Apuntes de Análisis Armónico

Autor: Andrés David Cadena Simons

2 de abril de 2025

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Sede Bogotá

Departamento de Matemáticas

2029662 ANÁLISIS ARMÓNICO

Programa: `Maestría en Ciencias Matemáticas`
Créditos de la asignatura: `4`
Profesor: Ricardo Pastrán. Edificio: `404`. Oficina: `314`. **Atención:** `L y C: 16-17`
Email: `rapastranr@unal.edu.co`

DESCRIPCIÓN

Este curso ofrece una exploración profunda del análisis armónico, un área central en el análisis moderno con amplias aplicaciones en ecuaciones diferenciales parciales y teoría de números. El curso cubrirá tanto resultados clásicos como técnicas modernas, centrándose en el estudio de funciones y operadores a través del análisis de Fourier y herramientas relacionadas. Los estudiantes comenzarán repasando el operador transformada de Fourier, conceptos fundamentales que descomponen las funciones en sus componentes de frecuencia. A partir de ahí, el curso profundizará en temas avanzados como la teoría de Calderón-Zygmund, funciones maximales, integrales singulares, la teoría de Littlewood-Paley y aplicaciones a la teoría analítica de números y a las ecuaciones diferenciales parciales. El papel del análisis armónico en la comprensión de la regularidad y el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales también será un área clave de enfoque.

OBJETIVOS

- Adquirir un dominio sólido de las técnicas clásicas y modernas del análisis armónico.
- Comprender y aplicar métodos avanzados de análisis armónico a diversos problemas matemáticos.
- Utilizar las herramientas que proporciona el análisis armónico en el estudio de las EDP.

CONTENIDO

1. **Transformada de Fourier e Interpolación de Operadores**.
    - 1.1. Definición de la Transformada de Fourier
    - 1.2. La transformada en espacios L^p
    - 1.3. Teoremas de Interpolación para operadores lineales
2. **Función Maximal de Hardy-Littlewood**.
    - 2.1. Aproximaciones de la identidad
    - 2.2. Desigualdades tipo fuerte y tipo débil
    - 2.3. Teorema de interpolación de Marcinkiewicz
    - 2.4. La función maximal de Hardy-Littlewood

3. **Transformada de Hilbert**.
   - 3.1. El conjugado del núcleo de Poisson
   - 3.2. Los teoremas de Riesz y Kolmogorov
   - 3.3. Integrales truncadas y convergencia puntual
   - 3.4. Multiplicadores
4. **Integrales singulares**.
   - 4.1. Definición de operadores integrales singulares
   - 4.2. El método de las rotaciones
   - 4.3. Integrales singulares con núcleo par
   - 4.4. Integrales singulares con núcleo variable
5. **Teorema de Calderón-Zygmund y generalizaciones**.
   - 5.1. El teorema de Calderón-Zygmund
   - 5.2. Integrales truncadas y el valor principal
   - 5.3. Operadores generalizados de Calderón-Zygmund
   - 5.4. Integrales singulares de Calderón-Zygmund
6. **Propiedades de diferenciabilidad en términos de espacios de funciones**.
   - 6.1. Potenciales de Riesz
   - 6.2. Espacios de Sobolev
   - 6.3. Potenciales de Bessel
   - 6.4. Los espacios de funciones continuas de Lipschitz
7. **Espacios H^1 y BMO**.
   - 7.1. El espacio atómico H^1
   - 7.2. El espacio BMO
   - 7.3. Un resultado de interpolación
   - 7.4. La desigualdad John-Nirenberg
8. **Teoría de Littlewood-Paley y Multiplicadores**.
   - 8.1. Teoría de Littlewood-Paley
   - 8.2. Teorema del multiplicador de Hörmander
   - 8.3. Multiplicadores de Bochner-Riesz
   - 8.4. La función maximal y la transformada de Hilbert a lo largo de una parábola
9. **Aplicaciones a la Teoría Analítica de Números y a las Ecuaciones Diferenciales Parciales** (Por ejemplo: teoremas de restricción y estimativas de Strichartz).

REFERENCIAS

1. J. DUOANDIKOETXEA, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, 29, AMS 2001.

2. E. M. STEIN, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, 1970.

3. E. M. STEIN y G. WEISS, *Fourier Analysis on Euclidean spaces*, Princeton University Press, 1971.

4. E. M. STEIN, *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, 1993.

5. C. MUSCALU y W. SCHLAG, *Classical and multilinear harmonic analysis*, Vol. I. Cambridge University Press, 2013.

6. L. GRAFAKOS, *Classical Fourier Analysis*, Tercera edición, Grad. Text in Math., 269, Springer, 2014.

CALIFICACIÓN

Dos exámenes parciales valiendo cada uno el 25% de la nota. Otro 25% se obtendrá de talleres. El 25% restante se obtendrá de un trabajo investigativo desarrollado por el estudiante a lo largo del semestre que abarque o use algunos de los temas del curso. El primer examen parcial se realizará el día miércoles 28 de mayo y el segundo examen parcial el día miércoles 23 de julio.

Índice general

Capítulo 1

Transformada de Fourier e Interpolación de Operadores.

1.1. Transformada de Fourier.

Insertar historia de la transformada de Fourier (1807) y la vida de Fourier (1768-1830).
Todo esto inspirado en la ecuación del calor

$$\begin{cases} \partial_t U = \partial_x^2 u, & \text{con } (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & \text{para todo } t \geq 0 \ , \\ u(x,0) = f(x) & f(0) = f(\pi) = 0. \end{cases}$$

Fourier se inspira en buscar una solución de la forma separación de variables

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Esto motiva a pensar en qué condiciones tiene que cumplir una función f periódica de periodo 2π para poderla escribir como combinación lineal de funciones trigonométricas, es decir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx).$$

Por cuestiones de facilidad en la escritura vamos a pensar el problema en funciones de periodo 1, para esto recordemos que

$$e^{ixk} = \cos(kx) + i \operatorname{sen}(kx),$$

luego podemos reescribir la expresión anterior de la forma

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i x k}$$

donde

$$c_k = \widehat{f}(k) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i x k} \, dx, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

El restante de teoría de Fourier se deja como lectura o motivante para entrar al curso de Series de Fourier.

1.2. La transformada de Fourier en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Definición 1.2.1: Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, llamaremos la transformada de Fourier de f a $\widehat{f}$ definida por

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx, \tag{1.1}$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^n$ y $x \cdot \xi$ es el producto punto entre x y ξ.

Nota 1.2.1:

Veamos que $\widehat{f}$ tiene sentido como integral.
Para ver esto note que

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f}(\xi)\right| &\leq \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx\right|,\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|f(x)e^{2\pi i x\cdot\xi}\right|\, dx,\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx,\\ &\leq \|f\|_1 .\end{aligned}$$

luego se puede ver que

$$\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1 < \infty.$$

Lo que nos permite definir la transformada de Fourier como un operador $\widehat{\ } : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Para ver el comportamiento de la transformada de Fourier anteriormente definida en $L^p(\mathbb{R}^n)$, veamos la siguiente definición.

Definición 1.2.2:

Una función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ es diferenciable en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con respecto a la k-ésima variable si existe $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{|h|\to 0} \left\|\frac{f(x+he_k - f(x))}{h} - g(x)\right\|_p = 0,$$

en donde e_k es el vector k-ésimo de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Si tal función g existe es llamada la derivada parcial respecto a la k-ésima variable de f en $L^p(\mathbb{R}^n)$, lo denotaremos por $\frac{\partial f}{\partial x_k}$.

Ahora sí veamos el siguiente resultado.

Teorema 1.2.1:

Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces se satisface que

1. $\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$.
2. Si $\tau_h f(x) = f(x-h)$ con $h \in \mathbb{R}^n$, entonces
$$\widehat{\tau_h f}(\xi) = e^{-2\pi i h\cdot\xi}\widehat{f}(\xi),$$
$$\tau_h \widehat{f}(\xi) = \widehat{e^{2\pi i x\cdot h} f}(\xi).$$
3. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es transformación lineal invertible y $S = \left(T^{-1}\right)^t = \left(T^t\right)^{-1}$, entonces
$$\widehat{f \circ T} = |det(T)|^{-1}\left(\widehat{f} \circ S\right).$$
En particular, si T es una rotación
$$\widehat{f \circ T} = \widehat{f} \circ T.$$
Si T es dilatación (o contracción) $Tx = rx$, entonces
$$\widehat{f \circ T}(\xi) = \frac{1}{r^n}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{r}\right).$$
4. Si $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, para $|\alpha| \leq k$ entonces $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y $\partial^\alpha \widehat{f} = (\widehat{-2\pi i x)^\alpha f}$.
   - Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $x_k f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces
   $$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_k} = -\widehat{2\pi i x_k f}(\xi)$$
   en la norma de $L^1(\mathbb{R}^n)$.
5. Si $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $|\alpha| \leq k$ y $\partial^\alpha f \in C^0_\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $|\alpha| \leq k-1$, entonces
$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi).$$
   - Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g = \frac{\partial f}{\partial x_k}$ en la norma de $L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces
   $$\widehat{g}(\xi) = \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}(\xi) = 2\pi i\xi_k \widehat{f}(\xi)$$

Demostración

1. $\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$.
   Demostrado en la nota (1.2).

2. Si $\tau_h f(x) = f(x-h)$ con $h \in \mathbb{R}^n$, entonces
$$\widehat{\tau_h f}(\xi) = e^{-2\pi i h\cdot\xi}\widehat{f}(\xi),$$
$$\tau_h \widehat{f}(\xi) = \widehat{e^{2\pi i x\cdot h} f}(\xi).$$
   Note que
$$\begin{aligned}\widehat{\tau_h f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-h)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx \qquad\qquad \text{Haciendo } u = x-h,\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-2\pi i(u+h)\cdot\xi}\,du,\\ &= e^{-2\pi i h\cdot\xi}\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-2\pi i u\cdot\xi}\,du,\\ &= e^{-2\pi i h\cdot\xi}\widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$
   Por otro lado
$$\begin{aligned}\tau_h\widehat{f}(\xi) &= \widehat{f}(\xi-h),\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot(\xi-h)}\,dx,\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot h} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx,\\ &= \widehat{e^{2\pi i x\cdot h} f}(\xi).\end{aligned}$$

3. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es transformación lineal invertible y $S = \left(T^{-1}\right)^t = \left(T^t\right)^{-1}$, entonces
$$\widehat{f\circ T} = |det(T)|^{-1}\left(\widehat{f}\circ S\right).$$
   En particular, si T es una rotación
$$\widehat{f\circ T} = \widehat{f}\circ T.$$
   Si T es dilatación (o contracción) $Tx = rx$, entonces
$$\widehat{f\circ T}(\xi) = \frac{1}{r^n}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{r}\right).$$
   Note que
$$\begin{aligned}\widehat{f\circ T}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(Tx)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx \qquad\qquad \text{Haciendo } u = Tx,\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-2\pi i u\cdot S\xi}\,\frac{du}{|det(T)|},\\ &= |det(T)|^{-1}\widehat{f}(S\xi),\\ &= |det(T)|^{-1}(\widehat{f}\circ S)(\xi).\end{aligned}$$

Ahora, note que si T es una rotación, entonces $|det(T)| = 1$

4. Si $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, para $|\alpha| \leq k$ entonces $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y $\partial^\alpha \widehat{f} = (-\widehat{2\pi i x)^\alpha f}$.
   - Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $x_k f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_k} = -\widehat{2\pi i x_k} f(\xi)$$

   en la norma de $L^1(\mathbb{R}^n)$.

5. Si $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $|\alpha| \leq k$ y $\partial^\alpha f \in C^0_\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $|\alpha| \leq k-1$, entonces

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

   - Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g = \frac{\partial f}{\partial x_k}$ en la norma de $L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}(\xi) = 2\pi i \xi_k \widehat{f}(\xi)$$

Bibliografía