Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Análisis Funcional
Examen Final (I-2025)

Profesor: Oscar Guillermo Riaño Castañeda
Integrantes: Andrés David Cadena Simons, Jairo Sebastián Niño Castro, Iván Felipe Salamanca Medina
Fecha: 16 de Julio del 2025

0.1 Operadores Compactos

Problema 1. Dado $u \in L^2((0,1))$, definimos el operador $T : L^2((0,1)) \to L^2((0,1))$ por

$$Tu(x) = \int_0^x tu(t)\,dt$$

(a) Demuestre que $T \in \mathcal{K}(L^2((0,1)))$.

(b) Determine $EV(T)$ y $\sigma(T)$.

(c) ¿Se puede escribir explícitamente $(T - \lambda I)^{-1}$ cuando $\lambda \in \rho(T)$?

(d) Encuentre $T^\star$.

Demostración. (a) Por simplicidad, denotaremos $\|\cdot\|_{L^2((0,1))} = \|\cdot\|_2$. Veamos que T es acotado. Sea $u \in L^2((0,1))$, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\|Tu\|_2 &= \left(\int_0^1 \left|\int_0^x tu(t)\,dt\right|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_0^1 \left(\int_0^x |t||u(t)|\,dt\right)^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |t||u(t)|\,dt\right)^2 dx\right)^{1/2} \\
&= \int_0^1 |t||u(t)|\,dt \\
&\leq \left(\int_0^1 |t|^2\,dt\right)^{1/2} \|u\|_2 \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\|u\|_2,
\end{aligned}$$

probando así que T es acotado.

□

0.2 Ecuaciones Diferenciales en Espacios de Hilbert

Problema 2.
Consideraciones preliminares. Sea H un espacio de Hilbert separable y $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto. $C(J; H)$ denota el espacio de todas las funciones $u : J \to H$ que son continuas, es decir, para todo $t \in J$ se tiene que

$$\lim_{t' \to t} \|u(t) - u(t')\|_H = 0.$$

Por otro lado, denotamos por $C^1(J; H)$ el conjunto de las funciones $u \in C(J; H)$ para las cuales

$$u'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

existe para todo $t \in J$ (el límite anterior se toma en H) y $u' \in C(J; H)$. Luego, podemos definir $u \in C^2(J; H)$ como la clase de funciones u para las cuales $u' \in C^1(J; H)$. De manera recursiva se define $C^k(J; H)$ para enteros $k \geq 1$.
Note que, definiendo derivadas laterales, podemos considerar el espacio $C^k(J; H)$ donde J es un intervalo cerrado.

(a) (1.5 puntos) Sea $k \geq 0$ entero. Suponga que el intervalo J es cerrado y acotado. Muestre que $C^k(J; H)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{C^k} = \sum_{l=0}^{k} \sup_{t \in J} \|u^{(l)}(t)\|_H,$$

donde $u^{(l)}$ denota la l-ésima derivada de u, $l = 0, \ldots, k$.

(b) (1.5 puntos) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Dada una función $F \in C([a, b]; H)$, muestre que podemos definir la integral

$$\int_a^b F(\tau)\, d\tau \in H$$

como límite de sumas de Riemann en H. Además, se sigue que

$$\left\| \int_a^b F(\tau)\, d\tau \right\|_H \leq \int_a^b \|F(\tau)\|_H\, d\tau.$$

Más precisamente, sea $Z = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ dada por $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$. Muestre que las sumas de Riemann

$$S(F, Z) = \sum_{j=1}^{n} F(t_j^*)(t_j - t_{j-1}), \quad \text{donde } t_j^* \in [t_{j-1}, t_j],$$

convergen a un límite en H (la integral) cuando el tamaño de la partición

$$|Z| = \max_j |t_j - t_{j-1}|$$

tiende a cero.

(c) (4 puntos) Sea $A \in \mathcal{K}(H)$ un operador autoadjunto tal que $A \geq 0$ (es decir, $(Ax, x) \geq 0$ para todo $x \in H$). Sea $F \in C([0,\infty), H)$. Dado $u_0 \in H$, considere el problema de Cauchy para la ecuación del calor abstracta con término forzante

$$\begin{cases} u'(t) = -Au(t) + F(t), & t \in (0,\infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

(c.1) (2 puntos) Suponga que $F = 0$. Utilizando el cálculo funcional, que es válido por el teorema espectral (recuerde que A es compacto y autoadjunto), defina el operador e^{-tA} y muestre que

$$u(t) = e^{-tA}u_0, \quad t > 0,$$

es solución de la ecuación anterior con $F = 0$ y que $u \in C^1((0,\infty), H)$. ¿Es posible concluir que $u \in C^k((0,\infty), H)$ para todo $k \geq 1$ y además

$$\sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_H < \infty?$$

(c.2) (2 puntos) Muestre que en el caso general (con F no necesariamente nula), la función

$$u(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)A}F(\tau)\, d\tau,$$

pertenece a $C^1((0,\infty), H)$, es solución de la ecuación. ¿Bajo qué condiciones sobre F puede concluir que para un $k \geq 1$ entero dado, $u \in C^k((0,\infty), H)$ y además

$$\sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_H < \infty?$$

Demostración. (a) Veamos que si tomamos $k \geq 0$ entero, entonces $C^k(J; H)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{C^k} = \sum_{l=0}^{k} \sup_{t \in J} \left\|u^{(l)}(t)\right\|_H,$$

Primero veamos que $\|\cdot\|_{C^k}$ en efecto es una norma bien definida.
Note que como J es ujn intervalo cerrado y acotado, entonces dada $u \in C^k(J; H)$ se tiene que u y todas sus derivadas alcanzan su máximo en J, por lo que en efecto la suma finita de los supremos de las derivadas de u se encuentra bien definida. Ahora verifiquemos las condiciones de norma, note que dadas $u, v \in$

$C^k(J;H)$ y λ escalar se tiene que

$$\begin{aligned}
\|u+\lambda v\|_{C^k} &= \sum_{l=0}^{k} \sup_{t\in J} \left\|(u+\lambda v)^{(l)}(t)\right\|_H, \\
&= \sum_{l=0}^{k} \sup_{t\in J} \left\|u^{(l)}(t)+\lambda v^{(l)}(t)\right\|_H, \\
&\leq \sum_{l=0}^{k} \sup_{t\in J} \left\|u^{(l)}(t)\right\|_H + |\lambda| \left\|v^{(l)}(t)\right\|_H, \\
&\leq \sum_{l=0}^{k} \sup_{t\in J} \left\|u^{(l)}(t)\right\|_H + |\lambda| \sup_{t\in J} \left\|v^{(l)}(t)\right\|_H, \\
&\leq \sum_{l=0}^{k} \sup_{t\in J} \left\|u^{(l)}(t)\right\|_H + |\lambda| \sum_{l=0}^{k} \sup_{t\in J} \left\|v^{(l)}(t)\right\|_H, \\
&= \|u\|_{C^k} + |\lambda| \, \|v\|_{C^k}.
\end{aligned}$$

Por otro lado note que $u = 0$ sí y sólo si $\|u\|_H = 0$, lo que sucede si y sólo si el cociente $\frac{u(t+h)-u(t)}{h} = 0$ en H para todo t y h, lo que a su vez se da si y sólo si $u' = 0$, inductivamente se llega a que $u^{(l)} = 0$ para todo $0 \leq l \leq k$, lo que se cumple si y sólo si $\|u\|_{C^k} = 0$, lo que nos permite concluir que $\|\cdot\|_{C^k}$ en efecto es una norma bien definida.
Ahora veamos que el espacio antes mencionado es completo, es decir, dada $\{u_m\} \subset C^k(J:H)$ sucesión de Cauchy esta converge en $C^k(J;H)$.
Note que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$ entonces se satisface que

$$\|u_n - u_m\|_{C^k} \leq \epsilon.$$

Pero note que esto es lo mismo que

$$\|u_n - u_m\|_{C^k} = \sum_{l=0}^{k} \sup_{t\in J} \|u_n(t) - u_m(t)\|_H \leq \epsilon.$$

Lo que implica que para todo $t \in J$ y todo $0 \leq l \leq k$ se satisface que

$$\left\|u_n^{(l)}(t) - u_m^{(l)}(t)\right\|_H \leq \epsilon.$$

Pero como H es un espacio de Hilbert, sabemos que la sucesión $\{u_m^{(l)}(t)\} \subset H$ de Cauchy, converge a un $u^{(l)}(t)$ cuando $m \to \infty$.
Por practicidad, veamos que en efecto $u' = u^{(1)}$, las demás derivadas se pueden razonar de forma inductiva.
Note que como

$$\sup_{t\in J} \|u_m(t) - u(t)\|_H \leq \epsilon,$$

entonces $\{u_m\}$ converge uniformemente a u, por lo que podremos hacer el siguiente cálculo cambiando el orden de los límites

$$\begin{aligned} u'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(t+h)-u(t)}{h}, \\ &= \lim_{h\to 0}\lim_{m\to\infty} \frac{u_m(t+h)-u_m(t)}{h}, \\ &= \lim_{m\to\infty}\lim_{h\to 0} \frac{u_m(t+h)-u_m(t)}{h}, \\ &= \lim_{m\to\infty} u_m^{(1)}, \\ &= u^{(1)}(t). \end{aligned}$$

Luego $u_m^{(l)}(t) \to u^{(l)}(t)$ en H para todo $0 \le l \le k$ y para cada $t \in J$.
Veamos que esto implica convergencia en $C^k(J;H)$.
Note que dado $\epsilon > 0$ se puede tomar un $N > 0$ adecuado para el cual si tomamos $n, m > N$ se cumple que

$$\begin{aligned} \|u_m - u\|_{C^k} &= \sum_{l=0}^{k} \sup_{t\in J} \left\| u_m^{(l)}(t) - u^{(l)}(t) \right\|_H, \\ &= \sum_{l=0}^{k} \sup_{t\in J} \lim_{n\to\infty} \left\| u_m^{(l)}(t) - u_n^{(l)}(t) \right\|_H, \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{k} \sup_{t\in J} \left\| u_m^{(l)}(t) - u_n^{(l)}(t) \right\|_H, \\ &\le \lim_{n\to\infty} \epsilon, \\ &\le \epsilon. \end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir que $(C^k(J;H), \|\cdot\|_{C^k})$ es un espacio de Banach.

1. Sean $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ y $\mathcal{Z}' = \{s_0, s_1, \cdots, s_m\}$ particiones del intervalo $[a, b]$, veamos que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $|\mathcal{Z}|, |\mathcal{Z}'| < N$, entonces

$$\left\| S(f,\mathcal{Z}) - S(f,\mathcal{Z}') \right\|_H < \epsilon.$$

Para ver esto suponga $\mathcal{Z}'' = \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}' = \{q_0, q_1, \cdots, q_l\}$, note que

$$\left\| S(f,\mathcal{Z}) - S(f,\mathcal{Z}') \right\|_H \le \left\| S(f,\mathcal{Z}) - S(f,\mathcal{Z}'') \right\|_H + \left\| S(f,\mathcal{Z}'') - S(f,\mathcal{Z}') \right\|_H$$

Luego

$$\left\| S(f,\mathcal{Z}) - S(f,\mathcal{Z}'') \right\|_H = \left\| \sum_{j=1}^{n} F(t^*)(t_j - t_{j-1}) - \sum_{j=1}^{l} F(q^*)(q_j - q_{j-1}) \right\|_H,$$

Note que como $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Z}''$, entonces sabemos que existe r_j tal que

$$[t_{j-1}, t_j] = \bigcup_{i=0}^{r_j} [q_{j-1,i}, q_{j,i}] \qquad \text{con } q_{j,i} \in \mathcal{Z}''.$$

De lo que podemos computar que

$$F(t^*)(t_j - t_{j-1}) - \sum_{i=0}^{r_j} F(q^*)(q_{j,i} - q_{j-1,i}) = \sum_{i=0}^{r_j} (F(t^*) - F(q^*))(q_{j,i} - q_{j-1}, i),$$

además, recuerde que como F es uniformemente continua en $[a, b]$, dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $|t - q| < N$, entonces

$$\|F(t) - F(q)\|_H < \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Si suponemos que $|\mathcal{Z}''| < |\mathcal{Z}| < N$, entonces

$$\begin{aligned}
\left\|S(f, \mathcal{Z}) - S(f, \mathcal{Z}'')\right\|_H &= \left\| \sum_{j=1}^{n} F(t^*)(t_j - t_{j-1}) - \sum_{j=1}^{l} F(q^*)(q_j - q_{j-1}) \right\|_H, \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{r_j} (F(t^*) - F(q^*))(q_{j,i} - q_{j-1,i}) \right\|_H, \\
&\le \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{r_j} (q_{j,i} - q_{j-1,i}) \left\|F(t^*) - F(q^*)\right\|_H, \\
&\le \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}), \\
&\le \frac{\epsilon}{2(b-a)} (b-a) = \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Análogamente, si suponemos $|\mathcal{Z}''| < |\mathcal{Z}'| < N$ podemos asegurar que

$$\left\|S(f, \mathcal{Z}'') - S(f, \mathcal{Z}')\right\|_H \le \frac{\epsilon}{2}.$$

Luego podemos asegurar que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $|\mathcal{Z}|, |\mathcal{Z}'| < N$, entonces

$$\begin{aligned}
\left\|S(f, \mathcal{Z}) - S(f, \mathcal{Z}')\right\|_H &\le \left\|S(f, \mathcal{Z}) - S(f, \mathcal{Z}'')\right\|_H + \left\|S(f, \mathcal{Z}'') - S(f, \mathcal{Z}')\right\|_H, \\
&\le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}, \\
&\le \epsilon.
\end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir que $\{S(f, \mathcal{Z})\} \subset H$ es una sucesión de Cauchy, luego como H es Hilbert (por ende completo) sabemos que converge a alguien que denotaremos $\int_a^b F(\tau) d\tau \in H$.

Para ver la desigualdad note que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_a^b F(\tau)\, d\tau \right\|_H &= \left\| \lim_{|\mathcal{Z}| \to 0} S(f, \mathcal{Z}) \right\|, \\
&\leq \lim_{|Z| \to 0} \sum_{j=1}^{n} \|F(t^*)\|_H (t_j - t_{j-1}), \\
&\leq \int_a^b \|F(\tau)\|_H \, d\tau.
\end{aligned}$$

□