UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Análisis Funcional
Taller 1: Espacios vectoriales normados
(I-2025)

Profesor: Oscar Guillermo Riaño Castañeda
Integrantes: Andrés David Cadena Simons, Jairo Sebastián Niño Castro, Iván Felipe Salamanca Medina
Fecha: 02 de Julio del 2025

0.1 Espacios de Hilbert

Ejercicio 13.

(I) Muestre que los siguientes conjuntos M son subespacios cerrados no vacíos de $L^2((-1,1))$ y determine explícitamente la proyección P_M en cada caso

(a) $M = \{f \in L^2((-1,1)) : f(x) = f(-x) \text{ para casi todo } x \in (-1,1)\}$.

(b) $M = \left\{ f \in L^2((-1,1)) : \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0 \right\}$.

(c) $M = \{f \in L^2((-1,1)) : f(x) = 0 \text{ para casi todo } x \in (-1,0)\}$.

(II) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Considere

$$K = \left\{ f \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} f(x)\, dx \geq 1 \right\}.$$

(a) Demuestre que K es un conjunto cerrado convexo en $L^2(\Omega)$.

(b) Determine la proyección sobre K, es decir, el operador P_K.

Demostración. (I) (a) Sea (f_n) una sucesión en M tal que $f_n \to f \in L^2((-1,1))$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $n \geq N_\varepsilon$, entonces

$$\|f_n - f\|_{L^2((-1,1))} = \left(\int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|\, dx \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2},$$

Para $x \in (-1,1)$, sea $g(x) = f(-x)$ y veamos que $\|g - f\|_{L^2((-1,1))} = 0$. Sea $n \geq N_\varepsilon$, tenemos

$$\|g - f\|_{L^2((-1,1))} \leq \|g - f_n\|_{L^2((-1,1))} + \|f_n - f\|_{L^2((-1,1))}.$$

Como $n \geq N_\varepsilon$, $\|f_n - f\|_{L^2((-1,1))} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ahora, usando que $f_n \in M$ y la sustitución $y = -x$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|g - f_n\|^2_{L^2((-1,1))} &= \int_{-1}^{1} |g(x) - f_n(x)|^2\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} |f(-x) - f_n(x)|^2\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} |f(y) - f_n(y)|^2\,dy \\
&= \|f - f_n\|^2_{L^2((-1,1))},
\end{aligned}$$

de esta manera $\|g - f_n\|_{L^2((-1,1))} = \|f - f_n\|_{L^2((-1,1))} < \frac{\varepsilon}{2}$, de esta manera

$$\|g - f\|_{L^2((-1,1))} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, tenemos que $\|g - f\|_{L^2((-1,1))} = 0$, lo que quiere decir que $f(-x) = g(x) = f(x)$ para casi todo $x \in (-1,1)$, es decir, $f \in M$ y de esta manera M es cerrado.
Veamos ahora que M es un subespacio. Sean $f, g \in M$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Sean

$$\begin{aligned}
E_f &:= \{x \in (-1,1) : f(x) \neq f(-x)\} \\
E_g &:= \{x \in (-1,1) : g(x) \neq g(-x)\},
\end{aligned}$$

como $f, g \in M$,

$$0 \leq \mu(E_f \cup E_g) \leq \mu(E_f) + \mu(E_g) = 0 + 0 = 0.$$

es decir, $\mu(E_f \cup E_g) = 0$, además, para todo $x \in (-1,1) \setminus (E_f \cup E_g)$ se tiene que $f(x) = f(-x)$ y $g(x) = g(-x)$, de manera que

$$f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) \text{ para todo } x \in (-1,1) \setminus (E_f \cup E_g),$$

como $\mu(E_f \cup E_g) = 0$, esto implica que $f + g \in M$. Ahora, si $x \in (-1,1) \setminus E_f$, $f(x) = f(-x)$, por tanto

$$\alpha f(x) = \alpha f(-x) \text{ para todo } x \in (-1,1) \setminus E_f,$$

y como $\mu(E_f) = 0$, se tiene que $\alpha f \in M$. De esta manera M es un subespacio de $L^2((-1,1))$. Ahora, recordemos que para $f, g \in L^2((-1,1))$, el producto interno $(f; g)$ está dado por

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

Como M es un subespacio cerrado, para $f \in L^2((-1,1))$, $P_M f$ se caracteriza como la única $g \in M$ tal que $(f - g, h) = 0$ para toda $h \in M$, es decir, para toda $h \in M$ se tiene

$$(f - g, h) = \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))h(x)\,dx = 0.$$

Tomemos $g(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \in M$ para $x \in (-1,1)$, y veamos que $g = P_M f$. Primero, es claro que $g \in M$, dado que

$$g(-x) = \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = g(x),$$

y para $h \in M$

$$\begin{aligned}
(f-g,h) &= \int_{-1}^{1} \left(f(x) - \frac{f(x)+f(-x)}{2} \right) h(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{f(x)-f(-x)}{2} h(x)\,dx \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)h(x)\,dx}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(-x)h(x)\,dx}_{I_2}.
\end{aligned}$$

Como $h \in M$, $h(x) = h(-x)$ para casi todo $x \in (-1,1)$, de esta manera, usando la sustitución $y = -x$ tenemos

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(-x)h(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(y)h(y)\,dy = I_1,$$

de manera que

$$(f-g,h) = I_1 - I_2 = I_1 - I_1 = 0,$$

por tanto, $(P_M f)(x) = g(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$.

(b) Primero, note que podemos expresar M usando el producto interno de $L^2((-1,1))$.

$$M = \left\{ f \in L^2((-1,1)) : \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0 \right\} = \left\{ f \in L^2((-1,1)) : (f;1) = 0 \right\},$$

donde 1 denota la función constante $g(x) = 1$. Antes de empezar a hacer los trámites, es importante mencionar que para $f \in L^2((-1,1))$, tiene sentido hallar la integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx,$$

porque $\mu((-1,1)) = 2 < \infty$, de donde se obtiene que $L^2((-1,1)) \subset L^1((-1,1))$, más precisamente, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, para

$f \in L^2((-1,1))$ se tiene que

$$\begin{aligned}\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\right| &= \left|\int_{-1}^{1} f(x)\cdot 1\,dx\right| \\ &\le \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{-1}^{1} 1^2\,dx\right)^{1/2} \\ &= \|f\|_{L^2((-1,1))}\,(\mu((-1,1)))^{1/2} \\ &= \sqrt{2}\,\|f\|_{L^2((-1,1))} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Note que $L^2((-1,1)) \setminus M \neq \emptyset$, dado que para la función $g(x) = 1$

$$(g,1) = \int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 \neq 0,$$

es decir, $g(x) = 1 \in L^2((-1,1)) \setminus M$. Si $f \in L^2((-1,1)) \setminus M$, entonces

$$(f,1) \neq 0,$$

definimos

$$\alpha = \left|\left(f, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}|(f,1)| > 0,$$

y sea $B = B\left(f; \frac{\alpha}{2}\right)$, la bola en $L^2((-1,1))$ centrada en f con radio $\frac{\alpha}{2}$. Sea $g \in B$, entonces $\|f-g\|_{L^2((-1,1))} < \frac{\alpha}{2}$, además, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$\left|\left(g-f, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| \le \|g-f\|_{L^2((-1,1))}\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}\right\|_{L^2((-1,1))} = \|g-f\|_{L^2((-1,1))} < \frac{\alpha}{2},$$

de esta manera

$$\begin{aligned}\left|\left(g, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| &= \left|\left(f, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(g-f, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| \\ &\ge \left|\left(f, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| - \left|\left(g-f, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| \\ &> \alpha - \frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{\alpha}{2},\end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned}&\left|\left(g, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| > \frac{\alpha}{2} > 0 \\ \Longrightarrow\ &|(g,1)| > \frac{\sqrt{2}\alpha}{2} > 0,\end{aligned}$$

luego $(g, 1) \neq 0$ y así, $g \notin M$. De esta manera, tenemos que $B \subset L^2((-1,1)) \setminus M$, concluyendo que M es cerrado.

Veamos ahora que M es un subespacio de $L^2((-1,1))$. Sean $f, g \in M$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_{-1}^{1} (f(x) + g(x))\, dx = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx + \int_{-1}^{1} g(x)\, dx = 0 + 0 = 0,$$

es decir, $f + g \in M$, además

$$\int_{-1}^{1} \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \alpha \cdot 0 = 0,$$

por tanto, $\alpha f \in M$. De esta manera, M es un subespacio de $L^2((-1,1))$.

Hallemos ahora P_M. Sea $f \in L^2((-1,1))$, queremos encontrar $g \in M$ tal que $(f - g, h) = 0$ para todo $h \in M$, es decir

$$\int_{-1}^{1} ((f(x) - g(x))h(x)\, dx = 0.$$

Tomemos $g(x) = f(x) + C_f$ donde

$$C_f = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(y)\, dy,$$

y veamos que $g = P_M f$. Primero veamos que, en efecto, $g \in M$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} g(x)\, dx &= \int_{-1}^{1} (f(x) + C_f)\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} f(x)\, dx + C_f \int_{-1}^{1} dx \\
&= \int_{-1}^{1} f(x)\, dx + 2C_f \\
&= \int_{-1}^{1} f(x)\, dx - \int_{-1}^{1} f(y)\, dy \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por tanto $g \in M$. Ahora sea $h \in M$

$$\begin{aligned}
(f - g, h) &= \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))h(x)\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} (f(x) - (f(x) + C_f))h(x)\, dx \\
&= C_f \int_{-1}^{1} h(x)\, dx \\
&= C_f \cdot 0 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

de esta manera, $g = f + C_f = P_M f$.

(c) Note que,

$$g \in M \iff g(x) = 0 \text{ c.t.p } x \in (-1, 0) \iff \int_{-1}^{0} |g(x)|^2 \, dx = 0,$$

además,

$$\int_{-1}^{0} |g(x)|^2 \, dx = \int_{-1}^{1} |g(x)|^2 \chi_{(-1,0)}(x) \, dx = \int_{-1}^{1} |g(x)\chi_{(-1,0)}(x)|^2 \, dx = \left\|\chi_{(-1,0)} g\right\|^2_{L^2((-1,1))}.$$

de manera que $g \in M$ si y sólo si $\left\|\chi_{(-1,0)} g\right\|_{L^2((-1,1))} = 0$. Sea (f_n) una sucesión de funciones en M tal que $f_n \to f$, Note que

$$\begin{aligned}
\left\|\chi_{(-1,0)} f_n - \chi_{(-1,0)} f\right\|_{L^2(-1,1)} &= \left\|\chi_{(-1,0)} (f_n - f)\right\|_{L^2((-1,1))} \\
&= \left(\int_{-1}^{1} \left|\chi_{(-1,0)} (f_n(x) - f(x))\right|^2 \right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{-1}^{0} |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \\
&= \|f_n - f\|_{L^2((-1,1))},
\end{aligned}$$

de manera que $\chi_{(-1,0)} f_n \to \chi_{(-1,0)} f$ en $L^2((-1,1))$. Para ver que $f \in M$ verificamos que $\left\|\chi_{(-1,0)} f\right\|_{L^2((-1,1))} = 0$. Sea $\varepsilon > 0$, existe N_ε tal que si $n \geq N$, entonces

$$\left\|\chi_{(-1,0)} f_n - \chi_{(-1,0)} f\right\|_{L^2((-1,1))} = \left\|\chi_{(-1,0)} (f_n - f)\right\|_{L^2((-1,1))} < \varepsilon,$$

Para $n \geq N_\varepsilon$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left\|\chi_{(-1,0)} f\right\|_{L^2((-1,1))} &= \left\|\chi_{(-1,0)} (f - f_n) + \chi_{(-1,0)} f_n\right\|_{L^2((-1,1))} \\
&\leq \left\|\chi_{(-1,0)} (f_n - f)\right\|_{L^2((-1,1))} + \left\|\chi_{(-1,0)} f_n\right\|_{L^2((-1,1))} \\
&= \left\|\chi_{(-1,0)} (f_n - f)\right\|_{L^2((-1,1))} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

de esta manera $\left\|\chi_{(-1,0)} f\right\|_{L^2((-1,1))} < \varepsilon$, y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, obtenemos que

$$\left\|\chi_{(-1,0)} f\right\|_{L^2((-1,1))} = 0,$$

de donde obtenemos que $f(x) = 0$ para casi todo $x \in (-1, 0)$ y por tanto, $f \in M$. Así, concluimos que M es cerrado.

Veamos ahora que M es un subespacio de $L^2((-1,1))$. Sean $f,g \in M$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, sean

$$\begin{aligned} E_f &= \{x \in (-1,0) : f(x) \neq 0\} \\ E_g &= \{x \in (-1,0) : g(x) \neq 0\}, \end{aligned}$$

como $f,g \in M$, $\mu(E_f) = \mu(E_g) = 0$ y por tanto

$$0 \leq \mu(E_f \cup E_g) \leq \mu(E_f) + \mu(E_g) = 0 + 0 = 0,$$

es decir, $\mu(E_f \cup E_g) = 0$, entonces, para $x \in (-1,0) \setminus (E_f \cup E_g)$, $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$, por tanto

$$f(x) + g(x) = 0 \text{ para todo } x \in (-1,0) \setminus (E_f \cup E_g),$$

y como $\mu(E_f \cup E_g) = 0$, tenemos que $f + g \in M$. Si $x \in (-1,0) \setminus E_f$, entonces $f(x) = 0$, por tanto

$$\alpha f(x) = \alpha \cdot 0 = 0 \text{ para todo } x \in (-1,0) \setminus E_f,$$

nuevamente, como $\mu(E_f) = 0$, se tiene que $f \in M$. De esta manera, concluimos que M es un subespacio de $L^2((-1,1))$.
Calculemos la proyección ortogonal P_M. Sea $f \in L^2((-1,1))$, queremos encontrar $g \in M$ tal que $(f-g,h) = 0$ para toda $h \in M$. Tomemos $g = \chi_{[0,1)}f$ y veamos que $g = P_M f$. Claramente $g(x) = 0$ para todo $x \in (-1,0)$, por lo que $g \in M$. Sea $h \in M$, entonces

$$\begin{aligned} (f-g,h) &= \int_{-1}^{1} (f(x) - \chi_{[0,1)}(x)f(x))h(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} \chi_{(-1,0)}(x)f(x)h(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{0} f(x)h(x)\,dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

dado que $h(x) = 0$ para casi todo $x \in (-1,0)$. Así, concluimos que
$g = \chi_{[0,1)}f = P_M f$.

(II) (a) Veamos que K es cerrado en $L^2(\Omega)$. Primero, note que

$$K = \left\{ f \in L^2(\Omega) : (f;1) \geq 1 \right\}.$$

Como Ω es un abierto acotado, tenemos que $0 < \mu(\Omega) < \infty$, además

$$\|1\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |1|^2\,dx \right)^{1/2} = (\mu(\Omega))^{1/2}.$$

Sea $g \in L^2(\Omega) \setminus K$, es decir, $\alpha := (g,1) < 1$. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha + \varepsilon < 1$ y $\delta = \dfrac{\varepsilon}{(\mu(\Omega))^{1/2}}$. Consideremos $B = B(g,\delta)$, la bola en $L^2(\Omega)$ centrada en

g y de radio δ y sea $f \in B$, entonces $\|f-g\|_{L^2(\Omega)} < \delta$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y lo anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}
(f,1) &= (f-g,1) + (g,1) \\
&\leq \|f-g\|_{L^2(\Omega)} \|1\|_{L^2(\Omega)} + \alpha \\
&< \delta(\mu(\Omega))^{1/2} + \alpha \\
&= \frac{\varepsilon}{(\mu(\Omega))^{1/2}}(\mu(\Omega))^{1/2} + \alpha \\
&= \varepsilon + \alpha \\
&< 1,
\end{aligned}$$

de manera que $(f;1) < 1$ y así, $B \subset L^2(\Omega) \setminus K$. De esta manera, concluimos que K es cerrado en $L^2(\Omega)$.

Veamos que K es convexo. Sean $f, g \in K$ y $t \in [0,1]$, entonces

$$\int_\Omega (tf(x) + (1-t)g(x))\,dx = t\int_\Omega f(x)\,dx + (1-t)\int_\Omega g(x)\,dx \geq t + (1-t) = 1,$$

luego $tf + (1-t)g \in K$, concluyendo que K es convexo.

(b) Procedemos a calcular P_K. Sea $f \in L^2(\Omega)$, queremos encontrar $g \in K$ tal que $(f-g;h-g) \leq 0$ para toda $h \in K$. Proponemos

$$g(x) = f(x) + \chi_{(-\infty,1)}(C_f)\frac{1-C_f}{\mu(\Omega)},$$

donde

$$C_f = \int_\Omega f(y)\,dy.$$

Veamos que, en efecto, $g = P_K f$. Tenemos dos casos

- Si $f \in K$, tenemos que $C_f \geq 1$ y por tanto $\chi_{(-\infty,1)}(C_f) = 0$, por tanto, $g = f$ y así, $g \in K$ y $(f-g,h-g) = (0,h-f) = 0 \leq 0$, es decir, $g = f = P_K f$.
- Si $f \notin K$, tenemos que $C_f < 1$, por tanto $\chi_{(-\infty,1)}(C_f) = 1$. Veamos que $g \in K$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g(x)\,dx &= \int_\Omega \left(f(x) + \chi_{(-\infty,1)}(C_f)\frac{1-C_f}{\mu(\Omega)}\right)dx \\
&= \int_\Omega \left(f(x) + \frac{1-C_f}{\mu(\Omega)}\right)dx \\
&= \int_\Omega f(x)\,dx + \frac{1-C_f}{\mu(\Omega)}\int_\Omega dx \\
&= C_f + (1-C_f) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

por tanto, $g \in K$.

Note que, como $C_f < 1$, entonces $1 - C_f > 0$ y, por tanto, $\dfrac{1 - C_f}{\mu(\Omega)} > 0$.
Sea $h \in K$ cualquiera, entonces $C_h \geq 1$ y por tanto, $C_h - 1 \geq 0$

$$\begin{aligned}
(f - g, h - g) &= \left(-\frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)}, h - f - \frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)}\right) \\
&= -\frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)}\left(1, h - f - \frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)}\right) \\
&= -\frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)}\int_\Omega \left(h(x) - f(x) - \frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)}\right) dx \\
&= -\frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)}\left(\int_\Omega h(x)\,dx - \int_\Omega f(x)\,dx - \frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)}\int_\Omega dx\right) \\
&= -\frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)}(C_h - C_f - (1 - C_f)) \\
&= -\frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)}(C_h - 1) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

de esta manera $g = P_K f$.

Así, podemos concluir que

$$(P_K f)(x) = f(x) + \chi_{(-\infty,1)}(C_f)\frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)}, \qquad C_f = \int_\Omega f(y)\,dy.$$

□

Ejercicio 14. Sea H un espacio de Hilbert y $A \in L(H) = L(H, H)$ (el conjunto de funciones lineales continuas de H en H).

(I) Para $y \in H$ fijo, muestre que el funcional $\Phi_y : H \to \mathbb{R}$ dado por (Ax, y) es lineal y continuo. Deduzca que existe un único elemento en H que denotaremos por $A^\star y$, tal que

$$(Ax, y) = (x, A^\star y) \text{ para todo } x \in H.$$

(II) Muestre que $A^\star \in L(H)$. $A^\star$ se llama el adjunto de A.

(II) Verifique que $(A^\star)^\star$ y $\|A^\star\| = \|A\|$.

Demostración. (I) Veamos que Φ_y es lineal. Como H es de Hilbert, y usando que $A \in \mathcal{L}(H)$ se sigue que para todo $x, z \in H$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\Phi_y(x + \lambda z) &= ((Ax + \lambda z), y) \\
&= (Ax + \lambda Az, y) \\
&= (Ax, y) + (\lambda Az, y) \\
&= (Ax, y) + \lambda(Az, y) \\
&= \Phi_y(x) + \lambda\Phi_y(z)
\end{aligned}$$

Para ver que Φ_y es continuo, como $A \in \mathcal{L}(H)$, existe una constante $M \geq 0$ tal que $\|Ax\| \leq M\,\|x\|$ para todo $x \in H$. Así, dado $x \in H$

$$\begin{aligned} |\Phi_y x| &= |(Ax, y)| \\ &\leq \|Ax\|\|y\| \\ &\leq M\|x\|\|y\|. \end{aligned}$$

con lo que se concluye que $\Phi_y \in H^\star$.

Ahora, por el teorema de representación de Riesz, existe un único elemento en H, llámelo $A^\star y$, tal que

$$\begin{aligned} (Ax, y) &= \langle \Phi_y, x\rangle \\ &= (A^\star y, x) \\ &= (x, A^\star y) \quad \forall x \in H. \end{aligned}$$

en donde en la última igualdad se usa que $(\cdot,\cdot)$ es simétrico.

(II) Primero veamos que $A^\star$ es lineal. Para ello, dados $y, z \in H$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, queremos ver que

$$(x, A^\star(\lambda y + z)) = (x, \lambda A^\star y + A^\star z) \quad \forall x \in H$$

Así, dado $x \in H$

$$\begin{aligned} (x, A^\star(\lambda y + z)) &= (Ax, \lambda y + z) \\ &= \lambda(Ax, y) + (Ax, z) \\ &= \lambda(x, A^\star y) + (x, A^\star z) \\ &= (x, \lambda A^\star y) + (x, A^\star z) \\ &= (x, \lambda A^\star y + A^\star z) \end{aligned}$$

Por tanto, como

$$(x, A^\star(\lambda y + z)) = (x, \lambda A^\star y + A^\star z) \quad \forall x \in H$$

entonces $A^\star(\lambda y + z) = \lambda A^\star y + A^\star z$.

Veamos que $A^\star$ es continuo. Para esto, usaremos el Teorema del Gráfico cerrado. Con el fin de evitar confusiones en la notación, usaremos $(\cdot,\cdot)_H$ para denotar el producto interior de H, mientras que la notación de pareja ordenada $(\cdot,\cdot) \in H^2$ se mantiene igual.

Sea $(x, y) \in \overline{\mathcal{G}(A^\star)}$. Luego existe una sucesión $\{(x_n, A^\star x_n)\}$ en $\mathcal{G}(A^\star)$ tal que

$$\begin{aligned} x_n &\xrightarrow{n\to\infty} x \\ A^\star x_n &\xrightarrow{n\to\infty} y \end{aligned}$$

Sea $z \in H$, luego

$$(Az, x_n)_H = (z, A^\star x_n)_H$$

Ahora, notemos que $(\cdot,\cdot)_H : H^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es continuo; pues dado $\{u_n\}, \{v_n\}$ sucesiones en H tales que

$$\begin{aligned} u_n &\longrightarrow u \\ v_n &\longrightarrow v \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} |(u_n, v_n)_H - (u,v)_H| &= |(u_n, v_n)_H - (u, v_n)_H + (u, v_n)_H - (u,v)_H| \\ &\leq |(u_n - u, v_n)_H| + |(u, v_n - v)_H| \\ &\leq \|u_n - u\|\|v_n\| + \|u\|\|v_n - v\| \end{aligned}$$

Y como dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que $\|u_n - u\| < \varepsilon$, $\|v_n - v\| < \varepsilon$, siempre que $n \geq N$. Además, como $\{v_n\}$ es acotada por ser convergente, existe $M > 0$ tal que $\|v_n\| \leq M \quad \forall n \geq 1$. Entonces

$$|(u_n, v_n)_H - (u,v)_H| < M\varepsilon + \|u\|\varepsilon$$

Y por tanto, $(\cdot,\cdot)_H$ es continuo. Usando esto y que

$$(Az, x_n)_H = (z, A^\star x_n)_H$$

haciendo tender $n \to \infty$

$$\begin{aligned} (Az, x)_H &= (z, y)_H \\ (z, A^\star x)_H &= (z, y)_H \\ (z, A^\star x - y) &= 0 \end{aligned}$$

Como esto ocurre para cualquier $z \in H$,

$$A^\star x = y$$

de modo que $(x, y) = (x, A^\star x) \in \mathcal{G}(A^\star)$ y por tanto, $\mathcal{G}(A^\star)$ es cerrado, con lo cual concluimos que $A^\star$ es continuo y así, $A^\star \in \mathcal{L}(H)$.

(III) Sea $y \in H$. Así:

$$\begin{aligned} (((A^\star)^\star - A)y, x) &= ((A^\star)^\star y - Ay, x) \\ &= ((A^\star)^\star y, x) - (Ay, x) \\ &= (x, (A^\star)^\star y) - (Ay, x) \\ &= (A^\star x, y) - (y, A^\star x) \\ &= (A^\star x, y) - (A^\star x, y) = 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in H$. Por tanto, $(A^\star)^\star y = Ay$. Pero como $y \in H$ es arbitrario, $(A^\star)^\star = A$.

Finalmente, mostremos que $\|A^\star\| \leq \|A\|$ y $\|A\| \leq \|A^\star\|$.

✓ $\|A^\star\| \leq \|A\|$: Sea $x \in H$, con $\|x\| = 1$. Así

$$\begin{aligned}(A^\star x, A^\star x) &= (AA^\star x, x)\\ &\leq \|AA^\star x\|\|x\|\\ &\leq \|A\|\|A^\star x\|\end{aligned}$$

Como $(A^\star x, A^\star x) = \|A^\star x\|^2$, se sigue que

$$\|A^\star x\| \leq \|A\|$$

pues en el caso que $\|A^\star x\| = 0$, la desigualdad se tiene trivialmente. De esta forma

$$\|A^\star\| = \sup_{\substack{x\in H\\ \|x\|=1}} \|A^\star x\| \leq \|A\|$$

✓ $\|A\| \leq \|A^\star\|$: Por lo hecho en la primera parte, $A = (A^\star)^\star$. Así (y usando lo probado anteriormente)

$$\|A\| = \|(A^\star)^\star\| \leq \|A^\star\|.$$

Por lo tanto, $\|A\| = \|A^\star\|$

$\square$

Ejercicio 15. Sea H un espacio de Hilbert y $M \subseteq H$ un subespacio cerrado. Considere la proyección ortogonal P_M. Muestre que

(I) P_M es lineal.

(II) $P_M^2 = P_M$.

(III) $P_M^\star = P_M$, donde $P_M^\star$ denota el operador adjunto de P_M.

(IV) $\text{Rango}(P_M) = M$ y $\text{Kernel}(P_M) = M^\perp$.

(V) Suponga que $P \in L(H)$. Entonces P es la proyección sobre un subespacio cerrado si y sólo si $P = P^2 = P^\star$.

Demostración. (I) Veamos que P_M es lineal, note que como M es un subespacio cerrado, sabemos que dado un $f \in H$ existe un único $u \in M$ tal que

$$|f - u| = \min_{v\in M} |f - v| = \mathtt{dist}(f, M).$$

más aún

$$(f - u, v) = 0 \qquad \text{para todo } v \in M.$$

Siendo así, suponga $f, g \in H$ y λ escalar, entonces sabemos que existen $u_1, u_2 \in M$ tales que

$$\begin{aligned}(f - u_1, v) &= 0,\\ (g - u_2, v) &= 0 \qquad \text{para todo } v \in M.\end{aligned}$$

Luego se puede inferir usando la linealidad del producto interno que

$$0 = (f - u_1, v) + \lambda(g - u_2, v) = (f + \lambda g - (u_1 + \lambda u_2), v) \quad \text{para todo } v \in M.$$

De lo que se concluye que si $P_M(f) = u_1, P_M(g) = u_2$, entonces $P_M(f + \lambda g) = P_M(f) + \lambda P_M(g)$, es decir, el operador proyección ortogonal P_M es un operador lineal.

(II) Note que dado $f \in H$, entonces existe un único $u \in M$ tal que $P_M(f) = u \in M$, además, como $u \in M$, entonces $P_M(u) = u$, ya que

$$(u - u, v) = (0, v) = 0 \qquad \text{para todo } v \in M.$$

De lo que se concluye que

$$\begin{aligned} P_M^2(f) &= P_M\left(P_M(f)\right), \\ &= P_M(u), \\ &= u, \\ &= P_M(f). \end{aligned}$$

Lo que concluye el resultado.

(III) como H es un espacio de Hilbert y $P_M : H \to H$, entonces por el teorema de representación de Riesz sabemos que el operador $P_M^\star$ cumple que dados $x, y \in H$ se satisface que

$$(P_M(x), y) = \left(x, P_M^\star(y)\right).$$

Ahora, note que x se puede reescribir como $x = P_M(x) + (x - P_M(x))$ y de forma similar $y = P_M(y) + (y - P_M(y))$, en dónde $P_M(x), P_M(y) \in M$ y $(x - P_M(x)), (y - P_M(y)) \in M^\perp$ de lo que usando la linealidad del producto interno y la ortogonalidad se puede concluir que

$$\begin{aligned} (P_M(x), y) &= (P_M(x), P_M(y) + y - P_M(y)), \\ &= (P_M(x), P_M(y)) + (P_M(x), y - P_M(y)), \\ &= (P_M(x), P_M(y)), \\ &= (P_M(x), P_M(y)) + (x - P_M(x), P_M(y)), \\ &= (P_M(x) + x - P_M(x), P_M(y)), \\ &= (x, P_M(y)). \end{aligned}$$

De lo que se puede concluir que $P_M^\star = P_M$.

(IV) Note que para todo $x \in M$ se cumple que $P_M(x) = x$, por lo que se sabe que $M \subseteq \mathrm{Rango}(P_M)$, pero por otro lado dado $y \in H$ sabemos que por ser M un subespacio cerrado, entonces $P_M(y) \in M$, por lo que se afirma que $\mathrm{Rango}(P_M) \subseteq M$, lo que concluye que $\mathrm{Rango}(P_M) = M$. Por otro lado note que dado $x \in H$ se cumple que $x \in \mathit{Kernel}(P_M)$ sí y sólo si se satisface que $P_M(x) = 0$, lo que por definición es

$$
\begin{aligned}
(x - 0, v) &= (x, v), \\
&= 0 \qquad\qquad \text{para todo } v \in M.
\end{aligned}
$$

que solo es verdadero si y sólo si $x \in M^{\perp}$, lo que nos permite concluir que $\mathit{Kernel}(P_M) = M^{\perp}$.

(V) Note que por $(I), (II)$ y (III) ya se tiene que si $P \in L(H)$ y P es la proyección sobre un espacio cerrado, entonces $P = P^2 = P^{\star}$.
Por otro lado suponga que $P \in L(H)$ y que se cumple que $P = P^2 = P^{\star}$, luego definamos el conjunto $M = \mathit{Rango}(P)$, por otro lado note que como $P = P^{\star}$

$$
\begin{aligned}
\mathit{Kernel}(P) &= \{x \in H : (P(x), z) = 0 \text{ para todo } z \in H.\}, \\
&= \{x \in H : (x, P(z)) = 0 \text{ para todo } z \in H.\}, \\
&= \{x \in H : (x, y) = 0 \text{ para todo } y = P(z) \text{ para algún } z \in H.\}, \\
&= \mathit{Rango}(P)^{\perp} = M^{\perp}.
\end{aligned}
$$

Además, note que como el $\mathit{Rango}(P) = M$, entonces dados $x, y \in M$ existen $u, v \in H$ tales que $P(u) = x$ y $P(v) = y$, luego como $P^2 = P$, entonces $x = P^2(u) = P(P(u)) = P(x)$, de igual forma se puede concluir que $P(y) = y$, luego como P es lineal, entonces dado λ escalar se cumple que $P(x + \lambda y) = x + \lambda y$, de lo que se puede concluir que $x + \lambda y \in M$, es decir que M es un subespacio de H.
Por otro lado como $P \in L(H)$, entonces P es acotado, luego como H es espacio de Hilbert, sabemos que este es completo, es decir que dada $\{x_n\} \subset H$ sucesión de Cauchy, sabemos que $x_n \to x$ con $x \in H$, luego $\{P(x_n)\}$ también es sucesión de Cauchy, ya que dado $\epsilon > 0$ existe N tal que si $n, m > N$, entonces $\frac{\|x_n - x_m\|}{\|P\|} < \epsilon$ y por ende

$$
\begin{aligned}
\|P(x_n) - P(x_m)\| &= \|P(x_n - x_m)\|, \\
&\leq \|P\| \|x_n - x_m\|, \\
&< \epsilon.
\end{aligned}
$$

Luego note que $P(x_n) \to P(x)$, ya que P es un operador continuo (acotado), luego como $M = \mathit{Rango}(P)$ toda sucesión de Cauchy en M se puede ver como imagen de una sucesión de Cauchy en H, lo que nos permite concluir que M es un espacio cerrado.
Por último, note que dado $x \in H$ se puede verificar que si $x \in M$, entonces

$$
\begin{aligned}
(x - P(x), v) &= (x - x, v), \\
&= (0, v), \\
&= 0 \qquad\qquad \text{para todo } v \in M.
\end{aligned}
$$

Y si $x \notin M$, entonces $x - P(x) \in \mathrm{Kernel}(P)$ ya que

$$\begin{aligned} P(x - P(x)) &= P(x) - P^2(x), \\ &= P(x) - P(x), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pero como $\mathrm{Kernel}(P) = \mathrm{Rango}(P)^{\perp}$, entonces sabemos que

$$(x - P(x), v) = 0 \qquad \text{para todo } v \in M.$$

Lo que concluye que P es el operador proyección ortogonal sobre un espacio cerrado M, lo que da por finalizado el ejercicio.

$\square$

0.2 Operadores Compactos y Teorema Espectral

Ejercicio 3. Considere los operadores de desplazamiento $S_r, S_l \in L(\ell^2)$, donde si $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in \ell^2$, estos se definen como

$$S_r x := (0, x_1, x_2, x_3, ...),$$

y

$$S_l x = (x_2, x_3, x_4, ...).$$

S_r se conoce como el desplazamiento a derecha y S_l como el desplazamiento a izquierda.

(a) Determinar las normas $\|S_r\|$ y $\|S_l\|$.

(b) Muestre que $EV(S_r) = \emptyset$.

(c) Muestre que $\sigma(S_r) = [-1, 1]$.

(d) Muestre que $EV(S_l) = (-1, 1)$. Encuentre el subespacio propio correspondiente.

(e) Muestre que $\sigma(S_l) = [-1, 1]$.

(f) Determine los adjuntos $S_r^\star$ y $S_l^\star$.

Ejercicio 4. Sea $1 \leq p < \infty$ y consideremos el espacio $L^p((0, 1))$. Dado $u \in L^p((0, 1))$, definimos

$$Tu(x) = \int_0^x u(t)\, dt.$$

(a) Demuestre que $T \in \mathcal{K}(L^p((0, 1)))$.

(b) Determine $EV(T)$ y $\sigma(T)$.

(c) Dé una fórmula explícita para $(T - \lambda I)^{-1}$ cuando $\lambda \in \rho(T)$.

(d) Determine $T^\star$.

Demostración. (a) Veamos primero que $T \in \mathcal{L}(L^p((0,1)))$. Por simplicidad, denotaremos $\|\cdot\|_{L^p((0,1))} = \|\cdot\|_p$. Es claro que T es un operador lineal, además, dada $u \in L^p((0,1))$, por la desigualdad de Hölder

$$\|u\|_1 = \int_0^1 |u(t)|\,dt \leq \|1\|_{p'} \|u\|_p = \left(\int_0^1 1^{p'} dt\right)^{1/p'} \|u\|_p = \|u\|_p\,,$$

donde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. De esta manera

$$\begin{aligned}
\|Tu\|_p &= \left(\int_0^1 |Tu(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^1 \left|\int_0^x u(t)\,dt\right|^p dx\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |u(t)|\,dt\right)^p dx\right)^{1/p} \\
&= \int_0^1 |u(t)|\,dt \\
&= \|u\|_1 \\
&\leq \|u\|_p\,.
\end{aligned}$$

de manera que T es acotado y $\|T\| \leq 1$. Veamos ahora que $T \in \mathcal{K}(L^p((0,1)))$. Sea

$$B = \left\{f \in L^p((0,1)) : \|f\|_p \leq 1\right\}.$$

Queremos ver que $\overline{T(B)}$ es compacto en $L^p((0,1))$, para esto, vamos a usar el siguiente resultado.

Teorema 0.1. (Kolmogorov. Riesz-Frechet). Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto acotado de $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$. Para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $h \in \mathbb{R}^n$, sea $\tau_h f(x) = f(x+h)$. Asuma que

$$\lim_{|h|\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0 \text{ uniformemente en } f \in \mathcal{F},$$

esto es, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$,
entonces $\|\tau_h f - f\|_p < \varepsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Entonces la clausura de $\mathcal{F}\big|_\Omega$ es compacta en $L^p(\Omega)$, para cualquier $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con medida finita ($\mathcal{F}\big|_\Omega$ denota las restricciones a Ω de las funciones en $\mathcal{F}$).

Para aplicar el teorema anterior, claramente vamos a tomar
$\Omega = (0,1)$ y $\mathcal{F} = T(B)$. Sea $h \in \mathbb{R}$ con $|h| < 1$. Para no tener problemas con las expresiones

$$Tu(x+h) = \int_0^{x+h} u(t)\,dt,$$

dado que, en principio, las funciones en $L^p((0,1))$ están definidas únicamente en $(0,1)$, veremos estas funciones como "extendidas" fuera del intervalo $(0,1)$ por la función nula, es decir, si $f \in L^p((0,1))$, entonces consideramos la función $\widetilde{f}$ definida en todo $\mathbb{R}$ (aunque en la práctica denotaremos por f)

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in (0,1), \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus (0,1). \end{cases}$$

Sea $f \in T(B)$, por definición, existe $u \in B$ tal que $Tu = f$. Tenemos dos casos

- Si $h \leq 0$

$$\begin{aligned}
\|\tau_h f - f\|_p &= \left(\int_0^1 |\tau_h f(x) - f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^1 |\tau_h Tu(x) - Tu(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^1 \left| \int_0^{x+h} u(t)\, dt - \int_0^x u(t)\, dt \right|^p dx \right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^1 \left| \int_0^{x+h} u(t)\, dt - \int_0^{x+h} u(t)\, dt - \int_{x+h}^x u(t)\, dt \right|^p dx \right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^1 \left| \int_{x+h}^x u(t)\, dt \right|^p dx \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\int_0^1 \left(\int_{x+h}^x |u(t)|\, dt \right)^p dx \right)^{1/p},
\end{aligned}$$

Ahora, por la desigualdad de Hölder y usando que $u \in B$, si $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{x+h}^x |u(t)|\, dt &= \int_0^1 \chi_{(x+h,x)}(t)|u(t)|\, dt \\
&\leq \left\|\chi_{(x+h,x)}\right\|_{p'} \|u\|_p \\
&= \left(\int_{x+h}^x dt \right)^{1/p'} \\
&= (-h)^{1/p'} \\
&= |h|^{1/p'},
\end{aligned}$$

de manera que

$$\|\tau_h f - f\|_p \leq \left(\int_0^1 \left(\int_{x+h}^x |u(t)|\, dt \right)^p dx \right)^{1/p} \leq \left(|h|^{p/p'} \right)^{1/p} = |h|^{1/p'},$$

por tanto, $0 \leq \lim\limits_{|h| \to 0} \|\tau_h f - f\|_p \leq \lim\limits_{|h| \to 0} |h|^{1/p'} = 0$, para toda $f \in T(B)$.

- Si $h \geq 0$, análogamente al caso anterior (nos saltaremos algunos pasos que son análogos)

$$\|\tau_h f - f\|_p = \left(\int_0^1 \left|\int_x^{x+h} u(t)\, dt\right|^p dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 \left(\int_x^{x+h} |u(t)|\, dt\right)^p dx\right)^{1/p},$$

de la misma manera, por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}\int_x^{x+h} |u(t)|\, dt &= \int_0^1 \chi_{(x,x+h)}(t)|u(t)|\, dt \\ &\leq \left\|\chi_{(x,x+h)}\right\|_{p'} \|u\|_p \\ &= h^{1/p'} \\ &= |h|^{1/p'},\end{aligned}$$

por tanto

$$\|\tau_h f - f\|_p \leq |h|^{1/p'},$$

y nuevamente obtenemos $0 \leq \lim_{|h|\to 0} \|\tau_h f - f\|_p \leq \lim_{|h|\to 0} |h|^{1/p'} = 0$, para toda $f \in T(B)$.

De esta manera, estamos en las hipótesis del Teorema enunciado anteriormente, por lo que podemos concluir que $T(B)$ tiene clausura compacta en $L^p((0,1))$, es decir, $\overline{T(B)}$ es compacto, concluyendo que T es un operador compacto.

(b) Como T es compacto, sabemos que $0 \in \sigma(T)$ y $\sigma(T) \setminus \{0\} = EV \setminus \{0\}$. Sea $\lambda \neq 0$, primero, recordemos que si $u \in L^p((0,1))$, entonces $u \in L^1((0,1))$, por tanto, por el Teorema de Diferenciación de Lebesgue

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(y)\, dy = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \left(\int_0^{x+h} f(y)\, dy - \int_0^{x-h} f(y)\, dy\right) = f(x),$$

para casi todo $x \in (0,1)$ (para ser más rigurosos, la expresión integral vale cuando $h > 0$, pero es análogo cuando $h < 0$ pero queda la integral con límites desde $x+h$ hasta $x-h$), es decir, la función

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)\, dt,$$

es derivable en casi todo $x \in (0,1)$, para toda $f \in L^p((0,1))$. Supongamos que $u \in L^p((0,1))$ con $u \neq 0$ es tal que $Tu = \lambda u$. Por la observación anterior, tenemos que u es derivable en casi toda parte, por tanto

$$\begin{aligned}Tu(x) = \int_0^x u(t)\, dt &= \lambda u(x) \\ \Longrightarrow u(x) &= \lambda u'(x),\end{aligned}$$

además, podemos extender u de manera continua a $[0, 1)$ por $u(0) = 0$, dado que

$$\lim_{x \to 0} \int_0^x u(t)\, dt = 0,$$

así, estamos buscando solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u' = \dfrac{1}{\lambda} u \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

en $[0, 1)$. Podemos ver que la solución general de la ecuación diferencial asociada al problema es

$$u(x) = Ce^{\frac{x}{\lambda}},$$

con $C \in \mathbb{R}$, y como $u(0) = 0$, se debe tener que $C = 0$, concluyendo que $u = 0$, pero en un principio supusimos que $u \neq 0$, lo cuál es una contradicción. De manera $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \rho(T)$, de manera que $EV(T) = \emptyset$ y $\sigma(T) = \{0\}$.

(c) Sea $\lambda \neq 0$ y $u \in L^p((0, 1))$. Supongamos que $(T - \lambda I)u = Tu - \lambda u = f$ con $f \in L^p((0, 1))$. Sea

$$v(x) = \int_0^x u(t)\, dt = Tu(x).$$

Análogamente a lo hecho en el ítem anterior, tenemos que v es diferenciable en casi toda parte y $v' = u$ para casi todo $x \in (0, 1)$. Además, podemos extender a v por $v(0) = 0$, de manera que la ecuación $Tu - \lambda u = f$ nos lleva al problema de Cauchy

$$\begin{cases} v - \lambda v' = f \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

La única solución de este problema está dada por

$$v(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{\frac{x}{\lambda}} \int_0^x e^{-\frac{t}{\lambda}} f(t)\, dt,$$

y nuevamente, como $f \in L^p((0, 1))$ y $e^{-t/\lambda} \in C^\infty((0, 1)) \cap L^\infty((0, 1))$, la función $e^{-\frac{t}{\lambda}} f(t) \in L^1((0, 1))$ y el Teorema de Diferenciación de Lebesgue nos garantiza que la función

$$g(x) = \int_0^x e^{-\frac{t}{\lambda}} f(t)\, dt,$$

es derivable en casi toda parte y $g'(x) = e^{-\frac{x}{\lambda}} f(x)$ en los puntos en donde la derivada tiene sentido, de manera que, usando la regla de Leibniz

$$v'(x) = u(x) = -\frac{1}{\lambda^2} e^{\frac{x}{\lambda}} \int_0^x e^{-\frac{t}{\lambda}} f(t)\, dt - \frac{1}{\lambda} f(x).$$

Como $(T-\lambda I)u = f$, entonces $u = (T-\lambda I)^{-1}f$, de manera que

$$(T-\lambda I)^{-1}f(x) = -\frac{1}{\lambda^2}e^{\frac{x}{\lambda}}\int_0^x e^{-\frac{t}{\lambda}}f(t)\,dt - \frac{1}{\lambda}f(x).$$

(d) Por definición, tenemos

$$\begin{aligned} T^\star : (L^p((0,1)))^\star &\longrightarrow (L^p((0,1)))^\star \\ \xi &\longmapsto T^\star\xi : L^p((0,1)) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad f \longmapsto \langle T^\star\xi; f\rangle := \langle \xi; Tf\rangle. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Representación de Riesz, dado $\xi \in (L^p((0,1)))^\star$, existe una única $g_\xi \in L^{p'}((0,1))$ tal que

$$\langle \xi; h\rangle = \int_0^1 g_\xi(x)h(x)\,dx,$$

para toda $h \in L^p((0,1))$, donde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. De manera Análoga, como $T^\star\xi \in (L^p((0,1)))^\star$, existe una única $G_\xi \in L^{p'}((0,1))$, cumpliendo la misma relación con p, tal que

$$\langle T^\star\xi; h\rangle = \int_0^1 G_\xi(x)h(x)\,dx,$$

De esta manera, por la definición del operador adjunto $T^\star$, dada $f \in L^p((0,1))$ se tiene

$$\langle T^\star\xi; f\rangle = \int_0^1 G_\xi(x)f(x)\,dx = \int_0^1 g_\xi(x)Tf(x)\,dx = \langle \xi; Tf\rangle,$$

por definición y usando el Teorema de Fubini, dado que f es arbitraria, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_\xi(x)Tf(x)\,dx &= \int_0^1 g_\xi(x)\int_0^x f(t)\,dt\,dx \\ &= \int_0^1\int_0^x g_\xi(x)f(t)\,dt\,dx \\ &= \int_0^1\int_t^1 g_\xi(x)f(t)\,dx\,dt \\ &= \int_0^1 f(t)\int_t^1 g_\xi(x)\,dx\,dt. \end{aligned}$$

de manera que

$$G_\xi(t) = \int_t^1 g_\xi(x)\,dx = \int_0^1 g_\xi(x)\chi_{(t,1)}(x)\,dx = \langle \xi; \chi_{(t,1)}\rangle,$$

así,

$$\langle T^\star \xi; f\rangle = \int_0^1 \langle \xi; \chi_{(x,1)}\rangle f(x)\, dx.$$

□

Ejercicio 6. Considere $g \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ (es decir, g es continua y acotada). Definimos el operador de multiplicación $M_g : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ dado por

$$M_g(f)(x) = g(x)f(x).$$

(a) Muestre que $\sigma(M_g) = \overline{\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}}$.

(b) ¿Es el operador M_g compacto?

Demostración. (a) Veamos que $\sigma(M_g) = \overline{\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}}$.

Primero note que como $g \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, entonces sabemos que existen $M, n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} g(M) &= \max_{x\in\mathbb{R}} g(x), \\ g(m) &= \min_{x\in\mathbb{R}} g(x). \end{aligned}$$

Por otro lado note que como $L^2(\mathbb{R})$ es un espacio de Hilbert

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{u\in L^2(\mathbb{R})\\ \|u\|=1}} (M_g(u), u) &= \inf_{\substack{u\in L^2(\mathbb{R})\\ \|u\|=1}} \int_{-\infty}^{\infty} M_g(u)(x)u(x)\, dx, \\ &= \inf_{\substack{u\in L^2(\mathbb{R})\\ \|u\|=1}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)u^2(x)\, dx, \\ &= \inf_{x\in\mathbb{R}} g(x)\, \|u\|_2^2, \\ &= \min_{x\in\mathbb{R}} g(x), \\ &= g(m). \end{aligned}$$

Análogamente

$$\sup_{\substack{u\in L^2(\mathbb{R})\\ \|u\|=1}} (M_g(u), u) = g(M).$$

Además de esto, sabemos que el operador M_g es un operador lineal acotado, pues dada $f, h \in L^2(\mathbb{R})$ y λ escalar se cumple que

$$\begin{aligned} \|M_g(f+\lambda h)\|_2 &= \|g(f+\lambda h)\|_2, \\ &= \|gf + \lambda gh\|_2, \\ &\leq \|gf\|_2 + |\lambda|\, \|gh\|_2, \\ &= \|g(x)\|_\infty \|f(x)\|_2 + |\lambda|\, \|g\|_\infty \|h\|_2. \end{aligned}$$

Luego sabemos que

$$\begin{aligned}(M_g(f), h) &= \int_{-\infty}^{\infty} M_g(f)(x)h(x)\,dx,\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)h(x)\,dx,\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)h(x)\,dx,\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)M_g(h)(x)\,dx,\\ &= (f, M_g h).\end{aligned}$$

De lo que se concluye que M_g es un operador lineal, acotado y autoadjunto, por lo que podemos afirmar que

$$\sigma(M_g) \subseteq [g(m), g(M)] = \overline{\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}}.$$

Ahora veamos que dado $\lambda \in [g(m), g(M)]$, entonces $x \in \sigma(M_g)$.
Para esto veamos que el operador $(M_g - \lambda I)$ no es biyectivo de $L^2(\mathbb{R})$ a $L^2(\mathbb{R})$.
Note que como g es continua y $\lambda \in [g(m), g(M)]$, entonces existe un valor $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(c) = \lambda$, entonces note que dado $\epsilon > 0$ se puede construir $h(x) = \chi_{[c-\epsilon, c+\epsilon]}(x) \in L^2(\mathbb{R})$, veamos que no existe $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $(M_g - \lambda I)(f) = h$, ya que

$$\begin{aligned}(M_g - \lambda I)f &= h,\\ M_g(f) - \lambda I(f) &= h,\\ g(x)f(x) - \lambda f(x) &= h(x),\\ f(x)(g(x) - \lambda) &= h(x),\\ f(x) &= \frac{h(x)}{g(x) - \lambda}.\end{aligned}$$

Luego

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{g(x)-\lambda}, & \text{si } x \in [c-\epsilon, c+\epsilon],\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Luego como g es continua, $c \in [c-\epsilon, c+\epsilon]$, entonces $f(x)$ tiene una singularidad no removible en c y por ende $f \notin L^2(\mathbb{R})$, lo que nos permite concluir que dado $\lambda \in \overline{\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}}$ entonces el operador $(M_g - \lambda I)$ no es sobreyectivo y por ende no es biyectivo, lo que a su vez concluye que $\lambda \in \sigma(M_g)$.

(b) **Parcialmente No.**
Note que si $g(x) = 0$, entonces M_g es un operador compacto, ya que $M_g(B_{L^2}) = \{0\}$ el cual es compacto.
De lo contrario, note que podemos razonar por contradicción, suponga que M_g es un operador compacto, entonces como $\dim(L^2(\mathbb{R})) = \infty$, entonces

a) $0 \in \sigma(M_g)$.

b) $\sigma(M_g) \setminus \{0\} = \overline{\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}} \setminus \{0\}$ es un conjunto finito (lo cual solo sucede si $g(x) = c$, como ya suponemos que $c \neq 0$, entonces no se puede dar, ya que $0 \notin \sigma(M_g)$).

c) $\sigma(M_g) \setminus \{0\}$ es un conjunto enumerable y una secuencia convergente a 0, pero note que $\sigma(M_g) \setminus \{0\} = [g(m), g(M)] \setminus \{0\}$, pero note que como $\sigma(M_g) = [g(m), g(M)]$ es un intervalo cerrado, $|\sigma(M_g) \setminus \{0\}| = 2^{\aleph_0}$.

En cualquiera de los casos se llega a una contradicción, lo que nos permite afirmar que M_g no es un operador compacto si $g \neq 0$.

$\square$