Análisis Armónico: Taller 1

3 de mayo de 2025

Universidad Nacional de Colombia

Ricardo Ariel Pastrán Ramirez

Andrés David Cadena Simons acadenas@unal.edu.co

Problema 1:

El objetivo de este ejercicio es probar que la transformada de Fourier

$$\widehat{\ } = \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C^0_\infty(\mathbb{R})$$
$$f \to \widehat{f}$$

no es sobreyectiva.

(I) Pruebe que $(C^0_\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

(II) Use la fórmula de inversión de Fourier para probar que $\mathcal{F}$ es inyectiva.

(III) Suponga que $\mathcal{F}$ es sobreyectiva. Use el teorema de la aplicación abierta para deducir que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|f\|_1 \leq C \left\|\widehat{f}\right\|_\infty, \text{ para toda } f \in L^1(\mathbb{R}).$$

(IV) Sea $A \geq 1$, definase

$$\phi_A := \chi_{[-A,A]}, \quad \psi_A := \phi_A * \phi_1 \quad \text{y} \quad g_A := \widehat{\psi_A}.$$

Pruebe que

$$\|\widehat{g_A}\|_\infty < \infty, \quad g_A(x) = \frac{\sin(2\pi A x)\sin(2\pi x)}{(\pi x)^2}, \quad \|g_A\|_1 \to +\infty \text{ cuando } A \to +\infty,$$

y concluya una contradicción con (III).

Solución:

(I) Sea $\{\phi_n\} \subset C^0_\infty(\mathbb{R})$ una sucesión de Cauchy que converge a ϕ cuando $n \to \infty$, veamos que $\phi \to C^0_\infty(\mathbb{R})$.
Sabemos que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$, entonces

$$\|\phi_n - \phi_m\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi_n(x) - \phi_m(x)| < \epsilon,$$

Veamos primero que $\phi \in C^0(\mathbb{R})$.
Note que

$$\begin{aligned}
|\phi(x) - \phi(y)| &\leq |\phi(x) - \phi_n(x)| + |\phi_n(x) - \phi_n(y)| + |\phi_n(y) - \phi(y)|, \\
&\leq \|\phi - \phi_n\|_\infty + |\phi_n(x) - \phi_n(y)| + \|\phi_n - \phi\|_\infty, \\
&\leq 2I + J.
\end{aligned}$$

Note que como $\{\phi_n\} \subset C^0_\infty(\mathbb{R})$, entonces estas son continuas, por lo que sabemos que dado $\frac{\epsilon}{3} > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces $|\phi_n(x) - \phi_n(y)| < \frac{\epsilon}{3}$. Por otro lado note que como $\{\phi_n\}$ es de Cauchy, entonces dado $\frac{\epsilon}{3} > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$, entonces

$$\|\phi_m - \phi_n\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}.$$

Fije n y haga $m \to \infty$, luego

$$I = \|\phi - \phi_n\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}.$$

Ahora, sabemos que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si tomamos n fijo y adecuado se satisface que

$$\begin{aligned} |\phi(x) - \phi(y)| &\leq 2I + J, \\ &< \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}, \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Lo que concluye que $\phi \in C^0(\mathbb{R})$.
Ahora veamos que $\phi \to 0$ cuando $x \to \infty$.
Note que dado $\frac{\epsilon}{2} > 0$ existe $N > 0$ y $R > 0$ tal que si $|x| > R$, entonces

$$|\phi_N(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Luego note que fijando ese N y R se cumple que

$$\begin{aligned} |\phi(x)| &\leq |\phi(x) - \phi_N(x)| + |\phi_N(x)|, \\ &\leq \|\phi - \phi_N\|_\infty + |\phi_N(x)|, \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}, \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Lo que termina por concluir que $\phi \in C^0_\infty(\mathbb{R})$.

(II) Suponga $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ tales que $\widehat{f} = \widehat{g}$, entonces veamos que $f = g$ en casi toda parte. Como $\widehat{f} = \widehat{g}$, entonces $\widehat{f} - \widehat{g} = \widehat{f - g} = 0$, luego usando la fórmula de inversión de Fourier

$$\begin{aligned} (f-g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f-g}(\xi) e^{2\pi i x \xi}\, d\xi, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 0\, d\xi, \\ &= 0. \end{aligned}$$

De lo que se puede concluir que $f = g$ bajo la medida de Lebesgue, es decir, en casi toda parte.

(III) Teorema en cuestión.

Teorema 1: Teorema de la aplicación abierta

Si $T : X \to Y$ es un operador lineal, continuo y biyectivo entre espacios de Banach, entonces la inversa T^{-1} es también continua, es decir que existe $C > 0$ tal que

$$\left\|T^{-1} f\right\|_X \leq C \|f\|_Y .$$

Suponga que $\mathcal{F}$ es sobreyectiva, entonces como $L^1(\mathbb{R})$ es Banach, $C^0_\infty(\mathbb{R})$ es Banach, $\mathcal{F}$ satisface ser un operador lineal y además

$$\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1 ,$$

es decir, es continua, por el teorema de la aplicación abierta se satisface que $\mathcal{F}^{-1}$ es también continua, es decir que existe $C > 0$ tal que

$$\|f\|_1 \leq C \left\|\widehat{f}\right\|_\infty .$$

(IV) calculemos $g_A(x)$, para esto

$$\begin{aligned} g_A(x) &= \widehat{\psi_A}(x), \\ &= \widehat{\phi_A * \phi_1}(x), \\ &= \widehat{\phi_A}(x)\widehat{\phi_1}(x). \end{aligned}$$

Siendo así, hallemos $\widehat{\phi_A}$, será útil recordar que ϕ_A es una función par, luego

$$\begin{aligned} \widehat{\phi_A}(x) &= \int_{-A}^{A} \cos(2\pi x\xi)\, d\xi, \\ &= \left.\frac{\sin(2\pi\xi x)}{2\pi x}\right|_{-A}^{A}, \\ &= \frac{\sin(2\pi Ax)}{\pi x}. \end{aligned}$$

Por lo que podemos afirmar que

$$g_A(x) = \frac{\sin(2\pi Ax)\sin(2\pi x)}{(\pi x)^2}$$

Ahora, veamos que $\|\widehat{g_A}\|_\infty < \infty$.

Note que

$$\begin{aligned}
|\widehat{g_A}(x)| &= \left|\widehat{\widehat{\psi_A}}(x)\right|, \\
&= |\psi_A(-x)|, \\
&= \left|\int_{-\infty}^{\infty} \phi_A(y)\phi_1(-x-y)\,dy\right|, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_A(y)\phi_1(x+y)\,dy, \\
&= \int_{-x-1}^{-x+1} \phi_A(y)\,dy, \\
&\leq \int_{-x-1}^{-x+1} dy, \\
&\leq 2.
\end{aligned}$$

Luego es claro que

$$\|\widehat{g_A}\|_\infty \leq 2,$$

por lo que podemos concluir que $\|\widehat{g_A}\|_\infty < \infty$ para todo $A \geq 1$.
Ahora acotemos inferiormente $\|g_A\|_1$, para esto usaremos el comportamiento del seno alrededor de una vecindad cercana a 0 en la que $\frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}$ es positivo, decreciente y acotado inferiormente

$$\begin{aligned}
\|g_A\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |g_A(x)|\,dx, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin(2\pi Ax)\sin(2\pi x)}{(\pi x)^2}\right| dx, \\
&= 2\int_0^{\infty} \frac{|\sin(2\pi Ax)|}{\pi x}\frac{|\sin(2\pi x)|}{\pi x}\,dx \qquad \text{Haciendo } u = 2\pi Ax, \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{|\sin(u)|}{u}\frac{\left|\sin(\frac{u}{A})\right|}{\frac{u}{A}}\,du, \\
&\geq \frac{4}{\pi}\int_0^{A} \frac{|\sin(u)|}{u}\frac{\left|\sin(\frac{u}{A})\right|}{\frac{u}{A}}\,du,
\end{aligned}$$

note que como $u \in (0, A)$, entonces $\frac{u}{A} \in (0,1)$, luego $\frac{|\sin(\frac{u}{A})|}{\frac{u}{A}}$ es decreciente y positiva, por lo que sabemos que $\frac{|\sin(\frac{u}{A})|}{\frac{u}{A}} \geq \sin(1)$. Luego

$$\begin{aligned}
\|g_A\|_1 &\geq \frac{4\sin(1)}{\pi}\int_0^{A} \frac{|\sin(u)|}{u}\,du, \\
&\geq M\int_0^{A} \frac{|\sin(u)|}{u}\,du.
\end{aligned}$$

Ahora, si $A \to \infty$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{A\to\infty} \|g_A\|_1 &\geq C \int_0^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx,\\
&\geq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx,\\
&\geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)|\,dx,\\
&\geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)\pi}\,dx = \infty.
\end{aligned}$$

Luego si $A \to \infty$, entonces $\|g_A\|_1 \to \infty$.
Pero note que usando (III) se debe de satisfacer que

$$\|g_A\|_1 \leq C \left\|\widehat{g_A}\right\|_{\infty},$$

para todo A, lo que nos lleva a

$$\|g_A\|_1 \to \infty \leq C \left\|\widehat{g_A}\right\|_{\infty} \to 2.$$

Contradicción ($\infty < 2C < \infty$), luego podemos concluir que $\mathcal{F}$ no puede ser sobreyectiva.

Problema 2:

Sean $B_R := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ y χ_{B_R} la función característica del conjunto B_R. Se define

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_R : L^2(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \\ f &\longmapsto \left(\widecheck{\chi_{B_R}\widehat{f}}\right). \end{aligned}$$

(I) Probar que $\mathcal{S}_R \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$ y que $\|\mathcal{S}_R\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq 1$.

(II) Mostrar que para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}_R f \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ cuando $R \to +\infty$.

(III) Deducir que para cualquier $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, existe una sucesión $R_n \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$ tal que

$$\int_{B_{R_n}} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi \longrightarrow f(x), \quad \text{cuando } n \to +\infty, \quad \text{c.t.p. } x \in \mathbb{R}^n.$$

(IV) Probar que para cualquier $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\xi \longmapsto \int_{B_R} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx \longrightarrow \widehat{f}, \quad \text{cuando } R \to +\infty, \text{ en } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Solución:

Nota 1:

$\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$ es el espacio de los operadores lineales acotados de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Problema 2 continúa en la siguiente página...

Nota 2:

Veamos en un principio que el operador tiene sentido.
Para esto recordemos que la transformada de f es en $L^2(\mathbb{R}^n)$, pero que nuestra definición de la inversa sigue estando en $L^1(\mathbb{R}^n)$, verifiquemos que $\chi_{B_R}\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, para esto note que usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la identidad de Parseval y que $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\left\|\chi_{B_R}\widehat{f}\right\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\chi_{B_R}(x)\widehat{f}(x)\right| dx, \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{|\chi_{B_R}(x)|} \left|\widehat{f}\right| dx, \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{B_R}(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}, \\
&\leq \|\chi_{B_R}\|_2 \left\|\widehat{f}\right\|_2, \\
&\leq \|\chi_{B_R}\|_2 \, \|f\|_2 \, .
\end{aligned}$$

Por lo que podemos asegurar que $\left\|\chi_{B_R}\widehat{f}\right\| \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y por ende que $\mathcal{S}_R(f)$ existe y está bien definido.

(I) Sea $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y α escalar, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_R(\alpha f + g) &= \left(\chi_{B_R}\widetilde{(\widehat{\alpha f + g})}\right), \\
&= \left(\widetilde{\alpha\chi_{B_R}\widehat{f} + \chi_{B_R}\widehat{g}}\right), \\
&= \alpha\left(\widetilde{\chi_{B_R}\widehat{f}}\right) + \left(\widetilde{\chi_{B_R}\widehat{g}}\right), \\
&= \alpha\mathcal{S}_R(f) + \mathcal{S}_R(g).
\end{aligned}$$

Ahora veamos que este es un operador acotado

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{S}_R(f)\|_2 &= \left\|\left(\widetilde{\chi_{B_R}\widehat{f}}\right)\right\|_2, \\
&= \left\|\chi_{B_R}\widehat{f}\right\|_2, \\
&\leq \left\|\widehat{f}\right\|_2, \\
&\leq \|f\|_2 \, .
\end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir que $\mathcal{S}_R \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$ y que $\|S_R\| \leq 1$.

(II) Note que lo que buscamos es equivalente a

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \|\mathcal{S}_R f - f\|_2 &= \lim_{R\to\infty} \left\| \left(\left(\widecheck{\chi_{B_R}\widehat{f}}\right) - \check{\widehat{f}} \right) \right\|_2 , \\
&= \lim_{R\to\infty} \left\| \chi_{B_R}\widehat{f} - \widehat{f} \right\|_2 , \\
&= \lim_{R\to\infty} \left\| (\chi_{B_R - 1})\,\widehat{f} \right\|_2 , \\
&= \lim_{R\to\infty} \left\| \chi_{B_R^c}\widehat{f} \right\|_2 , \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Siendo así, note que como $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Además, esto implica que dado $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que si $r \geq R$, entonces

$$
\left(\int_{|x|\geq r} |\widehat{f}(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon.
$$

Note que esto implica que

$$
\begin{aligned}
\left\| \chi_{B_r^c}\widehat{f} \right\|_2 &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \chi_{B_r^c}(x)\widehat{f}(x) \right|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} , \\
&= \left(\int_{|x|\geq r} |\widehat{f}(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} , \\
&< \epsilon.
\end{aligned}
$$

Lo que implica que $\chi_{B_R^c}\widehat{f} \to 0$ y por ende $\mathcal{S}_R f \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ cuando $R \to \infty$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(III) Note que como $\mathcal{S}_R f \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ cuando $R \to \infty$, entonces existe una subsucesión $\{R_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{S}_{R_n} f \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$.
Suponga $\{f_m\} \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{m\to\infty} f_m = f$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces note que por definición de la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

$$
\lim_{m\to\infty} \widehat{f_m} = \widehat{f}.
$$

luego es válido afirmar que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_{R_n}(f) &= \left(\widecheck{\chi_{B_{R_n}}\widehat{f}}\right), \\
&= \left(\widecheck{\chi_{B_{R_n}} \lim_{m\to\infty} \widehat{f_m}}\right), \\
&= \lim_{m\to\infty} \left(\widecheck{\chi_{B_{R_n}}\widehat{f_m}}\right), \\
&= \lim_{m\to\infty} \mathcal{S}_{R_n}(f_m).
\end{aligned}
$$

Luego usando que $\chi_{B_R}\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \mathcal{S}_{R_n}(f_m)(x) &= \lim_{m\to\infty} \left(\widetilde{\chi_{B_{R_n}}\widehat{f_m}}\right)(x),\\
&= \lim_{m\to\infty} \int_{B_{R_n}} \widehat{f_m}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi,\\
&= \int_{B_{R_n}} \lim_{m\to\infty} \widehat{f_m}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi,\\
&= \int_{B_{R_n}} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi.
\end{aligned}$$

Es decir, $\mathcal{S}_{R_n}(f)(x) = \int_{B_{R_n}} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi$ en casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, pero recordemos que $\mathcal{S}_{R_n}(f) \to f$ cuando $R_n \to \infty$, entonces podemos asegurar que

$$\int_{B_{R_n}} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi \to f(x),$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(IV) Note que

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_R}(x)f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx,\\
&= \widehat{\chi_{B_R}f}(\xi).
\end{aligned}$$

Luego lo que buscamos es equivalente a

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \left\|\widehat{\chi_{B_R}f} - \widehat{f}\right\|_2 &= \lim_{R\to\infty} \|\chi_{B_R}f - f\|_2\,,\\
&= \lim_{R\to\infty} \|(\chi_{B_R} - 1)\, f\|_2\,,\\
&= \lim_{R\to\infty} \left\|\chi_{B_R^c}f\right\|_2\,,\\
&= 0.
\end{aligned}$$

posteriormente podemos ver que si razonamos similarmente a (II) podemos ver que dado $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que si $r \geq R$, entonces

$$\left\|\chi_{B_r^c}f\right\| < \epsilon.$$

Lo que nos permite concluir el ejercicio.

Problema 3:

Pruebe que para todo $\lambda > 0$

$$\widehat{e^{-\lambda\pi|x|^2}}(\xi) = \lambda^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi\frac{|x|^2}{\lambda}}.$$

Solución:

Para esto veamos el caso base $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$ ($\lambda = 1$), aquí completando cuadrados y usando el teorema de Fubinni se cumple que

$$\begin{aligned}
\widehat{e^{-\pi|x|^2}}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x^2|} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx,\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi(|x|^2+2ix\cdot\xi)}\, dx,\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi(|x|^2+2ix\cdot\xi-|\xi|^2)} e^{-\pi|\xi|^2}\, dx,\\
&= e^{-\pi|\xi|^2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi(x+i\xi)\cdot(x+i\xi)}\, dx,\\
&= e^{-\pi|\xi|^2}\prod_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x_j+i\xi_j)^2}\, dx,\\
&= e^{-\pi|\xi|^2}\prod_{j=1}^{n} 1,\\
&= e^{-\pi|\xi|^2}.
\end{aligned}$$

Ahora, suponga $f(x) = e^{-\pi\lambda|x^2|}$ y note que $f(x) = g\left(\lambda^{\frac{1}{2}}x\right)$, entonces, haciendo uso de la propiedad de las dilataciones en la transformada de Fourier sabemos que se cumple que

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= g\widehat{\left(\lambda^{\frac{1}{2}}x\right)}(\xi),\\
&= \frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}}\widehat{g}\left(\frac{\xi}{\lambda^{\frac{1}{2}}}\right),\\
&= \lambda^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi\frac{|\xi|^2}{\lambda}}.
\end{aligned}$$

Lo que concluye el resultado.

Problema 4:

Pruebe que para todo $\lambda > 0$

$$\widehat{e^{-2\pi\lambda|x|}}(\xi) = c_n \frac{\lambda}{(\lambda^2 + |\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

donde $c_n = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi^{-\frac{n+1}{2}}$.

Lema 1:

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, du.$$

Note que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx &= \int_{-\infty}^{0} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx + \int_{0}^{\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx,\\ &= I + J.\end{aligned}$$

Luego realizando el cambio de variable $u = x - \frac{1}{x}$ se tiene que

$$\begin{aligned}ux &= x^2 - 1,\\ 0 &= x^2 - ux - 1.\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2}\left(u \pm \sqrt{u^2+4}\right),\\ dx &= \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{u}{\sqrt{u^2+4}}\right) du.\end{aligned}$$

Tomamos $x = \frac{1}{2}\left(u - \sqrt{u^2+4}\right)$ para I, luego

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left(1 - \frac{u}{\sqrt{u^2+4}}\right) du,\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, du - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\frac{u}{\sqrt{u^2+4}}\, du,\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, du - K.\end{aligned}$$

Por otro lado tomamos $x = \frac{1}{2}\left(u + \sqrt{u^2+4}\right)$ para J, luego

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(u)\left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2+4}}\right) du,\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(u)\, du + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(u)\frac{u}{\sqrt{u^2+4}}\, du,\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(u)\, du + K.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(u)\, du - K + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(u)\, du + K,\\
&= \int_{-\infty}^\infty f(u)\, du.
\end{aligned}$$

Lo que demuestra el Lema planteado.

Lema 2: Identidad de subordinación

$$e^{-2t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-y-\frac{t^2}{y}}}{\sqrt{y}}\, dy, \qquad \text{donde } t > 0.$$

Note que si suponemos $f(x) = e^{-tx^2} \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} &= \int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx,\\
&= \int_{-\infty}^\infty e^{-t\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\, dx,\\
&= 2\int_0^\infty e^{-t\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\, dx && \text{Hacemos } x = \sqrt{y},\\
&= \int_0^\infty e^{-t\left(\sqrt{y}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2}\frac{1}{\sqrt{y}}\, dy,\\
&= \int_0^\infty e^{-t\left(y-2+\frac{1}{y}\right)}\frac{1}{\sqrt{y}}\, dy,\\
&= e^{2t}\int_0^\infty e^{-t\left(y+\frac{1}{y}\right)}\frac{1}{\sqrt{y}}\, dy.
\end{aligned}$$

Lo que implica que

$$\begin{aligned} e^{-2t} &= \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t\left(y+\frac{1}{y}\right)} \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy && \text{Hacemos } u = ty, \\ &= \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u-\frac{t^2}{u}} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{u}} \frac{1}{t}\, du, \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-y-\frac{t^2}{y}}}{\sqrt{y}}\, dy. \end{aligned}$$

Con $t > 0$, lo que concluye el lema previamente mencionado.

Solución:

Note que usando el lema de la identidad de subordinación, el teorema de Fubinni y el ejercicio (3) se tiene que

$$\begin{aligned} \widehat{e^{-2\pi\lambda|x|}}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi\lambda|x|} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-y-\frac{(\lambda\pi|x|)^2}{y}}}{\sqrt{y}}\, dy e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx, \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{(\lambda\pi|x|)^2}{y}} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx dy, \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\left|\sqrt{\frac{\lambda^2\pi}{y}}x\right|^2} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx dy, \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} \left(\frac{\lambda^2\pi}{y}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi\frac{y|\xi|^2}{\lambda^2\pi}}\, dy, \\ &= \pi^{-\frac{n+1}{2}} \lambda^{-n} \int_0^\infty y^{\frac{n-1}{2}} e^{-y\left(1+\frac{|\xi|^2}{\lambda^2}\right)}\, dy && \text{Haciendo } u = y\left(1+\frac{|\xi|^2}{\lambda^2}\right), \\ &= \pi^{-\frac{n+1}{2}} \lambda^{-n} \int_0^\infty \frac{u^{\frac{n-1}{2}}}{\left(1+\frac{|\xi|^2}{\lambda^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}} e^{-u} \frac{1}{\left(1+\frac{|\xi|^2}{\lambda^2}\right)}\, du, \\ &= \pi^{-\frac{n+1}{2}} \lambda^{-n} \frac{1}{\left(1+\frac{|\xi|^2}{\lambda^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^\infty u^{\frac{n-1}{2}} e^{-u}\, du, \\ &= \pi^{-\frac{n+1}{2}} \frac{\lambda}{(\lambda^2+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right), \\ &= \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \pi^{-\frac{n+1}{2}} \frac{\lambda}{(\lambda^2+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \\ &= c_n \frac{\lambda}{(\lambda^2+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir el ejercicio.

Problema 5:

Muestre que $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{x}{1+x^2} \in L^2(\mathbb{R}) - L^1(\mathbb{R})$. Además, pruebe que:

$$\frac{1}{\pi}\widehat{\frac{x}{1+x^2}}(\xi) = -isgn(\xi)e^{-2\pi|\xi|}.$$

Solución:

Veamos que $f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.
Para esto note que

$$\begin{aligned}
\|f\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi}\left|\frac{x}{1+x^2}\right| dx, \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx, \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{2x}{1+x^2}\, dx, && \text{Haciendo } u = 1+x^2, \\
&= \frac{1}{\pi}\int_1^{\infty} \frac{1}{u}\, du, \\
&= \frac{1}{\pi}\ln(u)\Big|_1^{\infty}, \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Ahora veamos que $f \in L^2(\mathbb{R})$.
Para esto note que

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{x}{1+x^2}\right|^2 dx, \\
&= \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx && \text{Haciendo } x=\tan(\theta), \\
&= \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\frac{\tan^2(\theta)}{\sec^4(\theta)}\sec^2(\theta)\,d\theta, \\
&= \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\frac{\tan^2(\theta)}{\sec^2(\theta)}\,d\theta, \\
&= \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\sin^2(\theta)\,d\theta, \\
&= \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,d\theta, \\
&= \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{4}-\int_0^{\pi/2}\cos(2\theta)\,d\theta\right) && \text{Haciendo } u=2\theta, \\
&= \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(u)\,du\right), \\
&= \frac{1}{2\pi}-\frac{1}{2}\left(\sin(x)\Big|_0^{\pi}\right), \\
&= \frac{1}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Ahora calculemos su transformada, para esto vamos a usar que $\widehat{xg(x)} = (-2\pi i)^{-1}\frac{d}{d\xi}\widehat{g}(\xi)$, entonces

$$\widehat{\frac{1}{1+x^2}}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2\pi i x\xi}}{1+x^2}\,dx.$$

Para hallar esta transformada usaremos variable compleja usando $h(x) = \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{(x+i)(x-i)}$.
Tenemos 2 casos, primero pensemos cuando $\xi \geq 0$, para esto consideraremos el contorno semicircular en el semiplano inferior, aquí, el único polo existente es cuando $x=-i$, por lo que estudiaremos su residuo ahí

$$\begin{aligned}
Res(h,-i) &= \lim_{x\to -i}\frac{e^{-2\pi i x\xi}}{x-i}, \\
&= -\frac{e^{-2\pi\xi}}{2i}.
\end{aligned}$$

Luego usando el teorema de los residuos podemos concluir que

$$\begin{aligned}\widehat{\frac{1}{1+x^2}}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{1+x^2}\,dx,\\ &= (-2\pi i)\cdot Res(h,-i),\\ &= (-2\pi i)\left(-\frac{e^{-2\pi\xi}}{2i}\right),\\ &= \pi e^{-2\pi\xi}.\end{aligned}$$

Veamos el caso contrario, en el que $\xi < 0$, para esto consideraremos el contorno semicircular en el semiplano superior, aquí el único polo existente es cuando $x = i$, por lo que estudiaremos su residuo ahí

$$\begin{aligned}Res(h,i) &= \lim_{x\to i} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{x+i},\\ &= \frac{e^{2\pi\xi}}{2i}.\end{aligned}$$

Luego usando el teorema de los residuos podemos concluir que

$$\begin{aligned}\widehat{\frac{1}{1+x^2}}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{1+x^2}\,dx,\\ &= (2\pi i)\cdot Res(h,i),\\ &= (2\pi i)\left(\frac{e^{2\pi\xi}}{2i}\right),\\ &= \pi e^{2\pi\xi}.\end{aligned}$$

Luego podemos afirmar que en general

$$\widehat{\frac{1}{1+x^2}} = \pi e^{-2\pi|\xi|}.$$

Luego

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\widehat{\frac{x}{1+x^2}} &= \frac{1}{\pi}(-2\pi i)^{-1}\frac{d}{d\xi}\pi e^{-2\pi|\xi|},\\ &= \frac{1}{\pi}(-2i)^{-1}(-2\pi sgn(\xi))e^{-2\pi|\xi|},\\ &= -isgn(\xi)e^{-2\pi|\xi|}.\end{aligned}$$

Lo que concluye el ejercicio.