Ecuaciones Diferenciales Parciales: Trabajo Presentación

30 de julio del 2024

Universidad Nacional de Colombia

Oscar Guillermo Riaño Castañeda

Andrés David Cadena Simons acadenas@unal.edu.co
David Felipe Viuche Malaver dviuchem@unal.edu.co

Problema 1:

Teorema 0.1 *Asuma que* $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *y sea* u *definida por:*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (\Phi(\cdot,t) * g)(x) \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)dy \end{aligned}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ *y* $t > 0$. *Entonces:*

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$,
2. $u_t - \Delta u = 0$ *para* $x \in \mathbb{R}^n$ *y* $t > 0$,
3. $\lim\limits_{(x,t)\to(x^0,0), x\in\mathbb{R}^n, t>0} u(x,t) = g(x^0)$ *para cada punto* $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Solución:

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ Note que la función $\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, ahora veamos que $e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.

   Para esto será interesante ver que $e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ es infinitamente derivable respecto a x e infinitamente derivable respecto a t independientemente y luego inductivamente ver que estás son a su vez infinitamente derivables entre si, es decir:
   Sabemos que respecto a la variable x se tiene que:

   $$\partial_{x_i} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = -\frac{x_i}{2t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

   y a su vez, utilizando un argumento inductivo podemos verificar que en general:

   $$\partial^\alpha e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{p(x,t)}{(2t)^{|\alpha|}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

   con α multi-índice y p es un polinomio con grado $|\alpha|$. Esto debido a que cada derivada parcial respecto a la componente x_j aumenta a lo más un grado el polinomio definido por la derivada anterior, y añade un factor $\left(-\frac{1}{2t}\right)$
   Además, sabemos que respecto a t se cumple que:

   $$\partial_t e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{|x|^2}{4t^2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

   y a su vez, usando la regla del producto de las derivadas y un argumento inductivo se puede verificar que en general:

   $$\partial_t^k e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{q(x,t)}{(2t)^{2k}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

   con $k \in \mathbb{N}$ y q polinomio.
   Ahora, utilizando esto, podemos ver que si derivamos $e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ respecto a (x,t), dado

cualquier multi-índice β, existen un polinomio p no nulos y unos enteros $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$\partial^\beta e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{p(x,t)}{(2t)^n(4t)^m} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

Luego, note que si dado $\delta > 0$ y tomamos $t \in [\delta, \infty)$, entonces:

$$\begin{aligned}\left|\partial^\beta e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right| &= \left|\frac{p(x,t)}{(2t)^n(4t)^m} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right| \\ &\leq \left|\frac{p(x,y)}{(2\delta)^n(4\delta)^m}\right| \left|e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right| \\ &\leq M\end{aligned}$$

Para algún $M \in \mathbb{R}$, luego como δ es arbitrario, se puede extender de $[\delta, \infty)$ a $(0, \infty)$. Luego como:

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} (\cdot, t) * g\right)(x),\end{aligned}$$

al ser $\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ con todas sus derivadas acotadas, entonces sabemos que u y $\left(\partial^\beta \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} (\cdot, t) * g\right)(x)$ se encuentran bien definidas.
Ahora veamos que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, es decir, veamos que $\partial^\beta \left(\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} (\cdot, t) * g\right)(x) = \left(\partial^\beta \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} (\cdot, t) * g\right)(x)$.
Para esto como sabemos que dado β multi-índice se cumple que:

$$\partial^\beta e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{p(x,t)}{(2t)^n(4t)^m} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

luego usando la regla del producto podemos fijarnos que solamente será necesario ver que se cumple para las primeras derivadas respecto a x y t.
Veamos el caso para x_j.
Dados $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, note que:

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{-\frac{|x+h\epsilon_j-y|^2}{4t}} - e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{h}\right| &\leq \frac{\left|e^{-\frac{(x-y+h\epsilon_j)\cdot(x-y+h\epsilon_j)}{4t}} - e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\right|}{|h|} \\ &\leq \frac{\left|e^{-\frac{|x-y|^2+2(h\epsilon_j)\cdot(x-y)+|h\epsilon_j|^2}{4t}} - e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\right|}{|h|} \\ &\leq \frac{\left|e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\left(e^{-\frac{2(h\epsilon_j)\cdot(x-y)+|h\epsilon_j|^2}{4t}} - 1\right)\right|}{|h|}\end{aligned}$$

Usando la desigualdad del valor medio podemos ver que dado h^* tal que $0 < |h^*| < |h|$ (suponga $|h| \leq 1/4$ sin pérdida de generalidad), se cumple que:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{e^{-\frac{|x+h\epsilon_j-y|^2}{4t}} - e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{h} \right| &\leq \frac{\left| e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \left(e^{-\frac{2(h\epsilon_j)\cdot(x-y)+|h\epsilon_j|^2}{4t}} - 1 \right) \right|}{|h|} \\
&\leq \frac{\left| e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \left((-2(x-y)_j - 2|h^*\epsilon_j|) e^{-\frac{2(x-y)\cdot(h^*\epsilon_j)+|h^*\epsilon_j|^2}{4t}} \right) (|h|) \right|}{|h|} \\
&\leq \left| (-2(x-y)_j - 2|h|) e^{-\frac{|x-y|^2+2(h\epsilon_j)\cdot(x-y)+|h|^2}{4t}} \right| \\
&\leq \left| \left(-2|x-y| - \frac{1}{2} \right) e^{-\frac{|x-y|^2+(1/2)|x-y|+1/8}{4t}} \right| = f(y)
\end{aligned}$$

Ahora veamos que $f(y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned}
\|f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(-2|x-y| - \frac{1}{2} \right) e^{-\frac{|x-y|^2+(1/2)|x-y|+1/8}{4t}} \right| dy \\
&\leq \int_{|x-y|\leq 1} \left| \left(-2|x-y| - \frac{1}{2} \right) e^{-\frac{|x-y|^2+(1/2)|x-y|+1/8}{4t}} \right| dy \\
&+ \int_{|x-y|>1} \left| \left(-2|x-y| - \frac{1}{2} \right) e^{-\frac{|x-y|^2+(1/2)|x-y|+1/8}{4t}} \right| dy \\
&\leq I + J
\end{aligned}$$

Veamos que I converge:

$$\begin{aligned}
I &\leq \int_{|x-y|\leq 1} \left| \left(-2|x-y| - \frac{1}{2} \right) e^{-\frac{|x-y|^2+(1/2)|x-y|+1/8}{4t}} \right| dy \\
&\leq \int_{|x-y|\leq 1} \left| \left(-2 - \frac{1}{2} \right) e^{-\frac{1+1/2+1/8}{4t}} \right| dy \\
&\leq C
\end{aligned}$$

Ahora veamos que J converge: para esto veamos que si $|x-y| > 1$, entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{|x-y|}{2} \leq \frac{|x-y|^2}{2} &\leq |x-y|^2 \\
|x-y|^2 + \frac{|x-y|}{2} &\leq 2|x-y|^2
\end{aligned}$$

Por lo que es válido decir que:

$$\begin{aligned} J &\leq \int_{|x-y|>1} \left| \left(-2|x-y| - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{|x-y|^2+(1/2)|x-y|+1/8}{4t}} \right| dy \\ &\leq \int_{|x-y|>1} \left| \left(-2|x-y| - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{2|x-y|^2+1/8}{4t}} \right| dy \\ &\leq C \end{aligned}$$

Por lo que usando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue podemos afirmar que dado $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ se satisface que:

$$\begin{aligned} \partial_{x_j} u(x,t) &= \partial_{x_j} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)g(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_j} \Phi(x-y,t)g(y)dy \\ &= (\partial_{x_j} \Phi(\cdot,t) * g)(x,t) \end{aligned}$$

Ahora veamos el caso para la primera derivada respecto a t.
Dados $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, note que por desigualdad del valor medio:

$$\left| \frac{\frac{1}{(t+h)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t+h)}} - \frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{h} \right| \leq \left| \frac{\left(\frac{-2n(t+h^*)+|x-y|^2}{4(t+h^*)^{n/2+2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t+h^*)}} \right) h}{h} \right|$$

Luego, suponga $h \leq k$, entonces como $0 \leq h^* \leq h$ se cumple que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\frac{1}{(t+h)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t+h)}} - \frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{h} \right| &\leq \left| \frac{-2n(t+h^*)+|x-y|^2}{4(t+h^*)^{n/2+2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t+h^*)}} \right| \\ &\leq \left| \frac{2n(t+k)+|x-y|^2}{4(t)^{n/2+2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t+k)}} \right| = f(y) \end{aligned}$$

Luego $f(y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, por lo que usando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se tiene que dado $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ se cumple que:

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)g(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t \Phi(x-y,t)g(y)dy \\ &= (\partial_t \Phi(\cdot,t) * g)(x,t) \end{aligned}$$

Por lo que quedaría demostrado que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.

♥

2. $u_t - \Delta u = 0$ para $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$.
Para esto veamos que Φ satisface la ecuación del calor.
Note que:

$$\begin{aligned}
\partial^2_{x_i} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{-|x|^2}{4t}} &= -\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}(2t)} \left(1 - \frac{x_i^2}{2t}\right) e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \\
\partial_t \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} &= -\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}(2t)} \left(n - \frac{|x|^2}{2t}\right) e^{-\frac{|x|^2}{4t}}
\end{aligned}$$

luego:

$$\begin{aligned}
\Phi_t - \Delta\Phi &= -\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}(2t)} \left(n - \frac{|x|^2}{2t}\right) e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}(2t)} \left(1 - \frac{x_i^2}{2t}\right) e^{-\frac{|x|^2}{4t}}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ahora note que:

$$\begin{aligned}
u_t - \Delta u &= \int_{\mathbb{R}^n} (\Phi_t - \Delta\Phi)(x-y,t) g(y) dy \\
&= 0 && \text{ya que } \Phi \text{ soluciona la ecuación del calor.}
\end{aligned}$$

3. $\lim\limits_{(x,t)\to(x^0,0), x\in\mathbb{R}^n, t>0} u(x,t) = g(x^0)$ para cada punto $x^0 \in \mathbb{R}^n$.
Para esto primero veamos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t) dx = 1,$$

para todo $t > 0$.
Para ver esto note que:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t) dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx \\
&= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-z} dz && \text{como } e^{-z} \in L^1(\mathbb{R}^n). \\
&= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_1 - z_2 - \cdots - z_n} dz_1 dz_2 \cdots dz_n \\
&= \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_i} dz_i \\
&= \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^{n} \pi^{1/2} = 1
\end{aligned}$$

Dado $x^0 \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$, escoja $\delta > 0$ tal que:

$$|g(y) - g(x^0)| < \epsilon \qquad \text{si } |y - x^0| < \delta, y \in \mathbb{R}^n.$$

(note que esto se satisface por la continuidad de g).
Entonces si nosotros tomamos $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}$, nosotros tenemos que:

$$\begin{aligned}
|u(x,t) - g(x^0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) g(y) dy - g(x^0) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) g(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) g(x^0) dy \right| \\
&\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)(g(y) - g(x^0)) dy \right| \\
&= \left| \int_{B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t)(g(y) - g(x^0)) dy \right| \\
&\quad + \left| \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t)(g(y) - g(x^0)) dy \right| \\
&= |I| + |J|
\end{aligned}$$

note que:

$$\begin{aligned}
|I| &\leq \left| \int_{B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t)(g(y) - g(x^0)) dy \right| \\
&\leq \int_{B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t)|g(y) - g(x^0)| dy \\
&\leq \epsilon \int_{B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t) dy \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

por otro lado, si $|x - y| \geq \delta$, entonces:

$$\begin{aligned}
|y - x^0| &\leq |y - x| + |x - x^0| \\
&\leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \\
&\leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x^0| \\
\frac{1}{2}|y - x^0| &\leq |y - x|
\end{aligned}$$

consecuentemente:

$$
\begin{aligned}
|J| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t)(g(y)-g(x^0))dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t)|g(y)-g(x^0)|dy \\
&\leq 2\|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t) \\
&\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0,\delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \\
&\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0,\delta)} e^{-\frac{|y-x^0|^2}{16t}} \\
&\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{-r^2}{16t}} r^{n-1} dr
\end{aligned}
$$

ahora, suponga $u = \frac{r^2}{16t}$, luego:

$$
\begin{aligned}
|J| &\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{-r^2}{16t}} r^{n-1} dr \\
&\leq \int_{\frac{\delta^2}{16t}}^{\infty} \frac{(4\sqrt{u}\sqrt{t})^{n-1} 8t}{\sqrt{t}^n (4\sqrt{u}\sqrt{t})} e^{-u} du \\
&\leq \int_{\frac{\delta^2}{16t}}^{\infty} 8(4\sqrt{u})^{n-2} e^{-u} du
\end{aligned}
$$

La cual cuando $t \to 0^+$, $\frac{\delta^2}{16t} \to \infty$ y por ende la integral tiende a 0. Por consecuente es posible afirmar que:

$$
\begin{aligned}
|u(x,t) - g(x^0)| &\leq |I| + |J| \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}
$$

Cuando $t \to 0^+$, es decir, $\lim\limits_{(x,t)\to(x^0,0), x\in\mathbb{R}^n, t>0} u(x,t) = g(x^0)$ para cada punto $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Problema 2:

Teorema 0.2 *Asuma que* $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ *con soporte compacto y sea* u *definida por:*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (\Phi(\cdot,t) * g)(x) + \int_0^t (\Phi(\cdot,t-s) * f(\cdot,s))(x)ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)g(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)f(y,s)dyds \end{aligned}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ *y* $t > 0$. *Entonces:*

1. $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$,
2. $u_t - \Delta u = f$ *para* $x \in \mathbb{R}^n$ *y* $t > 0$,
3. $\lim_{(x,t)\to(x^0,0), x\in\mathbb{R}^n, t>0} u(x,t) = g(x^0)$ *para cada punto* $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Solución:

1. $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.