Análisis Armónico: Taller 3

25 de julio de 2025

Universidad Nacional de Colombia

Ricardo Ariel Pastrán Ramirez

Andrés David Cadena Simons acadenas@unal.edu.co

Problema 1:

Pruebe que el operador $\mathcal{F}$ de la transformada de Fourier es un isomorfismo de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ en si mismo. Dada $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-índice, pruebe que:

(I) $\widehat{\partial^\alpha \Psi} = (2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{\Psi}$;

(II) $(-2\pi i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha \Psi} = \partial^\alpha \widehat{\Psi}$;

(III) $\check{\widehat{\Psi}} = \Psi = \widehat{\check{\Psi}}$;

(IV) $\mathcal{F}^4 = Id$.

Solución:

Veamos que el operador $\mathcal{F}$ de la transformada de Fourier es un isomorfismo de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ en si mismo.
Para esto primero mostremos que es un operador inyectivo, esto ya que si suponemos que dados $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tales que $\widehat{\Psi_1} = \widehat{\Psi_2}$ se puede concluir que para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se cumple que

$$\begin{aligned} \Psi_1(\widehat{\phi}) &= \widehat{\Psi_1}(\phi), \\ &= \widehat{\Psi_2}(\phi), \\ &= \Psi_2(\widehat{\phi}). \end{aligned}$$

De lo que se puede afirmar que $\Psi_1 = \Psi_2$, lo que demuestra que $\mathcal{F}$ es un operador inyectivo.
Ahora veamos que $\mathcal{F}$ es un operador sobreyectivo, ya que si definimos $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que si tomamos $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, entonces $\check{\Psi}(\phi) = \Psi(\check{\phi})$, entonces de forma análoga a $\mathcal{F}$ se puede demostrar que $\mathcal{F}^{-1}$ es un operador inyectivo, luego dado $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se sabe que existe $\check{\Psi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{\check{\Psi}} = \Psi$, lo que demuestra que $\mathcal{F}$ es un operador sobreyectivo y por ende biyectivo.
Ahora, veamos que es un operador continuo, sea $\{\psi_j\} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi_j \to \psi$ cuando $j \to \infty$ en el sentido de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, veamos que $\widehat{\psi_j} \to \widehat{\psi}$ cuando $j \to \infty$ en el sentido de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ya que

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} \widehat{\psi_j}(\phi) &= \lim_{j\to\infty} \psi_j(\widehat{\phi}), \\ &= \phi_{\widehat{\phi}}, \\ &= \widehat{\psi}(\phi). \end{aligned}$$

Luego aplicando el mismo razonamiento con $\mathcal{F}^{-1}$ nosotros podemos concluir que el operador $\mathcal{F}$ de la transformada de Fourier es un isomorfismo de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ en si mismo.

Problema 1 continúa en la siguiente página. . .

1. Veamos que $\widehat{\partial^\alpha \Psi} = (2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{\Psi}$, ya que

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial^\alpha \Psi}(\phi) &= \partial^\alpha \Psi(\widehat{\phi}),\\
&= (-1)^{|\alpha|}\Psi(\partial^\alpha \widehat{\phi}),\\
&= (-1)^{|\alpha|}\Psi((-2\pi i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha \phi}),\\
&= (2\pi i)^{|\alpha|}\Psi(\widehat{x^\alpha \phi}),\\
&= (2\pi i)^{|\alpha|}\widehat{\Psi}(x^\alpha \phi),\\
&= (2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{\Psi}(\phi),
\end{aligned}$$

   Lo que concluye el resultado.

2. Veamos que $(-2\pi i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha \Psi} = \partial^\alpha \widehat{\Psi}$, ya que

$$\begin{aligned}
(-2\pi i)\widehat{x^\alpha \Psi}(\phi) &= \widehat{x^\alpha \Psi}((-2\pi i)^{|\alpha|}\phi),\\
&= x^\alpha \Psi((-2\pi i)^{|\alpha|}\widehat{\phi}),\\
&= \Psi((-2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{\phi}),\\
&= \Psi((-1)^{|\alpha|}\widehat{\partial^\alpha \phi}),\\
&= \widehat{\Psi}((-1)^\alpha \partial^\alpha \phi),\\
&= \partial^\alpha \Psi(\phi),
\end{aligned}$$

   lo que concluye el resultado.

3. Veamos que $\check{\widehat{\Psi}} = \Psi = \widehat{\check{\Psi}}$, ya que

$$\begin{aligned}
\check{\widehat{\Psi}}(\phi) &= \widehat{\Psi}(\check{\phi}),\\
&= \Psi(hat\check{\phi}),\\
&= \Psi(\phi),\\
&= \Psi(\check{\widehat{\phi}}),\\
&= \check{\Psi}(\widehat{\phi}),\\
&= \widehat{\check{\Psi}}(\phi),
\end{aligned}$$

   lo que concluye el resultado.

4. Veamos que $\mathcal{F}^4 = Id$ ya que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^4\Psi(\phi) &= \Psi(\mathcal{F}^4\phi),\\
&= \Psi(\phi),
\end{aligned}$$

   lo que concluye que $\mathcal{F}^4 = Id$.

Problema 2:

Pruebe la siguiente extensión en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ de la fórmula $(\widehat{e^{-\lambda\pi|x|^2}}) = \lambda^{-\frac{n}{2}} e^{\pi\frac{|\xi|^2}{\lambda}}$ probada en la primera lista de ejercicios:

$$\widehat{e^{-\lambda|x|^2}}(\xi) = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\pi^2\frac{|\xi|^2}{\lambda}}$$

donde $\sqrt{\lambda}$ es definida como la rama con $Re\lambda > 0$. Use un argumento de continuación analítica. Pruebe que la fórmula también vale en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ cuando $Re\lambda = 0$ y $\lambda \neq 0$.

Solución:

Usando la fórmula de la primera lista de ejercicios tenemos que

$$\begin{aligned}\widehat{e^{-\lambda|x|^2}}(\xi) &= \widehat{e^{-\pi\frac{\lambda}{\pi}|x|^2}}(\xi),\\ &= \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\pi\frac{|\xi|^2}{\frac{\lambda}{\pi}}},\\ &= \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\pi^2\frac{|\xi|^2}{\lambda}},\end{aligned}$$

para todo $\lambda > 0$.
Siendo así, sea $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definamos

$$\begin{aligned}F(\lambda) &= \widehat{e^{-\lambda|x|^2}}(\phi),\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\lambda|x|^2}\widehat{\phi}(x)\,dx,\end{aligned}$$

Note que si $Re\lambda > 0$, esta integral converge absolutamente y define una función holomorfa en λ, además

$$F(\lambda) = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi^2\frac{|\xi|^2}{\lambda}}\phi(\xi)\,d\xi,$$

muestra que $F(\lambda)$ tiene una continuación analítica meromorfa a $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, por lo que podemos definir una familia de distribuciones temperadas que dependen de $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, por lo que vía continuación analítica podemos definir

$$\Psi_\lambda = \widehat{e^{-\lambda|x|^2}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.
Veamos el caso en el que $Re\lambda > 0$ y $\lambda \neq 0$, en un principio, si bien la función $e^{-\lambda|x|^2} \notin L^1(\mathbb{R}^n)$, como $\Re\lambda = 0$ esto se puede ver como $e^{-i\lambda_2|x|^2}$ con $\lambda_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, luego note que $e^{-i\lambda_2|x|^2} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ya que este es un funcional continuo, ya que si tomamos m tal que $2m > n$ entonces

tenemos que

$$
\begin{aligned}
|e^{-i\lambda_2|x|^2}(\phi)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda_2|x|^2}\phi(x)\,dx\right|, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\lambda_2|x|^2}\phi(x)|\,dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|\,dx, \\
&\leq C_1\,\|\phi\|_{0,0} + \int_{|x|>1} |\phi(x)|\,dx, \\
&\leq C_1\,\|\phi\|_{0,0} + \int_{|x|>1} \frac{x^{2m}|\phi(x)|}{x^{2m}}\,dx, \\
&\leq C_1\,\|\phi\|_{0,0} + \|\phi\|_{2m,0}\int_{|x|>1} \frac{1}{x^2 m}\,dx, \\
&\leq C(\left\|\phi_{0,0} + \|\phi\|_{2m,0}\right\|).
\end{aligned}
$$

Lo que nos permite asegurar que Ψ_λ define una distribución temperada y por ende la extensión es válida cuando $Re\lambda > 0$ y cuando $Re\lambda = 0$ con $\lambda \neq 0$.

Problema 3:

[Transformada de Fourier de $|x|^{-\alpha}, 0 < \alpha < n$]
Pruebe la fórmula

$$\int_0^\infty e^{-\pi\delta|x|^2}\delta^{\beta-1}\,d\delta = \frac{c_\beta}{|x|^{2\beta}}, \text{ para todo } \beta > 0.$$

Deduzca que existe una constante $c_{n,\alpha}$ tal que

$$\widehat{\frac{1}{|x|^\alpha}}(\xi) = c_{n,\alpha}|\xi|^{n-\alpha}, \text{ para todo } \alpha \in (0,n), \text{ en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Solución:

Sea $u = \pi\delta|x|^2$. Entonces:

$$\delta = \frac{u}{\pi|x|^2},$$
$$d\delta = \frac{1}{\pi|x|^2}du.$$

Sustituyendo tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\pi\delta|x|^2}\delta^{\beta-1}d\delta &= \int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{\pi|x|^2}\right)^{\beta-1}\frac{1}{\pi|x|^2}\,du\\ &= \left(\frac{1}{\pi|x|^2}\right)^\beta \int_0^\infty u^{\beta-1}e^{-u}du\\ &= \left(\frac{1}{\pi|x|^2}\right)^\beta \Gamma(\beta)\\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\pi^\beta|x|^{2\beta}}.\end{aligned}$$

La identidad anterior sugiere que

$$\frac{1}{|x|^{2\beta}} = \frac{\pi^\beta}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty e^{-\pi\delta|x|^2}\delta^{\beta-1}d\delta.$$

Aplicamos la transformada de Fourier en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$\widehat{\frac{1}{|x|^{2\beta}}}(\xi) = \frac{\pi^\beta}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty \widehat{e^{-\pi\delta|x|^2}}(\xi)\,\delta^{\beta-1}d\delta.$$

Sabemos que

$$\widehat{e^{-\pi\delta|x|^2}}(\xi) = \delta^{-\frac{n}{2}}e^{-\pi\frac{|\xi|^2}{\delta}}.$$

Entonces

$$\widehat{\frac{1}{|x|^{2\beta}}}(\xi) = \frac{\pi^\beta}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty \delta^{\beta-1-\frac{n}{2}}e^{-\pi\frac{|\xi|^2}{\delta}}\,d\delta.$$

Problema 3 continúa en la siguiente página. . .

Sea $u = \frac{\pi|\xi|^2}{\delta}$. Entonces:

$$\delta = \frac{\pi|\xi|^2}{u},$$
$$d\delta = -\frac{\pi|\xi|^2}{u^2}du.$$

Sustituyendo en la integral (y ajustando el signo por el cambio de extremos):

$$\begin{aligned}
\widehat{\frac{1}{|x|^{2\beta}}}(\xi) &= \frac{\pi^\beta}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty \left(\frac{\pi|\xi|^2}{u}\right)^{\beta-1-\frac{n}{2}} e^{-u}\frac{\pi|\xi|^2}{u^2}du \\
&= \frac{\pi^\beta}{\Gamma(\beta)}(\pi|\xi|^2)^{\beta-\frac{n}{2}}\int_0^\infty u^{(-\beta+\frac{n}{2})-1}e^{-u}du \\
&= \frac{\pi^\beta}{\Gamma(\beta)}(\pi)^{\beta-\frac{n}{2}}\Gamma(-\beta+\frac{n}{2})|\xi|^{2(\beta-\frac{n}{2})} \\
&= \pi^{\alpha-\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(-\frac{\alpha}{2}+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}|\xi|^{\alpha-n}, \\
&= c_{n,\alpha}|\xi|^{\alpha-n},
\end{aligned}$$

donde tomamos $\alpha := 2\beta \in (0,n)$ y $c_{n,\alpha} = \pi^{\alpha-\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(-\frac{\alpha}{2}+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}$ para todo $\alpha \in (0,n)$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Problema 4:

[Espacios de Lorentz]
Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una función medible. Para $\alpha \geq 0$, se define la función de distribución de f por

$$\lambda_f(\alpha) = m\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}\right).$$

(i) Pruebe que λ_f es una función no creciente y continua por la derecha.

(ii) Definimos $f^* : (0, \infty) \to [0, \infty)$, $t \mapsto \inf\{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t\}$. Pruebe que f^* es una función no creciente y continua por la derecha.

(iii) Pruebe que $\lambda_f = \lambda_{f^*}$.

(iv) Para $1 \leq p, q \leq \infty$, se define el espacio de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de funciones medibles f tales que $\|f\|_{p,q} < \infty$, donde

$$\|f\|_{p,q} := \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}, & \text{si } 1 \leq p, q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t), & \text{si } 1 \leq p \leq \infty. \end{cases}$$

Pruebe que $\|f\|_{p,p} = \|f^*\|_p = \|f\|_p$, para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Solución:

(i) Sea $0 \leq \alpha < \beta$. Como $\{x : |f(x)| > \beta\} \subseteq \{x : |f(x)| > \alpha\}$, se tiene que

$$\lambda_f(\beta) \leq \lambda_f(\alpha),$$

lo cual prueba que λ_f es no creciente.

Ahora probemos que λ_f es continua por la derecha.
Sea $\alpha \geq 0$. Para todo $h > 0$, como

$$\{x : |f(x)| > \alpha + h\} \subseteq \{x : |f(x)| > \alpha\},$$

se tiene que el límite por la derecha existe y

$$\lim_{h \to 0^+} \lambda_f(\alpha + h) \leq \lambda_f(\alpha).$$

Por otro lado, note que

$$\{x : |f(x)| > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : |f(x)| > \alpha + \tfrac{1}{n}\}.$$

Como las medidas exteriores son continuas respecto a uniones crecientes, se concluye que

$$\lambda_f(\alpha) = \lim_{n \to \infty} \lambda_f\left(\alpha + \tfrac{1}{n}\right).$$

Así que

$$\lambda_f(\alpha) = \lim_{h\to 0^+} \lambda_f(\alpha + h),$$

es decir, λ_f es continua por la derecha.

(ii) Sea $0 < t_1 < t_2$. Como $t_1 < t_2$, se tiene que

$$\{s > 0 : \lambda_f(s) \le t_2\} \subseteq \{s > 0 : \lambda_f(s) \le t_1\}.$$

Por tanto, al tomar ínfimos se obtiene

$$f^*(t_2) = \inf\{s > 0 : \lambda_f(s) \le t_2\} \le \inf\{s > 0 : \lambda_f(s) \le t_1\} = f^*(t_1),$$

lo cual demuestra que f^* es no creciente.

Ahora, veamos que f^* es continua por la derecha. Sea $t > 0$, y sea (t_n) una sucesión decreciente tal que $t_n \to t$. Como f^* es no creciente, la sucesión $f^*(t_n)$ es creciente y acotada superiormente por $f^*(t_1)$. Definamos

$$L := \lim_{n\to\infty} f^*(t_n) = \sup_n f^*(t_n).$$

Por la definición de f^*, para todo n se tiene $\lambda_f(f^*(t_n)) \le t_n$. Como $t_n \to t$ y λ_f es continua por la derecha, se tiene

$$\lambda_f(L) = \lim_{n\to\infty} \lambda_f(f^*(t_n)) \le \lim_{n\to\infty} t_n = t.$$

Por la definición del ínfimo, esto implica que

$$f^*(t) \le L = \lim_{n\to\infty} f^*(t_n).$$

Pero como f^* es no creciente,

$$f^*(t_n) \le f^*(t) \quad \text{para todo } n,$$

y por tanto también

$$\lim_{n\to\infty} f^*(t_n) \le f^*(t).$$

Concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} f^*(t_n) = f^*(t),$$

es decir, f^* es continua por la derecha.

Problema 4 continúa en la siguiente página. . .

(iii) Recordemos que $f^* : (0,\infty) \to [0,\infty)$ está definido por

$$f^*(t) := \text{ínf}\{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t\},$$

y que la función de distribución de f^* está dada por

$$\lambda_{f^*}(\alpha) := m\left(\{t > 0 : f^*(t) > \alpha\}\right).$$

Veamos que $\lambda_{f^*}(\alpha) = \lambda_f(\alpha)$ para todo $\alpha > 0$. Sea $\alpha > 0$. Por definición de f^*, se tiene que

$$f^*(t) > \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \text{para todo } s \leq \alpha,\ \lambda_f(s) > t.$$

Esto equivale a decir que

$$t < \lambda_f(s), \quad \text{para todo } s \leq \alpha.$$

En particular, si tomamos el ínfimo sobre todos esos $s \leq \alpha$, se obtiene

$$t < \inf_{s \leq \alpha} \lambda_f(s) = \lambda_f(\alpha),$$

pues λ_f es no creciente.
Por tanto,

$$f^*(t) > \alpha \quad \Leftrightarrow \quad t < \lambda_f(\alpha),$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \lambda_{f^*}(\alpha) &= m\left(\{t > 0 : f^*(t) > \alpha\}\right) \\ &= m\left(\{t > 0 : t < \lambda_f(\alpha)\}\right) \\ &= \lambda_f(\alpha). \end{aligned}$$

Esto concluye que $\lambda_{f^*} = \lambda_f$.

(iv) Recordemos que la norma en $L^p(\mathbb{R}^n)$ se puede reescribir en términos de su función de distribución

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx = \int_0^\infty p\alpha^{p-1}\lambda_f(\alpha)\, d\alpha.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\int_0^\infty (f^*(t))^p\, dt = \int_0^\infty p\alpha^{p-1}\lambda_{f^*}(\alpha)\, d\alpha.$$

Problema 4 continúa en la siguiente página. . .

Pero del ítem anterior sabemos que $\lambda_{f^*} = \lambda_f$, así que:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (f^*(t))^p \, dt &= \int_0^\infty p\alpha^{p-1}\lambda_f(\alpha)\, d\alpha \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx.\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\|f^*\|_p = \|f\|_p .$$

Ahora, veamos que esto coincide con la definición de la norma $\|f\|_{p,p}$. Cuando $q = p$, se tiene:

$$\begin{aligned}\|f\|_{p,p} &= \left(\frac{p}{p}\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^\infty f^*(t)^p \, dt\right)^{1/p} \\ &= \|f^*\|_p .\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\|f\|_{p,p} = \|f^*\|_p = \|f\|_p .$$

Lo cual concluye la demostración.

Problema 5:

Considere la función $f_a(x) = \dfrac{x}{a - x^2}$.

(i) Si $a \geq 0$, pruebe que la función valor principal de $f_a(x)$,

$$\text{v.p.}\frac{x}{a-x^2}(\phi) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon < |a-x^2| < 1/\epsilon} \frac{x}{a-x^2}\phi(x)\,dx,$$

con $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, define una distribución temperada. Más todavía, pruebe que si

$$\widehat{f_a}(\xi) := \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon < |a-x^2| < 1/\epsilon} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \frac{x}{a-x^2}\phi(x)\,dx,$$

entonces

$$\left\| \widehat{f_a} \right\|_\infty \leq M,$$

donde la constante M es independiente de a.

(ii) Muestre que (i.) también vale si $a < 0$.

Solución:

(i) Sea $a \geq 0$. Observamos que la función $x \mapsto \dfrac{x}{a-x^2}$ tiene singularidades en los puntos $x = \pm\sqrt{a}$ (o solo en $x = 0$ si $a = 0$).
Sea $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ una función suave tal que $\chi(x) = 1$ en un compacto de las singularidades $\pm\sqrt{a}$, entonces $(1 - \chi)$ se anula cerca de esas singularidades. Escribimos:

$$\phi(x) = \chi(x)\phi(x) + (1 - \chi(x))\phi(x).$$

Definimos:

$$T_1(\phi) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon < |a-x^2| < 1/\epsilon} \frac{x}{a-x^2}(1 - \chi(x))\phi(x)\,dx,$$
$$T_2(\phi) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon < |a-x^2| < 1/\epsilon} \frac{x}{a-x^2}\chi(x)\phi(x)\,dx.$$

Note que en $T_1(\phi)$ aislamos las singularidades, por lo que podemos afirmar que existe $\delta > 0$ tal que $0 < \delta \leq |a - x^2|$, por lo que es válido hacer el siguiente cálculo tomando

$m = 2n$

$$\begin{aligned}
|T_1(\phi)| &\leq \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|a-x^2|<\frac{1}{\epsilon}} \left|\frac{x}{a-x^2}(1-\chi(x))\phi(x)\right| dx,\\
&\leq \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|a-x^2|<\frac{1}{\epsilon}} \left|\frac{x}{\delta}(1-\chi(x))\phi(x)\right| dx,\\
&\leq \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|a-x^2|<\frac{1}{\epsilon}} \left|\frac{x}{\delta}(1-\chi(x))\frac{x^{m+1}}{x^{m+1}}\phi(x)\right| dx,\\
&\leq \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\delta}\left\|\phi\right\|_{m+1,0}\int_{\epsilon<|a-x^2|<\frac{1}{\epsilon}} \left|\frac{1}{x^m}\right| dx,\\
&\leq C\left\|\phi\right\|_{m+1,0}.
\end{aligned}$$

Ahora estudiemos lo que pasa con T_2, note que como χ tiene soporte compacto, entonces se cumple que existe una constante C tal que

$$\left|\frac{x}{a-x^2}\right| \leq \left|\frac{C}{|x-\sqrt{a}|}+\frac{C}{|x+\sqrt{a}|}\right|,$$

Luego tenemos que

$$\begin{aligned}
|T_2(\phi)| &\leq \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|a-x^2|<\frac{1}{\epsilon}} \left|\frac{C}{|x-\sqrt{a}|}+\frac{C}{|x+\sqrt{a}|}\chi(x)\phi(x)\right| dx,\\
&\leq \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|a-x^2|<\frac{1}{\epsilon}} \left|\frac{C}{|x-\sqrt{a}|}\chi(x)\phi(x)\right| dx + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|a-x^2|<\frac{1}{\epsilon}} \left|\frac{C}{|x+\sqrt{a}|}\chi(x)\phi(x)\right| dx,
\end{aligned}$$

Luego ambos sumandos se comportan como el valor principal de $1/x$ de lo que podemos concluir que existe una constante C y l tal que

$$|T_2(\phi)| \leq C\sum_{i=1}^{l}\left\|\phi\right\|_{\alpha_i,\beta_i}$$

De lo que podemos concluir que para $a \geq 0$ el valor principal anterior define una distribución temperada.
Ahora estudiemos la transformada de Fourier de f_a definida por:

$$\widehat{f}_a(\xi) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|a-x^2|<1/\epsilon} e^{-2\pi i x\xi}\cdot\frac{x}{a-x^2}\cdot\phi(x)\,dx.$$

Nuevamente, usamos la descomposición $\phi(x) = \chi(x)\phi(x) + (1-\chi(x))\phi(x)$ y definimos:

$$\begin{aligned}
T_1(\xi) &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|a-x^2|<1/\epsilon} e^{-2\pi i x\xi}\cdot\frac{x}{a-x^2}(1-\chi(x))\phi(x)\,dx,\\
T_2(\xi) &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|a-x^2|<1/\epsilon} e^{-2\pi i x\xi}\cdot\frac{x}{a-x^2}\chi(x)\phi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

De nuevo, en T_1 se cumple que $|a-x^2| \geq \delta$ en el soporte de $(1-\chi)$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
|T_1(\xi)| &\leq \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon<|a-x^2|<1/\epsilon} \left| e^{-2\pi i x\xi} \cdot \frac{x}{a-x^2}(1-\chi(x))\phi(x) \right| dx \\
&\leq \frac{1}{\delta} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon<|a-x^2|<1/\epsilon} |x| \cdot |(1-\chi(x))\phi(x)|\, dx.
\end{aligned}
$$

Como antes, usando $\phi(x) = \dfrac{x^{m+1}}{x^{m+1}}\phi(x)$:

$$
\begin{aligned}
|T_1(\xi)| &\leq \frac{1}{\delta} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon<|a-x^2|<1/\epsilon} \left| \frac{1}{x^m} \right| \cdot |(1-\chi(x))x^{m+1}\phi(x)|\, dx \\
&\leq \frac{1}{\delta} \|\phi\|_{m+1,0} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon<|a-x^2|<1/\epsilon} \frac{1}{|x|^m}\, dx \\
&\leq C \|\phi\|_{m+1,0}\,.
\end{aligned}
$$

Por otro lado Como $\chi\phi$ tiene soporte compacto y razonando como lo hicimos anteriormente

$$
\begin{aligned}
|T_2(\xi)| &\leq \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon<|a-x^2|<1/\epsilon} \left| e^{-2\pi i x\xi} \frac{x}{a-x^2}\chi(x)\phi(x) \right| dx, \\
&\leq \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon<|a-x^2|<1/\epsilon} \left| \frac{x}{a-x^2}\chi(x)\phi(x) \right| dx, \\
&\leq C \sum_{i=1}^{l} \|\phi\|_{\alpha_i,\beta_i}\,.
\end{aligned}
$$

Sumando ambas estimaciones:

$$
|\widehat{f}_a(\xi)| \leq |T_1(\xi)| + |T_2(\xi)| \leq M,
$$

donde M es independiente de ξ y a, por lo que:

$$
\left\| \widehat{f}_a \right\|_\infty \leq M.
$$

(ii) Supongamos ahora que $a<0$. En este caso, la función $x \mapsto \dfrac{x}{a-x^2}$ es una función suave en todo $\mathbb{R}$, ya que la ecuación $a-x^2=0$ no tiene soluciones reales. Por tanto, no hay ninguna singularidad a lo largo del eje real.
Entonces, podemos definir directamente:

$$
f_a(\phi) := \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{a-x^2}\phi(x)\, dx,
$$

y este funcional es perfectamente bien definido para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Veamos que define una distribución temperada.

Sea $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces dado que $\frac{x}{a-x^2}$ es una función suave y de crecimiento a lo sumo lineal (pues $|a-x^2|$ crece como x^2 en el infinito), podemos estimar:

$$|f_a(\phi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{a-x^2} \phi(x)\, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{x}{a-x^2} \phi(x) \right| dx.$$

Como ϕ decrece más rápido que cualquier potencia, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left| \frac{x}{a-x^2} \phi(x) \right| \leq \frac{|x|}{|a-x^2|} \cdot \frac{1}{(1+|x|)^N} \leq \frac{C}{(1+|x|)^{N-1}},$$

para N suficientemente grande. Por tanto, la integral converge absolutamente, y se cumple que:

$$|f_a(\phi)| \leq C \left\| \phi \right\|_{0,N},$$

lo cual implica que $f_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Finalmente, observemos su transformada de Fourier:

$$\widehat{f_a}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} \cdot \frac{x}{a-x^2} \cdot \phi(x)\, dx.$$

Razonando como antes, ya que $\frac{x}{a-x^2}$ es suave y de crecimiento controlado, se tiene que:

$$|\widehat{f_a}(\xi)| \leq C \left\| \phi \right\|_{0,N},$$

de donde se concluye que:

$$\left\| \widehat{f_a} \right\|_\infty \leq M,$$

con M independiente de a y de ξ, lo que nos permite concluir el ejercicio.