cuya serie de Fourier diverge en todas partes, pero ésta se aleja ingeniosamente de las ideas geométricas propuestas inicialmente por Kolmogórov.

La idea de la presente investigación es brindar una demostración rigurosa de los pasos a seguir para la construcción de la función de Kolmogórov, cuya serie de Fourier diverge en todas partes, apegada íntimamente a la idea original de [15], rescatando los detalles y resultados fundamentales expuestos en el mismo, con el fin de corroborar las afirmaciones y complementar algunas propiedades faltantes para una comprensión adecuada de este artículo revolucionario. Hasta el momento se han estudiado los puntos $1°-4°$ de dicho paper, logrando descifrar y comprender muchas de las afirmaciones expuestas ahí.

En esta sección se estudia el punto 5° del paper de Kolmogórov de 1926 ([15]). En primer lugar, se determinan ciertos segmentos de la recta real contenidos en $[0, 2\pi]$ donde para cierto $k \in \mathbb{Z}^+$ la suma parcial S_k dada en (3.33) y estudiada en las tres secciones anteriores (Secciones 3.2-3.4) puede ser acotada inferiormente y además satisface la desigualdad dada en la línea -6 de la segunda página de [15]. Luego, se construye la función de Kolmogórov Φ y a través de una recopilación de resultados de todo el trabajo realizado, se demuestra que la serie de Fourier de esta función diverge en todas partes.

A continuación, se describen los segmentos presentes en el punto 5° del paper de Kolmogórov.

Notación 3.4. *Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se escribe*

$$F_n := \left[0, 2\pi - \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0, \frac{2\pi}{n}\left(n - \frac{\sqrt{n}}{2\pi}\right)\right]. \tag{3.152}$$

Es claro que

$$F_1 \subset \cdots \subset F_n \subset \cdots \subset [0, 2\pi] \tag{3.153}$$

y

$$\bigcup_{j=1}^{+\infty} F_j = [0, 2\pi]. \tag{3.154}$$

Proposición 3.14. *Sea $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n_0 > (2\pi)^4$. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, tal que $n \geq n_0$ (suficientemente grande). Si $x \in F_n$, con F_n dado en* (3.152)*, entonces existe $p \in \{1, \ldots, n\}$, con $p \leq n - \frac{1}{2} + \sqrt[4]{n}$, tal que*

$$x \in I_p \ \text{ó}\ x \in E_p,$$

donde $I_p := I_{p,n}$ y $E_p := E_{p,n}$ están dados en (3.60) *y* (3.117)*, respectivamente.*

Demostración. Sea $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n_0 > (2\pi)^4$. Sean $n \in \mathbb{Z}^+$, tal que $n \geq n_0$ (suficientemente grande) y $x \in F_n$, con F_n dado en (3.152). Sea $\tau \in \mathbb{R}$. Se observa que

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi}{n}\left(n - \frac{\sqrt{n}}{2\pi}\right) \leq \frac{4\pi}{2n+1}(n - \tau) &\Leftrightarrow (2n+1)\left(n - \frac{\sqrt{n}}{2\pi}\right) \leq 2n(n - \tau) \\
&\Leftrightarrow 2n^2 - \frac{n\sqrt{n}}{\pi} + n - \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \leq 2n^2 - 2n\tau \\
&\Leftrightarrow 2n\tau \leq \frac{n\sqrt{n}}{\pi} + \frac{\sqrt{n}}{2\pi} - n \\
&\Leftrightarrow \tau \leq \frac{\sqrt{n}}{2\pi} + \frac{\sqrt{n}}{4\pi n} - \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{3.155}$$

Como $n > (2\pi)^4$. De (3.155), se sigue que

$$\sqrt[4]{n} - \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{n}}{2\pi} - \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{n}}{2\pi} + \frac{\sqrt{n}}{4\pi n} - \frac{1}{2},$$

de donde

$$2\pi - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2\pi}{n}\left(n - \frac{\sqrt{n}}{2\pi}\right) \leq \frac{4\pi}{2n+1}\left(n + \frac{1}{2} - \sqrt[4]{n}\right). \tag{3.156}$$

De (3.155) y (3.156), si $n > (2\pi)^4$, se tiene que

$$x \in F_n := \left[0, 2\pi - \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \subset \left[0, \frac{4\pi}{2n+1}\left(n + \frac{1}{2} - \sqrt[4]{n}\right)\right]. \tag{3.157}$$

Haciendo uso de (3.157), (3.73) y (3.123), se ve que

$$x \in \left(\biguplus_{1 \leq j \leq n + \frac{1}{2} - \sqrt[4]{n}} I_j\right) \cup \left(\biguplus_{1 \leq j \leq n + \frac{1}{2} - \sqrt[4]{n}} E_j\right),$$

donde $I_j := I_{j,n}$ y $E_j := E_{j,n}$ está dados en (3.60) y (3.117), respectivamente. Luego, existe $p \in \{0, \ldots, n\}$, con $p \leq n + \dfrac{1}{2} - \sqrt[4]{n}$, tal que

$$x \in I_p \text{ ó } x \in E_p.$$

$\square$

A continuación, se presenta un resultado importante para el presente trabajo. Se muestra la desigualdad expuesta en la línea -6 de la segunda página de [15]. A partir de esta proposición será posible establecer ciertos elementos necesarios en la demostración de la Proposición 3.17.

Proposición 3.15. *Sea $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n_0 > (2\pi)^4$. Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, con $n \geq n_0$ (suficientemente grande), y para todo $x \in F_n$, es posible determinar un índice $k \in \mathbb{Z}^+$ y una constante (absoluta) $C_3 > 0$, tales que*

$$S_k(x) \geq C_3 \log(n),$$

donde F_n está dado en (3.152)*, la suma parcial $S_k := S_{k,n}$, está dada en* (3.33) *y* $\log : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, es la función logaritmo natural.*

Demostración. Sean $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n_0 > (2\pi)^4$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, con $\geq n_0$. Sea $x \in F_n$, con F_n dado en (3.155). Si $n > (2\pi)^4$, haciendo uso de la Proposición 3.14, se tiene que existe $p \in \{0, \ldots, n\}$, con $p \leq n + \dfrac{1}{2} - \sqrt[4]{n}$, tal que $x \in I_p$ ó $x \in E_p$, donde para

$I_p := I_{p,n}$ y $E_p := E_{p,n}$, están dados en (3.60) y (3.117), respectivamente.

Se analizan los siguientes casos sobre $x \in F_n$.

- Primero, se analiza el caso cuando $x \in I_p$. Usando la Proposición 3.11, se tiene que

$$S_{n^2}(x) > C_1\, n > C_1 \log(n). \tag{3.158}$$

Tomando $k = n^2 \in \mathbb{Z}^+$, de (3.158), se sigue que

$$S_k(x) > C_1 \log(n). \tag{3.159}$$

- Ahora, si $x \in E_p$, haciendo uso de la Proposición 3.13, más precisamente de (3.151), se tiene que existe un $k \in \mathbb{Z}^+$, tal que

$$S_k(x) > C_2 \log(n - p + 1). \tag{3.160}$$

De (3.160) y recordando que $p \leq n + \dfrac{1}{2} - \sqrt[4]{n}$, se observa que

$$\begin{aligned} S_k(x) &> C_2 \log\left(\sqrt[4]{n} + \frac{1}{2}\right) \\ &> C_2 \log\left(\sqrt[4]{n}\right) \\ &= \frac{C_2}{4} \log(n). \end{aligned} \tag{3.161}$$

Finalmente, de (3.159) y (3.161), se concluye que para todo $x \in F_n$, es posible determinar un $k \in \mathbb{Z}^+$ y una constante (absoluta) $C_3 > 0$, tal que

$$S_k(x) > C_3 \log(n). \tag{3.162}$$

De (3.162), el resultado se sigue. $\square$

La siguiente proposición será usada en la demostración de la Proposición 3.17 y del Teorema 3.1, abajo.

Proposición 3.16. *Para todo $n \in \{2, 3, \ldots\}$ y para todo $k \in \mathbb{Z}^+$, con $k \geq m_n$ (orden del polinomio trigonométrico), se cumple que*

$$\mathcal{S}_k(\varphi_n; x) = \varphi_n(x), \ \ para\ todo\ x \in [0, 2\pi],$$

donde $\mathcal{S}_k(\varphi_n; \cdot)$ *es la* $k-$*ésima suma parcial de la serie de Fourier de la función* φ_n *definida en* (3.9) *y reescrita en la Proposición 3.7. Además,* $m_n := m_{n,n}$ *está dado en* (3.5)*.*

Demostración. Sean $n \in \{2, 3, \ldots\}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, con $k \geq m_n$ y $m_n := m_{n,n}$ dado en (3.5). Sea $x \in [0, 2\pi]$. Usando el Lema 2.13 de la página 71 de [12], se observa que

$$\mathcal{S}_k(\varphi_n; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} \varphi_n(y) D_k(x-y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(y) D_k(x-y) dy, \quad (3.163)$$

donde $D_k(\cdot)$ es el Núcleo de Dirichlet de orden k (ver Definición 2.11 y Lema 2.12 de la página 69 de [12]).

De (3.163) y usando la Proposición 3.7, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_k(\varphi_n; x) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{m_n} a_l \cos(ly + \lambda_l) \right) D_k(x-y) dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} D_k(x-y) + \sum_{l=1}^{m_n} a_l \cos(ly + \lambda_l) D_k(x-y) \right) dy \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} D_k(x-y) dy + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^{m_n} a_l \int_0^{2\pi} \cos(ly + \lambda_l) D_k(x-y) dy, \quad (3.164)
\end{aligned}$$

donde para todo $l \in \{1, \ldots, m_n\}$, a_l y λ_l están dados en (3.28) y (3.29), respectivamente.

Haciendo uso del Lema B.4 y tomando en cuenta que para todo $l \in \{1, \ldots, m_n\}$, $k > l$, se ve que

$$\int_0^{2\pi} \cos(ly + \lambda_l) D_k(x-y) dy = 2\pi \cos(lx + \lambda_l). \quad (3.165)$$

De (3.164), (3.165), utilizando el Lema B.3 y empleando nuevamente la Proposición 3.7, se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_k(\varphi_n; x) &= \frac{1}{4\pi}(2\pi) + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^{m_n} a_l \big(2\pi \cos(lx + \lambda_l) \big) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{m_n} a_l \cos(lx + \lambda_l) \\
&=: \varphi_n(x).
\end{aligned}$$

□

Corolario 3.1. *Para todo $n \in \{2, 3, \ldots\}$ y para todo $k, l \in \mathbb{Z}^+$, con $k \geq l$, se cumple que*

$$\mathcal{S}_k(S_l; x) = S_l(x), \text{ para todo } x \in [0, 2\pi],$$

donde $\mathcal{S}_k(S_l; \cdot)$ es la $k-$ésima suma parcial de la serie de Fourier de la suma parcial $S_l := S_{l,n}$ dada en (3.33).

La siguiente proposición será usada en la demostración del Teorema de Kolmogórov que afirma la existencia de una función integrable en el sentido de Lebesgue cuya serie de Fourier diverge en todo punto, que será demostrado en el Teorema 3.1, abajo.

Proposición 3.17. *Existe una sucesión de polinomios trigonométricos $\left(\varphi_n\right)_{n=2}^{+\infty}$ tal que para todo $n \in \{2, 3 \ldots\}$, cumple las siguientes propiedades:*

A) $\varphi_n \geq 0$, *para todo* $x \in [0, 2\pi]$.

B) $\displaystyle\int_{[0,2\pi]} \varphi_n d\lambda = \pi$, *donde λ es la medida de Lebesgue en la recta.*

C) Sea $v_n \in \mathbb{Z}^+$ el orden del polinomio trigonométrico φ_n. Entonces, es posible determinar números $Q_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_n \in \mathbb{Z}^+$ y un conjunto $F_n \subset [0, 2\pi]$ tales que

   C.i) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} Q_n = +\infty$,

   C.ii) $F_2 \subset \cdots \subset \displaystyle\bigcup_{p=2}^{+\infty} F_p = [0, 2\pi]$,

   C.iii) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty$ *y*

   C.iv) para todo $x \in F_n$, existe un $k := k_x \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\lambda_n \leq k < v_n$ y

$$\mathcal{S}_k(\varphi_n; x) > Q_n,$$

   donde $\mathcal{S}_k(\varphi_n, \cdot)$, es la $k-$ésima suma parcial de la serie de Fourier de la función φ_n.

Demostración. Sean $n \in \{2, 3, \ldots\}$ y $x \in [0, 2\pi]$. Se consideran los polinomios trigonométricos construidos y estudiados en la Sección 3.1. Más precisamente, haciendo uso de la Definición 3.1, se tiene que

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\sigma_{m_j}(A_j - x), \tag{3.166}$$

donde para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$, $m_j := m_{j,n}$ y $A_j := A_{j,n}$ están dados en (3.5) y (3.6), respectivamente y para todo $r \in \mathbb{Z}^+$, la función σ_r está dada en (3.1). Usando las Proposiciones 3.3 y 3.6, se observa que

$$\varphi(x) \geq 0$$

y

$$\int_{[0,2\pi]} \varphi(x) d\lambda = \pi,$$

donde λ es la medida de Lebesgue en la recta. Así, se satisfacen las condiciones A) y B). Ahora, de (3.166) y utilizando la Proposición 3.7, se sigue que

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{l=0}^{m_n} a_l \cos\big(lx - \lambda_l\big), \tag{3.167}$$

donde para todo $l \in \{1, \ldots, k\}$, $a_l := a_{l,n}$ y $\lambda_l := \lambda_{l,n}$ están dados en (3.28) y (3.29), respectivamente. De (3.167), se tiene que el orden de cada polinomio trigonométrico φ_n es m_n, se escribe $v_n := m_n \in \mathbb{Z}^+$.

A continuación, haciendo uso de la Notación 3.4, se toma los conjuntos F_n, dados en (3.152). Usando (3.153) y (3.154), se ve que

$$F_2 \subset \cdots \subset \bigcup_{q=2}^{+\infty} F_q = [0, 2\pi],$$

lo cual satisface el ítem C.ii).

Ahora, de (3.169) y haciendo uso de la Proposición 3.15, se sigue que para para todo $x \in F_n$, es posible determinar un $k := k_x$, con $m_p \leq k < \frac{1}{2}m_{p+1}$, para algún $p \in \{0, \ldots, n-1\}$, tal que

$$S_k(x) > C_3 \log(n), \tag{3.168}$$

donde $S_k := S_{k,n}$ es la suma parcial dada en (3.33).

Por medio del Corolario 3.1 y el Lema B.5, se sigue que la $k-$ésima suma parcial

$\mathcal{S}_k(\varphi_n;\cdot)$, de la serie de Fourier de la función φ_n satisface

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_k(\varphi_n;x) &= \mathcal{S}_k\left(S_k + \sum_{l=k+1}^{m_n} a_l\cos(lx+\lambda_l)\,;\,x\right)\\
&= \mathcal{S}_k(S_k;x) + \mathcal{S}_k\left(\sum_{l=k+1}^{m_n} a_l\cos(lx+\lambda_l);x\right)\\
&= \mathcal{S}_k(S_k;x) + \mathcal{S}_k\sum_{l=k+1}^{m_n} a_l\,\mathcal{S}_k\big(\cos(lx+\lambda_l);x\big)\\
&= \mathcal{S}_k(S_k;x) + \mathcal{S}_k\sum_{l=k+1}^{m_n} a_l\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(ly+\lambda_l)D_k(x-y)dy\\
&= S_k(x),
\end{aligned} \tag{3.169}$$

donde $D_k(\cdot)$, es el Núcleo de Dirichlet de orden k (ver Definición 2.11 y Lema 2.12 de la página 69 de [12]).

De (3.168) y (3.169), se sigue que

$$\mathcal{S}(\varphi_n;x) > C_3\log(n),$$

donde $C_3>0$ es la constante (absoluta) de la Proposición 3.15 y $\log:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ es la función logaritmo natural.

Se escribe, $Q_n := C_3\log(n)$ y $\lambda_n := n^2$, se observa que $\lambda_n \leq k < v_n$ y además

$$\lim_{n\to+\infty} Q_n = +\infty$$

y

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty,$$

lo cual cumple con los ítems C.i) y C.iii). Adicionalmente, se contempla que

$$\mathcal{S}_k(\varphi_n;x) > Q_n,$$

que corresponde a lo expuesto en el ítem C.iv). □

Teorema 3.1 (Teorema de Kolmogórov)**.** *Existe una función $\Phi\in L^1([0,2\pi])$, tal que su serie de Fourier diverge en todas partes.*

Demostración. Se considera la sucesión estrictamente creciente de números enteros $\big(n_\alpha\big)_{\alpha\in\mathbb{N}}$, tal que $n_0 \geq 2$ y para todo $\alpha \in \{1,2,\ldots\}$, se cumplen las siguientes propiedades:

K-i) $\lambda_{n_\alpha} > \upsilon_{n_{\alpha-1}}$,

K-ii) $Q_{n_\alpha} > 4Q_{n_{\alpha-1}}$ y

K-iii) $\sqrt{Q_{n_\alpha}} > \upsilon_{n_{\alpha-1}}$,

donde para todo $s \in \{2,3,\ldots\}$, λ_s, υ_s y Q_s son los índices de la Proposición 3.17.

Para todo $m \in \mathbb{Z}^+$, se escribe $M_{n_m} := \dfrac{1}{\sqrt{Q_{n_m}}}$ y se define la función $\Phi : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, dada por

$$\Phi(x) := \sum_{m=1}^{+\infty} M_{n_m}\varphi_{n_m}(x), \text{ para todo } x \in [0,2\pi], \tag{3.170}$$

donde para todo $s \in \{2,3,\ldots\}$, la función φ_s está dada en (3.1) y reescrita en la Proposición 3.7.

De K-ii), se ve que $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} M_{n_m} < +\infty$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{+\infty} M_{n_m} &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{Q_{n_m}}} \\
&\leq \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{Q_{n_{m-1}}}} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{Q_{n_l}}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{Q_{n_0}}} + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{Q_{n_l}}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{Q_{n_0}}} + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{+\infty} M_{n_l},
\end{aligned}$$

de donde

$$\sum_{m=1}^{+\infty} M_{n_m} \leq \frac{1}{2\sqrt{Q_{n_0}}} < +\infty. \tag{3.171}$$

Haciendo uso de la Proposición 3.3, se tiene que para todo $m \in \{1,2,\ldots\}$, la función φ_{n_m} es no negativa, por tanto, la función Φ, dada en (3.170), es no negativa. Además, usando la Proposición 3.6, el Teorema de Convergencia Monótona (Teorema 4.6 de la página 31 de [6]) y (3.171), se sigue que

$$\begin{aligned}\int_{[0,2\pi]} \big|\Phi\big| d\lambda &= \int_{[0,2\pi]} \Phi d\lambda \\ &= \int_{[0,2\pi]} \sum_{m=1}^{+\infty} M_{n_m} \varphi_{n_m} d\lambda \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} M_{n_m} \int_{[0,2\pi]} \varphi_{n_m} d\lambda \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} M_{n_m} \big(\pi\big) \\ &= \pi \sum_{m=1}^{+\infty} M_{n_m} < +\infty. \end{aligned} \tag{3.172}$$

De (3.172), se tiene que $\Phi \in \mathcal{L}([0, 2\pi])$.

A continuación, sean $r \in \{1, 2, \ldots\}$ y $x \in F_{n_r}$, donde para todo $s \in \mathbb{Z}^+$, F_s está dado en (3.152). Haciendo uso del ítem C) de la Proposición 3.17, se tiene que existe $k := k_x \in \mathbb{Z}^+$, tal que

$$\lambda_{n_r} \leq k < \upsilon_{n_r} \tag{3.173}$$

y adicionalmente

$$\mathcal{S}_k(\varphi_{n_r}; x) > Q_{n_r}. \tag{3.174}$$

Utilizando de la Definición 2.11 y el Lema 2.12 de la página 69 de [12] y nuevamente el Teorema de Convergencia Monótona (Teorema 4.6 de la página 31 de [6]), se sigue que

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_k(\Phi; x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} \Phi(y) D_k(x-y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} M_{n_m} \varphi_{n_m}(y) D_k(x-y) dy \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} M_{n_m} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{n_m}(y) D_k(x-y) dy \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} M_{n_m} \mathcal{S}_k(\varphi_{n_m}; x) \\ &= \sum_{m=1}^{r-1} M_{n_m} \mathcal{S}_k(\varphi_{n_m}; x) + M_{n_r} \mathcal{S}_k(\varphi_{n_r}; x) + \sum_{m=r+1}^{+\infty} M_{n_m} \mathcal{S}_k(\varphi_{n_m}; x). \end{aligned} \tag{3.175}$$

A partir del ítem K-i) y de (3.173), se sabe que $k \geq \lambda_{n_r} > v_{n_{r-1}}$, lo cual indica que k es mayor que el orden del polinomio trigonométrico φ_{n_m}, para todo $m \in \{1, \ldots, r-1\}$. Luego, haciendo uso de las Proposiciones 3.16 y 3.3, se observa que para todo $m \in \{1, \ldots, r-1\}$,

$$\mathcal{S}_k(\varphi_{n_m}; x) = \varphi_{n_m}(x) \geq 0. \tag{3.176}$$

Por otro lado, haciendo uso del Lema 2.23 de la página 95 de [12] y tomando en cuenta las Proposiciones 3.3 y 3.6, se sigue que para todo $m \in \{r+1, \ldots\}$,

$$\begin{aligned} \big|\mathcal{S}_k(\varphi_{n_m}; x)\big| &\leq \frac{2k+1}{\pi} \int_0^{2\pi} \big|\varphi_{n_m}(x)\big| dx \\ &= \frac{2k+1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{n_m}(x) dx \\ &= \frac{2k+1}{\pi} \big(\pi\big) \\ &= 2k+1. \end{aligned} \tag{3.177}$$

Con la ayuda de (3.177), (3.173) y de los ítem K-ii) y K-iii), se observa que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=r+1}^{+\infty} M_{n_m} \mathcal{S}_k(\varphi_{n_m}; x) \right| &\leq \sum_{m=r+1}^{+\infty} M_{n_m} \big|\mathcal{S}_k(\varphi_{n_m}; x)\big| \\ &\leq \sum_{m=r+1}^{+\infty} M_{n_m} \big(2k+1\big) \\ &= \big(2k+1\big) \sum_{m=r+1}^{+\infty} M_{n_m} \\ &= \big(2k+1\big) \sum_{m=r+1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{Q_{n_m}}} \\ &< \big(2v_{n_r}+1\big) \sum_{m=r+1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{Q_{n_m}}} \\ &< 3v_{n_r} \sum_{m=r+1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{Q_{n_m}}} \\ &< 3\sqrt{Q_{n_{r+1}}} \sum_{m=r+1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{Q_{n_m}}} \\ &< 3\sqrt{Q_{n_{r+1}}} \left(\frac{1}{\sqrt{Q_{n_{r+1}}}} + \frac{1}{\sqrt{Q_{n_{r+2}}}} + \frac{1}{\sqrt{Q_{n_{r+3}}}} + \cdots \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 3\left(1 + \frac{\sqrt{Q_{n_{r+1}}}}{\sqrt{Q_{n_{r+2}}}} + \frac{\sqrt{Q_{n_{r+1}}}}{\sqrt{Q_{n_{r+3}}}} + \frac{\sqrt{Q_{n_{r+1}}}}{\sqrt{Q_{n_{r+4}}}} + \cdots\right)\\
&< 3\left(1 + \frac{\sqrt{Q_{n_{r+2}}}}{2\sqrt{Q_{n_{r+2}}}} + \frac{\sqrt{Q_{n_{r+2}}}}{2\sqrt{Q_{n_{r+3}}}} + \frac{\sqrt{Q_{n_{r+2}}}}{2\sqrt{Q_{n_{r+4}}}} + \cdots\right)\\
&= 3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{Q_{n_{r+2}}}}{2\sqrt{Q_{n_{r+3}}}} + \frac{\sqrt{Q_{n_{r+2}}}}{2\sqrt{Q_{n_{r+4}}}} + \cdots\right)\\
&< 3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{Q_{n_{r+3}}}}{4\sqrt{Q_{n_{r+3}}}} + \frac{\sqrt{Q_{n_{r+3}}}}{4\sqrt{Q_{n_{r+4}}}} + \cdots\right)\\
&= 3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{Q_{n_{r+3}}}}{4\sqrt{Q_{n_{r+4}}}} + \cdots\right)\\
&< 3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{Q_{n_{r+4}}}}{8\sqrt{Q_{n_{r+4}}}} + \cdots\right)\\
&< 3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)\\
&\ \vdots\\
&< 3\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j}\\
&= 3\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\\
&= 6. \qquad (3.178)
\end{aligned}
$$

De (3.175), (3.176), (3.174) y (3.178), se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_k(\Phi; x) &> M_{n_r} Q_{n_r} - 6\\
&= \frac{1}{\sqrt{Q_{n_r}}} Q_{n_r} - 6\\
&= \sqrt{Q_{n_r}} - 6. \qquad (3.179)
\end{aligned}
$$

Como cada $z \in [0, 2\pi]$ pertenece a todos los E_{n_r}, para todo para algún $r \in \{1, 2, \ldots\}$, suficientemente grande, de (3.179) y usando la Proposición 3.17, se concluye que la serie de Fourier $\mathcal{S}(\Phi; z)$ diverge en todo punto, lo cual muestra el resultado. $\square$

APÉNDICE A

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

"... an author never does more damage to his readers
than when he hides a difficulty".
Évariste Galois (1908)

Existe un sinnúmero de identidades trigonométricas, que pueden ser utilizadas para la simplificación y resolución de diferentes problemas. A continuación se enuncia y se demuestra algunas de estas identidades que fueron imprescindibles para el presente trabajo. Como punto de partida se asume que para todo $x,\, y \in \mathbb{R}$

- $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1,$
- $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y),$
- $\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) - \cos(x)\operatorname{sen}(y),$
- $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) - \cos(x)\operatorname{sen}(y),$
- $\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y).$

Identidad A.1. *Para todo $x,\, y \in \mathbb{R}$, se tiene que*

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Demostración. Sean $x,\, y \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\cos(x) - \cos(y) &= \cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right)\\
&= \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\\
&\quad - \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\\
&= -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right).
\end{aligned}$$

□

Identidad A.2. *Para todo x, $y \in \mathbb{R}$, se tiene que*

$$\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Demostración. Sean x, $y \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) &= \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right)\\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\\
&\quad - \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\\
&= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right).
\end{aligned}$$

□

Identidad A.3. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene*

$$1 - \cos(x) = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}x\right).$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
1 - \cos(x) &= 1 - \cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}x\right)\\
&= \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}x\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}x\right)\\
&= 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}x\right).
\end{aligned}$$

□

Identidad A.4. *Para todo $L \in \mathbb{Z}$ y para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene*

$$\cos(Lx) - \cos\big((L+1)x\big) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{2L+1}{2}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right).$$

Demostración. Sean $L \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R}$. Usando la Identidad A.1, se tiene que

$$\cos(Lx) - \cos\big((L+1)x\big) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{Lx + (L+1)x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{Lx - (L+1)x}{2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\,\mathrm{sen}\left(\frac{2L+1}{2}x\right)\,\mathrm{sen}\left(-\frac{1}{2}x\right)\\
&= 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{2L+1}{2}x\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}x\right).
\end{aligned}
$$

$\square$

Identidad A.5. *Para todo $L \in \mathbb{Z}$ y para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene*

$$\mathrm{sen}(Lx) - \mathrm{sen}\big((L+1)x\big) = -2\cos\left(\frac{2L+1}{2}x\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}x\right).$$

Demostración. Sean $L \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R}$. De la Identidad A.2, se ve que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sen}(Lx) - \mathrm{sen}\big((L+1)x\big) &= 2\cos\left(\frac{Lx+(L+1)x}{2}\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{Lx-(L+1)x}{2}\right)\\
&= 2\cos\left(\frac{2L+1}{2}x\right)\,\mathrm{sen}\left(-\frac{1}{2}x\right)\\
&= -2\cos\left(\frac{2L+1}{2}x\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}x\right).
\end{aligned}
$$

$\square$

Identidad A.6. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que*

$$\cos\big(\arctan(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

donde $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *es la función inversa de* $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$*.*

Demostración. Tomando $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, su función inversa se escribe $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Sea $x \in \mathbb{R}$. Como $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ es biyectiva, existe $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que

$$\tan(y) = x, \tag{A.1}$$

lo cual es equivalente a

$$\arctan(x) = y. \tag{A.2}$$

De (A.1) y tomando $\sec : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to [1, +\infty)$, se ve que

$$\sec^2(y) = \tan^2(y) + 1 = x^2 + 1,$$

y además
$$\cos^2(y) = \frac{1}{\sec^2(y)} = \frac{1}{1+x^2}.$$
De (A.2) y usando el hecho que para todo $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos(t) > 0$, se concluye que
$$\cos\big(\arctan(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$\square$

Identidad A.7. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que*
$$\operatorname{sen}\big(\arctan(x)\big) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$
donde $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *es la función inversa de* $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$.

Demostración. Se considera la función $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, cuya función inversa es $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Sea $x \in \mathbb{R}$. De la Identidad A.6, se observa que
$$x = \tan\big(\arctan(x)\big) = \frac{\operatorname{sen}\big(\arctan(x)\big)}{\cos\big(\arctan(x)\big)} = \frac{\operatorname{sen}\big(\arctan(x)\big)}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}.$$
En consecuencia,
$$\operatorname{sen}\big(\arctan(x)\big) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$\square$

APÉNDICE B

RESULTADOS UTILIZADOS EN EL CAPÍTULO III

"So mathematical truth prefers simple words since
the language of truth is itself simple".
Tycho Brahe (1596)

En el presente apéndice se exponen algunas desigualdades que ayudan a comprender las demostraciones de ciertos resultados desarrollados en el Capítulo III.

Lema B.1. *Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que*

$$0 < \frac{2n+1}{4\pi n^3} + \frac{1}{4} < \frac{1}{2}. \tag{B.1}$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Se verifica de forma inmediata que

$$\frac{2n+1}{4\pi n^3} + \frac{1}{4} > 0. \tag{B.2}$$

Ahora, se observa que

$$\begin{aligned}\frac{2n+1}{4\pi n^3} + \frac{1}{4} < \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{2n+1}{4\pi n^3} - \frac{1}{4} < 0\\ &\Leftrightarrow \frac{2n+1-\pi n^3}{4\pi n^3} < 0\\ &\Leftrightarrow 2n+1-\pi n^3 < 0\\ &\Leftrightarrow \pi n^3 - 2n - 1 > 0. \end{aligned} \tag{B.3}$$

Se procede a demostrar la desigualdad dada en (B.3). Para ello, se realiza inducción sobre n. Así, en el caso $n = 1$, se ve que

$$\pi n^3 - 2n - 1 = \pi - 3 \approx 0.14159 > 0. \tag{B.4}$$

Ahora, se supone que la desigualdad (B.3) es válida para $n = k \in \mathbb{Z}^+$, esto es,

$$\textbf{HI: } \pi k^3 - 2k - 1 > 0. \tag{B.5}$$

De (B.4) y (B.5), se sigue que

$$\begin{aligned} \pi(k+1)^3 - 2(k+1) - 1 &= \pi(k^3 + 3k^3 + 3k + 1) - 2k - 2 - 1 \\ &= \pi k^3 + 3\pi k^3 + 3\pi k + \pi - 2k - 3 \\ &= (\pi k^3 - 2k - 1) + (3\pi k^3 + 3\pi k + 1) \\ &\quad + (\pi - 3) > 0. \end{aligned} \tag{B.6}$$

De (B.4)-(B.6), se concluye que para todo $m \in \mathbb{Z}^+$,

$$\pi m^3 - 2m - 1 > 0, \tag{B.7}$$

lo cual muestra el resultado. $\square$

Lema B.2. *Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que*

$$\frac{1}{n^3} + \frac{2n\pi}{2n+1} < \pi. \tag{B.8}$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Se observa que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^3} + \frac{2n\pi}{2n+1} < \pi &\Leftrightarrow \frac{1}{n^3} + \frac{2n\pi}{2n+1} - \pi < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2n + 1 + 2\pi n^4 - \pi n^3(2n+1)}{n^3(2n+1)} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2n + 1 - \pi n^3}{n^3(2n+1)} < 0 \\ &\Leftrightarrow 2n + 1 - \pi n^3 < 0 \\ &\Leftrightarrow \pi n^3 - 2n - 1 > 0. \end{aligned} \tag{B.9}$$

Usando (B.7), se tiene que la desigualdad (B.9) es verdadera, con lo cual se finaliza la demostración del lema. $\square$

Lema B.3. *Para todo $k \in \mathbb{Z}^+$ y para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que*

$$\int_0^{2\pi} D_k(x-y)dy = 2\pi,$$

donde $D_k(\cdot)$, es el Núcleo de Dirichlet de orden k (ver Definición 2.11 y Lema 2.12 de la página 69 de [12]).

Demostración. Sean $k \in \mathbb{Z}^+$ y $x \in \mathbb{R}$. De la ecuación (2.134) de [12], se cumple que

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} D_k(x-y)dy &= \int_0^{2\pi} \left(1 + 2\sum_{j=1}^{k} \cos\big(j(x-y)\big)\right) dy \\
&= \int_0^{2\pi} dy + 2\sum_{j=1}^{k} \int_0^{2\pi} \cos\big(j(x-y)\big)dy \\
&= 2\pi + 2\sum_{j=1}^{k} \int_{jx}^{jx-2\pi j} \cos(t)\left(-\frac{dt}{j}\right) \\
&= 2\pi + 2\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}\int_{jx-2\pi j}^{jx} \cos(t)dt \\
&= 2\pi + 2\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}\left(\operatorname{sen}(t)\Big|_{jx-2\pi j}^{jx}\right) \\
&= 2\pi + 2\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}\Big(\operatorname{sen}(jx) - \operatorname{sen}(jx-2\pi j)\Big) \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

□

Lema B.4. *Para todo $k, l \in \mathbb{Z}^+$, con $k > l$, y para todo $x, w \in \mathbb{R}$, se tiene que*

$$\int_0^{2\pi} \cos(ly+w)D_k(x-y)dy = 2\pi\cos(lx+w),$$

donde $D_k(\cdot)$ es el Núcleo de Dirichlet de orden k (ver Definición 2.11 y Lema 2.12 de la página 69 de [12]).

Demostración. Sean $k, l \in \mathbb{Z}^+$, con $k > l$. Sean $x, w \in \mathbb{R}$. Haciendo uso de la ecuación (2.134) de [12], se ve que

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos(ly+w)D_k(x-y)dy &= \int_0^{2\pi} \cos(ly+w)\left(1 + 2\sum_{j=1}^{k} \cos\big(j(x-y)\big)\right) dy \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(ly+w)dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2\sum_{j=1}^{k}\int_0^{2\pi}\cos(ly+w)\cos\big(j(x-y)\big)dy\\
&= \frac{\operatorname{sen}(ly+w)}{l}\bigg|_0^{2\pi}\\
&+ 2\sum_{j=1}^{k}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\Big(\cos(ly+w-jx+jy)\\
&+ \cos(ly+w+jx-jy)\Big)dy\\
&= \frac{1}{l}\big(\operatorname{sen}(2\pi l+w)-\operatorname{sen}(w)\big)\\
&+ \sum_{j=1}^{k}\int_0^{2\pi}\cos\big((l+j)y+w-jx\big)dy\\
&+ \sum_{j=1}^{k}\int_0^{2\pi}\cos\big((l-j)y+w+jx\big)dy\\
&= \sum_{j=1}^{k}\int_0^{2\pi}\cos\big((l+j)y+w-jx\big)dy\\
&+ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{k}\int_0^{2\pi}\cos\big((l-j)y+w+jx\big)dy\\
&+ \int_0^{2\pi}\cos\big(w+lx\big)dy\\
&= \sum_{j=1}^{k}\frac{\operatorname{sen}\big((l+j)y+w-jx\big)}{l+j}\bigg|_0^{2\pi}\\
&+ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{k}\frac{\operatorname{sen}\big((l-j)y+w-jx\big)}{l-j}\bigg|_0^{2\pi}\\
&+ \cos\big(lx+w\big)\int_0^{2\pi}dy\\
&= \sum_{j=1}^{k}\frac{\operatorname{sen}\big(2\pi(l+j)+w-jx\big)-\operatorname{sen}\big(w-jx\big)}{l+j}\\
&+ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{k}\frac{\operatorname{sen}\big(2\pi(l-j)+w+jx\big)-\operatorname{sen}\big(w+jx\big)}{l-j}\\
&+ 2\pi\cos\big(lx+w\big)\\
&= 2\pi\cos\big(lx+w\big).
\end{aligned}
$$

□

Lema B.5. *Para todo $k, l \in \mathbb{Z}^+$, con $k < l$, y para todo $x, w \in \mathbb{R}$, se tiene que*

$$\int_0^{2\pi} \cos(ly + w) D_k(x - y) dy = 0,$$

donde $D_k(\cdot)$ es el Núcleo de Dirichlet de orden k (ver Definición 2.11 y Lema 2.12 de la página 69 de [12]).

Demostración. Se procede de manera similar a lo realizado en la demostración del Lema B.4 $\square$

APÉNDICE C

EQUIDISTRIBUCIÓN Y CRITERIO DE WEYL

"In these days the angel of Topology and the devil of Abstract Algebra figh for the soul of each individual mathematical domain".
Hermann Weyl (1939)

En el presente apéndice se exponen las ideas básicas de una sucesión real *equidistribuida* o *uniformamente distribuida módulo 1.* Además, se enuncia un teorema muy interesante conocido como el Criterio de Weyl, en honor a Hermann Weyl quien lo formuló por primera vez (ver [19]), el cual caracteriza a este tipo de sucesiones. Luego, se enuncia un corolario que será de utilidad en la prueba de la Proposición 3.12.

Las referencias principales de este apéndice son [10] y [11], también puede encontrarse información referente al tema en [20], donde se realiza un enfoque de las sucesiones equidistribuidas partiendo del Análisis de Fourier. Las demostraciones de los resultados expuestos aquí pueden ser encontradas en las referencias antes mencionadas.

Antes de definir una sucesión equidistribuida, se empieza con la definición de las funciones parte entera y parte fraccionaria.

Definición C.1. *La función parte entera* $[\![\,\cdot\,]\!]:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ *está definida por*

$$\begin{aligned} [\![\,\cdot\,]\!]:\mathbb{R} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto [\![\,x\,]\!] := \max\{n\in\mathbb{Z};\, n\le x\}. \end{aligned}$$

Definición C.2. *La función parte fraccionaria* $\{\cdot\}:\mathbb{R}\to[0,1)$ *esta definida por*

$$\begin{aligned} \{\cdot\}:\mathbb{R} &\to [0,1) \\ x &\mapsto \{x\} := x-[\![\,x\,]\!]. \end{aligned}$$

Definición C.3 ([10])**.** *Se dice que la sucesión real* $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ *es equidistribuida o* *uniformemente distribuida módulo 1 si para todo* α, $\beta \in \mathbb{R}$, *tales que* $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, *se tiene que*

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \Big| \{ \{u_1\}, \ldots, \{u_N\} \} \cap (\alpha, \beta) \Big| = \beta - \alpha > 0,$$

donde, $\{\cdot\} : \mathbb{R} \to [0, 1)$, *es la función parte fraccionaria.*

Teorema C.1 (Criterio de Weyl ([10])). *Sea* $\big(u_n\big)_{n=1}^{+\infty}$ *una sucesión real. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. $\big(u_n\big)_{n=1}^{+\infty}$ *es una sucesión equidistribuida.*

2. *Para todo* $k \in \mathbb{Z}$, *se tiene que*

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k u_n} = 0.$$

3. *Para todo* $f \in \mathfrak{R}([0, 1])$, *se tiene que*

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{u_n\}) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Corolario C.1. *Para todo* $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, *la sucesión real* $\big(v_n\big)_{n=1}^{+\infty}$, *donde para todo* $n \in \mathbb{Z}^+$, $v_n = n\,\omega$ *es una sucesión equidistribuida.*

Corolario C.2. *Para todo* $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, *la sucesión real* $\big(t_k\big)_{k=0}^{+\infty}$, *donde para todo* $k \in \mathbb{N}$, $t_k = (2k + 1)\,\omega$ *es una sucesión equidistribuida.*

APÉNDICE D

SISTEMA COMPLETO DE RESIDUOS MÓDULO h

"Mathematics is the queen of the sciences and Number Theory is the queen of mathematics. She often condescends to render service to astronomy and other natural sciences, but in all relations she is entitled to the first rank".
Carl Friedrich Gauss (1856)

En el presente apéndice, se presenta la noción de un conjunto llamado Sistema Completo de residuos módulo h, con $h \in \{2, 3, \ldots\}$, el cual como se menciona en [17], juega un rol interesante en áreas de la Matemática como la Teoría de Números y Álgebra Abstracta. Se exponen además algunas propiedades sobre estos conjuntos que serán de utilidad en las demostraciones de los resultados de la Sección 3.4, más precisamente, en la prueba de la Proposición 3.12.

La referencia principal de este apéndice es [17], en donde se puede encontrar bibliografía que permite profundizar este tipo de conceptos. Además, las demostraciones de los resultados que se exponen este apéndice pueden ser encontradas en [17].

Se da comienzo con la definición de Sistema Completo de residuos módulo h, con $h \in \{2, 3, \ldots\}$.

Definición D.1. *Sean $h \in \{2, 3, \ldots\}$, $R = \{a_0, a_1, \ldots, a_{h-1}\} \subset \mathbb{Z}$ y $R(h) = \{0, 1, \ldots, h-1\}$. Se dice que R es un Sistema Completo de residuos módulo h, si la función $f : R \to R(h)$, definida por*

$$\begin{aligned} f : R &\to R(h) \\ a_i &\mapsto f(a_i) := j, \ \textit{con } a_i \equiv j \operatorname{mód} (h) \end{aligned}$$

es inyectiva.

Lema D.1. *Sean a, b, k, $m \in \mathbb{Z}$. Si $\gcd(k, m) = d$, entonces $ka \equiv kb \mod (m)$ si y solo si $a \equiv b \mod \left(\frac{m}{d}\right)$.*

Corolario D.1. *Sean a, b, k, $m \in \mathbb{Z}$. Si $\gcd(k, m) = 1$, entonces $ka \equiv kb \mod (m)$ si y solo si $a \equiv b \mod (m)$.*

Lema D.2. *Sean a, b, c, $m \in \mathbb{Z}$. Entonces $a \equiv b \mod (m)$, si y solo si $(a+c) \equiv (b+c) \mod (m)$.*

Teorema D.1. *Sean $h \in \{2, 3, \ldots\}$ y $p \in \mathbb{Z}$. Si $\{a_0, a_1, \ldots, a_{h-1}\} \subset \mathbb{Z}$, es un Sistema Completo de residuos módulo h, entonces $\{pa_0, pa_1, \ldots, pa_{h-1}\} \subset \mathbb{Z}$ es un Sistema Completo de residuos módulo h si y solo si $\gcd(p, h) = 1$.*

Teorema D.2. *Sean $h \in \{2, 3, \ldots\}$ y p, $l \in \mathbb{Z}$. Si $\{a_0, a_1, \ldots, a_{h-1}\} \subset \mathbb{Z}$, es un Sistema Completo de residuos módulo h, entonces $\{pa_0+l, pa_1+l, \ldots, pa_{h-1}+l\} \subset \mathbb{Z}$ y $\{p(a_0+l), p(a_1+l), \ldots, p(a_{h-1}+l)\} \subset \mathbb{Z}$ son Sistemas Completos de residuos módulo h si y solo si $\gcd(p, h) = 1$.*

BIBLIOGRAFÍA

[1] Álvarez-Samaniego B. Y. (2012). *Ecuaciones de evolución no-lineales y dinámica de fluidos*. En Memorias de la "I Semana de Ciencia: Matemática-Física-Química" (pp. 43-60). Quito, Ecuador: Editorial Universitaria, UCE.

[2] Álvarez-Samaniego B. Y. (2015). *Problema de Cauchy para una ecuación no lineal, no local, proveniente de la Dinámica de Fluidos*. En Memorias de la "I Escuela de Verano en Matemáticas y Física" (pp. 47-90). Quito, Ecuador: Editorial Universitaria, UCE.

[3] Álvarez-Samaniego W. P., Álvarez-Samaniego B. Y., Moya-Álvarez D. (2013). *A physical interpretation of the Planck Constant*. Quimica Central, **3**(2), 03-10.

[4] Álvarez-Samaniego W. P., Álvarez-Samaniego B. Y., Moya-Álvarez D. (2017). *Linearized Einstein´s field equations*. Matemática: Una Publicación de FCNM-ESPOL, **15**(2), 48-54.

[5] Álvarez-Samaniego W. P. (2012). *Simetría Molecular y Química Cuántica*. En Memorias de la "I Semana de Ciencia: Matemática-Física-Química" (pp. 22-41). Quito, Ecuador: Editorial Universitaria, UCE.

[6] Bartle R. G. (1995). *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. USA: John Wiley & Sons, Inc.

[7] Bary N. K. (1964). *A Treatise on Trigonometric Series* (Vol 1). New york, USA: The Macmillan Company.

[8] Chen Y. M. (1963). *On Kolmogoroff's divergente Fourier Series*. Archiv der Mathematik, **114**(1), 116-119.

[9] Duoandikoetxea J. (2007). *200 años de convergencia de las series de Fourier*. La Gaceta de la RSME **10.3** , 651-688.

[10] Hannigan-Daley B. *Equidistribution and Weyl's criterion*. Canada: University of Toronto.

[11] Kuipers L. y Neiderreiter H. (1974) *Uniform Distribution of Sequences*. USA: John Wiley & Sons, Inc.

[12] Lozano Erazo E. P. (2017). *Construcción pormenorizada de la función de Kolmogórov cuya serie de Fourier diverge en casi todas partes* (Tesis de Matemática). Quito, Ecuador.

[13] Iório Júnior R. y De Magalhães V. (1988). *Equações Diferencias Parcias: Uma Introdução*. Rio de Janeiro, Brasil: Projeto Euclides, IMPA.

[14] Kolmogoroff A. (1923). *Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout*. Fundamenta Mathematicae, 4, 324-328.

[15] Kolmogoroff A. (1926). *Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout.* C. R. Acad. Sci. Paris **183** , 1327-1328.

[16] Lages Lima E. (1992). *Curso de Análise* (Séptima Edición, Vol. 1). Rio de Janeiro, Brasil: Projeto Euclides, IMPA.

[17] Paparella P. (2013). *Complete Residue System: A Primer and an Application.* Advances in Algebra, **6**(4), 21-25. `arXiv: 1206.0486`

[18] Ul'yanov P. L. (1983). *A. N. Kolmogorov and Divergent Fourier Series.* Uspekhi Mat. Nauk, **38**(4), 51–90.

[19] Weyl H. (1916). *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins [On the distribution of numbers modulo one]* Math. Ann. (in German) **77**(3), 313–352.

[20] Zygmund A. (1959). *Trigonometric Series* (Third edition, Volumes I and II). United Kingdom: Cambridge University Press.

[21] Zygmund A. (1935). *Trigonometrical Series.* Warsaw-Lwow.