**LISTA DE EJERCICIOS 1: ANÁLISIS FUNCIONAL**
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, BOGOTÁ
PRIMER SEMESTRE 2025

**PROFESOR**: OSCAR RIAÑO

**Observación**. Salvo que se diga lo contrario, los espacios vectoriales considerados tienen como campo escalar $\mathbb{R}$.

## 1. Espacios vectoriales normados

**Ejercicio 1.** *Sea $C^1([0,1]) = C^1([0,1];\mathbb{R})$ el espacio de todas las funciones continuas a valores reales sobre $[0,1]$ que son diferenciables en $(0,1)$ y cuyas derivadas se pueden extender continuamente a $[0,1]$.*

(i) *Para $f \in C^1([0,1])$ definimos*
$$\|f\| = \max_{x\in[0,1]} \{|f(x)|, |f'(x)|\},$$
*donde $f'$ denota la derivada de $f$. Muestre que $C^1([0,1])$ es un espacio de Banach con la norma anterior.*

(ii) *De un ejemplo de una norma para la cual es espacio $C^1([0,1])$ sea normado, pero no completo. Misma pregunta para $C([0,1])$.*

**Ejercicio 2.** *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Defina*
$$\mathcal{K} = \{x \in E : \|x\| = 1\}.$$
*Demuestre que $E$ es de Banach si y solamente si $\mathcal{K}$ es completo.*

**Ejercicio 3.** *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales normados. Considere $T : E \to F$ una transformación lineal. Muestre que los siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *$T$ es continua.*
(ii) *$T$ es continua en cero.*
(iii) *$T$ es acotada. Es decir, existe $M > 0$ tal que para todo $x \in E$,*
$$\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E.$$
(iv) *Si $\overline{B(0,1)} = \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$, entonces la imagen directa $T(\overline{B(0,1)})$ es un conjunto acotado de $F$.*

**Ejercicio 4.** *Demuestre que si $T \in L(E,F)$[1], entonces*

(i) *$\|Tx\|_F \leq \|T\|\|x\|_E$, para todo $x \in E$.*
(ii) *$\|T\| = \sup\limits_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$.*

[1]Recuerde que $L(E,F)$ denota el conjunto de operadores lineales de $E$ en $F$. Dado $T \in L(E,F)$ definimos la norma de $T$ como $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x\in E\\ \|x\|_E\leq 1}} \|Tx\|_F$.

(iii) $\|T\| = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|_E=1}} \|Tx\|_F$.
(iv) $\|T\| = \inf\{M > 0 : \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E,\, \forall x \in E\}$.

**Ejercicio 5.** *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales normados. Suponga que $F$ es un espacio de Banach. Muestre que $L(E, F)$ es un espacio de Banach con la norma usual de $L(E, F)$. En particular, $E^* = L(E, \mathbb{R})$, $E^{**} = L(E^*, \mathbb{R})$ son espacios de Banach.*

**Ejercicio 6.** *Sean $E$ y $F$ espacios vectoriales normados. Suponga que $E$ es de dimensión finita ($F$ no necesariamente es de dimensión finita).*
(i) *Muestre que todas las normas asignadas a $E$ son equivalentes*[2].
(ii) *Muestre que toda transformación lineal $T : E \to F$ es continua.*
(iii) *De un ejemplo donde se verifique que (ii) puede ser falsa si $E$ es de dimensión infinita.*

**Ejercicio 7.** *Sea $E = \{u \in C([0, 1]) : u(0) = 0\}$ con la norma $\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Considere el funcional $f : E \to \mathbb{R}$ dado por*

$$f(u) = \langle f, u\rangle = \int_0^1 u(x)\, dx.$$

(i) *Muestre que $f \in E^*$ y calcule $\|f\|_{E^*}$.*
(ii) *Es posible encontrar $u \in E$ tal que $\|u\| = 1$ y $f(u) = \|f\|_{E^*}$?*

**Ejercicio 8.** *Considere $E = c_0$ donde*

$$c_0 = \{u = \{u_n\}_{n\geq 1} : \text{tales que } u_n \in \mathbb{R},\, n \geq 1,\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0\}.$$

*Es decir, $c_0$ es el conjunto de las secuencias reales que tienden a cero. Dotamos a este espacio con la norma $\|u\|_{l^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} |u_n|$. Considere el funcional $f : E \to \mathbb{R}$ dado por*

$$f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n.$$

(i) *Muestre que $f \in E^*$ y calcule $\|f\|_{E^*}$.*
(ii) *Es posible encontrar $u \in E$ tal que $\|u\| = 1$ y $f(u) = \|f\|_{E^*}$?*

## 2. Teoremas de Hahn-Banach

**Ejercicio 9.** *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Dado $r > 0$, considere $C = B(0, r) = \{y \in E : \|y\| < r\}$. Determine el funcional de Minkowski*[3] *de $C$.*

**Ejercicio 10.** *Demuestre que el teorema de Hahn-Banach vale con hipótesis más débiles en espacios de dimensión finita. Más precisamente, sea $E$ un espacio vectorial normado de dimensión finita. Considere $C \subset E$ un conjunto convexo no vacío tal que $0 \notin C$. Demuestre que existe un hiperplano que separa estrictamente a $C$ y $\{0\}$.*

---

[2]Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas sobre $E$. Recordemos que dos normas son equivalentes si existen constantes positivas $c_1$, $c_2$, tales que $c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1$, para todo $x \in E$.

[3]Recuerde que dado $C$ abierto, convexo con $0 \in C$, el funcional de Minkowski se define como $p(x) = \inf\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\}$, $x \in E$.

**Sugerencia**: *vea el libro de Brezis, Functional Analysis, Sobolev spaces and PDEs, Ejercicio 1.10.*

**Ejercicio 11.** *Sea $E$ un espacio vectorial normado. Sean $W$ un subespacio de $E$ y $Z$ un subespacio de $E^*$. Definimos*

$$W^\perp = \{f \in E^* : \langle f, x\rangle = 0 \ \text{para todo}\ x \in W\}$$

*y*

$$Z^\perp = \{x \in E : \langle f, x\rangle = 0 \ \text{para todo}\ f \in Z\}.$$

(i) *Muestre que $Z^\perp$ es un subespacio cerrado de $E$.*
(ii) *Muestre que $(W^\perp)^\perp = \overline{W}$.*
(iii) *Muestre que $\overline{Z} \subset (Z^\perp)^\perp$.*
(iv) *Muestre que si $E$ es reflexivo*[4], *entonces $\overline{Z} = (Z^\perp)^\perp$.*

**Ejercicio 12.** *Sea $E$ un espacio vectorial normado.*

(i) *Sea $W \subset E$ un subespacio propio de $E$ y $x_0 \in E \setminus W$, tal que $d := dist(x_0, W) > 0$. Demuestre que existe $f \in E^*$ tal que $f = 0$ restricto a $W$, $f(x_0) = d$ y $\|f\|_{E^*} = 1$.*
(ii) *Sea $W \subset E$ un subespacio propio cerrado de $E$ y $x_0 \in E \setminus W$. Demuestre que existe $f \in E^*$ tal que $f = 0$ restricto a $W$ y $f(x_0) \neq 0$.*

## 3. Principio de acotación uniforma y el teorema del gráfico cerrado

**Ejercicio 13.** *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios de Banach.*

(i) *Sea $K \subset E$ un subespacio cerrado de $E$. Definimos la relación sobre $E$ dada por $x \sim_K y$ si y solo si $x - y \in K$.*
  (a) *Muestre que $\sim_K$ es una relación de equivalencia sobre $E$.*
  (b) *Muestre que el espacio cociente $E/K$ es un espacio de Banach con la norma*
  $$\|x + K\|_{E/K} = \inf_{k\in K} \|x - k\|, \quad x \in E.$$
  *Es decir, debe verificar que el espacio cociente es un espacio vectorial, normado, cuya norma lo hace completo.*
(ii) *Sea $T \in L(E, W)$ tal que existe $c > 0$ para el cual*
  $$\|Tx\|_F \geq c\|x\|_E,$$
  *para todo $x \in E$. Si $K$ denota le espacio nulo de $T$ y $R(T)$ el rango de $T$, muestre que $\overline{T} : E/K \to R(T)$ dada por $\widetilde{T}(x + K) = T(x)$, $x \in E$, está bien definida y es un isomorfismo. Esto es $\widetilde{T} \in L(E/K, R(T))$ y $\widetilde{T}^{-1} \in L(R(T), E/K)$.*

**Ejercicio 14.** *Sea $E$ un espacio de Banach y $T : E \to E^*$ un operador lineal para el cual*

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0, \quad \forall x \in E.$$

*Muestre que $T \in L(E, E^*)$.*

---

[4] Recuerde que $E$ es reflexivo, si la aplicación canónica $J : E \to E^{**}$ dada por $J(x) = J_x : E^* \to \mathbb{R}$ con $J_x(f) = \langle f, x\rangle$, es sobreyectiva.

**Ejercicio 15.** *Considere los espacios* $C([0,1])$ *y* $C^1([0,1])$ *ambos equipados con la norma del supremo* $\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. *Definimos el operador derivada* $D : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ *dado por* $f \mapsto f'$. *Muestre que* $D$ *es un operador no acotado, pero su gráfico* $G(D)$ *es cerrado.*

**Ejercicio 16.** *Sea* $E$ *un espacio de Banach y* $T : E \to E^*$ *un operador lineal tal que*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle Ty, x\rangle,\ \forall x, y \in E.$$

*Muestre que* $T \in L(E, E^*)$. **Sugerencia***: muestre que el gráfico de* $T$ *es cerrado.*

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá
*Email address*: `ogrianoc@unal.edu.co`