Sobre la función maximal de Hardy-Littlewood en espacios de Sobolev

Andrés David Cadena Simons

Semillero de Análisis Armónico y Ecuaciones Diferenciales Parciales, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia sede Bogotá.

Conceptos y definiciones

Función de distribución
Sea (X, μ) un espacio de medida y sea $f : X \to \mathbb{C}$ una función medible.
Se llama función de distribución de f asociada a μ a la función:

$$\begin{aligned} a_f : (0, \infty) &\to [0, \infty], \\ \lambda &\to \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}). \end{aligned}$$

Desigualdades débiles y fuertes
Sean (X, μ) y (Y, ν) dos espacios de medida y sea T un operador de $\mathcal{L}^p(X, \mu)$, en el espacio de funciones medibles de Y en $\mathbb{C}$.

$$T : \mathcal{L}^p(X, \mu) \to \mathcal{M}(Y, \mathbb{C}).$$

i. Se dice que T es (p, q)-débil (con $q < \infty$) si para todo $\lambda > 0$ existe $C > 0$ tal que:

$$\nu(\{y \in Y : |(Tf)(y)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C||f||_p}{\lambda}\right)^q.$$

ii. Se dice que T es (p, ∞)-débil si está acotado de $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ en $\mathcal{L}^\infty(Y, \nu)$.

iii. Se dice que T es (p, q)-fuerte si está acotado de $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ en $\mathcal{L}^q(Y, \nu)$.

Función Maximal de Hardy-Littlewood
Sea B_r la bola euclídea centrada en el origen y de radio r. Definiremos la función maximal de Hardy-Littlewood de una función localmente integrable f en $\mathbb{R}^n$ como:

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f(x - y)| dy.$$

Espacios de Sobolev
Dado $1 \leq p \leq \infty$. Recordamos que el *espacio de Sobolev* $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ comprende todas las funciones $f \in \mathcal{L}^p$ tales que f tiene gradiente débil y $\nabla f \in \mathcal{L}^p$. A este espacio se le asigna la norma

$$\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_{L^p} + \|\nabla f\|_{L^p}.$$

Resultados

Teorema (Teorema de interpolación de Marcinkiewicz). *Sean (X, μ) y (Y, ν) espacios medibles, $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, y tome T como un operador sublineal de $L^{p_0}(X, \mu) + L^{p_1}(X, \mu)$ a las funciones de medida de Y que es débil (p_0, p_0) y es débil (p_1, p_1). Entonces T es fuerte (p, p) para $p_0 < p < p_1$.*

Algunas consecuencias:
La función maximal establece un operador fuerte (∞, ∞). Para ver esto, sea $f \in \mathcal{L}^\infty$, entonces para $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ arbitrarios se tiene

$$\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f(x - y)| \, dy \leq \|f\|_\infty.$$

Luego tomando el supremo en $r > 0$, tenemos $\mathcal{M}f(x) \leq \|f\|_\infty$. Ahora, como $x \in \mathbb{R}^n$ es arbitrario, se deduce que

$$\|\mathcal{M}f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Luego $\mathcal{M}$ define un operador (∞, ∞).

Teorema. El operador $\mathcal{M}$ es débil $(1, 1)$. *Es decir, sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$a_{\mathcal{M}f}(\lambda) \leq \frac{C \, \|f\|_1}{\lambda}.$$

Como consecuencia del teorema de interpolación de Marcinkiewicz y lo anterior, tenemos que $\mathcal{M}$ es un operador fuerte (p, p) para todo $1 < p \leq \infty$.

Notemos que dada $f \in \mathcal{L}^1$, $\mathcal{M}f \in \mathcal{L}^1$ si y solo si $f = 0$. Por lo que no se espera la acotación fuerte en $\mathcal{L}^1$.

Teorema (Teorema de diferenciación de Lebesgue). *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)| \, dy = f(x) \quad c.t.p.$$

Teorema. *Si ϕ es una función positiva, radial, decreciente (como función de $(0, \infty)$), entonces tomando $\phi_t(x) = t^{-n}\phi(t^{-1}x)$ se cumple que $\sup_t |\phi_t * f(x)| \leq \|\phi\|_1 \mathcal{M}f(x)$.*
Supongamos ϕ función simple, entonces

$$\begin{aligned} |\phi * f(x)| &= \left| \left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j \chi_{B_{r_j}(x_j)} * f \right)(x) \right|, \\ &= \left| \sum_{j=1}^{\infty} c_j |B_{r_j}(x_j)| \left(\frac{1}{|B_{r_j}(x_j)|} \chi_{B_{r_j}(x_j)} * f \right)(x) \right|, \\ &\leq \|\phi\|_1 \, \mathcal{M}f(x). \end{aligned}$$

Luego como ϕ_t es una dilatación de ϕ se puede hacer el mismo procedimiento y concluir el mismo resultado.

Como consecuencia tenemos que la función maximal $\sup_t |\phi_t * f(x)|$ es débil $(1, 1)$ y fuerte (p, p), $1 \leq p \leq \infty$. Este resultado permite generalizar (sin usar secuencias $\{t_n\}$) el resultado de convergencia mencionado anteriormente para aproximaciones de la identidad.

Teorema [5]. *Se verifica que*

$$\mathcal{M} : W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

establece un operador acotado cuando $1 < p \leq \infty$.

(Demostración (idea)) Es suficiente con mostrar que si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < \infty$, entonces $\mathcal{M}f(x)$ tiene derivada débil y se satisface que

$$|\partial_{x_i}(\mathcal{M}u)| \leq \mathcal{M}\partial_{x_i}u.$$

Por otro lado, cuando $p = \infty$ vamos a mostrar que $\mathcal{M}f$ es Lipschitz.

Para ver la primera desigualdad, es suficiente con ver que si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, entonces $|u| \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y que se satisface

$$\partial_{x_i}(|u| * \chi_r) = \partial_{x_i}|u| * \chi_r.$$

con $\chi_r(x) = \frac{\chi_{B_r(0)}}{|B_r(0)|}(x)$, para todo $i = 1, \cdots, n$.
Tome una sucesión de $r_j > 0$ con $j = 1, 2, \cdots$ como una enumeración de racionales positivos y definamos las funciones $v_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $k = 1, 2 \cdots$ por

$$v_k(x) = \max_{1 \leq j \leq k} \left(|u| * \chi_{r_j}\right)(x).$$

Note que la sucesión de funciones $\{v_k\} \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ es creciente y acotada, luego por construcción se tiene la convergencia puntual a $\mathcal{M}\partial_{x_i}u$ ya que

$$\sup_k |\partial_{x_i} v_k| \leq \sup_k \max_{1 \leq j \leq k} |\partial_{x_i}|u| * \chi_{r_j}| \leq \mathcal{M}\partial_{x_i}u.$$

Así, tomando norma en $L^p(\mathbb{R}^n)$ se cumple que

$$\|\partial v_k\|_p \leq \sum_{i=1}^{n} \|\partial_{x_i} v_k\|_p \leq \sum_{i=1}^{n} \|\mathcal{M}\partial_{x_i}u\|_p.$$

Luego, usando el teorema de Hardy-Littlewood se satisface que

$$\|v_k\|_{1,p} \leq \|\mathcal{M}u\|_p + \sum_{i=1}^{n} \|\mathcal{M}\partial_{x_i}u\|_p \leq c_p \|u\|_p + c_p \sum_{i=1}^{n} \|\partial_{x_i}u\|_p < \infty,$$

de esta manera, para todo $k = 1, 2, \cdots$, se cumple que la sucesión $\{v_k\} \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ es una sucesión creciente y acotada en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Por tanto, como el espacio $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ es reflexivo, entonces existe una subsucesión $\{v_{k_i}\}$ débilmente convergente, pero como la sucesión $\{v_k\}$ es creciente, entonces la sucesión completa converge débilmente a $\mathcal{M}|u|$, por la misma razón $\{\partial_{x_i} v_k\}$ converge débilmente a $\mathcal{M}\partial_{x_i}|u|$. Lo que nos permite concluir que

$$|\partial_{x_i}\mathcal{M}u| \leq \mathcal{M}\partial_{x_i}u.$$

Sea $f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Veamos que $\mathcal{M}(f)$ es Lipschitz continua. Para esto, sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Haciendo un cambio de variables para centrar las bolas en 0 y algunas propiedades del valor absoluto, tenemos que

$$\frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(z)| \, dz - \mathcal{M}f(y) \leq \frac{1}{|B_r(0)|} \int_{B_r(0)} \Big| |f(x + w) - f(y + w)| \Big| \, dw.$$

Como $f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, por el teorema del valor intermedio se sigue que

$$\big|f(x + w) - f(y + w)\big| \leq \|\nabla f\|_{L^\infty} |x - y|.$$

Concluimos que

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x,r)} |f(z)| \, dz - \mathcal{M}f(y) \leq \quad \|\nabla f\|_{L^\infty} |x - y|.$$

Tomando el supremo sobre $r > 0$, se sigue de la desigualdad anterior

$$\mathcal{M}f(x) - \mathcal{M}f(y) \leq \|\nabla f\|_{L^\infty} |x - y|.$$

Y cambiando los papeles de x y y, se llega a

$$\big|\mathcal{M}f(y) - \mathcal{M}f(x)\big| \leq \|\nabla f\|_{L^\infty} |x - y|.$$

De lo anterior, se sigue que $\mathcal{M}f$ es Lipschitz continua. Por tanto, la caracterización de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ muestra que $\mathcal{M}f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|\nabla \mathcal{M}f\|_{L^\infty} \leq \|\nabla f\|_{L^\infty}.$$

Trabajo Futuro

- Estudiar propiedades adicionales de la función maximal de Hardy–Littlewood en espacios de Sobolev. Por ejemplo, consultar los resultados presentados en [7], páginas 25–67.
- Analizar otros tipos de funciones maximales. Por ejemplo, considerar el núcleo del calor

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Estudiar el operador maximal asociado,

$$\mathcal{K}f(x) := \sup_{t>0} (f * K_t)(x),$$

en espacios de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Para ello, se pueden consultar los artículos [2, 1].

Agradecimientos

Agradezco al Semillero de Análisis Armónico y Ecuaciones Diferenciales Parciales de la Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogotá, especialmente a los docentes Ricardo Ariel Pastrán Ramírez y Oscar Guillermo Riaño Castañeda, quienes orientaron el proceso de desarrollo de este póster, tanto en la parte teórica como en la presentación del mismo.

Referencias

[1] Emanuel Carneiro and Benar F. Svaiter. On the variation of maximal operators of convolution type. *J. Funct. Anal.*, 265(5):837–865, 2013. ISSN 0022-1236. doi: 10.1016/j.jfa.2013.05.012.

[2] Emanuel Carneiro, Renan Finder, and Mateus Sousa. On the variation of maximal operators of convolution type II. *Rev. Mat. Iberoam.*, 34(2): 739–766, 2018. ISSN 0213-2230. doi: 10.4171/RMI/1002.

[3] Javier Duoandikoetxea. *Fourier analysis*, volume 29 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. ISBN 0-8218-2172-5. doi: 10.1090/gsm/029. URL `https://doi.org/10.1090/gsm/029`. Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Uribe.

[4] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010. ISBN 978-0-8218-4974-3. doi: 10.1090/gsm/019. URL `https://doi.org/10.1090/gsm/019`.

[5] Juha Kinnunen. The Hardy-Littlewood maximal function of a Sobolev function. *Israel J. Math.*, 100:117–124, 1997. ISSN 0021-2172,1565-8511. doi: 10.1007/BF02773636. URL `https://doi.org/10.1007/BF02773636`.

[6] Felipe Linares and Gustavo Ponce. *Introduction to nonlinear dispersive equations*. Universitext. Springer, New York, second edition, 2015. ISBN 978-1-4939-2180-5. doi: 10.1007/978-1-4939-2181-2. URL `https://doi.org/10.1007/978-1-4939-2181-2`.

[7] Vladimir Maz'ya, editor. *Sobolev spaces in mathematics. I: Sobolev type inequalities*, volume 8 of *Int. Math. Ser., N.Y.* New York, NY: Springer; Novosibirsk: Tamara Rozhkovskaya Publisher, 2009. ISBN 978-0-387-85647-6; 978-5-901873-24-3; 978-0-387-85648-3; 978-0-387-85791-6. doi: 10.1007/978-0-387-85648-3.

acadenas@unal.edu.co