Prof. Mauricio Ruiz
Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas

Tarea 1
Análisis numérico
Noviembre 5 de 2024

Dia de entrega: Jueves 14 de Noviembre de 2024. En la clase.

1.T Un bloque de masa m desliza bajo la acciónn de la gravedad por un plano inclinado formando un ángulo θ respecto de la horizontal. Se puede demostrar que, si la fuerza de rozamiento F_r entre el bloque y el plano viene dada por $F_r = -kmv^2$ con v la velocidad del bloque y k un coeficiente de roza- miento, entonces el tiempo T requerido para que el bloque recorra una distancia D partiendo del reposo está relacionado de la forma

$$e^{kD} = cosh(T\sqrt{kg\,sin\theta}),$$

siendo $g = 9,8$ la aceleración de la gravedad. Si $\theta = \pi/4$, $k = 0,5 \pm 0,1$ y $T = 2 \pm 0,2$, hallar la precisión con la que se conoce D.

2.T Utilizando el método de redondeo.

(a) Hallar el número de máquina mas próximo a 125.6 y a 126 si trabaja con

- Base 10 y mantisa de 2 dígitos.
- Base 2 y mantisa de 8 dígitos

(b) Verificar para $x = 125{,}6$ la cota para el error relativo

$$\left|\frac{x - fl(x)}{x}\right| \leq \epsilon$$

si $\epsilon = 1/2\beta^{1-d}$ donde β es la base y d la longitud de la mantisa.

(c) ¿ Cuál es, en cada caso el valor que da la máquina como resultado de las operaciones 126+126.5 y 126-125.6? ¿Cuál es el error relativo de estos resultados ?

3.T Suponga que una compañia de computadores esta desarrollando un nuevo sistema de punto flotante para usarlo con sus máquinas. Ellos necesitan su ayuda para responder unas preguntas acerca de su sistema. Siguiendo la teminología descrita en clase, el sistema de punto flotante de la compañia se especifica por (β, t, L, U). Usted debe suponer que:

- Todos los valores de punto flotante son normalizados (excepto la representación de punto flotante de cero).
- Todos los dígitos en la mantisa de un valor de punto flotante son almacenados explicitamente.
- El cero se representa con una mantisa y exponente de ceros.

Preguntas:

a) ¿ Cuántos valores diferentes de punto flotante no negativos pueden representarse por medio de este sistema de punto flotante ?

b) La misma pregunta para el caso $(\beta, t, L, U) = (8, 5, -100, 100)$, el cual la compañia esta contemplando en particular.

c) ¿ Cuál es el valor aproximado (en base 10) del número más grande y el númer positivo más pequeño que pueden ser representado en este sistema de punto flotante?

d) Para el caso general, demuestre que los errores relativos producidos por realizar truncamieto y redondeo son

$$\left|\frac{fl(x)-x}{x}\right| = \begin{cases} \beta^{1-t} & \text{cuando se efectúa truncamiento} \\ \frac{1}{2}\beta^{1-t} & \text{cuando se efectúa redondeo} \end{cases}$$

4.P Considere la expansión de Taylor para la función exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \lim_{N\to\infty} S(x,N)$$

donde $S(x,N)$ es la suma parcial con $N+1$ términos.

a) Escriba un programa que grafique el error relativo de la suma, $|S(x,N)-e^x|/e^x$ versus N (hasta N=60) para un valor dado de x. Pruebe su programa para $x = 10, 2, -2$ y -10. De las gráficas, explique por qué ésta no es una buena manera para evaluar e^x cuando $x < 0.$

b) Modifique su programa tal que use la identidad $e^x = 1/e^{-x} = 1/S(-x,\infty)$ para evaluar la función exponencial cuando x es negativa. Explique por qué esta técnica funciona mejor.

5.TP a) De manera similar a la desarrollada en clase, deduzca que una aproximación de $f'(x_0)$ es

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}.$$

Muestre que esta aproximación tiene un error de $\mathcal{O}(h^2)$. Más precisamente, el primer término del error es $-\frac{h^2}{6}f'''(x_0)$ cuando $f'''(x_0) \neq 0$.

b) Adapte el programa de Matlab hecho en clase para visualizar el comportamiento del error de aproximación a medida que el paso h decrece desde $h = 10^{-1}, ..., 10^{-16}$.

c) Muestre que

$$f'(x_0) = \frac{-f(x_0+2h)+8f(x_0+h)-8f(x_0-h)+f(x_0-2h)}{12h} + \mathcal{O}(h^4)$$

De nuevo adapte su programa para visualizar el comportamiento del error de aproximación a medida que el paso h decrece desde $h = 10^{-1}, ..., 10^{-16}$.

6T Repaso O mayúscula y o minúscula de una función. Si $f(x) = O(x^2)$, $g(x) = O(x^3)$ y $h(x) = O(x^3)$ cuando $x \to 0$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?. Justifique sus respuestas

a) $f(x) = o(x)$ cuando $x \to 0$
b) $f(x) = o(x^2)$ cuando $x \to 0$
c) $f(x) \cdot g(x) = O(x^5)$ cuando $x \to 0$
d) $f(x) + g(x) = O(x^3)$ cuando $x \to 0$
e) $g(x) - h(x) = 0$
f) $g(x)/h(x) = O(1)$ cuando $x \to 0$