



UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
ANÁLISIS FUNCIONAL  
TALLER 1: ESPACIOS VECTORIALES NORMADOS  
(I-2025)

**Profesor:** Oscar Guillermo Riaño Castañeda

**Integrantes:** Andrés David Cadena Simons

Jairo Sebastián Niño Castro

Iván Felipe Salamanca Medina

**Fecha:** 02 de Julio del 2025

**Ejercicio 1.**

(I) Sea  $\mathbb{R}$  con la  $\sigma$ -álgebra de Borel.

(a) Dado  $x_0 \in \mathbb{R}$ , considere  $\delta_{x_0}$  la medida de Dirac centrada en  $x_0$  dada por:  $\delta_{x_0}(A) = 1$  si  $x_0 \in A$  y  $\delta_{x_0}(A) = 0$  si  $x_0 \notin A$  para cada  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Muestre que  $\delta_{x_0}$  es una medida.

(b) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible. Muestre que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \delta_{x_0} = f(x_0).$$

(c) De un ejemplo de una función que sea integrable con la medida  $\delta_{x_0}$  para algún  $x_0 \in \mathbb{R}$  pero que no sea integrable con la medida de Lebesgue.

(II) Sea  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  con la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

(a) Considere la medida contadora  $\mu$  dada por  $\mu(A) := \text{cardinal}(A)$  si  $A$  es finito y  $\mu(A) = \infty$  si  $A$  es infinito, para cada  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Muestre que  $\mu$  es una medida.

(b) Dada  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible, es decir,  $f$  es una sucesión  $f = \{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  para algunos  $a_j \in \mathbb{R}$ . Muestre que si  $f$  es integrable (es decir,  $\int_{\mathbb{N}} |f| d\mu < \infty$ ), entonces

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} a_j.$$

(I)

**Demostración.** (a) Veamos que  $\delta_{x_0}$  es una medida.

Note que  $\delta_{x_0}(\emptyset) = 0$  ya que  $x_0 \notin \emptyset$  por definición del conjunto  $\emptyset$ .

Por otro lado, veamos que si tomamos una unión numerable de conjuntos disjuntos y le calculamos su medida, esto va a ser igual que la suma de la medida de cada conjunto, es decir, dados  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  conjuntos disjuntos se satisface que

$$\delta_{x_0} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{x_0}(A_n), \quad \text{para toda familia numerable de conjuntos disjuntos.}$$

Esto ya que si  $\delta_{x_0}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 0$ , significa que  $x_0 \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , en parti-

cular,  $x_0 \notin A_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , luego es válido afirmar que

$$\begin{aligned}\delta_{x_0} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n) \right) &= 0, \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{x_0}(A_n).\end{aligned}$$

Por otra parte, si  $\delta_{x_0} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n) \right) = 1$ , entonces  $x_0 \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n)$ , pero como la familia de conjuntos  $\{A_n\}$  es disjunta 2 a 2, entonces podemos afirmar que existe un único  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $x_0 \in A_N$  y  $x_0 \notin A_n$  para todo  $n \neq N$ , es decir que  $\delta_{x_0}(A_N) = 1$  y  $\delta_{x_0}(A_n) = 0$  para todo  $n \neq N$ , luego

$$\begin{aligned}\delta_{x_0} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n) \right) &= 1, \\ &= \delta_{x_0}(A_N), \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{x_0}(A_n).\end{aligned}$$

lo que nos permite afirmar que  $\delta_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$  es una medida.

(b) Veamos que dada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  función medible se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\delta_{x_0} = f(x_0).$$

Usaremos funciones simples para demostrar el resultado para funciones simples no negativas, luego usaremos la densidad de las funciones simples no negativas en las funciones medibles no negativas y por último esto nos servirá para concluir el resultado a cualquier función medible.

Sea  $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x)$ , donde  $a_i \leq 0$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , además

$$\chi_{A_i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A_i, \\ 0, & \text{si } x \notin A_i \end{cases}$$

para todo  $i = 1, \dots, n$ . Además, podemos suponer que los conjuntos sobre los cuales se definen las funciones características son disjuntos 2 a 2, es decir,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$ .

Note que,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x) d\delta_{x_0} &= \int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x) \right) d\delta_{x_0}, \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_0}(A_i),\end{aligned}$$

no obstante, como en un principio asumimos que la familia numerable de conjuntos  $\{A_i\}$  son disyuntos, entonces  $x_0$  solo puede pertenecer a uno de los  $A_i$ , sin pérdida de generalidad suponga que  $x_0 \in A_1$  (caso contrario

$x \notin \bigcup_{i=1}^n (A_i)$  y por ende  $f(x_0) = 0$  lo que concluye el resultado), entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) d\delta_{x_0} &= \sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_0}(A_i), \\ &= a_I, \\ &= f(x_0). \end{aligned}$$

Lo que nos permite afirmar el resultado para funciones simples no negativas, ahora veamos que esto se repite para funciones no negativas.

Tomemos  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$  una función medible no negativa.

Entonces, como las funciones simples no negativas se pueden aproximar por funciones simples no negativas, sabemos que existe una sucesión monótona de funciones  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  simples positivas tales que

$$0 \leq f_1(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \dots \leq f(x) \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Luego como cada  $f_n$  es simple no negativa, es medible y por ende podemos afirmar que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) d\delta_{x_0} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\delta_{x_0}, \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0), \\ &= f(x_0), \end{aligned}$$

por lo que podemos afirmar el resultado para funciones medibles no negativas.

Ahora usemos que las funciones medibles se pueden reescribir como suma de funciones medibles no negativas, sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible, vamos a particionar a  $f$  como su parte no negativa ( $f^+$ ) y su parte negativa ( $f^-$ ) de forma que  $f = f^+ - f^-$ . Luego,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\delta_{x_0} = \int_{\mathbb{R}} f^+(x) d\delta_{x_0} + \int_{\mathbb{R}} -f^-(x) d\delta_{x_0}.$$

Pero como el resultado vale para funciones medibles no negativas se puede afirmar que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) d\delta_{x_0} &= f^+(x_0) + -f^-(x_0), \\ &= f(x_0). \end{aligned}$$

Lo que concluye el teorema.

(c) Sea  $f(x) = |x|$  y  $x_0 = 0$ .

Sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}} |x| dx = \infty.$$

pero note que

$$\int_{\mathbb{R}} |x| d\delta_0 = |0| = 0.$$

por lo cual podemos afirmar que  $|x|$  no es integrable respecto a Lebesgue, pero si respecto a la medida de Dirac centrada en 0.

□

(II)

**Demostración.** (a) Veamos que  $\mu$  es medida.

Note que si tomamos  $\emptyset \in P(\mathbb{N})$  como  $\text{cardinal}(\emptyset) = 0$ , entonces  $\mu(\emptyset) = 0$ .

Por otro lado, veamos que dados  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  conjuntos disjuntos 2 a 2 se satisface que

$$\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n) \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Esto ya que, si suponemos que  $\text{cardinal} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n) \right) = n < \infty$ , entonces podemos afirmar que todos los conjuntos  $A_n$  son finitos, pues  $\text{cardinal}(A_n) \leq \text{cardinal} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n) \right)$ , además, sabemos que los conjuntos  $A_n$  con cardinal distinto a 0 deben de ser finitos, de lo contrario  $\text{cardinal} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n) \right) = \infty$ , por lo que podemos asumir que para cierta selección de  $n_j$  se tiene que usando el principio de inclusión-exclusión y que la familia de conjuntos  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es disjunta 2 a 2 se cumple que

$$\begin{aligned} \mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n) \right) &= \text{cardinal} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n) \right), \\ &= \text{cardinal} \left( \bigcup_{n_j=0}^m (A_{n_j}) \right), \\ &= \sum_{n_j} \text{cardinal}(A_{n_j}), \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{cardinal}(A_n), \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n). \end{aligned}$$

Caso contrario, si  $\text{cardinal} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n) \right) = \infty$ , entonces sabemos que existe al menos un  $A_I$  tal que  $\text{cardinal}(A_I) = \infty$  o que existe una subcolección  $\{A_{n_j}\}_{n_j \in \mathbb{N}} \subset \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que para todo  $n_j$  se satisface que  $1 \leq$

$\text{cardinal}(A_{n_j}) < \infty$ , por lo que podemos afirmar en ambos casos que

$$\begin{aligned}
 \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n)\right) &= \text{cardinal}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n)\right), \\
 &= \infty, \\
 &= \sum_{n_j \in \mathbb{N}} \text{cardinal}(A_{n_j}) + A_I, \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{cardinal}(A_n), \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).
 \end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir que  $\mu$  es una medida.

(b) Vemos que si  $f$  es integrable, entonces

$$\int_{\mathbb{N}} f \, dx = \sum_{j=1}^{\infty} a_j.$$

Para esto, usaremos un argumento similar al numeral anterior, demostraremos el resultado para funciones simples no negativas, este se podrá extender a las funciones medibles no negativas por densidad y para en el final descomponer a la  $f$  como suma de 2 funciones medibles no negativas, por lo que se demostrará para funciones simples no negativas y se procederá con la descomposición con el fin de no aburrir al profesor.

Suponga  $f$  función simple medible y no negativa, es decir que existen  $a_i \in \mathbb{R}$  tales que  $a_i \leq 0$  y además tomemos la colección de conjuntos  $A_i$  medibles como conjuntos unitarios, luego  $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x)$ , luego

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{N}} f \, dx &= \int_{\mathbb{N}} \left( \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x) \right) dx, \\
 &= \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i), \\
 &= \sum_{i=1}^n a_i.
 \end{aligned}$$

Lo que demuestra que el resultado se cumple para funciones medibles simples y no negativas, luego por densidad este resultado se puede extender a funciones medibles no negativas.

Siendo así, suponga  $f$  función medible, note que como lo hicimos anterior-

mente podemos descomponer a  $f$  como  $f = f^+ + (-f^-)$ , luego

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}} f \, dx &= \int_{\mathbb{N}} f^+ + (-f^-) \, dx, \\ &= \int_{\mathbb{N}} f^+ \, dx + \int_{\mathbb{N}} (-f^-) \, dx, \\ &= \sum_{i^+=1}^n a_{i^+} + \sum_{i^-=1}^n a_{i^-}, \\ &= \sum_{i=1}^m a_i.\end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir el ejercicio. □

**Ejercicio 3.** Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto. Sea  $1 \leq p \leq \infty$ . Entonces  $L^p(\Omega)$  es un espacio de Banach.

**Demostración.** Vamos a seguir la prueba como en el libro de Haim Brezis. Veamos dos casos

- **Caso 1:** Si  $p = \infty$ , sea  $(f_j)$  una sucesión de Cauchy en  $L^\infty(\Omega)$ . Por definición, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{Z}^+$  y un conjunto  $E_\epsilon$  con  $\mu(E_\epsilon) = 0$  ( $\mu$  es la medida de Lebesgue), tal que si  $j, m \geq N$ , entonces

$$\|f_j - f_m\|_\infty = \sup_{x \in \Omega \setminus E_\epsilon} |f_j(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

En particular, para todo  $k \in \mathbb{Z}^+$  existe  $N_k$  y  $E_k$  con  $\mu(E_k) = 0$  tal que si  $j, m \geq N_k$ , entonces

$$\|f_j - f_m\|_\infty = \sup_{x \in \Omega \setminus E_k} |f_j(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}.$$

Sea  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ , por tanto

$$\mu(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) = 0,$$

por tanto  $\mu(E) = 0$  y, además, la sucesión  $(f_j(x))$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{R}$  para todo  $x \in \Omega \setminus E$ , de manera que  $f_j(x) \rightarrow f(x)$ , con  $f(x) \in \mathbb{R}$  para todo  $x \in \Omega \setminus E$ . Sea  $x \in \Omega \setminus E$  cualquiera y  $j \geq N_{2k}$ . Sea  $m \geq j$ , suficientemente grande para que  $|f(x) - f_m(x)| < \frac{1}{2k}$ , entonces

$$|f(x) - f_j(x)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_j(x)| < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k},$$

como  $x$  es arbitrario, concluimos que  $|f(x) - f_j(x)| < \frac{1}{k}$ , para todo  $x \in \Omega \setminus E$ , y como  $\mu(E) = 0$ , concluimos que  $\|f - f_j\|_\infty < \frac{1}{k}$  para  $j \geq N_k$ , es decir,  $f_j \rightarrow f$  en  $L^\infty(\Omega)$ .

- **Caso 2:** Si  $1 \leq p < \infty$ , sea  $(f_j)$  una sucesión de Cauchy en  $L^p(\Omega)$ . Para todo  $\epsilon > 0$  existe  $N_\epsilon > 0$  tal que si  $j, m \geq N_\epsilon$ , entonces  $\|f_j - f_m\|_p < \epsilon$ . Para  $\epsilon = \frac{1}{2}$ , existe  $j_1 \in \mathbb{Z}^+$  tal que si  $m \geq j_1$ , entonces

$$\|f_{j_1} - f_m\|_p < \frac{1}{2}.$$

Ahora, para  $\epsilon = \frac{1}{4}$ , existe  $j_2 \in \mathbb{Z}^+$ , con  $j_2 > j_1$  tal que si  $m \geq j_2$ , entonces

$$\|f_{j_2} - f_m\|_p \leq \frac{1}{4},$$

en particular,  $\|f_{j_1} - f_{j_2}\|_p < \frac{1}{2}$ . Análogamente, para  $\epsilon = \frac{1}{8}$ , existe  $j_3 \in \mathbb{Z}^+$  con  $j_3 > j_2$  tal que si  $m \geq j_3$ , entonces

$$\|f_{j_3} - f_m\|_p < \frac{1}{8},$$

en particular  $\|f_{j_2} - f_{j_3}\|_p < \frac{1}{4}$ . Realizando un argumento inductivo, encontramos que para todo  $k \in \mathbb{Z}^+$ , existe una sucesión creciente de enteros positivos  $(j_k)$ , tal que la subsucesión  $(f_{j_k})$  cumple que

$$\|f_{j_k} - f_{j_{k+1}}\|_p < \frac{1}{2^k}.$$

Veamos que la subsucesión  $(f_{j_k})$  converge en  $L^p(\Omega)$ . Dado  $m \in \mathbb{Z}^+$  definimos

$$g_m(x) = \sum_{k=1}^m |f_{j_{k+1}}(x) - f_{j_k}(x)|,$$

entonces

$$\|g_m\|_p = \left\| \sum_{k=1}^m |f_{j_{k+1}} - f_{j_k}| \right\|_p \leq \sum_{k=1}^m \|f_{j_{k+1}} - f_{j_k}\|_p \leq \sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

además, si  $m_1 \leq m_2$ , entonces

$$g_{m_1}(x) = \sum_{k=1}^{m_1} |f_{j_{k+1}}(x) - f_{j_k}(x)| = \sum_{k=1}^{m_2} |f_{j_{k+1}}(x) - f_{j_k}(x)| = g_{m_2}(x),$$

es decir,  $g_{m_1}$  es una sucesión monótona creciente. Así, por el Teorema de la Convergencia Monótona, tenemos que

$$1 = 1^p \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \|g_m\|_p^p = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |g_m(x)|^p dx = \int_{\Omega} \lim_{m \rightarrow \infty} |g_m(x)|^p dx,$$

por tanto,  $\lim_{m \rightarrow \infty} |g_m(x)| < \infty$  para casi todo  $x \in \Omega$ , es decir,  $\lim_{m \rightarrow \infty} |g_m(x)| < \infty$  para todo  $x \in \Omega \setminus E$ , donde  $\mu(E) = 0$ , definimos

$$g(x) = \begin{cases} \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(x), & \text{si } x \in \Omega \setminus E \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo hecho anteriormente,  $g \in L^p(\Omega)$  y  $\|g\|_p \leq 1$ , además, para  $x \in \Omega \setminus E$ , podemos escribir

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{j_{k+1}}(x) - f_{j_k}(x)|.$$

Sean  $m, k \in \mathbb{Z}^+$  con  $m \geq k \geq 2$ , entonces existe  $l \in \mathbb{N}$  tal que  $m = k + l$  y para  $x \in \Omega \setminus E$

$$\begin{aligned} |f_{j_m}(x) - f_{j_k}(x)| &= |(f_{j_m}(x) - f_{j_{k+l-1}}(x)) + (f_{j_{k+l-1}}(x) - f_{j_{k+l-2}}(x)) + \cdots + (f_{j_{k+1}}(x) - f_{j_k}(x))| \\ &\leq \sum_{i=1}^l |f_{j_{k+i}}(x) - f_{j_{k+i-1}}(x)| \\ &= \sum_{i=k}^m |f_{j_{i+1}}(x) - f_{j_i}(x)| \\ &\leq \sum_{i=k}^{\infty} |f_{j_{i+1}}(x) - f_{j_i}(x)| \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |f_{j_{i+1}}(x) - f_{j_i}(x)| - \sum_{i=1}^{k-1} |f_{j_{i+1}}(x) - f_{j_i}(x)| \\ &= g(x) - g_{k-1}(x), \end{aligned}$$

por tanto,

$$|f_{j_m}(x) - f_{j_k}(x)| \leq g(x) - g_{k-1}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

es decir, la sucesión  $(f_{j_k}(x))$  es de Cauchy en  $\mathbb{R}$  para casi todo  $x \in \Omega$ , más precisamente, para  $x \in \Omega \setminus E$ . Definimos entonces

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f_{j_k}(x), & \text{si } x \in \Omega \setminus E \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea  $x \in \Omega \setminus E$ . Vimos que, dados  $m \geq k \geq 2$ , se tiene que

$$|f_{j_m}(x) - f_{j_k}(x)| \leq g(x) - g_{k-1}(x) \leq g(x),$$



como esto se tiene para todo  $m \geq k \geq 2$ , por la definición de  $f_k \geq 2$  y  $x \in \Omega \setminus E$

$$|f(x) - f_{j_k}(x)| \leq g(x), \quad (1)$$

en particular, como  $|f(x)| - |f_{j_k}(x)| \leq |f(x) - f_{j_k}(x)|$ , tenemos que

$$|f(x)| \leq g(x) + |f_{j_k}(x)|,$$

de manera que  $\|f\|_p \leq \|g\|_p + \|f_{j_k}\|_p < \infty$ , dado que  $g \in L^p(\Omega)$  y  $f_{j_k} \in L^p(\Omega)$ . Finalmente por la desigualdad (1) y el Teorema de la Convergencia Dominada, se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{j_k} - f\|_p^p = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_{j_k}(x) - f(x)|^p dx = \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} |f_{j_k}(x) - f(x)|^p dx = 0,$$

es decir,  $f_{j_k} \rightarrow f$  en  $L^p(\Omega)$ . Como la sucesión  $(f_j)$  es de Cauchy, al tener una subsucesión convergente, la sucesión “completa” es convergente, con lo que se concluye el resultado. □

**Ejercicio 5.** Considere el espacio  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Sean

$$f_0(x) = \begin{cases} |x|^{-\alpha}, & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{si } |x| > 1. \end{cases} \quad f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } |x| \leq 1 \\ |x|^{-\alpha}, & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

(I) ¿Para qué valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $f_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

(II) ¿Para qué valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $f_1 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

(III) ¿Para qué valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $f_2(x) = \frac{1}{1 + |x|^\alpha} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

**Demostración.** (I) Consideramos dos casos acá:

a)  $1 \leq p < \infty$

En primer lugar, haciendo el cambio a coordenadas polares se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_0(x) d\lambda(x) = \int_0^1 \int_{S^{n-1}} (r^{-\alpha}) r^{n-1} dS dr = \int_0^1 C(r^{-\alpha}) r^{n-1} dr,$$

en donde en la primera igualdad se utilizó el cambio a coordenadas polares, y en la segunda igualdad  $C$  corresponde a la medida de la  $S^{n-1}$  esfera respecto a la medida de Lebesgue. Luego

$$\begin{aligned} \|f_0\|_{L^p} &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} (f_0(x))^p d\lambda(x) \right)^{1/p} = \left( \int_0^1 \int_{S^{n-1}} (r^{-\alpha})^p r^{n-1} dS dr \right)^{1/p} \\ &= \left( \int_0^1 C(r^{-\alpha})^p r^{n-1} dr \right)^{1/p} \\ &= \left( \int_0^1 C r^{-\alpha p + n - 1} dr \right)^{1/p} \end{aligned}$$

Veamos cuando  $\int_0^1 r^{-\alpha p + n - 1} dr$  converge. Esto ocurre si y sólo si

$$\begin{aligned} -\alpha p + n - 1 &> -1 \\ -\alpha p + n &> 0 \\ n &> \alpha p \\ \frac{n}{p} &> \alpha \end{aligned}$$

b)  $p = \infty$

En este caso se tiene que

$$\|f_0\|_{L^\infty} = \inf\{C \geq 0 : |f_0(x)| \leq C \text{ para casi todo } x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Como  $0 \leq C$  para todo  $C \in \mathbb{R}^+$ , es suficiente considerar cuándo  $|x| \leq 1$ . De esta forma

$$\|f_0(x)\|_{L^\infty} = \inf\{C \geq 0 : |x|^{-\alpha} \leq C \text{ para casi todo } x\},$$

luego este ínfimo existe siempre que  $|x|^{-\alpha}$  sea acotado en  $|x| \leq 1$  (para casi todo  $x$ ). Esto se tiene si y solo si  $\alpha \leq 0$ .

Por tanto,  $f_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $1 \leq p < \infty$  si y solo si  $\alpha < \frac{n}{p}$ , y para  $p = \infty$ ,  $f_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  si y sólo si  $\alpha \leq 0$ .

(II) Consideramos dos casos

a)  $1 \leq p < \infty$

Al igual que en el ítem (I), se considera el cambio a coordenadas polares de la misma forma. Así:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1(x) d\lambda(x) = \int_1^\infty \int_{S^{n-1}} (r^{-\alpha}) r^{n-1} dS dr = \int_1^\infty C(r^{-\alpha}) r^{n-1} dr$$

Esto nos lleva a:

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{L^p} &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} (f_1(x))^p d\lambda(x) \right)^{1/p} = \left( \int_1^\infty \int_{S^{n-1}} (r^{-\alpha})^p r^{n-1} dS dr \right)^{1/p} \\ &= \left( \int_1^\infty C(r^{-\alpha})^p r^{n-1} dr \right)^{1/p} \\ &= \left( \int_1^\infty C r^{-\alpha p + n - 1} dr \right)^{1/p} \end{aligned}$$

Veamos cuando  $\int_1^\infty r^{-\alpha p + n - 1} dr$  converge. Esto ocurre si y sólo si

$$\begin{aligned} -\alpha p + n - 1 &< -1 \\ -\alpha p + n &< 0 \\ n &< \alpha p \\ \frac{n}{p} &< \alpha \end{aligned}$$

b)  $p = \infty$

En este caso se tiene que

$$\|f_1\|_{L^\infty} = \inf\{C \geq 0 : |f_1(x)| \leq C \text{ para casi todo } x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Como  $0 \leq C$  para todo  $C \in \mathbb{R}^+$ , es suficiente considerar cuándo  $|x| > 1$ . De esta forma

$$\|f_1(x)\|_{L^\infty} = \inf\{C \geq 0 : |x|^{-\alpha} \leq C \text{ para casi todo } x\},$$

luego este ínfimo existe siempre que  $|x|^{-\alpha}$  sea acotado en  $|x| > 1$ . Esto se tiene siempre que  $\alpha \geq 0$ .

Por tanto,  $f_1 \in L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $1 \leq p < \infty$  si y sólo si  $\alpha > \frac{n}{p}$ , y para  $p = \infty$ ,  $f_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  si y sólo si  $\alpha \geq 0$ .

(III) Consideramos dos casos:

a)  $1 \leq p < \infty$

Queremos ver cuando  $f_2 \in L^p$ . Esto es, cuando

$$\begin{aligned} \|f_2\|_{L^p} &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} (f_2(x))^p d\lambda(x) \right)^{1/p} = \left( \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \left( \frac{1}{1+r^\alpha} \right)^p r^{n-1} dS dr \right)^{1/p} \\ &= \left( \int_0^\infty C \left( \frac{1}{1+r^\alpha} \right)^p r^{n-1} dr \right)^{1/p} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Para ello, veamos cuando  $\left( \int_0^\infty \left( \frac{1}{1+r^\alpha} \right)^p r^{n-1} dr \right)$  converge. Como

$$\int_0^\infty \left( \frac{1}{1+r^\alpha} \right)^p r^{n-1} dr = \int_0^1 \left( \frac{1}{1+r^\alpha} \right)^p r^{n-1} dr + \int_1^\infty \left( \frac{1}{1+r^\alpha} \right)^p r^{n-1} dr$$

y la primera integral converge por ser  $\left( \frac{1}{1+r^\alpha} \right)^p r^{n-1}$  continua en el compacto  $[0, 1]$ , es suficiente estudiar la convergencia de la segunda integral. Para ello, utilizaremos criterio de comparación por paso al límite. Sea  $g(r) = \left( \frac{1}{1+r^\alpha} \right)^p r^{n-1}$ , consideremos los siguientes casos:

✓  $\alpha > 0$

Considerando  $h(r) = r^{-\alpha p + n - 1}$ , se tiene que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{g(r)}{h(r)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{1}{1+r^\alpha} \right)^p r^{n-1}}{r^{-\alpha p + n - 1}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{r^\alpha}{1+r^\alpha} \right)^p = 1$$

donde la última igualdad se tiene pues al evaluar el límite,  $\alpha > 0$ . Así,

$$\int_1^\infty h(r) dr \text{ converge si y sólo si } \int_1^\infty g(r) dr \text{ converge}$$

la primera converge si y sólo si

$$\begin{aligned} -\alpha p + n - 1 &< -1 \\ -\alpha p + n &< 0 \\ \frac{n}{p} &< \alpha \end{aligned}$$

$$\checkmark \alpha = 0$$

Para este caso,

$$\int_1^\infty g(r) dr = \int_1^\infty \frac{1}{2^p} r^{n-1} dr$$

la cual diverge pues  $n \geq 1$ .

$$\checkmark \alpha < 0$$

Considerando  $t(r) = r^{n-1}$ , se tiene que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{g(r)}{t(r)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{1+r^\alpha}\right)^p r^{n-1}}{r^{n-1}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+r^\alpha}\right)^p = 1$$

donde la última igualdad se tiene pues al evaluar el límite,  $\alpha < 0$ . Así,

$$\int_1^\infty t(r) dr \quad \text{converge si y sólo si} \quad \int_1^\infty g(r) dr \quad \text{converge}$$

la primera converge si y sólo si  $n - 1 < 0$ . Es decir, cuando  $n < 1$  lo cual no se tiene dado que  $n \geq 0$ . Por lo tanto,  $\int_1^\infty g(r) dr$  diverge.

b)  $p = \infty$  En este caso se tiene que

$$\begin{aligned} \|f_2\|_{L^\infty} &= \inf\{C \geq 0 : |f_2(x)| \leq C \quad \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \inf\{C \geq 0 : \frac{1}{1+|x|^\alpha} \leq C \quad \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

Luego este ínfimo existe siempre pues:

$$\begin{aligned} |x|^\alpha &\geq 0 \\ 1 + |x|^\alpha &\geq 1 \\ 1 &\geq \frac{1}{1 + |x|^\alpha} \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f_2 \in L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $1 \leq p < \infty$  si y sólo si  $\frac{n}{p} < \alpha$ , y para  $p = \infty$ ,  $f_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . □

### Ejercicio 8.

- (I) Sea  $1 < p < \infty$ . Considere las secuencias  $x_n = \{x_n^j\}_{j=1}^\infty$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $x = \{x^j\}_{j=1}^\infty$ . Asuma que  $x_n, x \in l^p$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Muestre que  $x_n \rightharpoonup x$  en  $l^p$  si y sólo si  $\{x_n\}$  es acotada en  $l^p$  y  $x_n^j \rightarrow x^j$  para cada entero positivo  $j$ .

- (II) Considere la secuencia  $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, 0, \dots\right)$ . ¿En cuales espacios  $l^p$ , con  $1 \leq p \leq \infty$  esta secuencia converge débilmente?

**Demostración.** (I) ■ ( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $x_n \rightharpoonup x$  en  $l^p$ . Como  $l^p$  es un espacio de Banach, sabemos que  $\{x_n\}$  es acotada y además,  $\|x\|_{l^p} \leq \liminf \|x_n\|_{l^p}$ . Dado  $j \in \mathbb{Z}^+$ , definimos

$$\begin{aligned}\pi_j : l^p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \pi_j(y) = y^j,\end{aligned}$$

donde  $y = \{y^i\}_{i=1}^\infty \in l^p$ . Veamos que  $\pi_j \in (l^p)^\star$  para todo  $j \in \mathbb{Z}^+$ .  $\pi_j$  es claramente lineal como consecuencia de la suma y producto por escalar definida en  $l^p$ , además

$$|\pi_j(y)| = |y^j| = (|y^j|^p)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^\infty |y^i|^p\right)^{1/p} = \|y\|_{l^p},$$

por tanto,  $\pi_j$  es continuo y  $\|\pi_j\|_{(l^p)^\star} \leq 1$ . Sabemos que  $x_n \rightharpoonup x$  si y sólo si  $\langle f; x_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle f; x \rangle$  para todo  $f \in (l^p)^\star$ , en particular para  $\pi_j$ . En este caso, se obtiene que

$$\pi_j(x_n) = x_n^j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^j = \pi_j(x),$$

como  $j \in \mathbb{Z}^+$  es arbitrario, se obtiene el resultado.

- ( $\Leftarrow$ ) Supongamos ahora que  $\{x_n\}$  es acotada y que  $x_n^j \rightarrow x^j$  para todo  $j \in \mathbb{Z}^+$ . Sea  $V$  una vecindad débil de  $x$ , que sin pérdida de generalidad, podemos expresar como

$$V = \{y \in l^p : |\langle f_i; y - x \rangle| < \epsilon \text{ para todo } i = 1, \dots, k\},$$

para algunos  $f_1, \dots, f_k \in (l^p)^\star$  y  $\epsilon > 0$ . Queremos ver que existe  $N \in \mathbb{Z}^+$  tal que si  $n \geq N$ , entonces  $x_n \in V$ . Sea  $f_i$  con  $1 \leq i \leq k$ , dado que  $1 < p < \infty$ , por el Teorema de Representación de Riesz, existe una única  $y_i = \{y_i^j\}_{j=1}^\infty \in l^{p'}$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  tal que

$$\langle f_i; z \rangle = \sum_{j=1}^\infty y_i^j z^j,$$

para toda  $z = \{z^j\}_{j=1}^\infty \in l^p$ . Entonces, dado  $n \in \mathbb{N}$

$$|\langle f_i; x_n - x \rangle| = \left| \sum_{j=1}^\infty y_i^j (x_n^j - x^j) \right| \leq \sum_{j=1}^\infty |y_i^j| |x_n^j - x^j|.$$

Ahora, note que si  $z = \{z^j\}_{j=1}^{\infty} \in l^q$  con  $1 \leq q < \infty$ , entonces, dado  $l \geq 1$ , la sucesión

$$z_l = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{l-1 \text{ ceros}}, z^l, z^{l+1}, \dots),$$

también está en  $l^q$ , dado que

$$\|z_l\|_{l^q}^q = \sum_{j=l}^{\infty} |z^j|^q \leq \sum_{j=1}^{\infty} |z^j|^q = \|z\|_{l^q}^q < \infty,$$

de esta manera, también vale la desigualdad de Hölder para estas sucesiones, en otras palabras, dadas  $z = \{z^j\}_{j=1}^{\infty} \in l^q$  y  $w = \{w^j\}_{j=1}^{\infty} \in l^{q'}$  con  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ , dado  $l \geq 1$

$$\sum_{j=l}^{\infty} |z^j| |w^j| \leq \left( \sum_{j=l}^{\infty} |z^j|^q \right)^{1/q} \left( \sum_{j=l}^{\infty} |w^j|^{q'} \right)^{1/q'}.$$

Como  $y_i \in l^{p'}$ , entonces

$$\|y_i\|_{l^{p'}} = \left( \sum_{j=1}^{\infty} |y_i^j|^{p'} \right)^{1/p'} < \infty,$$

además, como  $\{x_n\}$  es una sucesión acotada, podemos definir

$$M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| + \|x\| + 1,$$

de esta manera, por ser una serie absolutamente convergente, existe  $J_i \in \mathbb{Z}^+$  con  $J_i \geq 2$  tal que

$$\|y_i\|_{l^{p'}} = \left( \sum_{j=J_i}^{\infty} |y_i^j|^{p'} \right)^{1/p'} < \frac{\epsilon}{2M}.$$

Entonces

$$|\langle f_i; x_n - x \rangle| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |y_i^j| |x_n^j - x^j| = \underbrace{\sum_{j=1}^{J_i-1} |y_i^j| |x_n^j - x^j|}_{S_1} + \underbrace{\sum_{j=J_i}^{\infty} |y_i^j| |x_n^j - x^j|}_{S_2},$$

Acotemos primero  $S_2$ , por la observación que hicimos antes con las suce-

siones  $z_i$ , la manera como escogimos  $J_i$  y la definición de  $M$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \sum_{j=J_i}^{\infty} |y_i^j| |x_n^j - x^j| \leq \left( \sum_{j=J_i}^{\infty} |y_i^j|^{p'} \right)^{1/p'} \left( \sum_{j=J_i}^{\infty} |x_n^j - x^j|^p \right)^{1/p} \\
 &\leq \left( \sum_{j=J_i}^{\infty} |y_i^j|^{p'} \right)^{1/p'} \|x_n - x\|_{l^p} \\
 &\leq \left( \sum_{j=J_i}^{\infty} |y_i^j|^{p'} \right)^{1/p'} (\|x_n\|_{l^p} + \|x\|_{l^p}) \\
 &< \frac{\epsilon}{2M} (\|x_n\|_{l^p} + \|x\|_{l^p}) \\
 &\leq \frac{\epsilon}{2}.
 \end{aligned}$$

Para  $S_1$ , definamos

$$N = \max_{1 \leq j \leq J_i-1} |y_i^j| + 1.$$

Como  $x_n^j \rightarrow x^j$  para todo  $j \in \mathbb{Z}^+$ , existe  $n_i$  tal que si  $n \geq n_i$ , entonces

$$|x_n^j - x^j| < \frac{\epsilon}{2N J_i},$$

para todo  $j = 1, \dots, J_i - 1$ , de esta manera

$$S_1 = \sum_{j=1}^{J_i-1} |y_i^j| |x_n^j - x^j| < N \frac{\epsilon}{2N J_i} \sum_{j=1}^{J_i-1} 1 = \frac{\epsilon}{2 J_i} \cdot (J_i - 1) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Así

$$|\langle f_i; x_n - x \rangle| \leq S_1 + S_2 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

para  $n \geq n_i$ . De esta manera, para  $n \geq N = \max_{1 \leq i \leq k} n_i$ , se tiene que

$$|\langle f_i; x_n - x \rangle| < \epsilon \text{ para todo } i = 1, \dots, k,$$

es decir, para  $n \geq N$ ,  $x_n \in V$ , lo cuál prueba el resultado.

(I) Vamos a dividir la prueba en 3 casos

(a) **Caso**  $p = 1$ . En este caso, note que

$$\|x_n\|_{l^1} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j},$$

como la serie armónica no es convergente, tenemos que la sucesión  $\{x_n\}$  es no acotada y, por tanto, no puede converger débilmente en  $\sigma(l^1, (l^1)^\star)$ .

(b) **Caso**  $1 < p < \infty$  En este caso, tenemos que

$$\|x_n\|_{l^p}^p = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^p} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^p} = C_p < \infty,$$

la convergencia de esta serie se sigue de que  $p > 1$  y el criterio de la integral para convergencia de series. También se puede ver como la evaluación en  $p$  de la función zeta de Riemann. De esta manera, la sucesión  $\{x_n\}$  es acotada en  $l^p$ . Consideremos la sucesión  $x = \left\{ \frac{1}{j} \right\}_{j=1}^{\infty}$ . Por lo que vimos anteriormente,  $x \in l^p$  y  $\|x_n\|_{l^p} \leq \|x\|_{l^p}$  para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Sea  $j \in \mathbb{Z}^+$ , entonces  $x^j = \frac{1}{j}$  y

$$x_n^j = \begin{cases} \frac{1}{j}, & \text{si } n \geq j, \\ 0, & \text{si } n < j, \end{cases}$$

de manera que, para  $n \geq j$  se tiene que  $|x_n^j - x^j| = \left| \frac{1}{j} - \frac{1}{j} \right| = 0$ , es decir,  $x_n^j \rightarrow x^j$  para todo  $j \in \mathbb{Z}^+$ . Usando el ítem (I), tenemos que  $x_n \rightarrow x$  en  $l^p$ .

(c) **Caso**  $p = \infty$  Consideremos nuevamente la sucesión  $x = \left\{ \frac{1}{j} \right\}_{j=1}^{\infty}$ , claramente  $x \in l^{\infty}$ . Sea  $\epsilon > 0$  y  $n \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $\frac{1}{n+1} < \epsilon$ , entonces, por la forma

de los  $x_n^j$ 's

$$\|x - x_n\|_{l^{\infty}} = \sup_{j \in \mathbb{Z}^+} |x^j - x_n^j| = \sup_{j \geq n+1} \frac{1}{j} = \frac{1}{n+1} < \epsilon,$$

es decir,  $x_n \rightarrow x$  fuertemente en  $l^{\infty}$ , y como la convergencia fuerte implica la convergencia débil, tenemos que  $x_n \rightarrow x$  en  $l^{\infty}$ .

□