

Análisis Funcional: Taller 1

19 de abril de 2025

Universidad Nacional de Colombia

Oscar Guillermo Riaño Castañeda

Andrés David Cadena Simons

acadenas@unal.edu.co

Problema 1:

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Defina

$$\mathcal{K} = \{x \in E : \|x\| = 1\}.$$

Demuestre que E es de Banach si y solamente si \mathcal{K} es completo.

Solución:

Supongamos que E es de Banach y veamos que \mathcal{K} es completo.

Razonemos por contradicción.

Suponga $\{x_n\} \subset \mathcal{K}$ sucesión de Cauchy que converge a $x \notin \mathcal{K}$ cuando $n \rightarrow \infty$, es decir, $\|x\| \neq 1$.

Primero, note que como $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n > N$, entonces

$$\|x - x_n\| < \epsilon.$$

Suponga $\epsilon < |||x|| - 1|$, luego sabemos que existe $N > 0$ tal que si $n > N$ se satisface que

$$\begin{aligned} |||x|| - 1| &\leq |||x|| - \|x_n\||, \\ &\leq \|x - x_n\|, \\ &< \epsilon, \\ &< |||x|| - 1|. \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción, luego $x \in \mathcal{K}$ y por ende \mathcal{K} es completo.

Por otro lado, supongamos que \mathcal{K} es completo y veamos que esto implica que E es de Banach.

Primero, recuerde que $0 \in E$, por lo que si tomamos $\{x_k\} \subset E$ sucesión de Cauchy obviaremos el caso en el que esta converge a 0.

De nuevo, razonemos por contradicción.

Suponga que E no es de Banach, entonces existe $\{x_n\} \subset E$ sucesión de Cauchy tal que $x_n \rightarrow x$ con $x \notin E$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Ahora, como $\{x_n\}$ es de Cauchy, entonces se tiene que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$ entonces

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

Siendo así, suponga ϵ_0 tal que se obtiene un $N_0 > 0$ adecuado que le satisface que existe $m > N_0$ que cumpla que $x_m = 0$, luego

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n\| < \epsilon_0.$$

Tome $\{x_k\}$ como esa subsucesión que le satisface que $\|x_k\| < \epsilon_0$.

Note que $\{\|x_k\|\} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión acotada en un compacto, luego sabemos que existe una subsucesión convergente, con la intención de no saturar la notación la tomaremos indexada

por k y convergente a algún $l \in \mathbb{R}$.

Ahora suponga $\{y_k\} = \left\{ \frac{x_k}{\|x_k\|} \right\} \subset \mathcal{K}$ y note que como \mathcal{K} es completo, entonces existe $y \in \mathcal{K}$ tal que $y_k \rightarrow y \in \mathcal{K}$ cuando $k \rightarrow \infty$, luego

$$\begin{aligned} y &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k}{\|x_k\|}, \\ &= \frac{x}{l}. \end{aligned}$$

De lo que se puede concluir que $ly = x$, luego como $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial, entonces $ly \in E$, luego $x \in E$, lo que es una contradicción, pues desde un principio establecimos que $x \notin E$. Luego podemos concluir que $x \in E$ y por ende que E es un espacio de Banach.

Problema 2:

Sea $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales normados. Considere $T : E \rightarrow F$ una transformación lineal. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (I) T es continua.
- (II) T es continua en cero.
- (III) T es acotada. Es decir, existe $M > 0$ tal que para todo $x \in E$,

$$\|Tx\|_F \leq M \|x\|_E.$$

- (IV) Si $\overline{B(0,1)} = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$, entonces la imagen directa $T(\overline{B(0,1)})$ es un conjunto acotado de F .

Solución:

- (I) \rightarrow (II).

Este sentido es trivial.

- (II) \rightarrow (III).

Note que si tomamos $\epsilon = 1$ tenemos que existe un $\delta > 0$ tal que si $\|x\|_E < \delta$, entonces $\|Tx\|_F < 1$.

Ahora, dado $x \in E$ arbitrario suponga $y = \frac{\delta}{2\|x\|}x$, note que $\|y\| < \delta$ y por ende $\|Ty\|_F < 1$, luego se sigue que

$$\frac{\delta}{2\|x\|_E} \|Tx\|_F < 1,$$

lo que implica que

$$\|Tx\|_F < M \|x\|_E$$

En dónde M es una constante tal que $M \leq \frac{2}{\delta}$, lo que concluye en que el operador T es acotado.

- (III) \rightarrow (IV).

Note que como T es un operador acotado, significa que para todo $x \in \overline{B(0,1)}$ se cumple que $\|Tx\|_F \leq M$, luego podemos asegurar que $T(\overline{B(0,1)}) \subseteq B_F(0, M)$, lo que concluye el resultado esperado.

- (IV) \rightarrow (I).

Note que (IV) nos dice que la imagen directa $T(\overline{B(0,1)}) \subseteq B_F(0, M)$, en particular $T(B(0,1)) \subseteq B_F(0, M)$, es decir, que para todo $x \in B(0,1)$ se satisface que $\|Tx\|_F \leq M$, ahora, veamos que dados $u, v \in E$ y $\epsilon > 0$ existe $\delta = \frac{\epsilon}{M} > 0$ tal que si:

$$\|u - v\|_E < \delta$$

entonces

$$\left\| \frac{1}{\delta} u - v \right\|_E < 1$$

luego

$$\left\| T \left(\frac{1}{\delta} u - v \right) \right\|_F < M$$

lo que implica que

$$\|Tu - Tv\|_F < M\delta = \epsilon.$$

Lo que nos permite concluir que T es un operador continuo.

Problema 3:

Demuestre que si $T \in L(E, F)^1$, entonces

- (I) $\|Tx\|_F \leq \|T\| \|x\|_E$, para todo $x \in E$.
- (II) $\|T\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$.
- (III) $\|T\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \|Tx\|_F$.
- (IV) $\|T\| = \inf\{M > 0 : \|Tx\|_F \leq M \|x\|_E, \text{ para todo } x \in E\}$.

Solución:

- (i) Note que como T es un operador lineal, podemos obviar el caso en el que $x = 0$, pues $\|Tx\|_F = 0 \leq 0 = \|T\| \|x\|_E$.

Ahora, con el fin de simplificar la idea, si tomamos $x \neq 0$, entonces podemos reescribir

$$y = \frac{x}{\|x\|_E}.$$

Siendo así, note que dado y por propiedades del supremo se satisface que

$$\|Ty\|_F \leq \sup_{\substack{y \in E \\ \|y\|_E \leq 1}} \|Ty\|_F \quad \text{Reescribiendo la norma y multiplicando a la derecha por } \|y\|_E = 1,$$

$$\|Ty\|_F \leq \|T\| \|y\|_E \quad \text{Reescribiendo } y = \frac{x}{\|x\|_E} \text{ y usando la sublinealidad de la norma y el operador}$$

$$\frac{1}{\|x\|_E} \|Tx\|_F \leq \frac{1}{\|x\|_E} \|T\| \|x\|_E,$$

Lo que implica que $\|Tx\|_F \leq \|T\| \|x\|_E$, luego como se toma y arbitrario se extiende el resultado a todo $x \in E$ y por ende se concluye el resultado.

- (ii) Note que por la sublinealidad de la norma y el operador podemos asegurar que

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} &= \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \left\| T \frac{x}{\|x\|_E} \right\|_F, \\ &= \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \|Ty\|_F && \text{como } y \text{ es unitario y distinto de } 0, \\ &\leq \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \|Tx\|_F, \\ &\leq \|T\|. \end{aligned}$$

¹Recuerde que $L(E, F)$ denota el conjunto de operadores lineales de E en F . Dado $T \in L(E, F)$ definimos la norma de T como $\|T\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \|Tx\|_F$.

Por otro lado veamos que si asumimos que $\|x\| \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \|Tx\|_F, \\ &\leq \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}, \\ &\leq \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}. \end{aligned}$$

Ya que $\{x \in E : \|x\|_E \leq 1\} \subset E$ y omitimos el caso en el que $x = 0$ ya que $Tx = 0$ y por ende no es el supremo del conjunto a menos de que T sea el operador nulo.

(III) Note que si usamos la sublinealidad del operador y de la norma podemos ver que

$$\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|Tx\|_F$$

luego usando (II) podemos afirmar que

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|Tx\|_F.$$

(IV) Note que el conjunto de los M que satisfacen la condición del conjunto no son afectados cuando se divide por la norma de x en ambos lados de la desigualdad, es decir, podemos suponer que los x dados en la condición del conjunto son unitarios. Luego la condición se transforma en ver el menor de los $M > 0$ que satisface $\|Tx\|_F \leq M$ para todo $x \in E$ que satisface $\|x\|_E = 1$, luego por (III) podemos afirmar que este M es precisamente $\|T\|$.

Problema 4:

Sean $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales normales. Suponga que F es un espacio de Banach. Muestre que $L(E, F)$ es un espacio de Banach con la norma usual de $L(E, F)$. En particular, $E^* = L(E, \mathbb{R})$, $E^{**} = L(E^*, \mathbb{R})$ son espacios de Banach.

Solución:

Dado $T \in L(E, F)$ definimos la norma de $L(E, F)$ como

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \|Tx\|_F.$$

Suponga $\{T_n\} \subset L(E, F)$ sucesión de Cauchy y veamos que esta converge a $T \in L(E, F)$. Note que como $\{T_n\}$ es sucesión de Cauchy, entonces se cumple que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$, entonces

$$\|T_n - T_m\| < \epsilon$$

Pero note que dado $x \in E$ (distinto del nulo) podemos tomar ϵ de la forma $\frac{\epsilon}{\|x\|_E} > 0$ que nos permite afirmar que

$$\begin{aligned} \|T_n x - T_m x\|_F &\leq \|T_n - T_m\| \|x\|_E, \\ &< \frac{\epsilon}{\|x\|_E} \|x\|_E, \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Luego $\{T_n x\} \subset F$ es una sucesión de Cauchy, luego como F es Banach, podemos afirmar que $T_n x \rightarrow g_x \in F$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Siendo así, dado x podemos definir un g_x de la forma anterior, por lo que vamos a definir $T : E \rightarrow F$ como $Tx = g_x$, luego podemos afirmar que $T_n \rightarrow T$ cuando $n \rightarrow \infty$. Ahora, veamos que $T \in L(E, F)$.

Sea α un escalar y $x, y \in E$, entonces

$$\begin{aligned} T(\alpha x + y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\alpha x + y), \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha T_n(x) + T_n(y), \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(y), \\ &= \alpha Tx + Ty. \end{aligned}$$

Luego $T \in L(E, F)$ lo que concluye el resultado esperado.

Problema 5:

Sean E y F espacios vectoriales normados. Suponga que E es de dimensión finita (F no necesariamente de dimensión finita).

- (I) Muestre que todas las normas asignadas a E son equivalentes².
- (II) Muestre que toda transformación lineal $T : E \rightarrow F$ es continua.
- (III) De un ejemplo donde se verifique que (II) puede ser falsa si E es de dimensión infinita.

Solución:

- (I) Suponga $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ normas de E espacio vectorial de dimensión finita. En particular, como E es de dimensión finita sabemos que existe una base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset E$ tal que si tomamos $x \in E$, entonces

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad \text{con } x_i \text{ escalares de } E.$$

Ahora, fijemos $\|x\|_1$ como

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

Además, note que en general para $\|x\|_2$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|_2, \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\|_2, \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\|_2, \\ &\leq \max_{i=1, \dots, n} \|e_i\|_2 \sum_{i=1}^n |x_i|, \\ &\leq c_2 \|x\|_1. \end{aligned}$$

Por otro lado, queremos ver que existe $c_1 > 0$ tal que $c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2$ para todo $x \in E$, en particular, note que si definimos $A = \{x \in E : \|x\|_1 = 1\}$, nos queda que esperamos que se cumpla $c_1 \leq \|x\|_2$ para todo $x \in A$.

Note que como A es cerrado y acotado (en $\|\cdot\|_1$) y E es de dimensión finita, entonces A

²Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas sobre E . Recordemos que dos normas son equivalentes si existen constantes positivas c_1 y c_2 , tales que $c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$, para todo $x \in E$.

es compacto, además, veamos que $\|x\|_2$ es continua en la topología de $\|\cdot\|_1$. Note que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \frac{\epsilon}{c_2} > 0$ tal que si

$$\|x - y\|_1 < \delta$$

entonces

$$\begin{aligned} |\|x\|_2 - \|y\|_2| &< \|x - y\|_2, \\ &< c_2 \|x - y\|_1, \\ &< c_2 \frac{\epsilon}{c_2}, \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Luego, como $\|\cdot\|_2$ es continua en $\|\cdot\|_1$, como A es compacto, entonces $\|x\|_2$ alcanza su mínimo en A , es decir, existe $z \in A$ tal que $\|z\|_2 \leq \|x\|_2$ para todo $x \in A$, luego podemos definir $c_1 = \|z\|_2$, por lo que podemos concluir que existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_1 \|x\| \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 \quad \text{para todo } x \in E.$$

Ahora, note que esto nos permite concluir que dadas 2 normas cualesquiera estas con equivalentes, ya que mediante $\|x\|_1$ se puede realizar el siguiente cálculo.

Suponga c_{21} y c_{22} las constantes respectivas a la equivalencia entre una norma $\|x\|_1$ y la norma $\|x\|_2$ y por otro lado suponga c_{31} y c_{32} las constantes respectivas a la equivalencia entre la norma $\|x\|_1$ y la norma $\|x\|_3$, veamos que podemos concluir que $\|x\|_2$ y $\|x\|_3$ son equivalentes

$$\|x\|_2 \leq c_{22} \|x\|_1 \leq \frac{c_{22}}{c_{31}} \|x\|_3,$$

por otro lado

$$\|x\|_3 \leq c_{32} \|x\|_1 \leq \frac{c_{32}}{c_{21}} \|x\|_2$$

de lo que se puede concluir que

$$\frac{c_{31}}{c_{22}} \|x\|_2 \leq \|x\|_3 \leq \frac{c_{32}}{c_{21}} \|x\|_2,$$

es decir, las normas $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_3$ son equivalentes, luego como estas son arbitrarias se puede concluir que todas las normas asignadas a E son equivalentes.

(II) Suponga $T : E \rightarrow F$ transformación lineal.

Note que como E es de dimensión finita, podemos asumir que existe una base

$\mathcal{B} := \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, luego dado $x \in E$ lo podemos expresar de la forma

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Ahora, note que como T es una transformación lineal entonces se cumple que

$$\begin{aligned}
 \|Tx\|_F &= \left\| T \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \right\|_F, \\
 &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|Te_i\|_F, \\
 &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \max_{i=1, \dots, n} \|Te_i\|_F, \\
 &\leq \max_{i=1, \dots, n} \|Te_i\|_F \|x\|_E, \\
 &\leq M \|x\|_E.
 \end{aligned}$$

Si tomamos $M = \max_{i=1, \dots, n} \|Te_i\|_F$, luego $\|Tx\|_F \leq M \|x\|_E$ y por ende el operador es continuo, luego como se tomó T arbitrario se concluye que toda transformación lineal de E a F con E de dimensión finita es continua.

- (III) Suponga $T : (C[0, 2], \|\cdot\|_1) \rightarrow (C[0, 2], \|\cdot\|_\infty)$ tal que $Tf = f$.
Suponga

$$f_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, \frac{2k-1}{2k}] \cup [\frac{2k+1}{2k}, 2], \\ 2k^2x - 2k^2 + k, & \text{si } x \in [\frac{2k-1}{2k}, 1], \\ -2k^2x + 2k^2 + k, & \text{si } x \in [1, \frac{2k+1}{2k}]. \end{cases}$$

Se puede verificar que $\|f_k\|_1 = 1$, no obstante note que $f_k(1) = k$, por lo que funciona como ejemplo para verificar que

$$\sup_{\substack{f \in C[0,1] \\ \|f\|_1=1}} \|f\|_\infty = \infty.$$

Con la intención de ser gráfico con el ejercicio veamos la gráfica para algunos valores de k .

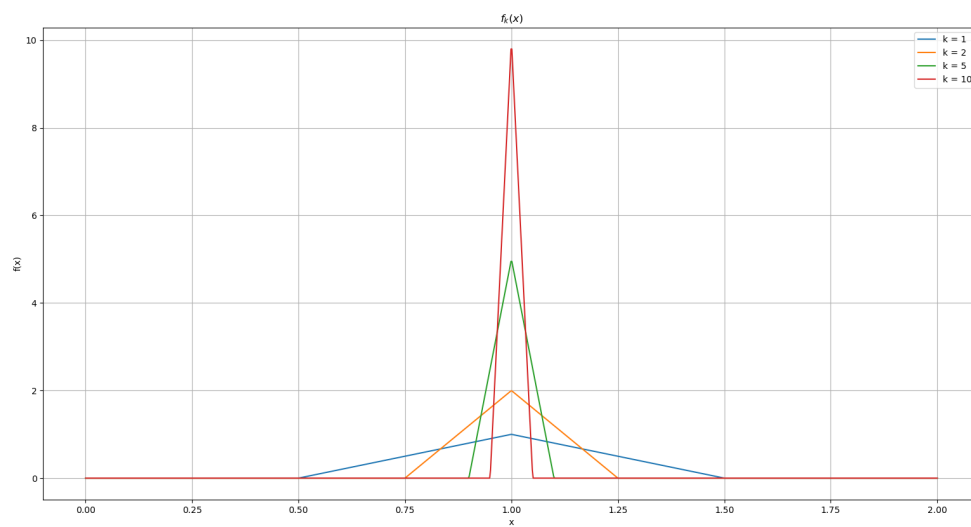


Figura 1: $f_k(x)$ con $k = 1, 2, 5$ y 10 .

Problema 6:

Considere $E = c_0$ donde

$$c_0 = \{u = \{u_n\}_{n \geq 1} : \text{tales que } u_n \in \mathbb{R}, n \geq 1, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0\}.$$

Es decir, c_0 es el conjunto de las secuencias reales que tienden a 0. Dotamos a este espacio con la norma $\|u\|_{l^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}^+} |u_n|$. Considere el funcional $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n.$$

- (I) Muestre que $f \in E^*$ y calcule $\|f\|_{E^*}$.
- (II) ¿Es posible encontrar $u \in E$ tal que $\|u\| = 1$ y $f(u) = \|f\|_{E^*}$?

Solución:

- (I) Veamos que $f \in E^*$ es decir, que f es una transformación lineal de E en \mathbb{R} . Antes de empezar, note que como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es absolutamente convergente y u_n es una sucesión que tiende a 0, entonces la serie determinada por f es absolutamente convergente y por ende permite reordenamientos, siendo así, continuemos. Dadas $u, v \in E$ y $c \in \mathbb{R}$ note que

$$\begin{aligned} f(cu + v) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (cu_n + v_n), \\ &= c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} v_n, \\ &= cf(u) + f(v). \end{aligned}$$

lo que nos permite concluir que f es una transformación lineal en E^* .

Ahora para calcular $\|f\|_{E^*}$ nos será de gran utilidad pensar en los $u \in E$ tales que $\|u\|_E = 1$, ya que si bien le estamos pidiendo converger a 0, no estamos exigiendo que sea de alguna forma específica si no en el infinito, por lo que sabremos que el supremo que estamos buscando se encontrará justamente en la sucesión constante 1 (esto ya que podemos pedirle a la sucesión ser 1 hasta un punto arbitrario y luego si decaimiento a

0), es por esto que

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{E^*} &= \sup_{\substack{u \in E \\ \|u\|_E=1}} f(u), \\
 &= \sup_{\substack{u \in E \\ \|u\|_E=1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n, \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 1, \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1, \\
 &= 2 - 1, \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

lo que concluye el numeral.

- (II) **No**, note que esto es claro por el comentario que realizamos para calcular la norma de f , puesto que de lo contrario ese supremo realmente sería un máximo, es por esto que si existiera u de norma 1 con tendencia a 0 tal que $\|f\|_{E^*}$ fuera exactamente $f(u)$, se cumpliría que

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{E^*} &= f(u), \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n, \\
 &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \\
 &< \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 1, \\
 &< \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1, \\
 &< 2 - 1, \\
 &< 1.
 \end{aligned}$$

entonces $f(u) = \|f\|_{E^*} < 1$, lo que nos lleva a una contradicción de la forma $1 < 1$, puesto que ya verificamos que $\|f\|_{E^*} = 1$.