

Análisis Armónico: Taller 3

8 de julio de 2025

Universidad Nacional de Colombia

Ricardo Ariel Pastrán Ramirez

Andrés David Cadena Simons

acadenas@unal.edu.co

Problema 1:

Pruebe que el operador \mathcal{F} de la transformada de Fourier es un isomorfismo de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ en si mismo. Dada $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-índice, pruebe que:

$$(I) \quad \widehat{\partial^\alpha \Psi} = (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{\Psi};$$

$$(II) \quad (-2\pi i)^{|\alpha|} x^\alpha \widehat{\Psi} = \partial^\alpha \widehat{\Psi};$$

$$(III) \quad \check{\Psi} = \Psi = \widehat{\check{\Psi}};$$

$$(IV) \quad \mathcal{F}^4 = Id.$$

Solución:

Veamos que el operador \mathcal{F} de la transformada de Fourier es un isomorfismo de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ en si mismo.

Para esto primero mostremos que es un operador inyectivo, esto ya que si suponemos que dados $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tales que $\widehat{\Psi}_1 = \widehat{\Psi}_2$ se puede concluir que para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se cumple que

$$\begin{aligned} \Psi_1(\widehat{\phi}) &= \widehat{\Psi}_1(\phi), \\ &= \widehat{\Psi}_2(\phi), \\ &= \Psi_2(\widehat{\phi}). \end{aligned}$$

De lo que se puede afirmar que $\Psi_1 = \Psi_2$, lo que demuestra que \mathcal{F} es un operador inyectivo. Ahora veamos que \mathcal{F} es un operador sobreyectivo, ya que si definimos $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que si tomamos $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, entonces $\check{\Psi}(\phi) = \Psi(\check{\phi})$, entonces de forma análoga a \mathcal{F} se puede demostrar que \mathcal{F}^{-1} es un operador inyectivo, luego dado $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se sabe que existe $\check{\Psi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{\check{\Psi}} = \Psi$, lo que demuestra que \mathcal{F} es un operador sobreyectivo y por ende biyectivo.

Problema 2:

Pregunta

Solución:

Solución

Problema 3:

Pregunta

Solución:

Solución

Problema 4:

Pregunta

Solución:

Solución

Problema 5:

Pregunta

Solución:

Solución