Estimación tipo conmutador para transformadas de Hilbert y derivadas fraccionarias.

Andrés David Cadena Simons
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

Julio 29, 2025

Content

Content

Resúmen

En este trabajo se estudia una estimación de conmutador para el operador $H_x D_x^\alpha$, compuesto por la transformada de Hilbert y una derivada fraccionaria. Específicamente, se demuestra que

$$\|[H_x D_x^\alpha, g] D_x^\beta f\|_{L^p} \lesssim \|\partial_x g\|_{L^\infty} \cdot \|f\|_{L^p},$$

donde $\alpha + \beta = 1$ y $1 < p < \infty$. Riaño (2021).

Content

Estimación tipo conmutador no local

Sea $1 < p < \infty$, $0 < \alpha, \beta \leq 1$, tal que $\alpha + \beta = 1$. Entonces

$$\left\| D_x^{\alpha} [H_x, g] D_x^{\beta} f \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim_{p,\alpha,\beta} \|\partial_x g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

para toda función g suave con derivada acotada y toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Content

Recordamos que la transformada de Hilbert H_x está definida en la transformada de Fourier como

$$\hat{H_x f}(\xi) = -isgn(\xi)\hat{f}(\xi).$$

Además, las derivadas fraccionarias están dadas por el operador

$$\widehat{D_x^s f}(\xi) = |\xi|^s \hat{f}(\xi), \qquad s \in \mathbb{R}.$$

También usaremos las proyecciones de Littlewood–Paley P_N^x definidas por

$$P_N^{\hat{x}} f(\xi) = \psi_N(\xi)\hat{f}(\xi),$$

donde $\psi_N(\xi)$ es un multiplicador suave con soporte en frecuencias de orden $|\xi| \sim N$, con N número diádico.

Fefferman–Stein

Sea $f = (f_j)_{j=1}^{\infty}$ una secuencia de funciones localmente integrables en $\mathbb{R}$. Si $1 < p < \infty$, entonces

$$\left\| (Mf_j)_{l^2} \right\|_{L^p} \leq C_p \left\| (f_j)_{l^2} \right\|_{L^p},$$

donde M denota la función maximal de Hardy–Littlewood.

Estimación tipo Calderón

Para $l + m \geq 1$, se tiene

$$\left\| \partial_x^l [H_x, g] \partial_x^m f \right\|_{L^p} \lesssim \left\| \partial_x^{l+m} g \right\|_{L^\infty} \|f\|_{L^p} .$$

Content

Demostración

Note que por la definición de conmutador se tiene que

$$[H_x, g]D_x^{\beta} f = H_x(gD_x^{\beta} f) - gH_xD_x^{\beta} f.$$

Aplicamos la derivada fraccionaria

$$D_x^{\alpha}[H_x, g]D_x^{\beta} f = D_x^{\alpha} H_x(gD_x^{\beta} f) - D_x^{\alpha}(gH_xD_x^{\beta} f).$$

Usando su expresión como multiplicador se tiene que

$$\begin{aligned}\widehat{\left(D_x^{\alpha} H_x (g D_x^{\beta} f)\right)}(\xi) &= (2\pi i)^{|\alpha|} |\xi|^{\alpha} (-i sgn(\xi)) \widehat{g D_x^{\beta} f}(\xi), \\ &= (2\pi i)^{|\alpha|+|\beta|} (-i) \int_{-\infty}^{\infty} sgn(\xi) |\xi|^{\alpha} |\xi-\eta|^{\beta} \hat{g}(\eta) \hat{f}(\xi-\eta)\, d\eta.\end{aligned}$$

De manera similar se puede llegar a que

$$\widehat{\left(D_x^\alpha g H_x D_x^\beta f\right)}(\xi) = (2\pi i)^{|\alpha|+|\beta|}(-i)\int_{-\infty}^{\infty} sgn(\xi-\eta)|\xi|^\alpha|\xi-\eta|^\beta \hat{g}(\eta)\hat{f}(\xi-\eta)\,d\eta.$$

Siendo así, juntando ambas expresiones y realizando los cambios de variables $\eta = \xi_1$ y $\xi_2 = \xi - \eta$, es decir $\xi_1 + \xi_2 = \xi$ podemos verificar que

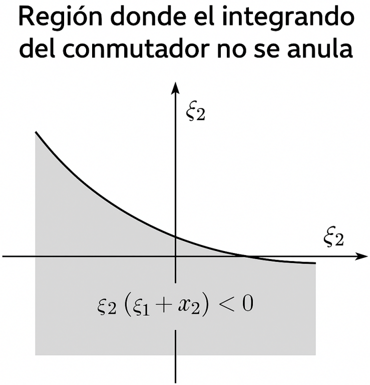
$$\widehat{\left(D_x^\alpha \left[H_x, g\right] D_x^\beta f\right)}(\xi_1 + \xi_2) = (2\pi i)^{|\alpha|+|\beta|}(-i)\int_{-\infty}^{\infty}(sgn(\xi_1+\xi_2) - sgn(\xi_2))|\xi_1+\xi_2|^{\alpha}|\xi_2|^{\beta}$$

Lo que nos permite afirmar que

$$(2\pi i)^{|\alpha|+|\beta|}(-i)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(sgn(\xi_1+\xi_2) - sgn(\xi_2))|\xi_1+\xi_2|^{\alpha}|\xi_2|^{\beta}\hat{g}(\xi_1)\hat{f}(\xi_2)e^{2\pi i x(\xi_1+\xi_2)}\, d\xi$$

Note que el integrando solamente es igual a 0 cuando $sgn(\xi_1 + \xi_2) - sgn(\xi_2) = 0$, es decir cuando $(\xi_1 + \xi_2)(\xi_2) > 0$, por lo que solo estaremos interesados en estudiar cuando $(\xi_1 + \xi_2)(\xi_2) < 0$, es decir

$$\begin{cases} \xi_2 > 0, & \text{entonces } \xi_1 < -\xi_2, \\ \xi_2 < 0, & \text{entonces } \xi_1 > -\xi_2. \end{cases}$$



$$
\begin{aligned}
D_x^\alpha [H_x, g] D_x^\beta f &= H_x \left(\sum_{N>0} D^\alpha (P_N^x g P_{\ll N}^x D_x^\beta f) \right) - \sum_{N>0} D^\alpha (P_N^x g P_{\ll N}^x H_x D_x^\beta f) \\
&\quad + H_x \left(\sum_{N>0} D^\alpha (P_N^x g \tilde{P}_N^x D_x^\beta f) \right) - \sum_{N>0} D^\alpha (P_N^x g \tilde{P}_N^x H_x D_x^\beta f), \\
&= A_1 + A_2 + A_3 + A_4,
\end{aligned}
$$

Content

Bibliography. I

Duoandikoetxea, Javier. 2001. *Fourier analysis.* Graduate Studies in Mathematics, vol. 29. American Mathematical Society, Providence, RI. Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Uribe.

Grafakos, Loukas. 2014. *Classical Fourier analysis.* Third edn. Graduate Texts in Mathematics, vol. 249. Springer, New York.

Linares, Felipe, & Ponce, Gustavo. 2015. *Introduction to nonlinear dispersive equations.* Second edn. Universitext. Springer, New York.

Riaño, Oscar G. 2021. Well-posedness for a two-dimensional dispersive model arising from capillary-gravity flows. *J. Differ. Equations*, **280**, 1–65.

Stein, Elias M. 1993. *Harmonic analysis: Real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. With the assistance of Timothy S. Murphy.* Princeton Math. Ser., vol. 43. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Gracias por su atención.

Board