INSTRUCCIONES EXPOSICIÓN: ECUACIÓN DEL CALOR
ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES I
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, BOGOTÁ

PROFESOR: OSCAR RIAÑO

1. Instrucciones

La idea es que graben un video donde **presenten la demostración de los Teoremas 2.1 y 2.2** abajo. Más precisamente:

- Pueden trabajar en grupos de *máximo tres personas para mostrar los Teoremas 2.1 y 2.2* (todos los integrantes deben presentar algo). Si deciden trabajar de *manera individual, pueden escoger cualquiera de los teoremas para su presentación (solo uno de estos).*
- **Deben enviar el video a más tardar el martes 30 de julio al correo ogrianoc@unal.edu.co.** (Les sugiero que usen Google Meet).
- La calificación del video hará **parte de su nota para el segundo parcial**, por lo que vale la pena que se esfuercen en presentar un buen resultado.
- Pueden apoyarse en los videos de la clase, el libro de Evans [1] (sección 2.3.1 en la página 45) y las notas de clases. La idea es que en el video muestren con detalles y dominio que entienden los Teoremas 2.1 y 2.2.

2. Problemas

Recordemos primero algo de notación. La *solución fundamental de la ecuación del calor* es la función:

$$\Phi(x,t) := \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ t < 0. \end{cases}$$

Considere la función

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \big(\Phi(\cdot,t) * g\big)(x) \\ =& \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\, dy, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. También, recordemos la fórmula de Duhamel para encontrar soluciones para la ecuación del calor no homogénea:

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \big(\Phi(\cdot,t) * g\big)(x) + \int_0^t \Big(\Phi(\cdot,t-s) * f(\cdot,s)\Big)(x)\, ds \\ =& \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) g(y)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s)\, dyds. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Problema 1. Demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2.1. *Asuma que* $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *y sea* u *definida por* (2.1). *Entonces*

i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$,
ii) $u_t - \Delta u = 0$ *para* $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$,
iii) $\displaystyle\lim_{(x,t) \to (x^0, 0),\, x \in \mathbb{R}^n,\, t>0} u(x,t) = g(x^0)$ *para cada punto* $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Problema 2. Demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2.2. *Asuma que* $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ *tiene soporte compacto y sea* u *definida por* (2.2). *Entonces*

i) $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$,
ii) $u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t)$ *para* $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$,
iii) $\displaystyle\lim_{(x,t) \to (x^0, 0),\, x \in \mathbb{R}^n,\, t>0} u(x,t) = g(x^0)$ *para cada punto* $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Referencias

[1] L. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19 of *Graduate studies in mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá
Email address: ogrianoc@unal.edu.co