Variable Compleja: Taller 1

Nose de cuando del 2024

Universidad Nacional de Colombia

Cesar Augusto Gómez Sierra

Andrés David Cadena Simons acadenas@unal.edu.co

Problema 1:

Representar gráficamente:

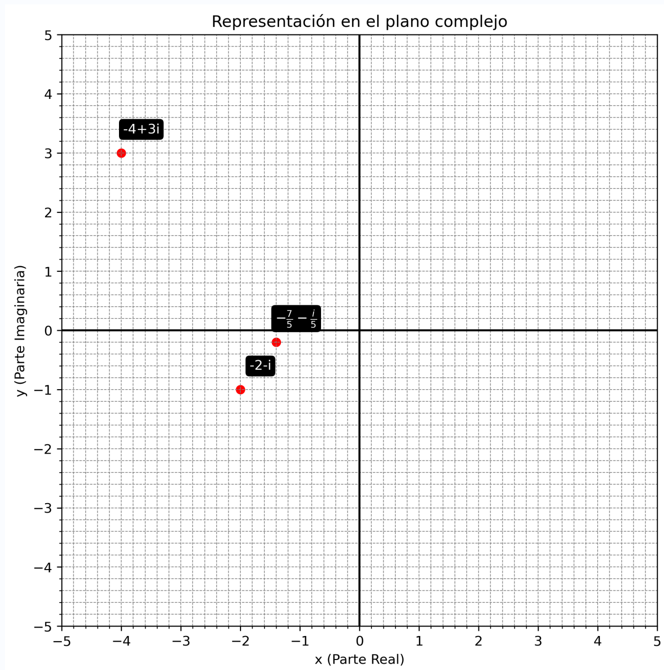
$$(1-2i)+(-3+i); (2+i)(-1+2i); \frac{-2+4i}{1-3i}$$

Solución:

Note que:

1. $(1-2i)+(-3+i) = (1-3)+(-2+1)i = -2-i.$
2. $(2+i)(-1+2i) = [(2)(-1)-(1)(2)] + [(2)(2)+(-1)(1)]i = -4+3i.$
3. $\frac{-3+4i}{1-3i} = \frac{(-2+4i)(1+3i)}{1+9} = \frac{-14-2i}{10} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i$

que gráficamente se ven de la siguiente forma en su expresión en el plano complejo:



Problema 2:

Calcular el argumento principal, y escribir en forma polar $z = \frac{(1-i\sqrt{3})^7}{(\sqrt{3}-i)^3}$.

Solución:

Calculemos la forma polar de $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$:
Note que:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2}, \\ &= \sqrt{1+3}, \\ &= 2, \end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right), \\ &= -\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Razonando de forma similar para $z_2 = \sqrt{3} - i$:

$$\begin{aligned} r_2 &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}, \\ &= \sqrt{3+1}, \\ &= 2, \end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} \theta_2 &= arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right), \\ &= -\frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Por lo que como $z = \frac{z_1^7}{z_2^3}$ podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_1^7}{z_2^3}, \\ &= \frac{(2e^{-i\frac{\pi}{3}})^7}{(2e^{-i\frac{\pi}{6}})^3}, \\ &= 2^4 e^{i\left(\frac{3\pi}{6} - \frac{7\pi}{3}\right)}, \\ &= 16e^{i\frac{-11\pi}{6}}, \\ &= 16e^{i\frac{\pi}{6}}, \end{aligned}$$

por lo que se concluye que la forma polar de z es $16e^{i\frac{\pi}{6}}$ y el argumento principal de z es $Arg(z) = \frac{\pi}{6}$.

Problema 2 continúa en la siguiente página...

Problema 3:

Mostrar que el triangulo de vértices z_1, z_2, z_3 es equilátero, si y solo si

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3$$

Solución:

Note que cualquier triángulo equilátero se puede ver centrado en $(0,0)$ y como raíces cúbicas de un número complejo, es decir satisfacen ser $z^3 = w$ para algún w complejo.
Ahora, si el centro es distinto de $(0,0)$, simplemente debemos de trasladarlas, es decir, $(z-a)^3 - b$.
Por otro lado como z_1, z_2 y z_3 con los vértices, entonces son raices de ese polinomio, por lo que la siguiente expresión y sus implicaciones son válidas:

$$\begin{aligned} (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3) &= (z-a)^3 - b \\ (z^2 - (z_1+z_2)z + z_1 z_2)(z-z_3) &= z^3 - 3az^2 + 3a^2 z - a^3 - b \\ z^3 - (z_1+z_2+z_3)z^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)z - z_1z_2z_3 &= z^3 - 3az^2 + 3a^2 z - a^3 - b \end{aligned}$$

de donde se puede deducir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 & = 3a, \\ z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 & = 3a^2, \\ z_1z_2z_3 & = a^3 + b. \end{cases}$$

En dónde si tomamos $(z_1+z_2+z_3)^2 = 9a^2 = 3(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)$, entonces:

$$z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2 + 2z_1z_3 + 2z_2z_3 + z_3^2 = 3z_1z_2 + 3z_1z_3 + 3z_2z_3$$

de lo que se concluye que:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$$

con lo cuál queda demostrada una dirección.
Para el otro caso, note que se puede llevar el mismo argumento en sentido contrario, por lo que queda demostrado el ejercicio.

Problema 4:

Mostrar que la suma de los ángulos interiores de un triangulo es π.

Solución:

Suponga $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ los vértices del triángulo.
Note que:

$$\frac{(z_1 - z_2)}{|z_1 - z_2|} = e^{\alpha} \frac{(z_1 - z_3)}{|z_1 - z_3|}$$
$$\frac{(z_2 - z_3)}{|z_2 - z_3|} = e^{\beta} \frac{(z_2 - z_1)}{|z_2 - z_1|}$$
$$\frac{(z_3 - z_1)}{|z_3 - z_1|} = e^{\gamma} \frac{(z_3 - z_2)}{|z_3 - z_2|}$$

Ya que son números complejos de norma 1, entonces solo difieren por sus ángulos α, β y γ.
Ahora si multiplicamos estos 3 complejos se tiene que:

$$\frac{(z_1 - z_2)}{|z_1 - z_2|} \cdot \frac{(z_2 - z_3)}{|z_2 - z_3|} \cdot \frac{(z_3 - z_1)}{|z_3 - z_1|} = e^{\gamma} \frac{(z_3 - z_2)}{|z_3 - z_2|} \cdot e^{\alpha} \frac{(z_1 - z_3)}{|z_1 - z_3|} \cdot e^{\beta} \frac{(z_2 - z_1)}{|z_2 - z_1|}$$

Lo que implica que:

$$-1 = e^{\alpha+\beta+\gamma}$$

De lo que se concluye que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Problema 5:

Mostrar que:

Solución:

1. $sin(3x) = 3cos^2(x)sin(x) - sin^3(x)$.
   Note que:

$$\begin{aligned} sin(3x) &= Ima(cos(3x) + isen(3x)) \\ &= Ima(e^{i3x}) \\ &= Ima([e^{ix}]^3) \\ &= Ima([cos(x) + isen(x)]^3) \\ &= Ima(cos^3(x) + 3icos^2(x)sin(x) - 3cos(x)sin^2(x) - isin^3(x)) \\ &= 3cos^2(x)sin(x) - sin^3(x) \end{aligned}$$

2. $cos(3x) = cos^3(x) - 3cos(x)sin^2(x)$.
   Note que utilizando la expresión compleja del punto anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} cos(3x) &= Re(cos(3x) + isen(3x)) \\ &= Re(cos^3(x) + 3icos^2(x)sin(x) - 3cos(x)sin^2(x) - isin^3(x)) \\ &= cos^3(x) - 3cos(x)sin^2(x) \end{aligned}$$

3. $cos(8x) + 28cos(4x) + 35 = 64(cos^8(x) + sin^8(x))$.
   Note que:

$$(e^{ix} + e^{-ix})^8 + (e^{ix} - e^{-ix})^8 = 2(e^{i8x} + e^{-i8x}) + 56(e^{4ix} + e^{-4ix}) + 140,$$

   es decir:

$$(2cos(x))^8 + (2sin(x))^8 = 2(2cos(8x)) + 56(2cos(4x)) + 140$$

   lo que implica:

$$64(cos^8(x) + sin^8(x)) = cos(8x) + 28cos(4x) + 35$$

Problema 6:

Grafique las raíces cuartas de $i, -16, -2+2i\sqrt{3}$

Solución:

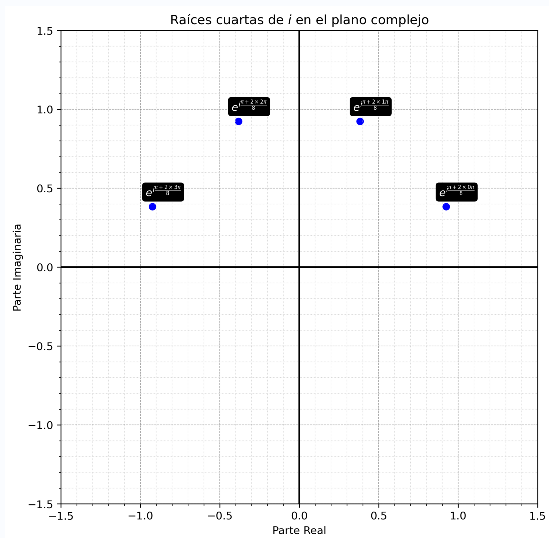
1. i.
   Note que:

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

   Y queremos encontrar $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^4 = e^{i\frac{\pi}{2}}$, entonces sabemos que:

$$z = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{8}} \qquad \text{Con } k = 0, 1, 2, 3,$$

   por lo que el gráfico se verá de la siguiente forma:



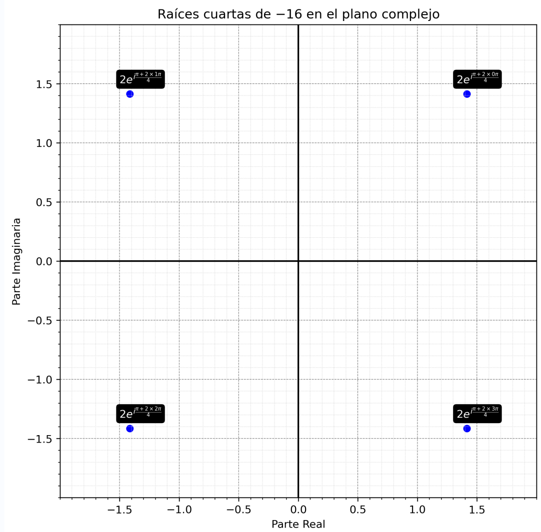
2. -16.
   Note que:

$$-16 = 16e^{i\pi}$$

   luego razonando análogamente al punto anterior:

$$z = 2e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}} \qquad \text{Con } k = 0, 1, 2, 3,$$

   por lo que el gráfico se verá de la siguiente forma:



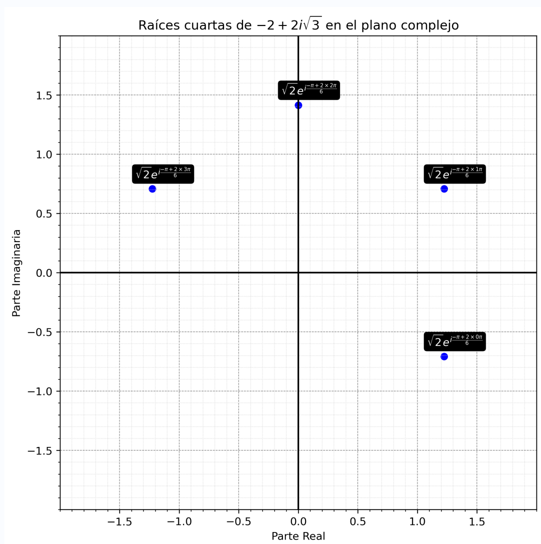
3. $-2 + 2i\sqrt{3}$.
   Note que:

$$-2 + 2i\sqrt{3} = 4e^{i\frac{-\pi}{3}},$$

de forma análoga:

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{-\pi+2k\pi}{6}} \qquad \text{Con } k = 0, 1, 2, 3,$$

por lo que el gráfico se verá de la siguiente forma:



Problema 7:

Resolver la ecuación $z^{10} + 4 = 0$.

Solución:

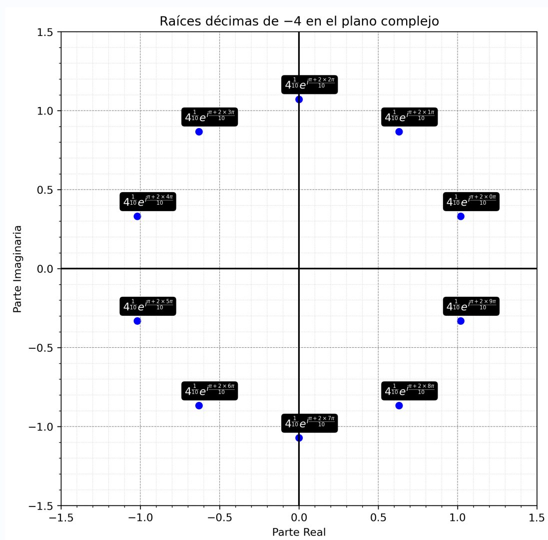
Note que esto es equivalente a encontrar las raíces de orden 10 de -4, es decir solucionar $z^10 = -4$.
Note que:

$$-4 = 4e^{i\pi}$$

por lo que los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen la ecuación anterior son de la forma:

$$z = \sqrt[10]{4}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{10}} \qquad \text{Con } k = 0, 1, \cdots, 9,$$

de forma gráfica se ven de la siguiente manera:



Problema 8:

Mostrar que las raíces de la ecuación $(z+1)^5 + z^5 = 0$, están sobre la recta $x = -\frac{1}{2}$.

Solución:

Note que $(z+1)^5 + z^5 = 0$ implica $(z+1)^5 = -z^5$, luego se debe de satisface que:

$$|z+1| = |z|$$
$$|(x+1) + iy| = |x+iy|$$

Note que los z que satisfacen la ecuación anterior son aquellos en los que $x = -\frac{1}{2}$, por lo que si $(z+1)^5 + z^5 = 0$, entonces $x = -\frac{1}{2}$.

Problema 9:

Mostrar que para $n \neq 0$, las raíces de la ecuación $(1+z)^{2n} + (1-z)^{2n} = 0$, están dadas por

$$z_k = i \tan\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right), \quad n \in \mathbb{Z}^+, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Solución:

Solución

Problema 10:

Calcular $(-3+4i)^{\frac{3}{2}}$, primero tomando la raíz cuadrada y el resultado elevarlo al cubo, y segundo, invirtiendo el procedimiento.

Solución:

Sea $z=-3+4i=5e^{iarctan\left(\frac{4}{-3}\right)}$, entonces $z^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}e^{i\frac{arctan\left(\frac{4}{-3}\right)+2k\pi}{2}}$ con $k=0,1$, luego si elevamos el resultado al cubo, nos queda:

$$
\begin{aligned}
z^{\frac{3}{2}} &= \left(\sqrt{5}e^{i\frac{arctan\left(\frac{4}{-3}\right)+2k\pi}{2}}\right)^{3} \\
&= 5\sqrt{5}e^{3i\frac{arctan\left(\frac{4}{-3}\right)+2k\pi}{2}} \\
&= 5\sqrt{5}e^{i\frac{3arctan\left(\frac{4}{-3}\right)+6k\pi}{2}}
\end{aligned}
$$

Ahora hagamos el procedimiento a la inversa.
$z^3=125e^{i3arctan\left(\frac{4}{-3}\right)}$, por lo que al sacar raíz tenemos:

$$
z^{\frac{3}{2}}=5\sqrt{5}e^{i\frac{3arctan\left(\frac{4}{-3}\right)+2k\pi}{2}}
$$

con $k=0,1$.

Problema 11:

Calcular $(-3+4i)^{-\frac{3}{2}}$.

Solución:

Por el punto anterior sabemos que:

$$(-3+4i)^{\frac{3}{2}} = 5\sqrt{5}e^{i\frac{3arctan\left(\frac{4}{-3}\right)+2k\pi}{2}}$$

De lo que se puede concluir que:

$$(-3+4i)^{-\frac{3}{2}} = \frac{e^{-i\frac{3arctan\left(\frac{4}{-3}\right)+2k\pi}{2}}}{5\sqrt{5}}$$