Estimación tipo conmutador para transformadas de Hilbert y derivadas fraccionarias.

Models of the universe from differential geometry.

Andrés David Cadena Simons

Universidad Nacional de Colombia, Facultad de ciencias, Sede Bogotá

acadenas@unal.edu.co

Fecha de envío: 28 de julio de 2025

Resumen: XXXXX

Palabras clave: XXX

1. Introducción

El objetivo de este trabajo es demostrar en detalle la siguiente estimación tipo conmutador:

Proposición 1 (Estimación tipo conmutador no local)**.** *Sea* $1 < p < \infty$, $0 < \alpha, \beta \leq 1$, *tal que* $\alpha + \beta = 1$. *Entonces*

$$\left\| D_x^{\alpha} [H_x, g] D_x^{\beta} f \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim_{p,\alpha,\beta} \|\partial_x g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

para toda función g *suave con derivada acotada y toda* $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

2. Preliminares

Recordamos que la transformada de Hilbert H_x está definida en la transformada de Fourier como

$$\widehat{H_x f}(\xi) = -isign(\xi)\hat{f}(\xi).$$

Además, las derivadas fraccionarias están dadas por el operador

$$\widehat{D_x^s f}(\xi) = |\xi|^s \hat{f}(\xi), \qquad s \in \mathbb{R}.$$

También usaremos las proyecciones de Littlewood–Paley P_N^x definidas por

$$\widehat{P_N^x f}(\xi) = \psi_N(\xi)\hat{f}(\xi),$$

donde $\psi_N(\xi)$ es un multiplicador suave con soporte en frecuencias de orden $|\xi| \sim N$, con N número diádico.
Utilizaremos además las siguientes herramientas fundamentales

Lema 1 (Fefferman–Stein). *Sea $f = (f_j)_{j=1}^{\infty}$ una secuencia de funciones localmente integrables en $\mathbb{R}$. Si $1 < p < \infty$, entonces*

$$\left\|(Mf_j)_{l^2}\right\|_{L^p} \leq C_p \left\|(f_j)_{l^2}\right\|_{L^p},$$

donde M denota la función maximal de Hardy–Littlewood.

Lema 2 (Estimación tipo Calderón). *Para $l + m \geq 1$, se tiene*

$$\left\|\partial_x^l [H_x, g] \partial_x^m f\right\|_{L^p} \lesssim \left\|\partial_x^{l+m} g\right\|_{L^\infty} \|f\|_{L^p}.$$

3. Demostración de la Proposición

Comenzamos suponiendo el caso no trivial donde $0 < \alpha, \beta < 1$ y $\alpha + \beta = 1$. El caso $\beta = 1$, $\alpha = 0$ se sigue directamente de la estimación clásica de Calderón.

Queremos estimar

$$D_x^\alpha [H_x, g] D_x^\beta f.$$

En el dominio de Fourier, tenemos

$$\mathcal{F}\left(D_x^\alpha [H_x, g] D_x^\beta f\right)(\xi) = -i \int_{\mathbb{R}} |\xi|^\alpha \left[\operatorname{sign}(\xi) - \operatorname{sign}(\xi - \xi')\right] \widehat{g}(\xi - \xi') |\xi'|^\beta \widehat{f}(\xi')\, d\xi'.$$

Observamos que el integrando solo es distinto de cero si los signos de ξ y ξ' son distintos, lo que equivale a que $|\xi'| < |\xi - \xi'|$. Aplicando la descomposición tipo paraproducto y la propiedad del soporte en frecuencia, podemos escribir:

$$D_x^\alpha [H_x, g] D_x^\beta f = A_1 + A_2 + A_3 + A_4,$$

donde

$$\begin{aligned}
A_1 &= H_x \left(\sum_{N>0} D_x^\alpha (P_N^x g \cdot P_{\ll N}^x D_x^\beta f) \right), \\
A_2 &= -\sum_{N>0} D_x^\alpha (P_N^x g \cdot P_{\ll N}^x H_x D_x^\beta f), \\
A_3 &= H_x \left(\sum_{N>0} D_x^\alpha (P_N^x g \cdot \widetilde{P}_N^x D_x^\beta f) \right), \\
A_4 &= -\sum_{N>0} D_x^\alpha (P_N^x g \cdot \widetilde{P}_N^x H_x D_x^\beta f).
\end{aligned}$$

Estimación del término A_1

Dado que $\alpha + \beta = 1$ y que H_x es acotado en L^p, aplicamos la desigualdad de Littlewood–Paley:

$$\|A_1\|_{L^p} \lesssim \left\| \left(\sum_M |P_M^x \sum_{N>0} D_x^\alpha (P_N^x g \cdot P_{\ll N}^x D_x^\beta f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p}.$$

El soporte en frecuencia nos permite restringir la suma a los $N \sim M$, así que:

$$\|A_1\|_{L^p} \lesssim \left\| \left(\sum_N |D_x^\alpha (P_N^x g \cdot P_{\ll N}^x D_x^\beta f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p}.$$

Usamos que

$$D_x^\alpha(P_N^x g \cdot P_{\ll N}^x D_x^\beta f) \sim P_N^x(\partial_x g_N^{-\beta} \cdot P_{\ll N}^x D_x^\beta f),$$

donde $g_N^{-\beta}$ representa una reescalada del tipo $N^{-\beta}\partial_x g$, y por el Lema 7.1 (estimación tipo Calderón-Coifman-Meyer):

$$|P_N^x(\partial_x g_N^{-\beta} \cdot P_{\ll N}^x D_x^\beta f)(x)| \lesssim M(\partial_x g)(x) \cdot N^{-\beta} M(P_{\ll N}^x D_x^\beta f)(x).$$

Aplicando la desigualdad de Fefferman–Stein sobre la suma en N:

$$\|A_1\|_{L^p} \lesssim \|\partial_x g\|_{L^\infty} \cdot \left\| \left(\sum_N |M(P_{\ll N}^x D_x^\beta f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p}.$$

Finalmente, aplicamos la desigualdad de Littlewood–Paley y acotamos el maximal por:

$$\|A_1\|_{L^p} \lesssim \|\partial_x g\|_{L^\infty} \cdot \|f\|_{L^p}.$$

Esto completa la estimación del término A_1.

Estimación del término A_2

La estimación de A_2 sigue exactamente los mismos pasos que la de A_1, ya que H_x es un operador lineal acotado en L^p, y aparece aplicado sobre f antes del producto. Observamos que:

$$A_2 = -\sum_{N>0} D_x^\alpha(P_N^x g \cdot P_{\ll N}^x H_x D_x^\beta f).$$

Como H_x conmuta con las proyecciones y es acotado, podemos reemplazar f por $H_x f$ en la estimación anterior. Por tanto:

$$\|A_2\|_{L^p} \lesssim \|\partial_x g\|_{L^\infty} \cdot \|H_x f\|_{L^p} \lesssim \|\partial_x g\|_{L^\infty} \cdot \|f\|_{L^p}.$$

Esto concluye la estimación del término A_2.

Estimación del término A_3

Ahora consideramos el término

$$A_3 = H_x \left(\sum_{N>0} D_x^\alpha(P_N^x g \cdot \widetilde{P}_N^x D_x^\beta f) \right).$$

Recordamos que $\widetilde{P}_N^x$ es una proyección que selecciona las frecuencias del mismo orden que N, por lo que $P_N^x g$ y $\widetilde{P}_N^x f$ están oscilando en frecuencias comparables. En este caso se trata del llamado ïnteracción de alta con alta frecuencia”.

Aplicamos nuevamente la desigualdad de Littlewood–Paley para estimar

$$\|A_3\|_{L^p} \lesssim \left\| \left(\sum_M |P_M^x \sum_{N>0} D_x^\alpha(P_N^x g \cdot \widetilde{P}_N^x D_x^\beta f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p}.$$

Dado que el soporte en frecuencia de P_M^x solo interactúa con frecuencias $N \sim M$, reducimos a

$$\|A_3\|_{L^p} \lesssim \left\| \left(\sum_N |D_x^\alpha (P_N^x g \cdot \widetilde{P}_N^x D_x^\beta f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p}.$$

Ahora usamos la regla del producto para derivadas fraccionarias (o simbólicamente en Fourier), teniendo en cuenta que $D_x^\alpha (fg)$ se comporta como la suma de productos $D_x^\alpha f \cdot g$ y $f \cdot D_x^\alpha g$, pero dado que ambos factores están en la misma escala de frecuencia, podemos estimar como:

$$|D_x^\alpha (P_N^x g \cdot \widetilde{P}_N^x D_x^\beta f)(x)| \lesssim N^\alpha |P_N^x g(x)| \cdot |\widetilde{P}_N^x D_x^\beta f(x)|.$$

Recordamos que $\beta = 1 - \alpha$, por lo que $D_x^\beta f \sim N^\beta P_N^x f$, y por tanto

$$|\widetilde{P}_N^x D_x^\beta f(x)| \lesssim N^\beta |P_N^x f(x)|.$$

Entonces

$$|D_x^\alpha (P_N^x g \cdot \widetilde{P}_N^x D_x^\beta f)(x)| \lesssim N^\alpha |P_N^x g(x)| \cdot N^\beta |P_N^x f(x)| = N |P_N^x g(x)| \cdot |P_N^x f(x)|.$$

Pero como $\partial_x g \in L^\infty$, tenemos $|P_N^x g(x)| \lesssim N^{-1} M(\partial_x g)(x)$. Entonces

$$|D_x^\alpha (P_N^x g \cdot \widetilde{P}_N^x D_x^\beta f)(x)| \lesssim M(\partial_x g)(x) \cdot |P_N^x f(x)|.$$

Por tanto,

$$\left(\sum_N |D_x^\alpha (P_N^x g \cdot \widetilde{P}_N^x D_x^\beta f)|^2 \right)^{1/2} \lesssim M(\partial_x g)(x) \cdot \left(\sum_N |P_N^x f(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

Finalmente, aplicamos Fefferman–Stein y Littlewood–Paley:

$$\|A_3\|_{L^p} \lesssim \|M(\partial_x g)\|_{L^\infty} \cdot \|f\|_{L^p} \lesssim \|\partial_x g\|_{L^\infty} \cdot \|f\|_{L^p}.$$

Esto concluye la estimación del término A_3.

Estimación del término A_4

Finalmente, consideramos el término

$$A_4 = -\sum_{N>0} D_x^\alpha (P_N^x g \cdot \widetilde{P}_N^x H_x D_x^\beta f).$$

Como en el caso de A_3, se trata de un producto de funciones en frecuencias comparables. Usamos que H_x es un operador acotado en L^p y conmuta con derivadas fraccionarias, por lo que:

$$|\widetilde{P}_N^x H_x D_x^\beta f(x)| \lesssim N^\beta |P_N^x f(x)|.$$

Por tanto, repitiendo los mismos argumentos que en la estimación de A_3, tenemos:

$$|D_x^\alpha (P_N^x g \cdot \widetilde{P}_N^x H_x D_x^\beta f)(x)| \lesssim N^\alpha |P_N^x g(x)| \cdot |\widetilde{P}_N^x H_x D_x^\beta f(x)|$$

$$\begin{aligned} &\lesssim N^{\alpha}|P_N^x g(x)| \cdot N^{\beta}|P_N^x f(x)| \\ &= N|P_N^x g(x)| \cdot |P_N^x f(x)|. \end{aligned}$$

Usando que $|P_N^x g(x)| \lesssim N^{-1} M(\partial_x g)(x)$, obtenemos:

$$|D_x^{\alpha}(P_N^x g \cdot \widetilde{P}_N^x H_x D_x^{\beta} f)(x)| \lesssim M(\partial_x g)(x) \cdot |P_N^x f(x)|.$$

Por tanto,

$$\left(\sum_N |D_x^{\alpha}(P_N^x g \cdot \widetilde{P}_N^x H_x D_x^{\beta} f)|^2\right)^{1/2} \lesssim M(\partial_x g)(x) \cdot \left(\sum_N |P_N^x f(x)|^2\right)^{1/2}.$$

Aplicando nuevamente Fefferman–Stein y Littlewood–Paley, concluimos:

$$\|A_4\|_{L^p} \lesssim \|M(\partial_x g)\|_{L^\infty} \cdot \|f\|_{L^p} \lesssim \|\partial_x g\|_{L^\infty} \cdot \|f\|_{L^p}.$$

Esto concluye la estimación del término A_4 y por tanto, la demostración completa de la Proposición 1.1.

4. Implicaciones

5. Conclusiones