Análisis Funcional: Taller 2

4 de mayo de 2025

Universidad Nacional de Colombia

Oscar Guillermo Riaño Castañeda

Andrés David Cadena Simons acadenas@unal.edu.co

Problema 1:

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Dado $r > 0$, considere $C = B(0, r) = \{y \in E : \|y\| < r\}$. Determine el funcional de Minkowski[1] de C.

Solución:

Note que C es abierto ya que $C = B(0, r)$, veamos que es convexo.
Sean $x, y \in C$, entonces el camino convexo entre ellos es $(1-t)x + ty$, ahora veamos que para todo $t \in [0, 1]$ se cumple que $(1-t)x + ty = z \in C$ ya que

$$\begin{aligned}\|z\| &= \|(1-t)x + ty\|, \\ &\leq (1-t)\|x\| + t\|y\|, \\ &< (1-t)r + tr, \\ &< r.\end{aligned}$$

Luego podemos afirmar que C es un conjunto abierto, convexo y además que $0 \in C$, por lo que definiremos

$$\begin{aligned}\rho : E &\to \mathbb{R}, \\ x &\to \text{ínf}\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\}.\end{aligned}$$

Note que si $\alpha^{-1}x \in C$, entonces

$$\left\|\alpha^{-1}x\right\| = \frac{\|x\|}{\alpha} < r.$$

Lo que implica que $\alpha > \frac{\|x\|}{r}$, lo que nos permite razonar de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\rho : E &\to \mathbb{R}, \\ x &\to \text{ínf}\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\} = \text{ínf}\left\{\alpha > 0 : \alpha > \frac{\|x\|}{r}\right\}. \\ &= \frac{\|x\|}{r}.\end{aligned}$$

Es decir

$$\rho(x) = \frac{\|x\|}{r}.$$

[1] Recuerde que dado C abierto, convexo con $0 \in C$, el funcional de Minkowski se define como $\rho(x) = \text{ínf}\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\}, x \in E$.

Veamos que este es un funcional de Minkowski.
Dado $x \in E$ y $\lambda > 0$ se satisface que

$$\begin{aligned}\rho(\lambda x) &= \frac{\|\lambda x\|}{r}, \\ &= \lambda \frac{\|x\|}{r}, \\ &= \lambda \rho(x).\end{aligned}$$

Además dados $x, y \in E$ se cumple que

$$\begin{aligned}\rho(x+y) &= \frac{\|x+y\|}{r}, \\ &\leq \frac{\|x\| + \|y\|}{r}, \\ &\leq \frac{\|x\|}{r} + \frac{y}{r}, \\ &\leq \rho(x) + \rho(y).\end{aligned}$$

Por lo que podremos afirmar que el funcional de Minkowski de C es

$$\rho(x) = \frac{\|x\|}{r}.$$

Lo que nos permite concluir el ejercicio.

Problema 2:

Sea E espacio vectorial normado.

(I) Sea $W \subset E$ un subespacio propio de E y $x_0 \in E \setminus W$, tal que $d := d(x_0, W) > 0$. Demuestre que existe $f \in E^*$ tal que $f = 0$ restricto a W, $f(x_0) = d$ y $\|f\|_{E^*} = 1$.

(II) Sea $W \subset E$ un subespacio propio cerrado de E y $x_0 \in E \setminus W$. Demuestre que existe $f \in E^*$ tal que $f = 0$ restricto a W y $f(x_0) \neq 0$.

Solución:

1. Suponga $V = W \times \{tx_0\}$ y definamos el siguiente funcional

$$\begin{aligned} g : V = W \times \{tx_0\} &\to \mathbb{R}, \\ (x, tx_0) &\to td. \end{aligned}$$

Note que si tomamos $x + (0)x_0 \in V$ tal que $t = 0$ (es decir $x \in W$), entonces

$$g(x + (0)x_0) = (0)d = 0.$$

Por otro lado si tomamos $0 + (1)x_0 \in V$ (es decir $x_0 \in E \setminus W$), entonces

$$g(0 + (1)x_0) = (1)d = d.$$

Se puede verificar que g es lineal ya que si suponemos $x, y \in V$ con sus t_1 y t_2 respectivos y λ escalar, entonces

$$\begin{aligned} g(x + \lambda y) &= (t_1 + \lambda t_2)d, \\ &= t_1 d + \lambda t_2 d, \\ &= g(x) + \lambda g(y). \end{aligned}$$

Ahora veamos que $\|g\|_{V^*} = 1$.
Primero tome $a = x + tx_0 \in V$ arbitrario, entonces

$$\begin{aligned} |g(a)| &= |td|, \\ &= \left| t \inf_{y \in W} \|x_0 - y\| \right|, \\ &\leq \left| t \left\| x_0 - \left(-\frac{x}{t} \right) \right\| \right|, \\ &\leq \|tx_0 + x\|, \\ &\leq \|a\|. \end{aligned}$$

Por lo que podemos asegurar que $\|g\|_{V^*} \leq 1$. Pero note que como $d = \operatorname{ínf}_{y \in W} \|x_0 - y\|$, entonces podemos escoger una sucesión $\{y_n\} \subset W$ tal que $\|x_0 - y_n\| \to d$ por encima

cuando $n \to \infty$.
Suponga $\{v_n\} = \left\{ \frac{x_0 - y_n}{\|x_0 - y_n\|} \right\}$ y note que

$$\begin{aligned} \|g\|_{V^*} &= \sup_{\substack{x \in V, \\ \|x\|=1}} |g(x)|, \\ &\geq \lim_{v_n \to \infty} |g(v_n)|, \\ &\geq \lim_{v_n \to \infty} \frac{|g(x_0) - g(y_n)|}{\|x_0 - y_n\|}, \\ &\geq \lim_{n \to \infty} \frac{d}{\|x_0 - y_n\|}, \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

Luego podemos asegurar que $\|g\|_{V^*} = 1$.
Ahora, definamos

$$\rho(x) = \|x\| \quad , x \in E.$$

Veamos que ρ domina a g, es decir, $g(x) \leq \rho(x)$ para todo $x \in V$.
Suponga $a = x + tx_0 \in V$, entonces

$$\begin{aligned} g(a) &= td, \\ &\leq \|tx_0\|, \\ &\leq \|x + tx_0\|, \\ &\leq \|a\| = \rho(a). \end{aligned}$$

lo que nos permite concluir que ρ domina a g.
Ahora tenemos que

- $g \in V^*$.
- $\|g\|_{V^*} = 1$.
- $g|_w = 0$ y $g(x_0) = d$.
- ρ es un funcional de Minkowski que domina a g.

Luego, usando el teorema de Helly,Hahn-Banach en su forma analítica podemos asegurar que existe $f \in E^*$ tal que $f = 0$ restricto a W, $f(x_0) = d$ y $\|f\|_{E^*} = 1$.

Problema 3:

Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios de Banach.

(I) Sea $K \subset E$ un subespacio cerrado de E. Definimos la relación sobre E dada por $x \sim_K y$ si y solo si $x - y \in K$.

(a) Muestre que $\sim_K$ es una relación de equivalencia sobre E.

(b) Muestre que el espacio cociente E/K es un espacio de Banach con la norma

$$\|x + K\|_{E/K} = \inf_{k \in K} \|x - k\|, \quad x \in E.$$

Es decir, debe verificar que el espacio cociente es un espacio vectorial normado, cuya norma lo hace completo.

(II) Sea $T \in L(E, W)$ tal que existe $c > 0$ para el cual

$$\|Tx\|_F \geq c \|x\|_E ,$$

para todo $x \in E$. Si K denota el espacio nulo de T y $R(T)$ el rango de T, muestre que $\overline{T} : E/K \to R(T)$ dada por $\widetilde{T}(x + K) = T(x), x \in E$, está bien definida y es un isomorfismo. Esto es $\widetilde{T} \in L(E/K, R(T))$ y $\widetilde{T}^{-1} \in L(R(T), E/K)$.

Solución:

(I)

(a) Veamos que $\sim_K$ es una relación de equivalencia sobre E.

- Reflexiva.
Note que $x \sim_K x$, ya que $x - x = 0 \in K$ por ser K subespacio de E para todo $x \in E$, lo que nos permite concluir la reflexividad.
- Simétrica.
Note que si asumimos que $x \sim_K y$, entonces $x - y \in K$, pero como K es subespacio, entonces $-(x - y) = y - x \in K$, por lo que podemos asegurar que $y \sim_K x$, lo que nos permite concluir la simetría en la relación.
- Transitiva.
Note que si asumimos que $x \sim_K y$ y $y \sim_K z$, entonces $x - y \in K$ y $y - z \in K$, pero como K es un subespacio cerrado, entonces $(x - y) + (y - z) = x - z \in K$ y por ende $x \sim_K z$, lo que nos permite concluir la transitividad.

Problema 4:

Considere los espacios $C([0,1])$ y $C^1([0,1])$ ambos equipados con la norma del supremo $\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Definimos el operador derivada $D : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ dado por $f \to f'$. Muestre que D es un operador no acotado, pero su gráfico $G(D)$ es cerrado.

Solución:

Solución.