

# Apuntes de Geometría Diferencial

Autor: Andrés David Cadena Simons

6 de abril de 2025

## GEOMETRÍA DIFERENCIAL 1 - 2019078

**Prerrequisitos:** Álgebra Lineal.

### DESCRIPCIÓN

La geometría diferencial es el uso sistemático de las técnicas del cálculo al estudio de la geometría de las curvas y las superficies, y, en un contexto moderno, de las variedades. Este curso está totalmente orientado al estudio de las propiedades geométricas locales y globales de las curvas y las superficies.

**Metodología.** La modalidad de cursos magistrales consiste de un sistema integrado de clases, talleres y asesorías. El curso tiene dos clases teóricas a la semana dictadas por el profesor.

### Contenido.

- (1) **Curvas Parametrizadas:** Curvas parametrizadas. Longitud de arco. Curvas regulares. Parametrización por la longitud de arco.
- (2) **Teoría Local de Curvas:** Diedro de Frenet. Curvatura con signo. Fórmulas de Frenet. Teorema fundamental de la teoría de curvas planas. Triedro de Frenet. Curvatura y torsión. Fórmulas de Frenet. Teorema fundamental de la teoría de curvas en el espacio.
- (3) **Superficies en  $\mathbb{R}^3$ :** Superficies regulares. Parametrización de superficies. Cambios de coordenadas. Funciones diferenciables definidas sobre superficies. Propiedades. Difeomorfismos entre superficies.
- (4) **Orientación de Superficies:** Curvas diferenciables en una superficie. Definición de vector tangente. El plano tangente a una superficie en un punto. La diferencial de una función diferenciable. Propiedades. El gradiente de una función diferenciable. Puntos críticos. Superficies compactas orientables en  $\mathbb{R}^3$ .
- (5) **La Primera Forma Fundamental:** Noción de área en una superficie.
- (6) **La Transformación de Gauss:** La segunda forma fundamental. El operador de forma o endomorfismo de Weingarten. Propiedades. Transformación de Gauss en coordenadas locales.
- (7) **Curvaturas Principales:** Curvatura gaussiana y curvatura media. Puntos umbilicales.
- (8) **Geometría Intrínseca de una Superficie:** Isometrías. Fórmulas de Gauss y de Weingarten. Transformaciones conformes.
- (9) **Teorema Egregium de Gauss:** Ecuaciones de compatibilidad y Teorema de Gauss.
- (10) **Formas Diferenciales:** Derivación covariante y geodésicas. Marcos móviles. Formas diferenciales en  $\mathbb{R}^n$ . Teorema de Stokes. Geometría diferencial vía formas diferenciales. Teorema de Gauss-Bonnet vía formas diferenciales.

**Evaluación.** Mínimo dos parciales escritos con un porcentaje total del 60%. El 40% restante se evalúa con exposiciones, talleres o quices.

### Bibliografía.

- (1) M. A. Hernández Cifre y J. A. Pastor González; *Un curso de Geometría Diferencial*. Publicaciones del CSIC, Textos Universitarios 47, Madrid, 2010.
- (2) S. Montiel y A. Ros; *Curvas y Superficies*. Proyecto Sur D. L., Granada, 1997.
- (3) P. Lucas. *Variedades Diferenciables y Topología*. Ed. Diego Marin, 1999.
- (4) M. P. do Carmo; *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1976.
- (5) M. P. do Carmo; *Differential Forms and Applications*. Universitext, Springer, 1998.
- (6) B. O'Neill. *Elementary Differential Geometry*. Academic Press Inc., New York 1966.
- (7) G. Shiffrin. *Differential Geometry: A first course in curves and surfaces*. University of Georgia. 2015.
- (8) M. Abate y F. Tivena. *Curves and Surfaces*. Unitext. Springer. 2012.
- (9) A. Pressley. *Elementary Differential Geometry*. Springer undergraduate mathematics series. London, UK. Springer, 2002.

- Datos de la profesora.
- Calificación.
  - %25 Parcial I.
  - %25 Parcial II.
  - %10 Asistencia.
  - %40 Póster final.



# Índice general

1. Curvas.

7



# Capítulo 1

## Curvas.

Una primera idea intuitiva de curva es verla como la “trayectoria de una partícula”, lo cual nos ofrece una primera aproximación a una definición geométrica de curva. También podemos definir una curva como “una aplicación que, en cada instante de tiempo, da una posición en el espacio”. Esta última idea engloba algo más que la mera trayectoria o traza, pues encierra a su vez las nociones de curva orientada y de velocidad de la curva.

**Ejemplo 1.0.1:**





# Bibliografía