Análisis Funcional: Taller 1

24 de abril de 2025

Universidad Nacional de Colombia

Oscar Guillermo Riaño Castañeda

Andrés David Cadena Simons acadenas@unal.edu.co

Problema 1:

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Defina

$$\mathcal{K} = \{x \in E : \|x\| = 1\}.$$

Demuestre que E es de Banach si y solamente si $\mathcal{K}$ es completo.

Solución:

Supongamos que E es de Banach y veamos que $\mathcal{K}$ es completo.
Razonemos por contradicción.
Suponga $\{x_n\} \subset \mathcal{K}$ sucesión de Cauchy que converge a $x \notin \mathcal{K}$ cuando $n \to \infty$, es decir, $\|x\| \neq 1$.
Primero, note que como $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $m, n > N$, entonces

$$\|x_m - x_n\| < \epsilon.$$

Ahora note que si $m \to \infty$ se satisface que

$$\begin{aligned} |\|x\| - 1| &\leq |\|x\| - \|x_n\|| \,, \\ &\leq \|x - x_n\| \,, \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Luego como ϵ es arbitrario sabemos que $\|x\| = 1$, contradicción, pues desde un principio se asumió que $\|x\| \neq 1$, luego podemos concluir que K es completo. Por otro lado, supongamos que $\mathcal{K}$ es completo y veamos que esto implica que E es de Banach.
Primero, recuerde que $0 \in E$, por lo que si tomamos $\{x_k\} \subset E$ sucesión de Cauchy obviaremos el caso en el que esta converge a 0, ya que si esta converge a 0 estaría convergiendo en el espacio.
Suponga $\{x_n\} \subset E$ sucesión de Cauchy, entonces se tiene que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$ entonces

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

Note que $\{\|x_n\|\} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión de Cauchy, ya que

$$\begin{aligned} |\|x_n\| - \|x_m\|| &\leq \|x_n - x_m\| \,, \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo que como $\mathbb{R}$ es completo, entonces sabemos que $\|x_n\| \to l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ cuando $n \to \infty$.
Ahora suponga $\{y_n\} = \left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\} \subset \mathcal{K}$ y note que como $\mathcal{K}$ es completo, entonces existe $y \in \mathcal{K}$ tal que $y_n \to y \in \mathcal{K}$ cuando $n \to \infty$, luego tenemos que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n > N$, entonces

$$\|y - y_n\| < \epsilon,$$

Problema 1 continúa en la siguiente página. . .

es decir

$$\left\| y - \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\| < \epsilon \qquad \text{Multiplicando por } \|x_n\|,$$
$$\|\|x_n\| y - x_n\| < \|x_n\| \epsilon,$$

Ahora si tomamos $n \to \infty$

$$\|ly - x\| < l\epsilon,$$

Luego como ϵ es arbitrario, entonces sabemos que $x_n \to x = ly$ cuando $n \to \infty$, de lo que se puede concluir que E es un espacio de Banach.

Problema 2:

Sea $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales normados. Considere $T : E \to F$ una transformación lineal. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I) T es continua.

(II) T es continua en cero.

(III) T es acotada. Es decir, existe $M > 0$ tal que para todo $x \in E$,

$$\|Tx\|_F \leq M \|x\|_E .$$

(IV) Si $\overline{B(0,1)} = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$, entonces la imagen directa $T\left(\overline{B(0,1)}\right)$ es un conjunto acotado de F.

Solución:

- (I)→(II).
  Note que el hecho de que T sea una tranformación lineal continua es lo mismo que decir que es continua en todo punto $x \in E$, en particular, si tomamos $x = 0 \in E$ podemos concluir que T es continua en cero.

- (II)→(III).
  Note que si tomamos $\epsilon = 1$ tenemos que existe un $\delta > 0$ tal que si $\|x\|_E < \delta$, entonces $\|Tx\|_F < 1$.
  Ahora, dado $x \in E$ arbitrario suponga $y = \frac{\delta}{2\|x\|}x$, note que $\|y\| < \delta$ y por ende $\|Ty\|_F < 1$, luego se sigue que

  $$\frac{\delta}{2\|x\|_E} \|Tx\|_F < 1,$$

  lo que implica que

  $$\|Tx\|_F \leq M \|x\|_E$$

  En dónde M es una constante tal que $M = \frac{2}{\delta}$, lo que concluye en que el operador T es acotado.

- (III)→(IV).
  Note que como T es un operador acotado, significa que para todo $x \in \overline{B(0,1)}$ se cumple que $\|Tx\|_F \leq M$, luego podemos asegurar que $T\left(\overline{B(0,1)}\right) \subseteq B_F(0, M)$, lo que concluye el resultado esperado.

- (IV)→(I).
  Note que (IV) nos dice que la imagen directa $T\left(\overline{B(0,1)}\right) \subseteq B_F(0, M)$, en particular

$T\left(B(0,1)\right) \subseteq B_F(0,M)$, es decir, que para todo $x \in B(0,1)$ se satisface que $\|Tx\|_F \leq M$, ahora, veamos que dados $u, v \in E$ y $\epsilon > 0$ existe $\delta = \frac{\epsilon}{M} > 0$ tal que si:

$$\|u - v\|_E \leq \delta$$

entonces

$$\left\|\frac{1}{\delta}\left(u - v\right)\right\|_E \leq 1$$

luego

$$\left\|T\left(\frac{1}{\delta}\left(u - v\right)\right)\right\|_F \leq M$$

lo que implica que

$$\|Tu - Tv\|_F \leq M\delta = \epsilon.$$

Lo que nos permite concluir que T es un operador continuo.

Problema 3:

Demuestre que si $T \in L(E, F)$[1], entonces

(I) $\|Tx\|_F \leq \|T\| \, \|x\|_E$, para todo $x \in E$.

(II) $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \dfrac{\|Tx\|_f}{\|x\|_E}$.

(III) $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \|Tx\|_F$.

(IV) $\|T\| = \inf\{M > 0 : \|Tx\|_F \leq M \, \|x\|_E \,, \text{ para todo } x \in E\}$.

Solución:

(I) Note que como T es un operador lineal, podemos obviar el caso en el que $x = 0$, pues $\|Tx\|_F = 0 \leq 0 = \|T\| \, \|x\|_E$.
Ahora, con el fin de simplificar la idea, si tomamos $x \neq 0$, entonces podemos reescribir $y = \frac{x}{\|x\|_E}$.
Siendo así, note que dado y por propiedades del supremo se satisface que

$$\|Ty\|_F \leq \sup_{\substack{y \in E \\ \|y\|_E \leq 1}} \|Ty\|_F \qquad \text{Reescribiendo la norma.}$$

$$\|Ty\|_F \leq \|T\| \qquad \text{Reescribiendo } y = \frac{x}{\|x\|_E} \text{ y usando la sublinealidad de la norma y el operador,}$$

$$\frac{1}{\|x\|_E} \|Tx\|_F \leq \|T\| \,,$$

Lo que implica que $\|Tx\|_F \leq \|T\| \, \|x\|_E$, luego como se toma y arbitrario se extiende el resultado a todo $x \in E$ y por ende se concluye el resultado.

[1] Recuerde que $L(E, F)$ denota el conjunto de operadores lineales de E en F. Dado $T \in L(E, F)$ definimos la norma de T como $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \|Tx\|_F$.

Problema 3 continúa en la siguiente página. . .

(II) Note que por la sublinealidad de la norma y el operador podemos asegurar que

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} &= \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \left\| T\frac{x}{\|x\|_E}\right\|_F, \\
&= \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \|Ty\|_F \qquad \text{como } y \text{ es unitario y distinto de } 0, \\
&\leq \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1\\ x\neq 0}} \|Tx\|_F, \\
&\leq \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1}} \|Tx\|_F, \\
&\leq \|T\|.
\end{aligned}$$

Por otro lado veamos que

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|_E\leq 1}} \|Tx\|_F, \\
&= \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|_E\leq 1\\ x\neq 0}} \|Tx\|_F \\
&\leq \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|_E\leq 1\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}, \\
&\leq \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.
\end{aligned}$$

Ya que $\{x \in E : \|x\|_E \leq 1\} \subset E$.

(III) Note que si usamos la sublinealidad del operador y de la norma podemos ver que

$$\sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|Tx\|_F$$

luego usando (II) podemos afirmar que

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|Tx\|_F .$$

(IV) Note que el conjunto de los M que satisfacen la condición del conjunto no son afectados cuando se divide por la norma de x en ambos lados de la desigualdad, es decir, podemos suponer que los x dados en la condición del conjunto son unitarios. Luego la condición

se transforma en ver el ínfimo de los $M > 0$ que satisface $\|Tx\|_F \leq M$ para todo $x \in E$ que satisface $\|x\|_E = 1$. Luego por (III) podemos afirmar que $\|T\|$ satisface la condición de que $\|Tx\|_F \leq \|T\|$ para todo x tal que $\|x\| = 1$.
Ahora veamos que este es el ínfimo de los M.
Note que como

$$\sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|Tx\|_F = \|T\|$$

Por caracterización del supremo se cumple que dado $\epsilon > 0$ arbitrario se cumple que siempre existe algún $x \in E$ tal que

$$\|T\| - \epsilon < \|Tx\|_F \leq \|T\|$$

Luego, si suponemos M_0 cómo el ínfimo del conjunto inicial tal que $M_0 < \|T\|$, entonces por la caracterización del supremo mencionada anteriormente existe un $x \in E$ tal que $M_0 \leq \|Tx\|_F \leq \|T\|$, lo que sería una contradicción, pues M_0 cumple que $\|Tx\|_F \leq M_0$ para todo $x \in E$ tal que $\|x\| = 1$, por lo que podemos afirmar que $\|T\| = \text{ínf}\{M > 0 : \|Tx\|_F \leq M \|x\|, \text{ para todo } x \in E\ \}$, lo que concluye el ejercicio.

Problema 4:

Sean $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales normales. Suponga que F es un espacio de Banach. Muestre que $L(E,F)$ es un espacio de Banach con la norma usual de $L(E,F)$. En particular, $E^* = L(E,\mathbb{R}), E^{**} = L(E^*,\mathbb{R})$ son espacios de Banach.

Solución:

Dado $T \in L(E,F)$ definimos la norma de $L(E,F)$ como

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|_E=1}} \|Tx\|_F .$$

Suponga $\{T_n\} \subset L(E,F)$ sucesión de Cauchy y veamos que esta converge a $T \in L(E,F)$. Note que como $\{T_n\}$ es sucesión de Cauchy, entonces se cumple que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$, entonces

$$\|T_n - T_m\| < \epsilon$$

Pero note que dado $x \in E$ (distinto del nulo) podemos tomar ϵ de la forma $\frac{\epsilon}{\|x\|_E} > 0$ que nos permite afirmar que

$$\begin{aligned}\|T_n x - T_m x\|_F &\leq \|T_n - T_m\| \|x\|_E , \\ &< \frac{\epsilon}{\|x\|_E} \|x\|_E , \\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

Luego $\{T_n x\} \subset F$ es una sucesión de Cauchy, luego como F es Banach, podemos afirmar que $T_n x \to g_x \in F$ cuando $n \to \infty$.
Siendo así, dado x podemos definir un g_x de la forma anterior, por lo que vamos a definir $T : E \to F$ como $Tx = g_x$, luego podemos afirmar que $T_n \to T$ puntualmente cuando $n \to \infty$.
Ahora veamos que la convergencia realmente es uniforme, es decir que $\|T - T_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.
Para eso, tomamos un $\epsilon > 0$, y como $\{T_n\}$ es Cauchy en $L(E,F)$, existe N tal que para todo $n, m > N$,

$$\|T_n - T_m\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

En particular, fijando m y tomando el límite cuando $n \to \infty$, usando la convergencia puntual $T_n \to T$, podemos aplicar lo siguiente:
Sea $x \in E$ con $\|x\|_E \leq 1$, entonces

$$\|T_n x - Tx\|_F = \lim_{m\to\infty} \|T_n x - T_m x\|_F \leq \limsup_{m\to\infty} \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|_E < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomando el supremo sobre todas las x con $\|x\|_E \leq 1$, se obtiene:

$$\|T_n - T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T_n x - Tx\|_F < \frac{\epsilon}{2},$$

Problema 4 continúa en la siguiente página. . .

para todo n suficientemente grande. Por tanto,

$$\|T_n - T\| \to 0,$$

lo cual muestra que la convergencia es uniforme.
Ahora, veamos que $T \in L(E, F)$.
Sea α un escalar y $x, y \in E$, entonces

$$\begin{aligned} T(\alpha x + y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + y), \\ &= \lim_{n\to\infty} \alpha T_n(x) + T_n(y), \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} T_n(y), \\ &= \alpha Tx + Ty. \end{aligned}$$

Luego $T \in L(E, F)$ lo que concluye el resultado esperado.

Problema 5:

Sean E y F espacios vectoriales normados. Suponga que E es de dimensión finita (F no necesariamente de dimensión finita).

(I) Muestre que todas las normas asignadas a E son equivalentes[2].

(II) Muestre que toda transformación lineal $T : E \to F$ es continua.

(III) De un ejemplo donde se verifique que (II) puede ser falsa si E es de dimensión infinita.

Solución:

(I) Suponga $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ normas de E espacio vectorial de dimensión finita.
En particular, como E es de dimensión finita sabemos que existe una base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\} \subset E$ tal que si tomamos $x \in E$, entonces

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \qquad \text{con } x_i \text{ escalares de } E.$$

Ahora, fijemos $\|x\|_1$ como

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Además, note que en general para $\|x\|_2$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &= \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\|_2, \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i e_i\|_2, \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|e_i\|_2, \\ &\leq \max_{i=1,\cdot,n} \|e_i\|_2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \\ &\leq c_2 \|x\|_1 . \end{aligned}$$

Por otro lado, queremos ver que existe $c_1 > 0$ tal que $c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2$ para todo $x \in E$, en particular, note que si definimos $A = \{x \in E : \|x\|_1 = 1\}$, nos queda que esperamos que se cumpla $c_1 \leq \|x\|_2$ para todo $x \in A$.
Note que como A es cerrado y acotado (en $\|\cdot\|_1$) y E es de dimensión finita, entonces A

[2] Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas sobre E. Recordemos que dos normas son equivalentes si existen constantes positivas c_1 y c_2, tales que $c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$, para todo $x \in E$.

Problema 5 continúa en la siguiente página. . .

es compacto, además, veamos que $\|x\|_2$ es continua en la topología de $\|\cdot\|_1$. Note que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \frac{\epsilon}{c_2} > 0$ tal que si

$$\|x - y\|_1 < \delta$$

entonces

$$\begin{aligned} |\|x\|_2 - \|y\|_2| &< |\|x - y\|_2| \,, \\ &< c_2 \|x - y\|_1 \,, \\ &< c_2 \frac{\epsilon}{c_2}, \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Luego, como $\|\cdot\|_2$ es continua en $\|\cdot\|_1$, como A es compacto, entonces $\|x\|_2$ alcanza su mínimo en A, es decir, existe $z \in A$ tal que $\|z\|_2 \leq \|x\|_2$ para todo $x \in A$, luego podemos definir $c_1 = \|z\|_2$, por lo que podemos concluir que existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 \qquad \text{para todo } x \in E.$$

Ahora, note que esto nos permite concluir que dadas 2 normas cualesquiera estas con equivalentes, ya que mediante $\|x\|_1$ se puede realizar el siguiente cálculo.
Suponga c_{21} y c_{22} las constantes respectivas a la equivalencia entre una norma $\|x\|_1$ y la norma $\|x\|_2$ y por otro lado suponga c_{31} y c_{32} las constantes respectivas a la equivalencia entre la norma $\|x\|_1$ y la norma $\|x\|_3$, veamos que podemos concluir que $\|x\|_2$ y $\|x\|_3$ son equivalentes

$$\|x\|_2 \leq c_{22} \|x\|_1 \leq \frac{c_{22}}{c_{31}} \|x\|_3 \,,$$

por otro lado

$$\|x\|_3 \leq c_{32} \|x\|_1 \leq \frac{c_{32}}{c_{21}} \|x\|_2 \,,$$

de lo que se puede concluir que

$$\frac{c_{31}}{c_{22}} \|x\|_2 \leq \|x\|_3 \leq \frac{c_{32}}{c_{21}} \|x\|_2 \,,$$

es decir, las normas $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_3$ son equivalentes, luego como estas son arbitrarias se puede concluir que todas las normas asignadas a E son equivalentes.

(II) Suponga $T : E \to F$ transformación lineal.
Note que como E es de dimensión finita, podemos asumir que existe una base $\mathcal{B} := \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, luego dado $x \in E$ lo podemos expresar de la forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Ahora, note que como T es una transformación lineal entonces se cumple que

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_F &= \left\| T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)\right\|_F, \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|Te_i\|_F, \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \max_{i=1,\cdots,n} \|Te_i\|_F, \\
&\leq \max_{i=1,\cdots,n} \|Te_i\|_F \, \|x\|_E, \\
&\leq M \, \|x\|_E.
\end{aligned}$$

Si tomamos $M = \max_{i=1,\cdots,n} \|Te_i\|_F$, luego $\|Tx\|_F \leq M \|x\|_E$ y por ende el operador es continuo, luego como se tomó T arbitrario se concluye que toda transformación lineal de E a F con E de dimensión finita es continua.

(III) Suponga $T : (C[0,2], \|\cdot\|_1) \to (C[0,2], \|\cdot\|_\infty)$ tal que $Tf = f$.
Suponga

$$f_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \left[0, \frac{2k-1}{2k}\right] \cup \left[\frac{2k+1}{2k}, 2\right], \\ 2k^2x - 2k^2 + k, & \text{si } x \in \left[\frac{2k-1}{2k}, 1\right], \\ -2k^2x + 2k^2 + k, & \text{si } x \in \left[1, \frac{2k+1}{2k}\right]. \end{cases}$$

Se puede verificar que $\|f_k\|_1 = 1$, no obstante note que $f_k(1) = k$, por lo que funciona como ejemplo para verificar que

$$\sup_{f_k} \|f_k\|_\infty = \infty.$$

Luego no existe $M > 0$ tal que

$$\|f\|_\infty \leq M \|f\|_1.$$

Con la intención de ser gráfico con el ejercicio veamos la gráfica para algunos valores de k.

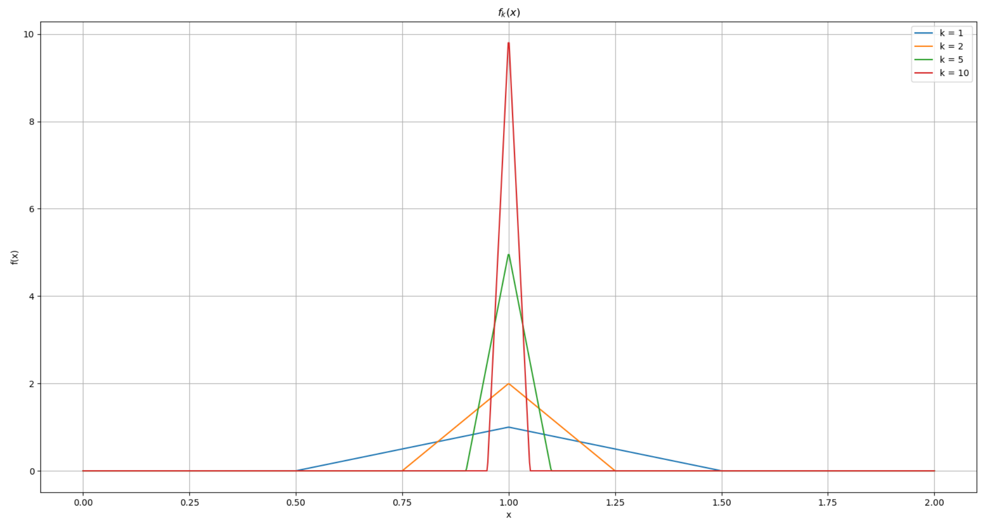

Figura 1: $f_k(x)$ con $k = 1, 2, 5$ y 10.

Problema 6:

Considere $E = c_0$ donde

$$c_0 = \{u = \{u_n\}_{n\geq 1} : \text{ tales que } u_n \in \mathbb{R}, n \geq 1, \lim_{n\to\infty} u_n = 0\}.$$

Es decir, c_0 es el conjunto de las secuencias reales que tienden a 0. Dotamos a este espacio con la norma $\|u\|_{l^\infty} = \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}^+} |u_n|$. Considere el funcional $f : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n.$$

(I) Muestre que $f \in E^*$ y calcule $\|f\|_{E^*}$.

(II) ¿Es posible encontrar $u \in E$ tal que $\|u\| = 1$ y $f(u) = \|f\|_{E^*}$?

Solución:

(I) Veamos que $f \in E^*$ es decir, que f es una transformación lineal de E en $\mathbb{R}$.
Antes de empezar, note que como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es absolutamente convergente y u_n es una sucesión que tiende a 0, entonces la serie determinada por f es absolutamente convergente y por ende permite reordenamientos, siendo así, continuemos.
Dadas $u, v \in E$ y $c \in \mathbb{R}$ note que

$$\begin{aligned} f(cu+v) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (cu_n + v_n), \\ &= c\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} v_n, \\ &= cf(u) + f(v). \end{aligned}$$

lo que nos permite concluir que f es una transformación lineal en E^*.
Ahora para calcular $\|f\|_{E^*}$ nos será de gran utilidad pensar en los $u \in E$ tales que $\|u\|_E = 1$, ya que si bien le estamos pidiendo converger a 0, no estamos exigiendo que sea de alguna forma especifica si no en el infinito, por lo que sabremos que el supremo que estamos buscando se encontrará justamente en la sucesión constante 1 (esto ya que podemos pedirle a la sucesión ser 1 hasta un punto arbitrario y luego si decaimiento a

0), es por esto que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{E^*} &= \sup_{\substack{u\in E\\ \|u\|_E=1}} f(u),\\
&= \sup_{\substack{u\in E\\ \|u\|_E=1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}u_n,\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n},\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 1,\\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1,\\
&= 2-1,\\
&= 1.
\end{aligned}$$

lo que concluye el numeral.

(II) **No**, note que esto es claro por el comentario que realizamos para calcular la norma de f, puesto que de lo contrario ese supremo realmente sería un máximo, es por esto que si existiera u de norma 1 con tendencia a 0 tal que $\|f\|_{E^*}$ fuera exactamente $f(u)$, se cumpliría que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{E^*} &= f(u),\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}u_n,\\
&< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n},\\
&< \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 1,\\
&< \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1,\\
&< 2-1,\\
&< 1.
\end{aligned}$$

entonces $f(u) = \|f\|_{E^*} < 1$, lo que nos lleva a una contradicción de la forma $1 < 1$, puesto que ya verificamos que $\|f\|_{E^*} = 1$.