Ecuaciones Diferenciales Parciales I: Taller 1

25 de febrero del 2024

Universidad Nacional de Colombia

Andrés David Cadena Simons   Edgar Santiago Ochoa Quiroga
David Felipe Viuche Malaver

Problema 1:

Demuestre el teorema multinomial. Sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$(x_1 + \cdots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \begin{pmatrix} |\alpha| \\ \alpha \end{pmatrix} x^\alpha,$$

donde $\begin{pmatrix} |\alpha| \\ \alpha \end{pmatrix} := \dfrac{|\alpha|!}{\alpha!}$ con $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$ y $x^\alpha = x_1^\alpha \ldots x_n^{\alpha_n}$. La suma es considerada sobre todos los multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ con $|\alpha| = k$. Sugerencia. Para cada $k \geq 0$, muestre la igualdad buscada por inducción sobre en número de variables n.

Solución:

Dado $k \geq 0$, razonemos por inducción sobre el número de variables n. Para $n = 1$ el resultado es trivial.
Ahora, supongamos que el resultado se tiene para todo $s < n + 1$, esto es:

$$(x_1 + ... + x_n)^k = \sum_{|\alpha_1 + ... + \alpha_n| = k} \binom{|\alpha|}{\alpha} x^\alpha.$$

Ahora, procedamos con $n + 1$:

$$\begin{aligned}
(x_1 + ... + x_n + x_{n+1})^k &= (x_1 + ... + x_n + x_{n+1})^k, && \text{teorema del binomio de Newton} \\
&= \sum_{s=0}^{k} \frac{k!}{s!(k-s)!} (x_1 + ... + x_n)^s x_{n+1}^{k-s}, && \text{hipótesis de inducción} \\
&= \sum_{s=0}^{k} \frac{k!}{s!(k-s)!} \left(\sum_{|\alpha_1 + ... + \alpha_n = s|} \frac{s!}{\alpha_1! ... \alpha_n!} x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n} \right) x_{n+1}^{k-s}, \\
&= \sum_{s=0}^{k} \sum_{|\alpha_1 + ... + \alpha_n| = s} \frac{k!}{s!(k-s)!} \frac{s!}{\alpha_1! ... \alpha_n!} x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n} x_{n+1}^{k-s} \\
&= \sum_{s=0}^{k} \sum_{|\alpha_1 + ... + \alpha_n| = s} \frac{k!}{\alpha_1! ... \alpha_n! (k-s)!} x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n} x_{n+1}^{k-s}, && \alpha_{n+1} = k - s \\
&= \sum_{|\alpha_1 ... + \alpha_n + \alpha_{n+1}|} \frac{k!}{\alpha_1! ... \alpha_n! (k-s)!} x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n} x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}. \\
&= \sum_{|\alpha|} \binom{|\alpha|}{\alpha} x^\alpha
\end{aligned}$$

♥

Problema 2:

Para cada una de las siguientes EDPs diga su orden y determine si es lineal, semilineal, cuasilineal o completamente no lineal.
Nota: Por simplicidad asumiremos que $u = u(x,t)$.

- **Ecuación de Schrödinger:** $iu_t + \Delta u + V(x)u = 0$.

Solución:

Lineal de segundo orden.
Veamos que la siguiente expresión es válida:

$$\begin{aligned} iu_t + \Delta u + V(x)u &= iu_t + u_{xx} + u_{tt} + V(x)u \\ &= u_{xx} + u_{tt} + iu_t + V(x)u \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego los coeficientes de la EDP son $(1, 1, i, V(x))$, por lo cuál sabemos que la ecuación es **Lineal** y como tenemos a u_{xx}, entonces podemos concluir en que la EDP es de **segundo orden**.

- **Ecuación del telégrafo:** $u_{tt} + 2du_t - u_x x = 0$ donde $d \in \mathbb{R}$.

Solución:

Lineal de segundo orden.
Veamos que la siguiente expresión es válida:

$$\begin{aligned} u_{tt} + 2du_t - u_x x &= u_{tt} + 2du_t - xu_x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego los coeficientes de la EDP son $(1, 2d, -x)$, por lo cuál sabemos que la ecuación es **Lineal** y como tenemos a u_{tt}, entonces podemos concluir en que la EDP es de **segundo orden**.

- **Ecuación de superficie mínima:** $\operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{(1+\|\nabla u\|^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = 0$, donde $\operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F$, es el operador divergencia del campo F.

Solución:

Cuasilineal de segundo orden.
Veamos que la siguiente expresión es válida:

$$\begin{aligned}\frac{\nabla u}{(1+\|\nabla u\|^2)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{(u_x, u_t)}{(1+u_x^2+u_t^2)^{\frac{1}{2}}}\\ &= \left(u_x(1+u_x^2+u_t^2)^{-\frac{1}{2}}, u_t(1+u_x^2+u_t^2)^{-\frac{1}{2}}\right)\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{(1+\|\nabla u\|^2)^{\frac{1}{2}}}\right) &= \operatorname{div}\left(u_x(1+u_x^2+u_t^2)^{-\frac{1}{2}}, u_t(1+u_x^2+u_t^2)^{-\frac{1}{2}}\right)\\ &= \frac{u_{xx}}{\sqrt{1+u_x^2+u_t^2}} + \left(-\frac{2(u_x)^2(u_{xx}) + 2(u_t)(u_x)(u_{tx})}{2\sqrt{(1+u_x^2+u_t^2)^3}}\right) +\\ &\quad \frac{u_{tt}}{\sqrt{1+u_x^2+u_t^2}} + \left(-\frac{2(u_x)(u_t)(u_{xt}) + 2(u_t)^2(u_{tt})}{2\sqrt{(1+u_x^2+u_t^2)^3}}\right)\\ &= \frac{u_{xx}(1+u_x^2+u_t^2) + u_{tt}(1+u_x^2+u_t^2) - u_{xx}(u_x^2) - u_{tx}(u_x)(u_t) - u_{tt}(u_t^2) - u_{xt}(u_x)(u_t)}{\sqrt{(1+u_x^2+u_t^2)^3}}\\ &= \frac{u_{xx}(1+u_t^2) + u_{tt}(1+u_x^2) - u_{tx}(u_x)(u_t) - u_{xt}(u_x)(u_t)}{\sqrt{(1+u_x^2+u_t^2)^3}}\\ &= 0\end{aligned}$$

Luego por el coeficiente $\frac{(1+u_t^2)}{\sqrt{(1+u_x^2+u_t^2)^3}}$ que acompaña al término u_{xx} de la EDP sabemos que la ecuación es **Cuasilineal** y como tenemos a u_{xx}, entonces podemos concluir en que la EDP es de **segundo orden**.

- **Ecuación de Monge-Ampere:** $\det(\mathrm{Hu}) = f$, donde Hu denota la matriz Hessiana de u.

Solución:

Completamente no lineal de segundo orden.
En nuestro caso $u = u(x,t)$, es válida la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\det(Hu) &= u_{xx}u_{tt} - u_{tx}u_{xt} = u_{xx}u_{tt} - (u_{xt})^2 \\ &= f\end{aligned}$$

Luego, si asumimos $f = f(x)$, por el termino $(u_{xt})^2$ de la EDP sabemos que la ecuación es **Completamente no lineal** y como tenemos a u_{xx}, entonces podemos concluir en que la EDP es de **segundo orden**.

Problema 3:

Solucione utilizando características:

(a) $u_x + u_y = u^2$, con $u(x,0) = h(x)$.

Solución:

Tendiendo en cuenta el problema de valor inicial tomaremos la curva $C = \{(r, 0, h(r))\}$. Note que la EDP puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u_x + u_y - u^2 &= 0 \\ (1, 1, u^2) \cdot (u_x, u_y, -1) &= 0 \end{aligned}$$

De esta forma con la información de la curva C y la reescritura podemos plantear el siguiente sistema de EDOs

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = 1, & x(0,r) = r \\ \\ \dfrac{dy}{ds} = 1, & y(0,r) = 0 \\ \\ \dfrac{dz}{ds} = z^2, & z(0,r) = h(r). \end{cases}$$

De esta manera tenemos tres EDO que pueden ser resueltas por separación de variables obteniendo así:

$$\begin{aligned} x &= s + c_1(r) \\ y &= s + c_2(r) \\ z &= -\frac{1}{s + c_3(r)}. \end{aligned}$$

y usando las condiciones iniciales para cada EDO obtenemos que:

$$\begin{aligned} c_1(r) &= r \\ c_2(r) &= 0 \\ c_3(r) &= -\frac{1}{h(r)}. \end{aligned}$$

Ahora verificaremos si podemos devolver el cambio de variable por medio del Jacobiano:

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial r} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \end{pmatrix} \Bigg|_{(0,r)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

Como es distinto de 0 por el teorema de la función inversa sabemos que podemos despejar nuestras ecuaciones para dejar a z en términos de x y y. Como $c_2(r) = 0$ tenemos que $y = s$. Además como $c_1(r) = r$ en la ecuación de x tenemos que $x = y + r$ es decir que $r = x - y$ y reemplazando en z obtenemos que nuestra solución es:

$$u(x, y) = z = -\frac{1}{y - \frac{1}{h(x-y)}} = \frac{h(x-y)}{yh(x-y) - y}.$$

(b) Sea $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ con $b_n \neq 0$. Considere la EDP: $\vec{b} \cdot \nabla u = e^{-u}$, con $u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = h(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Solución:

Apoyándonos en el dato inicial nuestra superficie esta dada por:

$$C = \{(r_1, \ldots, r_{n-1}, 0, h(r_1 \ldots, r_{n-1}))\}$$

y realizando una reescritura de la EDP obtenemos que:

$$(b_1, \ldots, b_n, e^{-u}) \cdot (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, -1) = 0$$

De esta manera notamos que el sistema de EDOs es el siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{ds} = b_i, & x_i(0, r_1 \ldots, r_{n-1}) = r_i \text{ con } 1 \leq i \leq n-1, \\ \\ \dfrac{dx_n}{ds} = b_n, & x_n(0, r_1 \ldots, r_{n-1}) = 0, \\ \\ \dfrac{dz}{ds} = e^{-z}, & z(0, r_1 \ldots, r_{n-1}) = h(r_1 \ldots, r_{n-1}). \end{cases}$$

Así resolviendo cada EDO tenemos que:

$$\begin{aligned} x_i &= b_i s + c_i(r) \text{ con } 1 \leq i \leq n, \\ z &= \log(s + c(r)). \end{aligned}$$

y usando las condiciones iniciales tenemos que:

$$\begin{aligned} c_i(r) &= r_i \text{ con } 1 \leq i \leq n-1, \\ c_n(r) &= 0, \\ c(r) &= e^{h(r_1, \ldots, r_{n-1})}. \end{aligned}$$

Ahora observemos si el Jacobiano es diferente de 0 para poder aplicar el teorema de la función inversa:

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial x_1}{\partial r_{n-1}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial r_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial x_2}{\partial r_{n-1}} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial s} & \frac{\partial x_n}{\partial r_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial x_n}{\partial r_{n-1}} \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,r_1,\ldots,r_{n-1})} = \det\begin{pmatrix} b_1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & & \\ b_n & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} b_n \neq 0$$

Ahora si con seguridad podemos despejar. Empecemos notando que como $c_n(r) = 0$ $x_n = b_n s$ y como $b_n \neq 0$ tenemos que $s = \frac{x_n}{b_n}$ de esta manera como $c_i(r) = r_i$ para $1 \leq i \leq n-1$ tenemos que $x_i = \frac{b_i}{b_n}x_n + r_i$ y por tanto $r_i = x_i - \frac{b_i}{b_n}x_n$. De esta manera reemplazando en z obtenemos que la solución es:

$$u(x,y) = z = \log\left(\frac{x_n}{b_n} + e^{h\left(x_1 - \frac{b_1}{b_n}x_n, \ldots, x_{n-1} - \frac{b_{n-1}}{b_n}x_n\right)}\right)$$

(c) $x_1 u_{x_1} + 2x_2 u_{x_2} + u_{x_3} = 3u$, con $u(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2)$.

Solución:

Inspirado por el dato inicial tenemos que la superficie es $C = \{(r_1, r_2, 0, g(r_1, r_2))\}$ y si reescribimos la EDP de la siguiente forma:

$$(x_1, 2x_2, 1, 3u) \cdot (u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}, -1) = 0$$

De esta forma el sitema de EDOs queda planteado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{ds} = x_1, & x_1(0, r_1, r_2) = r_1, \\ \\ \frac{dx_2}{ds} = 2x_2, & x_2(0, r_1, r_2) = r_2, \\ \\ \frac{dx_3}{ds} = 1, & x_3(0, r_1, r_2) = 0 \\ \\ \frac{dz}{ds} = 3z, & z(0, r_1, r_2) = g(r_1, r_2) \end{cases}$$

Asi resolviendo cada EDO tenemos que:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1(r)e^s \\ x_2 &= c_2(r)e^{2s} \\ x_3 &= s + c_3(r) \\ z &= c(r)e^{3s} \end{aligned}$$

y por las condiciones iniciales tenemos que:

$$\begin{aligned} c_1(r) &= r_1 \\ c_2(r) &= r_2 \\ c_3(r) &= 0 \\ c(r) &= g(r_1, r_2) \end{aligned}$$

Ahora verifiquemos por medio del Jacobiano si podemos aplicar el teorema de la función inversa:

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial s} & \dfrac{\partial x_1}{\partial r_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial r_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial s} & \dfrac{\partial x_2}{\partial r_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial r_2} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial s} & \dfrac{\partial x_3}{\partial r_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial r_2} \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,r_1,r_2)} = \det \begin{pmatrix} r_1 & 1 & 0 \\ 2r_2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Esto nos indica que si podemos despejar entonces de entrada sabemos que $x_3 = s$ ya que $c_3(r) = 0$. Luego como $c_1(r) = r_1$ tenemos que $x_1 = r_1 e_3^x$ y por tanto $r_1 = x_1 e^{-x_3}$. De manera similar obtenemos que $r_2 = x_2 e^{-2x_3}$ y juntando todo y reemplazando en z obtenemos la solución que es:

$$u(x, y) = z = g(x_1 e^{-x_3}, x_2 e^{-2x_3})e^{3x_3}.$$

(d) $uu_x + u_y = 1$, con $u(x, x) = \frac{1}{2}x$.

Solución:

Tomando como referencia el dato inicial nuestra curva sera $C = \{(r, r, \frac{1}{2}r)\}$ y con una reescritura de la EDP tenemos que:

$$(u, 1, 1) \cdot (u_x.u_y, -1) = 0$$

De esta manera obtenemos el siguiente sistema de EDOs:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = z, & x(r,r) = r \\ \\ \dfrac{dy}{ds} = 1, & y(r,r) = r \\ \\ \dfrac{dz}{ds} = 1, & z(r,r) = \frac{1}{2}r \end{cases}$$

Resolviendo la ultima ecuación tenemos que $z = s + c_3(r)$ pero por el valor inicial sabemos que $c_3(r) = -\frac{1}{2}r$ es decir $z = s - \frac{1}{2}r$. Si reemplazamos z por la expresión podemos resolver la primera ecuación y obtenemos que:

$$\begin{aligned} x &= \frac{s^2}{2} - \frac{rs}{2} + c_1(r) \\ y &= s + c_2(r) \end{aligned}$$

y utilizando los valores iniciales obtenemos que $c_1(r) = r$ y $c_2(r) = 0$ así llegamos a las 3 ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= \frac{s^2}{2} - \frac{rs}{2} + r \\ y &= s \\ z &= s - \frac{r}{2} \end{aligned}$$

Antes de intentar despejar, aseguremos que podemos por medio del Jacobiano:

$$\det \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial r} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \end{pmatrix}\right|_{(r,r)} = \det \begin{pmatrix} \frac{r}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{r}{2} - 1 \neq 0$$

esto quiere decir que podemos invertir solo si $r \neq 2$ pero suponiendo esto tenemos por las ecuaciones que $x = \dfrac{y^2}{2} + r(1 - \dfrac{y}{2})$ es decir que $r = \dfrac{2x - y^2}{2 - y}$ de esta manera reemplazando en z obtenemos que la solución es:

$$u(x,y) = z = y - \frac{2x - y^2}{4 - 2y} = \frac{4y - 2x - y^2}{4 - 2y}.$$

(e) $u_t + u_x^2 = t$, con $u(x,0) = 0$.

Solución:

Inspirado en los datos iniciales tenemos que nuestra curva es $C = \{(r, 0, 0)\}$ Notemos que si reescribimos nuestra EDP en términos de una función $F(x, t, z, p, q) = 0$ donde $z = u$, $p = u_x$ y $q = u_t$ tenemos que:

$$F(x, t, z, p, q) = p^2 + q - t = 0$$

De aquí podemos concluir inmediatamente que $F_p = 2p$, $F_q = 1$, $F_x = 0$, $F_t = -1$ y $F_z = 0$. Por lo tanto tendríamos las siguientes EDOs:

$$\frac{dx}{ds} = 2p \qquad \frac{dt}{ds} = 1 \qquad \frac{dz}{ds} = 2p^2 + q \qquad \frac{dp}{ds} = 0 \qquad \frac{dq}{ds} = 1$$

Ahora por la curva ya tenemos tres datos iniciales $x(0, r) = r$, $t(0, r) = 0$ y $z(0, r) = 0$ nos faltan los datos iniciales para las EDOs de p y q intentemos determinarlas. Nuestra primera ecuación para esto es:

$$F(r, 0, 0, \psi_1, \psi_2) = \psi_1^2 + \psi_2 = 0$$

y la segunda esta dada por:

$$0 = \psi_1 \cdot 1 + \psi_2 \cdot 0$$

De esto obtenemos que $\psi_1 = 0 = \psi_2$. De esta manera ya podemos plantear el sistema de EDOs

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = 2p, & x(0, r) = r, \\ \\ \dfrac{dt}{ds} = 1, & t(0, r) = 0, \\ \\ \dfrac{dz}{ds} = 2p^2 + q, & z(0, r) = 0, \\ \\ \dfrac{dp}{ds} = 0, & p(0, r) = 0, \\ \\ \dfrac{dq}{ds} = 1, & q(0, r) = 0. \end{cases}$$

De las dos ultimas ecuaciones obtenemos que $p = c_4(r)$ pero por el valor inicial sabemos entonces que $p = 0$ y que $q = s + c_5(r)$ pero como $q(0, r) = 0$ tenemos que $q = s$ y con esta información podemos resolver las tres primeras fácilmente ya que si reemplazamos obtenemos que:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = 0, \quad x(0,r) = r, \\ \\ \dfrac{dt}{ds} = 1, \quad t(0,r) = 0, \\ \\ \dfrac{dz}{ds} = s, \quad z(0,r) = 0. \end{cases}$$

Entonces por razonamientos similares tenemos que $t = s$, $x = c_1(r)$ pero por el valor inicial concluimos que $x = r$ y por ultimo $z = \dfrac{s^2}{2} + c_3(r)$ y por el valor inicial $c_3(r) = 0$ es decir $z = \dfrac{s^2}{2}$ de esta manera reemplazando la solución es:

$$u(x, y) = z = \frac{t^2}{2}.$$

Note que no hubo necesidad de hacer ningún despeje pero solo para sentirnos seguros aquí realizaremos el Jacobiano:

$$\det \left. \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial r} \\ \\ \dfrac{\partial t}{\partial s} & \dfrac{\partial t}{\partial r} \end{pmatrix} \right|_{(0,r)} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Problema 4:

Sean $a_i, c, i = 1, \ldots, n$ funciones en $C(\mathbb{R}^n)$ (el espacio de funciones continuas a valores reales con domino $\mathbb{R}^n$). Considere el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} = c(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_\Gamma = g \end{cases} \tag{1}$$

donde Γ es la superficie (o $n-1$ variedad) en $\mathbb{R}^n$ dada por

$$\Gamma = \left\{ \vec{r} = (r_1, r_2 \ldots, r_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : \Phi(\vec{r}) = (\phi_1(\vec{r}), \ldots, \phi_n(\vec{r})) \right\},$$

cada una de las funciones $g, \phi_j, j = 1, \ldots, n$ está en $C^1\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ (es decir, son funciones continuamente diferenciables con dominio $\mathbb{R}^{n-1}$). Además, suponga que Γ no es característica en el sentido

$$\det \begin{pmatrix} a_1(\Phi(\vec{r})) & \partial_{r_1}\phi_1(\vec{r}) & \ldots & \partial_{r_{n-1}}\phi_1(\vec{r}) \\ \vdots & \vdots & & \\ a_n(\Phi(\vec{r})) & \partial_{r_1}\phi_n(\vec{r}) & \ldots & \partial_{r_{n-1}}\phi_n(\vec{r}) \end{pmatrix} \neq 0$$

para todo punto $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Muestre que existe una única solución $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ del problema de Cauchy (1).

Solución:

Note que el problema nos invita a plantear el siguiente sistema de ecuaciones ordinarias:

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i(x) \qquad x_i(0, \vec{r}) = \phi_i(\vec{r})$$
$$\frac{dz}{ds} = c(x) \qquad z(o, \vec{r}) = g(\vec{r})$$

Con $1 \leq i \leq n$.
Note que podemos describir el problema acoplandolo de la siguiente forma:

$$\frac{d(x_1, x_2, \cdots, x_n, z)}{ds} = (a_1, a_2, \cdots, a_n, c)(x) \qquad f(0, \vec{r}) = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n, g)(\vec{r})$$

Luego, como $a_i, c \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y $\phi_i, g \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$ con $1 \leq i \leq n$, entonces por la desigualdad del valor medio se tiene que todas estas son localmente Lipschitz y por ende el acoplamiento de estás, luego $(a_1, a_2, \cdots, a_n, c)(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y es localmente Lipschitz, por lo que el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias tiene una única solución $z(s, \vec{r})$, además como por hipótesis tenemos que Γ es no característica en todo punto $(0, \vec{r})$ tal que $\vec{r} \in \mathbb{R}^{n-1}$, entonces existe una vecindad V al rededor de 0 en $\mathbb{R}$, tal que el cambio de variable de x a $(s, \vec{r})$ es invertible, lo que nos asegura que el problema de Cauchy tiene una única solución $\mu(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ en $U \times \mathbb{R}^{n-1}$ en donde U es una vecindad de $\mathbb{R}$.