Dia de entrega: Jueves, 19 de Diciembre de 2024. En la clase.

1.T Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. entonces se satisface

(a) $\|A\|_2 = \|A^T\|_2 \leq \|A\|_F = \|A^T\|_F$,
(b) $\|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\|A\|_2$,
(c) $\|A\|_2 \leq \sqrt{m}\|A\|_\infty$,
(d) $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1\|A\|_\infty}$.

2.T Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y A una matriz invertible de tamaño $n\times n$. Pruebe que:

Si $Ax = b$, $(A+\delta A)(x+\delta x) = b + \delta b$ y $\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$, entonces $A + \delta A$ es invertible y se cumple que:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1-\|A^{-1}\|\|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right).$$

3.T Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a+\delta \end{pmatrix}, \qquad a > 0 \text{ fijo, } \delta > 0 \text{ variable}$$

(a) Obtenga el número de condición de A. Para valores de δ *muy pequeños o muy grandes*, ¿podemos afirmar que el sistema $Ax = b$ esta mal condicionado? Justifique su respuesta.
(b) ¿Existe algún valor de δ que haga óptimo el número de condición de A?. ¿Cuál es este número de condición?

4.TP Al aproximar una función continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mediante un polinomio $p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$, el error de aproximación E se mide en la norma L^2, es decir:

$$E^2 := \|p - f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 [p(t) - f(t)]^2\, dt.$$

a) Muestre que la minimización del error $E = E(a_0, \ldots, a_n)$ conduce a un sistema de ecuaciones lineales $H_n a = b$, donde:

$$b = [b_0, \ldots, b_n]^\top \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad b_i = \int_0^1 f(t)t^i\, dt, \quad i = 0, \ldots, n,$$

H_n es la matriz de Hilbert de orden n, definida como:

$$(H_n)_{i,j} = \frac{1}{i+j+1}, \quad i,j = 0, \ldots, n,$$

y a es el vector de coeficientes de p.

b) Muestre que H_n es simétrica y definida positiva.

c) Solucione el sistema $H_n x = b$, donde b tiene componentes $b_i = 1/(n+i-1)$, para $i = 1, ..., n$. Para estom, use las factorizaciónes LU (`[L,U] = lu(H)`) y Cholesky `L = chol(H);` y luego resuelva los dos sistemas triangulares, uno tras otro (es decir, realice las sustituciones hacia adelante y hacia atrás llamando al operador \ con matrices triangulares);

d) Para ambos métodos ¿Qué tan precisas son las soluciones numéricas $\hat{x}_{approx}$? Tabule los errores de la solución:

$$e(n) = \|x_{approx} - x_{exact}\|$$

como una función de $n = 2, ..., 15$. Note que $x_{exact} = (0, \ldots, 1)^T$. Puede graficar los errores en función de n utilizando la función `semilogy` de Matlab. Explique en detalle los resultados. ¸

5.TP a) Simplifique el algoritmo de eliminación de Gauss de manera adecuada, para resolver un sistema lineal $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

matriz tridiagonal.

b) Considere la ecuación de Poisson con término fuente f en el intervalo $(0, 1)$:

$$-T''(x) = f(x), x \in (0, 1),$$

con condiciones de frontera $T(0) = T(1) = 0$. Para resolver numéricamente el problema de valor en la frontera, la segunda derivada de T se aproxima por medio de diferencias finitas con un paso de discretización $h > 0$:

$$T''(x) \approx \frac{T(x-h) - 2T(x) + T(x+h)}{h^2}.$$

Tomando $x_i = ih$, $i = 0, 1, ..., n$, $n = 1/h$, obtenemos el sistema lineal de ecuaciones

$$-T_{i-1} + 2T_i - T_{i+1} = h^2 f(x_i), \qquad i = 1, ..., n-1 \tag{1}$$

para las incognitas $T_i \approx T(x_i)$, $i = 1, ..., n-1$ (de las condiciones de frontera se tiene que $T_0 = T_n = 0$).

Escriba (1) en la forma $AT = f$ donde A es una matriz Tridiagonal. Utilice su algoritmo desarrollado en la parte a) para resolver el sistema lineal de ecuaciones para $n = 1000$ y $f(x) = \text{sen}(2\pi x)$. Compare su solución aproximada con la solución exacta $T(x) = \sin(2\pi x)/(4\pi^2)$.