Taller VII

1. *Definición*: Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto del plano complejo, f función definida sobre U y sea $f(U) = V$. Se dique que f es *isomorfismo analítico* si V es abierto y existe una función $g : V \to U$ tal que $f \circ g = id_V$, $g \circ f = id_U$.

   Se dice que f es *isomorfismo analítico local* en z_0, si existe un abierto U, $z_0 \in U$ y f es isomorfismo analítico sobre U.

   Suponga $0 \in U$, sea f analítica en $z = 0$ y suponga que $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ...$ con $a_1 \neq 0$. Probar que f es isomorfismo analítico local en $z = 0$.

2. *Definición*: Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto del plano complejo, f función definida sobre U. Se dice que f es una *aplicación abierta* si para todo abierto $\tilde{U} \subseteq U$, entonces $f(\tilde{U})$ es abierto.

   Sea f es analítica sobre un abierto U. Suponga que en cada punto $z_0 \in U$, f es no constante en un disco centrado en ese punto. Probar que f es una aplicación abierta.

3. Sea f es analítica sobre un abierto U y suponga que es inyectiva. Sea $f(U) = V$. Probar que $f : U \to V$ es isomorfismo analítico.

4. *Definición*: Se dice que una función f es *localmente constante* en z_0, si existe un disco abierto $D(z_0, r)$, tal que f es constante sobre D.

   Sea f es analítica sobre un abierto U, sea $z_0 \in U$ un máximo para $|f|$ ($|f(z_0)| \geq |f(z)|$, para todo $z \in U$). Probar que f es localmente constante en z_0.

5. Sea f es analítica sobre un abierto U, sea $z_0 \in U$ un máximo para $Re(f)$ (parte real de f) ($Re(f(z_0)) \geq Re(f(z))$, para todo $z \in U$). Probar que f es localmente constante en z_0.

6. Sea f es analítica sobre un abierto U, sea $z_0 \in U$ un máximo para $Im(f)$ (parte imaginaria de f). Probar que f es localmente constante en z_0.

7. Sea $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_m z^m$ un polinomio no constante. Probar, existe z_0 tal que $f(z_0) = 0$.

8. Sea $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, con radio de convergencia r. Probar:

   - $g(z) = \sum_1^\infty n a_n z^{n-1}$ tiene el mismo radio de convergencia de f.

- f es holomorfica en $D(0,r)$ y $f'(z) = g(z)$.
- Pruebe $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.
- Sea $h(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$. Pruebe que h tiene radio de convergencia r. (Note que $h'(z) = f(z)$, h se le llama primitiva de f).

9. Si $f(z) = \sum_0^\infty \frac{z^{2n}}{(2n)!}$. Probar $f''(z) = f(z)$.

10. Si $f(z) = \sum_0^\infty \frac{z^{2n}}{(n!)^2}$. Probar $z^2 f''(z) + z f'(z) = 4z^2 f(z)$.

11. Sea $f(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots$. Mostrar que $f'(z) = \frac{1}{z^2+1}$.

12. Si $J(z) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n!)^2} (\frac{z}{2})^{2n}$. Probar
$$z^2 J''(z) + z J'(z) + z^2 J(z) = 0.$$

13. Para k entro positivo, sea $J_k(z) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} (\frac{z}{2})^{2n+k}$. Probar
$$z^2 J_k''(z) + z J_k'(z) + (z^2 - k^2) J_k(z) = 0.$$