Parcial 3
Análisis Numérico
Febrero 20 de 2025

Dia de entrega: Martes 4 de marzo de 2025 hasta las 4:00 PM. Cargar en Classroom.

1. Dada la función

$$f(x) = x + \frac{1}{x} - 2, \quad f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},$$

se construye el siguiente algoritmo para aproximar la raíz $r = 1$:

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}.$$

(a) Verificar que si $x_0 > 1$ entonces la sucesión $\{x_n\}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente por 1. Concluir que $x_n \to 1$, aunque esta iteración no está en las hipótesis del teorema del punto fijo. ¿Qué hipótesis no se cumple?

(b) Dar un algoritmo para aproximar la raíz de f que converja cuadráticamente.

2. Sea

$$f(x) = (x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_d), \quad \text{donde } r_1 < r_2 < \dots < r_d.$$

(a) Probar que si $x_0 > r_d$ la sucesión de Newton-Raphson converge a r_d.

(b) Para un polinomio,

$$P(x) = a_d x^d + \dots + a_0, \quad a_d \neq 0,$$

tal que sus d raíces son reales y distintas, se propone el siguiente método que aproxima los valores de todas sus raíces:

   (a) Se comienza con un valor x_0 mayor que

$$M = \max\left\{1, \sum_{i=0}^{d-1} \frac{|a_i|}{|a_d|}\right\}.$$

   (Nota: M es una cota para el módulo de todas las raíces del polinomio).

   (b) Se genera a partir de x_0 la sucesión de Newton-Raphson, que, según el ítem anterior, converge a la raíz más grande de P, llamémosla r_d; obteniéndose de este modo un valor aproximado $\tilde{r}_d$.

   (c) Se divide P por $x - \tilde{r}_d$ y se desprecia el resto, dado que $r_d \approx \tilde{r}_d$. Se redefine ahora P como el resultado de esta división y se comienza nuevamente desde el primer ítem, para hallar las otras raíces.

Aplicar este método para aproximar todas las raíces del polinomio

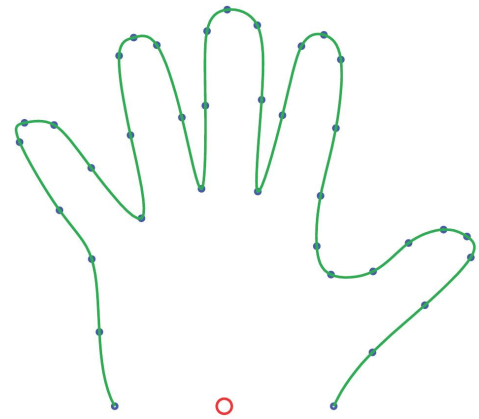
$$P(x) = 2x^3 - 4x + 1.$$

3. Sea $f \in C^2[a,b]$, y sean $x_0 = a, x_1 = a + h, ..., x_n = b$, donde $h = (b?a)/n$. Considerar la poligonal $l(x)$ que interpola a f en los puntos x_i, $i = 0...n$. Probar que

a) $$|f(x) - l(x)| \leq \frac{h^2}{2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

b) $$|f'(x) - l'(x)| \leq h \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

4. (**Silueta de la mano**) Para dibujar la silueta de su mano, siga los siguientes pasos:



a) Preparamos una tabla de abcisas y ordenadas usando los siguientes comando de Matlab

```
figure('position',get(0,'screensize'))
axes('position',[0 0 1 1])
[x,y] = ginput;
```

b) Dibuje su mano en un papel y póngalo sobre la pantalla del computador. Use el ratón para seleccionar alrededor de 37 puntos que delineen su mano (Como se muestra en la figura). Termine la instrucción `ginput` oprimiendo enter.

c) Grafique los puntos (x, y) obtenidos y la mano correspondiente mediante el comando plot de Matlab.

d) Implemente el método de splines cúbicos.

e) Interpole por separado los puntos (i, x_i) e (i, y_i) mediante splines cúbicos usando **su** programa.

f) Grafique la curva parametrizada que se obtiene.

g) Estime el área de su mano usando la fórmula del área de Gauss,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\Big|\sum_{i=1}^{n-1} x_i y_{i+1} + x_n y_1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} y_i - x_1 y_n\Big|$$

5. Observe que

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} = \pi.$$

1. Use las reglas compuestas del punto medio, del trapecio y de Simpson para aproximar I para varios tamaños de paso de integración $h_n = 1/n$, $n = 10, 50, 100, 250, 500, 1000, 1500, 2000$. Grafique el logaritmo del error absoluto versus n para cada paso. Describa el efecto de redondeo de los errores cuando $h \to 0$.
2. Implemente el método de integración de Romberg para calcular I. Gráfique el logaritmo del error en los términos diagonales en la tabla de extrapolación versus $\log h$. Verifique sus resultados con la teoría.