

# Análisis Armónico: Taller 2

17 de junio de 2025

*Universidad Nacional de Colombia*

Ricardo Ariel Pastrán Ramirez

Andrés David Cadena Simons

acadenas@unal.edu.co

## Problema 1:

### Convolución

(I) Pruebe que si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y  $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , con  $1 \leq p \leq 2$ , entonces

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$$

en  $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ , donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

(II) Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  y  $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ , con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , donde  $1 < p < \infty$ , entonces  $f * g \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ .  
¿Qué se puede afirmar cuando  $p = 1$  o  $p = \infty$ ?

Antes de comenzar será de utilidad demostrar la siguiente desigualdad.

#### Lema 1: Desigualdad de Young

Suponga  $p, q, r \leq 1$ , tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ . Luego dadas  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  y  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ , entonces

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Definamos  $T_g$  al operador

$$T_g(f) = f * g.$$

Veamos que  $T_g : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$  es un operador acotado ya que usando la desigualdad de Minkowski.

$$\begin{aligned} \|T_g(f)\|_q &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} dy, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} dy, \\ &\leq \|g\|_q \|f\|_1. \end{aligned}$$

Por otro lado también podemos ver que  $T_g : L^{q'}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$  ya que usando la desigualdad de Hölder podemos ver que

$$\begin{aligned} \|T_g(f)\|_\infty &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dx \right|, \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)| dy \right|, \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{q'} dy \right)^{\frac{1}{q'}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}}, \\ &\leq \|g\|_q \|f\|_{q'}. \end{aligned}$$

Luego, usando el teorema de interpolación de Riesz-Thorin sabemos que podemos definir  $T_g : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^r(\mathbb{R}^n)$  con

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{1-t}{1} + \frac{t}{q'}, \\ \frac{1}{r} &= \frac{1-t}{q}. \end{aligned}$$

Lo que implica

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1,$$

lo que concluye el lema.

### Solución:

- (1) Veamos que  $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$  ya que usando la desigualdad integral de Minkowski's se cumple que

$$\begin{aligned} \|f * g\|_p &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \|g\|_p dy, \\ &\leq \|f\|_1 \|g\|_p. \end{aligned}$$

Ahora veamos que  $\widehat{f * g} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ , ya que usando el teorema de interpolación de

Riesz-Thorin podemos ver que como

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n), \\ \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

Luego podemos definir  $\mathcal{F} : L^p \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$  con

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} &= \frac{1-t}{1} + \frac{t}{2}, \\ \frac{1}{q} &= \frac{t}{2}.\end{aligned}$$

Lo que implica que

$$\frac{1}{p} - 1 + \frac{2}{q} = \frac{1}{q},$$

que a su vez implica que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

en donde sabemos que  $q = p'$ , lo que nos permite concluir que  $\widehat{f * g} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ .

Ahora veamos que se cumple la propiedad.

Recuerde que si  $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $g \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$ , suponga  $g_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y  $g_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$  tales que  $g = g_1 + g_2$ , además, suponga  $\{g_k\} \subseteq L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  tales que  $g_k \rightarrow g_2$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , entonces

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(\xi) &= (f * (\widehat{g_1 + g_2}))(\xi), \\ &= \widehat{f * g_1}(\xi) + \widehat{f * g_2}(\xi), \\ &= \widehat{f * g_1}(\xi) + \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{f * g_k}(\xi), \\ &= \widehat{f}(\xi) \widehat{g_1}(\xi) + \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) \widehat{g_k}(\xi), \\ &= \widehat{f}(\xi) \widehat{g_1}(\xi) + \widehat{f}(\xi) \widehat{g_2}(\xi), \\ &= \widehat{f}(\xi) (\widehat{g_1}(\xi) + \widehat{g_2}(\xi)), \\ &= \widehat{f}(\xi) \widehat{g_1 + g_2}(\xi), \\ &= \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi).\end{aligned}$$

Lo que concluye el resultado.

(II) Veamos que  $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$ .

Dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  (este viene dado por la continuidad de las traslaciones en  $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ , es decir que  $\lim_{h \rightarrow 0} \|g(x+h) - g(x)\|_{p'} = 0$ ) tal que si

$$|x - y| < \delta,$$

entonces usando la desigualdad de Young y la continuidad de las traslaciones de la norma en  $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$  (es este caso tomamos ese  $\epsilon$  como  $\frac{\epsilon}{\|f\|_p}$ ) se tiene que

$$\begin{aligned}
 |(f * g)(x) - (f * g)(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z) dz - \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(y-z) dz \right|, \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(z) (g(x-z) - g(y-z)) dz \right|, \\
 &\leq \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(z) (g(x-z) - g(y-z)) dz \right|, \\
 &\leq \|f * (g(y - \cdot) - g(x - \cdot))\|_{\infty}, \\
 &\leq \|f\|_p \|g(y - \cdot) - g(x - \cdot)\|_{p'}, \\
 &< \|f\|_p \frac{\epsilon}{\|f\|_p}, \\
 &< \epsilon.
 \end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir que  $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$ .

Ahora veamos que  $f * g(x) \rightarrow 0$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ .

Suponga  $\{g_k\} \subset C_c(\mathbb{R}^n)$  (continua de soporte compacto) tal que  $g_k \rightarrow g$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , sin pérdida de generalidad suponga  $\text{supp}(g_k) \subset B_k(0)$ , luego dado  $\epsilon > 0$  existe  $N > 0$  tal que si  $k > N$ , entonces

$$\|g - g_k\|_{p'} < \epsilon.$$

Además, note que como  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , podemos asegurar que dado  $\epsilon > 0$  existe  $R > 0$  tal que si  $k > R$ , entonces

$$\left( \int_{|x| > k} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Luego tomando  $k$  adecuado que cumpla las 2 condiciones anteriores se cumple que

$$\begin{aligned}
 |(f * g)(x)| &= |(f * (g_k + g - g_k))(x)|, \\
 &= |(f * g_k)(x)| + |(f * (g - g_k))(x)|, \\
 &= I + J.
 \end{aligned}$$

Estudiamos  $I$  y supongamos  $|x| > 2k$ , entonces

$$\begin{aligned} |(f * g_k)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g_k(x-y) dy \right|, \\ &\leq \int_{B_k(x)} |f(y) g_k(x-y)| dy, \\ &\leq \|g_k\|_\infty \int_{B_k(x)} |f(y)| dy, \\ &\leq \|g_k\|_\infty \int_{|y| \geq k} |f(y)| dy, \\ &< \|g_k\| \epsilon. \end{aligned}$$

Ahora estudiemos  $J$ , usando la desigualdad de Young se tiene que

$$\begin{aligned} |(f * (g - g_k))(x)| &\leq \|(f * (g - g_k))\|_\infty, \\ &\leq \|f\|_p \|g - g_k\|_{p'}, \\ &< \|f\|_p \epsilon. \end{aligned}$$

luego tenemos que tomando  $x$  suficientemente grande y un  $k$  adecuado se cumple que

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &= I + J, \\ &< \|g_k\| \epsilon + \|f\| \epsilon, \\ &< M\epsilon. \end{aligned}$$

Por lo que podemos asegurar que  $(f * g)(x) \rightarrow 0$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ , lo que concluye el ejercicio.

¿Qué podemos afirmar cuando  $p = 1$  o  $p = \infty$ ?

Veamos que si  $p = 1$ , entonces  $p' = \infty$ , luego se puede ver que  $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  ya que

$$\begin{aligned} \|f * g\|_\infty &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy \right|, \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|g\|_\infty \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy \right|, \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|g\|_\infty \|f\|_1, \\ &= \|f\|_1 \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Además, se puede rescatar con un argumento similar a cuando  $1 < p < \infty$  que

$f * g \in C(\mathbb{R}^n)$ , ya que

$$\begin{aligned} |(f * g)(x) - (f * g)(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(z) (g(x - z) - g(y - z)) \, dz \right|, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| \|g(x - \cdot) - g(y - \cdot)\|_{\infty} \, dz, \\ &\leq \|f\|_1 \frac{\epsilon}{\|f\|_1}. \end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir que  $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$ .

Por otro lado también se puede ver que  $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$ , ya que, de nuevo, se puede repetir el mismo argumento realizado anteriormente hasta la parte en la que se estudia la integral  $J$ , en este caso se procede con

$$\begin{aligned} |(f * (g - g_k))(x)| &\leq \|f * (g - g_k)\|_{\infty}, \\ &\leq \|f\|_1 \|g - g_k\|_{\infty}, \\ &\leq \|f\|_1 \epsilon. \end{aligned}$$

Lo que de nuevo nos permite concluir que  $f * g \in C_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ .

Note que si  $p = \infty$ ,  $p' = 1$ , por lo que se puede concluir lo mismo que en el caso anterior cambiando los papeles de  $f$  y  $g$ .

**Problema 2:**

Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $f$  es continua en 0 y  $\widehat{f} \geq 0$  entonces  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

**Solución:**

Usemos el núcleo del calor

$$g_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

en donde

$$\widehat{g}_t(\xi) = e^{-4\pi^2 t |\xi|^2}.$$

Note que usando que  $g_t$  es par y propiedades de la transformada de Fourier se cumple que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_t(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_t(-x) dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{g}_t(x) dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}_t(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Además si tomamos  $t \rightarrow 0$ , como  $f$  es continua en 0 (es decir que 0 es un punto de Lebesgue) entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_t(x) dx = f(0).$$

Luego como  $\widehat{f} \geq 0$  y  $\widehat{f}(\xi) e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \rightarrow \widehat{f}(\xi)$  de manera creciente y monótona cuando  $t \rightarrow 0$ , usando el teorema de la convergencia monótona tenemos que

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) d\xi, \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}_t(\xi) d\xi, \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_t(x) dx, \\ &= f(0). \end{aligned}$$



### Problema 3:

**Producto de convolución  $\mathcal{S}' * \mathcal{S}$ .**

(I) Sean  $f, \phi$  y  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , pruebe que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f * \phi(x) \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \tilde{\phi} * \psi(x) dx,$$

donde  $\tilde{\phi}(x) = \phi(-x)$ . Esto motiva la siguiente definición: Sean  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  y  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$T * \phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \psi \longmapsto T * \phi(\psi) := T(\tilde{\phi} * \psi).$$

Pruebe que  $T * \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  y que

$$\widehat{(T * \phi)} = \widehat{T} \widehat{\phi} \quad \text{en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

(II) Por otro lado, si  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  y  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , se define:

$$T *_1 \phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longmapsto T *_1 \phi(x) := T(\tau_x \tilde{\phi}),$$

donde  $\tau_x \phi(y) = \phi(y - x)$ . Pruebe entonces que

$$T *_1 \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{y} \quad T *_1 \phi = T * \phi.$$

#### Solución:

(I)

Veamos que  $T * \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Por claridad defina el operador  $T_T(\phi) = T * \phi$ , note que como  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  y la convolución para funciones en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es lineal, entonces  $T_T$  es lineal, ya que si tomamos  $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $\lambda$  escalar, entonces

$$\begin{aligned} T_T(\phi + \lambda\psi) &= (T * (\phi + \lambda\psi))(f), \\ &= T\left(\widetilde{(\phi + \lambda\psi) * f}\right), \\ &= T\left(\tilde{\phi} * f + \lambda\tilde{\psi} * f\right), \\ &= (T * \phi)(f) + \lambda(T * \psi)(f), \\ &= T_T(\phi) + \lambda T_T(\psi). \end{aligned}$$

Ahora veamos que  $T_T$  es un operador acotado, para esto recuerde que como  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  entonces se satisface que existe una constante  $C > 0$  y enteros  $m, l$  tales que

$$|T(\phi)| \leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq l \\ |\beta| \leq m}} \rho_{\alpha, \beta}(\phi)$$

para toda  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Asumiendo esto podemos ver que como  $\tilde{\phi} * f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces

$$\begin{aligned} |T_T(\phi)| &= |(T * \phi)(f)|, \\ &= \left| T(\tilde{\phi} * f) \right|, \\ &\leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq l \\ |\beta| \leq m}} \rho_{\alpha, \beta}(\tilde{\phi} * f) \end{aligned}$$

Lo que concluye que  $T_T$  es un operador lineal continuo, es decir,  $T * \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Ahora, veamos que  $\widehat{(T * \phi)} = \widehat{T} \widehat{\phi}$  en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Note que

$$\begin{aligned} \widehat{(T * \phi)}(f) &= (T * \phi)(\widehat{f}), \\ &= T(\tilde{\phi} * \widehat{f}), \\ &= T(\widehat{\widehat{\phi}} * \widehat{f}), \\ &= T(\widehat{(\widehat{\phi} f)}), \\ &= \widehat{T}(\widehat{\phi} f), \\ &= \widehat{T} \widehat{\phi}(f). \end{aligned}$$

Lo que concluye el ejercicio.

(II)

Veamos que  $T *_1 \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cup \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Primero veamos que  $T *_1 \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , para esto note que como  $T$  es continuo, entonces

$$\begin{aligned}
 \partial_{x_j} (T *_1 \phi)(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(T *_1 \phi)(x + h\epsilon_j) - (T *_1 \phi)(x)}{h}, \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(\tau_{x+h\epsilon_j} \tilde{\phi}(y)) - T(\tau_x \tilde{\phi}(y))}{h}, \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(\phi(x + h\epsilon_j - y)) - T(\phi(x - y))}{h}, \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} T\left(\frac{\phi(x + h\epsilon_j - y) - \phi(x - y)}{h}\right), \\
 &= T\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(x + h\epsilon_j - y) - \phi(x - y)}{h}\right), \\
 &= T(\partial_{x_j} \phi(x - y)), \\
 &= T(\tau_x \widetilde{\partial_{x_j} \phi}(y)), \\
 &= (T *_1 \partial_{x_j} \phi)(x),
 \end{aligned}$$

luego usando un argumento inductivo, como  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  podemos concluir que  $T *_1 \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Ahora veamos que  $T *_1 \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , para esto con el fin de ser más claros definiremos el operador  $T_T(\phi) = T *_1 \phi$ , note que como las traslaciones y reflexiones son lineales, entonces dadas  $\phi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  con  $\lambda$  escalar se cumple que

$$\begin{aligned}
 T_T(\phi + \lambda\varphi) &= T *_1 (\phi + \lambda\varphi), \\
 &= T(\tau_x \widetilde{\phi + \lambda\varphi}), \\
 &= T(\tau_x \tilde{\phi} + \lambda\tau_x \tilde{\varphi}), \\
 &= T(\tau_x \tilde{\phi}) + \lambda T(\tau_x \tilde{\varphi}), \\
 &= T *_1 \phi + \lambda T *_1 \varphi.
 \end{aligned}$$

Ahora veamos la continuidad, note que como  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , entonces existe una constante  $C > 0$  y enteros  $m$  y  $l$  tales que para toda  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se cumple que

$$|T(\phi)| \leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq l \\ |\beta| \leq m}} \rho_{\alpha, \beta}(\phi),$$

usando esto se puede ver que

$$\begin{aligned}
 |T_T(\phi)| &= |T *_1 \phi(x)|, \\
 &= \left| T(\tau_x \tilde{\phi}(y)) \right|, \\
 &\leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq l \\ |\beta| \leq m}} \rho_{\alpha, \beta}(\tau_x \tilde{\phi}),
 \end{aligned}$$

lo que nos permite concluir que  $T_T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , es decir que  $T *_1 \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .  
 Ahora, con el fin de ver que  $T *_1 \phi = T * \phi$ , usaremos que la transformada de Fourier es un isomorfismo en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , es decir, demostraremos que  $\widehat{(T *_1 \phi)} = \widehat{T} \widehat{\phi}$  en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  y como la transformada de Fourier es un isomorfismo en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $T *_1 \phi = T * \phi$  en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .  
 Siendo así, note que como  $T *_1 \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  es localmente integrable, entonces si tomamos  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
 (T *_1 \phi)(f) &= \left( T(\tau_x \tilde{\phi}) \right)(f), \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} T(\tau_x \tilde{\phi})(y) f(y) dy, \\
 &= T \left( \int_{\mathbb{R}^n} \tau_x \tilde{\phi}(y) f(y) dy \right), \\
 &= T \left( \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y) f(y) dy \right), \\
 &= T \left( \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) f(x-y) dy \right), \\
 &= T \left( \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) f(y) dy \right),
 \end{aligned}$$

## Problema 4:

**Topología sobre  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$**  Definimos la aplicación

$$d : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(\phi, \psi) \longmapsto \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} 2^{-(|\alpha|+|\beta|)} \frac{\|\phi - \psi\|_{\alpha, \beta}}{1 + \|\phi - \psi\|_{\alpha, \beta}}$$

(I) Pruebe que  $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n); d)$  es un espacio métrico completo.

(II) Pruebe que para cualquier sucesión  $(\phi_k)_k \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , vale

$$\phi_k \xrightarrow{d} \phi \text{ si y solo si } \|\phi_k - \phi\|_{\alpha, \beta} \rightarrow 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$$

(III) Sea  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Pruebe que

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ si y solo si } x^\alpha \partial^\beta f \in L^2(\mathbb{R}^n), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

(IV) Muestre que

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

$$\phi \longmapsto \widehat{\phi}$$

es un isomorfismo topológico.

**Solución:**

(I)

Primero veamos que  $d$  está bien definida, ya que

$$\begin{aligned}
 d(\phi, \psi) &\leq \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|||\phi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}}{1 + |||\phi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}}, \\
 &\leq \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}}, \\
 &\leq \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|}} \frac{1}{2^{|\beta|}}, \\
 &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|}} \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\beta|}}, \\
 &\leq \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|}} \right)^2, \\
 &\leq \left( \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}} \right)^2, \\
 &\leq \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right)^{2n}, \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

Ahora veamos que  $d(\phi, \psi) = 0$  si y sólo si  $\phi = \psi$ .

Note que, en la definición de  $d$ , todos los sumandos son reales positivos, nosotros afirmamos que  $d(\phi, \psi) = 0$  si y sólo si  $|||\phi - \psi|||_{(\alpha, \beta)} = 0$  para todo  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}$ .

Ahora, suponga que  $\alpha = 0$  y  $\beta = 0$ , entonces:

$$\begin{aligned}
 |||\phi - \psi|||_{(0,0)} &= \|x^0 \partial^0 (\phi - \psi)\|_{\infty}, \\
 &= \|\phi - \psi\|_{\infty}, \\
 &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\phi - \psi| = 0.
 \end{aligned}$$

Entonces,  $\phi(x) = \psi(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Por otro lado, note que  $d(\phi, \psi) = d(\psi, \phi)$  es inmediato, ya que  $|||\phi - \psi|||_{(\alpha, \beta)} = |||\psi - \phi|||_{(\alpha, \beta)}$  para todo  $\alpha$  y  $\beta$ .

Ahora veamos que  $d$  satisface la desigualdad triangular.

Usando las desigualdades triangulares de las seminormas  $||| \cdot |||_{(\alpha, \beta)}$ , nosotros tenemos que

$$\begin{aligned} |||\phi - \psi|||_{(\alpha, \beta)} &\leq |||\phi - \varphi|||_{(\alpha, \beta)} + |||\varphi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}, \\ 1 + |||\phi - \psi|||_{(\alpha, \beta)} &\leq 1 + |||\phi - \varphi|||_{(\alpha, \beta)} + |||\varphi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}, \\ \frac{1}{1 + |||\phi - \varphi|||_{(\alpha, \beta)} + |||\varphi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}} &\leq \frac{1}{1 + |||\phi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}}, \\ -\frac{1}{1 + |||\phi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}} &\leq -\frac{1}{1 + |||\phi - \varphi|||_{(\alpha, \beta)} + |||\varphi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}}. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} d(\phi, \psi) &\leq \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|||\phi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}}{1 + |||\phi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}}, \\ &\leq \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \left( 1 - \frac{1}{1 + |||\phi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}} \right), \\ &\leq \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \left( 1 - \frac{1}{1 + |||\phi - \varphi|||_{(\alpha, \beta)} + |||\varphi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}} \right), \\ &\leq \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|||\phi - \varphi|||_{(\alpha, \beta)} + |||\varphi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}}{1 + |||\phi - \varphi|||_{(\alpha, \beta)} + |||\varphi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}}, \\ &\leq \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|||\phi - \varphi|||_{(\alpha, \beta)}}{1 + |||\phi - \varphi|||_{(\alpha, \beta)} + |||\varphi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}} \\ &\quad + \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|||\varphi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}}{1 + |||\phi - \varphi|||_{(\alpha, \beta)} + |||\varphi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}}, \\ &\leq \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|||\phi - \varphi|||_{(\alpha, \beta)}}{1 + |||\phi - \varphi|||_{(\alpha, \beta)}} + \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|||\varphi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}}{1 + |||\varphi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}}, \\ &\leq d(\phi, \varphi) + d(\varphi, \psi). \end{aligned}$$

Luego, podemos concluir que  $d$  es una métrica para el espacio  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Ahora veamos que  $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), d)$  es un espacio completo.

Suponga  $\{f_k\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  una sucesión de Cauchy, es decir que dado  $\epsilon > 0$  existe  $N > 0$  tal que si  $k, l > N$ , entonces

$$d(f_n, f_m) < \epsilon.$$

(II)

Note que si  $||\phi_k - \phi|| \rightarrow 0$ , para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ , entonces como  $d$  está bien definida es válido

afirmar que

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} d(\phi_k, \phi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{\|\phi - \psi\|_{\alpha, \beta}}{1 + \|\phi - \psi\|_{\alpha, \beta}}, \\
 &= \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\phi_k - \phi\|_{\alpha, \beta}}{1 + \|\phi_k - \phi\|_{\alpha, \beta}}, \\
 &= \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} (0), \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Luego podemos afirmar que  $\phi_k \xrightarrow{d} \phi$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Ahora veamos que si  $\phi_k \xrightarrow{d} \phi$ , entonces  $\|\phi_k - \phi\|_{\alpha, \beta} \rightarrow 0$ , para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ .

Razonemos por contradicción, suponga que  $\phi_k \xrightarrow{d} \phi$  y que existe  $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{N}^n$  tal que  $\|\phi_k - \phi\|_{\alpha_0, \beta_0} \not\rightarrow 0$ , luego

$$\begin{aligned}
 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} d(\phi_k, \phi), \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{\|\phi_k - \phi\|_{\alpha, \beta}}{1 + \|\phi_k - \phi\|_{\alpha, \beta}}, \\
 &= \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\phi_k - \phi\|_{\alpha, \beta}}{1 + \|\phi_k - \phi\|_{\alpha, \beta}}, \\
 &= \frac{1}{2^{|\alpha_0|+|\beta_0|}} \frac{\|\phi_k - \phi\|_{\alpha_0, \beta_0}}{1 + \|\phi_k - \phi\|_{\alpha_0, \beta_0}} \neq 0.
 \end{aligned}$$

Lo cuál es una contradicción, por lo que podemos afirmar que si  $\phi_k \xrightarrow{d} \phi$ , entonces  $\|\phi_k - \phi\|_{\alpha, \beta} \rightarrow 0$  para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ , lo que concluye el resultado. (III)

(IV)

Primero veamos que si  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Note que como  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$  con  $1 \leq p \leq \infty$ , entonces  $\phi \in L(\mathbb{R}^n)$ , por lo que nosotros podremos usar las propiedades de la transformada de Fourier en el sentido de  $L(\mathbb{R}^n)$ , así se sigue que

$$\partial^\beta \widehat{\phi}(\xi) = [(-2\pi i x)^\beta \widehat{\phi}(x)](\xi).$$

Entonces, como para todo  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , nosotros sabemos que  $x^\alpha \phi \in L(\mathbb{R}^n)$ , luego podemos afirmar que  $\widehat{\phi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .



Ahora, note que  $\|\widehat{\phi}\|_{(\alpha,\beta)} < \infty$  para todo  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}$ , así

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \partial^\beta \widehat{\phi}(\xi)| &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\alpha ((-2\pi i x)^\beta \widehat{\phi}(x))(\xi)|, \\ &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{[\partial^\alpha (-2\pi i x)^\beta \phi(x)]}{(2\pi i)^\alpha}(\xi) \right|, \end{aligned}$$

luego  $x^\beta \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\partial^\alpha (-2\pi i x)^\beta \phi \in L(\mathbb{R}^n)$ , por lo que podemos asegurar que  $\partial^\alpha (-2\pi i x)^\beta \phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , lo que implica que para todo  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}$  nosotros tenemos que  $\|\widehat{\phi}\|_{\alpha,\beta} < \infty$ , es decir,  $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Ahora veamos que la transformada de Fourier es un operador inyectivo. Suponga  $\widehat{\phi} = \widehat{\psi}$ , entonces como  $\phi, \psi \in L(\mathbb{R}^n)$ , usando la fórmula de inversión se tiene que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(\xi) e^{2\pi i(x \cdot \xi)} e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} d\xi \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\psi}(\xi) e^{2\pi i(x \cdot \xi)} e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} d\xi \\ &= \psi(x) \end{aligned}$$

Luego se puede concluir que  $\phi = \psi$ . Ahora, veamos que es un operador sobreyectivo.

De manera similar, como en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es válida la fórmula de inversión de fourier en el sentido de  $L(\mathbb{R}^n)$ , sabemos que si  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , de lo que se puede ver que si  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $\check{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , así que para cada  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , sabemos que existe  $\check{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\widehat{\check{\phi}} = \phi$ , lo que demuestra que la transformada de Fourier es un operador sobreyectivo. Ahora, veamos que la transformada de Fourier es un operador continuo, es decir que si tomamos una sucesión  $\{\phi_j\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , tal que  $\phi_j \rightarrow \phi$  cuando  $j \rightarrow \infty$ , entonces  $\widehat{\phi_j} \rightarrow \widehat{\phi}$  cuando  $j \rightarrow \infty$ .

De este modo, nosotros queremos ver que para todo  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}$ ,  $\|\widehat{\phi_j} - \widehat{\phi}\|_{\alpha,\beta} \rightarrow 0$  cuando  $j \rightarrow \infty$ . Note que

$$\begin{aligned} \|\xi^\alpha \partial^\beta (\widehat{\phi_j} - \widehat{\phi})\|_\infty &= \|\xi^\alpha \partial^\beta (\widehat{\phi_j - \phi})\|_\infty, \\ &= \|\xi^\alpha ((-2\pi i x)^\beta (\phi_j - \phi))\|_\infty, \\ &= \left\| \frac{(-2\pi i)^\beta \partial^\alpha [(x^\beta)(\phi_j - \phi)]}{(2\pi i)^\alpha} \right\|_\infty, \\ &\leq \left\| \frac{(-2\pi i)^\beta \partial^\alpha [(x^\beta)(\phi_j - \phi)]}{(2\pi i)^\alpha} \right\|_1, \\ &\leq c \|\partial^\alpha [(x^\beta)(\phi_j - \phi)]\|_\infty + c \sum_{|\gamma| \leq 2m} \|\partial^\alpha + \gamma [(x^\beta)(\phi_j - \phi)]\|_\infty, \\ &\leq k \sum_{|\gamma_1|, |\gamma_2| \leq 2m + |\alpha| + |\beta|} \|\phi_j - \phi\|_{(\gamma_1, \gamma_2)}. \end{aligned}$$

Luego para todo  $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{N}^{2n}$ ,  $\|\phi_j - \phi\|_{(\gamma_1, \gamma_2)} \rightarrow 0$  cuando  $j \rightarrow \infty$ , entonces para todo  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n$ , nosotros tenemos que  $\|\widehat{\phi_j} - \widehat{\phi}\|_{(\alpha, \beta)} \rightarrow 0$  cuando  $j \rightarrow \infty$ .

Note que ver que el operador inverso es continuo es un caso análogo, solo que usando la transformada inversa de Fourier por lo que queda demostrado que  $\widehat{\cdot}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es un isomorfismo.

## Problema 5:

**Valor principal.**

Definimos

$$v.p. \left( \frac{1}{x} \right) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$\phi \longmapsto \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx.$$

Pruebe que  $v.p. \left( \frac{1}{x} \right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  y calcule  $\widehat{\left( v.p. \left( \frac{1}{x} \right) \right)}$ .

### Solución:

Note que la linealidad se rescata de la linealidad de la integral y del límite, ya que si tomamos  $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $\lambda$  escalar, entonces

$$\begin{aligned} v.p. \left( \frac{1}{x} \right) (\phi + \lambda\psi) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\phi(x) + \lambda\psi(x)}{x} dx, \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\phi(x)}{x} + \lambda \frac{\psi(x)}{x} dx, \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \lambda \int_{|x| > \epsilon} \frac{\psi(x)}{x} dx, \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \lambda \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\psi(x)}{x} dx, \\ &= v.p. \left( \frac{1}{x} \right) (\phi) + \lambda v.p. \left( \frac{1}{x} \right) (\psi). \end{aligned}$$

Ahora veamos que  $v.p. \left(\frac{1}{x}\right)$  es un operador acotado, ya que

$$\begin{aligned} \left| v.p. \left(\frac{1}{x}\right) (\phi) \right| &= \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{\phi(x)}{x} dx \right|, \\ &\leq \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < 1} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{1 < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{\phi(x)}{x} dx \right|, \\ &\leq \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < 1} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx + \int_{1 < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{\phi(x)}{x} dx \right|, \\ &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < 1} \left| \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} \right| dx + \int_{1 < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \left| \frac{\phi(x)}{x} \right| dx, \end{aligned}$$

Usando la desigualdad del valor medio.

$$\begin{aligned} &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\phi'\|_{\infty} \int_{\epsilon < |x| < 1} \frac{|x|}{|x|} dx + \int_{1 < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \left| \frac{\phi(x)}{x} \right| dx, \\ &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2(1 - \epsilon) \|\phi\|_{(0,1)} + \int_{1 < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \left| \frac{\phi(x)}{x} \right| dx, \\ &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2(1 - \epsilon) \|\phi\|_{(0,1)} + \int_{1 < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \left| \frac{x\phi(x)}{x^2} \right| dx, \\ &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2(1 - \epsilon) \|\phi\|_{(0,1)} + \|x\phi\|_{\infty} \int_{1 < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \left| \frac{1}{x^2} \right| dx, \\ &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2(1 - \epsilon) \|\phi\|_{(0,1)} + c \|x\phi\|_{\infty}, \\ &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2(1 - \epsilon) \|\phi\|_{(0,1)} + c \|\phi\|_{(1,0)}, \\ &\leq k(\|\phi\|_{(0,1)} + \|\phi\|_{(1,0)}). \end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir que  $v.p. \left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

Ahora calculemos  $\widehat{(v.p.(\frac{1}{x}))}$ , note que realizando un par de manipulaciones algebraicas se puede asegurar que

$$\begin{aligned}
\widehat{\left(v.p.\left(\frac{1}{x}\right)\right)}(\phi) &= v.p.\left(\frac{1}{x}\right)(\widehat{\phi}), \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\xi| > \epsilon} \frac{\widehat{\phi}(\xi)}{\xi} d\xi, \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\xi| > \epsilon} \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)}{\xi} e^{-2\pi i x \xi} dx d\xi, \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \int_{|\xi| > \epsilon} \frac{\phi(x)}{\xi} e^{-2\pi i x \xi} d\xi dx, \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \left( \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{1}{\xi} e^{-2\pi i x \xi} d\xi + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{\xi} e^{-2\pi i x \xi} d\xi \right) dx, \\
&\quad \text{Haciendo el cambio de variable } u = -\xi \text{ en la primera integral de } \xi. \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \left( - \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{\xi} e^{2\pi i x \xi} d\xi + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{\xi} e^{-2\pi i x \xi} d\xi \right) dx, \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x \xi} - e^{2\pi i x \xi}}{\xi} d\xi dx, \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \int_{\epsilon}^{\infty} -\frac{2i \operatorname{sen}(2\pi x \xi)}{\xi} d\xi dx, \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} -\frac{2i \operatorname{sen}(2\pi x \xi)}{\xi} d\xi dx, \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \int_0^{\infty} -\frac{2i \operatorname{sen}(2\pi x \xi)}{\xi} d\xi dx, \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(x) (-2i) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi x \xi)}{\xi} d\xi dx, \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(x) (-2i) \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(2\pi x) dx, \\
&= \int_{\mathbb{R}} (-i\pi \operatorname{sgn}(x)) \phi(x) dx, \\
&= -i\pi \operatorname{sgn}(x) (\phi).
\end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir que  $\widehat{(v.p.(\frac{1}{x}))} = -i\pi \operatorname{sgn}(x)$  en el sentido de las distribuciones temperadas.