Dia de entrega: 6 de Febrero 2025. En la clase.

1. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -20 & 14 \\ -3 & 27 & 4 \\ -4 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Aplique las transformaciones de Householder, para calcular $A = QR$.
- b) Aplique el método de ortogonalización de Gram-Schmindt, para calcular $A = QR$.
- c) Implemente en Matlab los métodos de ortogonalización de Gram-Schmindt y Householder, para calcular $A = QR$, compare los resultados numéricos con los encontrados en las partes (a) y (b).

2. Descrague el archivo `Datos.txt` de la página del curso. En este encontrará un conjunto de 21 datos. Copie estos datos y calcule el polinomio de ajuste de grado 5 $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5$ utilizando los métodos de ecuaciones normales y factorización QR. Compare sus resultados con los valores certificados $c_i = 1$ para $i = 0, 1, \dots 5$. Encuentre el residual $||Ac - y||_2$ en cada caso, así como la diferencia relativa con respecto a los valores certificados. Escriba sus conclusiones.

3. Sean

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a\delta & a & 0 \\ 0 & a\delta & a \end{pmatrix}, \quad a < 0, \quad \delta > 0 \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1.1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Obtenga el número de condición de A.

(b) Estudiar el condicionamiento del sistema $Ax = b$ en función de los valores de δ. Interprete su resultado.

(c) Si $a = -1$, $\delta = 0.1$ y se considera $x^* = (1, 9/10, 1)^t$ como solución aproximada del sistema $Ax = b$ (sin obtener la solución exacta) un intervalo en el que esté comprendido el error relativo. ¿Es coherente con la respuesta dada en el apartado anterior?

(d) Si $a = -1$ y $\delta = 0.1$, ¿ es convergente el método de Jacobi aplicado a la resolución del sistema $Ax = b$? Realize tres iteraciones a partir de $x^0 = (0, 0, 0)^t$

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que $\lambda = 1$ es un vector propio de la matriz de iteración del método de Jacobi (o Gauss-Seidel) de A si y solo si A no es invertible.

5. Considere el sistema $Ax = b$ donde

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -26 \\ 3 \\ 47 \\ -10 \end{pmatrix}$$

a) Investigue la convergencia de los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y sobrerelajación

b) ¿ Cuál es el radio espectral de la matriz J y de la matriz S ?

c) Aproxime con dos cifras decimales el parámetro de sobrerelajación ω^*.

d) ¿ Qué reducción en el costo operacional ofrece el método de sobrerelajación con el parámetro ω^*, en comparación con el método de Gauss Seidel ?

e) ¿Cuántas iteraciones más requiere el método de Gauss-Seidel para lograr una precisión mejorada en una cifra decimal? ¿Cuántas necesita el método de sobrerelajación con ω^*?

6. Recontrucción de imágenes a partir de sus bordes

El operador Laplaciano en 2D se define como:

$$\nabla^2 u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

donde $u(x,y)$ es una función que representa la intensidad de los píxeles de la imagen en el dominio espacial. El operador Laplaciano se utiliza para detectar bordes porque responde a las variaciones de la intensidad de los píxeles en la vecindad de cada punto. En áreas de la imagen donde la intensidad varía rápidamente (bordes), el Laplaciano tiene un valor alto, mientras que en áreas homogéneas (sin bordes) el Laplaciano es cercano a cero. El proceso de detección de bordes implica calcular el Laplaciano de la imagen $u(x,y)$, lo que da como resultado un mapa de bordes.

En este ejercicio estamos interesados en reconstruir la imagen original $u(x,y)$ a partir de los bordes detectados. Para esto debemos resolver la ecuación de Poisson en 2D

$$\nabla^2 u(x,y) = f(x,y) \tag{1}$$

donde $f(x,y)$ es el mapa de bordes.

El problema (1) puede ser discretizado en un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$Au = f$$

donde A es una matriz que representa el operador Laplaciano discreto, u es el vector que contiene los valores de la imagen original en cada píxel (a reconstruir), y f es el vector que contiene los valores de los bordes detectados.

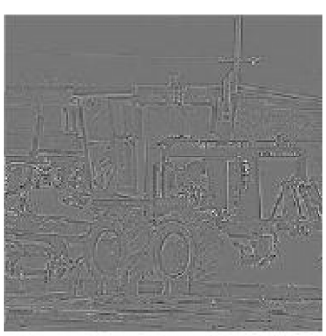
Instrucciones:

Su tarea consiste en reconstruir las imagenes originales. En la página web del curso encuentran los archivos en Matlab `bordes1.mat` y `bordes2.mat` que contienen los datos de cada fotografía. Siga los pasos descritos a continuación:

a) Plantee el sistema lineal $Au = f$ a partir de la discretización del operador Laplaciano, empleando diferencias finitas centrales para aproximar las derivadas. La matriz A será una matriz dispersa que representa las conexiones entre los píxeles vecinos en una cuadrícula 2D.

b) Utilice los métodos iterativos: Jacobi, Gauss-Seidel y SOR. para solucionar el sistema lineal $Au = f$ donde f son los datos `bordes1.mat` y `bordes2.mat`.

c) Visualice la solución. Para ello los siguientes comandos de Matlab son útiles: `surf`, `shading flat`, `axis ij`, `axis equal`, `view(2)`, `colormap bone` y `colormap gray`.



resolución 240 x 240

resolución 276 x 276