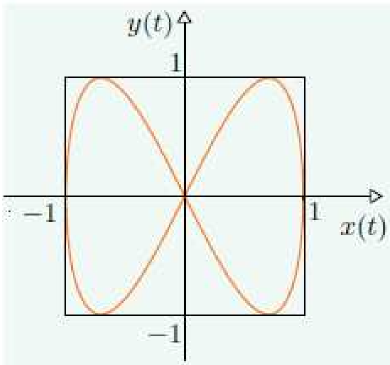
TALLER I- Curvas
Profesores: S. Carolina García y H. Fabián Ramírez

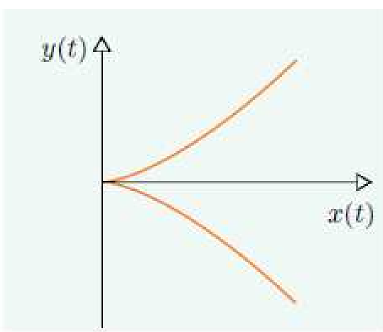
1. Indique cuáles de los siguientes conjuntos son curvas paramétricas regulares:

   - $A = \{(\operatorname{sen}(t), \operatorname{sen}(t^2)) : t \in (-\pi, \pi)\}$
   - $B = \{(t, t^2) : t \in \mathbb{R}\}$
   - $C = \{(\operatorname{sen}(2t), \cos(2t)) : t \in \mathbb{R}\}$
   - $D = \{(\operatorname{sen}(t), \operatorname{sen}(2t)) : t \in \mathbb{R}\}$ o Lemniscata



   - $E = \{(\sqrt{t^2+1}, t^3) : t \in \mathbb{R}\}$
   - $F = \{(\operatorname{sen}^2(t), \cos(t)) : t \in \mathbb{R}\}$
   - $G = \{(t^2, 0, 0) : t \in \mathbb{R}\}$
   - $H = \{(t^2 - 1, t^3 - t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$

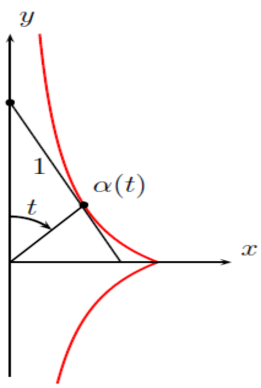
2. La parábola de Neil es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen $x^3 - y^2 = 0$. Parametrice la curva.

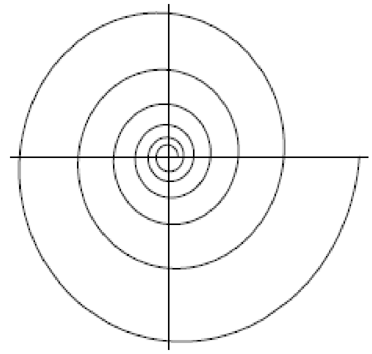


3. Reparametrice las siguientes curvas por longitud de arco:

   a) $\alpha : (0, \pi/2) \to \mathbb{R}^2$ la curva tractriz, dada por $\alpha(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t + \ln(\tan(t/2)))$. Esta curva recibe también el nombre de curva de la persecución, pues describe la trayectoria seguida por un objeto que se desplaza a velocidad constante y que persigue de forma óptima a otro objeto que se mueve en línea recta a velocidad (distinta) también constante. Note que la longitud del segmento de recta tangente a la tractriz entre el punto de tangencia y el eje y es constante.

   b) $\alpha_2(t) = \{ae^{bt}(\cos(t), \operatorname{sen}(t))\}$, donde $a > 0$ y $b < 1$. Esta curva recibe el nombre de espiral logarítmica.



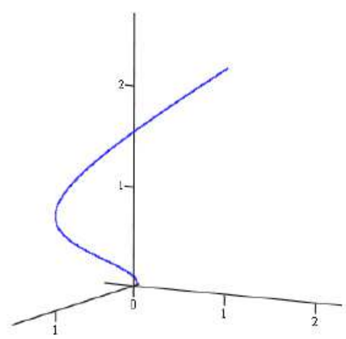


4. Calcule la longitud del astroide de ecuación $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ parametrizada como $\alpha(t)=\big(a\cos^3(t),a\,\mathrm{sen}^3(t)\big)$ con $t\in[0,2\pi]$.

5. Halle la curvatura y torsión de las siguientes curvas:

   a) $\alpha(t)=(t^2,\cos(t),\mathrm{sen}(t))$.

   b) $\alpha(t)=(e^t\cos(t),e^t\,\mathrm{sen}(t),e^t)$, $t\in[0,\infty)$.



   c) $\alpha(t)=(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2},\frac{1}{3}(1-t)^{3/2},t/\sqrt{2})$.

   d) $\alpha(t)=(t,-t^2,1+t^3)$.

6. Calcular la curvatura de una curva plana dada en forma de coordenadas polares.

7. Indique cuáles de las siguientes curvas son planas:

   a) $\alpha(t)=\left(\dfrac{1+t^2}{t},t+1,-\dfrac{1-t}{t}\right)$

   b) $\beta(t)=(2\cos(t),2\,\mathrm{sen}(t),5t)$

8. Reparametrice la circunferencia $\alpha(t)=a(\cos(\theta),\mathrm{sen}(\theta))$ si $-\pi\leq\theta\leq\pi$ con el parámetro $t=\tan(\theta/4)$.

9. Demuestre que la evoluta de la elipse $(a\cos(\theta),b\,\mathrm{sen}(\theta))$, $\theta\in(0,2\pi)$ viene dada por $\left(\dfrac{4-b^2}{a}\cos^3(t),\dfrac{b^2-a^2}{b}\,\mathrm{sen}^3(t)\right)$.

10. Hallar los elementos del triedro de Frenet de la curva $\alpha(t)=(2\cos(t),2\,\mathrm{sen}(t),5t)$, $t\in[0,\infty)$ en el punto $(0,2,5\pi/2)$.

11. Halle las ecuaciones de Frenet de la curva $\alpha(t)=(t,-t^2,1+t^3)$, $t\in[0,\infty)$ en el punto $(0,0,1)$.

12. Demuestre que si $k:I\to\mathbb{R}$ es la función curvatura de una curva α espacial p.p.a. Entonces $\left\langle\alpha'(s),\alpha^{(4)}(s)\right\rangle=-3k(s)k'(s)$.

13. Halle la circunferencia de curvatura (o evoluta) de la parábola $\alpha(t) = \left(t, \dfrac{1}{2}t^2, 0\right)$.

14. Sea $\alpha(t)$ una curva parametrizada que no pasa por el origen. Si $\alpha(t_0)$ es el punto de la traza de α más cercano al origen y $\alpha'(t_0) \neq 0$, demuéstrese que la posición del vector $\alpha(t_0)$ es ortogonal $\alpha'(t_0)$.

15. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular p.p.a. Probar que α es un segmento de recta o un arco de circunferencia si, y sólo si, su curvatura es constante.

16. Una curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ p.p.a. es un segmento de recta o un arco de circunferencia si, y sólo si, todas sus rectas tangentes equidistan de un punto fijo.

17. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular p.p.a. Probar que α es un segmento de recta si, y sólo si, todas sus rectas tangentes son paralelas, y que α es un arco de circunferencia si, y sólo si, todas sus rectas normales pasan por un punto común.

18. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular p.p.a. con $k(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Probar que todas las rectas normales a equidistan de un punto si, y sólo si, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $k(s) = \pm 1/\sqrt{as+b}$ para todo $s \in I$.

19. Demuestre que las rectas tangentes a la curva parametrizada regular $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ forman un ángulo constante con la recta $y = 0$, $z = x$.

20. Halle los puntos donde el plano osculador de la curva $\alpha(t) = \left((t+\pi)\cos(t), -(t+\pi)\operatorname{sen}(t), t^2 + \pi t + \dfrac{\pi^2}{2}\right)$, $t \in [-2\pi, 2\pi]$ es paralelo al plano $z = 0$.

21. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada y sea $v \in \mathbb{R}^3$ un vector fijo. Supóngase que $\alpha'(t)$ es ortogonal a v para todo $t \in I$ y que $\alpha(0)$ también es ortogonal a v. Demostrar que $\alpha(t)$ es ortogonal a v para todo $t \in I$.

22. Dada la hélice $(a\cos(s), a\operatorname{sen}(s), bs)$ p.p.a. Demuestre que las rectas tangentes a α forman un ángulo constante con el eje z.

23. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. Demostrar que α es un segmento de recta si, y sólo si, su curvatura $k(s) = 0$, mientras que α es un arco de circunferencia si, y sólo si, $k(s) > 0$ es constante y $\tau(s) = 0$.

24. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a., con curvatura $k > 0$, verificando además $\tau(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Demostrar que α está contenida en una esfera de radio $r > 0$ si, y sólo si,
$$\frac{1}{k(s)^2} + \frac{k'(s)^2}{k(s)^4\tau(s)^2} = r^2.$$

25. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. con curvatura $k \neq 0$.
    i) Demostrar que α es un arco de circunferencia si, y sólo si, $k > 0$ es constante y su traza está contenida en una esfera.
    ii) Sea $\alpha(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, t)$. Calcular $k(t)$. ¿Es α un arco de circunferencia?

26. Una curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ (p.p.a.) es una curva esférica si su gráfica está contenida en una esfera, esto es, si $\alpha(I) \subset \mathbb{S}^2(r)$.
    i) Demostrar que una curva esférica tiene curvatura $k \geq 1/r$.
    ii) Se llama recta binormal de α en s a la recta que pasa por $\alpha(s)$ con dirección $\mathbf{b}(s)$. Supongamos que todas las rectas binormales de α (curva esférica) son tangentes a $\mathbb{S}^2(r)$. Demostrar que α es un arco de circunferencia máxima.

27. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a., con curvatura k positiva y torsión $\tau \equiv \tau_0 \neq 0$ constante. Probar que la traza de α está contenida en una esfera si, y sólo si, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $k(s) = 1/\left(a\cos(\tau_0 s) + b\operatorname{sen}(\tau_0 s)\right)$.

28. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a., con curvatura $k > 0$.
    i) Demostrar que α es una hélice generalizada si, y sólo si, el vector normal es ortogonal en todo punto a un vector fijo $\mathbf{u}$ (unitario).

ii) Sea $\mathbf{b}(s) = {}_0^s b(t)dt$. Probar que $\mathbf{b}$ está p.p.a. y calcular su curvatura, torsión y triedro de Frenet, en función de los correspondientes elementos de α.

iii) Concluir que α es una hélice generalizada si, y sólo si, $\mathbf{b}$ también lo es.

29. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a., con curvatura $k > 0$. Probar que existe una curva $w : I \to \mathbb{R}^3$ tal que las fórmulas de Frenet de α se pueden expresar de la forma

$$\mathbf{t}'(s) = w(s) \wedge \mathbf{t}(s); \mathbf{n}'(s) = w(s) \wedge \mathbf{n}(s); \mathbf{b}'(s) = w(s) \wedge \mathbf{b}(s).$$

El vector $w(s)$ se denomina la velocidad angular de α en s. Demostrar que α tiene velocidad angular constante si, y sólo si, su curvatura y su torsión son constantes.