LISTA DE EJERCICIOS 5: ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES I

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, BOGOTÁ
PRIMER SEMESTRE 2024

PROFESOR: OSCAR RIAÑO

1. Ecuación de onda

Ejercicio 1. *(***Buena colocación ecuación de onda en una dimensión***). Considere el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & \textit{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x,0) = g(x), & \textit{en } \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = h(x), & \textit{en } \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

donde suponemos que $g \in C^2(\mathbb{R})$ *y* $h \in C^1(\mathbb{R})$.

i) *Sea* u *solución de* (1) *de clase* C^2. *Muestre que si* $g(x)$ *y* $h(x)$ *son nulas para* $|x| > R$, *entonces* $u(x,t) = 0$ *para todo* $|x| > R + t$.
Sugerencia. *Utilice el principio de propagación finita.*

ii) *(***Existencia***). Muestre que existe una solución de clase* C^2 *del problema* (1).
Sugerencia. *Verifique que la fórmula de d'Alambert es en efecto una solución de* (1).

iii) *(***Unicidad***). Muestre que existe una única solución del problema de Cauchy* (1) *en la clase* $C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$.
Sugerencia. *Es suficiente con mostrar que el problema*

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & \textit{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ w(x,0) = 0, & \textit{en } \mathbb{R}, \\ w_t(x,0) = 0, & \textit{en } \mathbb{R}, \end{cases}$$

tiene como única solución $w = 0$. *Para esto, defina la energía*

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(w_t^2(x,t) + w_x^2(x,t) \right) dx.$$

Utilice i) para justifica que la energía anterior está bien definida (como integral en todo $\mathbb{R}$*). Luego muestre que* $\frac{d}{dt}E(t) = 0$.

iv) *(***Tipo de dependencia continua***). Sea* u_j *solución de* (1) *con datos iniciales* $g_j \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ *y* $h_j \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, *para* $j = 1, 2$. *Dado* $T > 0$ *fijo, muestre que*

$$\sup_{(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \|g_1 - g_2\|_{L^\infty} + T \|h_1 - h_2\|_{L^\infty}.$$

En particular, concluya que datos iniciales próximos en la norma $L^\infty(\mathbb{R})$ *generan soluciones de* (1) *próximas en la norma* $L^\infty(\mathbb{R} \times [0,T])$.

Ejercicio 2. (**Equipartición de la energía**). *Suponga que $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ soluciona el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & \text{en } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) = g(x), & \text{en } \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = h(x), & \text{en } \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2}$$

donde g y h tienen soporte compacto. Definimos la energía cinética $k(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x,t)\,dx$ y la energía potencial $p(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x,t)\,dx$.

i) *Muestre que $k(t) + p(t)$ es constante.*
ii) *Muestre que $k(t) = p(t)$ para todo tiempo t suficientemente grande.*

Ejercicio 3. *Una onda esférica es una solución u de la ecuación de onda en tres dimensiones que es radial en espacio, es decir, $u(x,t) = u(r,t)$, $r = |x|$.*

i) *Encuentre la ecuación que satisfacen las ondas esféricas.*
ii) *Para la ecuación encontrada en i), realice el cambio de variables $v = ru$ para determinar y solucionar la ecuación que satisface v. Con esto encuentre una solución de la ecuación de onda radial con datos iniciales $u(r,0) = g(r)$, $u_t(r,0) = h(r)$, donde g y h son funciones pares de r.*

Ejercicio 4. *Considere el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ u(x,0) = g(x), & \text{en } \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,0) = h(x), & \text{en } \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{3}$$

Recordamos la fórmula de Kirchhoff *para soluciones del problema anterior:*

$$u(x,t) = ⨍_{\partial B(x,t)} t\,h(y) + g(y) + \nabla g(y) \cdot \big(y - x\big)\, dS(y). \tag{4}$$

Suponga que $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ y $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Sea u definida por la fórmula de Kirchhoff (4). Muestre que

i) $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$,
ii) $u_{tt} - \Delta u = 0$ *en* $\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$,
iii) $\lim_{\substack{(x,t)\to(x^0,0)\\ t>0}} u(x,t) = g(x^0)$, $\lim_{\substack{(x,t)\to(x^0,0)\\ t>0}} u_t(x,t) = h(x^0)$, *para cada* $x^0 \in \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 5. *Recordamos la* fórmula de Poisson *para una solución del problema de Cauchy* (3) *en dimension $n = 2$*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}⨍_{B(x,t)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + t\nabla g(y) \cdot (y-x)}{(t^2 - |y-x|^2)^{\frac{1}{2}}}\, dy. \tag{5}$$

Supongamos que $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$ y $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Sea u definida por la fórmula de Poisson (5). Entonces

i) $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0,\infty))$,
ii) $u_{tt} - \Delta u = 0$ *en* $\mathbb{R}^2 \times (0,\infty)$,
iii) $\lim_{\substack{(x,t)\to(x^0,0)\\ t>0}} u(x,t) = g(x^0)$, $\lim_{\substack{(x,t)\to(x^0,0)\\ t>0}} u_t(x,t) = h(x^0)$, *para cada* $x^0 \in \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 6. *Muestre que una solución $w(x_1,t)$ del problema de Cauchy asociado a la ecuación del telégrafo*

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{x_1x_1} + \lambda^2 w = 0, & \text{en } \mathbb{R}\times(0,\infty),\\ w(x_1,0) = 0, & \text{en } \mathbb{R},\\ w_t(x_1,0) = h(x_1), & \text{en } \mathbb{R}, \end{cases}$$

está dada por

$$w(x_1,t) = \frac{1}{2}\int_{x_1-t}^{x_1+t} J_0(\lambda s)h(y_1)\,dy_1,$$

donde $s = t^2-(x_1-y_1)^2$ *y* J_0 *denota la función de Bessel* $J_0(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(z\sin(\theta))\,d\theta$.
Sugerencia. *Muestre que* $u(x_1,x_2,t) := \cos(\lambda x_2)w(x_1,t)$ *satisface la ecuación de onda en dos dimensiones y aplique la fórmula de Poisson para esta dimensión.*

Ejercicio 7. *Sea u solución del problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{en } \mathbb{R}^n\times(0,\infty),\\ u(x,0) = g(x), & \text{en } \mathbb{R}^n,\\ u_t(x,0) = h(x), & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{6}$$

Dado $x\in\mathbb{R}^n$, $t>0$, $r>0$ *definimos*

$$U(x;r,t) := \fint_{\partial B(x,r)} u(y,t)\,dS(y), \tag{7}$$

$$G(x;r) := \fint_{\partial B(x,r)} g(y)\,dS(y)$$

y

$$H(x;r) := \fint_{\partial B(x,r)} h(y)\,dS(y).$$

Sea $x\in\mathbb{R}^n$ *fijo. Sean* $m\geq 2$ *entero y* $u\in C^m(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ *solución de* (6). *Muestre que U dada por* (7) *es de clase* $C^m([0,\infty)\times[0,\infty))$ *(como función de r y t) y U satisface el problema de Cauchy para la ecuación de Euler-Poisson-Darboux*

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \dfrac{n-1}{r}U_r = 0, & \text{en } (0,\infty)\times(0,\infty),\\ U(r,0) = G(r), & \text{en } (0,\infty),\\ U_t(r,0) = H(r), & \text{en } (0,\infty). \end{cases}$$

Sugerencia. *Vea la demostración del Lema 1 en la Subsección 2.4.1 del libro de Evans.*

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá
Email address: ogrianoc@unal.edu.co