Sobre la función máximal de Hardy-Littlewood y un vistazo al trabajo futuro

Andrés David Cadena Simons

Trabajo realizado bajo la dirección del profesor Oscar Guillermo Riaño Castañeda y Ricardo Ariel Pastrán Ramírez.

Smillero de Análisis Armónico y Ecuaciones Diferenciales Parciales, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia

01 de diciembre de 2023

Resumen

El propósito de este póster es presentar uno de los resultados estudiados durante el *Semillero de Análisis Armónico y Ecuaciones Diferenciales Parciales* del departamento de matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia sede Bogotá, referentes al estudio de la *función maximal de Hardy-Littlewood*.

En este mismo se presentarán resultados y teoremas preliminares como aproximaciones de la identidad, convergencia en casi todo punto, desigualdades débiles/fuertes y el teorema de interpolación de Marcinkiewicz, esto con el fin de introducir la función maximal de Hardy-Littlewood y continuar su estudio enfocados a resultados como: mostrar que la función maximal establece un operador acotado en $\mathcal{L}^\infty$, un operador $(1,1)$-débil y deducir de esto el teorema de diferenciación de Lebesgue. Como trabajo futuro, se plantea estudiar para cuales espacios de Sobolev la función maximal de Hardy-Littlewood determina un operador continuo.

1. Conceptos y Definiciones

Aproximación de la identidad
Suponga ϕ como una función integrable en $\mathbb{R}^n$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n}\phi = 1$, y luego definamos para todo $t > 0$ a

$$\phi_t(x) = t^{-n}\phi(t^{-1}x).$$

Si $t \to 0$, ϕ_t converge en el sentido distribucional de $\mathcal{S}'$ a δ_0 (la medida delta de Dirac en el origen), entonces diremos que $\{\phi_t \mid t > 0\}$ es una aproximación de la identidad.

Desigualdades débiles y fuertes
Sean (X,μ) y (Y,ν) dos espacios de medida y sea T un operador de $\mathcal{L}^p(X,\mu)$, en el espacio de funciones medibles de Y en $\mathbb{C}$.

$$T : \mathcal{L}^p(X,\mu) \to \mathcal{M}(Y,\mathbb{C})$$

i. Se dice que T es (p,q)-débil (con $q < \infty$) si para todo $\lambda > 0$ existe $C > 0$ tal que:

$$\nu(\{y \in Y : |(Tf)(y)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q.$$

ii. Se dice que T es (p,∞)-débil si está acotado de $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ en $\mathcal{L}^\infty(Y,\nu)$.

iii. Se dice que T es (p,q)-fuerte si está acotado de $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ en $\mathcal{L}^q(Y,\nu)$.

Función de distribución
Sea (X,μ) un espacio de medida y sea $f : X \to \mathbb{C}$ una función medible.
Se llama función de distribución de f asociadad a μ a la función:

$$\begin{aligned} a_f : (0,\infty) &\to [0,\infty] \\ \lambda &\to \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) \end{aligned}$$

Operador sublineal
Un operador T de un espacio vectorial de funciones medibles en funciones medibles se dice *sublineal* si

- $|T(f_1 + f_2)(x)| \leq |T(f_1)(x)| + |T(f_2)(x)|$.
- $|T(\lambda f)(x)| = |\lambda||T(f)(x)|$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$

Función Maximal de Hardy-Littlewood
Sea B_r la bola euclidea centrada en el origen y de radio r. Definiremos la función maximal de Hardy-Littlewood de una función localmente integrable f en $\mathbb{R}^n$ como:

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}|f(x-y)|dy$$

2. Resultados

Teorema. *Sea $\{\phi_t \mid t > 0\}$ una aproximación de la identidad, entonces*

$$\lim_{t\to 0}\|\phi_t * f - f\|_p = 0,$$

para cualquier $f \in \mathcal{L}^p$, con $1 \leq p < \infty$ y uniformemente (caso $p = \infty$) si f es continua y tiende a 0 en infinito, esto es, $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Como una consecuencia de este teorema, sabemos que existe una sucesión $\{t_k\}$ que depende de f tal que $t_k \to 0$ y

$$\lim_{k\to\infty}\phi_{t_k} * f(x) = f(x) \quad \text{c.t.p.}$$

Es por esto que si el límite $\lim_{t\to 0}\phi_t * f(x)$ existe, debe de ser igual a $f(x)$ en casi todo punto. Más adelante se estudiará la existencia de este límite en general, no solo para una secuencia $\{t_k\}$.

Proposición. *Sea T un operador (p,q)-fuerte, entonces T es (p,q)-débil.*

Demostracón (idea). Denotemos por

$$E_\lambda = \{y \in Y : |(Tf)(y)| > \lambda\},$$

luego se tiene que

$$\begin{aligned} \nu(E_\lambda) = \int_{E_\lambda} d_\nu &\leq \int_{E_\lambda}\left|\frac{(Tf)(y)}{\lambda}\right|^q d\nu \\ &\leq \frac{1}{\lambda^q}\int_Y |(Tf)(y)|^q d\nu = \frac{1}{\lambda^q}\|Tf\|_q^q \\ &\leq \frac{1}{\lambda^q}(C\|f\|_p)^q = \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q. \end{aligned}$$

□

Teorema. *Sea $\{T_t\}$ una familia de operadores lineales en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$, es decir,*

$$\begin{aligned} T_t : \mathcal{L}^p(X,\mu) &\to \mathcal{L}^p(X,\mu) \\ f &\to T_t f \end{aligned}$$

y definimos

$$T^*f(x) = \sup_t |T_t f(x)|.$$

Si T^* es (p,q)-débil, el conjunto

$$\{f \in \mathcal{L}^p \mid \lim_{t\to t_0} T_t f(x) = f(x) \text{ c.t.p}\}$$

es cerrado en $\mathcal{L}^p$.

Observaciones:

- T^* se llama operador maximal asociado a $\{T_t\}$.
- Como para las aproximaciones de la identidad conocemos la convergencia puntual hacía f para funciones de $\mathcal{S}$, basta probar acotaciones débiles sobre el operador maximal $\sup_{t>0}|\phi_t * f(x)|$ para deducir la convergencia en casi todo punto para $f \in \mathcal{L}^p$, $1 \leq p < \infty$, o para $f \in C^0$.

Proposición. *Sea $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función derivable y creciente tal que $\varphi(0) = 0$, entonces:*

$$\int_X \varphi(|f(x)|)d\mu = \int_0^\infty \varphi'(\lambda)a_f(\lambda)d\lambda.$$

Si en particular, $\varphi(\lambda) = \lambda^p$, entonces podemos concluir que:

$$\|f\|_{L^p}^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}a_f(\lambda)\,d\lambda.$$

Teorema (Teorema de interpolación de Marcinkiewicz). *Sean (X,μ) y (Y,ν) espacios medibles, $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, y tome T como un operador sublineal de $L^{p_0}(X,\mu) + L^{p_1}(X,\mu)$ a las funciones de medida de Y que es débil (p_0,p_0) y es débil (p_1,p_1). Entonces T es fuerte (p,p) para $p_0 < p < p_1$.*

Algunas consecuencias:
La función maximal establece un operador fuerte (∞,∞). Para ver esto, sea $f \in \mathcal{L}^\infty$, entonces para $x \in \mathbb{R}^N$ y $r > 0$ arbitrarios se tiene

$$\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}|f(x-y)|\,dy \leq \|f\|_\infty.$$

Luego tomando el supremo en $r > 0$, tenemos $\mathcal{M}f(x) \leq \|f\|_\infty$. Ahora, como $x \in \mathbb{R}^N$ es arbitrario, se deduce que

$$\|\mathcal{M}f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Luego $\mathcal{M}$ define un operador (∞,∞). En trabajos futuros estudiaremos el siguiente resultado.

Teorema. El operador $\mathcal{M}$ es débil $(1,1)$.

Como consecuencia del teorema de interpolación de Marcinkiewicz y lo anterior, tenemos que $\mathcal{M}$ es un operador fuerte (p,p) para todo $1 < p \leq \infty$.

Notemos que dada $f \in \mathcal{L}^1$, $\mathcal{M}f \in \mathcal{L}^1$ si y solo si $f = 0$. Por lo que no se espera la acotación fuerte en $\mathcal{L}^1$.

3. Trabajo Futuro

- Demostrar que $\mathcal{M}$ es débil $(1,1)$. Para esto tendremos que estudiar conceptos como la función maximal diádica y la descomposición de Calderón-Zygmund.
- Una vez tengamos estos resultados, deduciremos el teorema de diferenciación de Lebesgue. Para esto usaremos el resultado enunciado antes para ver que

  $$\mathcal{L}^p = \{f \in \mathcal{L}^p \mid \lim_{r\to 0^+}\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}f(x-y)\,dy = f(x) \text{ c.t.p}\},$$

  para $1 \leq p < \infty$.
- Mostraremos que si ϕ es una función positiva, radial, decreciente (como función de $(0,\infty)$), entonces $\sup_t|\phi_t * f(x)| \leq \|\phi\|_1\mathcal{M}f(x)$. Como consecuencia tenemos que la función maximal $\sup_t|\phi_t * f(x)|$ es débil $(1,1)$ y fuerte (p,p), $1 \leq p \leq \infty$. Este resultado permite generalizar (sin usar secuencias $\{t_n\}$) el resultado de convergencia mencionado anteriormente para aproximaciones de la identidad.
- Dado $1 \leq p \leq \infty$. Recordamos que el *espacio de Sobolev* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ comprende todas las funciones $f \in \mathcal{L}^p$ tales que f tiene gradiente débil y $\nabla f \in \mathcal{L}^p$. A este espacio se le asigna la norma

  $$\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_{L^p} + \|\nabla f\|_{L^p}.$$

  La idea es estudiar artículos como el de Kinnunen (1997) donde se verifica que

  $$\mathcal{M} : W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

  establece un operador acotado cuando $1 < p \leq \infty$.

4. Agradecimientos

Agradezco al Semillero de Análisis Armónico y Ecuaciones Diferenciales Parciales de la Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogotá, especialmente a los docentes Ricardo Ariel Pastrán Ramírez y Oscar Guillermo Riaño Castañeda, quienes orientaron el proceso de desarrollo de este póster, tanto en la parte teórica como en la presentación del mismo.

Referencias

[1] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, Grad. Stud. Math., vol. 29, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, translated and revised from the 1995 Spanish original by D. Cruz-Uribe.

[2] J. Kinnunen, *The Hardy-Littlewood maximal function of a Sobolev function*, Israel J. Math. 100 (1997), 117–124.

[3] J. Kinnunen and P. Lindqvist, *The derivative of the maximal function*, J. Reine Angew. Math. 503 (1998), 161–167.