



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ANÁLISIS FUNCIONAL
TALLER 5: ESPACIOS DE HILBERT Y OPERADORES
COMPACTOS (I-2025)

Profesor: Oscar Guillermo Riaño Castañeda

Integrantes: Andrés David Cadena Simons

Iván Felipe Salamanca Medina

Jairo Sebastián Niño Castro

Fecha: 16 de Julio del 2025

0.1 Espacios de Hilbert

Ejercicio 13.

(I) Muestre que los siguientes conjuntos M son subespacios cerrados no vacíos de $L^2((-1, 1))$ y determine explícitamente la proyección P_M en cada caso

(a) $M = \{f \in L^2((-1, 1)) : f(x) = f(-x) \text{ para casi todo } x \in (-1, 1)\}.$

(b) $M = \left\{ f \in L^2((-1, 1)) : \int_{-1}^1 f(x) dx = 0 \right\}.$

(c) $M = \{f \in L^2((-1, 1)) : f(x) = 0 \text{ para casi todo } x \in (-1, 0)\}.$

(II) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Considere

$$K = \left\{ f \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} f(x) dx \geq 1 \right\}.$$

(a) Demuestre que K es un conjunto cerrado convexo en $L^2(\Omega)$.

(b) Determine la proyección sobre K , es decir, el operador P_K .

Demostración. (I) (a) Sea (f_n) una sucesión en M tal que $f_n \rightarrow f \in L^2((-1, 1))$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $n \geq N_\varepsilon$, entonces

$$\|f_n - f\|_{L^2((-1, 1))} = \left(\int_{-1}^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2},$$

Para $x \in (-1, 1)$, sea $g(x) = f(-x)$ y veamos que $\|g - f\|_{L^2((-1, 1))} = 0$. Sea $n \geq N_\varepsilon$, tenemos

$$\|g - f\|_{L^2((-1, 1))} \leq \|g - f_n\|_{L^2((-1, 1))} + \|f_n - f\|_{L^2((-1, 1))}.$$

Como $n \geq N_\varepsilon$, $\|f_n - f\|_{L^2((-1, 1))} < \frac{\varepsilon}{2}$. Ahora, usando que $f_n \in M$ y la

sustitución $y = -x$, tenemos

$$\begin{aligned}\|g - f_n\|_{L^2((-1,1))}^2 &= \int_{-1}^1 |g(x) - f_n(x)|^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 |f(-x) - f_n(x)|^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 |f(y) - f_n(y)|^2 dy \\ &= \|f - f_n\|_{L^2((-1,1))}^2,\end{aligned}$$

de esta manera $\|g - f_n\|_{L^2((-1,1))} = \|f - f_n\|_{L^2((-1,1))} < \frac{\varepsilon}{2}$, de esta manera

$$\|g - f\|_{L^2((-1,1))} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, tenemos que $\|g - f\|_{L^2((-1,1))} = 0$, lo que quiere decir que $f(-x) = g(x) = f(x)$ para casi todo $x \in (-1, 1)$, es decir, $f \in M$ y de esta manera M es cerrado.

Veamos ahora que M es un subespacio. Sean $f, g \in M$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Sean

$$\begin{aligned}E_f &:= \{x \in (-1, 1) : f(x) \neq f(-x)\} \\ E_g &:= \{x \in (-1, 1) : g(x) \neq g(-x)\},\end{aligned}$$

como $f, g \in M$,

$$0 \leq \mu(E_f \cup E_g) \leq \mu(E_f) + \mu(E_g) = 0 + 0 = 0.$$

es decir, $\mu(E_f \cup E_g) = 0$, además, para todo $x \in (-1, 1) \setminus (E_f \cup E_g)$ se tiene que $f(x) = f(-x)$ y $g(x) = g(-x)$, de manera que

$$f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) \text{ para todo } x \in (-1, 1) \setminus (E_f \cup E_g),$$

como $\mu(E_f \cup E_g) = 0$, esto implica que $f + g \in M$. Ahora, si $x \in (-1, 1) \setminus E_f$, $f(x) = f(-x)$, por tanto

$$\alpha f(x) = \alpha f(-x) \text{ para todo } x \in (-1, 1) \setminus E_f,$$

y como $\mu(E_f) = 0$, se tiene que $\alpha f \in M$. De esta manera M es un subespacio de $L^2((-1, 1))$. Ahora, recordemos que para $f, g \in L^2((-1, 1))$, el producto interno $(f; g)$ está dado por

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx.$$

Como M es un subespacio cerrado, para $f \in L^2((-1, 1))$, $P_M f$ se caracteriza como la única $g \in M$ tal que $(f - g, h) = 0$ para toda $h \in M$, es decir, para toda $h \in M$ se tiene

$$(f - g, h) = \int_{-1}^1 (f(x) - g(x))h(x) dx = 0.$$

Tomemos $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \in M$ para $x \in (-1, 1)$, y veamos que $g = P_M f$. Primero, es claro que $g \in M$, dado que

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = g(x),$$

y para $h \in M$

$$\begin{aligned} (f - g, h) &= \int_{-1}^1 \left(f(x) - \frac{f(x) + f(-x)}{2} \right) h(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{f(x) - f(-x)}{2} h(x) dx \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) h(x) dx}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(-x) h(x) dx}_{I_2}. \end{aligned}$$

Como $h \in M$, $h(x) = h(-x)$ para casi todo $x \in (-1, 1)$, de esta manera, usando la sustitución $y = -x$ tenemos

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(-x) h(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(y) h(y) dy = I_1,$$

de manera que

$$(f - g, h) = I_1 - I_2 = I_1 - I_1 = 0,$$

por tanto, $(P_M f)(x) = g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$.

- (b) Primero, note que podemos expresar M usando el producto interno de $L^2((-1, 1))$.

$$M = \left\{ f \in L^2((-1, 1)) : \int_{-1}^1 f(x) dx = 0 \right\} = \left\{ f \in L^2((-1, 1)) : (f; 1) = 0 \right\},$$

donde 1 denota la función constante $g(x) = 1$. Antes de empezar a hacer los trámites, es importante mencionar que para $f \in L^2((-1, 1))$, tiene sentido hallar la integral

$$\int_{-1}^1 f(x) dx,$$

porque $\mu((-1, 1)) = 2 < \infty$, de donde se obtiene que $L^2((-1, 1)) \subset L^1((-1, 1))$, más precisamente, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, para

$f \in L^2((-1, 1))$ se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 f(x) \, dx \right| &= \left| \int_{-1}^1 f(x) \cdot 1 \, dx \right| \\ &\leq \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{-1}^1 1^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &= \|f\|_{L^2((-1, 1))} (\mu((-1, 1)))^{1/2} \\ &= \sqrt{2} \|f\|_{L^2((-1, 1))} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Note que $L^2((-1, 1)) \setminus M \neq \emptyset$, dado que para la función $g(x) = 1$

$$(g, 1) = \int_{-1}^1 g(x) \, dx = \int_{-1}^1 1 \, dx = 2 \neq 0,$$

es decir, $g(x) = 1 \in L^2((-1, 1)) \setminus M$. Si $f \in L^2((-1, 1)) \setminus M$, entonces

$$(f, 1) \neq 0,$$

definimos

$$\alpha = \left| \left(f, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} |(f, 1)| > 0,$$

y sea $B = B\left(f; \frac{\alpha}{2}\right)$, la bola en $L^2((-1, 1))$ centrada en f con radio $\frac{\alpha}{2}$. Sea

$g \in B$, entonces $\|f - g\|_{L^2((-1, 1))} < \frac{\alpha}{2}$, además, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$\left| \left(g - f, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right| \leq \|g - f\|_{L^2((-1, 1))} \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \right\|_{L^2((-1, 1))} = \|g - f\|_{L^2((-1, 1))} < \frac{\alpha}{2},$$

de esta manera

$$\begin{aligned} \left| \left(g, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right| &= \left| \left(f, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(g - f, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right| \\ &\geq \left| \left(f, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right| - \left| \left(g - f, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right| \\ &> \alpha - \frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} \left| \left(g, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right| &> \frac{\alpha}{2} > 0 \\ \implies |(g, 1)| &> \frac{\sqrt{2}\alpha}{2} > 0, \end{aligned}$$

luego $(g, 1) \neq 0$ y así, $g \notin M$. De esta manera, tenemos que $B \subset L^2((-1, 1)) \setminus M$, concluyendo que M es cerrado.

Veamos ahora que M es un subespacio de $L^2((-1, 1))$. Sean $f, g \in M$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_{-1}^1 (f(x) + g(x)) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^1 g(x) dx = 0 + 0 = 0,$$

es decir, $f + g \in M$, además

$$\int_{-1}^1 \alpha f(x) dx = \alpha \int_{-1}^1 f(x) dx = \alpha \cdot 0 = 0,$$

por tanto, $\alpha f \in M$. De esta manera, M es un subespacio de $L^2((-1, 1))$.

Hallemos ahora P_M . Sea $f \in L^2((-1, 1))$, queremos encontrar $g \in M$ tal que $(f - g, h) = 0$ para todo $h \in M$, es decir

$$\int_{-1}^1 ((f(x) - g(x))h(x) dx = 0.$$

Tomemos $g(x) = f(x) + C_f$ donde

$$C_f = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(y) dy,$$

y veamos que $g = P_M f$. Primero veamos que, en efecto, $g \in M$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 g(x) dx &= \int_{-1}^1 (f(x) + C_f) dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) dx + C_f \int_{-1}^1 dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) dx + 2C_f \\ &= \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_{-1}^1 f(y) dy \\ &= 0, \end{aligned}$$

por tanto $g \in M$. Ahora sea $h \in M$

$$\begin{aligned} (f - g, h) &= \int_{-1}^1 (f(x) - g(x))h(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 (f(x) - (f(x) + C_f))h(x) dx \\ &= C_f \int_{-1}^1 h(x) dx \\ &= C_f \cdot 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

de esta manera, $g = f + C_f = P_M f$.

(c) Note que,

$$g \in M \iff g(x) = 0 \text{ c.t.p } x \in (-1, 0) \iff \int_{-1}^0 |g(x)|^2 dx = 0,$$

además,

$$\int_{-1}^0 |g(x)|^2 dx = \int_{-1}^1 |g(x)|^2 \chi_{(-1,0)}(x) dx = \int_{-1}^1 |g(x) \chi_{(-1,0)}(x)|^2 dx = \|\chi_{(-1,0)} g\|_{L^2((-1,1))}^2.$$

de manera que $g \in M$ si y sólo si $\|\chi_{(-1,0)} g\|_{L^2((-1,1))} = 0$. Sea (f_n) una sucesión de funciones en M tal que $f_n \rightarrow f$, Note que

$$\begin{aligned} \|\chi_{(-1,0)} f_n - \chi_{(-1,0)} f\|_{L^2((-1,1))} &= \|\chi_{(-1,0)} (f_n - f)\|_{L^2((-1,1))} \\ &= \left(\int_{-1}^1 |\chi_{(-1,0)} (f_n(x) - f(x))|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{-1}^0 |f_n(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{-1}^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \|f_n - f\|_{L^2((-1,1))}, \end{aligned}$$

de manera que $\chi_{(-1,0)} f_n \rightarrow \chi_{(-1,0)} f$ en $L^2((-1,1))$. Para ver que $f \in M$ verificamos que $\|\chi_{(-1,0)} f\|_{L^2((-1,1))} = 0$. Sea $\varepsilon > 0$, existe N_ε tal que si $n \geq N$, entonces

$$\|\chi_{(-1,0)} f_n - \chi_{(-1,0)} f\|_{L^2((-1,1))} = \|\chi_{(-1,0)} (f_n - f)\|_{L^2((-1,1))} < \varepsilon,$$

Para $n \geq N_\varepsilon$ tenemos

$$\begin{aligned} \|\chi_{(-1,0)} f\|_{L^2((-1,1))} &= \|\chi_{(-1,0)} (f - f_n) + \chi_{(-1,0)} f_n\|_{L^2((-1,1))} \\ &\leq \|\chi_{(-1,0)} (f_n - f)\|_{L^2((-1,1))} + \|\chi_{(-1,0)} f_n\|_{L^2((-1,1))} \\ &= \|\chi_{(-1,0)} (f_n - f)\|_{L^2((-1,1))} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

de esta manera $\|\chi_{(-1,0)} f\|_{L^2((-1,1))} < \varepsilon$, y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, obtenemos que

$$\|\chi_{(-1,0)} f\|_{L^2((-1,1))} = 0,$$

de donde obtenemos que $f(x) = 0$ para casi todo $x \in (-1, 0)$ y por tanto, $f \in M$. Así, concluimos que M es cerrado.

Veamos ahora que M es un subespacio de $L^2((-1, 1))$. Sean $f, g \in M$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, sean

$$E_f = \{x \in (-1, 0) : f(x) \neq 0\}$$

$$E_g = \{x \in (-1, 0) : g(x) \neq 0\},$$

como $f, g \in M$, $\mu(E_f) = \mu(E_g) = 0$ y por tanto

$$0 \leq \mu(E_f \cup E_g) \leq \mu(E_f) + \mu(E_g) = 0 + 0 = 0,$$

es decir, $\mu(E_f \cup E_g) = 0$, entonces, para $x \in (-1, 0) \setminus (E_f \cup E_g)$, $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$, por tanto

$$f(x) + g(x) = 0 \text{ para todo } x \in (-1, 0) \setminus (E_f \cup E_g),$$

y como $\mu(E_f \cup E_g) = 0$, tenemos que $f + g \in M$. Si $x \in (-1, 0) \setminus E_f$, entonces $f(x) = 0$, por tanto

$$\alpha f(x) = \alpha \cdot 0 = 0 \text{ para todo } x \in (-1, 0) \setminus E_f,$$

nuevamente, como $\mu(E_f) = 0$, se tiene que $f \in M$. De esta manera, concluimos que M es un subespacio de $L^2((-1, 1))$.

Calculemos la proyección ortogonal P_M . Sea $f \in L^2((-1, 1))$, queremos encontrar $g \in M$ tal que $(f - g, h) = 0$ para toda $h \in M$. Tomemos $g = \chi_{[0, 1)} f$ y veamos que $g = P_M f$. Claramente $g(x) = 0$ para todo $x \in (-1, 0)$, por lo que $g \in M$. Sea $h \in M$, entonces

$$\begin{aligned} (f - g, h) &= \int_{-1}^1 (f(x) - \chi_{[0, 1)}(x)f(x))h(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \chi_{(-1, 0)}(x)f(x)h(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 f(x)h(x) dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

dado que $h(x) = 0$ para casi todo $x \in (-1, 0)$. Así, concluimos que $g = \chi_{[0, 1)} f = P_M f$.

(II) (a) Veamos que K es cerrado en $L^2(\Omega)$. Primero, note que

$$K = \left\{ f \in L^2(\Omega) : (f, 1) \geq 1 \right\}.$$

Como Ω es un abierto acotado, tenemos que $0 < \mu(\Omega) < \infty$, además

$$\|1\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |1|^2 dx \right)^{1/2} = (\mu(\Omega))^{1/2}.$$

Sea $g \in L^2(\Omega) \setminus K$, es decir, $\alpha := (g, 1) < 1$. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha + \varepsilon < 1$ y $\delta = \frac{\varepsilon}{(\mu(\Omega))^{1/2}}$. Consideremos $B = B(g, \delta)$, la bola en $L^2(\Omega)$ centrada en

g y de radio δ y sea $f \in B$, entonces $\|f - g\|_{L^2(\Omega)} < \delta$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y lo anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} (f, 1) &= (f - g, 1) + (g, 1) \\ &\leq \|f - g\|_{L^2(\Omega)} \|1\|_{L^2(\Omega)} + \alpha \\ &< \delta(\mu(\Omega))^{1/2} + \alpha \\ &= \frac{\varepsilon}{(\mu(\Omega))^{1/2}} (\mu(\Omega))^{1/2} + \alpha \\ &= \varepsilon + \alpha \\ &< 1, \end{aligned}$$

de manera que $(f, 1) < 1$ y así, $B \subset L^2(\Omega) \setminus K$. De esta manera, concluimos que K es cerrado en $L^2(\Omega)$.

Veamos que K es convexo. Sean $f, g \in K$ y $t \in [0, 1]$, entonces

$$\int_{\Omega} (tf(x) + (1-t)g(x)) dx = t \int_{\Omega} f(x) dx + (1-t) \int_{\Omega} g(x) dx \geq t + (1-t) = 1,$$

luego $tf + (1-t)g \in K$, concluyendo que K es convexo.

- (b) Procedemos a calcular P_K . Sea $f \in L^2(\Omega)$, queremos encontrar $g \in K$ tal que $(f - g; h - g) \leq 0$ para toda $h \in K$. Proponemos

$$g(x) = f(x) + \chi_{(-\infty, 1)}(C_f) \frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)},$$

donde

$$C_f = \int_{\Omega} f(y) dy.$$

Veamos que, en efecto, $g = P_K f$. Tenemos dos casos

- Si $f \in K$, tenemos que $C_f \geq 1$ y por tanto $\chi_{(-\infty, 1)}(C_f) = 0$, por tanto, $g = f$ y así, $g \in K$ y $(f - g, h - g) = (0, h - f) = 0 \leq 0$, es decir, $g = f = P_K f$.
- Si $f \notin K$, tenemos que $C_f < 1$, por tanto $\chi_{(-\infty, 1)}(C_f) = 1$. Veamos que $g \in K$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(x) dx &= \int_{\Omega} \left(f(x) + \chi_{(-\infty, 1)}(C_f) \frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)} \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(f(x) + \frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)} \right) dx \\ &= \int_{\Omega} f(x) dx + \frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} dx \\ &= C_f + (1 - C_f) \\ &= 1. \end{aligned}$$

por tanto, $g \in K$.

Note que, como $C_f < 1$, entonces $1 - C_f > 0$ y, por tanto, $\frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)} > 0$.
 Sea $h \in K$ cualquiera, entonces $C_h \geq 1$ y por tanto, $C_h - 1 \geq 0$

$$\begin{aligned}
 (f - g, h - g) &= \left(-\frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)}, h - f - \frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)} \right) \\
 &= -\frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)} \left(1, h - f - \frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)} \right) \\
 &= -\frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} \left(h(x) - f(x) - \frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)} \right) dx \\
 &= -\frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)} \left(\int_{\Omega} h(x) dx - \int_{\Omega} f(x) dx - \frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} dx \right) \\
 &= -\frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)} (C_h - C_f - (1 - C_f)) \\
 &= -\frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)} (C_h - 1) \\
 &\leq 0.
 \end{aligned}$$

de esta manera $g = P_K f$.

Así, podemos concluir que

$$(P_K f)(x) = f(x) + \chi_{(-\infty, 1)}(C_f) \frac{1 - C_f}{\mu(\Omega)}, \quad C_f = \int_{\Omega} f(y) dy.$$

□

Ejercicio 14. Sea H un espacio de Hilbert y $A \in L(H) = L(H, H)$ (el conjunto de funciones lineales continuas de H en H).

- (I) Para $y \in H$ fijo, muestre que el funcional $\Phi_y : H \rightarrow \mathbb{R}$ dado por (Ax, y) es lineal y continuo. Deduzca que existe un único elemento en H que denotaremos por A^*y , tal que

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \text{ para todo } x \in H.$$

- (II) Muestre que $A^* \in L(H)$. A^* se llama el adjunto de A .

- (III) Verifique que $(A^*)^* = A$ y $\|A^*\| = \|A\|$.

Demostración. (I) Veamos que Φ_y es lineal. Como H es de Hilbert, y usando que $A \in \mathcal{L}(H)$ se sigue que para todo $x, z \in H$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 \Phi_y(x + \lambda z) &= ((Ax + \lambda z), y) \\
 &= (Ax + \lambda Az, y) \\
 &= (Ax, y) + (\lambda Az, y) \\
 &= (Ax, y) + \lambda (Az, y) \\
 &= \Phi_y(x) + \lambda \Phi_y(z)
 \end{aligned}$$

Para ver que Φ_y es continuo, como $A \in \mathcal{L}(H)$, existe una constante $M \geq 0$ tal

que $\|Ax\| \leq M \|x\|$ para todo $x \in H$. Así, dado $x \in H$

$$\begin{aligned} |\Phi_y x| &= |(Ax, y)| \\ &\leq \|Ax\| \|y\| \\ &\leq M \|x\| \|y\|. \end{aligned}$$

con lo que se concluye que $\Phi_y \in H^*$.

Ahora, por el teorema de representación de Riesz, existe un único elemento en H , llámelo A^*y , tal que

$$\begin{aligned} (Ax, y) &= \langle \Phi_y, x \rangle \\ &= (A^*y, x) \\ &= (x, A^*y) \quad \forall x \in H. \end{aligned}$$

en donde en la última igualdad se usa que (\cdot, \cdot) es simétrico.

(II) Primero veamos que A^* es lineal. Para ello, dados $y, z \in H$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, queremos ver que

$$(x, A^*(\lambda y + z)) = (x, \lambda A^*y + A^*z) \quad \forall x \in H$$

Así, dado $x \in H$

$$\begin{aligned} (x, A^*(\lambda y + z)) &= (Ax, \lambda y + z) \\ &= \lambda(Ax, y) + (Ax, z) \\ &= \lambda(x, A^*y) + (x, A^*z) \\ &= (x, \lambda A^*y) + (x, A^*z) \\ &= (x, \lambda A^*y + A^*z) \end{aligned}$$

Por tanto, como

$$(x, A^*(\lambda y + z)) = (x, \lambda A^*y + A^*z) \quad \forall x \in H$$

entonces $A^*(\lambda y + z) = \lambda A^*y + A^*z$.

Veamos que A^* es continuo. Para esto, usaremos el Teorema del Gráfico cerrado. Con el fin de evitar confusiones en la notación, usaremos $(\cdot, \cdot)_H$ para denotar el producto interior de H , mientras que la notación de pareja ordenada $(\cdot, \cdot) \in H^2$ se mantiene igual.

Sea $(x, y) \in \overline{\mathcal{G}(A^*)}$. Luego existe una sucesión $\{(x_n, A^*x_n)\}$ en $\mathcal{G}(A^*)$ tal que

$$\begin{aligned} x_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \\ A^*x_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \end{aligned}$$

Sea $z \in H$, luego

$$(Az, x_n)_H = (z, A^*x_n)_H$$

Ahora, notemos que $(\cdot, \cdot)_H : H^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es continuo; pues dado $\{u_n\}, \{v_n\}$ sucesiones en H tales que

$$\begin{aligned} u_n &\longrightarrow u \\ v_n &\longrightarrow v \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} |(u_n, v_n)_H - (u, v)_H| &= |(u_n, v_n)_H - (u, v_n)_H + (u, v_n)_H - (u, v)_H| \\ &\leq |(u_n - u, v_n)_H| + |(u, v_n - v)_H| \\ &\leq \|u_n - u\| \|v_n\| + \|u\| \|v_n - v\| \end{aligned}$$

Y como dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que $\|u_n - u\| < \varepsilon$, $\|v_n - v\| < \varepsilon$, siempre que $n \geq N$. Además, como $\{v_n\}$ es acotada por ser convergente, existe $M > 0$ tal que $\|v_n\| \leq M \quad \forall n \geq 1$. Entonces

$$|(u_n, v_n)_H - (u, v)_H| < M\varepsilon + \|u\|\varepsilon$$

Y por tanto, $(\cdot, \cdot)_H$ es continuo. Usando esto y que

$$(Az, x_n)_H = (z, A^*x_n)_H$$

haciendo tender $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} (Az, x)_H &= (z, y)_H \\ (z, A^*x)_H &= (z, y)_H \\ (z, A^*x - y) &= 0 \end{aligned}$$

Como esto ocurre para cualquier $z \in H$,

$$A^*x = y$$

de modo que $(x, y) = (x, A^*x) \in \mathcal{G}(A^*)$ y por tanto, $\mathcal{G}(A^*)$ es cerrado, con lo cual concluimos que A^* es continuo y así, $A^* \in \mathcal{L}(H)$.

(III) Sea $y \in H$. Así:

$$\begin{aligned} (((A^*)^* - A)y, x) &= ((A^*)^*y - Ay, x) \\ &= ((A^*)^*y, x) - (Ay, x) \\ &= (x, (A^*)^*y) - (Ay, x) \\ &= (A^*x, y) - (y, A^*x) \\ &= (A^*x, y) - (A^*x, y) = 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in H$. Por tanto, $(A^*)^*y = Ay$. Pero como $y \in H$ es arbitrario, $(A^*)^* = A$.

Finalmente, mostremos que $\|A^*\| \leq \|A\|$ y $\|A\| \leq \|A^*\|$.

✓ $\|A^*\| \leq \|A\|$: Sea $x \in H$, con $\|x\| = 1$. Así

$$\begin{aligned}(A^*x, A^*x) &= (AA^*x, x) \\ &\leq \|AA^*x\| \|x\| \\ &\leq \|A\| \|A^*x\|\end{aligned}$$

Como $(A^*x, A^*x) = \|A^*x\|^2$, se sigue que

$$\|A^*x\| \leq \|A\|$$

pues en el caso que $\|A^*x\| = 0$, la desigualdad se tiene trivialmente. De esta forma

$$\|A^*\| = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} \|A^*x\| \leq \|A\|$$

✓ $\|A\| \leq \|A^*\|$: Por lo hecho en la primera parte, $A = (A^*)^*$. Así (y usando lo probado anteriormente)

$$\|A\| = \|(A^*)^*\| \leq \|A^*\|.$$

Por lo tanto, $\|A\| = \|A^*\|$

□

Ejercicio 15. Sea H un espacio de Hilbert y $M \subseteq H$ un subespacio cerrado. Considere la proyección ortogonal P_M . Muestre que

- (I) P_M es lineal.
- (II) $P_M^2 = P_M$.
- (III) $P_M^* = P_M$, donde P_M^* denota el operador adjunto de P_M .
- (IV) $\text{Rango}(P_M) = M$ y $\text{Kernel}(P_M) = M^\perp$.
- (V) Suponga que $P \in L(H)$. Entonces P es la proyección sobre un subespacio cerrado si y sólo si $P = P^2 = P^*$.

Demostración. (I) Veamos que P_M es lineal, note que como M es un subespacio cerrado, sabemos que dado un $f \in H$ existe un único $u \in M$ tal que

$$\|f - u\| = \min_{v \in M} \|f - v\| = \text{dist}(f, M).$$

más aún

$$(f - u, v) = 0 \quad \text{para todo } v \in M.$$

Siendo así, suponga $f, g \in H$ y λ escalar, entonces sabemos que existen $u_1, u_2 \in M$ tales que

$$\begin{aligned}(f - u_1, v) &= 0, \\ (g - u_2, v) &= 0\end{aligned} \quad \text{para todo } v \in M.$$

Luego se puede inferir usando la linealidad del producto interno que

$$0 = (f - u_1, v) + \lambda(g - u_2, v) = (f + \lambda g - (u_1 + \lambda u_2), v) \quad \text{para todo } v \in M.$$

De lo que se concluye que si $P_M(f) = u_1$, $P_M(g) = u_2$, entonces $P_M(f + \lambda g) = P_M(f) + \lambda P_M(g)$, es decir, el operador proyección ortogonal P_M es un operador lineal.

- (II) Note que dado $f \in H$, entonces existe un único $u \in M$ tal que $P_M(f) = u \in M$, además, como $u \in M$, entonces $P_M(u) = u$, ya que

$$(u - u, v) = (0, v) = 0 \quad \text{para todo } v \in M.$$

De lo que se concluye que

$$\begin{aligned} P_M^2(f) &= P_M(P_M(f)), \\ &= P_M(u), \\ &= u, \\ &= P_M(f). \end{aligned}$$

Lo que concluye el resultado.

- (III) como H es un espacio de Hilbert y $P_M : H \rightarrow H$, entonces por el teorema de representación de Riesz sabemos que el operador P_M^* cumple que dados $x, y \in H$ se satisface que

$$(P_M(x), y) = (x, P_M^*(y)).$$

Ahora, note que x se puede reescribir como $x = P_M(x) + (x - P_M(x))$ y de forma similar $y = P_M(y) + (y - P_M(y))$, en dónde $P_M(x), P_M(y) \in M$ y $(x - P_M(x)), (y - P_M(y)) \in M^\perp$ de lo que usando la linealidad del producto interno y la ortogonalidad se puede concluir que

$$\begin{aligned} (P_M(x), y) &= (P_M(x), P_M(y) + y - P_M(y)), \\ &= (P_M(x), P_M(y)) + (P_M(x), y - P_M(y)), \\ &= (P_M(x), P_M(y)), \\ &= (P_M(x), P_M(y)) + (x - P_M(x), P_M(y)), \\ &= (P_M(x) + x - P_M(x), P_M(y)), \\ &= (x, P_M(y)). \end{aligned}$$

De lo que se puede concluir que $P_M^* = P_M$.

- (IV) Note que para todo $x \in M$ se cumple que $P_M(x) = x$, por lo que se sabe que $M \subseteq \text{Rango}(P_M)$, pero por otro lado dado $y \in H$ sabemos que por ser M un subespacio cerrado, entonces $P_M(y) \in M$, por lo que se afirma que $\text{Rango}(P_M) \subseteq M$, lo que concluye que $\text{Rango}(P_M) = M$. Por otro lado note que dado $x \in H$ se

cumple que $x \in \text{Kernel}(P_M)$ sí y sólo si se satisface que $P_M(x) = 0$, lo que por definición es

$$\begin{aligned}(x - 0, v) &= (x, v), \\ &= 0\end{aligned}\quad \text{para todo } v \in M.$$

que solo es verdadero si y sólo si $x \in M^\perp$, lo que nos permite concluir que $\text{Kernel}(P_M) = M^\perp$.

(V) Note que por (I), (II) y (III) ya se tiene que si $P \in L(H)$ y P es la proyección sobre un espacio cerrado, entonces $P = P^2 = P^*$.

Por otro lado suponga que $P \in L(H)$ y que se cumple que $P = P^2 = P^*$, luego definamos el conjunto $M = \text{Rango}(P)$, por otro lado note que como $P = P^*$

$$\begin{aligned}\text{Kernel}(P) &= \{x \in H : (P(x), z) = 0 \text{ para todo } z \in H.\}, \\ &= \{x \in H : (x, P(z)) = 0 \text{ para todo } z \in H.\}, \\ &= \{x \in H : (x, y) = 0 \text{ para todo } y = P(z) \text{ para algún } z \in H.\}, \\ &= \text{Rango}(P)^\perp = M^\perp.\end{aligned}$$

Además, note que como el $\text{Rango}(P) = M$, entonces dados $x, y \in M$ existen $u, v \in H$ tales que $P(u) = x$ y $P(v) = y$, luego como $P^2 = P$, entonces $x = P^2(u) = P(P(u)) = P(x)$, de igual forma se puede concluir que $P(y) = y$, luego como P es lineal, entonces dado λ escalar se cumple que $P(x + \lambda y) = x + \lambda y$, de lo que se puede concluir que $x + \lambda y \in M$, es decir que M es un subespacio de H . Por otro lado como $P \in L(H)$, entonces P es acotado, luego como H es espacio de Hilbert, sabemos que este es completo, es decir que dada $\{x_n\} \subset H$ sucesión de Cauchy, sabemos que $x_n \rightarrow x$ con $x \in H$, luego $\{P(x_n)\}$ también es sucesión de Cauchy, ya que dado $\epsilon > 0$ existe N tal que si $n, m > N$, entonces $\frac{\|x_n - x_m\|}{\|P\|} < \epsilon$ y por ende

$$\begin{aligned}\|P(x_n) - P(x_m)\| &= \|P(x_n - x_m)\|, \\ &\leq \|P\| \|x_n - x_m\|, \\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

Luego note que $P(x_n) \rightarrow P(x)$, ya que P es un operador continuo (acotado), luego como $M = \text{Rango}(P)$ toda sucesión de Cauchy en M se puede ver como imagen de una sucesión de Cauchy en H , lo que nos permite concluir que M es un espacio cerrado.

Por último, note que dado $x \in H$ se puede verificar que si $x \in M$, entonces

$$\begin{aligned}(x - P(x), v) &= (x - x, v), \\ &= (0, v), \\ &= 0\end{aligned}\quad \text{para todo } v \in M.$$

Y si $x \notin M$, entonces $x - P(x) \in \text{Kernel}(P)$ ya que

$$\begin{aligned} P(x - P(x)) &= P(x) - P^2(x), \\ &= P(x) - P(x), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pero como $\text{Kernel}(P) = \text{Rango}(P)^\perp$, entonces sabemos que

$$(x - P(x), v) = 0 \quad \text{para todo } v \in M.$$

Lo que concluye que P es el operador proyección ortogonal sobre un espacio cerrado M , lo que da por finalizado el ejercicio. □

0.2 Operadores Compactos y Teorema Espectral

Ejercicio 3. Considere los operadores de desplazamiento $S_r, S_l \in L(\ell^2)$, donde si $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2$, estos se definen como

$$S_r x := (0, x_1, x_2, x_3, \dots),$$

y

$$S_l x = (x_2, x_3, x_4, \dots).$$

S_r se conoce como el desplazamiento a derecha y S_l como el desplazamiento a izquierda.

- Determinar las normas $\|S_r\|$ y $\|S_l\|$.
- Muestre que $\text{EV}(S_r) = \emptyset$.
- Muestre que $\sigma(S_r) = [-1, 1]$.
- Muestre que $\text{EV}(S_l) = (-1, 1)$. Encuentre el subespacio propio correspondiente.
- Muestre que $\sigma(S_l) = [-1, 1]$.
- Determine los adjuntos S_r^* y S_l^* .

Demostración. (a) Calculemos $\|S_r\|$ y $\|S_l\|$:

$$\blacksquare \quad \|S_r\| = \sup_{\substack{x \in \ell^2 \\ \|x\|=1}} \|S_r x\|$$

Sea $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2$ tal que $\|x\| = 1$. Entonces $\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{1/2} = 1$. Como

$$S_r x = (0, x_1, x_2, \dots), \text{ entonces } \|S_r x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{1/2} = 1. \text{ Así, } \|S_r\| = 1.$$

$$\blacksquare \quad \|S_l\| = \sup_{\substack{x \in \ell^2 \\ \|x\|=1}} \|S_l x\|$$

Sea $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2$ tal que $\|x\| = 1$. Entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{1/2} = 1$$

Como $S_1 x = (x_2, x_3, \dots)$, entonces

$$\|S_1 x\| = \left(\sum_{i=2}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{1/2} \leq 1.$$

Ahora, considere $y = (0, 1, 0, 0, \dots, 0)$. $y \in \ell^2$ y además, $\|y\| = 1$. Por otro lado, $S_1 y = (1, 0, 0, \dots, 0)$. De modo que $\|S_1 y\| = 1$. Con lo anterior, se tiene entonces que $\|S_1\| = 1$.

(b) Por contradicción, si existiera $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$N(S_r - \lambda I) \neq \{0\}.$$

Entonces existiría $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2$ no nulo, tal que

$$\begin{aligned} (S_r - \lambda I)x &= (0, 0, \dots) \\ (-\lambda x_1, x_1 - \lambda x_2, x_2 - \lambda x_3, \dots) &= (0, 0, \dots) \end{aligned}$$

■ Si $\lambda = 0$, entonces

$$(-\lambda x_1, x_1 - \lambda x_2, x_2 - \lambda x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots) = (0, 0, \dots),$$

por lo que $x_n = 0 \forall n \geq 1$.

■ Si $\lambda \neq 0$, se tiene que $-\lambda x_1 = 0$ lo que implica que $x_1 = 0$. Luego

$$\begin{aligned} x_1 - \lambda x_2 &= 0 \\ x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, por inducción, si $x_n = 0$, entonces se tiene que $x_n - \lambda x_{n+1} = 0$ lo que implica que $x_{n+1} = 0$. Por lo tanto, $x_n = 0 \forall n \geq 1$.

En cualquier caso, se tiene una contradicción, por lo que $EV(S_r) = \emptyset$.

(c) Por la proposición 8.3.1 del libro "Functional Analysis" de Kesavan:

Teorema 0.1 (Proposición 8.3.1). Sea H espacio de Hilbert y $T \in L(H)$. Entonces $\lambda \in \sigma(T)$ si y sólo si $\bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$.

En nuestro caso, como $\lambda \in \mathbb{R}$, $S_r \in L(\ell^2)$ y ℓ^2 es de Hilbert, tenemos que $\lambda \in \sigma(S_r)$ si y sólo si $\lambda \in \sigma(S_r^*)$.

Ahora, por lo desarrollado en el ítem (f), tenemos que $S_r^* = S_l$ y por lo hecho en el ítem (e), $\sigma(S_l) = [-1, 1]$. Por lo tanto,

$$\sigma(S_r) = \sigma(S_r^*) = \sigma(S_l) = [-1, 1].$$

- (d) Como $\lambda \in \text{EV}(S_l)$ si y sólo si $N(S_l - \lambda I) \neq \{0\}$.
 Esto es, existe $x = (x_1, x_2, \dots) \in l^2$ con x no nulo tal que

$$\begin{aligned} S_l x &= \lambda x \\ (x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n, \dots). \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} x_2 &= \lambda x_1 \\ x_3 &= \lambda x_2 = \lambda^2 x_1 \end{aligned}$$

y en general

$$x_{n+1} = \lambda^n x_1 \quad \forall n \geq 1$$

Luego $x \in l^2$ si y sólo si

$$\sum_{i=0}^{\infty} (\lambda^i x_1)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} x_1^2 (\lambda^2)^i \quad \text{converge.}$$

Esto ocurre si y sólo si $|\lambda^2| < 1$, es decir, cuando $\lambda \in (-1, 1)$.

Ahora calculamos el espacio propio correspondiente. Como

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, \lambda x_1, \lambda^2 x_1, \dots, \lambda^n x_1, \dots) = x_1 (1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n, \dots).$$

Luego el espacio propio correspondiente es

$$\text{gen}\{(1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n, \dots)\}.$$

- (e) Veamos que $\sigma(S_l) = [-1, 1]$. Como $\|S_l\| = 1$, sabemos que $\sigma(S_l) \subseteq [-1, 1]$. Además $\sigma(S_l)$ es compacto. Por otro lado, usando lo desarrollado en el ítem anterior, $\text{EV}(S_l) = (-1, 1)$, de modo que $(-1, 1) \subseteq \sigma(S_l)$. De esto se sigue que

$$(-1, 1) \subseteq \sigma(S_l) \subseteq [-1, 1].$$

Como $\sigma(S_l)$ es compacto, entonces $\sigma(S_l) = [-1, 1]$.

- (f) Calculemos S_r^* .

Sea $x \in l^2$, donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$. Como l^2 es de Hilbert, sabemos que $S_r^* \in L(l^2)$ donde

$$(S_r y, x) = (y, S_r^* x) \quad \forall y \in l^2,$$

donde notamos $S_r^* x = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \dots)$.

En particular, consideremos los canónicos e_n donde $(e_n)_k = \delta_{nk}$ (es decir, 0 en la posición k si $k \neq n$ y 1 en la posición n). Luego

$$\begin{aligned} (S_r e_n, x) &= (e_n, S_r^* x) \\ x_{n+1} &= x_n^*. \end{aligned}$$

variando n , tenemos que $x_{n+1} = x_n^* \quad \forall n \geq 1$. Es decir que

$$S_r^* x = (x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots) = S_l x.$$

Por lo tanto, $S_r^* = S_l$.

Ahora, calculemos S_l^* . Como l^2 es de Hilbert, sabemos por el ejercicio 14 del presente taller que

$$(S_r^*)^* = S_r.$$

De este modo, usando que $S_r^* = S_l$, se sigue que

$$S_l^* = (S_r^*)^* = S_r.$$

Entonces $S_l^* = S_r$. □

Ejercicio 4. Sea $1 \leq p < \infty$ y consideremos el espacio $L^p((0, 1))$. Dado $u \in L^p((0, 1))$, definimos

$$Tu(x) = \int_0^x u(t) dt.$$

- (a) Demuestre que $T \in \mathcal{K}(L^p((0, 1)))$.
- (b) Determine $EV(T)$ y $\sigma(T)$.
- (c) Dé una fórmula explícita para $(T - \lambda I)^{-1}$ cuando $\lambda \in \rho(T)$.
- (d) Determine T^* .

Demostración. (a) Veamos primero que $T \in \mathcal{L}(L^p((0, 1)))$. Por simplicidad, denotaremos $\|\cdot\|_{L^p((0, 1))} = \|\cdot\|_p$. Es claro que T es un operador lineal, además, dada $u \in L^p((0, 1))$, por la desigualdad de Hölder

$$\|u\|_1 = \int_0^1 |u(t)| dt \leq \|1\|_p \|u\|_p = \left(\int_0^1 1^{p'} dt \right)^{1/p'} \|u\|_p = \|u\|_p,$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. De esta manera

$$\begin{aligned} \|Tu\|_p &= \left(\int_0^1 |Tu(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^1 \left| \int_0^x u(t) dt \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |u(t)| dt \right)^p dx \right)^{1/p} \\ &= \int_0^1 |u(t)| dt \\ &= \|u\|_1 \\ &\leq \|u\|_p. \end{aligned}$$

de manera que T es acotado y $\|T\| \leq 1$. Veamos ahora que $T \in \mathcal{K}(L^p((0, 1)))$. Sea

$$B = \left\{ f \in L^p((0, 1)) : \|f\|_p \leq 1 \right\}.$$

Queremos ver que $\overline{T(B)}$ es compacto en $L^p((0, 1))$, para esto, vamos a usar el siguiente resultado.

Para aplicar el teorema anterior, claramente vamos a tomar

$\Omega = (0, 1)$ y $\mathcal{F} = T(B)$. Sea $h \in \mathbb{R}$ con $|h| < 1$. Para no tener problemas con las expresiones

$$Tu(x+h) = \int_0^{x+h} u(t) dt,$$

dado que, en principio, las funciones en $L^p((0, 1))$ están definidas únicamente en $(0, 1)$, veremos estas funciones como “extendidas” fuera del intervalo $(0, 1)$ por la función nula, es decir, si $f \in L^p((0, 1))$, entonces consideramos la función \tilde{f} definida en todo \mathbb{R} (aunque en la práctica denotaremos por f)

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in (0, 1), \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus (0, 1). \end{cases}$$

Sea $f \in T(B)$, por definición, existe $u \in B$ tal que $Tu = f$. Tenemos dos casos

- Si $h \leq 0$

$$\begin{aligned} \|\tau_h f - f\|_p &= \left(\int_0^1 |\tau_h f(x) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^1 |\tau_h Tu(x) - Tu(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^1 \left| \int_0^{x+h} u(t) dt - \int_0^x u(t) dt \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^1 \left| \int_0^{x+h} u(t) dt - \int_0^{x+h} u(t) dt - \int_{x+h}^x u(t) dt \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^1 \left| \int_{x+h}^x u(t) dt \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_0^1 \left(\int_{x+h}^x |u(t)| dt \right)^p dx \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

Ahora, por la desigualdad de Hölder y usando que $u \in B$, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$,

$$\begin{aligned} \int_{x+h}^x |u(t)| dt &= \int_0^1 \chi_{(x+h,x)}(t) |u(t)| dt \\ &\leq \|\chi_{(x+h,x)}\|_{p'} \|u\|_p \\ &= \left(\int_{x+h}^x dt \right)^{1/p'} \\ &= (-h)^{1/p'} \\ &= |h|^{1/p'}, \end{aligned}$$

de manera que

$$\|\tau_h f - f\|_p \leq \left(\int_0^1 \left(\int_{x+h}^x |u(t)| dt \right)^p dx \right)^{1/p} \leq \left(|h|^{p/p'} \right)^{1/p} = |h|^{1/p'},$$

por tanto, $0 \leq \lim_{|h| \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_p \leq \lim_{|h| \rightarrow 0} |h|^{1/p'} = 0$, para toda $f \in T(B)$.

- Si $h \geq 0$, análogamente al caso anterior (nos saltaremos algunos pasos que son análogos)

$$\|\tau_h f - f\|_p = \left(\int_0^1 \left| \int_x^{x+h} u(t) dt \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 \left(\int_x^{x+h} |u(t)| dt \right)^p dx \right)^{1/p},$$

de la misma manera, por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} \int_x^{x+h} |u(t)| dt &= \int_0^1 \chi_{(x,x+h)}(t) |u(t)| dt \\ &\leq \|\chi_{(x,x+h)}\|_{p'} \|u\|_p \\ &= h^{1/p'} \\ &= |h|^{1/p'}, \end{aligned}$$

por tanto

$$\|\tau_h f - f\|_p \leq |h|^{1/p'},$$

y nuevamente obtenemos $0 \leq \lim_{|h| \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_p \leq \lim_{|h| \rightarrow 0} |h|^{1/p'} = 0$, para toda $f \in T(B)$.

De esta manera, estamos en las hipótesis del Teorema enunciado anteriormente, por lo que podemos concluir que $T(B)$ tiene clausura compacta en $L^p((0, 1))$, es decir, $\overline{T(B)}$ es compacto, concluyendo que T es un operador compacto.

- (b) Como T es compacto, sabemos que $0 \in \sigma(T)$ y $\sigma(T) \setminus \{0\} = EV \setminus \{0\}$. Sea $\lambda \neq 0$, primero, recordemos que si $u \in L^p((0, 1))$, entonces $u \in L^1((0, 1))$, por tanto, por el Teorema de Diferenciación de Lebesgue

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(y) dy = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \left(\int_0^{x+h} f(y) dy - \int_0^{x-h} f(y) dy \right) = f(x),$$

para casi todo $x \in (0, 1)$ (para ser más rigurosos, la expresión integral vale cuando $h > 0$, pero es análogo cuando $h < 0$ pero queda la integral con límites desde $x + h$ hasta $x - h$), es decir, la función

$$Tf(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

es derivable en casi todo $x \in (0, 1)$, para toda $f \in L^p((0, 1))$. Supongamos que $u \in L^p((0, 1))$ con $u \neq 0$ es tal que $Tu = \lambda u$. Por la observación anterior, tenemos que u es derivable en casi toda parte, por tanto

$$\begin{aligned} Tu(x) &= \int_0^x u(t) dt = \lambda u(x) \\ \implies u(x) &= \lambda u'(x), \end{aligned}$$

además, podemos extender u de manera continua a $[0, 1)$ por $u(0) = 0$, dado que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x u(t) dt = 0,$$

así, estamos buscando solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{\lambda} u \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

en $[0, 1)$. Podemos ver que la solución general de la ecuación diferencial asociada al problema es

$$u(x) = Ce^{\frac{x}{\lambda}},$$

con $C \in \mathbb{R}$, y como $u(0) = 0$, se debe tener que $C = 0$, concluyendo que $u = 0$, pero en un principio supusimos que $u \neq 0$, lo cuál es una contradicción. De manera $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \rho(T)$, de manera que $EV(T) = \emptyset$ y $\sigma(T) = \{0\}$.

- (c) Sea $\lambda \neq 0$ y $u \in L^p((0, 1))$. Supongamos que $(T - \lambda I)u = Tu - \lambda u = f$ con $f \in L^p((0, 1))$. Sea

$$v(x) = \int_0^x u(t) dt = Tu(x).$$

Análogamente a lo hecho en el ítem anterior, tenemos que v es diferenciable en casi toda parte y $v' = u$ para casi todo $x \in (0, 1)$. Además, podemos extender a

v por $v(0) = 0$, de manera que la ecuación $Tu - \lambda u = f$ nos lleva al problema de Cauchy

$$\begin{cases} v - \lambda v' = f \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

La única solución de este problema está dada por

$$v(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{\frac{x}{\lambda}} \int_0^x e^{-\frac{t}{\lambda}} f(t) dt,$$

y nuevamente, como $f \in L^p((0, 1))$ y $e^{-t/\lambda} \in C^\infty((0, 1)) \cap L^\infty((0, 1))$, la función $e^{-\frac{t}{\lambda}} f(t) \in L^1((0, 1))$ y el Teorema de Diferenciación de Lebesgue nos garantiza que la función

$$g(x) = \int_0^x e^{-\frac{t}{\lambda}} f(t) dt,$$

es derivable en casi toda parte y $g'(x) = e^{-\frac{x}{\lambda}} f(x)$ en los puntos en donde la derivada tiene sentido, de manera que, usando la regla de Leibniz

$$v'(x) = u(x) = -\frac{1}{\lambda^2} e^{\frac{x}{\lambda}} \int_0^x e^{-\frac{t}{\lambda}} f(t) dt - \frac{1}{\lambda} f(x).$$

Como $(T - \lambda I)u = f$, entonces $u = (T - \lambda I)^{-1}f$, de manera que

$$(T - \lambda I)^{-1}f(x) = -\frac{1}{\lambda^2} e^{\frac{x}{\lambda}} \int_0^x e^{-\frac{t}{\lambda}} f(t) dt - \frac{1}{\lambda} f(x).$$

(d) Por definición, tenemos

$$\begin{aligned} T^* : (L^p((0, 1)))^* &\longrightarrow (L^p((0, 1)))^* \\ \xi &\longmapsto T^*\xi : L^p((0, 1)) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \langle T^*\xi; f \rangle := \langle \xi; Tf \rangle. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Representación de Riesz, dado $\xi \in (L^p((0, 1)))^*$, existe una única $g_\xi \in L^{p'}((0, 1))$ tal que

$$\langle \xi; h \rangle = \int_0^1 g_\xi(x) h(x) dx,$$

para toda $h \in L^p((0, 1))$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. De manera Análoga, como

$T^*\xi \in (L^p((0, 1)))^*$, existe una única $G_\xi \in L^{p'}((0, 1))$, cumpliendo la misma relación con p , tal que

$$\langle T^*\xi; h \rangle = \int_0^1 G_\xi(x) h(x) dx,$$

De esta manera, por la definición del operador adjunto T^* , dada $f \in L^p((0, 1))$ se tiene

$$\langle T^* \xi; f \rangle = \int_0^1 G_\xi(x) f(x) dx = \int_0^1 g_\xi(x) T f(x) dx = \langle \xi; T f \rangle,$$

por definición y usando el Teorema de Fubini, dado que f es arbitraria, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_\xi(x) T f(x) dx &= \int_0^1 g_\xi(x) \int_0^x f(t) dt dx \\ &= \int_0^1 \int_0^x g_\xi(x) f(t) dt dx \\ &= \int_0^1 \int_t^1 g_\xi(x) f(t) dx dt \\ &= \int_0^1 f(t) \int_t^1 g_\xi(x) dx dt. \end{aligned}$$

de manera que

$$G_\xi(t) = \int_t^1 g_\xi(x) dx = \int_0^1 g_\xi(x) \chi_{(t,1)}(x) dx = \langle \xi; \chi_{(t,1)} \rangle,$$

así,

$$\langle T^* \xi; f \rangle = \int_0^1 \langle \xi; \chi_{(x,1)} \rangle f(x) dx.$$

□

Ejercicio 6. Considere $g \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ (es decir, g es continua y acotada). Definimos el operador de multiplicación $M_g : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ dado por

$$M_g(f)(x) = g(x)f(x).$$

(a) Muestre que $\sigma(M_g) = \overline{\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}}$.

(b) ¿Es el operador M_g compacto?

Demostración. (a) Veamos que $\sigma(M_g) = \overline{\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}}$.

Primero note que como $g \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, entonces sabemos que existen $M, m \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} g(M) &= \max_{x \in \mathbb{R}} g(x), \\ g(m) &= \min_{x \in \mathbb{R}} g(x). \end{aligned}$$

Por otro lado note que como $L^2(\mathbb{R})$ es un espacio de Hilbert

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{u \in L^2(\mathbb{R}) \\ \|u\|=1}} (M_g(u), u) &= \inf_{\substack{u \in L^2(\mathbb{R}) \\ \|u\|=1}} \int_{-\infty}^{\infty} M_g(u)(x) u(x) dx, \\ &= \inf_{\substack{u \in L^2(\mathbb{R}) \\ \|u\|=1}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) u^2(x) dx, \\ &= \inf_{x \in \mathbb{R}} g(x) \|u\|_2^2, \\ &= \min_{x \in \mathbb{R}} g(x), \\ &= g(m). \end{aligned}$$

Análogamente

$$\sup_{\substack{u \in L^2(\mathbb{R}) \\ \|u\|=1}} (M_g(u), u) = g(M).$$

Además de esto, sabemos que el operador M_g es un operador lineal acotado, pues dada $f, h \in L^2(\mathbb{R})$ y λ escalar se cumple que

$$\begin{aligned} \|M_g(f + \lambda h)\|_2 &= \|g(f + \lambda h)\|_2, \\ &= \|gf + \lambda gh\|_2, \\ &\leq \|gf\|_2 + |\lambda| \|gh\|_2, \\ &= \|g(x)\|_{\infty} \|f(x)\|_2 + |\lambda| \|g\|_{\infty} \|h\|_2. \end{aligned}$$

Luego sabemos que

$$\begin{aligned} (M_g(f), h) &= \int_{-\infty}^{\infty} M_g(f)(x) h(x) dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) h(x) dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) h(x) dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) M_g(h)(x) dx, \\ &= (f, M_g h). \end{aligned}$$

De lo que se concluye que M_g es un operador lineal, acotado y autoadjunto, por lo que podemos afirmar que

$$\sigma(M_g) \subseteq [g(m), g(M)] = \overline{\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}}.$$

Ahora veamos que dado $\lambda \in [g(m), g(M)]$, entonces $\lambda \in \sigma(M_g)$.

Para esto veamos que el operador $(M_g - \lambda I)$ no es biyectivo de $L^2(\mathbb{R})$ a $L^2(\mathbb{R})$.

Note que como g es continua y $\lambda \in [g(m), g(M)]$, entonces existe un valor $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(c) = \lambda$, entonces note que dado $\epsilon > 0$ se puede construir $h(x) = \chi_{[c-\epsilon, c+\epsilon]}(x) \in L^2(\mathbb{R})$, veamos que no existe $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $(M_g - \lambda I)(f) = h$,

ya que

$$\begin{aligned}(M_g - \lambda I)f &= h, \\ M_g(f) - \lambda I(f) &= h, \\ g(x)f(x) - \lambda f(x) &= h(x), \\ f(x)(g(x) - \lambda) &= h(x), \\ f(x) &= \frac{h(x)}{g(x) - \lambda}.\end{aligned}$$

Luego

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{g(x) - \lambda}, & \text{si } x \in [c - \epsilon, c + \epsilon], \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Luego como g es continua, $c \in [c - \epsilon, c + \epsilon]$, entonces $f(x)$ tiene una singularidad no removible en c y por ende $f \notin L^2(\mathbb{R})$, lo que nos permite concluir que dado $\lambda \in \overline{\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}}$ entonces el operador $(M_g - \lambda I)$ no es sobreyectivo y por ende no es biyectivo, lo que a su vez concluye que $\lambda \in \sigma(M_g)$.

(b) **Parcialmente No.**

Note que si $g(x) = 0$, entonces M_g es un operador compacto, ya que $M_g(B_{L^2}) = \{0\}$ el cual es compacto.

De lo contrario, note que podemos razonar por contradicción, suponga que M_g es un operador compacto, entonces como $\dim(L^2(\mathbb{R})) = \infty$, entonces

- a) $0 \in \sigma(M_g)$.
- b) $\sigma(M_g) \setminus \{0\} = \overline{\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}} \setminus \{0\}$ es un conjunto finito (lo cual solo sucede si $g(x) = c$, como ya suponemos que $c \neq 0$, entonces no se puede dar, ya que $0 \notin \sigma(M_g)$).
- c) $\sigma(M_g) \setminus \{0\}$ es un conjunto enumerable y una secuencia convergente a 0, pero note que $\sigma(M_g) \setminus \{0\} = [g(m), g(M)] \setminus \{0\}$, pero note que como $\sigma(M_g) = [g(m), g(M)]$ es un intervalo cerrado, $|\sigma(M_g) \setminus \{0\}| = 2^{\aleph_0}$.

En cualquiera de los casos se llega a una contradicción, lo que nos permite afirmar que M_g no es un operador compacto si $g \neq 0$.

□