Ecuaciones Diferenciales Parciales: Taller 3

28 de junio del 2024

Universidad Nacional de Colombia

Oscar Guillermo Riaño Castañeda

Andrés David Cadena Simons acadenas@unal.edu.co
David Felipe Viuche Malaver dviuchem@unal.edu.co

Problema 1:

Sea U un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ tal que su borde $\partial U = \overline{U} \setminus U$ es de clase C^1. Muestre:

1. **Formula de integración por partes:** Sean $i = 1, \cdots, n$ fijo, $u, v \in C^1(\overline{U})$. Entonces:

$$\int_U (\partial_{x_i} u) v dx = \int_{\partial U} (uv)\eta_i dS(x) - \int_U u(\partial_{x_i} v) dx$$

Donde η_i es la i-ésima componente del vector normal a ∂U.
Sugerencia: Asuma sin demostrar que vale el teorema de la divergencia, el cual nos dice que dado $F \in C^1(\overline{U}; \mathbb{R}^n)$ un campo vectorial, se tiene:

$$\int_U div(F) dx = \int_{\partial U} F \cdot \eta dS(x)$$

donde si $F = (F_1, \cdots, F_n)$, $div(F) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$.
Para mostrar 1) haga $F = (0, \cdots, \underbrace{uv}_{\text{posición } i}, \cdots, 0)$ y aplique el teorema de la divergencia.

Solución:

Suponga $F = (0, \cdots, \underbrace{uv}_{\text{posición } i}, \cdots, 0)$ y apliquemos el teorema de la divergencia:

$$\begin{aligned}\int_U div(F) dx &= \int_{\partial U} F \cdot \eta dx \\ &= \int_{\partial U} (uv)\eta_i dS(x).\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}\int_U div(F) dx &= \int_U \partial_{x_i}(uv) dx \\ &= \int_U (\partial_{x_i} u) v + (\partial_{x_i} v) u dx.\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\int_U (\partial_{x_i} u) v + u(\partial_{x_i} v) dx &= \int_{\partial U} (uv)\eta_i dS(x) \\ \int_U (\partial_{x_i} u) v dx &= \int_{\partial U} (uv)\eta_i dS(x) - \int_U u(\partial_{x_i} v) dx.\end{aligned}$$

♥

Problema 1 continúa en la siguiente página...

2. **Formula de Green I:**

$$\int_U \Delta u dx = \int_{\partial U} \nabla u \cdot \eta dS(x)$$

Donde η es el vector normal a la superficie ∂U.
Para mostrar 2) se sigue de 1) haciendo $v = 1$ y utilizando la definición del Laplaciano.

Solución:

Note que por definición:

$$\int_U \Delta u dx = \int_U \partial_{x_1}^2 u + \cdots + \partial_{x_n}^2 u dx.$$

Usando $v = 1$ y aplicando la formula de integración por partes en cada sumando tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_U \Delta u dx &= \int_{\partial U} \partial_{x_1} u \eta_1 + \cdots + \partial_{x_n} u \eta_n dS(x) \\ &= \int_{\partial U} \nabla u \cdot \eta dS(x).\end{aligned}$$

3. **Formula de Green II:**

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla v dx = -\int_U u \Delta v dx + \int_{\partial U} u(\nabla v \cdot \eta) dS(x).$$

Para mostrar 3) también se sigue de 1).

Solución:

Note que por definición:

$$\int_U u \Delta v dx = \int_U u \partial_{x_1}^2 v + \cdots + u \partial_{x_n}^2 v dx,$$

Usando la formula de integración por partes en cada sumando tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_U u \Delta v dx &= \int_{\partial U} (u \partial_{x_1} v) \eta_1 + \cdots + (u \partial_{x_n} v) dS(x) - \int_U \partial_{x_1} u \partial_{x_1} v + \cdots + \partial_{x_n} u \partial_{x_n} v dx \\ &= \int_{\partial U} u(\nabla v \cdot \eta) dS(x) - \int_U \nabla u \cdot \nabla v dx,\end{aligned}$$

Lo que implica:

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla v = -\int_U u \Delta v dx + \int_{\partial U} u(\nabla v \cdot \eta) dS(x).$$

4. **Formula de Green III:**

$$\int_u (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_{\partial U} (u(\nabla v\cdot\eta) - v(\nabla u\cdot\eta))dS(x),$$

Para mostrar 4) sume las 2 formulas de 3 obtenidas de intercambiar a u por v.

Solución:

De 3) sabemos que:

$$\begin{aligned}\int_U (u\Delta v - v\Delta u)dx &= \int_{\partial U} (u(\nabla v\cdot\eta) - v(\nabla u\cdot\eta))dS(x) - \int_U (\nabla u\cdot\nabla v - \nabla v\cdot\nabla u)dx \\ &= \int_{\partial U} (u(\nabla v\cdot\eta) - v(\nabla u\cdot\eta))dS(x).\end{aligned}$$

Problema 2:

Considere la función $x \in \mathbb{R}^n \to \eta(x)$ dada por:

$$\eta(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & \text{Si } |x| < 1, \\ 0, & \text{Si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Donde C es tal que $\int_{\mathbb{R}} \eta(x)dx = 1$. La función anterior se le llama un mollifier. Dado $\epsilon > 0$ definimos $\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\eta(\frac{x}{\epsilon})$.

1. Muestre que $\eta_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Además muestre que $supp(\eta_\epsilon) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \eta_\epsilon(x) \neq 0\}} = \overline{B(0,\epsilon)}$.

Solución:

Primero veamos que $\eta_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, para esto note $\eta_\epsilon = \frac{C}{\epsilon}(e^x \circ \frac{1}{x} \circ |x|^2 - 1 \circ \frac{x}{\epsilon})$ cuando $|x| < |\epsilon|$ y 0 en el caso contrario, además, como $\epsilon > 0$ sabemos que $\frac{x}{\epsilon} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, luego también sabemos que $|x|^2 - 1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y además sabemos que $\left|\frac{x}{\epsilon}\right|^2 - 1 \neq 0$ ya que $|x| < |\epsilon|$, por lo que sería correcto afirmar que $\frac{1}{\left|\frac{x}{\epsilon}\right|^2-1} \in C^\infty(\{x : |x| < |\epsilon|\})$, luego como $e^x \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ se puede concluir usando la regla de la cadena que $\eta_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Ahora veamos que $supp(\eta_\epsilon) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \eta_\epsilon(x) \neq 0\}} = \overline{B(0,\epsilon)}$.
Para ver esto, note que:

$$\eta_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{C}{\epsilon}e^{\frac{1}{\left|\frac{x}{\epsilon}\right|^2-1}}, & \text{Si } \left|\frac{x}{\epsilon}\right| < 1, \\ 0, & \text{Si } \left|\frac{x}{\epsilon}\right| \geq 1. \end{cases}$$

Luego, si $|x| < |\epsilon|$, se tiene el primer caso, que como C no puede ser 0 ya que la integral de η es 1 y la exponencial no se anula en el rango de valores dados cuando $|x| < |\epsilon|$, entonces sabemos que el $supp(\eta_\epsilon) = \overline{B(0,\epsilon)}$.

2. Sea $f \in C(\mathbb{R}^n)$. Utilizando la convolución definimos $f_\epsilon = \eta_\epsilon * f$, con $\epsilon > 0$.
Muestre que $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y que $f_\epsilon \to f$ uniformemente en compactos $K \subset \mathbb{R}^n$ cuando $\epsilon \to 0^+$.

Solución:

Veamos que $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Para esto note que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_\epsilon}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_\epsilon * f)(x) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x-y)f(y)dy \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\int_{B(0,\epsilon)} \frac{C}{\epsilon} e^{\frac{1}{\left|\frac{x-y}{\epsilon}\right|-1}} f(y)dy
\end{aligned}$$

Ahora, note que como $f \in C(\mathbb{R}^n)$, y es de soporte compacto, esta alcanza su máximo y mínimo en $\overline{B(0,\epsilon)}$, por lo que podemos afirmar que f es Riemman Integrable en $\overline{B(0,\epsilon)}$.

Ahora, suponga $K = \overline{B(0,\epsilon)} \cap \overline{B(x,\epsilon)}$ compacto, luego note que $e^{\frac{1}{\left|\frac{x-y}{\epsilon}\right|^2-1}} f(y) \in C^\infty(K)$ respecto a x, por lo que es válido realizar el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_\epsilon}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\int_K \frac{C}{\epsilon} e^{\frac{1}{\left|\frac{x-y}{\epsilon}\right|^2-1}} f(y)dy \\
&= \int_K \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{C}{\epsilon} e^{\frac{1}{\left|\frac{x-y}{\epsilon}\right|^2-1}}\right) f(y)dy \\
&= \int_K \frac{\partial \eta_\epsilon}{\partial x_i}(x-y)f(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \eta_\epsilon}{\partial x_i}(x-y)f(y)dy \\
&= \left(\frac{\partial \eta_\epsilon}{\partial x_i} * f\right)(x)
\end{aligned}$$

Luego utilizando un argumento inductivo podemos llegar a que si suponemos α multi-índice, entonces $\partial^\alpha f_\epsilon = (\partial^\alpha \eta_\epsilon * f)$ y como $\eta_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces podemos concluir que $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Ahora, veamos que $f_\epsilon \to f$ uniformemente en compactos $K \subset \mathbb{R}^n$ cuando $\epsilon \to 0^+$. Es decir, que dado $e > 0$ existe $P > 0$ tal que si $p < P$, entonces:

$$|f_n(x) - f(x)| < e,$$

para todo $x \in K$.
Para esto, note que existe $r > 0$ tal que $K \subseteq \overline{B(0,r)}$, además como $f \in C(\mathbb{R}^n)$, entonces es uniformemente continua en $\overline{B(0,r)}$, por lo cuál dado $e > 0$ se cumple existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < e$.
Ahora, si tomamos $x \in K \subset \overline{B(0,r)}$ y $p \in (0, \delta)$ (Aquí suponemos $P = \delta$) podemos afirmar que:

$$\begin{aligned}
|f_p(x) - f(x)| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \eta_p(t) f(x-t) dt - f(x) \right| \\
&\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \eta_p(t) f(x-t) dt - \int_{\mathbb{R}^n} \eta_p(t) f(x) dt \right| \\
&\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \eta_p(t) (f(x-t) - f(x)) dt \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \eta_p(t) |f(x-t) - f(x)| dt \\
&< \int_{\mathbb{R}^n} \eta_p(t) e dt \\
&< e \int_{\mathbb{R}^n} \eta_p(t) dt \\
&< e.
\end{aligned}$$

Por lo que se cumple que $f_\epsilon \to f$ uniformemente en compactos $K \subset \mathbb{R}^n$ cuando $\epsilon \to 0^+$.

Problema 3:

Muestre que la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ es invariante por rotaciones. Más precisamente, muestre que si O es una matriz ortogonal de tamaño $n \times n$ y definimos $v(x) = u(Ox)$, entonces $\Delta v = 0$.

Solución:

Suponga $O = (a_{ij})$ matriz ortogonal y $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, entonces u es armónica y por ende satisface la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$. Ahora, suponga $v(x) = u(Ox) = u[(\sum_{i=1}^n a_{1i}x_i, \cdots, \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i)] = u(y)$ definiendo $y = (y_1, \cdots, y_n)$ con $y_j = \sum_{i=1}^n a_{ji}x_i$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_j} a_{ji} \\
&= (a_{1i}, \cdots, a_{ni}) \left(\frac{\partial u}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial y}{\partial y_n}\right)^T
\end{aligned}$$

En general se tendría que:

$$\begin{aligned}
\nabla_x v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_i} \\ \vdots, \\ \frac{\partial v}{\partial x_n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial y_n} \end{pmatrix} \\
&= O^T \nabla_y u
\end{aligned}$$

Ahora note que:

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \nabla_x v \cdot \nabla_x v \\
&= (O^T \nabla_y u) \cdot (O^T \nabla_y u) \\
&= (O^T \nabla_y u)^T (O^T)(\nabla_y u) \\
&= (\nabla_y u)^T (O^T)^T (O^T)(\nabla_y u) \\
&= (\nabla_y u)^T (\nabla_y u) \\
&= (\nabla_y u) \cdot (\nabla_y u) \\
&= \Delta u \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo que queda demostrado que $v(x)$ satisface la ecuación de Laplace, es decir, que la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ es invariante por rotaciones.

♥

Problema 4:

(**Estimativas sobre derivadas**) Asuma que u es armónica en U. Sea $k \in \mathbb{Z}^+$, muestre que existe una constante $C_k > 0$ tal que:

$$|\partial_\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

Para cada bola $B(x_0, r) \subseteq U$ y cada multi-índice α de orden $|\alpha| = k$. Recuerde que:

$$\|u\|_{L^1(B(x_0,r))} = \int_{B(x_0,r)} |u(x)|dx$$

Sugerencia: Justificar la demostración hecha en el libro de Evans, Partial Differential Equations, segunda edición página 29.
Nota:

- $\alpha(n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$.
- $⨍_{B(x_0,r)} u(y)dy = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x_0,R)} u(y)dy$.
- $⨍_{\partial B(x_0,r)} u(y)dS(y) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x_0,r)} u(y)dS(y)$.

Solución:

Para ver esto usaremos un argumento inductivo sobre k.

- Caso $k = 0$.
  Note que como $k = 0$, entonces $\alpha = 0$, por lo que tenemos que:

$$\begin{aligned}
|u(x_0)| &= \left| \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x_0,r)} u(y)dy \right| && \text{Usando el teorema del valor medio de la E.Laplace.} \\
&\leq \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x_0,r)} |u(y)|dy \\
&\leq \frac{1}{\alpha(n)r^n} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \\
&\leq \frac{C_0}{r^n} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))} && \text{Tomando } C_0 = \frac{1}{\alpha(n)}.
\end{aligned}$$

- Caso $k = 1$.

Note que como u es armónica, por ende $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ lo cuál nos permite ver que:

$$\begin{aligned}
\partial_{x_i} \Delta u &= \partial_{x_i} \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 u \\
&= \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_i} \partial_{x_j}^2 u && \text{Como } u \in C^{\infty}. \\
&= \sum_{j=1}^{n} \partial {x_j}^2 \partial_{x_i} u \\
&= \Delta \partial_{x_i} u
\end{aligned}$$

Por lo cuál sabemos que $\partial_{x_i} u$ es armónica.
Ahora, usando el teorema del valor medio de la E.Laplace se tiene que:

$$\begin{aligned}
|\partial_{x_i} u(x_0)| &\leq \left| \frac{1}{\alpha(n)\left(\frac{r}{2}\right)^n} \int_{B(x_0,\frac{r}{2})} \partial_{x_i} u(y) dy \right| && \text{Utilizando la formula de integración por partes.} \\
&\leq \left| \frac{2^n}{\alpha(n) r^n} \int_{\partial B(x_0,\frac{r}{2})} u(y) \eta_i dS(y) \right| \\
&\leq \left| \frac{2^n}{\alpha(n) r^n} \int_{\partial B(x_0,\frac{r}{2})} u(y) dS(y) \right| \\
&\leq \left| \frac{2^n}{\alpha(n) r^n} \|u\|_{L^{\infty}(\partial B(x_0,\frac{r}{2}))} \int_{\partial B(x_0,\frac{r}{2})} dS(y) \right| \\
&\leq \left| \frac{2^n}{\alpha(n) r^n} \|u\|_{L^{\infty}(\partial B(x_0,\frac{r}{2}))} n\alpha(n) \left(\frac{r}{2}\right)^{n-1} \right| \\
&\leq \frac{2n}{r} \|u\|_{L^{\infty}(\partial B(x_0,\frac{r}{2}))}
\end{aligned}$$

Ahora, si tomamos $x \in \partial B(x_0, \frac{r}{2})$, entonces $B(x, \frac{r}{2}) \subset B(x_0, r) \subseteq U$ y usando el caso $k = 0$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\leq \frac{1}{\alpha(n)} \left(\frac{2}{r}\right)^n \|u\|_{L^1(B(x,r))} \\
\|u\|_{L^{\infty}(\partial B(x,\frac{r}{2}))} &\leq \frac{1}{\alpha(n)} \left(\frac{2}{r}\right)^n \|u\|_{L^1(B(x,r))}
\end{aligned}$$

Ahora, juntando ambas desigualdades tenemos que:

$$
\begin{aligned}
|\partial_{x_i} u(x)| &\leq \frac{2n}{r}\|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0,\frac{r}{2}))} && (1)\\
&\leq \frac{2n}{r}\frac{1}{\alpha(n)}\left(\frac{2}{r}\right)^n \|u\|_{L^1(B(x,r))} && (2)\\
&\leq \frac{2^{n+1}n}{r^{n+1}\alpha(n)}\|u\|_{L^1(B(x,r))} \qquad \left(\text{Tomando } C_1 = \frac{2^{n+1}n}{\alpha(n)}.\right) && (3)\\
&\leq \frac{C_1}{r^{n+1}}\|u\|_{L^1(B(x,r))}. && (4)
\end{aligned}
$$

- Caso $k \geq 2$. Para esto asuma que las hipótesis se cumplen para todo multi-índice de magnitud $k-1$.
  Tome $B(x,r)$ y α tal que $|\alpha| = k$. Entonces, $\partial^\alpha u = \partial_{x_i}(\partial^\beta u)$ con β tal que $|\beta| = k-1$. Si realizamos un procedimiento análogo al que hicimos para el caso $k = 1$ podemos llegar a que:

$$
|\partial^\alpha u(x_0)| \leq \frac{nk}{r}\|\partial^\beta u\|_{L^\infty(\partial B(x_0,\frac{r}{k}))}
$$

  Análogamente si tomamos $x \in \partial B(x_0, \frac{r}{k})$, entonces $B(x, \frac{k-1}{k}r) \subset B(x_0, r) \subseteq U$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
|\partial^\beta u(x)| &\leq \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{\alpha(n)\left(\frac{k-1}{k}r\right)^{n+k-1}}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))}\\
\|\partial^\beta u\|_{L^\infty(\partial B(x,\frac{r}{k}))} &\leq \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{\alpha(n)\left(\frac{k-1}{k}r\right)^{n+k-1}}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))}
\end{aligned}
$$

Ahora, juntando ambas desigualdades tenemos que:

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha u(x_0)| &\leq \frac{nk}{r}\|\partial^\beta u\|_{L^\infty(\partial B(x_0,\frac{r}{k}))} \\
&\leq \frac{nk}{r}\frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{\alpha(n)\left(\frac{k-1}{k}r\right)^{n+k-1}}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \\
&\leq \frac{nk}{r}\frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}(k^{n+k-1})}{\alpha(n)(k-1)^{n+k-1}(r)^{n+k-1}}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \\
&\leq \frac{n^k k^{n+k}2^{(n+1)(k-1)}}{r^{n+k}\alpha(n)(k-1)^n}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \\
&\leq \frac{2^{(n+1)(k-1)}(nk)^k}{\alpha(n)r^{n+k}}\left(\frac{k}{k-1}\right)^n\|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \\
&\leq \frac{2^{(n+1)(k-1)}(nk)^k}{\alpha(n)r^{n+k}}(2)^n\|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \\
&\leq \frac{2^{(n+1)(k-1)}(nk)^k}{\alpha(n)r^{n+k}}(2)^{n+1}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \\
&\leq \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)r^{n+k}}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))} && \left(\text{Tomando } C_k = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)}.\right) \\
&\leq \frac{C_k}{r^{n+k}}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))}.
\end{aligned}$$

Por lo que las estimativas sobre derivadas quedan demostradas.

Problema 5:

(**Fórmula de Poisson's para el espacio medio**) Asuma que $g \in C(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ y defina u como:

$$u(x) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dy$$

con $x \in \mathbb{R}^n_+$. Muestre que:

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$.

Solución:

Definición 0.1 *La función de Green para el espacio medio* $\mathbb{R}^n_+$ *es:*

$$G(x,y) := \Phi(y-x) - \Phi(y-\tilde{x}) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^n_+ : x \neq y).$$

En donde $\tilde{x} = (x_1, \cdots, x_{n-1}, -x_n)$

Definición 0.2 *El Kernel de Poisson's para el espacio medio* $\mathbb{R}^n_+$ *es:*

$$K(x,y) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x-y|^n} \qquad (x \in \mathbb{R}^n_+, y \in \partial\mathbb{R}^n_+)$$

Veamos que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, para esto definamos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^n}, & \text{Si } x \in \partial\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\} \\ 0, & \text{En otro caso.} \end{cases}$$

Note que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$. Ahora note que:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dy \\ &= \frac{2x_n}{n\alpha(n)} (f * g)(x) \end{aligned}$$

Ahora veamos que se puede realizar derivación bajo el signo de la integral, esto ya que para x_j con $j \neq n$ usando la desigualdad del valor medio:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\frac{g(y)}{|x+h\epsilon_j-y|^n} - \frac{g(y)}{|x-y|^n}}{h} \right| &\leq \left| \frac{g(y)}{\left(\sum_{i\leq n, i\neq j}(x_i-y_i)^2 + (x_j+h_j-y_j)^2\right)^{n/2}} - \frac{g(y)}{\left(\sum_{i\leq n, i\neq j}(x_i-y_i)^2 + (x_j-y_j)^2\right)^{n/2}} \frac{1}{h} \right. \\ &\leq \left| -\frac{2ng(y)(x_j+h_j^*-y_j)}{2|x+h^*\epsilon_j-y|^{n+2}} \right| \\ &\leq \left| \frac{ng(y)}{|x+h^*\epsilon_j-y|^{n+1}} \right| \\ &\leq C \left| \frac{1}{|x-y|^{n+1}} \right| = l(y) \end{aligned}$$

Luego, $l(y) \in L^1(\partial\mathbb{R}^n_+)$, por lo que podemos realizar derivación bajo el signo de la integral.
Luego, $\partial_{x_i} u = \frac{2x_n}{n\alpha(n)}(\partial_{x_i} f * g)(x)$ si $i \neq n$ y para el caso $i = n$ como $2x_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, entonces podemos asegurar que $\partial^\alpha u$ existe para cualquier α multi-índice, es decir, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$.
Ahora, veamos que $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$.
Para esto será importante ver que:

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)dy = 1$$

Para esto note que:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y) &= \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x-y|^n} dy \\
&= \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{|x-y|^n} dy \\
&= \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{||\tilde{x}-y|^2 + x_n^2|^{n/2}} dy \qquad \text{En donde } \tilde{x} = (x_1, \cdots, x_{n-1}). \\
&= \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{x_n^{n-1}}{|x_n^2|z|^2 + x_n^2|^{n/2}} dz \qquad \text{Haciendo } z = \frac{\tilde{x}-y}{x_n}. \\
&= \frac{2}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{(|z|^2+1)^{n/2}} dz
\end{aligned}$$

Ahora, usando coordenadas polares:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)dy &= \frac{2}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{(|z|^2+1)^{n/2}} dz \\
&= \frac{2}{n\alpha(n)} \int_0^\infty \int_{\partial B(0,1)} \frac{r^{n-2}}{(r^2+1)^{n/2}} dS dr \qquad \text{Con } B(0,1) \text{ en } \mathbb{R}^{n-1}. \\
&= \frac{2}{n\alpha(n)} |\partial B(0,1)| \int_0^\infty \frac{r^{n-2}}{(r^2+1)^{n/2}} dr
\end{aligned}$$

Ahora, realizando la sustitución trigonométrica $\tan(\theta) = r$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)dy &= \frac{2}{n\alpha(n)}|\partial B(0,1)| \int_0^\infty \frac{r^{n-2}}{(r^2+1)^{n/2}}dr \\ &= \frac{2(n-1)\alpha(n-1)}{n\alpha(n)} \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^{n-2}(\theta)\sec^2(\theta)}{(\tan^2(\theta)+1)^{n/2}}d\theta \\ &= \frac{2(n-1)\alpha(n-1)}{n\alpha(n)} \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^{n-2}(\theta)\sec^2(\theta)}{(\sec^2(\theta))^{n/2}}d\theta \\ &= \frac{2(n-1)\alpha(n-1)}{n\alpha(n)} \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^{n-2}(\theta)}{\sec^{n-2}(\theta)}d\theta \\ &= \frac{2(n-1)\alpha(n-1)}{n\alpha(n)} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2}(\theta)d\theta\end{aligned}$$

Ahora, usando que:

$$\int \operatorname{sen}^n(x)dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}(x)cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)dx$$

Podemos verificar que:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2}(\theta)d\theta &= -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-3}(\theta)cos(\theta)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{n-3}{n-2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-4}(\theta)dx \\ &= \frac{n-3}{n-2}\int_0^{\pi/2} sen^{n-2}(\theta)d\theta\end{aligned}$$

Lo que nos lleva a tener en cuenta los casos:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^0(\theta)d\theta = \frac{\pi}{2}$$
$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(\theta)d\theta = 1$$

Pensemos por casos:

- n par.

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2}(\theta)d\theta = \left(\frac{\pi}{2}\right)\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{n-2i-1}{n-2i}$$

Por lo que si usamos la propiedad factorial de Γ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} K(x,y)dy &= \frac{2(n-1)\alpha(n-1)}{n\alpha(n)}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{n-2}(\theta)d\theta \\
&= \frac{2(n-1)\alpha(n-1)}{n\alpha(n)}\frac{\pi}{2}\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{n-2i-1}{n-2i} \\
&= \frac{2(n-1)\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{n\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\pi^{\frac{n}{2}}}\frac{\pi}{2}\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{n-2i-1}{n-2i} \\
&= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}(n-1)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{n\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{n-2i-1}{n-2i} \\
&= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}(n-1)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\cdots\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)}{n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{n-2i-1}{n-2i} \\
&= \frac{(n-1)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\cdots\left(\frac{4}{2}\right)}{n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{n-2i-1}{n-2i} \\
&= \frac{(n-1)(n)(n-2)\cdots(4)}{n(n-1)(n-3)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)}\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{n-2i-1}{n-2i} \\
&= \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{n-2i}{n-2i-1}\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{n-2i-1}{n-2i} \\
&= 1
\end{aligned}$$

- n impar.

$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{n-2}(\theta)d\theta = \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}-1}\frac{n-2i-1}{n-2i}$$

Por lo que si usamos la propiedad factorial de Γ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} K(x,y)dy &= \frac{2(n-1)\alpha(n-1)}{n\alpha(n)} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2}(\theta)d\theta \\
&= \frac{2(n-1)\alpha(n-1)}{n\alpha(n)} \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{n-2i-1}{n-2i} \\
&= \frac{2(n-1)\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{n\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)} \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{n-2i-1}{n-2i} \\
&= \frac{2(n-1)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}n\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)} \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{n-2i-1}{n-2i} \\
&= \frac{2(n-1)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\cdots\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)} \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{n-2i-1}{n-2i} \\
&= \frac{2(n-1)(n)(n-2)\cdots(3)(1)}{n(n-1)(n-3)\cdots(4)(2)} \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{n-2i-1}{n-2i} \\
&= \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{n-2i}{n-2i-1} \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{n-2i-1}{n-2i} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Por lo que podemos asegurar que:

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)dy = 1$$

De esto se sigue que:

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\le \left| \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} g(y)K(x,y)dy \right| \\
&\le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \left| \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)dy \right| \\
&\le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})}
\end{aligned}$$

Es decir, $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$.

2. $\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n_+$.

Solución:

Note que $G(x, y)$ es armónica respecto a ambas variables a excepción del punto $x = y$, ahora note que:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dy \\ &= \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} g(y) K(x, y) dy \end{aligned}$$

Ahora, como $-\partial_{y_n} G(x, y) = K(x, y)$, entonces $K(x, y)$ es armónica y por ende sabemos que su derivada es continua, por lo que podemos aplicar la derivada bajo el signo de la integral:

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \Delta_x \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} g(y) K(x, y) dy \\ &= \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} g(y) \Delta_x K(x, y) dy \qquad \text{Pero como } \Delta_x K(x, y) = 0. \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. $\lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in \mathbb{R}^n_+}} u(x) = g(x^0)$ para cada punto $x^0 \in \partial \mathbb{R}^n_+$.

Solución:

Sea $x^0 \in \partial \mathbb{R}^n_+$, dado $\epsilon > 0$ escogemos $\delta > 0$ tal que si $|y - x^0| < \delta$ con $y \in \partial \mathbb{R}^n_+$, se cumpla que:

$$|g(y) - g(x^0)| < \epsilon$$

Entonces, si tomamos $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}$ con $x \in \mathbb{R}^n_+$, entonces:

$$\begin{aligned} |u(x) - g(x^0)| &\leq \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} K(x, y) |g(y) - g(x^0)| dy \\ &\leq \int_{\partial \mathbb{R}^n_+ \cap B(x^0, \delta)} K(x, y) |g(y) - g(x^0)| dy + \int_{\partial \mathbb{R}^n_+ \setminus B(x^0, \delta)} K(x, y) |g(y) - g(x^0)| dy \\ &:\leq I + J \end{aligned}$$

Ahora, para I note que:

$$\begin{aligned} I &\leq \int_{\partial \mathbb{R}^n_+ \cap B(x^0, \delta)} K(x, y) |g(y) - g(x^0)| dy \\ &< \epsilon \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} K(x, y) dy \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Por lo que podemos asegurar que si $x \to x^0$, entonces $I \to 0$.
Ahora, para J como $|x - x^0| \leq \frac{\delta}{2}$ y $|y - x^0| \geq \delta$, entonces:

$$\begin{aligned}
|y - x^0| &\leq |y - x| + |x - x^0| \qquad (5)\\
&\leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \qquad (6)\\
&\leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x^0| \qquad (7)
\end{aligned}$$

Lo que implica que $\frac{1}{2}|y - x^0| \leq |y - x|$, usando esto tenemos que:

$$\begin{aligned}
J &\leq \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B(x^0,\delta)} K(x,y)|g(y) - g(x^0)|dy\\
&\leq 2\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B(x^0,\delta)} K(x,y)dy\\
&\leq \frac{2^{n+2}\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B(x^0,\delta)} |x - y|^{-n} dy
\end{aligned}$$

El cual tiende a 0 cuando $x_n \to 0$, por lo que podemos asegurar que si $x \to x^0$, entonces $u(x) \to g(x^0)$.

Problema 6:

En $\mathbb{R}^2$, encuentre la función de Green para el primer cuadrante $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ y } y > 0\}$. Verifique su respuesta: **Sugerencia:** recuerde que la función de Green viene dada por $G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi^x(y)$ donde:

$$\begin{cases} -\Delta\phi^x = 0, & \text{en } U, \\ \phi^x = \Phi(y - x), & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

Una manera de encontrar la función ϕ^x es escribirla como la suma de diferentes proyecciones de $\Phi(x - y)$ sobre cada cuadrante (Siga una idea similar a lo hecho para el caso $\mathbb{R}^n_+$).

Solución:

Suponga $\tilde{x} = (-x_1, x_2)$.
Sea $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $x = (x_1, x_2)$, luego la función de Green para U será:

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \Phi(y - (x_1, x_2)) + \Phi(y - (-x_1, -x_2)) - \Phi(y - (-x_1, x_2)) - \Phi(y - (x_1, -x_2)) \\ &= -\frac{log|(y - (x_1, x_2))|}{2\pi} - \frac{log|(y - (-x_1, -x_2))|}{2\pi} + \frac{log|(y - (-x_1, x_2))|}{2\pi} + \frac{log|(y - (x_1, -x_2))|}{2\pi} \\ &= \frac{log\left|\frac{(y-(-x_1,x_2))(y-(x_1,-x_2))}{(y-(x_1,x_2))(y-(-x_1,-x_2))}\right|}{2\pi} \\ &= \frac{log\left|\frac{(y-(-x_1,x_2))(y+(-x_1,x_2))}{(y-(x_1,x_2))(y+(x_1,x_2))}\right|}{2\pi} \\ &= \frac{log\left|\frac{y^2-(-x_1,x_2)^2}{y^2-(x_1,x_2)^2}\right|}{2\pi} \\ &= -\frac{\ln|y^2 - x^2|}{2\pi} + \frac{\log|y^2 - \tilde{x}|^2}{2\pi} \\ &= \Phi(y^2 - x^2) - \Phi(y^2 - \tilde{x}^2) \end{aligned}$$

Veamos que $\phi^x(y) = -\Phi(y - (-x_1, -x_2)) + \Phi(y - (-x_1, x_2)) + \Phi(y - (x_1, -x_2)) = \Phi(y - x)$ si tomamos $y \in \partial U = \{(y_1, y_2) : y_1 = 0 \text{ y } y_2 \geq 0 \text{ ó } y_1 \geq 0 \text{ y } y_2 = 0\}$. Suponga $y = (0, y_2)$ con

Problema 6 continúa en la siguiente página. . .

$y_2 \geq 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
\phi^x(y) &= -\Phi(y-(-x_1,-x_2)) + \Phi(y-(-x_1,x_2)) + \Phi(y-(x_1,-x_2)) \\
&= -\Phi((0,y_2)-(-x_1,-x_2)) + \Phi((0,y_2)-(-x_1,x_2)) + \Phi((0,y_2)-(x_1,-x_2)) \\
&= -\Phi((x_1,y_2+x_2)) + \Phi((x_1,y_2-x_2)) + \Phi((-x_1,y_2+x_2)) \\
&= \frac{\ln|(x_1,y_2+x_2)|}{2\pi} - \frac{\ln|(x_1,y_2-x_2)|}{2\pi} - \frac{\ln|(-x_1,y_2+x_2)|}{2\pi} \\
&= \frac{\ln\left(\sqrt{x_1^2+(y_2+x_2)^2}\right)}{2\pi} - \frac{\ln\left(\sqrt{x_1^2+(y_2-x_2)^2}\right)}{2\pi} - \frac{\ln\left(\sqrt{(-x_1)^2+(y_2+x_2)^2}\right)}{2\pi} \\
&= \frac{\ln\left(\sqrt{x_1^2+(y_2+x_2)^2}\right)}{2\pi} - \frac{\ln\left(\sqrt{x_1^2+(y_2-x_2)^2}\right)}{2\pi} - \frac{\ln\left(\sqrt{x_1^2+(y_2+x_2)^2}\right)}{2\pi} \\
&= -\frac{\ln\left(\sqrt{(-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}\right)}{2\pi} \\
&= \Phi((0,y_2)-x) \\
&= \Phi(y-x)
\end{aligned}$$

Note que el caso $y=(y_1,0)$ con $y_1 \geq 0$ es análogo, por lo que podemos afirmar que $\phi^x(y) = \Phi(y-x)$ con $y \in \partial U$

Problema 7:

Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$. Decimos que una función $v \in C^2(\overline{U})$ es subarmónica si:

$$-\Delta v \leq 0 \qquad\qquad \text{en } U.$$

1. Demuestre que si v es subarmónica, entonces:

$$v(x) \leq \fint_{B(x,r)} v(y)dy, \qquad\qquad \text{para toda } B(x,r) \subseteq U.$$

Sugerencia: argumente como en la demostración de la propiedad del valor medio para la ecuación de Laplace, es decir, considere $\phi(r) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y)$ y calcule $\phi'(r)$.

Solución:

Considere $\phi(r)$ tal que si tomamos $B(x,r) \subseteq U$:

$$\begin{aligned}
\phi(r) &= \fint_{\partial B(x,r)} v(y)dS(y) \\
&= \fint_{\partial B(0,1)} v(x+rz)dS(z)
\end{aligned}$$

Ahora, si derivamos ϕ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= \frac{d}{dr}\fint_{\partial B(0,1)} v(x+rz)dS(z) \\
&= \fint_{\partial B(0,1)} \nabla v(x+rz)\cdot z dS(z) && \text{Usando } y = x+rz. \\
&= \fint_{\partial B(0,1)} \nabla v(y)\cdot \frac{y-x}{r} dS(y) && \text{Como } \frac{y-x}{r} \text{ es normal a } \partial B(0,1). \\
&= \frac{1}{|\partial B(0,1)|}\int_{\partial B(0,1)} \nabla v(y)\cdot \eta dS(y) \\
&= \frac{1}{|\partial B(0,1)|}\int_{\partial B(0,1)} \Delta v(y)dy && \text{Usando la formula de Green II.} \\
&\geq 0 && \text{Ya que } \Delta v(y) \geq 0
\end{aligned}$$

Ahora, como $\phi'(r) \geq 0$, entonces ϕ debe de ser una función creciente, por lo que podemos asegurar que:

$$\begin{aligned}
\phi(r) &\geq \lim_{r\to 0}\phi(r) \\
&\geq \fint_{\partial B(x,r)} v(y)dS(y) \\
&\geq v(x)
\end{aligned}$$

Problema 7 continúa en la siguiente página. . .

Por lo que podemos asegurar que:

$$v(x) \leq ⨍_{\partial B(x,r)} v(y)dS(y)$$

Ahora, note que:

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,r)} v(y)dy &\geq \int_0^r \int_{\partial B(x,s)} v(y)dS(y)ds \\
&\geq \int_0^r v(x)|\partial B(x,s)|ds \\
&\geq v(x)\int_0^r n\alpha(n)s^{n-1}ds \\
&\geq v(x)\alpha(n)r^n \\
&\geq v(x)|B(x,r)|
\end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir en que:

$$\begin{aligned}
v(x) &\leq \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} v(y)dy \\
&\leq ⨍_{\partial B(x,r)} v(y)dy
\end{aligned}$$

♥

2. Como consecuencia demuestre que si U es conexo, entonces $\max_{\overline{U}} v = \max_{\partial U} v$.

Solución:

Suponga que existe x_0 tal que $v(x_0) = M = \max_{x\in\overline{U}} v(x)$, entonces suponiendo $0 < r_0 < d(x_0, \partial U$ y usando el punto anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}
v(x_0) &\leq ⨍_{B(x_0,r_0)} v(y)dy \\
&\leq M
\end{aligned}$$

Ahora, note que $M < M$ es un absurdo, por lo que necesariamente se debe de tener $M = M$, ahora, aprecie que este hecho solo se puede dar si $v(y) = M$ para todo $y \in B(x_0, r_0)$, lo que motiva a pensar en los siguientes subconjuntos de U:

$$\begin{aligned}
A &:= \{x \in U : v(x) = M\} \\
B &:= \{x \in U : v(x) \neq M\}
\end{aligned}$$

Note que tanto A como como B son abiertos, ya que para cada $x \in A$ se cumple que existe $B(x, r_x)$ tal que para todo $y \in B(x, r_x)$ se da que $y \in A$, usando el razonamiento

que realizamos con x_0.
Ahora, note que B también es abierto, ya que dado $x \in B$ ($v(x) \neq M$), tenemos que por la continuidad de v existe un $0 < r_x < d(x, \partial U)$ tal que si $y \in B(x, r_x)$, entonces $y \neq M$ y por ende $y \in B$.
Luego, note que $A \cup B = U$ y $A \cap B = \emptyset$, pero como U es conexo, entonces $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$, pero como $x_0 \in A$, entonces $B = \emptyset$, por lo que podemos afirmar que $v(x) = M$ para todo $x \in U$, además, como $v \in C^0(\overline{U})$, entonces $v(x) = M$ para todo $x \in \overline{U}$, por lo que podemos asegurar que:

$$\max_{x \in \overline{U}} v(x) = \max_{x \in \partial U} v(x)$$

♥

3. Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función suave convexa ($\phi'' > 0$). Demuestre que si u es armónica, entonces la función $v = \phi(u)$ es subarmónica.

Solución:

Note que:

$$\begin{aligned}
\partial_{x_i} v(x) &= \partial_{x_i} (\phi \circ u)(x) \\
&= [(\phi' \circ u)(x)][\partial_{x_i} u(x)] \\
\partial_{x_i^2} v(x) &= [(\phi'' \circ u)(x)][\partial_{x_i} u(x)][\partial_{x_i} u(x)] + [(\phi' \circ u)(x)][\partial_{x_i^2} u(x)] \\
&= [(\phi'' \circ u)(x)][\partial_{x_i} u(x)]^2 + [(\phi' \circ u)(x)][\partial_{x_i^2} u(x)]
\end{aligned}$$

Pero como $\phi'' > 0$

$$\partial_{x_i^2} v(x) > [(\phi' \circ u)(x)][\partial_{x_i^2} u(x)]$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\Delta v(x) &> [(\phi' \circ u)(x)] \Delta u && \text{Pero como } \Delta u = 0. \\
&> 0
\end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir en que $v = \phi(u)$ es subarmónica.

♥

4. Demuestre que si u es armónica, entonces $v = |\nabla u|^2$ es subarmónica.

Solución:

Note que, como u es armónica, sus derivadas también lo son, además ∇u es la suma de sus derivadas e igualmente sabemos que suma de funciones armónicas es armónica, por lo que será suficiente ver que $v = |u|^2$ es armónica para comprobarlo.
Suponga $\phi(x) = |x|^2$, utilizando el cálculo del punto anterior y $v = \phi(u)$, es fácil llegar a que:

$$\partial_{x_i^2} v(x) = 2[\partial_{x_i} u(x)]^2 + [2|u(x)|][\partial_{x_i^2} u(x)]$$

Por lo que podemos verificar que:

$$\begin{aligned}
\Delta v(x) &= 2\sum_{i=1}^{n}[\partial_{x_i^2} u(x)]^2 + 2|u(x)|\Delta u(x) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}[\partial_{x_i^2} u(x)]^2 && \text{Ya que } \Delta u(x) = 0. \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir que v es subarmónica.

Problema 8:

Sean U un abierto acotado con borde suave y $u \in C^2(\overline{U})$ la solución del problema:

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } U, \\ u = g & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

donde f y g son continuas. Definimos el conjunto $\mathcal{A} = \{w \in C^2(\overline{U}) : w = g \text{ en } \partial U\}$ y el funcional de energía

$$E[w] = \int_U \left(\frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf \right) dx.$$

Muestre que

$$E[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} E[w].$$

Es decir, soluciones de la EDP (1) minimizan el funcional de energía $E[\cdot]$.
Sugerencia: sea $w \in \mathcal{A}$ puesto que u soluciona (1), tenemos que $-\Delta u - f = 0$ en U y por lo tanto:

$$0 = \int_U (-\Delta u - f)(u - w)dx$$

Integre por partes la expresión anterior para obtener el resultado deseado. Recuerde que la desigualdad de Cauchy-Schwartz implica:

$$|\nabla u \cdot \nabla v| \leq |\nabla u||\nabla v| \leq \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla v|$$

Solución:

Escoja $w \in \mathcal{A}$, entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_U (-\Delta u - f)(u - w)dx \\ &= \int_U -(\Delta u)(u - w)dx - \int_U f(u - w)dx \end{aligned}$$

Realizando integración por partes en el primer sumando y como $u - w = g - g = 0$ en ∂U:

$$0 = \int_U \nabla u \cdot \nabla(u - w) - f(u - w)dx$$
$$0 = \int_U \nabla u \cdot \nabla u - \nabla u \cdot \nabla w - uf + wf dx$$

Lo que implica que:

$$\begin{aligned}\int_U |\nabla u|^2 - uf dx &= \int_U \nabla u \cdot \nabla w - wf dx && \text{Usando Cauchy-Schwartz.}\\ &\leq \int_U \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf dx\end{aligned}$$

Lo que implica que:

$$\begin{aligned}\int_U \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - uf dx = E[u] &\leq \int_U \frac{1}{2}|w|^2 - wf dx\\ &\leq E[w]\end{aligned}$$

Por lo que podemos afirmar que $E[u] = \text{mín}_{w\in\mathcal{A}} E[w]$.