Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Análisis Funcional
Examen Final (I-2025)

Profesor: Oscar Guillermo Riaño Castañeda
Integrantes: Andrés David Cadena Simons, Jairo Sebastián Niño Castro, Iván Felipe Salamanca Medina
Fecha: 22 de Julio del 2025

0.1 Operadores Compactos

Problema 1. Dado $u \in L^2((0,1))$, definimos el operador $T : L^2((0,1)) \to L^2((0,1))$ por

$$Tu(x) = \int_0^x tu(t)\, dt$$

(a) Demuestre que $T \in \mathcal{K}(L^2((0,1)))$.

(b) Determine $EV(T)$ y $\sigma(T)$.

(c) ¿Se puede escribir explícitamente $(T - \lambda I)^{-1}$ cuando $\lambda \in \rho(T)$?

(d) Encuentre $T^\star$.

Demostración. (a) Por simplicidad, denotaremos $\|\cdot\|_{L^2((0,1))} = \|\cdot\|_2$. Veamos que T es acotado. Sea $u \in L^2((0,1))$, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\|Tu\|_2 &= \left(\int_0^1 \left| \int_0^x tu(t)\, dt \right|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\le \left(\int_0^1 \left(\int_0^x |t||u(t)|\, dt \right)^2 dx \right)^{1/2} \\
&\le \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |t||u(t)|\, dt \right)^2 dx \right)^{1/2} \\
&= \int_0^1 |t||u(t)|\, dt \\
&\le \left(\int_0^1 |t|^2\, dt \right)^{1/2} \|u\|_2 \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} \|u\|_2 ,
\end{aligned}$$

probando así que T es acotado. Para probar que T es compacto, usamos el siguiente resultado.

Teorema 0.1. (Kolmogorov. Riesz-Frechet). Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto acotado de $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$. Para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $h \in \mathbb{R}^n$, sea $\tau_h f(x) = f(x+h)$. Asuma que

$$\lim_{|h|\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0 \text{ uniformemente en } f \in \mathcal{F},$$

esto es, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$, entonces $\|\tau_h f - f\|_p < \varepsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Entonces la clausura de $\mathcal{F}\big|_\Omega$ es compacta en $L^p(\Omega)$, para cualquier $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con medida finita ($\mathcal{F}\big|_\Omega$ denota las restricciones a Ω de las funciones en $\mathcal{F}$).

Queremos ver que $\overline{T(B)}$ es compacto en $L^2((0,1))$, donde

$$B = \left\{ f \in L^2((0,1)) : \|f\|_2 \leq 1 \right\}.$$

Para aplicar el **Teorema 1**, tenemos que ver que

$$\lim_{|h|\to 0} \|\tau_h f - f\|_2 = 0,$$

para toda $f \in T(B)$. Sea $h \in \mathbb{R}$. Antes de realizar los cálculos, formalmente vemos a las funciones como extendidas a todo $\mathbb{R}$ por 0, es decir, dada $u \in L^2((0,1))$, consideramos

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus (0,1), \end{cases}$$

aunque en la práctica trabajaremos con u. Esta aclaración se hace, dado que, dependiendo del valor de h, la expresión

$$\tau_h Tu(x) = \int_0^{x+h} u(t)\, dt,$$

podría no tener sentido si, en principio, u está definida únicamente en $(0,1)$. Ahora, sí, procedemos con los cálculos: Sea $f \in T(B)$, es decir, existe $u \in B$, tal que $Tu = f$,

- Si $h \geq 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\tau_h f - f\|_2^2 &= \int_0^1 |\tau_h f(x) - f(x)|^2 \, dx \\
&= \int_0^1 |\tau_h Tu(x) - Tu(x)|^2 \, dx \\
&= \int_0^1 \left| \int_0^{x+h} tu(t)\, dt - \int_0^x tu(t)\, dt \right|^2 dx \\
&= \int_0^1 \left| \int_x^{x+h} tu(t)\, dt \right|^2 dx \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 \chi_{(x,x+h)}(t)|t||u(t)|\, dt \right)^2 dx,
\end{aligned}$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el hecho de que $u \in B$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \chi_{(x,x+h)}(t)|t||u(t)|\,dt &\leq \left(\sup_{t\in(0,1)} |t|\right)\int_0^1 \chi_{(x,x+h)}(t)|u(t)|\,dt \\
&\leq \left\|\chi_{(x,x+h)}\right\|_2 \|u\|_2 \\
&\leq \left(\int_0^1 |\chi_{(x,x+h)}(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_x^{x+h} dt\right)^{1/2} \\
&= h^{1/2} \\
&= |h|^{1/2},
\end{aligned}$$

de esta manera

$$\begin{aligned}
\|\tau_h f - f\|_2^2 &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 \chi_{(x,x+h)}(t)|t||u(t)|\,dt\right)^2 dx \\
&\leq \int_0^1 \left(|h|^{1/2}\right)^2 dx \\
&= |h|,
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\|\tau_h f - f\|_2 \leq |h|^{1/2}.$$

- Si $h \leq 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\tau_h f - f\|_2^2 &= \int_0^1 |\tau_h f(x) - f(x)|^2\,dx \\
&= \int_0^1 |\tau_h Tu(x) - Tu(x)|^2\,dx \\
&= \int_0^1 \left|\int_0^{x+h} tu(t)\,dt - \int_0^x tu(t)\,dt\right|^2 dx \\
&= \int_0^1 \left|\int_{x+h}^x tu(t)\,dt\right|^2 dx \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 \chi_{(x+h,x)}(t)|t||u(t)|\,dt\right)^2 dx,
\end{aligned}$$

nuevamente, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el hecho de que $u \in$

B, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \chi_{(x+h,x)}(t)|t||u(t)|\,dt &\leq \left(\sup_{t\in(0,1)} |t|\right)\int_0^1 \chi_{(x+h,x)}(t)|u(t)|\,dt \\
&\leq \left\|\chi_{(x+h,x)}\right\|_2 \|u\|_2 \\
&\leq \left(\int_0^1 |\chi_{(x+h,x)}(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{x+h}^{x} dt\right)^{1/2} \\
&= (-h)^{1/2} \\
&= |h|^{1/2},
\end{aligned}$$

de esta manera

$$\begin{aligned}
\|\tau_h f - f\|_2^2 &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 \chi_{(x+h,x)}(t)|t||u(t)|\,dt\right)^2 dx \\
&\leq \int_0^1 \left(|h|^{1/2}\right)^2 dx \\
&= |h|,
\end{aligned}$$

y por tanto,

$$\|\tau_h f - f\|_2 \leq |h|^{1/2}.$$

En cualquier caso, tenemos que $\|\tau_h f - f\|_2 \leq |h|^{1/2}$ para toda $f \in T(B)$, así

$$0 \leq \lim_{|h|\to 0} \|\tau_h f - f\|_2 \leq \lim_{|h|\to 0} |h|^{1/2} = 0,$$

para toda $f \in T(B)$. Así, el **Teorema 1** nos garantiza que $T(B)$ tiene clausura compacta en $L^2((0,1))$, es decir, $\overline{T(B)}$ es compacto en $L^2((0,1))$ y por tanto, T es un operador compacto.

(b) Como $T \in \mathcal{K}(L^2((0,1)))$, sabemos que $0 \in \sigma(T)$ y $\sigma(T)\setminus\{0\} = EV(T)\setminus\{0\}$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda \neq 0$. Primero note que, si $f \in L^2((0,1))$, entonces, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx \leq \|1\|_2 \|f\|_2 = \|f\|_2\,,$$

es decir, $f \in L^1((0,1))$, además, como $g(t) = t$ es continua y acotada en $(0,1)$, tenemos $tf(t) \in L^1((0,1))$. De esta manera, podemos aplicar el Teorema de Diferenciación de Lebesgue para afirmar que si $f \in L^2((0,1))$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} tf(t)\,dt = \frac{1}{2h}\left[\int_0^{x+h} tf(t)\,dt - \int_0^{x-h} tf(t)\,dt\right] = xf(x),$$

para casi todo $x \in (0,1)$, es decir, la función

$$Tf(x) = \int_0^x tf(t)\,dt,$$

es diferenciable en casi todo punto de $x \in (0,1)$ y, para los puntos donde esta sea diferenciable, vale que

$$\frac{d}{dx}(Tf(x)) = xf(x).$$

Sea $u \in L^2((0,1))$ tal que $Tu = \lambda u$, es decir

$$\int_0^x tu(t)\,dt = \lambda u(x),$$

Note que, en este caso, podemos extender continuamente u a $[0,1)$, definiendo

$$u(0) := \lim_{x\to 0^+} \int_0^x tu(t)\,dt = 0.$$

Por las observaciones que hicimos anteriormente, tenemos que si $Tu = \lambda u$, u es diferenciable en casi toda parte, de manera que es válido expresar el problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} xu(x) = \lambda u'(x) \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

cuya solución general de la EDO asociada está dada por

$$u(x) = Ce^{x^2/2\lambda},$$

donde $C \in \mathbb{R}$, de manera que, para que $u(0) = 0$, se debe tener que $C = 0$ y por tanto, $u = 0$. De esta manera, $\lambda \notin EV(T)$, es decir, $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \rho(T)$. Finalmente, si $\lambda = 0$, la ecuación $Tu = \lambda u$ se transforma en

$$\int_0^x tu(t)\,dt = 0,$$

nuevamente, como Tu es diferenciable en casi toda parte, tenemos que

$$xu(x) = 0,$$

para casi todo $x \in (0,1)$, pero esto quiere decir que $u(x) = 0$ para casi todo $x \in (0,1)$, es decir, $u = 0$ y así, $0 \notin EV(T)$. De esta manera $\sigma(T) = \{0\}$ y $EV(T) = \emptyset$.

(c) Sea $\lambda \in \rho(T)$, es decir, $\lambda \neq 0$. Sea $u \in L^2((0,1))$ y sea $f := (Tu - \lambda u)$, de manera que $u = (T - \lambda I)^{-1} f$. Definimos

$$v(x) = Tu(x) = \int_0^x tu(t)\,dt.$$

y nuevamente, podemos extender ν a $[0,1)$ de manera continua con $\nu(0) = 0$. Análogamente a lo hecho en el ítem anterior, tenemos que ν es diferenciable en casi toda parte y $\nu'(x) = xu(x)$ para casi todo $x \in (0,1)$, así, ν satisface el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} \nu - \dfrac{\lambda}{x}\nu' = f \\ \nu(0) = 0, \end{cases}$$

con $x \in (0,1)$. Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden, de manera que la única solución de el problema de valor inicial está dada por

$$\nu(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{\frac{x^2}{2\lambda}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2\lambda}} t f(t)\, dt,$$

Nuevamente, el Teorema de Diferenciación de Lebesgue nos garantiza que la función $e^{-\frac{t^2}{2\lambda}} t f(t) \in L^2((0,1))$ es diferenciable para casi todo $x \in (0,1)$, por tanto

$$\nu'(x) = xu(x) = -\frac{x}{\lambda^2} e^{\frac{x^2}{2\lambda}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2\lambda}} t f(t)\, dt - \frac{1}{\lambda} x f(x),$$

así, para $x \in (0,1)$, se tiene que

$$u(x) = -\frac{1}{\lambda^2} e^{\frac{x^2}{2\lambda}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2\lambda}} t f(t)\, dt - \frac{1}{\lambda} f(x),$$

de esta manera, para $f \in L^2((0,1))$ y $\lambda \neq 0$, tenemos que

$$(T - \lambda I)^{-1} f(x) = -\frac{1}{\lambda^2} e^{\frac{x^2}{2\lambda}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2\lambda}} t f(t)\, dt - \frac{1}{\lambda} f(x).$$

(d) Vamos a calcular $T^\star$. Como $L^2((0,1))$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx,$$

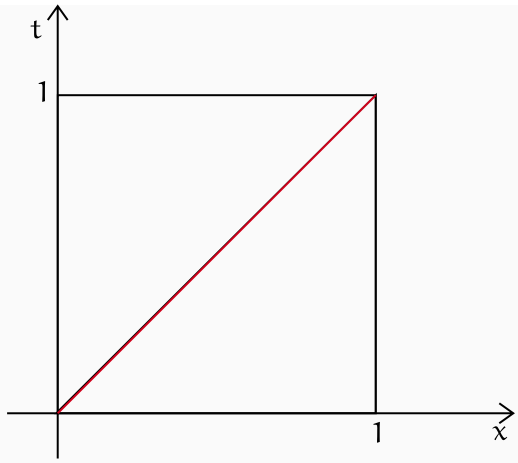
para toda $f, g \in L^2((0,1))$, queremos encontrar el operador $T^\star$ tal que

$$(Tf, g) = (f, T^\star g),$$

para toda $f, g \in L^2((0,1))$. Por definición, dadas $f, g \in L^2((0,1))$ tenemos

$$\begin{aligned} (Tf, g) &= \int_0^1 Tf(x) g(x)\, dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^x t f(t)\, dt \right) g(x)\, dx \end{aligned}$$

Usando el Teorema de Fubini para cambiar el orden de integración en la siguiente región



tenemos que

$$\begin{aligned}(Tf, g) &= \int_0^1 \int_0^x tf(t)g(x)\,dt\,dx \\ &= \int_0^1 \int_t^1 tf(t)g(x)\,dx\,dt \\ &= \int_0^1 f(t)\left(t\int_t^1 g(x)\,dx\right)\,dt\end{aligned}$$

de manera que, si definimos $Ag(t) = t\int_t^1 g(x)\,dx$, tenemos

$$(Tf, g) = \int_0^1 f(t)\left(t\int_t^1 g(x)\,dx\right)\,dt = (f, Ag),$$

es decir, $A = T^\star$, de esta manera, para $f \in L^2((0,1))$, tenemos que

$$T^\star f(x) = x\int_x^1 f(y)\,dy.$$

□

0.2 Ecuaciones Diferenciales en Espacios de Hilbert

Problema 2.
Consideraciones preliminares. Sea H un espacio de Hilbert separable y $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto. $C(J; H)$ denota el espacio de todas las funciones $u : J \to H$ que son continuas, es decir, para todo $t \in J$ se tiene que

$$\lim_{t' \to t} \|u(t) - u(t')\|_H = 0.$$

Por otro lado, denotamos por $C^1(J; H)$ el conjunto de las funciones $u \in C(J; H)$ para las cuales

$$u'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

existe para todo $t \in J$ (el límite anterior se toma en H) y $u' \in C(J;H)$. Luego, podemos definir $u \in C^2(J;H)$ como la clase de funciones u para las cuales $u' \in C^1(J;H)$. De manera recursiva se define $C^k(J;H)$ para enteros $k \geq 1$.
Note que, definiendo derivadas laterales, podemos considerar el espacio $C^k(J;H)$ donde J es un intervalo cerrado.

(a) (1.5 puntos) Sea $k \geq 0$ entero. Suponga que el intervalo J es cerrado y acotado. Muestre que $C^k(J;H)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{C^k} = \sum_{l=0}^{k} \sup_{t \in J} \|u^{(l)}(t)\|_H,$$

donde $u^{(l)}$ denota la l-ésima derivada de u, $l = 0, \ldots, k$.

(b) (1.5 puntos) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Dada una función $F \in C([a,b];H)$, muestre que podemos definir la integral

$$\int_a^b F(\tau)\, d\tau \in H$$

como límite de sumas de Riemann en H. Además, se sigue que

$$\left\| \int_a^b F(\tau)\, d\tau \right\|_H \leq \int_a^b \|F(\tau)\|_H\, d\tau.$$

Más precisamente, sea $Z = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$ dada por $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$. Muestre que las sumas de Riemann

$$S(F, Z) = \sum_{j=1}^{n} F(t_j^*)(t_j - t_{j-1}), \quad \text{donde } t_j^* \in [t_{j-1}, t_j],$$

convergen a un límite en H (la integral) cuando el tamaño de la partición

$$|Z| = \max_j |t_j - t_{j-1}|$$

tiende a cero.

(c) (4 puntos) Sea $A \in \mathcal{K}(H)$ un operador autoadjunto tal que $A \geq 0$ (es decir, $(Ax, x) \geq 0$ para todo $x \in H$). Sea $F \in C([0,\infty), H)$. Dado $u_0 \in H$, considere el problema de Cauchy para la ecuación del calor abstracta con término forzante

$$\begin{cases} u'(t) = -Au(t) + F(t), & t \in (0, \infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

(c.1) (2 puntos) Suponga que $F = 0$. Utilizando el cálculo funcional, que es válido por el teorema espectral (recuerde que A es compacto y autoadjunto), defina el operador e^{-tA} y muestre que

$$u(t) = e^{-tA} u_0, \quad t > 0,$$

es solución de la ecuación anterior con $F = 0$ y que $u \in C^1((0,\infty), H)$. ¿Es posible concluir que $u \in C^k((0,\infty), H)$ para todo $k \geq 1$ y además

$$\sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_H < \infty?$$

(c.2) (2 puntos) Muestre que en el caso general (con F no necesariamente nula), la función

$$u(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)A}F(\tau)\,d\tau,$$

pertenece a $C^1((0,\infty), H)$, es solución de la ecuación. ¿Bajo qué condiciones sobre F puede concluir que para un $k \geq 1$ entero dado, $u \in C^k((0,\infty), H)$ y además

$$\sup_{t\geq 0} \|u(t)\|_H < \infty?$$

Demostración. (a) Veamos que si tomamos $k \geq 0$ entero, entonces $C^k(J; H)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{C^k} = \sum_{l=0}^{k} \sup_{t\in J} \left\|u^{(l)}(t)\right\|_H,$$

Primero veamos que $\|\cdot\|_{C^k}$ en efecto es una norma bien definida.
Note que como J es ujn intervalo cerrado y acotado, entonces dada $u \in C^k(J; H)$ se tiene que u y todas sus derivadas alcanzan su máximo en J, por lo que en efecto la suma finita de los supremos de las derivadas de u se encuentra bien definida. Ahora verifiquemos las condiciones de norma, note que dadas $u, v \in C^k(J; H)$ y λ escalar se tiene que

$$\begin{aligned}
\|u+\lambda v\|_{C^k} &= \sum_{l=0}^{k} \sup_{t\in J} \left\|(u+\lambda v)^{(l)}(t)\right\|_H, \\
&= \sum_{l=0}^{k} \sup_{t\in J} \left\|u^{(l)}(t) + \lambda v^{(l)}(t)\right\|_H, \\
&\leq \sum_{l=0}^{k} \sup_{t\in J} \left\|u^{(l)}(t)\right\|_H + |\lambda| \left\|v^{(l)}(t)\right\|_H, \\
&\leq \sum_{l=0}^{k} \sup_{t\in J} \left\|u^{(l)}(t)\right\|_H + |\lambda| \sup_{t\in J} \left\|v^{(l)}(t)\right\|_H, \\
&\leq \sum_{l=0}^{k} \sup_{t\in J} \left\|u^{(l)}(t)\right\|_H + |\lambda| \sum_{l=0}^{k} \sup_{t\in J} \left\|v^{(l)}(t)\right\|_H, \\
&= \|u\|_{C^k} + |\lambda|\, \|v\|_{C^k}.
\end{aligned}$$

Por otro lado note que $u = 0$ sí y sólo si $\|u\|_H = 0$, lo que sucede si y sólo si el cociente $\dfrac{u(t+h)-u(t)}{h} = 0$ en H para todo t y h, lo que a su vez se da si y sólo si $u' = 0$, inductivamente se llega a que $u^{(l)} = 0$ para todo $0 \leq l \leq k$, lo que se cumple si y sólo si $\|u\|_{C^k} = 0$, lo que nos permite concluir que $\|\cdot\|_{C^k}$ en efecto es una norma bien definida.
Ahora veamos que el espacio antes mencionado es completo, es decir, dada $\{u_m\} \subset C^k(J : H)$ sucesión de Cauchy esta converge en $C^k(J; H)$.

Note que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$ entonces se satisface que

$$\|u_n - u_m\|_{C^k} \leq \epsilon.$$

Pero note que esto es lo mismo que

$$\|u_n - u_m\|_{C^k} = \sum_{l=0}^{k} \sup_{t \in J} \|u_n(t) - u_m(t)\|_H \leq \epsilon.$$

Lo que implica que para todo $t \in J$ y todo $0 \leq l \leq k$ se satisface que

$$\left\| u_n^{(l)}(t) - u_m^{(l)}(t) \right\|_H \leq \epsilon.$$

Pero como H es un espacio de Hilbert, sabemos que la sucesión $\{u_m^{(l)}(t)\} \subset H$ de Cauchy, converge a un $u^{(l)}(t)$ cuando $m \to \infty$.
Por practicidad, veamos que en efecto $u' = u^{(1)}$, las demás derivadas se pueden razonar de forma inductiva.
Note que como

$$\sup_{t \in J} \|u_m(t) - u(t)\|_H \leq \epsilon,$$

entonces $\{u_m\}$ converge uniformemente a u, por lo que podremos hacer el siguiente cálculo cambiando el orden de los límites

$$\begin{aligned} u'(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}, \\ &= \lim_{h \to 0} \lim_{m \to \infty} \frac{u_m(t+h) - u_m(t)}{h}, \\ &= \lim_{m \to \infty} \lim_{h \to 0} \frac{u_m(t+h) - u_m(t)}{h}, \\ &= \lim_{m \to \infty} u_m^{(1)}, \\ &= u^{(1)}(t). \end{aligned}$$

Luego $u_m^{(l)}(t) \to u^{(l)}(t)$ en H para todo $0 \leq l \leq k$ y para cada $t \in J$.
Veamos que esto implica convergencia en $C^k(J; H)$.
Note que dado $\epsilon > 0$ se puede tomar un $N > 0$ adecuado para el cual si tomamos

$n, m > N$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\|u_m - u\|_{C^k} &= \sum_{l=0}^{k} \sup_{t \in J} \left\| u_m^{(l)}(t) - u^{(l)}(t) \right\|_H, \\
&= \sum_{l=0}^{k} \sup_{t \in J} \lim_{n \to \infty} \left\| u_m^{(l)}(t) - u_n^{(l)}(t) \right\|_H, \\
&= \lim_{n \to \infty} \sum_{l=0}^{k} \sup_{t \in J} \left\| u_m^{(l)}(t) - u_n^{(l)}(t) \right\|_H, \\
&\leq \lim_{n \to \infty} \epsilon, \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir que $(C^k(J; H), \|\cdot\|_{C^k})$ es un espacio de Banach.

(b) Sean $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ y $\mathcal{Z}' = \{s_0, s_1, \cdots, s_m\}$ particiones del intervalo $[a, b]$, veamos que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $|\mathcal{Z}|, |\mathcal{Z}'| < N$, entonces

$$\left\| S(f, \mathcal{Z}) - S(f, \mathcal{Z}') \right\|_H < \epsilon.$$

Para ver esto suponga $\mathcal{Z}'' = \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}' = \{q_0, q_1, \cdots, q_l\}$, note que

$$\left\| S(f, \mathcal{Z}) - S(f, \mathcal{Z}') \right\|_H \leq \left\| S(f, \mathcal{Z}) - S(f, \mathcal{Z}'') \right\|_H + \left\| S(f, \mathcal{Z}'') - S(f, \mathcal{Z}') \right\|_H$$

Luego

$$\left\| S(f, \mathcal{Z}) - S(f, \mathcal{Z}'') \right\|_H = \left\| \sum_{j=1}^{n} F(t_j^*)(t_j - t_{j-1}) - \sum_{j=1}^{l} F(q_j^*)(q_j - q_{j-1}) \right\|_H,$$

Note que como $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Z}''$, entonces sabemos que existe r_j tal que

$$[t_{j-1}, t_j] = \bigcup_{i=0}^{r_j} [q_{j-1,i}, q_{j,i}] \qquad \text{con } q_{j,i} \in \mathcal{Z}''.$$

De lo que podemos computar que

$$F(t_j^*)(t_j - t_{j-1}) - \sum_{i=0}^{r_j} F(q_{j,i}^*)(q_{j,i} - q_{j-1,i}) = \sum_{i=0}^{r_j} (F(t_j^*) - F(q_{j,i}^*))(q_{j,i} - q_{j-1}, i),$$

además, recuerde que como F es uniformemente continua en $[a, b]$, dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $|t - q| < N$, entonces

$$\|F(t) - F(q)\|_H < \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Si suponemos que $|\mathcal{Z}''| < |\mathcal{Z}| < N$, entonces

$$
\begin{aligned}
\left\|S(f,\mathcal{Z}) - S(f,\mathcal{Z}'')\right\|_H &= \left\|\sum_{j=1}^{n} F(t_j^*)(t_j - t_{j-1}) - \sum_{j=1}^{l} F(q_j^*)(q_j - q_{j-1})\right\|_H , \\
&= \left\|\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{r_j} (F(t_j^*) - F(q_{j,i}^*))(q_{j,i} - q_{j-1,i})\right\|_H , \\
&\leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{r_j} (q_{j,i} - q_{j-1,i}) \left\|F(t_j^*) - F(q_{j,i}^*)\right\|_H , \\
&\leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}), \\
&\leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} (b-a) = \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Análogamente, si suponemos $|\mathcal{Z}''| < |\mathcal{Z}'| < N$ podemos asegurar que

$$\left\|S(f,\mathcal{Z}'') - S(f,\mathcal{Z}')\right\|_H \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Luego podemos asegurar que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $|\mathcal{Z}|, |\mathcal{Z}'| < N$, entonces

$$
\begin{aligned}
\left\|S(f,\mathcal{Z}) - S(f,\mathcal{Z}')\right\|_H &\leq \left\|S(f,\mathcal{Z}) - S(f,\mathcal{Z}'')\right\|_H + \left\|S(f,\mathcal{Z}'') - S(f,\mathcal{Z}')\right\|_H , \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}, \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}
$$

Lo que nos permite concluir que $\{S(f,\mathcal{Z})\} \subset H$ es una sucesión de Cauchy, luego como H es Hilbert (por ende completo) sabemos que converge a alguien que denotaremos $\int_a^b F(\tau)d\tau \in H$.
Para ver la desigualdad note que

$$
\begin{aligned}
\left\|\int_a^b F(\tau)\, d\tau\right\|_H &= \left\|\lim_{|\mathcal{Z}|\to 0} S(f,\mathcal{Z})\right\|, \\
&\leq \lim_{|Z|\to 0} \sum_{j=1}^{n} \|F(t^*)\|_H (t_j - t_{j-1}), \\
&\leq \int_a^b \|F(\tau)\|_H \, d\tau.
\end{aligned}
$$

(c.1) Veamos que $u(t) = e^{-tA}u_0$, $t > 0$ es solución de

$$
\begin{cases}
u'(t) = -Au(t) \\
u(0) = u_0
\end{cases}
$$

En primer lugar, como $A \geq 0$, se sigue que si $\lambda_n \in EV(A)$ con $v \neq 0$ vector propio asociado (Esto es, $v \neq 0$ y $A\, v = \lambda_n v$) entonces

$$0 \leq (Av, v) = (\lambda_n v, v) = \lambda n \|v\|^2$$

De modo que $\lambda_n \geq 0$.
Ahora, como H es de Hilbert, separable con $T \in K(H)$ y $T = T^{\star}$. Sea $\{\phi_n\}$ base de Hilbert de modo que

$$u(t) = e^{-tA} u_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (u_0, \phi_n) e^{-t\lambda_n} \phi_n$$

Queremos ver que

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} + Au(t) \right\|$$

Para ello, consideramos

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} + Au(t) \right\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (u_0, \phi_n) \left(\frac{e^{-(t+h)\lambda_n} - e^{-t\lambda_n}}{h} + \lambda_n e^{-t\lambda_n} \right) \phi_n \right\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |(u_0, \phi_n)|^2 \left| \frac{e^{-(t+h)\lambda_n} - e^{-t\lambda_n}}{h} + \lambda_n e^{-t\lambda_n} \right|^2,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene por Bessel-Parseval. Veamos que esta converge uniformemente.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{e^{-(t+h)\lambda_n} - e^{-t\lambda_n}}{h} + \lambda_n e^{-t\lambda_n} \right| &= \left| \frac{-\lambda_n}{h} \int_t^{t+h} e^{-\sigma\lambda_n} d\sigma + \lambda_n e^{-t\lambda_n} \right| \\
&\leq \left| \frac{\lambda_n}{h} \right| \left| \int_t^{t+h} e^{-\sigma\lambda_n} d\sigma \right| + |\lambda_n| \, e^{-t\lambda_n}.
\end{aligned}$$

Como $t > 0$, $\lambda_n \geq 0$, $-t\lambda_n \leq 0$. Así, $0 \leq e^{-t\lambda_n} \leq 1$. Ahora consideremos los siguientes casos:

✓ Si $h > 0$, tomando $\sigma \in [t, t+h]$ se sigue que

$$0 \leq e^{-\sigma\lambda_n} \leq e^{-t\lambda n} \leq 1.$$

✓ Si $h < 0$, con $|h|$ suficientemente pequeño tal que $t + h > 0$, tomando $\sigma \in [t + h, t]$ se sigue que

$$0 \leq e^{-\sigma\lambda_n} \leq e^{-(t+h)\lambda_n} \leq 1.$$

Así, en cualquier caso, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\lambda_n}{h}\right|\left|\int_t^{t+h} e^{-\sigma\lambda_n}\,d\sigma\right| + |\lambda_n| e^{-t\lambda_n} &\leq \left|\frac{\lambda_n}{h}\right|\left|\int_t^{t+h} d\sigma\right| + |\lambda_n| \\
&= \left|\frac{\lambda_n(t+h-t)}{h}\right| + |\lambda_n| \\
&= 2\lambda_n \\
&\leq 2\sup_{n\geq 1}\lambda_n.
\end{aligned}$$

De modo que

$$|(u_0,\phi_n)|^2 \left|\frac{e^{-(t+h)\lambda_n} - e^{-t\lambda_n}}{h} + \lambda_n e^{-t\lambda_n}\right|^2 \leq |(u_0,\phi_n)|^2 (2\sup_{n\geq 1}\lambda_n)^2, \tag{1}$$

y como $\sum_{n=1}^{\infty} |(u_0,\phi_n)|^2(2\sup_{n\geq 1}\lambda_n)^2$ converge, pues $\sum_{n=1}^{\infty} |(u_0,\phi_n)|^2 = \|u_0\|^2$, entonces por criterio M de Weierstrass,

$$\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} + Au(t)\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(u_0,\phi_n)|^2 \left|\frac{e^{-(t+h)\lambda_n} - e^{-t\lambda_n}}{h} + \lambda_n e^{-t\lambda_n}\right|^2,$$

converge uniformemente. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} + Au(t)\right\|^2 &= \lim_{h\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} |(u_0,\phi_n)|^2 \left|\frac{e^{-(t+h)\lambda_n} - e^{-t\lambda_n}}{h} + \lambda_n e^{-t\lambda_n}\right|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |(u_0,\phi_n)|^2 \left|\lim_{h\to 0}\frac{e^{-(t+h)\lambda_n} - e^{-t\lambda_n}}{h} + \lambda_n e^{-t\lambda_n}\right|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |(u_0,\phi_n)|^2 |-\lambda_n e^{-t\lambda_n} + \lambda_n e^{-t\lambda_n}|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Veamos ahora que $u(t)$ es continua. Para ello, mostremos que,

$$\lim_{t'\to t}\|u(t)-u(t')\| = 0.$$

Como

$$\begin{aligned}
\left\|u(t)-u(t')\right\|^2 &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}(\phi_n,u_0)(e^{-\lambda_n t} - e^{-\lambda_n t'})\phi_n\right\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |(\phi_n,u_0)|^2 |e^{-\lambda_n t} - e^{-\lambda_n t'}|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |(\phi_n,u_0)|^2 \left|\lambda_n e^{-\lambda_n \xi_n}|t-t'|\right|^2.
\end{aligned}$$

En donde en la última igualdad hemos usado teorema de valor medio, por lo que existe $\xi_n \in (t,t')$ (o $\xi_n \in (t',t)$ en el caso que $0 < t' < t$) tal que

$$|\lambda_n e^{-\lambda_n \xi_n}(t-t')| = |e^{-\lambda_n t} - e^{-\lambda_n t'}|.$$

Ahora, como $0 < \xi_n$ para todo n y $\lambda_n \geq 0$, se sigue entonces que

$$e^{-\lambda_n \xi_n} \leq 1.$$

De modo que

$$\begin{aligned}
\left\|u(t) - u(t')\right\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |(\phi_n, u_0)|^2 \left|\lambda_n e^{-\lambda_n \xi_n}|t-t'|\right|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |(\phi_n, u_0)|^2 |\lambda_n|t-t'||^2 \\
&= |t-t'|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |(\phi_n, u_0)\lambda_n|^2,
\end{aligned}$$

y como $\sum_{n=1}^{\infty} |(\phi_n, u_0)\lambda_n|^2$ converge, entonces

$$\left\|u(t) - u(t')\right\|^2 \leq |t-t'|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |(\phi_n, u_0)\lambda_n|^2 \xrightarrow{t\to t'} 0,$$

por lo que $u(t)$ es continua.

Finalmente, dado que

$$u'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

existe y $u'(t) = -Au(t)$, se sigue que como $u : (0,\infty) \to H$ es continua, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|t-t'| < \delta$ entonces $||u(t) - u(t')|| < \varepsilon$.

Como A es acotado, existe $M > 0$ tal que $||Au|| \leq M||u||$. Por lo tanto,

$$\left\|-A\, u(t) + A\, u(t')\right\| = \left\|A(u(t) - u(t')\right\| \leq M||u(t) - u(t')|| < M\varepsilon,$$

lo cual muestra que $u'(t) = -Au(t)$ es continuo.

Por inducción, supongamos que $u^{(k)}(t) = (-1)^k A^k e^{-tA} u_0$. Veamos que

$$u^{(k+1)}(t) = (-1)^{k+1} A^{k+1} e^{-tA} u_0 (t > 0).$$

Para ello, tenemos

$$\left\| \frac{u^{(k)}(t+h) - u^{(k)}(t)}{h} - (-1)^{k+1} A^{k+1} e^{-tA} u_0 \right\|^2$$

$$= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (u_0, \phi_n) \left[\left(\frac{(-1)^k \lambda_n^k e^{-(t+h)\lambda_n} - (-1)^k \lambda_n^k e^{-t\lambda_n}}{h} \right) - (-1)^{k+1} \lambda_n^{k+1} e^{-t\lambda_n} \right] \phi_n \right\|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |(u_0, \phi_n)|^2 \left| \left(\frac{(-1)^k {\lambda_n}^k e^{-(t+h)\lambda_n} - (-1)^k \lambda_n^k e^{-t\lambda_n}}{h} \right) - (-1)^{k+1} \lambda_n^{k+1} e^{-t\lambda_n} \right|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |(u_0, \phi_n) \lambda_n^k|^2 \left| \left(\frac{e^{-(t+h)\lambda_n} - e^{-t\lambda_n}}{h} \right) + \lambda_n e^{-t\lambda_n} \right|^2 .$$

Por 1, entonces

$$|(u_0, \phi_n) \lambda_n^k|^2 \left| \left(\frac{e^{-(t+h)\lambda_n} - e^{-t\lambda_n}}{h} \right) + \lambda_n e^{-t\lambda_n} \right|^2 \leq \left| (u_0, \phi_n) \sup_{n \geq 1} \lambda_n^k \right|^2 (2 \sup_{n \geq 1} \lambda_n)^2 .$$

Entonces por criterio M de Weierstrass,

$$\left\| \frac{u^{(k)}(t+h) - u^{(k)}(t)}{h} - (-1)^{k+1} A^{k+1} e^{-tA} u_0 \right\|^2 \quad \text{converge uniformemente.}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{u^{(k)}(t+h) - u^{(k)}(t)}{h} - (-1)^{k+1} A^{k+1} e^{-tA} u_0 \right\|^2$$

$$= \lim_{h \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} |(u_0, \phi_n)|^2 \left| \left(\frac{(-1)^k {\lambda_n}^k e^{-(t+h)\lambda_n} - (-1)^k \lambda_n^k e^{-t\lambda_n}}{h} \right) - (-1)^{k+1} \lambda_n^{k+1} e^{-t\lambda_n} \right|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |(u_0, \phi_n)|^2 \left| \lim_{h \to 0} \left(\frac{(-1)^k {\lambda_n}^k e^{-(t+h)\lambda_n} - (-1)^k \lambda_n^k e^{-t\lambda_n}}{h} \right) - (-1)^{k+1} \lambda_n^{k+1} e^{-t\lambda_n} \right|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |(u_0, \phi_n)|^2 \left| (-1)^k \lambda_n^k (-\lambda_n) e^{-t\lambda_n} - (-1)^{k+1} \lambda_n^{k+1} e^{-t\lambda_n} \right|^2 = 0.$$

Ahora, veamos que $u^{(k)}(t)$ es continua, es decir, que

$$\lim_{t' \to t} \|u^{(k)}(t) - u^{(k)}(t')\| = 0.$$

Para ello $\left\| u^{(k)}(t) - u^{(k)}(t') \right\| = \left\| (-1)^k A^k u(t) - (-1)^k A^k u(t') \right\|$ Como $u(t)$ es continuo, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|t - t'| < \delta$ entonces $\|u(t) - u(t')\| < \varepsilon$. Ahora como A es acotado, existe $M > 0$ tal que $\|Au\| \leq M \|u\|$. Por lo tanto

$$\left\| (-1)^k A^k u(t) - (-1)^k A^k u(t') \right\| = \left\| A^k \left(u(t) - u(t') \right) \right\| \leq M^k \left\| u(t) - u(t') \right\| < M^k \varepsilon.$$

Con esto, tenemos que $u \in C^k((0,\infty), H)$ para todo $k \geq 1$.

Como hemos visto

$$\sup_{t>0} \|u(t)\| = \sup_{t>0} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (u_0, \phi_n) e^{-\lambda_n t} \phi_n \right\|.$$

Ahora,

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} (u_0, \phi_n) e^{-\lambda_n t} \phi_n \right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(u_0, \phi_n)|^2 \left| e^{-\lambda_n t} \right|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |(u_0, \phi_n)|^2 = \|u_0\|^2.$$

Por lo tanto, $\|u(t)\| < \infty$ para todo $t \geq 0$, de lo que se sigue que

$$\sup_{t\geq 0} \|u(t)\| < \infty.$$

(c.2) Debemos verificar que

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} + Au(t) - F(t) \right\|_H = 0,$$

para todo $t > 0$, donde

$$u(t) = e^{-tA} u_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)} F(\tau)\, d\tau.$$

Tomando $h > 0$ tenemos estimar

$$S_h = \left\| \frac{1}{h} \left[e^{-(t+h)A} u_0 + \int_0^{t+h} e^{-(t+h-\tau)A} F(\tau)\, d\tau - e^{-tA} u_0 - \int_0^t e^{-(t-\tau)A} F(\tau)\, d\tau \right] + Au(t) - F(t) \right\|_H,$$

Por lo hecho en el ítem (b) y como $h > 0$, se tiene que

$$\int_0^{t+h} e^{-(t+h-\tau)A} F(\tau)\, d\tau = \int_0^{t} e^{-(t+h-\tau)A} F(\tau)\, d\tau + \int_t^{t+h} e^{-(t+h-\tau)A} F(\tau)\, d\tau,$$

de manera que

$$\begin{aligned}\int_0^{t+h} e^{-(t+h-\tau)A} F(\tau)\, d\tau - \int_0^{t} e^{-(t-\tau)A} F(\tau)\, d\tau &= \int_0^{t} \left[e^{-(t+h-\tau)A} F(\tau) - e^{-(t-\tau)A} F(\tau) \right]\, d\tau \\ &\quad + \int_t^{t+h} e^{-(t+h-\tau)A} F(\tau)\, d\tau,\end{aligned}$$

además, por la definición de $u(t)$ y la construcción de la integral por sumas de Riemann, obtenemos

$$Au(t) = Ae^{-tA} u_0 + A \int_0^t e^{-(t-\tau)A} F(\tau)\, d\tau = Ae^{-tA} u_0 + \int_0^t Ae^{-(t-\tau)A} F(\tau)\, d\tau$$

Haciendo uso de la desigualdad triangular de la norma $\|\cdot\|_H$, tenemos que

$$S_h \leq S_h^1 + S_h^2 + S_h^3,$$

donde

$$S_h^1 = \left\| \frac{1}{h}\left[e^{-(t+h)A}u_0 - e^{-tA}u_0\right] + Aue^{-tA}u_0 \right\|_H$$

$$S_h^2 = \left\| \frac{1}{h}\int_0^t \left[e^{-(t+h-\tau)A}F(\tau) - e^{-(t-\tau)A}F(\tau)\right]\, d\tau + \int_0^t Ae^{-(t-\tau)A}F(\tau)\, d\tau \right\|_H$$

$$S_h^3 = \left\| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{-(t+h-\tau)A}F(\tau)\, d\tau - F(t) \right\|_H .$$

Note que el término S_h^1 es exáctamente el término que estimamos cuando realizamos el sistema homogéneo, así, podemos afirmar que $\lim\limits_{h\to 0} S_h^1 = 0$. Para S_h^2, note que, por la linealidad de la integral y la desigualdad triangular de la integral

$$\begin{aligned} S_h^2 &= \left\| \int_0^t \left[\frac{e^{-(t+h-\tau)A} - e^{-(t-\tau)A}}{h} + Ae^{-(t-\tau)A}\right] F(\tau)\, d\tau \right\|_H \\ &\leq \int_0^t \left\| \left[\frac{e^{-(t+h-\tau)A} - e^{-(t-\tau)A}}{h} + Ae^{-(t-\tau)A}\right] F(\tau) \right\|_H d\tau, \end{aligned}$$

así, por la identidad de Parseval y aplicando el cálculo funcional que nos permite definir el Teorema Espectral, tenemos

$$\begin{aligned} &\left\| \left[\frac{e^{-(t+h-\tau)A} - e^{-(t-\tau)A}}{h} + Ae^{-(t-\tau)A}\right] F(\tau) \right\|_H^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (F(\tau), \phi_n)^2 \left| \frac{e^{-(t+h-\tau)\lambda_n} - e^{-(t-\tau)\lambda_n}}{h} + \lambda_n e^{-(t-\tau)\lambda_n} \right|^2, \end{aligned}$$

donde $\{\phi_n\}$ es la base de Hilbert de vectores propios de A y $\{\lambda_n\}$ es el espectro del operador A. Como $(Ax, x) \geq 0$ para todo $x \in H$, $\lambda_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Note que

$$\frac{e^{-(t+h-\tau)\lambda_n} - e^{-(t-\tau)\lambda_n}}{h} = \frac{-\lambda_n}{h}\int_t^{t+h} e^{-(s-\tau)\lambda_n}\, ds,$$

como $0 \leq \tau \leq t$ y $t \leq s \leq t+h$, tenemos que $\tau \leq s$, es decir, $s-\tau \geq 0$, por lo que, como $\lambda_n \geq 0$, $-(s-\tau)\lambda_n$, de manera que $e^{-(s-\tau)\lambda_n} \leq 1$, de la misma manera,

$t-\tau \geq 0$, entonces $e^{-(t-\tau)\lambda_n} \leq 1$, por tanto

$$\begin{aligned}
\left|\frac{e^{-(t+h-\tau)\lambda_n} - e^{-(t-\tau)\lambda_n}}{h} + \lambda_n e^{-(t-\tau)\lambda_n}\right| &\leq \left|\frac{e^{-(t+h-\tau)\lambda_n} - e^{-(t-\tau)\lambda_n}}{h}\right| + \left|\lambda_n e^{-(t-\tau)\lambda_n}\right| \\
&= \left|\frac{-\lambda_n}{h}\int_t^{t+h} e^{-(s-\tau)\lambda_n}\, ds\right| + \left|\lambda_n e^{-(t-\tau)\lambda_n}\right| \\
&\leq \frac{|\lambda_n|}{h}\int_t^{t+h} ds + |\lambda_n| \\
&= 2|\lambda_n| \\
&\leq 2 \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} |\lambda_n| < \infty,
\end{aligned}$$

de manera que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (F(\tau), \phi_n)^2 \left|\frac{e^{-(t+h-\tau)\lambda_n} - e^{-(t-\tau)\lambda_n}}{h} + \lambda_n e^{-(t-\tau)\lambda_n}\right|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (F(\tau), \phi_n)^2 \left(2 \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} |\lambda_n|\right)^2 < \infty,$$

dado que $F(\tau) \in H$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$, así, por el criterio M de Weierstrass, podemos "meter" el límite dentro de la serie. Como

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{-(t+h-\tau)\lambda_n} - e^{-(t-\tau)\lambda_n}}{h} = -\lambda_n e^{-(t-\tau)\lambda_n},$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} (F(\tau), \phi_n)^2 \left|\frac{e^{-(t+h-\tau)\lambda_n} - e^{-(t-\tau)\lambda_n}}{h} + \lambda_n e^{-(t-\tau)\lambda_n}\right|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (F(\tau), \phi_n)^2 \lim_{h\to 0} \left|\frac{e^{-(t+h-\tau)\lambda_n} - e^{-(t-\tau)\lambda_n}}{h} + \lambda_n e^{-(t-\tau)\lambda_n}\right|^2 = 0,
\end{aligned}$$

lo que nos permite concluir que $\lim_{h\to 0} S_h^2 = 0$.

Finalmente, para S_h^3, escribimos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{-(t+h-\tau)A} F(\tau)\, d\tau - F(t) &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{-(t+h-\tau)A} F(\tau)\, d\tau - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} F(t)\, d\tau \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} [e^{-(t+h-\tau)A} F(\tau) - F(t)]\, d\tau,
\end{aligned}$$

sumando y restando dentro de la integral $e^{-(t+h-\tau)A}F(t)$, tenemos

$$
\begin{aligned}
S_h^3 &= \left\| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left[e^{-(t+h-\tau)A}F(\tau) - e^{-(t+h-\tau)A}F(t) + e^{-(t+h-\tau)A}F(t) - F(t) \right] \, d\tau \right\|_H \\
&= \left\| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left[e^{-(t+h-\tau)A}(F(\tau) - F(t)) + (e^{-(t+h-\tau)A} - I)F(t) \right] \, d\tau \right\|_H \\
&\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left\| \left[e^{-(t+h-\tau)A}(F(\tau) - F(t)) + (e^{-(t+h-\tau)A} - I)F(t) \right] \right\|_H \, d\tau \\
&\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left(\left\| e^{-(t+h-\tau)A}(F(\tau) - F(t)) \right\|_H + \left\| (e^{-(t+h-\tau)A} - I)F(t) \right\|_H \right) \, d\tau \\
&= \underbrace{\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left\| e^{-(t+h-\tau)A}(F(\tau) - F(t)) \right\|_H \, d\tau}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left\| (e^{-(t+h-\tau)A} - I)F(t) \right\|_H \, d\tau}_{I_2}.
\end{aligned}
$$

Para I_1, acotamos la norma

$$
\left\| e^{-(t+h-\tau)A}(F(\tau) - F(t)) \right\|_H .
$$

Usando el cálculo funcional, y la identidad de Parseval, tenemos

$$
\left\| e^{-(t+h-\tau)A}(F(\tau) - F(t)) \right\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (F(\tau) - F(t), \phi_n)^2 \left| e^{-(t+h-\tau)\lambda_n} \right|^2,
$$

como $t \leq \tau \leq t+h$, entonces $t+h-\tau \geq 0$, de manera que, como $\lambda_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, tenemos $e^{-(t+h-\tau)\lambda_n} \leq 1$, de manera que

$$
\sum_{n=1}^{\infty} (F(\tau) - F(t), \phi_n)^2 \left| e^{-(t+h-\tau)\lambda_n} \right|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (F(\tau) - F(t), \phi_n)^2 = \|F(\tau) - F(t)\|_H^2 < \infty,
$$

dado que $F(\tau), F(t) \in H$ y H es espacio vectorial. Además, note que como $[t, t+h]$ es un compacto y F es continua, F es uniformemente continua en $[t, t+h]$, de manera que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|\tau - t| < \delta$, entonces $\|F(\tau) - F(t)\| < \epsilon$ y δ no depende de τ, de esta manera, para h suficientemente pequeño para que $\tau - t \leq h < \delta$, se tiene que

$$
I_1 = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left\| e^{-(t+h-\tau)A}(F(\tau) - F(t)) \right\|_H \, d\tau \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|(F(\tau) - F(t))\|_H \, d\tau < \frac{\epsilon}{h}\int_t^{t+h} \, d\tau = \epsilon,
$$

es decir, $\lim_{h \to 0} I_1 = 0$.

Para I_2, escribimos

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left\| (e^{-(t+h-\tau)A} - I)F(t) \right\|_H \, d\tau \\
&= \int_t^{t+h} \left\| \frac{e^{-(t+h-\tau)A} - I}{h} F(t) \right\|_H \, d\tau
\end{aligned}
$$

entonces acotamos la norma

$$\left\|\frac{e^{-(t+h-\tau)A}-I}{h}F(t)\right\|_H$$

usando el cálculo funcional y que definimos $A^0 = I$, tenemos

$$\left\|\frac{e^{-(t+h-\tau)A}-I}{h}F(t)\right\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(F(t),\phi_n)^2\left|\frac{e^{-(t+h-\tau)\lambda_n}-1}{h}\right|^2,$$

como

$$e^{-(t+h-\tau)\lambda_n}-1 = -\lambda_n\int_0^{t+h-\tau}e^{-s\lambda_n}\,ds,$$

como $\tau \leq t+h$, entonces $t+h-\tau \geq 0$, de manera que $s \geq 0$ y como $\lambda_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene que $e^{-s\lambda_n} \leq 1$, así, tenemos

$$\left|\frac{e^{-(t+h-\tau)\lambda_n}-1}{h}\right| = \left|\frac{-\lambda_n}{h}\int_0^{t+h-\tau}e^{-s\lambda_n}\,ds\right| \leq \frac{|\lambda_n|}{h}\int_0^{t+h-\tau}ds = \frac{|\lambda_n|(t+h-\tau)}{h}$$

Como $t \leq \tau \leq t+h$, tenemos $t-\tau \leq 0$ y por tanto, $t+h-\tau \leq h$, lo que nos garantiza que $\dfrac{t+h-\tau}{h} \leq 1$, así

$$\left|\frac{e^{-(t+h-\tau)\lambda_n}-1}{h}\right| \leq \frac{|\lambda_n|(t+h-\tau)}{h} \leq |\lambda_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}^+}|\lambda_n|,$$

de esta manera

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(F(t),\phi_n)^2\left|\frac{e^{-(t+h-\tau)\lambda_n}-1}{h}\right|^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty}(F(t),\phi_n)^2\left(\sup_{n\in\mathbb{Z}^+}|\lambda_n|\right)^2\\ &= \left(\sup_{n\in\mathbb{Z}^+}|\lambda_n|\right)^2\|F(t)\|_H^2 < \infty,\end{aligned}$$

de esta manera

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_t^{t+h}\left\|\frac{e^{-(t+h-\tau)A}-I}{h}F(t)\right\|_H d\tau\\ &\leq \left(\sup_{n\in\mathbb{Z}^+}|\lambda_n|\right)\|F(t)\|_H\int_t^{t+h}d\tau\\ &= \left(\sup_{n\in\mathbb{Z}^+}|\lambda_n|\right)\|F(t)\|_H\,h,\end{aligned}$$

de manera que

$$0 \leq \lim_{h \to 0} I_2 \leq \lim_{h \to 0} \left(\sup_{n \in \mathbb{Z}^+} |\lambda_n| \right) \|F(t)\|_H \, h = 0,$$

lo que nos garantiza que $\lim_{h \to 0} I_2 = 0$, concluyendo así que $\lim_{h \to 0} S_h^3 = 0$ y así

$$\lim_{h \to 0} S_h \leq \lim_{h \to 0} (S_h^1 + S_h^2 + S_h^3) = 0,$$

concluyendo así, que

$$u(t) = e^{-tA} u_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)} F(\tau) \, d\tau,$$

es solución del problema de valor inicial. El caso para $h < 0$ es análogo.

Veamos que si $F \in C^k[(0, \infty); H]$, entonces $u \in C^{k+1}[(0, \infty); H]$.
Note que como vimos anteriormente, la solución u satisface la ecuación:

$$u'(t) = -Au(t) + F(t).$$

Ahora, como $F \in C^k[(0, \infty); H]$ sabemos que el cociente diferencial respectivo de las k derivadas de k en norma converge, de igual forma sabemos que $u \in C^1[(0, \infty); H]$ por lo anteriormente demostrado, por lo que sería válido afirmar que se satisface lo siguiente:

$$u''(t) = -Au'(t) + F'(t).$$

Luego, si hacemos $v = u'$ y $G = F'$, entonces podemos ver que v satisface

$$v'(t) = -Av(t) + G(t).$$

al cual lo podemos tratar de la misma forma que a u, por lo que razonando de forma inductiva se deduce que

$$u^{(k+1)}(t) = -Au^{(k)}(t) + F^{(k)}(t),$$

lo que nos permite concluir que si $F \in C^k[(0, \infty); H]$, entonces $u \in C^{k+1}[(0, \infty); H]$.

□