Análisis Númerico: Taller 3

06 de febrero de 2025

Universidad Nacional de Colombia

Jorge Mauricio Ruiz Vera

Andrés David Cadena Simons acadenas@unal.edu.co
Sandra Natalia Florez Garcia sflorezga@unal.edu.co

Problema 1:

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -20 & 14 \\ -3 & 27 & 4 \\ -4 & 11 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

a) Aplique las transformaciones de Householder, para calcular $A = QR$.

Solución:

Sea A una matriz de tamaño 3×3. Buscamos descomponerla como $A = QR$, donde Q es una matriz ortogonal y R una matriz triangular superior, ambas de tamaño 3×3.

Como primer paso, tomemos la primera columna de A, que llamaremos $a_1 = (0, -3, -4)^T$, y definamos el vector de Householder v_1:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 + \text{sign}(a_{11})\|a_1\|e_1 \\ &= (0, -3, -4)^T + \|(0, -3, -4)^T\|(1, 0, 0)^T \\ &= (0, -3, -4)^T + 5(1, 0, 0)^T \\ &= (5, -3, -4)^T \end{aligned}$$

A continuación, calculemos $v^T v$ y el producto exterior vv^T:

$$v^T v = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = 50$$

$$vv^T = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -15 & -20 \\ -15 & 9 & 12 \\ -20 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos la matriz de Householder correspondiente:

$$\begin{aligned} F_1 &= I - \frac{2}{v^T v} vv^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{50} \begin{pmatrix} 25 & -15 & -20 \\ -15 & 9 & 12 \\ -20 & 12 & 16 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{16}{25} & -\frac{12}{25} \\ \frac{4}{5} & -\frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aplicamos F_1 a A para introducir ceros debajo de la primera entrada:

$$F_1 A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{16}{25} & -\frac{12}{25} \\ \frac{4}{5} & -\frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -20 & 14 \\ -3 & 27 & 4 \\ -4 & 11 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 25 & 4 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & -25 & 10 \end{pmatrix}$$

Problema 1 continúa en la siguiente página...

Ahora tomamos la submatriz inferior derecha de F_1A, denotada por:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -25 & 10 \end{pmatrix}$$

y repetimos el proceso anterior para $a_2 = (0, -25)^T$. Definimos entonces v_2:

$$\begin{aligned} v_2 &= (0, -25)^T + \|(0, -25)^T\|(1, 0)^T \\ &= (25, -25)^T \end{aligned}$$

Calculamos su norma y el producto exterior:

$$v_2^T v_2 = \begin{pmatrix} 25 & -25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ -25 \end{pmatrix} = 1250$$

$$v_2 v_2^T = \begin{pmatrix} 25 \\ -25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 625 & -625 \\ -625 & 625 \end{pmatrix}$$

Entonces, la nueva matriz de Householder es:

$$\begin{aligned} F_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{1250} \begin{pmatrix} 625 & -625 \\ -625 & 625 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Extendemos esta matriz a tamaño 3×3 para aplicarla a F_1A:

$$F_2' F_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 25 & 4 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & -25 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 25 & 4 \\ 0 & -25 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = R$$

Finalmente, obtenemos la descomposición $A = QR$ donde $Q = F_1^T (F_2')^T$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -20 & 14 \\ -3 & 27 & 4 \\ -4 & 11 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{12}{25} & \frac{16}{25} \\ \frac{4}{5} & \frac{9}{25} & -\frac{12}{25} \end{pmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} -5 & 25 & 4 \\ 0 & -25 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}}_{R}$$

b) Aplique el método de ortogonalización de Gram-Schmindt, para calcular $A = QR$.

Solución:

Al igual que en el caso anterior, buscamos una matriz ortogonal Q y una matriz triangular superior R tal que $A = QR$. Para este caso, generamos un conjunto de vectores ortonormales v_1, v_2, v_3 a partir de las columnas de A.

Problema 1 continúa en la siguiente página...

Denotamos las columnas en orden como c_1, c_2 y c_3, y aplicamos el método de Gram-Schmidt:

$$v_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|} = \frac{1}{5}(0,-3,-4)^T = \left(0, \frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}\right)^T.$$

Para calcular v_2, primero obtenemos un vector ortogonal a v_1, denotado como v_2':

$$\begin{aligned} v_2' &= c_2 - (c_2^T v_1)v_1 \\ &= (-20,27,11)^T + 25\left(0, \frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}\right)^T \\ &= (-20,12,-9)^T. \end{aligned}$$

Normalizando v_2' obtenemos v_2:

$$v_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \frac{1}{25}(-20,12,-9)^T = \left(\frac{-20}{25}, \frac{12}{25}, \frac{-9}{25}\right)^T.$$

Repetimos el proceso para v_3:

$$\begin{aligned} v_3' &= c_3 - (c_3^T v_1)v_1 - (c_3^T v_2)v_2 \\ &= (14,4,2)^T + 4\left(0, \frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}\right)^T + 10\left(\frac{-20}{25}, \frac{12}{25}, \frac{-9}{25}\right)^T \\ &= \left(6, \frac{32}{5}, \frac{-24}{5}\right)^T. \end{aligned}$$

Finalmente, normalizamos v_3' para obtener v_3:

$$v_3 = \frac{v_3'}{\|v_3'\|} = \frac{1}{10}\left(6, \frac{32}{5}, \frac{-24}{5}\right)^T = \left(\frac{3}{5}, \frac{16}{25}, \frac{-12}{25}\right)^T.$$

La factorización QR surge al reescribir las columnas originales en términos de los nuevos vectores ortonormales:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} c_1 & c_2 & c_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} v_1 & v_2 & v_3 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \|c_1\| & c_2^T v_1 & c_3^T v_1 \\ 0 & \|c_2\| & c_3^T v_2 \\ 0 & 0 & \|c_3\| \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la factorización QR resultante es:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -20 & 14 \\ -3 & 27 & 4 \\ -4 & 11 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{12}{25} & \frac{16}{25} \\ \frac{-4}{5} & \frac{-9}{25} & \frac{-12}{25} \end{pmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -25 & -4 \\ 0 & 25 & -10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}}_{R}.$$

c) Implemente en Matlab los métodos de ortogonalización de Gram-Schmindt y Householder, para calcular $A = QR$, compare los resultados númericos con los encontrados en las partes (a) y (b).

Solución:

A continuación se implementaron los métodos de ortogonalización de Gram-Schmindt y Householder, para calcular $A = QR$

```
% Definir la matriz A
A = [0 -20 14;
     -3 27 4;
     -4 11 2];

% Implementación del método de Gram-Schmidt
function [Q, R] = gram_schmidt(A)
    [m, n] = size(A);
    Q = zeros(m, n);
    R = zeros(n, n);

    for j = 1:n
        v = A(:, j);
        for i = 1:j-1
            R(i, j) = Q(:, i)' * A(:, j);
            v = v - R(i, j) * Q(:, i);
        end
        R(j, j) = norm(v);
        Q(:, j) = v / R(j, j);
    end
end

% Implementación del método de Householder
function [Q, R] = householder(A)
    [m, n] = size(A);
    Q = eye(m);
    R = A;

    for k = 1:n
        x = R(k:m, k);
        norm_x = norm(x);
        e1 = zeros(length(x), 1);
        e1(1) = norm_x;

        % Evitar sign(0) = 0 asegurando una buena dirección de
            reflexión
        sign_x1 = sign(x(1)) + (x(1) == 0);
```

```
37
38          v = x + sign_x1 * norm_x * e1;
39          v = v / norm(v);
40
41          % Construir la matriz de Householder
42          Hk = eye(m);
43          Hk(k:m, k:m) = eye(length(x)) - 2 * (v * v');
44
45          % Aplicar la transformación
46          R = Hk * R;
47          Q = Q * Hk';
48      end
49  end
50
51
52  % Aplicar los métodos a la matriz A
53  [Q_GS, R_GS] = gram_schmidt(A);
54  disp('Factorización QR usando Gram-Schmidt:');
55  disp('Q ='); disp(Q_GS);
56  disp('R ='); disp(R_GS);
57
58  [Q_HH, R_HH] = householder(A);
59  disp('Factorización QR usando Householder:');
60  disp('Q ='); disp(Q_HH);
61  disp('R ='); disp(R_HH);
```

```
>> QR
Factorización QR usando Gram-Schmidt:
Q =
         0   -0.8000    0.6000
   -0.6000    0.4800    0.6400
   -0.8000   -0.3600   -0.4800

R =
    5.0000  -25.0000   -4.0000
         0   25.0000  -10.0000
         0         0   10.0000
```

```
Factorización QR usando Householder:
Q =
   -0.9231   -0.2350   -0.3045
    0.2308   -0.9717    0.0502
    0.3077    0.0239   -0.9512

R =
   -1.9231   28.0769  -11.3846
    2.8195  -21.2741   -7.1285
    3.6540   -3.0166   -5.9645
```

Al comparar los métodos de factorización QR mediante Gram-Schmidt y Householder, se observa que el primero produjo una descomposición sin problemas, mientras que el segundo mostró inconsistencias, en particular una matriz R que no es triangular superior. Esto sugiere que la implementación del método de Householder pudo haber sufrido errores numéricos acumulativos.

Las transformaciones de Householder están diseñadas para introducir ceros en la

parte inferior de la matriz mediante reflexiones ortogonales. Sin embargo, pequeños errores en la normalización de los vectores reflejados pueden amplificarse, afectando la estructura triangular de R. Además, la sensibilidad a la escala de los valores de la matriz original puede exacerbar estos errores. En este caso, la segunda columna de la matriz tiene valores significativamente mayores en magnitud que la primera, lo que puede haber llevado a problemas de redondeo y pérdida de precisión en los cálculos.

A pesar de que Householder es generalmente más estable que Gram-Schmidt, la implementación computacional puede verse afectada por la acumulación de errores de redondeo, especialmente si las operaciones no se manejan con la precisión adecuada. Esto explicaría por qué Gram-Schmidt, a pesar de ser teóricamente menos estable, produjo mejores resultados en este caso particular.

Problema 2:

Descargue el archivo Datos.txt de la pagina del curso. En este encontrara un conjunto de 21 datos. Copie estos datos y calcule el polinomio de ajuste de grado 5 $p(x) = c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5$ utilizando los métodos de ecuaciones normales y factorizacion QR. Compare sus resultados con los valores certificados $c_i = 1$ para $i = 0, 1, \cdots, 5$. Encuentre el residual $\|Ac - y\|_2$ en cada caso, así como la diferencia relativa con respecto a los valores certificados. Escriba sus conclusiones.

Solución:

1. Usando Cholesky.

```
format rational
n = 5; %Grado del polinómio
x = (0:1:20)';
y = [75901, -204794, 204863, -204436, 253665, -200894, 214131,
    -185192, 221249, -138370, 315911, -27644, 455253, 197434,
    783995, 608816, 1370781, 1303798, 2205519, 2408860, 3444321]';

% Tomar tiempo de ejecución
tic;

% Construcción de la matriz Vandermonde
A = vander(x);
A = A(:, end-n:end); % Tomar las n+1 columnas necesarias

% Construcción de ecuaciones normales
B = A' * A;
z = A' * y;

% Descomposición de Cholesky
L = chol(B, 'lower'); % Matriz triangular inferior

% Resolver el sistema de ecuaciones
sol1chol = L \ z;
solchol = L' \ sol1chol;
tiempo_chol = toc

% Mostrar solución final
disp(solchol);

xx = linspace(min(x), max(x), 100); % Puntos más finos para la
    curva
AA = xx(:).^(0:n); % Matriz de diseño para interpolación
yy = AA * solchol; % Evaluación del polinomio
```

```
31
32 plot(x, y, 'ro', 'MarkerSize', 8, 'DisplayName', 'Datos
       originales'); % Puntos originales
33 hold on;
34 plot(xx, yy, 'b-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'Polinomio
       ajustado'); % Polinomio
35 legend;
36 grid on;
37 title('Ajuste polinomial usando mínimos cuadrados con Cholesky');
38 xlabel('x');
39 ylabel('y');
40 hold off;
```

En dónde en un tiempo de $\frac{29}{77957} \approx 0{,}000372$ nos lista los coeficientes $c_i = 1$ con $i = 0, 1, \cdots, 5$ y la gráfica

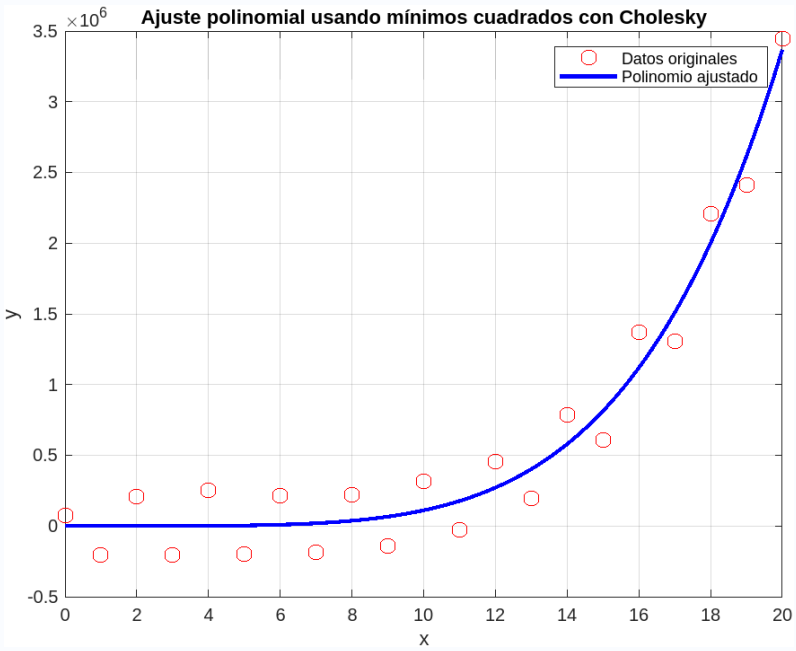


Figura 1: Usando el método de Cholesky.

2. Usando la factorización QR.

```
format rational
n = 5; %Grado del polinómio
x = (0:1:20)';
y = [75901, -204794, 204863, -204436, 253665, -200894, 214131,
    -185192, 221249, -138370, 315911, -27644, 455253, 197434,
    783995, 608816, 1370781, 1303798, 2205519, 2408860, 3444321]';

% Tomar tiempo de ejecución
tic;

% Construcción de la matriz Vandermonde
A = vander(x);
A = A(:, end-n:end); % Tomar las n+1 columnas necesarias

% Factorización QR
[Q,R] = qr(A);

% Ecuaciones QR

b = Q'*y;
solqr = R \ b;
tiempo_qr = toc

% Mostrar solución final
disp(solchol);

xx = linspace(min(x), max(x), 100); % Puntos más finos para la
    curva
AA = xx(:).^(0:n); % Matriz de diseño para interpolación
yy = AA * solchol; % Evaluación del polinomio

plot(x, y, 'ro', 'MarkerSize', 8, 'DisplayName', 'Datos
    originales'); % Puntos originales
hold on;
plot(xx, yy, 'b-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'Polinomio
    ajustado'); % Polinomio
legend;
grid on;
title('Ajuste polinomial usando factorización QR');
xlabel('x');
ylabel('y');
hold off;
```

En dónde en un tiempo de $\frac{47}{125000}s \approx 0{,}000376s$ nos lista los coeficientes $c_i = 1$ con $i = 0, 1, \cdots, 5$ y la gráfica

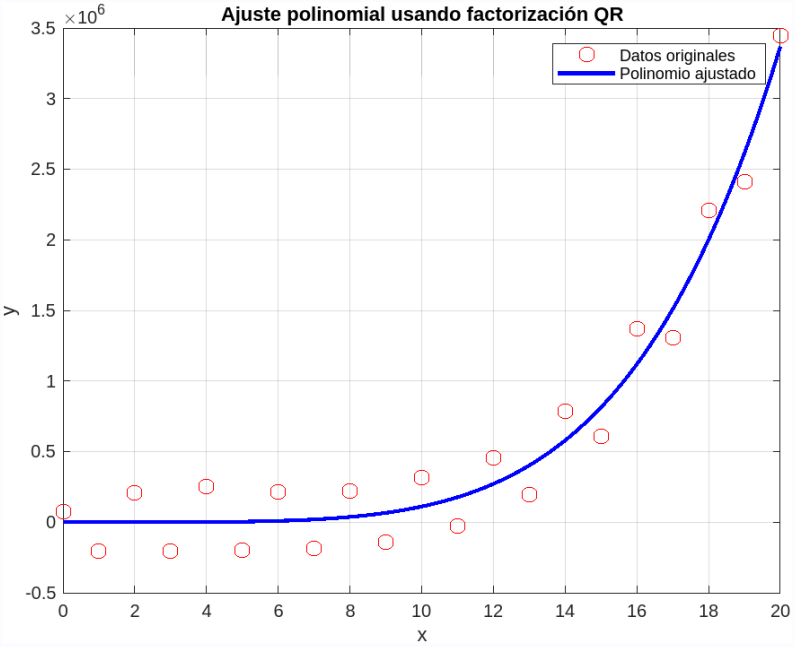


Figura 2: Usando el método de factorización QR.

Conclusiones: experimentalmente ambos métodos parecen dar de manera explícita los valores certificados, por lo que sería más objetivo hablar sobre el tiempo de ejecución del método en matlab, lo que vimos anteriormente que le da el punto al método de Cholesky, pues este tuvo un tiempo de ejecución menor al de la factorización QR. Por otro lado, la diferencia relativa con respecto a los valores certificados en ambos casos es de 0 al ser idénticos a los valores dados en el problema, veamos por otro lado el residual:

$$\|Ac_{chol} - y\|_2 = 914080$$
$$\|Ac_{QR} - y\|_2 = 914080$$

Esto se explica al ambos métodos llegar a la misma solución.
En fin, si bien en este experimento parece que el método de Cholesky es más eficiente que el método de factorización QR, recordemos que teóricamente el método QR tiene mayor estabilidad que Cholesky por el número de condición que se plantea en ambos casos, por lo que es válido pensar que para polinomios de grado mucho mayor lo sucedido en este experimento no siga sucediendo.

Problema 3:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a\delta & a & 0 \\ 0 & a\delta & a \end{pmatrix}, \quad a < 0, \quad \delta > 0 \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1{,}1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Obtenga el número de condición de A.

Solución:

Hallemos el número de condición $\kappa_\infty(A) = \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty$.Para ello, encontremos la inversa de A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a\delta & a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a\delta & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) R_2 \to R_2 - \delta R_1, \quad R_3 \to R_3 - \delta R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & -\delta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & \delta^2 & -\delta & 1 \end{array}\right) R_1 \to \frac{R_1}{a}, \quad R_2 \to \frac{R_2}{a}, \quad R_3 \to \frac{R_3}{a}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\delta}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\delta^2}{a} & -\frac{\delta}{a} & \frac{1}{a} \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{\delta}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{\delta^2}{a} & -\frac{\delta}{a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

Ahora calculemos las normas correspondientes,

$$\begin{aligned} \kappa_\infty(A) = \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty &= \left(\left|\frac{\delta^2}{a}\right| + \left|\frac{-\delta}{a}\right| + \left|\frac{1}{a}\right|\right)(|a\delta| + |a|) \\ &= (\delta + 1)(\delta^2 + \delta + 1) \qquad , \delta > 0 \\ &= \delta^3 + 2\delta^2 + 2\delta + 1 \end{aligned}$$

Por consiguiente, $\kappa_\infty(A) = \delta^3 + 2\delta^2 + 2\delta + 1$, con $\delta > 0$.

(b) Estudiar el condicionamiento del sistema $Ax = b$ en función de los valores de δ. Interprete su resultado.

Solución:

Como $\kappa_\infty(A) = \delta^3 + 2\delta^2 + 2\delta + 1$ con $\delta > 0$, notemos que:

- Si $\delta \to 0$, entonces $\kappa_\infty(A) \to 1$.
- Si $\delta \to \infty$, entonces $\kappa_\infty(A) \to \infty$.

Por consiguiente, si $\delta \ll 1$, la matriz estará bien condicionada, lo que implica que

los cambios relativos en b controlan los cambios relativos en x. En cambio, si $\delta \gg 1$, el sistema será mal condicionado, es decir, pequeños cambios en los datos pueden generar grandes errores en la solución.

(c) Si $a = -1$, $\delta = 0{,}1$ y se considera $x^* = \left(1, \frac{9}{10}, 1\right)^T$ como solución aproximada del sistema $Ax = b$ (sin obtener la solución exacta), determine un intervalo en el que esté comprendido el error relativo. ¿Es coherente con la respuesta dada en el apartado anterior?

Solución:

Reemplazando $a = -1$ y $\delta = -0{,}1$ en la matriz y tomando $x^* = \left(1, \frac{9}{10}, 1\right)^T$, obtenemos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -0{,}1 & -1 & 0 \\ 0 & -0{,}1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9}{10} \\ 1 \end{pmatrix}}_{x^*} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -\frac{109}{100} \end{pmatrix}}_{b^*} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1{,}1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}$$

Usemos la siguiente expresión para encontrar una cota para el error relativo:

$$\frac{1}{\kappa_\infty(A)} \frac{\|b - b^*\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x - x^*\|}{\|x\|} \leq \kappa_\infty(A) \frac{\|b - b^*\|}{\|b\|}$$

Antes de reemplazar, calculemos algunos valores:

$$\begin{aligned} \kappa_\infty(A) &= \delta^3 + 2\delta^2 + 2\delta + 1 \\ &= \left(\frac{1}{10}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{10}\right) + 1 = \frac{1221}{1000} \\ \|b\|_\infty &= |-1{,}1| = 1{,}1 \\ \|b^*\|_\infty &= \left|\frac{-109}{100}\right| = \frac{109}{100} \end{aligned}$$

Reemplazando, la cota del error relativo queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1{,}221} \frac{|1{,}1 - 1{,}09|}{|1{,}1|} \leq \frac{\|x - x^*\|}{\|x\|} &\leq (1{,}221) \frac{|1{,}1 - 1{,}09|}{|1{,}1|} \\ 0{,}00744 \leq \frac{\|x - x^*\|}{\|x\|} &\leq 0{,}0111 \end{aligned}$$

Es decir, el error relativo está entre 0,74 % y 1,11 %, lo cual considero coherente con los resultados encontrados en el ítem anterior. En este caso, se está tomando un $\delta \ll 1$, por lo que el error es pequeño y, en consecuencia, la aproximación es buena.

(d) Si $a = -1$ y $\delta = 0{,}1$, ¿es convergente el método de Jacobi aplicado a la resolución del sistema $Ax = b$? Realice tres iteraciones a partir de $x^* = (0, 0, 0)^T$.

Solución:

Sea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -0{,}1 & -1 & 0 \\ 0 & -0{,}1 & -1 \end{pmatrix}$$

Reescribamos la matriz como $A = D + L + U$, donde D es la matriz diagonal de A, L es la matriz con los elementos debajo de la diagonal, y U es la matriz con los elementos por encima de la diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, calculemos la matriz de iteración T_J para el método iterativo de Jacobi, dada por:

$$T_J = -D^{-1}(L + U).$$

Dado que en este caso $U = 0$, la expresión se reduce a $T_J = -D^{-1}L$:

$$T_J = -D^{-1}L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\|T_J\|_\infty = 0{,}1 < 1$, el método de Jacobi converge según el criterio de la norma.

A continuación, escribamos explícitamente la forma matricial de las iteraciones, que se define como:

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}Lx^{(k)} + D^{-1}b.$$

Sustituyendo los valores:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, realicemos tres iteraciones del método de Jacobi:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -0{,}11 \end{pmatrix}.$$

Problema 3 continúa en la siguiente página...

$$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que:

$$Ax^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -0{,}1 & -1 & 0 \\ 0 & -0{,}1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1{,}1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el método de Jacobi no solo converge, sino que lo hace rápidamente y en solo tres iteraciones alcanza la solución exacta.

Problema 4:

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que $\lambda = 1$ es un vector propio de la matriz de iteración del método de Jacobi (o Gauss-Seidel) de A si y solo si A no es invertible.

Solución:

Sea $A = D - L - U$, donde D es la matriz diagonal de A, L es la matriz que contiene los elementos debajo de la diagonal con signo invertido, y U es la matriz con los elementos por encima de la diagonal también con signo invertido.

Supongamos que $\lambda = 1$ es un valor propio de la matriz de iteración de Jacobi, $T_J = -D^{-1}(L+U)$. Por definición, esto significa que:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(D^{-1}(L+U) - I) \\ &= \det(D^{-1}(L+U) - D^{-1}D) \\ &= \det(D^{-1}(L+U-D)) \\ &= \det(D^{-1})\det(-(D-L-U)) \\ &= \det(D^{-1})(-1)^n \det(A). \end{aligned}$$

Dado que D es invertible, se sigue que $\det(A) = 0$, lo que implica que A no es invertible. Recíprocamente, si A no es invertible, entonces $\det(A) = 0$. A partir de la ecuación anterior, esto implica que $\det(D^{-1}(L+U) - I) = 0$, lo que prueba que $\lambda = 1$ es un valor propio de la matriz de iteración del método de Jacobi.

Problema 5:

Considere el sistema $Ax = b$ donde

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ -26 \\ 3 \\ 47 \\ -10 \end{pmatrix}$$

1. Investigue la convergencia de los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y sobrerelajación.

Solución:

a) Convergencia en Jacobi.
Note que A es una matriz diagonal dominante, por lo que se puede asegurar que el método converge desde cualquier solución inicial $\mathbf{x}^0$.

b) Convergencia en Gauss-Seidel.
Note que T_{GS} es:

$$T_{GS} = (D - L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{4}{15} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{2}{15} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Luego el radio espectral de T_{GS} es $1061/2071 \approx 0{,}51 < 1$, por lo que sabemos que la sucesión converge con cualquier $\mathbf{c}$ y $\mathbf{x}^0$.
Estos cálculos se ayudaron de matlab

```
% Definir la matriz
A = [ 3   -1   -1    0    0;
     -1    4    0   -2    0;
     -1    0    3   -1    0;
      0   -2   -1    5   -1;
      0    0    0   -1    2];
D = [ 3    0    0    0    0;
      0    4    0    0    0;
      0    0    3    0    0;
      0    0    0    5    0;
      0    0    0    0    2];
L = [ 0    0    0    0    0;
      1    0    0    0    0;
      1    0    0    0    0;
      0    2    1    0    0;
      0    0    0    1    0];
U = [ 0    1    1    0    0;
      0    0    0    2    0;
      0    0    0    1    0;
      0    0    0    0    1;
      0    0    0    0    0];

TGS = inv(D-L)*U;
latex_codigo = latex(sym(TGS));

% Obtener valores propios
valores_propiosGS = eig(TGS);

% Calcular el radio espectral
radio_espectralGS = max(abs(valores_propiosGS));

% Mostrar resultado
disp('Radio espectral en Gauss-Seidel:')
disp(radio_espectral)
```

c) Convergencia en SOR.
Note que A es una matriz simétrica definida positiva, ya que el polinomio carácteristico es $P_A(x) = 167 - 373x + 295x^2 - 105x^3 + 17x^4 - x^5$, el cuál tiene raíces reales, positivas (esto se puede comprobar utilizando graficadoras o un programa de cómputo de factorización, omitiremos ese paso ya que lo único importante es saber que son reales), por lo que sabemos que si tomamos $0 < w < 2$ entonces el método SOR converge a la única solución del sistema $Ax = b$ desde cualquier solución inicial $\mathbf{x}^0$.

2. ¿Cuál es el radio espectral de la matriz J y de la matriz S?

Solución:

a) Jacobi.
La matriz T_J es:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Luego el radio espectral de T_J es $\frac{1040}{1453} \approx 0{,}72 < 1$.

b) SOR.
La matriz T_{SOR} que depende de w es:

$$\begin{pmatrix} 1-w & \frac{w}{3} & \frac{w}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{w\,(3\,w-3)}{12} & \frac{w^2}{12}-w+1 & \frac{w^2}{12} & \frac{w}{2} & 0 \\ -\frac{w\,(3\,w-3)}{9} & \frac{w^2}{9} & \frac{w^2}{9}-w+1 & \frac{w}{3} & 0 \\ -\frac{w^2\,(3\,w-3)}{18} & \frac{w^3}{18}-\frac{w\,(4\,w-4)}{10} & \frac{w^3}{18}-\frac{w\,(3\,w-3)}{15} & \frac{4\,w^2}{15}-w+1 & \frac{w}{5} \\ -\frac{w^3\,(3\,w-3)}{36} & \frac{w^4}{36}-\frac{w^2\,(4\,w-4)}{20} & \frac{w^4}{36}-\frac{w^2\,(3\,w-3)}{30} & \frac{2\,w^3}{15}-\frac{w\,(5\,w-5)}{10} & \frac{w^2}{10}-w+1 \end{pmatrix}$$

así, usemos el w^* encontrado en el siguiente item para cálcular el radio espectral, por lo que $T_{SOR}(w^*)$ sería:

$$\begin{pmatrix} -\frac{17}{100} & \frac{39}{100} & \frac{39}{100} & 0 & 0 \\ -\frac{1989}{40000} & -\frac{2237}{40000} & \frac{4563}{40000} & \frac{117}{200} & 0 \\ -\frac{663}{10000} & \frac{1521}{10000} & -\frac{179}{10000} & \frac{39}{100} & 0 \\ -\frac{698697453389513}{18014398509481984} & \frac{678674449446225}{72057594037927936} & \frac{7090251080549995}{144115188075855872} & \frac{1219}{6250} & \frac{117}{500} \\ -\frac{3269904081862921}{144115188075855872} & \frac{794049105852083}{144115188075855872} & \frac{8295593764243493}{288230376151711744} & \frac{4110828093788559}{36028797018963968} & -\frac{3311}{100000} \end{pmatrix}$$

Luego el radio espectral de $T_{SOR}(w^*)$ es $\frac{918}{3797} \approx 0{,}24 < 1$.

3. Aproxime con dos cifras decimales el parámetro de sobrerelajación w^*.

Solución:

Utilizemos la fórmula:

$$\begin{aligned} w^* &= \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(J)^2}} \\ &\approx 1{,}17 \end{aligned}$$

4. ¿Qué reducción en el costo operacional ofrece el método de sobrerelajación con el parámetro

w^*, en comparación con el método de Gauss-Seidel?

Solución:

Note que como $w^* \approx 1,17$, o sea $1 < w^* < 2$, es decir el método sería de sobrerelajación que debería de acelerar la convergencia del método original (Gauss-Seidel).

5. ¿Cuántas iteraciones más requiere el método de Gauss-Seidel para lograr una precisión mejorada en una cifra decimal? ¿Cuántas necesita el método de sobrerelajación con w^*?

Solución:

a) Gauss-Seidel.
Aquí para llegar al x esperado realizó 9 iteraciones, en donde

$$x = \begin{pmatrix} \frac{4306}{1367} \\ \frac{615}{617} \\ \frac{4142}{635} \\ \frac{2205}{164} \\ \frac{3845}{328} \end{pmatrix}$$

b) SOR.
Aquí para llegar al x esperado realizó 7 iteraciones, en donde

$$\begin{pmatrix} \frac{1867}{585} \\ \frac{509}{493} \\ \frac{1219}{186} \\ \frac{5173}{384} \\ \frac{2711}{231} \end{pmatrix}$$

Con lo que podemos concluir que Gauss-Seidel realizó 2 iteraciones más que SOR y el método de sobrerelajación con w^* necesitó 7 iteraciones.

Para realizar el ejercicio se usó el siguiente script de matlab

```
% Definir la matriz
A = [ 3  -1  -1   0   0;
     -1   4   0  -2   0;
     -1   0   3  -1   0;
      0  -2  -1   5  -1;
      0   0   0  -1   2];
b = [ 2;
    -26;
      3;
     47;
     10;
```

```
    ];
D = [ 3   0   0   0   0;
      0   4   0   0   0;
      0   0   3   0   0;
      0   0   0   5   0;
      0   0   0   0   2];
L = [ 0   0   0   0   0;
      1   0   0   0   0;
      1   0   0   0   0;
      0   2   1   0   0;
      0   0   0   1   0];
U = [ 0   1   1   0   0;
      0   0   0   2   0;
      0   0   0   1   0;
      0   0   0   0   1;
      0   0   0   0   0];
% Jacobi y Gauss-Seidel

TGS = inv(D-L)*U;
TJ = inv(D)*(U+L);

latex_codigo = latex(sym(TGS));
latex_codigo = latex(sym(TJ));

% Obtener valores propios
valores_propiosGS = eig(TGS);
valores_propiosJ = eig(TJ);

% Calcular el radio espectral
radio_espectralGS = max(abs(valores_propiosGS));
radio_espectralJ = max(abs(valores_propiosJ));

% Mostrar resultado
disp('Radio espectral en Gauss-Seidel:')
disp(radio_espectralGS)
disp('Radio espectral en Jacobi:')
disp(radio_espectralJ)

% SOR
w = 2 / (1+sqrt(1-(radio_espectralJ^2)));
woptimo = 1.17;
TSOR = inv(D-woptimo*L)*((1-woptimo)*D+woptimo*U);
latex_codigo = latex(sym(TSOR));
valores_propiosSOR = eig(TSOR);
radio_espectralSOR = max(abs(valores_propiosSOR));
disp('Radio espectral en SOR:')
```

```
disp(radio_espectralSOR)

% Encontremos el valor de x en ambos métodos, Gauss-Seidel y SOR con
    woptimo

cGS = inv(D-L)*b;
cSOR = woptimo*inv(D-woptimo*L)*b

% Gauss-Seidel

x = zeros(5,1); % x0 inicial
x_anterior = x+1; % Para comparar iteraciones
tolerancia = 0.05; % Para una cifra decimal
iteraciones = 0;

% Iterar hasta que cada componente de x tenga precisión de una cifra
    decimal
while any(abs(x - x_anterior) > tolerancia)
    x_anterior = x; % Guardar el x anterior
    x = TGS * x + cGS; % Nueva iteración
    iteraciones = iteraciones + 1;
end

iteraciones
x

% SOR

x = zeros(5,1); % x0 inicial
x_anterior = x+1; % Para comparar iteraciones
tolerancia = 0.05; % Para una cifra decimal
iteraciones = 0;

% Iterar hasta que cada componente de x tenga precisión de una cifra
    decimal
while any(abs(x - x_anterior) > tolerancia)
    x_anterior = x; % Guardar el x anterior
    x = TSOR * x + cSOR; % Nueva iteración
    iteraciones = iteraciones + 1;
end

iteraciones
x
```

Problema 6:

Reconstrucción de imágenes a partir de sus bordes.
El operador laplaciano en $2D$ se define como:

$$\nabla^2 u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y^2}$$

donde $u(x,y)$ es una función que representa la intensidad de los pixeles de la imagen en el dominio espacial. El operador Laplaciano se utiliza para detectar bordes porque responde a las variaciones de la intensidad de los pixeles en la vecindad de cada punto. En áreas de la imagen donde la intensidad varia rapidamente (bordes), el Laplaciano tiene un valor alto, mientras que en áreas homogéneas (sin bordes) el Laplaciano es cercano a cero. El proceso de detección de bordes implica calcular el Laplaciano de la imagen $u(x,y)$, lo que da como resultado un mapa de bordes.
En este ejercicio estamos interesados en reconstruir la imágen original $u(x,y)$ a partir de los bordes detectados.
Para esto debemos resolver la ecuación de Poisson en $2D$

$$\nabla^2 u(x,y) = f(x,y) \tag{2}$$

donde $f(x,y)$ es el mapa de bordes.
El problema 2 puede ser discretizado en un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$Au = f$$

donde A es una matriz que representa el operador Laplaciano discreto, u es el vector que contiene los valores de la imagen original en cada pixel (a reconstruir), y f es el vector que contiene los valores de los bordes detectados.

resolución 240 x 240

resolución 276 x 276

Instrucciones:
Su tarea consiste en reconstruir las imágenes originales. En la pagina web del curso encuentran los archivos en Matlab bordes1.mat y bordes2.mat que contienen los datos de cada fotografía. Siga los pasos descritos a continuación:

Solución:

Usando la aproximación de diferencias finitas centrales para la segunda derivada:

$$\frac{\partial u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}.$$

Sumando ambas expresiones obtenemos:

$$\frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{h^2} = f_{i,j}$$

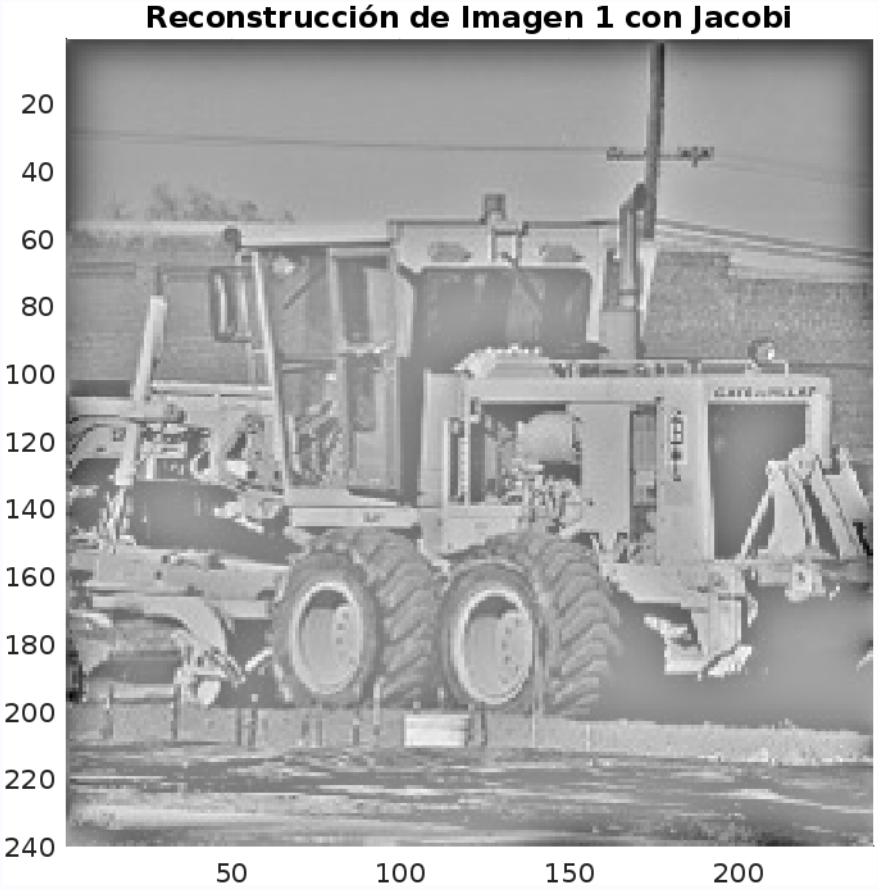
lo que nos ayudará a construir la matriz A en el ejercicio.
Nota: Profesor Mauricio, el tamaño de la matriz parece ser un gran problema para Matlab a la hora de calcular inversas en los métodos de Gauss-Seidel y SOR, por lo que nos fue necesaria buscar una forma de optimizar el proceso, a lo que decidimos investigar y encontrar una fuente en la que dan las fórmulas exactas de manera que "de alguna manera.ºptimiza el tiempo de o al menos facilita a matlab en el cálculo de los valores, dejamos la cita de la información a la que nos referimos Solving-2D-Poissons-Equation-Using-Finite-Difference-Method-and-Iterative-Solvers, esperamos entienda la situación, de lo contrario simplemente usábamos el código que usamos en Jacobi modificando las T y las c. Ahora veamos esto en la practica, daremos 100 iteraciones a cada método y daremos el tiempo tomado para ejecutarse. Siendo así, a continuación dejaremos los códigos y las gráficas generadas.

Problema 6 continúa en la siguiente página...

1. Imágen 1 (Jacobi) $\frac{137}{4514}s \approx 0{,}0304s$.

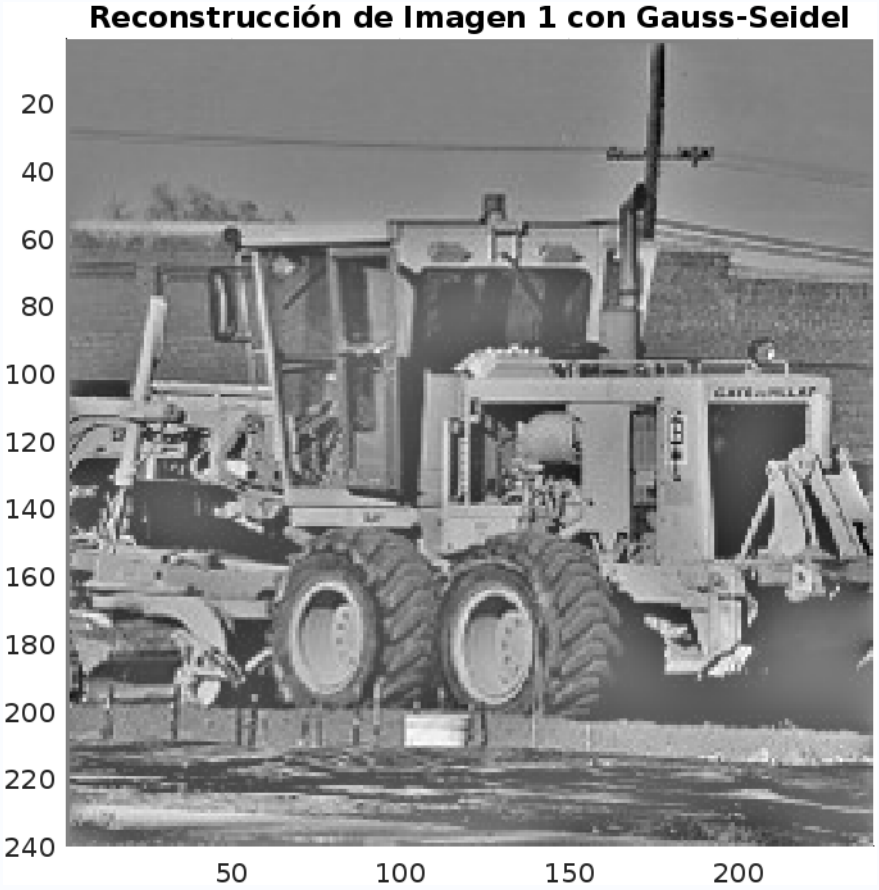
```
format rational
%% Construcción de la matriz A usando diferencias finitas
function A = construir_matriz_A(N, M)
    num_pixeles = N * M;
    A = sparse(num_pixeles, num_pixeles); % Matriz dispersa

    for i = 1:N
        for j = 1:M
            k = (i-1) * M + j; % Índice en el vector

            A(k, k) = -4; % Píxel central

            if j < M  % Vecino derecho
                A(k, k + 1) = 1;
            end
            if j > 1  % Vecino izquierdo
                A(k, k - 1) = 1;
            end
            if i < N  % Vecino inferior
                A(k, k + M) = 1;
            end
            if i > 1  % Vecino superior
                A(k, k - M) = 1;
            end
        end
    end
end

%% Visualizar la solución
function visualizar(u, N, M, titulo)
    imagen = reshape(u, [N, M]); % Volver a forma de matriz
    figure;
    surf(imagen), shading flat, axis ij, axis equal, view(2);
    colormap gray;
    title(titulo);
end

%% Cargar datos de los bordes
data1 = load('bordes1.mat'); % Cargar archivo

f = data1.bordes1; % Extraer matriz de bordes

[N, M] = size(f); % Dimensiones de la imagen 1
```

```
44
45  % Convertir la matriz en un vector columna
46  f_vec = f(:);
47
48  A = construir_matriz_A(N, M);
49
50  %% Métodos Iterativos
51
52  D = diag(diag(A)); % Matriz diagonal
53  L = -tril(A,-1);    % Parte triangular inferior estricta con signo
        negativo
54  U = -triu(A,1);     % Parte triangular superior estricta con signo
        negativo
55
56  % Jacobi
57
58  TJ = inv(D)*(U+L);
59  cJ = inv(D)*f_vec;
60  [f_size, basura] = size(f_vec);
61
62  u = zeros(f_size,1); % u0 inicial
63  u_anterior = u+1; % Para comparar iteraciones
64  iteraciones = 0;
65
66  % Iterar hasta que haga 100 iteraciones del método
67
68  tic;
69  while (100 >= iteraciones)
70      u_anterior = u; % Guardar el u anterior
71      u = TJ * u + cJ; % Nueva iteración
72      iteraciones = iteraciones + 1;
73  end
74
75  tiempo = toc;
76
77  disp("Tiempo tomado en el método Jacobi:")
78  disp(tiempo);
79  visualizar(u, N, M, 'Reconstrucción de Imagen 1 con Jacobi');
```


Reconstrucción de Imagen 1 con Jacobi
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
50
100
150
200

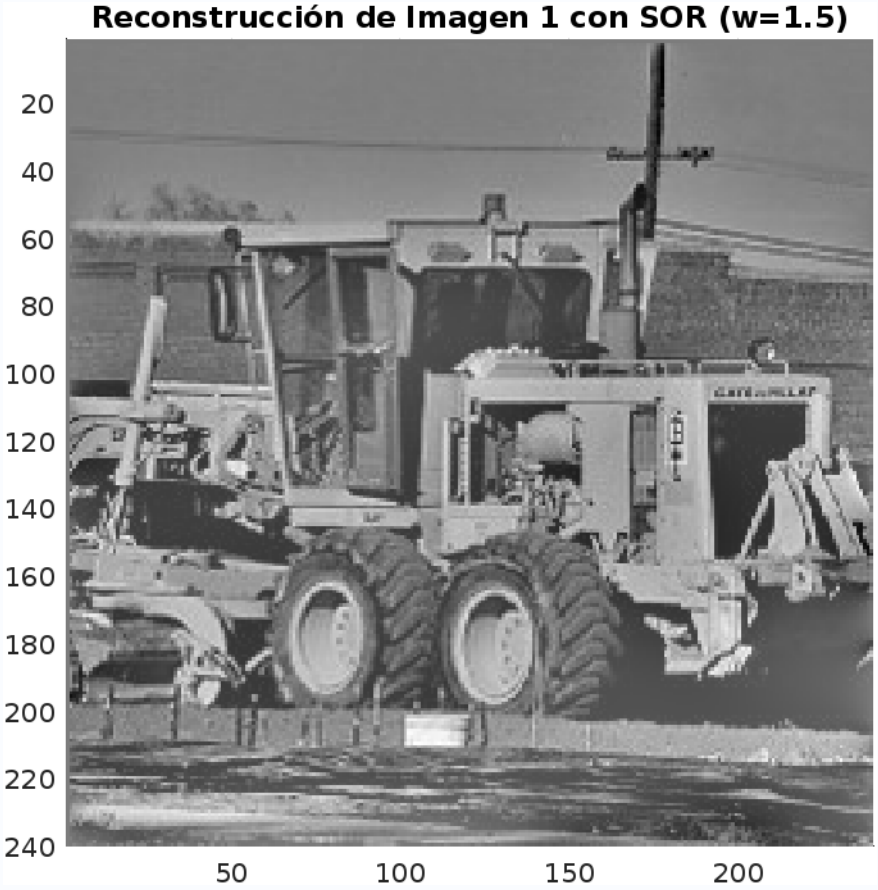
2. Imágen 1 (Gauss-Seidel) $\frac{1990}{49931}s = 0{,}03985s$.

```
format rational
%% Visualizar la solución
function visualizar(u, N, M, titulo)
    imagen = reshape(u, [N, M]); % Volver a forma de matriz
    figure;
    surf(imagen), shading flat, axis ij, axis equal, view(2);
    colormap gray;
    title(titulo);
end

%% Cargar datos de los bordes
data1 = load('bordes1.mat'); % Cargar archivo

f = data1.bordes1; % Extraer matriz de bordes

[N, M] = size(f); % Dimensiones de la imagen 1


%% Métodos Iterativos

% Inicialización de la solución
u = zeros(M,N); % x0 inicial
iteraciones = 0;

tic;
while (100 >= iteraciones)
    u_anterior = u;
    for i=2:M-1
        for j=2:N-1
            u(i, j) = (1/4) * (-f(i, j) + u(i-1, j) +
                u_anterior(i+1, j) + u(i, j-1) + u_anterior(i,
                j+1));
        end
    end
    iteraciones = iteraciones + 1;
end

tiempo = toc;
disp("Tiempo tomado en el método de Gauss-Seidel");
disp(tiempo);
visualizar(u, N, M, 'Reconstrucción de Imagen 1 con
    Gauss-Seidel');
```


Reconstrucción de Imagen 1 con Gauss-Seidel
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
50
100
150
200

3. Imágen 1 (SOR) $\frac{396}{5729}s \approx 0{,}06912s$.

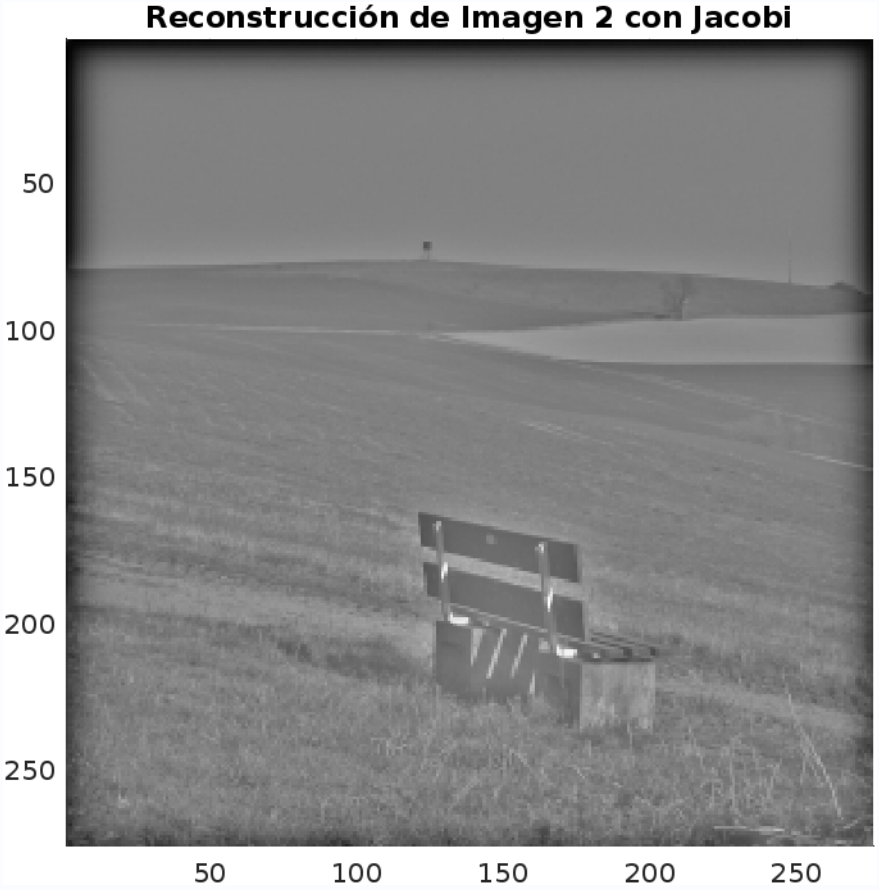
```
format rational
%% Visualizar la solución
function visualizar(u, N, M, titulo)
    imagen = reshape(u, [N, M]); % Volver a forma de matriz
    figure;
    surf(imagen), shading flat, axis ij, axis equal, view(2);
    colormap gray;
    title(titulo);
end

%% Cargar datos de los bordes
data1 = load('bordes1.mat'); % Cargar archivo

f = data1.bordes1; % Extraer matriz de bordes
w = 1.5;
[N, M] = size(f); % Dimensiones de la imagen 1


%% Métodos Iterativos

% Inicialización de la solución
u = zeros(M,N); % x0 inicial
ugs = zeros(M,N);
iteraciones = 0;

tic;
while (100 >= iteraciones)
    u_anterior = u;
    for i=2:M-1
        for j=2:N-1
            ugs(i, j) = (1/4) * (-f(i, j) + u(i-1, j) +
                u_anterior(i+1, j) + u(i, j-1) + u_anterior(i,
                j+1));
            u(i, j) = (1-w)*u(i,j)+w*ugs(i,j);
        end
    end
    iteraciones = iteraciones + 1;
end

tiempo = toc;
disp("Tiempo tomado en el método de SOR con w=1.5");
disp(tiempo);
visualizar(u, N, M, 'Reconstrucción de Imagen 1 con SOR (w=1.5)');
```


Reconstrucción de Imagen 1 con SOR (w=1.5)
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
50
100
150
200

4. Imágen 2 (Jacobi) $\frac{101}{2697}s \approx 0{,}03745s$.

```
format rational
%% Construcción de la matriz A usando diferencias finitas
function A = construir_matriz_A(N, M)
    num_pixeles = N * M;
    A = sparse(num_pixeles, num_pixeles); % Matriz dispersa

    for i = 1:N
        for j = 1:M
            k = (i-1) * M + j; % Índice en el vector

            A(k, k) = -4; % Píxel central

            if j < M  % Vecino derecho
                A(k, k + 1) = 1;
            end
            if j > 1  % Vecino izquierdo
                A(k, k - 1) = 1;
            end
            if i < N  % Vecino inferior
                A(k, k + M) = 1;
            end
            if i > 1  % Vecino superior
                A(k, k - M) = 1;
            end
        end
    end
end

%% Visualizar la solución
function visualizar(u, N, M, titulo)
    imagen = reshape(u, [N, M]); % Volver a forma de matriz
    figure;
    surf(imagen), shading flat, axis ij, axis equal, view(2);
    colormap gray;
    title(titulo);
end

%% Cargar datos de los bordes
data2 = load('bordes2.mat'); % Cargar archivo

f = data2.bordes2; % Extraer matriz de bordes

[N, M] = size(f); % Dimensiones de la imagen 2
```

```
44
45  % Convertir la matriz en un vector columna
46  f_vec = f(:);
47
48  A = construir_matriz_A(N, M);
49
50  %% Métodos Iterativos
51
52  D = diag(diag(A)); % Matriz diagonal
53  L = -tril(A,-1);    % Parte triangular inferior estricta con signo
        negativo
54  U = -triu(A,1);     % Parte triangular superior estricta con signo
        negativo
55
56  % Jacobi
57
58  TJ = inv(D)*(U+L);
59  cJ = inv(D)*f_vec;
60  [f_size, basura] = size(f_vec);
61
62  u = zeros(f_size,1); % u0 inicial
63  u_anterior = u+1; % Para comparar iteraciones
64  iteraciones = 0;
65
66  % Iterar hasta que haga 100 iteraciones del método
67
68  tic;
69  while (100 >= iteraciones)
70      u_anterior = u; % Guardar el u anterior
71      u = TJ * u + cJ; % Nueva iteración
72      iteraciones = iteraciones + 1;
73  end
74
75  tiempo = toc;
76
77  disp("Tiempo tomado en el método Jacobi:")
78  disp(tiempo);
79  visualizar(u, N, M, 'Reconstrucción de Imagen 2 con Jacobi');
```



5. Imágen 2 (Gauss-Seidel) $\frac{159}{2323}s = 0{,}06845s$.

```
format rational
%% Visualizar la solución
function visualizar(u, N, M, titulo)
    imagen = reshape(u, [N, M]); % Volver a forma de matriz
    figure;
    surf(imagen), shading flat, axis ij, axis equal, view(2);
    colormap gray;
    title(titulo);
end

%% Cargar datos de los bordes
data2 = load('bordes2.mat'); % Cargar archivo

f = data2.bordes2; % Extraer matriz de bordes
```

```
15
16 [N, M] = size(f); % Dimensiones de la imagen 2
17
18
19 %% Métodos Iterativos
20
21 % Inicialización de la solución
22 u = zeros(M,N); % x0 inicial
23 iteraciones = 0;
24
25 tic;
26 while (100 >= iteraciones)
27     u_anterior = u;
28     for i=2:M-1
29         for j=2:N-1
30             u(i, j) = (1/4) * (-f(i, j) + u(i-1, j) +
                   u_anterior(i+1, j) + u(i, j-1) + u_anterior(i,
                   j+1));
31         end
32     end
33     iteraciones = iteraciones + 1;
34 end
35
36 tiempo = toc;
37 disp("Tiempo tomado en el método de Gauss-Seidel");
38 disp(tiempo);
39 visualizar(u, N, M, 'Reconstrucción de Imagen 2 con
       Gauss-Seidel');
```

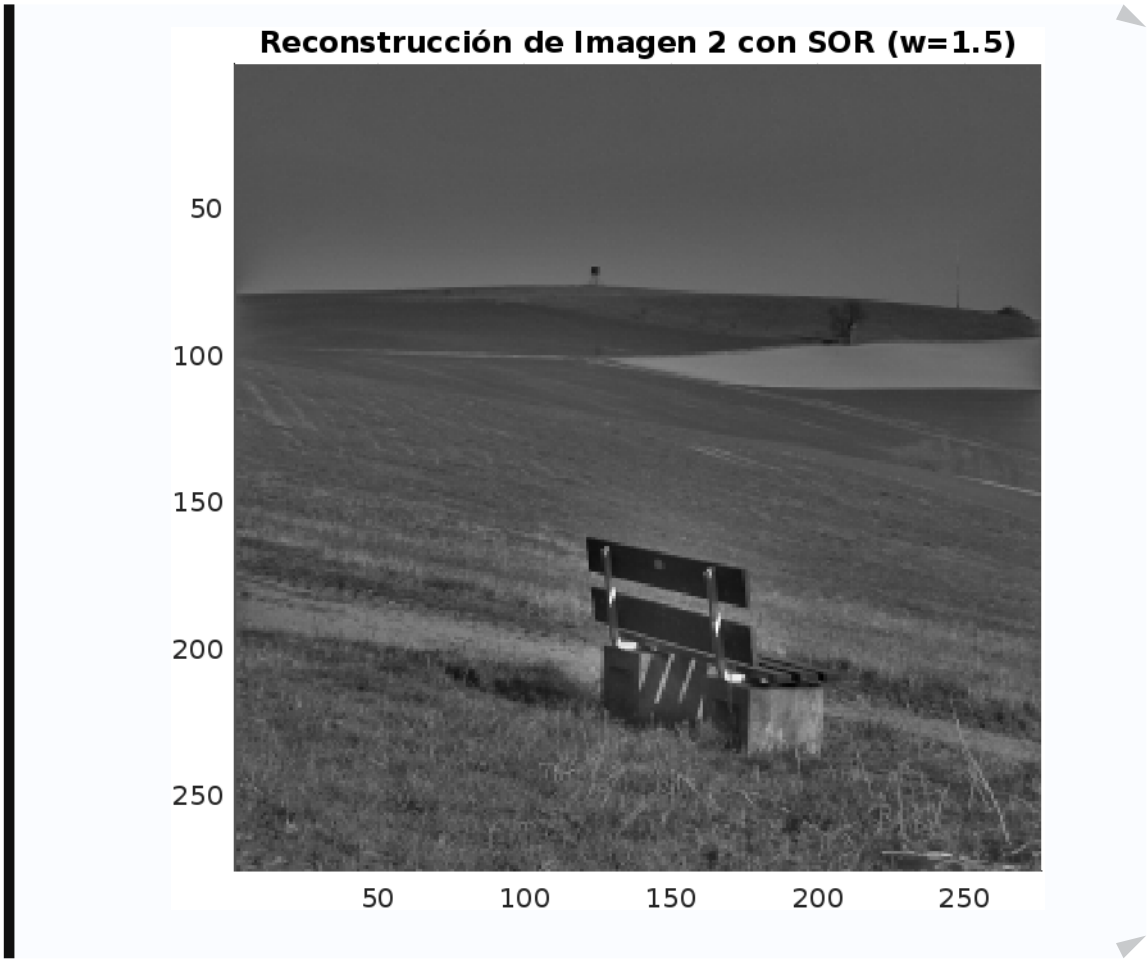
Problema 6 continúa en la siguiente página...


Reconstrucción de Imagen 2 con Gauss-Seidel
50
100
150
200
250
50
100
150
200
250

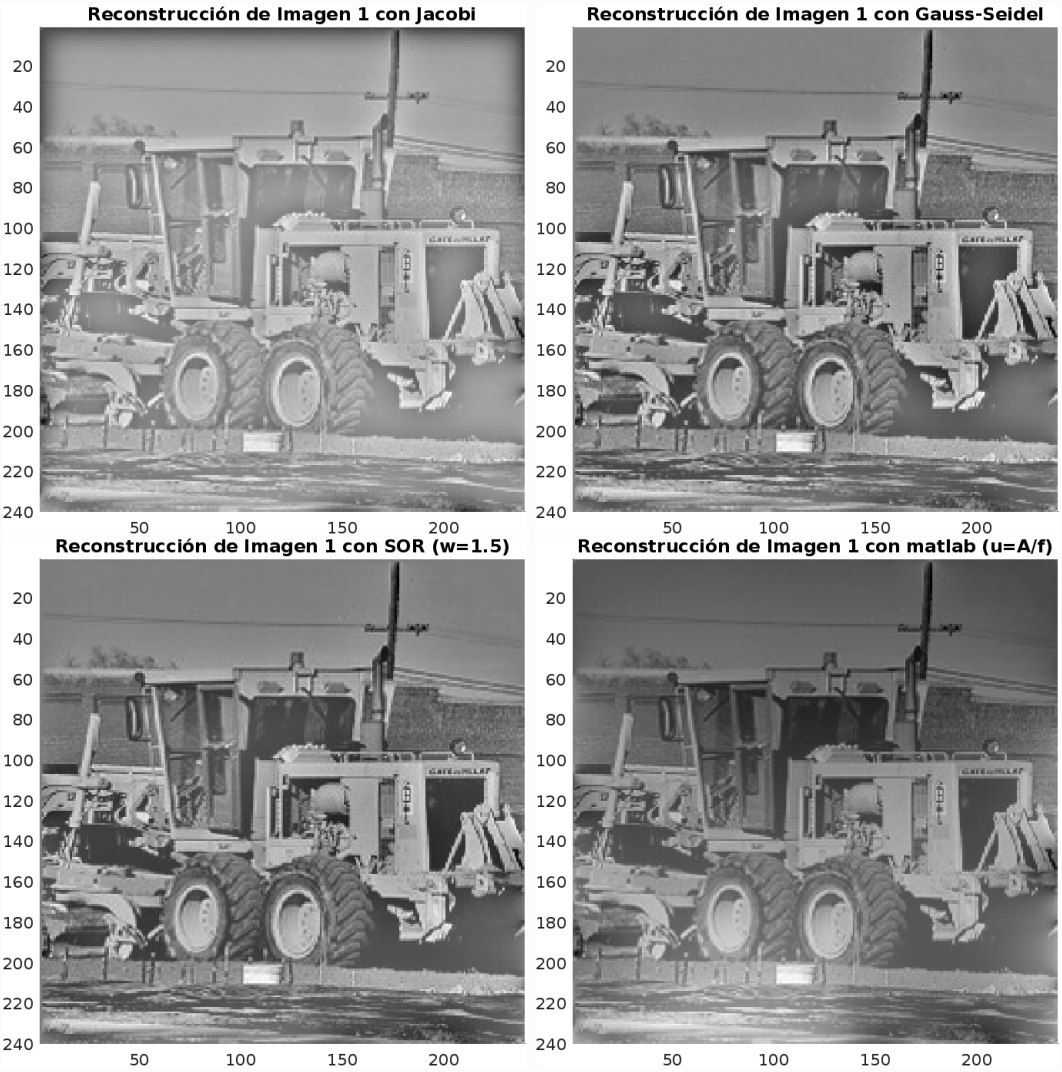
6. Imágen 2 (SOR) $\frac{163}{2617}s \approx 0{,}06229s$.

```
format rational
%% Visualizar la solución
function visualizar(u, N, M, titulo)
    imagen = reshape(u, [N, M]); % Volver a forma de matriz
    figure;
    surf(imagen), shading flat, axis ij, axis equal, view(2);
    colormap gray;
    title(titulo);
end

%% Cargar datos de los bordes
data2 = load('bordes2.mat'); % Cargar archivo

f = data2.bordes2; % Extraer matriz de bordes
w = 1.5;
[N, M] = size(f); % Dimensiones de la imagen 2


%% Métodos Iterativos

% Inicialización de la solución
u = zeros(M,N); % x0 inicial
ugs = zeros(M,N);
iteraciones = 0;

tic;
while (100 >= iteraciones)
    u_anterior = u;
    for i=2:M-1
        for j=2:N-1
            ugs(i, j) = (1/4) * (-f(i, j) + u(i-1, j) +
                u_anterior(i+1, j) + u(i, j-1) + u_anterior(i,
                j+1));
            u(i, j) = (1-w)*u(i,j)+w*ugs(i,j);
        end
    end
    iteraciones = iteraciones + 1;
end

tiempo = toc;
disp("Tiempo tomado en el método de SOR con w=1.5");
disp(tiempo);
visualizar(u, N, M, 'Reconstrucción de Imagen 2 con SOR (w=1.5)');
```

Problema 6 continúa en la siguiente página...

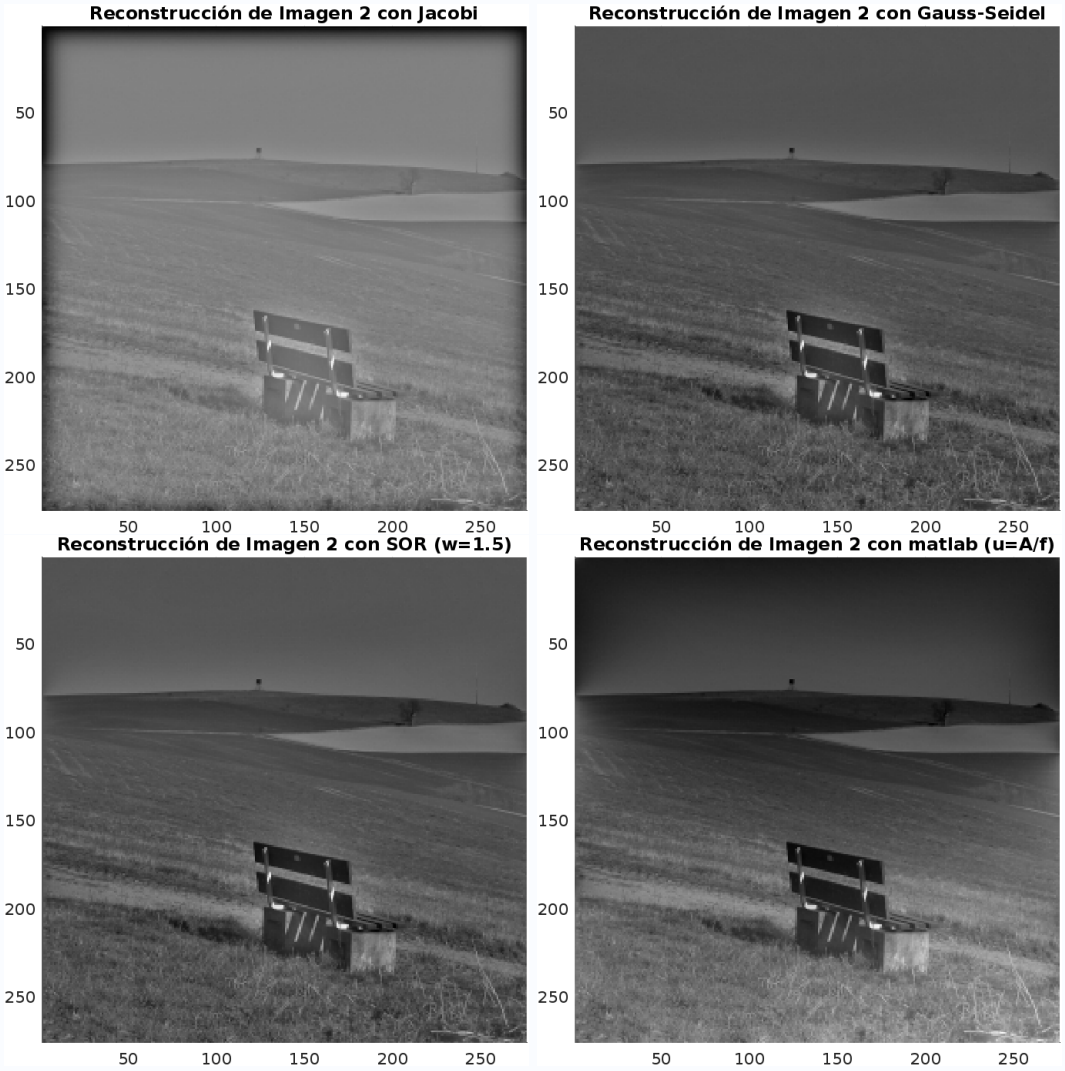

Reconstrucción de Imagen 2 con SOR (w=1.5)
50
100
150
200
250
50
100
150
200
250

Comparación:



Método	Tiempo (s)
Jacobi	0,0304
Gauss-Seidel	0,0398
SOR	0,0691

Problema 6 continúa en la siguiente página...



Método	Tiempo (s)
Jacobi	0,0374
Gauss-Seidel	0,0685
SOR	0,0623