UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Sede Bogotá

Departamento de Matemáticas

2029662 ANÁLISIS ARMÓNICO

LISTA DE EJERCICIOS 3

Prof.: **Ricardo Pastrán** 7 de mayo de 2025

1. Pruebe que el operador $\mathcal{F}$ de la transformada de Fourier es un isomorfismo de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ en si mismo. Dada $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-índice, pruebe que:

i. $\widehat{\partial^\alpha \Psi} = (2\pi i)^{|\alpha|}\, \xi^\alpha \widehat{\Psi}$;

ii. $(-2\pi i)^{|\alpha|}\, \widehat{x^\alpha \Psi} = \partial^\alpha \widehat{\Psi}$;

iii. $\left(\widehat{\Psi}\right)^\vee = \Psi = \left(\check{\Psi}\right)^\wedge$;

iv. $\mathcal{F}^4 = Id$.

2. Pruebe la siguiente extensión en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de la fórmula $\left(e^{-\lambda\pi|x|^2}\right)^\wedge(\xi) = \lambda^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi\frac{|\xi|^2}{\lambda}}$, probada en la primera lista de ejercicios:

$$\left(e^{-\lambda|x|^2}\right)^\wedge(\xi) = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\pi^2\frac{|\xi|^2}{\lambda}}$$

donde $\sqrt{\lambda}$ es definida como la rama con $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Use un argumento de continuación analítica. Pruebe que la fórmula también vale en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ cuando $\operatorname{Re}\lambda = 0$ y $\lambda \neq 0$.

3. [Transformada de Fourier de $|x|^{-\alpha}$, $0 < \alpha < n$]
Pruebe la fórmula

$$\int_0^{+\infty} e^{-\pi\delta|x|^2}\delta^{\beta-1}\, d\delta = \frac{c_\beta}{|x|^{2\beta}}, \text{ para todo } \ \beta > 0.$$

Deduzca que existe una constante $c_{n,\alpha}$ tal que

$$\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)^\wedge(\xi) = c_{n,\alpha}\, |\xi|^{n-\alpha}, \text{ para todo } \ \alpha \in (0,n), \text{ en } \ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

4. [Espacios de Lorentz]

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ una función medible. Para $\alpha \geqslant 0$, se define la función de distribución de f por

$$\lambda_f(\alpha) = m(\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |f(x)| > \alpha\}).$$

i. Pruebe que λ_f es una función no creciente y continua a derecha.

ii. Definimos $f^* : (0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$, $t \mapsto \inf\{s > 0 \,:\, \lambda_f(s) \leqslant t\}$. Pruebe que f^* es una función no creciente y continua a derecha.

iii. Pruebe que $\lambda_f = \lambda_{f^*}$.

iv. Para $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, se define el espacio de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de las funciones medibles satisfaciendo $\|f\|_{p,q} < \infty$, donde

$$\|f\|_{p,q} = \left(\frac{q}{p}\int_0^{+\infty} \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}, \text{ si } \ 1 \leqslant p, q < \infty,$$

y

$$\|f\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t), \text{ si } \ 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Pruebe que

$$\|f\|_{p,p} = \|f^*\|_p = \|f\|_p, \text{ para todo } \ 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

5. Considere la función $f_a(x) = \dfrac{x}{a - x^2}$.

i. Si $a \geqslant 0$, pruebe que la función valor principal de $f_a(x)$,

$$\text{v.p.}\frac{x}{a - x^2}(\varphi) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int\limits_{\epsilon < |a - x^2| < 1/\epsilon} \frac{x}{a - x^2}\,\varphi(x)\,dx,$$

con $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ define una distribución temperada. Más todavía, pruebe que si

$$\widehat{f_a}(\xi) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int\limits_{\epsilon < |a - x^2| < 1/\epsilon} e^{-2\pi i x \cdot \xi}\,\frac{x}{a - x^2}\,\varphi(x)\,dx,$$

entonces $\left\|\widehat{f_a}\right\|_\infty \leqslant M$, donde la constante M es independiente de a.

ii. Muestre que (i.) también vale si $a < 0$.