Sobre la función máximal de Hardy-Littlewood y un vistazo al trabajo futuro

Andrés David Cadena Simons

Trabajo realizado bajo la dirección del profesor Oscar Guillermo Riaño Castañeda y Ricardo Ariel Pastrán Ramírez.

Semillero de Análisis Armónico y Ecuaciones Diferenciales Parciales, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia

01 de diciembre de 2023

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Resumen

El propósito de este póster es presentar uno de los resultados estudiados durante el *Semillero de Análisis Armónico y Ecuaciones Diferenciales Parciales* del departamento de matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia sede Bogotá, referentes al estudio de la *función maximal de Hardy-Littlewood*.

En este mismo se presentarán resultados y teoremas preliminares como aproximaciones de la identidad, convergencia en casi todo punto, desigualdades débiles/fuertes y el teorema de interpolación de Marcinkiewicz, esto con el fin de introducir la función maximal de Hardy-Littlewood y continuar su estudio enfocados a resultados como: mostrar que la función maximal establece un operador acotado en $\mathcal{L}^\infty$, un operador $(1,1)$-débil y deducir de esto el teorema de diferenciación de Lebesgue. Como trabajo futuro, se plantea estudiar para cuales espacios de Sobolev la función maximal de Hardy-Littlewood determina un operador continuo.

1. Conceptos y Definiciones

Aproximación de la identidad

Suponga ϕ como una función integrable en $\mathbb{R}^n$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n}\phi = 1$, y luego definamos para todo $t>0$ a

$$\phi_t(x) = t^{-n}\phi(t^{-1}x).$$

Si $t\to 0$, ϕ_t converge en el sentido distribucional de $\mathcal{S}'$ a δ_0 (la medida delta de Dirac en el origen), entonces diremos que $\{\phi_t \,|\, t>0\}$ es una aproximación de la identidad.

Desigualdades débiles y fuertes

Sean (X,μ) y (Y,ν) dos espacios de medida y sea T un operador de $\mathcal{L}^p(X,\mu)$, en el espacio de funciones medibles de Y en $\mathbb{C}$.

$$T:\mathcal{L}^p(X,\mu)\to\mathcal{M}(Y,\mathbb{C})$$

i. Se dice que T es (p,q)-débil (con $q<\infty$) si para todo $\lambda>0$ existe $C>0$ tal que:

$$\nu(\{y\in Y : |(Tf)(y)|>\lambda\}) \leq \left(\frac{C||f||_p}{\lambda}\right)^q.$$

ii. Se dice que T es (p,∞)-débil si está acotado de $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ en $\mathcal{L}^\infty(Y,\nu)$.

iii. Se dice que T es (p,q)-fuerte si está acotado de $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ en $\mathcal{L}^q(Y,\nu)$.

Función de distribución

Sea (X,μ) un espacio de medida y sea $f: X\to\mathbb{C}$ una función medible.
Se llama función de distribución de f asociadad a μ a la función:

$$\begin{aligned} a_f &: (0,\infty)\to[0,\infty] \\ \lambda &\to \mu(\{x\in X : |f(x)|>\lambda\}) \end{aligned}$$

Operador sublineal

Un operador T de un espacio vectorial de funciones medibles en funciones medibles se dice *sublineal* si

- $|T(f_1+f_2)(x)| \leq |T(f_1)(x)| + |T(f_2)(x)|$.
- $|T(\lambda f)(x)| = |\lambda||T(f)(x)|$ para todo $\lambda\in\mathbb{C}$

Función Maximal de Hardy-Littlewood

Sea B_r la bola euclidea centrada en el origen y de radio r. Definiremos la función maximal de Hardy-Littlewood de una función localmente integrable f en $\mathbb{R}^n$ como:

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}|f(x-y)|dy$$

2. Resultados

Teorema. *Sea $\{\phi_t \,|\, t>0\}$ una aproximación de la identidad, entonces*

$$\lim_{t\to 0}||\phi_t * f - f||_p = 0,$$

para cualquier $f\in\mathcal{L}^p$, con $1\leq p<\infty$ y uniformemente (caso $p=\infty$) si f es continua y tiende a 0 en infinito, esto es, $f\in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Como una consecuencia de este teorema, sabemos que existe una sucesión $\{t_k\}$ que depende de f tal que $t_k\to 0$ y

$$\lim_{k\to\infty}\phi_{t_k} * f(x) = f(x) \quad \text{c.t.p.}$$

Es por esto que si el límite $\lim_{t\to 0}\phi_t * f(x)$ existe, debe de ser igual a $f(x)$ en casi todo punto. Más adelante se estudiará la existencia de este límite en general, no solo para una secuencia $\{t_k\}$.

Proposición. *Sea T un operador (p,q)-fuerte, entonces T es (p,q)-débil.*

Demostracón (idea). Denotemos por

$$E_\lambda = \{y\in Y : |(Tf)(y)|>\lambda\},$$

luego se tiene que

$$\begin{aligned} \nu(E_\lambda) = \int_{E_\lambda} d_\nu &\leq \int_{E_\lambda}\left|\frac{(Tf)(y)}{\lambda}\right|^q d\nu \\ &\leq \frac{1}{\lambda^q}\int_Y |(Tf)(y)|^q d\nu = \frac{1}{\lambda^q}||Tf||_q^q \\ &\leq \frac{1}{\lambda^q}(C||f||_p)^q = \left(\frac{C||f||_p}{\lambda}\right)^q. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema. *Sea $\{T_t\}$ una familia de operadores lineales en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$, es decir,*

$$\begin{aligned} T_t : \mathcal{L}^p(X,\mu) &\to \mathcal{L}^p(X,\mu) \\ f &\to T_t f \end{aligned}$$

y definimos

$$T^*f(x) = \sup_t |T_t f(x)|.$$

Si T^* es (p,q)-débil, el conjunto

$$\{f\in\mathcal{L}^p |\ \lim_{t\to t_0} T_t f(x) = f(x) \text{ c.t.p}\}$$

es cerrado en $\mathcal{L}^p$.

Observaciones:

- T^* se llama operador maximal asociado a $\{T_t\}$.
- Como para las aproximaciones de la identidad conocemos la convergencia puntual hacía f para funciones de $\mathcal{S}$, basta probar acotaciones débiles sobre el operador maximal $\sup_{t>0}|\phi_t * f(x)|$ para deducir la convergencia en casi todo punto para $f\in\mathcal{L}^p$, $1\leq p<\infty$, o para $f\in C^0$.

Proposición. *Sea $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ una función derivable y creciente tal que $\varphi(0)=0$, entonces:*

$$\int_X \varphi(|f(x)|)d\mu = \int_0^\infty \varphi'(\lambda)a_f(\lambda)d\lambda.$$

Si en particular, $\varphi(\lambda)=\lambda^p$, entonces podemos concluir que:

$$||f||_{L^p}^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}a_f(\lambda)\,d\lambda.$$

Teorema (Teorema de interpolación de Marcinkiewicz). *Sean (X,μ) y (Y,ν) espacios medibles, $1\leq p_0<p_1\leq\infty$, y tome T como un operador sublineal de $L^{p_0}(X,\mu)+L^{p_1}(X,\mu)$ a las funciones de medida de Y que es débil (p_0,p_0) y es débil (p_1,p_1). Entonces T es fuerte (p,p) para $p_0<p<p_1$.*

Algunas consecuencias:

La función maximal establece un operador fuerte (∞,∞). Para ver esto, sea $f\in\mathcal{L}^\infty$, entonces para $x\in\mathbb{R}^N$ y $r>0$ arbitrarios se tiene

$$\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}|f(x-y)|\,dy \leq \|f\|_\infty.$$

Luego tomando el supremo en $r>0$, tenemos $\mathcal{M}f(x)\leq\|f\|_\infty$. Ahora, como $x\in\mathbb{R}^N$ es arbitrario, se deduce que

$$\|\mathcal{M}f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Luego $\mathcal{M}$ define un operador (∞,∞). En trabajos futuros estudiaremos el siguiente resultado.

Teorema. El operador $\mathcal{M}$ es débil $(1,1)$.

Como consecuencia del teorema de interpolación de Marcinkiewicz y lo anterior, tenemos que $\mathcal{M}$ es un operador fuerte (p,p) para todo $1<p\leq\infty$.

Notemos que dada $f\in\mathcal{L}^1$, $\mathcal{M}f\in\mathcal{L}^1$ si y solo si $f=0$. Por lo que no se espera la acotación fuerte en $\mathcal{L}^1$.

3. Trabajo Futuro

- Demostrar que $\mathcal{M}$ es débil $(1,1)$. Para esto tendremos que estudiar conceptos como la función maximal diádica y la descomposición de Calderón-Zygmund.
- Una vez tengamos estos resultados, deduciremos el teorema de diferenciación de Lebesgue. Para esto usaremos el resultado enunciado antes para ver que

  $$\mathcal{L}^p = \{f\in\mathcal{L}^p |\ \lim_{r\to 0^+}\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(x-y)\,dy = f(x) \text{ c.t.p}\},$$

  para $1\leq p<\infty$.
- Mostraremos que si ϕ es una función positiva, radial, decreciente (como función de $(0,\infty)$), entonces $\sup_t|\phi_t * f(x)| \leq \|\phi\|_1\mathcal{M}f(x)$. Como consecuencia tenemos que la función maximal $\sup_t|\phi_t * f(x)|$ es débil $(1,1)$ y fuerte (p,p), $1\leq p\leq\infty$. Este resultado permite generalizar (sin usar secuencias $\{t_n\}$) el resultado de convergencia mencionado anteriormente para aproximaciones de la identidad.
- Dado $1\leq p\leq\infty$. Recordamos que el *espacio de Sobolev* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ comprende todas las funciones $f\in\mathcal{L}^p$ tales que f tiene gradiente débil y $\nabla f\in\mathcal{L}^p$. A este espacio se le asigna la norma

  $$\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_{L^p} + \|\nabla f\|_{L^p}.$$

  La idea es estudiar artículos como el de Kinnunen (1997) donde se verifica que

  $$\mathcal{M} : W^{1,p}(\mathbb{R}^N)\to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

  establece un operador acotado cuando $1<p\leq\infty$.

4. Agradecimientos

Agradezco al Semillero de Análisis Armónico y Ecuaciones Diferenciales Parciales de la Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogotá, especialmente a los docentes Ricardo Ariel Pastrán Ramírez y Oscar Guillermo Riaño Castañeda, quienes orientaron el proceso de desarrollo de este póster, tanto en la parte teórica como en la presentación del mismo.

Referencias

[1] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, Grad. Stud. Math., vol. 29, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, translated and revised from the 1995 Spanish original by D. Cruz-Uribe.

[2] J. Kinnunen, *The Hardy-Littlewood maximal function of a Sobolev function*, Israel J. Math. 100 (1997), 117–124.

[3] J. Kinnunen and P. Lindqvist, *The derivative of the maximal function*, J. Reine Angew. Math. 503 (1998), 161–167.