Considere la función en $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x| \ln^2\left(\frac{1}{|x|}\right)}, & \text{si } |x| \le \frac{1}{2}, x \ne 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Muestre que f es integrable.
(b) Muestre que dado $|x| \le \frac{1}{2}$, existe $c > 0$ tal que

$$f^*(x) \ge \frac{c}{|x| \ln\left(\frac{1}{|x|}\right)}$$

para concluir que la función maximal f^* no es localmente integrable.

Solución:

(a) Tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = 2 \int_0^{1/2} \frac{1}{x \ln^2\left(\frac{1}{x}\right)} dx.$$

Usando $u = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$, tenemos $du = -\frac{dx}{x}$, entonces

$$2 \int_0^{1/2} \frac{1}{x \ln^2\left(\frac{1}{x}\right)} dx = -2 \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{1}{u^2} du = 2 \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{1}{u^2} du = -\frac{2}{u}\Big|_{\ln(2)}^{\infty} = \frac{2}{\ln(2)}.$$

(b) Para $0 < |x| < \frac{1}{2}$, tomemos $B = B(x; |x|)$, la bola centrada en x y radio $|x|$, tenemos

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| dy = \frac{1}{2|x|} \int_{x-|x|}^{x+|x|} |f(y)| dy.$$

Si $0 < x < \frac{1}{2}$, entonces

$$\frac{1}{2|x|} \int_{x-|x|}^{x+|x|} |f(y)| dy = \frac{1}{2|x|} \int_0^{2|x|} |f(y)| dy \ge \frac{1}{2|x|} \int_0^{|x|} |f(y)| dy.$$

Evaluando la integral:

$$\frac{1}{2|x|} \int_0^{|x|} \frac{1}{y \ln\left(\frac{1}{y}\right)} dy = \frac{1}{2|x|} \int_{\ln(1/|x|)}^{\infty} \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{2|x|} \left(-\frac{1}{u}\Big|_{\ln(1/|x|)}^{\infty} \right) = \frac{1}{2|x| \ln(1/|x|)}.$$

Si $-\frac{1}{2} < x < 0$, entonces el cálculo es análogo, obteniendo el mismo resultado. Luego, por la definición de función maximal, para $0 < |x| < \frac{1}{2}$,

$$f^*(x) \ge \frac{1}{2|x| \ln\left(\frac{1}{|x|}\right)}.$$

Integrando en una vecindad del 0 de radio $\delta > 0$ tenemos

$$\int_{-\delta}^{\delta} f^*(x) dx \ge \int_0^{\delta} \frac{1}{x \ln\left(\frac{1}{x}\right)} dx.$$

Cambiando de variable $u = \ln(1/x)$,

$$\int_0^{\delta} \frac{1}{x \ln\left(\frac{1}{x}\right)} dx = \int_{\ln(1/\delta)}^{\infty} \frac{1}{u} du = \ln u \Big|_{\ln(1/\delta)}^{\infty} = \infty.$$

De manera que f^* no es localmente integrable.

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en un punto $x \in \mathbb{R}^n$. Queremos demostrar que:

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy = f(x),$$

donde $B(x,r)$ es la bola de radio r centrada en x y $|B(x,r)|$ denota su volumen.

Demostración

Dado que f es diferenciable en x, podemos escribir el desarrollo de Taylor de primer orden alrededor de x:

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x) \cdot (y - x) + R(y),$$

donde $\nabla f(x)$ es el gradiente de f en x y $R(y)$ es el término de residuo que satisface:

$$\lim_{y \to x} \frac{R(y)}{|y - x|} = 0.$$

Integrando sobre la bola $B(x,r)$:

$$\int_{B(x,r)} f(y)\, dy = \int_{B(x,r)} [f(x) + \nabla f(x) \cdot (y - x) + R(y)]\, dy.$$

Separando los términos:

$$\int_{B(x,r)} f(y)\, dy = \int_{B(x,r)} f(x)\, dy + \int_{B(x,r)} \nabla f(x) \cdot (y - x)\, dy + \int_{B(x,r)} R(y)\, dy.$$

Calculamos cada integral por separado:
1. **Primer término:**

$$\int_{B(x,r)} f(x)\, dy = f(x) \int_{B(x,r)} dy = f(x)|B(x,r)|.$$

2. **Segundo término:**
Dado que la bola $B(x,r)$ es simétrica respecto a x, la integral del término lineal se anula:

$$\int_{B(x,r)} \nabla f(x) \cdot (y-x)\, dy = \nabla f(x) \cdot \int_{B(x,r)} (y-x)\, dy = \nabla f(x) \cdot 0 = 0.$$

3. **Tercer término:**
Para el término de residuo, utilizamos la condición de diferenciabilidad:

$$\left| \int_{B(x,r)} R(y)\, dy \right| \leq \int_{B(x,r)} |R(y)|\, dy.$$

Dado que $\lim_{y \to x} \frac{R(y)}{|y-x|} = 0$, para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|y-x| < \delta$, entonces $|R(y)| < \epsilon |y-x|$. Para r suficientemente pequeño, $|R(y)| < \epsilon r$ para todo $y \in B(x,r)$. Por lo tanto:

$$\left| \int_{B(x,r)} R(y)\, dy \right| \leq \int_{B(x,r)} \epsilon r\, dy = \epsilon r |B(x,r)|.$$

Dividiendo por $|B(x,r)|$:

$$\left| \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} R(y)\, dy \right| \leq \epsilon r.$$

Tomando el límite cuando $r \to 0$:

$$\lim_{r \to 0} \left| \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} R(y)\, dy \right| = 0.$$

Sumando los términos:

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy = f(x) + \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} R(y)\, dy.$$

Tomando el límite cuando $r \to 0$:

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy = f(x).$$

Conclusión

Hemos demostrado que el promedio de una función diferenciable sobre una bola centrada en x tiende al valor de la función en x cuando el radio de la bola tiende a cero.