

Análisis Armónico: Taller 2

22 de junio de 2025

Universidad Nacional de Colombia

Ricardo Ariel Pastrán Ramirez

Andrés David Cadena Simons

acadenas@unal.edu.co

Problema 1:

Convolución

(I) Pruebe que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p \leq 2$, entonces

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$$

en $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

(II) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, donde $1 < p < \infty$, entonces $f * g \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$.
¿Qué se puede afirmar cuando $p = 1$ o $p = \infty$?

Antes de comenzar será de utilidad demostrar la siguiente desigualdad.

Lema 1: Desigualdad de Young

Suponga $p, q, r \leq 1$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. Luego dadas $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Definamos T_g al operador

$$T_g(f) = f * g.$$

Veamos que $T_g : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ es un operador acotado ya que usando la desigualdad de Minkowski.

$$\begin{aligned} \|T_g(f)\|_q &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} dy, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} dy, \\ &\leq \|g\|_q \|f\|_1. \end{aligned}$$

Por otro lado también podemos ver que $T_g : L^{q'}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ya que usando la desigualdad de Hölder podemos ver que

$$\begin{aligned} \|T_g(f)\|_\infty &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dx \right|, \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)| dy \right|, \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{q'} dy \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}}, \\ &\leq \|g\|_q \|f\|_{q'}. \end{aligned}$$

Luego, usando el teorema de interpolación de Riesz-Thorin sabemos que podemos definir $T_g : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^r(\mathbb{R}^n)$ con

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{1-t}{1} + \frac{t}{q'}, \\ \frac{1}{r} &= \frac{1-t}{q}. \end{aligned}$$

Lo que implica

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1,$$

lo que concluye el lema.

Solución:

- (1) Veamos que $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ya que usando la desigualdad integral de Minkowski's se cumple que

$$\begin{aligned} \|f * g\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \|g\|_p dy, \\ &\leq \|f\|_1 \|g\|_p. \end{aligned}$$

Ahora veamos que $\widehat{f * g} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, ya que usando el teorema de interpolación de

Riesz-Thorin podemos ver que como

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n), \\ \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

Luego podemos definir $\mathcal{F} : L^p \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ con

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} &= \frac{1-t}{1} + \frac{t}{2}, \\ \frac{1}{q} &= \frac{t}{2}.\end{aligned}$$

Lo que implica que

$$\frac{1}{p} - 1 + \frac{2}{q} = \frac{1}{q},$$

que a su vez implica que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

en donde sabemos que $q = p'$, lo que nos permite concluir que $\widehat{f * g} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.

Ahora veamos que se cumple la propiedad.

Recuerde que si $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces $g \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$, suponga $g_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que $g = g_1 + g_2$, además, suponga $\{g_k\} \subseteq L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que $g_k \rightarrow g_2$ cuando $k \rightarrow \infty$, entonces

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(\xi) &= (f * (\widehat{g_1 + g_2}))(\xi), \\ &= \widehat{f * g_1}(\xi) + \widehat{f * g_2}(\xi), \\ &= \widehat{f * g_1}(\xi) + \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{f * g_k}(\xi), \\ &= \widehat{f}(\xi) \widehat{g_1}(\xi) + \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) \widehat{g_k}(\xi), \\ &= \widehat{f}(\xi) \widehat{g_1}(\xi) + \widehat{f}(\xi) \widehat{g_2}(\xi), \\ &= \widehat{f}(\xi) (\widehat{g_1}(\xi) + \widehat{g_2}(\xi)), \\ &= \widehat{f}(\xi) \widehat{g_1 + g_2}(\xi), \\ &= \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi).\end{aligned}$$

Lo que concluye el resultado.

(II) Veamos que $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$.

Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (este viene dado por la continuidad de las traslaciones en $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, es decir que $\lim_{h \rightarrow 0} \|g(x+h) - g(x)\|_{p'} = 0$) tal que si

$$|x - y| < \delta,$$

entonces usando la desigualdad de Young y la continuidad de las traslaciones de la norma en $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ (es este caso tomamos ese ϵ como $\frac{\epsilon}{\|f\|_p}$) se tiene que

$$\begin{aligned}
 |(f * g)(x) - (f * g)(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z) dz - \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(y-z) dz \right|, \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(z) (g(x-z) - g(y-z)) dz \right|, \\
 &\leq \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(z) (g(x-z) - g(y-z)) dz \right|, \\
 &\leq \|f * (g(y - \cdot) - g(x - \cdot))\|_{\infty}, \\
 &\leq \|f\|_p \|g(y - \cdot) - g(x - \cdot)\|_{p'}, \\
 &< \|f\|_p \frac{\epsilon}{\|f\|_p}, \\
 &< \epsilon.
 \end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir que $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$.

Ahora veamos que $f * g(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$.

Suponga $\{g_k\} \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ (continua de soporte compacto) tal que $g_k \rightarrow g$ cuando $k \rightarrow \infty$, sin pérdida de generalidad suponga $\text{supp}(g_k) \subset B_k(0)$, luego dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $k > N$, entonces

$$\|g - g_k\|_{p'} < \epsilon.$$

Además, note que como $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, podemos asegurar que dado $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que si $k > R$, entonces

$$\left(\int_{|x| > k} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Luego tomando k adecuado que cumpla las 2 condiciones anteriores se cumple que

$$\begin{aligned}
 |(f * g)(x)| &= |(f * (g_k + g - g_k))(x)|, \\
 &= |(f * g_k)(x)| + |(f * (g - g_k))(x)|, \\
 &= I + J.
 \end{aligned}$$

Estudiemus I y supongamos $|x| > 2k$, entonces

$$\begin{aligned}
 |(f * g_k)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g_k(x-y) dy \right|, \\
 &\leq \int_{B_k(x)} |f(y) g_k(x-y)| dy, \\
 &\leq \|g_k\|_\infty \int_{B_k(x)} |f(y)| dy, \\
 &\leq \|g_k\|_\infty \int_{|y| \geq k} |f(y)| dy, \\
 &< \|g_k\| \epsilon.
 \end{aligned}$$

Ahora estudiemos J , usando la desigualdad de Young se tiene que

$$\begin{aligned}
 |(f * (g - g_k))(x)| &\leq \|(f * (g - g_k))\|_\infty, \\
 &\leq \|f\|_p \|g - g_k\|_{p'}, \\
 &< \|f\|_p \epsilon.
 \end{aligned}$$

luego tenemos que tomando x suficientemente grande y un k adecuado se cumple que

$$\begin{aligned}
 |(f * g)(x)| &= I + J, \\
 &< \|g_k\| \epsilon + \|f\| \epsilon, \\
 &< M\epsilon.
 \end{aligned}$$

Por lo que podemos asegurar que $(f * g)(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, lo que concluye el ejercicio.

¿Qué podemos afirmar cuando $p = 1$ o $p = \infty$?

Veamos que si $p = 1$, entonces $p' = \infty$, luego se puede ver que $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ya que

$$\begin{aligned}
 \|f * g\|_\infty &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy \right|, \\
 &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|g\|_\infty \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy \right|, \\
 &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|g\|_\infty \|f\|_1, \\
 &= \|f\|_1 \|g\|_\infty.
 \end{aligned}$$

Además, se puede rescatar con un argumento similar a cuando $1 < p < \infty$ que

$f * g \in C(\mathbb{R}^n)$, ya que

$$\begin{aligned} |(f * g)(x) - (f * g)(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(z) (g(x - z) - g(y - z)) \, dz \right|, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| \|g(x - \cdot) - g(y - \cdot)\|_{\infty} \, dz, \\ &\leq \|f\|_1 \frac{\epsilon}{\|f\|_1}. \end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir que $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$.

Por otro lado también se puede ver que $f * g \in C_{\infty}(\mathbb{R}^n)$, ya que, de nuevo, se puede repetir el mismo argumento realizado anteriormente hasta la parte en la que se estudia la integral J , en este caso se procede con

$$\begin{aligned} |(f * (g - g_k))(x)| &\leq \|f * (g - g_k)\|_{\infty}, \\ &\leq \|f\|_1 \|g - g_k\|_{\infty}, \\ &\leq \|f\|_1 \epsilon. \end{aligned}$$

Lo que de nuevo nos permite concluir que $f * g \in C_{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Note que si $p = \infty$, $p' = 1$, por lo que se puede concluir lo mismo que en el caso anterior cambiando los papeles de f y g .

Problema 2:

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, f es continua en 0 y $\widehat{f} \geq 0$ entonces $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Solución:

Usemos el núcleo del calor

$$g_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

en donde

$$\widehat{g}_t(\xi) = e^{-4\pi^2 t |\xi|^2}.$$

Note que usando que g_t es par y propiedades de la transformada de Fourier se cumple que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_t(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_t(-x) dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{g}_t(x) dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}_t(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Además si tomamos $t \rightarrow 0$, como f es continua en 0 (es decir que 0 es un punto de Lebesgue) entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_t(x) dx = f(0).$$

Luego como $\widehat{f} \geq 0$ y $\widehat{f}(\xi) e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \rightarrow \widehat{f}(\xi)$ de manera creciente y monótona cuando $t \rightarrow 0$, usando el teorema de la convergencia monótona tenemos que

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) d\xi, \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}_t(\xi) d\xi, \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_t(x) dx, \\ &= f(0). \end{aligned}$$

Problema 3:

Producto de convolución $\mathcal{S}' * \mathcal{S}$.

(I) Sean f, ϕ y $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pruebe que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f * \phi(x) \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \tilde{\phi} * \psi(x) dx,$$

donde $\tilde{\phi}(x) = \phi(-x)$. Esto motiva la siguiente definición: Sean $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$T * \phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \psi \longmapsto T * \phi(\psi) := T(\tilde{\phi} * \psi).$$

Pruebe que $T * \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y que

$$\widehat{(T * \phi)} = \widehat{T} \widehat{\phi} \quad \text{en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

(II) Por otro lado, si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se define:

$$T *_1 \phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longmapsto T *_1 \phi(x) := T(\tau_x \tilde{\phi}),$$

donde $\tau_x \phi(y) = \phi(y - x)$. Pruebe entonces que

$$T *_1 \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{y} \quad T *_1 \phi = T * \phi.$$

Solución:

(I)

Veamos que $T * \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Por claridad defina el operador $T_T(\phi) = T * \phi$, note que como $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y la convolución para funciones en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es lineal, entonces T_T es lineal, ya que si tomamos $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y λ escalar, entonces

$$\begin{aligned} T_T(\phi + \lambda\psi) &= (T * (\phi + \lambda\psi))(f), \\ &= T\left(\widetilde{(\phi + \lambda\psi) * f}\right), \\ &= T\left(\tilde{\phi} * f + \lambda\tilde{\psi} * f\right), \\ &= (T * \phi)(f) + \lambda(T * \psi)(f), \\ &= T_T(\phi) + \lambda T_T(\psi). \end{aligned}$$

Ahora veamos que T_T es un operador acotado, para esto recuerde que como $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ entonces se satisface que existe una constante $C > 0$ y enteros m, l tales que

$$|T(\phi)| \leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq l \\ |\beta| \leq m}} \rho_{\alpha, \beta}(\phi)$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Asumiendo esto podemos ver que como $\tilde{\phi} * f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned} |T_T(\phi)| &= |(T * \phi)(f)|, \\ &= \left| T(\tilde{\phi} * f) \right|, \\ &\leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq l \\ |\beta| \leq m}} \rho_{\alpha, \beta}(\tilde{\phi} * f) \end{aligned}$$

Lo que concluye que T_T es un operador lineal continuo, es decir, $T * \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Ahora, veamos que $\widehat{(T * \phi)} = \widehat{T} \widehat{\phi}$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Note que

$$\begin{aligned} \widehat{(T * \phi)}(f) &= (T * \phi)(\widehat{f}), \\ &= T(\tilde{\phi} * \widehat{f}), \\ &= T(\widehat{\widehat{\phi}} * \widehat{f}), \\ &= T(\widehat{(\widehat{\phi} f)}), \\ &= \widehat{T}(\widehat{\phi} f), \\ &= \widehat{T} \widehat{\phi}(f). \end{aligned}$$

Lo que concluye el ejercicio.

(II)

Veamos que $T *_1 \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cup \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Primero veamos que $T *_1 \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, para esto note que como T es continuo, entonces

$$\begin{aligned}
 \partial_{x_j} (T *_1 \phi)(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(T *_1 \phi)(x + h\epsilon_j) - (T *_1 \phi)(x)}{h}, \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(\tau_{x+h\epsilon_j} \tilde{\phi}(y)) - T(\tau_x \tilde{\phi}(y))}{h}, \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(\phi(x + h\epsilon_j - y)) - T(\phi(x - y))}{h}, \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} T\left(\frac{\phi(x + h\epsilon_j - y) - \phi(x - y)}{h}\right), \\
 &= T\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(x + h\epsilon_j - y) - \phi(x - y)}{h}\right), \\
 &= T(\partial_{x_j} \phi(x - y)), \\
 &= T(\tau_x \widetilde{\partial_{x_j} \phi}(y)), \\
 &= (T *_1 \partial_{x_j} \phi)(x),
 \end{aligned}$$

luego usando un argumento inductivo, como $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ podemos concluir que $T *_1 \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ahora veamos que $T *_1 \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, para esto con el fin de ser más claros definiremos el operador $T_T(\phi) = T *_1 \phi$, note que como las traslaciones y reflexiones son lineales, entonces dadas $\phi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con λ escalar se cumple que

$$\begin{aligned}
 T_T(\phi + \lambda\varphi) &= T *_1 (\phi + \lambda\varphi), \\
 &= T(\tau_x \widetilde{\phi + \lambda\varphi}), \\
 &= T(\tau_x \tilde{\phi} + \lambda\tau_x \tilde{\varphi}), \\
 &= T(\tau_x \tilde{\phi}) + \lambda T(\tau_x \tilde{\varphi}), \\
 &= T *_1 \phi + \lambda T *_1 \varphi.
 \end{aligned}$$

Ahora veamos la continuidad, note que como $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, entonces existe una constante $C > 0$ y enteros m y l tales que para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se cumple que

$$|T(\phi)| \leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq l \\ |\beta| \leq m}} \rho_{\alpha, \beta}(\phi),$$

usando esto se puede ver que

$$\begin{aligned}
 |T_T(\phi)| &= |T *_1 \phi(x)|, \\
 &= \left| T(\tau_x \tilde{\phi}(y)) \right|, \\
 &\leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq l \\ |\beta| \leq m}} \rho_{\alpha, \beta}(\tau_x \tilde{\phi}),
 \end{aligned}$$

lo que nos permite concluir que $T_T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, es decir que $T *_1 \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
 Ahora, con el fin de ver que $T *_1 \phi = T * \phi$, note que como $T *_1 \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es localmente integrable, entonces si tomamos $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
 (T *_1 \phi)(f) &= \left(T(\tau_x \tilde{\phi}) \right)(f), \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} T(\tau_x \tilde{\phi})(y) f(x) dx, \\
 &= T \left(\int_{\mathbb{R}^n} \tau_x \tilde{\phi}(y) f(x) dx \right), \\
 &= T \left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x - y) f(x) dx \right), \\
 &= T \left(\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\phi}(y - x) f(x) dx \right), \\
 &= T \left(\tilde{\phi} * f \right), \\
 &= (T * \phi)(f).
 \end{aligned}$$

Lo que concluye el resultado.

Problema 4:

Topología sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ Definimos la aplicación

$$d : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(\phi, \psi) \longmapsto \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} 2^{-(|\alpha|+|\beta|)} \frac{\|\phi - \psi\|_{\alpha, \beta}}{1 + \|\phi - \psi\|_{\alpha, \beta}}$$

(I) Pruebe que $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n); d)$ es un espacio métrico completo.

(II) Pruebe que para cualquier sucesión $(\phi_k)_k \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, vale

$$\phi_k \xrightarrow{d} \phi \text{ si y solo si } \|\phi_k - \phi\|_{\alpha, \beta} \rightarrow 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$$

(III) Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pruebe que

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ si y solo si } x^\alpha \partial^\beta f \in L^2(\mathbb{R}^n), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

(IV) Muestre que

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

$$\phi \longmapsto \widehat{\phi}$$

es un isomorfismo topológico.

Solución:

(I)

Primero veamos que d está bien definida, ya que

$$\begin{aligned}
 d(\phi, \psi) &\leq \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|||\phi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}}{1 + |||\phi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}}, \\
 &\leq \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}}, \\
 &\leq \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|}} \frac{1}{2^{|\beta|}}, \\
 &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|}} \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\beta|}}, \\
 &\leq \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|}} \right)^2, \\
 &\leq \left(\sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}} \right)^2, \\
 &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right)^{2n}, \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

Ahora veamos que $d(\phi, \psi) = 0$ si y sólo si $\phi = \psi$.

Note que, en la definición de d , todos los sumandos son reales positivos, nosotros afirmamos que $d(\phi, \psi) = 0$ si y sólo si $|||\phi - \psi|||_{(\alpha, \beta)} = 0$ para todo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}$.

Ahora, suponga que $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
 |||\phi - \psi|||_{(0,0)} &= \|x^0 \partial^0 (\phi - \psi)\|_{\infty}, \\
 &= \|\phi - \psi\|_{\infty}, \\
 &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\phi - \psi| = 0.
 \end{aligned}$$

Entonces, $\phi(x) = \psi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Por otro lado, note que $d(\phi, \psi) = d(\psi, \phi)$ es inmediato, ya que $|||\phi - \psi|||_{(\alpha, \beta)} = |||\psi - \phi|||_{(\alpha, \beta)}$ para todo α y β .

Ahora veamos que d satisface la desigualdad triangular.

Usando las desigualdades triangulares de las seminormas $||| \cdot |||_{(\alpha, \beta)}$, nosotros tenemos que

$$\begin{aligned} |||\phi - \psi|||_{(\alpha, \beta)} &\leq |||\phi - \varphi|||_{(\alpha, \beta)} + |||\varphi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}, \\ 1 + |||\phi - \psi|||_{(\alpha, \beta)} &\leq 1 + |||\phi - \varphi|||_{(\alpha, \beta)} + |||\varphi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}, \\ \frac{1}{1 + |||\phi - \varphi|||_{(\alpha, \beta)} + |||\varphi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}} &\leq \frac{1}{1 + |||\phi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}}, \\ -\frac{1}{1 + |||\phi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}} &\leq -\frac{1}{1 + |||\phi - \varphi|||_{(\alpha, \beta)} + |||\varphi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}}. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} d(\phi, \psi) &\leq \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|||\phi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}}{1 + |||\phi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}}, \\ &\leq \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \left(1 - \frac{1}{1 + |||\phi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}} \right), \\ &\leq \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \left(1 - \frac{1}{1 + |||\phi - \varphi|||_{(\alpha, \beta)} + |||\varphi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}} \right), \\ &\leq \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|||\phi - \varphi|||_{(\alpha, \beta)} + |||\varphi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}}{1 + |||\phi - \varphi|||_{(\alpha, \beta)} + |||\varphi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}}, \\ &\leq \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|||\phi - \varphi|||_{(\alpha, \beta)}}{1 + |||\phi - \varphi|||_{(\alpha, \beta)} + |||\varphi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}} \\ &\quad + \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|||\varphi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}}{1 + |||\phi - \varphi|||_{(\alpha, \beta)} + |||\varphi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}}, \\ &\leq \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|||\phi - \varphi|||_{(\alpha, \beta)}}{1 + |||\phi - \varphi|||_{(\alpha, \beta)}} + \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|||\varphi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}}{1 + |||\varphi - \psi|||_{(\alpha, \beta)}}, \\ &\leq d(\phi, \varphi) + d(\varphi, \psi). \end{aligned}$$

Luego, podemos concluir que d es una métrica para el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Ahora veamos que $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), d)$ es un espacio completo.

Suponga $\{f_k\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ una sucesión de Cauchy, es decir que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $k, l > N$, entonces

$$d(f_n, f_m) < \epsilon.$$

(II)

Note que si $\|\phi_k - \phi\| \rightarrow 0$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, entonces como d está bien definida es válido

afirmar que

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} d(\phi_k, \phi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{\|\phi - \psi\|_{\alpha, \beta}}{1 + \|\phi - \psi\|_{\alpha, \beta}}, \\
 &= \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\phi_k - \phi\|_{\alpha, \beta}}{1 + \|\phi_k - \phi\|_{\alpha, \beta}}, \\
 &= \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} (0), \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Luego podemos afirmar que $\phi_k \xrightarrow{d} \phi$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Ahora veamos que si $\phi_k \xrightarrow{d} \phi$, entonces $\|\phi_k - \phi\|_{\alpha, \beta} \rightarrow 0$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Razonemos por contradicción, suponga que $\phi_k \xrightarrow{d} \phi$ y que existe $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{N}^n$ tal que $\|\phi_k - \phi\|_{\alpha_0, \beta_0} \not\rightarrow 0$, luego

$$\begin{aligned}
 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} d(\phi_k, \phi), \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{\|\phi_k - \phi\|_{\alpha, \beta}}{1 + \|\phi_k - \phi\|_{\alpha, \beta}}, \\
 &= \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\phi_k - \phi\|_{\alpha, \beta}}{1 + \|\phi_k - \phi\|_{\alpha, \beta}}, \\
 &= \frac{1}{2^{|\alpha_0|+|\beta_0|}} \frac{\|\phi_k - \phi\|_{\alpha_0, \beta_0}}{1 + \|\phi_k - \phi\|_{\alpha_0, \beta_0}} \neq 0.
 \end{aligned}$$

Lo cuál es una contradicción, por lo que podemos afirmar que si $\phi_k \xrightarrow{d} \phi$, entonces $\|\phi_k - \phi\|_{\alpha, \beta} \rightarrow 0$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, lo que concluye el resultado.

(III)

Note que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces dados $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ se cumple que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < C.$$

Luego, como también se satisface que dado $\gamma \in \mathbb{N}^n$ con $|\gamma| > |\alpha|$ se cumple que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\gamma \partial^\beta f(x)| < C.$$

Podemos deducir que $x^\alpha \partial^\beta f(x)$ además de ser acotada es una función que decrece más rápido que cualquier polinomio, es decir, dado α existe un $N > 0$ suficientemente grande que satisface que

$$|x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^N},$$

luego usando cambio a coordenadas polares y algunos cálculos se puede ver que

$$\begin{aligned} \|x^\alpha \partial^\beta f\|_2^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|^2 dx, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C}{(1+|x|)^N} dx < \infty. \end{aligned}$$

Lo que concluye una dirección de la implicación. Ahora veamos que si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $x^\alpha \partial^\beta f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, entonces $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Razonemos por contradicción, suponga que $f \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, es decir que existe $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{N}^n$ tales que $x^{\alpha_0} \partial^{\beta_0} f \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$, luego existe una subsucesión $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ que satisface que

$$|x_k^{\alpha_0} \partial^{\beta_0} f(x_k)| \geq k,$$

pero note que como $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces $x^\alpha \partial^\beta f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, luego sabemos que esta función debe de ser localmente acotada y además uniformemente continua en compactos, por lo que podemos asegurar que en compactos la función es Lipschitz, por lo que si tomamos $R > 0$ sabemos que dado $x \in \overline{B_R(x_k)}$ entonces

$$|x^{\alpha_0} \partial^{\beta_0} f(x) - x_k^{\alpha_0} \partial^{\beta_0} f(x_k)| < L(x - x_k),$$

luego si tomamos $x \in \overline{B_\epsilon(x_k)}$, entonces

$$\begin{aligned} |x^{\alpha_0} \partial^{\beta_0} f(x)| &\geq |x_k^{\alpha_0} \partial^{\beta_0} f(x_k)| - |x^{\alpha_0} \partial^{\beta_0} f(x) - x_k^{\alpha_0} \partial^{\beta_0} f(x_k)|, \\ &\geq |x_k^{\alpha_0} \partial^{\beta_0} f(x_k)| - L(x - x_k), \\ &\geq |x_k^{\alpha_0} \partial^{\beta_0} f(x_k)| - L\epsilon. \end{aligned}$$

Ahora, tomando $\epsilon_k = \min\{\frac{|x_k^{\alpha_0} \partial^{\beta_0} f(x_k)|}{2L}, R\}$ se satisface que para todo $x \in \overline{B_{\epsilon_k}(x_k)}$ se cumple que

$$|x^{\alpha_0} \partial^{\beta_0} f(x)| \geq \frac{|x_k^{\alpha_0} \partial^{\beta_0} f(x_k)|}{2}.$$

Luego note que

$$\begin{aligned} \|x^{\alpha_0} \partial^{\beta_0} f\|_2^2 &\geq \int_{\mathbb{R}^n} |x^{\alpha_0} \partial^{\beta_0} f(x)|^2 dx, \\ &\geq \int_{\overline{B_{\epsilon_k}(x_k)}} |x^{\alpha_0} \partial^{\beta_0} f(x)|^2 dx, \\ &\geq \int_{\overline{B_{\epsilon_k}(x_k)}} \frac{|x_k^{\alpha_0} \partial^{\beta_0} f(x_k)|^2}{4} dx, \\ &\geq \frac{k^2}{4} |\overline{B_{\epsilon_k}(x_k)}| \end{aligned}$$

Ahora bien, como $\epsilon_k = \min\{\frac{|x_k^{\alpha_0} \partial^{\beta_0} f(x_k)|}{2L_k}, R\}$ y $|x_k^{\alpha_0} \partial^{\beta_0} f(x_k)| \geq k$, entonces para k suficientemente grande:

$$\epsilon_k \geq \frac{k}{2L_k}, \quad \text{y por tanto} \quad \epsilon_k^n \geq \left(\frac{k}{2L_k}\right)^n.$$

Así,

$$\|x^{\alpha_0} \partial^{\beta_0} f\|_2^2 \geq \frac{k^2}{4} \cdot C_n \left(\frac{k}{2L_k}\right)^n = C'_n \cdot \frac{k^{n+2}}{L_k^n}.$$

Como L_k depende solo de derivadas de f en bolas de radio fijo (y por tanto acotadas por ser $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$), el cociente anterior crece como una potencia de k , y en particular tiende a infinito cuando $k \rightarrow \infty$, lo que nos permite concluir que

$$\|x^{\alpha_0} \partial^{\beta_0} f\|_2^2 = \infty,$$

lo cual contradice la hipótesis, lo que nos permite concluir que $x^\alpha \partial^\beta f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo α, β , y por ende $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. (IV)

Primero veamos que si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Note que como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$, entonces $\phi \in L(\mathbb{R}^n)$, por lo que nosotros podremos usar las propiedades de la transformada de Fourier en el sentido de $L(\mathbb{R}^n)$, así se sigue que

$$\partial^\beta \widehat{\phi}(\xi) = [(-2\pi i x)^\beta \phi(x)](\xi).$$

Entonces, como para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, nosotros sabemos que $x^\alpha \phi \in L(\mathbb{R}^n)$, luego podemos afirmar que $\widehat{\phi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Ahora, note que $\|\widehat{\phi}\|_{(\alpha, \beta)} < \infty$ para todo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}$, así

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \partial^\beta \widehat{\phi}(\xi)| &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\alpha ((-2\pi i x)^\beta \phi(x))(\xi)|, \\ &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{[\partial^\alpha (-2\pi i x)^\beta \phi(x)](\xi)}{(2\pi i)^\alpha} \right|, \end{aligned}$$

luego $x^\beta \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\partial^\alpha (-2\pi i x)^\beta \phi \in L(\mathbb{R}^n)$, por lo que podemos asegurar que $\partial^\alpha (-2\pi i x)^\beta \phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, lo que implica que para todo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}$ nosotros tenemos que $\|\widehat{\phi}\|_{\alpha, \beta} < \infty$, es decir, $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Ahora veamos que la transformada de Fourier es un operador inyectivo. Suponga $\widehat{\phi} = \widehat{\psi}$, entonces como $\phi, \psi \in L(\mathbb{R}^n)$, usando la fórmula de inversión se tiene que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(\xi) e^{2\pi i(x \cdot \xi)} e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} d\xi \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\psi}(\xi) e^{2\pi i(x \cdot \xi)} e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} d\xi \\ &= \psi(x) \end{aligned}$$

Luego se puede concluir que $\phi = \psi$. Ahora, veamos que es un operador sobreyectivo.

De manera similar, como en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es válida la fórmula de inversión de fourier en el sentido de $L(\mathbb{R}^n)$, sabemos que si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, de lo que se puede ver que si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\check{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, así que para cada $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, sabemos que existe $\check{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{\check{\phi}} = \phi$, lo que demuestra que la transformada de Fourier es un operador sobreyectivo. Ahora, veamos que la transformada de Fourier es un operador continuo, es decir que si tomamos una sucesión $\{\phi_j\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tal que $\phi_j \rightarrow \phi$ cuando $j \rightarrow \infty$, entonces $\widehat{\phi_j} \rightarrow \widehat{\phi}$ cuando $j \rightarrow \infty$.

De este modo, nosotros queremos ver que para todo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}$, $\|\widehat{\phi_j} - \widehat{\phi}\|_{\alpha, \beta} \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$. Note que

$$\begin{aligned}
 \|\xi^\alpha \partial^\beta (\widehat{\phi_j} - \widehat{\phi})\|_\infty &= \|\xi^\alpha \partial^\beta (\widehat{\phi_j - \phi})\|_\infty, \\
 &= \|\xi^\alpha ((-2\pi i x)^\beta (\phi_j - \phi))\|_\infty, \\
 &= \left\| \frac{(-2\pi i)^\beta \partial^\alpha [(x^\beta)(\phi_j - \phi)]}{(2\pi i)^\alpha} \right\|_\infty, \\
 &\leq \left\| \frac{(-2\pi i)^\beta \partial^\alpha [(x^\beta)(\phi_j - \phi)]}{(2\pi i)^\alpha} \right\|_1, \\
 &\leq c \|\partial^\alpha [(x^\beta)(\phi_j - \phi)]\|_\infty + c \sum_{|\gamma| \leq 2m} \|\partial^\alpha + \gamma [(x^\beta)(\phi_j - \phi)]\|_\infty, \\
 &\leq k \sum_{|\gamma_1|, |\gamma_2| \leq 2m + |\alpha| + |\beta|} \|\phi_j - \phi\|_{(\gamma_1, \gamma_2)}.
 \end{aligned}$$

Luego para todo $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{N}^{2n}$, $\|\phi_j - \phi\|_{(\gamma_1, \gamma_2)} \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$, entonces para todo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}$, nosotros tenemos que $\|\widehat{\phi_j} - \widehat{\phi}\|_{(\alpha, \beta)} \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$.

Note que ver que el operador inverso es continuo es un caso análogo, solo que usando la transformada inversa de Fourier por lo que queda demostrado que $\widehat{\cdot}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es un isomorfismo.

Problema 5:

Valor principal.

Definimos

$$v.p. \left(\frac{1}{x} \right) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$\phi \longmapsto \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx.$$

Pruebe que $v.p. \left(\frac{1}{x} \right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y calcule $\widehat{\left(v.p. \left(\frac{1}{x} \right) \right)}$.

Solución:

Note que la linealidad se rescata de la linealidad de la integral y del límite, ya que si tomamos $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y λ escalar, entonces

$$\begin{aligned} v.p. \left(\frac{1}{x} \right) (\phi + \lambda\psi) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\phi(x) + \lambda\psi(x)}{x} dx, \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\phi(x)}{x} + \lambda \frac{\psi(x)}{x} dx, \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \lambda \int_{|x| > \epsilon} \frac{\psi(x)}{x} dx, \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \lambda \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\psi(x)}{x} dx, \\ &= v.p. \left(\frac{1}{x} \right) (\phi) + \lambda v.p. \left(\frac{1}{x} \right) (\psi). \end{aligned}$$

Ahora veamos que $v.p. \left(\frac{1}{x}\right)$ es un operador acotado, ya que

$$\begin{aligned} \left| v.p. \left(\frac{1}{x}\right) (\phi) \right| &= \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{\phi(x)}{x} dx \right|, \\ &\leq \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < 1} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{1 < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{\phi(x)}{x} dx \right|, \\ &\leq \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < 1} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx + \int_{1 < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{\phi(x)}{x} dx \right|, \\ &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |x| < 1} \left| \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} \right| dx + \int_{1 < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \left| \frac{\phi(x)}{x} \right| dx, \end{aligned}$$

Usando la desigualdad del valor medio.

$$\begin{aligned} &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\phi'\|_{\infty} \int_{\epsilon < |x| < 1} \frac{|x|}{|x|} dx + \int_{1 < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \left| \frac{\phi(x)}{x} \right| dx, \\ &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2(1 - \epsilon) \|\phi\|_{(0,1)} + \int_{1 < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \left| \frac{\phi(x)}{x} \right| dx, \\ &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2(1 - \epsilon) \|\phi\|_{(0,1)} + \int_{1 < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \left| \frac{x\phi(x)}{x^2} \right| dx, \\ &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2(1 - \epsilon) \|\phi\|_{(0,1)} + \|x\phi\|_{\infty} \int_{1 < |x| < \frac{1}{\epsilon}} \left| \frac{1}{x^2} \right| dx, \\ &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2(1 - \epsilon) \|\phi\|_{(0,1)} + c \|x\phi\|_{\infty}, \\ &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2(1 - \epsilon) \|\phi\|_{(0,1)} + c \|\phi\|_{(1,0)}, \\ &\leq k(\|\phi\|_{(0,1)} + \|\phi\|_{(1,0)}). \end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir que $v.p. \left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Ahora calculemos $\widehat{(v.p.(\frac{1}{x}))}$, note que realizando un par de manipulaciones algebraicas se puede asegurar que

$$\begin{aligned}
\widehat{\left(v.p.\left(\frac{1}{x}\right)\right)}(\phi) &= v.p.\left(\frac{1}{x}\right)(\widehat{\phi}), \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\xi| > \epsilon} \frac{\widehat{\phi}(\xi)}{\xi} d\xi, \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\xi| > \epsilon} \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)}{\xi} e^{-2\pi i x \xi} dx d\xi, \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \int_{|\xi| > \epsilon} \frac{\phi(x)}{\xi} e^{-2\pi i x \xi} d\xi dx, \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{1}{\xi} e^{-2\pi i x \xi} d\xi + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{\xi} e^{-2\pi i x \xi} d\xi \right) dx, \\
&\quad \text{Haciendo el cambio de variable } u = -\xi \text{ en la primera integral de } \xi. \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \left(- \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{\xi} e^{2\pi i x \xi} d\xi + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{\xi} e^{-2\pi i x \xi} d\xi \right) dx, \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x \xi} - e^{2\pi i x \xi}}{\xi} d\xi dx, \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \int_{\epsilon}^{\infty} -\frac{2i \operatorname{sen}(2\pi x \xi)}{\xi} d\xi dx, \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} -\frac{2i \operatorname{sen}(2\pi x \xi)}{\xi} d\xi dx, \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \int_0^{\infty} -\frac{2i \operatorname{sen}(2\pi x \xi)}{\xi} d\xi dx, \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(x) (-2i) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi x \xi)}{\xi} d\xi dx, \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(x) (-2i) \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(2\pi x) dx, \\
&= \int_{\mathbb{R}} (-i\pi \operatorname{sgn}(x)) \phi(x) dx, \\
&= -i\pi \operatorname{sgn}(x) (\phi).
\end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir que $\widehat{(v.p.(\frac{1}{x}))} = -i\pi \operatorname{sgn}(x)$ en el sentido de las distribuciones temperadas.