

# Sobre la función maximal de Hardy-Littlewood en espacios de Sobolev

Andrés David Cadena Simons    Oscar Riaño

Semillero de Análisis Armónico y Ecuaciones Diferenciales Parciales, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia



## Conceptos y definiciones

### Función de distribución

Sea  $(X, \mu)$  un espacio de medida y sea  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  una función medible. Se llama función de distribución de  $f$  asociada a  $\mu$  a la función:

$$a_f : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty] \\ \lambda \mapsto \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})$$

### Desigualdades débiles y fuertes

Sean  $(X, \mu)$  y  $(Y, \nu)$  dos espacios de medida y sea  $T$  un operador de  $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ , en el espacio de funciones medibles de  $Y$  en  $\mathbb{C}$ .

$$T : \mathcal{L}^p(X, \mu) \rightarrow \mathcal{M}(Y, \mathbb{C})$$

i. Se dice que  $T$  es  $(p, q)$ -débil (con  $q < \infty$ ) si para todo  $\lambda > 0$  existe  $C > 0$  tal que:

$$\nu(\{y \in Y : |(Tf)(y)| > \lambda\}) \leq \left( \frac{C \|f\|_p}{\lambda} \right)^q.$$

ii. Se dice que  $T$  es  $(p, \infty)$ -débil si está acotado de  $\mathcal{L}^p(X, \mu)$  en  $\mathcal{L}^\infty(Y, \nu)$ .

iii. Se dice que  $T$  es  $(p, q)$ -fuerte si está acotado de  $\mathcal{L}^p(X, \mu)$  en  $\mathcal{L}^q(Y, \nu)$ .

### Función Maximal de Hardy-Littlewood

Sea  $B_r$  la bola euclídea centrada en el origen y de radio  $r$ . Definiremos la función maximal de Hardy-Littlewood de una función localmente integrable  $f$  en  $\mathbb{R}^n$  como:

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f(x-y)| dy$$

### Espacios de Sobolev

Dado  $1 \leq p \leq \infty$ . Recordamos que el *espacio de Sobolev*  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  comprende todas las funciones  $f \in \mathcal{L}^p$  tales que  $f$  tiene gradiente débil y  $\nabla f \in \mathcal{L}^p$ . A este espacio se le asigna la norma

$$\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_{L^p} + \|\nabla f\|_{L^p}.$$

## Resultados

**Teorema (Teorema de interpolación de Marcinkiewicz).** Sean  $(X, \mu)$  y  $(Y, \nu)$  espacios medibles,  $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ , y tome  $T$  como un operador sublineal de  $L^{p_0}(X, \mu) + L^{p_1}(X, \mu)$  a las funciones de medida de  $Y$  que es débil  $(p_0, p_0)$  y es débil  $(p_1, p_1)$ . Entonces  $T$  es fuerte  $(p, p)$  para  $p_0 < p < p_1$ .

#### Algunas consecuencias:

La función maximal establece un operador fuerte  $(\infty, \infty)$ . Para ver esto, sea  $f \in \mathcal{L}^\infty$ , entonces para  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $r > 0$  arbitrarios se tiene

$$\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f(x-y)| dy \leq \|f\|_\infty.$$

Luego tomando el supremo en  $r > 0$ , tenemos  $\mathcal{M}f(x) \leq \|f\|_\infty$ . Ahora, como  $x \in \mathbb{R}^N$  es arbitrario, se deduce que

$$\|\mathcal{M}f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Luego  $\mathcal{M}$  define un operador  $(\infty, \infty)$ .

**Teorema.** El operador  $\mathcal{M}$  es débil  $(1, 1)$ . Es decir, sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , entonces

$$a_{\mathcal{M}f}(\lambda) \leq \frac{C \|f\|_1}{\lambda}.$$

Como consecuencia del teorema de interpolación de Marcinkiewicz y lo anterior, tenemos que  $\mathcal{M}$  es un operador fuerte  $(p, p)$  para todo  $1 < p \leq \infty$ .

Notemos que dada  $f \in \mathcal{L}^1$ ,  $\mathcal{M}f \in \mathcal{L}^1$  si y solo si  $f = 0$ . Por lo que no se espera la acotación fuerte en  $\mathcal{L}^1$ .

**Teorema (Teorema de diferenciación de Lebesgue).** Sea  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ , entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)| dy = f(x) \quad c.t.p.$$

**Teorema.** Si  $\phi$  es una función positiva, radial, decreciente (como función de  $(0, \infty)$ ), entonces  $\sup_t |\phi_t * f(x)| \leq \|\phi\|_1 \mathcal{M}f(x)$ . Supongamos  $\phi$  función simple, entonces

$$\begin{aligned} |\phi * f(x)| &= \left| \left( \sum_{j=1}^{\infty} c_j \chi_{B_{r_j}(x_j)} * f \right) (x) \right|, \\ &= \left| \sum_{j=1}^{\infty} c_j |B_{r_j}(x_j)| \left( \frac{1}{|B_{r_j}(x_j)|} \chi_{B_{r_j}(x_j)} * f \right) (x) \right|, \\ &\leq \|\phi\|_1 \mathcal{M}f(x). \end{aligned}$$

Luego como  $\phi_t$  es una dilatación de  $\phi$  se puede hacer el mismo procedimiento y concluir el mismo resultado.

Como consecuencia tenemos que la función maximal  $\sup_t |\phi_t * f(x)|$  es débil  $(1, 1)$  y fuerte  $(p, p)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Este resultado permite generalizar (sin usar secuencias  $\{t_n\}$ ) el resultado de convergencia mencionado anteriormente para aproximaciones de la identidad.

**Teorema [5].** Se verifica que

$$\mathcal{M} : W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

establece un operador acotado cuando  $1 < p \leq \infty$ .

**(Demostración (idea))** Es suficiente con mostrar que si  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  con  $1 < p < \infty$ , entonces  $\mathcal{M}f(x)$  tiene derivada débil y se satisface que

$$|\partial_{x_i}(\mathcal{M}u)| \leq \mathcal{M}\partial_{x_i}u.$$

Por otro lado, cuando  $p = \infty$  se vale que

$$\|\mathcal{M}u\|_\infty + \|\partial_{x_i}\mathcal{M}u\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|\mathcal{M}|\partial_{x_i}u|\|_\infty.$$

Para ver la primera desigualdad, es suficiente con ver que si  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $|u| \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  y que se satisface

$$\partial_{x_i}(|u| * \chi_r) = \partial_{x_i}|u| * \chi_r.$$

con  $\chi_r(x) = \frac{\chi_{B_r(0)}}{|B_r(0)|}(x)$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Tome una sucesión de  $r_j > 0$  con  $j = 1, 2, \dots$  como una enumeración de racionales positivos y definamos las funciones  $v_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $k = 1, 2, \dots$  por

$$v_k(x) = \max_{1 \leq j \leq k} (|u| * \chi_{r_j})(x).$$

Note que la sucesión de funciones  $\{v_k\} \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  es creciente y acotada, luego por construcción se tiene la convergencia puntual a  $\mathcal{M}\partial_{x_i}u$  ya que

$$\sup_k |\partial_{x_i}v_k| \leq \sup_k \max_{1 \leq j \leq k} |\partial_{x_i}|u| * \chi_{r_j}| \leq \mathcal{M}\partial_{x_i}u.$$

Así, tomando norma en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  se cumple que

$$\|\partial v_k\|_p \leq \sum_{i=1}^n \|\partial_{x_i}v_k\|_p \leq \sum_{i=1}^n \|\mathcal{M}\partial_{x_i}u\|_p.$$

Luego, usando el teorema de Hardy-Littlewood se satisface que

$$\|v_k\|_{1,p} \leq \|\mathcal{M}u\|_p + \sum_{i=1}^n \|\mathcal{M}\partial_{x_i}u\|_p \leq c_p \|u\|_p + c_p \sum_{i=1}^n \|\partial_{x_i}u\|_p < \infty,$$

de esta manera, para todo  $k = 1, 2, \dots$ , se cumple que la sucesión  $\{v_k\} \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  es una sucesión creciente y acotada en  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Por tanto, como el espacio  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  es reflexivo, entonces existe una subsucesión  $\{v_{k_i}\}$  convergente, pero como la sucesión  $\{v_k\}$  es creciente, entonces la sucesión completa converge débilmente a  $\mathcal{M}|u|$ , por la misma razón  $\{\partial_{x_i}v_k\}$  converge débilmente a  $\mathcal{M}\partial_{x_i}|u|$ . Lo que nos permite concluir que

$$|\partial_{x_i}\mathcal{M}u| \leq \mathcal{M}\partial_{x_i}u$$

**Teorema.** Sea  $f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ . Veamos que  $\mathcal{M}(f)$  es Lipschitz continua. Para esto, sean  $x, y \in \mathbb{R}^n$  y  $r > 0$ . Haciendo un cambio de variables para centrar las bolas en 0 y algunas propiedades del valor absoluto, tenemos que

$$\frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(z)| dz - \mathcal{M}f(y) \leq \frac{1}{|B_r(0)|} \int_{B_r(0)} \left| |f(x+w) - f(y+w)| \right| dw.$$

Como  $f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ , por el teorema del valor intermedio se sigue que

$$\left| |f(x+w) - f(y+w)| \right| \leq \|\nabla f\|_{L^\infty} |x - y|.$$

Concluimos que

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(z)| dz - \mathcal{M}f(y) \leq \|\nabla f\|_{L^\infty} |x - y|.$$

Tomando el supremo sobre  $r > 0$ , se sigue de la desigualdad anterior

$$\mathcal{M}f(x) - \mathcal{M}f(y) \leq \|\nabla f\|_{L^\infty} |x - y|.$$

Y cambiando los papeles de  $x$  y  $y$ , se llega a

$$\left| \mathcal{M}f(y) - \mathcal{M}f(x) \right| \leq \|\nabla f\|_{L^\infty} |x - y|.$$

De lo anterior, se sigue que  $\mathcal{M}f$  es Lipschitz continua. Por tanto, la caracterización de  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$  muestra que  $\mathcal{M}f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$  y

$$\|\nabla \mathcal{M}f\|_{L^\infty} \leq \|\nabla f\|_{L^\infty}.$$

## Trabajo Futuro

- Estudiar propiedades adicionales de la función maximal de Hardy-Littlewood en espacios de Sobolev. Por ejemplo, consultar los resultados presentados en [7], páginas 25–67.
- Analizar otros tipos de funciones maximales. Por ejemplo, considerar el núcleo del calor

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Estudiar el operador maximal asociado,

$$\mathcal{K}f(x) := \sup_{t>0} (f * K_t)(x),$$

en espacios de Sobolev  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Para ello, se pueden consultar los artículos [2, 1].

## Agradecimientos

Agradezco al Semillero de Análisis Armónico y Ecuaciones Diferenciales Parciales de la Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogotá, especialmente a los docentes Ricardo Ariel Pastrán Ramírez y Oscar Guillermo Riaño Castañeda, quienes orientaron el proceso de desarrollo de este póster, tanto en la parte teórica como en la presentación del mismo.

## Referencias

- Emanuel Carneiro and Benar F. Svaiter. On the variation of maximal operators of convolution type. *J. Funct. Anal.*, 265(5):837–865, 2013. ISSN 0022-1236. doi: [10.1016/j.jfa.2013.05.012](#).
- Emanuel Carneiro, Renan Finder, and Mateus Sousa. On the variation of maximal operators of convolution type II. *Rev. Mat. Iberoam.*, 34(2): 739–766, 2018. ISSN 0213-2230. doi: [10.4171/RMI/1002](#).
- Javier Duoandioeboxea. *Fourier analysis*, volume 29 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. ISBN 0-8218-2172-5. doi: [10.1090/gsm/029](#). URL [https://doi.org/10.1090/gsm/029](#). Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Urbe.
- Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010. ISBN 978-0-8218-4974-3. doi: [10.1090/gsm/019](#). URL [https://doi.org/10.1090/gsm/019](#).
- Juha Kinnunen. The Hardy-Littlewood maximal function of a Sobolev function. *Israel J. Math.*, 100:117–124, 1997. ISSN 0021-2172,1565-8511. doi: [10.1007/BF02773636](#). URL [https://doi.org/10.1007/BF02773636](#).
- Felipe Linares and Gustavo Ponce. *Introduction to nonlinear dispersive equations*. Universitext. Springer, New York, second edition, 2015. ISBN 978-1-4939-2180-5. doi: [10.1007/978-1-4939-2181-2](#). URL [https://doi.org/10.1007/978-1-4939-2181-2](#).
- Vladimir Maz'ya, editor. *Sobolev spaces in mathematics. I: Sobolev type inequalities*, volume 8 of *Int. Math. Ser., N.Y.* New York, NY: Springer; Novosibirsk: Tamara Rozhkovskaya Publisher, 2009. ISBN 978-0-387-85647-6; 978-5-901873-24-3; 978-0-387-85648-3; 978-0-387-85791-6. doi: [10.1007/978-0-387-85648-3](#).