

Análisis Armónico: Taller 2

19 de mayo de 2025

Universidad Nacional de Colombia

Ricardo Ariel Pastrán Ramirez

Andrés David Cadena Simons

acadenas@unal.edu.co

Problema 1:

Convolución

(I) Pruebe que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p \leq 2$, entonces

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$$

en $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

(II) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, donde $1 < p < \infty$, entonces $f * g \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$.
¿Qué se puede afirmar cuando $p = 1$ o $p = \infty$?

Antes de comenzar será de utilidad demostrar la siguiente desigualdad.

Lema 1: Desigualdad de Young

Suponga $p, q, r \leq 1$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. Luego dadas $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Definamos T_g al operador

$$T_g(f) = f * g.$$

Veamos que $T_g : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ es un operador acotado ya que usando la desigualdad de Minkowski.

$$\begin{aligned} \|T_g(f)\|_q &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} dy, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} dy, \\ &\leq \|g\|_q \|f\|_1. \end{aligned}$$

Por otro lado también podemos ver que $T_g : L^{q'}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ya que usando la desigualdad de Hölder podemos ver que

$$\begin{aligned} \|T_g(f)\|_\infty &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dx \right|, \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)| dy \right|, \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{q'} dy \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}}, \\ &\leq \|g\|_q \|f\|_{q'}. \end{aligned}$$

Luego, usando el teorema de interpolación de Riesz-Thorin sabemos que podemos definir $T_g : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^r(\mathbb{R}^n)$ con

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{1-t}{1} + \frac{t}{q'}, \\ \frac{1}{r} &= \frac{1-t}{q}. \end{aligned}$$

Lo que implica

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1,$$

lo que concluye el lema.

Solución:

- (1) Veamos que $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ya que usando la desigualdad integral de Minkowski's se cumple que

$$\begin{aligned} \|f * g\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \|g\|_p dy, \\ &\leq \|f\|_1 \|g\|_p. \end{aligned}$$

Ahora veamos que $\widehat{f * g} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, ya que usando el teorema de interpolación de

Riesz-Thorin podemos ver que como

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n), \\ \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

Luego podemos definir $\mathcal{F} : L^p \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ con

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} &= \frac{1-t}{1} + \frac{t}{2}, \\ \frac{1}{q} &= \frac{t}{2}.\end{aligned}$$

Lo que implica que

$$\frac{1}{p} - 1 + \frac{2}{q} = \frac{1}{q},$$

que a su vez implica que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

en donde sabemos que $q = p'$, lo que nos permite concluir que $\widehat{f * g} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.

Ahora veamos que se cumple la propiedad.

Recuerde que si $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces $g \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$, suponga $g_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que $g = g_1 + g_2$, además, suponga $\{g_k\} \subseteq L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que $g_k \rightarrow g_2$ cuando $k \rightarrow \infty$, entonces

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(\xi) &= (f * (\widehat{g_1 + g_2}))(\xi), \\ &= \widehat{f * g_1}(\xi) + \widehat{f * g_2}(\xi), \\ &= \widehat{f * g_1}(\xi) + \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{f * g_k}(\xi), \\ &= \widehat{f}(\xi) \widehat{g_1}(\xi) + \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) \widehat{g_k}(\xi), \\ &= \widehat{f}(\xi) \widehat{g_1}(\xi) + \widehat{f}(\xi) \widehat{g_2}(\xi), \\ &= \widehat{f}(\xi) (\widehat{g_1}(\xi) + \widehat{g_2}(\xi)), \\ &= \widehat{f}(\xi) \widehat{g_1 + g_2}(\xi), \\ &= \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi).\end{aligned}$$

Lo que concluye el resultado.

(II) Veamos que $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$.

Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (este viene dado por la continuidad de las traslaciones en $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, es decir que $\lim_{h \rightarrow 0} \|g(x+h) - g(x)\|_{p'} = 0$) tal que si

$$|x - y| < \delta,$$

entonces usando la desigualdad de Young y la continuidad de las traslaciones de la norma en $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ (es este caso tomamos ese ϵ como $\frac{\epsilon}{\|f\|_p}$) se tiene que

$$\begin{aligned}
 |(f * g)(x) - (f * g)(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z) dz - \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(y-z) dz \right|, \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(z) (g(x-z) - g(y-z)) dz \right|, \\
 &\leq \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(z) (g(x-z) - g(y-z)) dz \right|, \\
 &\leq \|f * (g(y - \cdot) - g(x - \cdot))\|_{\infty}, \\
 &\leq \|f\|_p \|g(y - \cdot) - g(x - \cdot)\|_{p'}, \\
 &< \|f\|_p \frac{\epsilon}{\|f\|_p}, \\
 &< \epsilon.
 \end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir que $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$.

Ahora veamos que $f * g(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$.

Suponga $\{g_k\} \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ (continua de soporte compacto) tal que $g_k \rightarrow g$ cuando $k \rightarrow \infty$, sin pérdida de generalidad suponga $\text{supp}(g_k) \subset B_k(0)$, luego dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $k > N$, entonces

$$\|g - g_k\|_{p'} < \epsilon.$$

Además, note que como $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, podemos asegurar que dado $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que si $k > R$, entonces

$$\left(\int_{|x| > k} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Luego tomando k adecuado que cumpla las 2 condiciones anteriores se cumple que

$$\begin{aligned}
 |(f * g)(x)| &= |(f * (g_k + g - g_k))(x)|, \\
 &= |(f * g_k)(x)| + |(f * (g - g_k))(x)|, \\
 &= I + J.
 \end{aligned}$$

Estudiamos I y supongamos $|x| > 2k$, entonces

$$\begin{aligned}
 |(f * g_k)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g_k(x-y) dy \right|, \\
 &\leq \int_{B_k(x)} |f(y) g_k(x-y)| dy, \\
 &\leq \|g_k\|_\infty \int_{B_k(x)} |f(y)| dy, \\
 &\leq \|g_k\|_\infty \int_{|y| \geq k} |f(y)| dy, \\
 &< \|g_k\| \epsilon.
 \end{aligned}$$

Ahora estudiemos J , usando la desigualdad de Young se tiene que

$$\begin{aligned}
 |(f * (g - g_k))(x)| &\leq \|(f * (g - g_k))\|_\infty, \\
 &\leq \|f\|_p \|g - g_k\|_{p'}, \\
 &< \|f\|_p \epsilon.
 \end{aligned}$$

luego tenemos que tomando x suficientemente grande y un k adecuado se cumple que

$$\begin{aligned}
 |(f * g)(x)| &= I + J, \\
 &< \|g_k\| \epsilon + \|f\| \epsilon, \\
 &< M\epsilon.
 \end{aligned}$$

Por lo que podemos asegurar que $(f * g)(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, lo que concluye el ejercicio.

Problema 2:

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, f es continua en 0 y $\widehat{f} \geq 0$ entonces $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Solución:

Usemos el núcleo del calor

$$g_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

en donde

$$\widehat{g}_t(\xi) = e^{-4\pi^2 t |\xi|^2}.$$

Note que usando que g_t es par y propiedades de la transformada de Fourier se cumple que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_t(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_t(-x) dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{g}_t(x) dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}_t(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Además si tomamos $t \rightarrow 0$, como f es continua en 0 (es decir que 0 es un punto de Lebesgue) entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_t(x) dx = f(0).$$

Luego como $\widehat{f} \geq 0$ y $\widehat{f}(\xi) e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \rightarrow \widehat{f}(\xi)$ de manera creciente y monótona cuando $t \rightarrow 0$, usando el teorema de la convergencia monótona tenemos que

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) d\xi, \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}_t(\xi) d\xi, \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_t(x) dx, \\ &= f(0). \end{aligned}$$

Problema 3:

Producto de convolución $\mathcal{S}' * \mathcal{S}$.

(I) Sean f, ϕ y $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pruebe que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f * \phi(x) \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \tilde{\phi} * \psi(x) dx,$$

donde $\tilde{\phi}(x) = \phi(-x)$. Esto motiva la siguiente definición: Sean $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$T * \phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \psi \longmapsto T * \phi(\psi) := T(\tilde{\phi} * \psi).$$

Pruebe que $T * \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y que

$$\widehat{(T * \phi)} = \widehat{T} \widehat{\phi} \quad \text{en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

(II) Por otro lado, si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se define:

$$T *_1 \phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longmapsto T *_1 \phi(x) := T(\tau_x \tilde{\phi}),$$

donde $\tau_x \phi(y) = \phi(y - x)$. Pruebe entonces que

$$T *_1 \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{y} \quad T *_1 \phi = T * \phi.$$

Solución:

(I)

Veamos que $T * \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Por claridad defina el operador $T_T(\phi) = T * \phi$, note que como $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y la convolución para funciones en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es lineal, entonces T_T es lineal, ya que si tomamos $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y λ escalar, entonces

$$\begin{aligned} T_T(\phi + \lambda\psi) &= (T * (\phi + \lambda\psi))(f), \\ &= T\left(\widetilde{(\phi + \lambda\psi) * f}\right), \\ &= T\left(\tilde{\phi} * f + \lambda\tilde{\psi} * f\right), \\ &= (T * \phi)(f) + \lambda(T * \psi)(f), \\ &= T_T(\phi) + \lambda T_T(\psi). \end{aligned}$$

Ahora veamos que T_T es un operador acotado, para esto recuerde que como $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces se satisface que existe una constante $C > 0$ y enteros m, l tales que

$$|T(\phi)| \leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq l \\ |\beta| \leq m}} \rho_{\alpha, \beta}(\phi)$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Asumiendo esto podemos ver que como $\tilde{\phi} * f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned} |T_T(\phi)| &= |(T * \phi)(f)|, \\ &= \left| T(\tilde{\phi} * f) \right|, \\ &\leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq l \\ |\beta| \leq m}} \rho_{\alpha, \beta}(\tilde{\phi} * f) \end{aligned}$$

Lo que concluye que T_T es un operador lineal continuo, es decir, $T * \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Ahora, veamos que $\widehat{(T * \phi)} = \widehat{T} \widehat{\phi}$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Note que

$$\begin{aligned} \widehat{(T * \phi)}(f) &= (T * \phi)(\widehat{f}), \\ &= T(\tilde{\phi} * \widehat{f}), \\ &= T(\widehat{\widehat{\phi}} * \widehat{f}), \\ &= T(\widehat{(\widehat{\phi} f)}), \\ &= \widehat{T}(\widehat{\phi} f), \\ &= \widehat{T} \widehat{\phi}(f). \end{aligned}$$

Lo que concluye el ejercicio.

(II)

Veamos que $T * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cup \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Primero veamos que $T *_1 \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, para esto note que como T es continuo, entonces

$$\begin{aligned}
 \partial_{x_j} (T *_1 \phi)(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(T *_1 \phi)(x + h\epsilon_j) - (T *_1 \phi)(x)}{h}, \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(\tau_{x+h\epsilon_j} \tilde{\phi}(y)) - T(\tau_x \tilde{\phi}(y))}{h}, \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(\phi(x + h\epsilon_j - y)) - T(\phi(x - y))}{h}, \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} T\left(\frac{\phi(x + h\epsilon_j - y) - \phi(x - y)}{h}\right), \\
 &= T\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(x + h\epsilon_j - y) - \phi(x - y)}{h}\right), \\
 &= T(\partial_{x_j} \phi(x - y)), \\
 &= T(\tau_x \widetilde{\partial_{x_j} \phi}(y)), \\
 &= (T *_1 \partial_{x_j} \phi)(x),
 \end{aligned}$$

luego usando un argumento inductivo, como $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ podemos concluir que $T *_1 \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ahora veamos que $T *_1 \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, para esto con el fin de ser más claros definiremos el operador $T_T(\phi) = T *_1 \phi$, note que como las traslaciones y reflexiones son lineales, entonces dadas $\phi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con λ escalar se cumple que

$$\begin{aligned}
 T_T(\phi + \lambda\varphi) &= T *_1 (\phi + \lambda\varphi), \\
 &= T(\tau_x \widetilde{\phi + \lambda\varphi}), \\
 &= T(\tau_x \tilde{\phi} + \lambda\tau_x \tilde{\varphi}), \\
 &= T(\tau_x \tilde{\phi}) + \lambda T(\tau_x \tilde{\varphi}), \\
 &= T *_1 \phi + \lambda T *_1 \varphi.
 \end{aligned}$$

Ahora veamos la continuidad, note que como $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, entonces existe una constante $C > 0$ y enteros m y l tales que para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se cumple que

$$|T(\phi)| \leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq l \\ |\beta| \leq m}} \rho_{\alpha, \beta}(\phi),$$

usando esto se puede ver que

$$\begin{aligned}
 |T_T(\phi)| &= |T *_1 \phi(x)|, \\
 &= \left| T(\tau_x \tilde{\phi}(y)) \right|, \\
 &\leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq l \\ |\beta| \leq m}} \rho_{\alpha, \beta}(\tau_x \tilde{\phi}),
 \end{aligned}$$

lo que nos permite concluir que $T_T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, es decir que $T *_1 \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Ahora, con el fin de ver que $T *_1 \phi = T * \phi$, usaremos que la transformada de Fourier es un isomorfismo en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, es decir, demostraremos que $\widehat{(T *_1 \phi)} = \widehat{T} \widehat{\phi}$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y como la transformada de Fourier es un isomorfismo en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, entonces $T *_1 \phi = T * \phi$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Problema 4:

Topología sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ Definimos la aplicación

$$d : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(\phi, \psi) \longmapsto \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} 2^{-(|\alpha|+|\beta|)} \frac{\|\phi - \psi\|_{\alpha, \beta}}{1 + \|\phi - \psi\|_{\alpha, \beta}}$$

(I) Pruebe que $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n); d)$ es un espacio métrico completo.

(II) Pruebe que para cualquier sucesión $(\phi_k)_k \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, vale

$$\phi_k \xrightarrow{d} \phi \text{ si y solo si } \|\phi_k - \phi\|_{\alpha, \beta} \rightarrow 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$$

(III) Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pruebe que

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ si y solo si } x^\alpha \partial^\beta f \in L^2(\mathbb{R}^n), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

(IV) Muestre que

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

$$\phi \longmapsto \widehat{\phi}$$

es un isomorfismo topológico.

Solución:

Solución

Problema 5:**Valor principal.**

Definimos

$$v.p. \left(\frac{1}{x} \right) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C},$$
$$\phi \longmapsto \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx.$$

Pruebe que $v.p. \left(\frac{1}{x} \right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y calcule $\widehat{v.p. \left(\frac{1}{x} \right)}$.**Solución:**Solución