# Análisis Funcional: Taller 2

8 de mayo de 2025

*Universidad Nacional de Colombia*

Oscar Guillermo Riaño Castañeda

Andrés David Cadena Simons acadenas@unal.edu.co

## Problema 1:

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Dado $r > 0$, considere $C = B(0,r) = \{y \in E : \|y\| < r\}$. Determine el funcional de Minkowski[1] de $C$.

**Solución:**

Note que $C$ es abierto ya que $C = B(0,r)$, veamos que es convexo.
Sean $x, y \in C$, entonces el camino convexo entre ellos es $(1-t)x + ty$, ahora veamos que para todo $t \in [0,1]$ se cumple que $(1-t)x + ty = z \in C$ ya que

$$\begin{aligned} \|z\| &= \|(1-t)x + ty\|, \\ &\leq (1-t)\|x\| + t\|y\|, \\ &< (1-t)r + tr, \\ &< r. \end{aligned}$$

Luego podemos afirmar que $C$ es un conjunto abierto, convexo y además que $0 \in C$, por lo que definiremos

$$\begin{aligned} \rho : E &\to \mathbb{R}, \\ x &\to \inf\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\}. \end{aligned}$$

Note que si $\alpha^{-1}x \in C$, entonces

$$\left\|\alpha^{-1}x\right\| = \frac{\|x\|}{\alpha} < r.$$

Lo que implica que $\alpha > \frac{\|x\|}{r}$, lo que nos permite razonar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \rho : E &\to \mathbb{R}, \\ x &\to \inf\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\} = \inf\left\{\alpha > 0 : \alpha > \frac{\|x\|}{r}\right\}. \\ &= \frac{\|x\|}{r}. \end{aligned}$$

Es decir

$$\rho(x) = \frac{\|x\|}{r}.$$

[1]Recuerde que dado $C$ abierto, convexo con $0 \in C$, el funcional de Minkowski se define como $\rho(x) = \inf\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\}, x \in E$.

Veamos que este es un funcional de Minkowski.
Dado $x \in E$ y $\lambda > 0$ se satisface que

$$\begin{aligned}\rho(\lambda x) &= \frac{\|\lambda x\|}{r},\\ &= \lambda\frac{\|x\|}{r},\\ &= \lambda\rho(x).\end{aligned}$$

Además dados $x, y \in E$ se cumple que

$$\begin{aligned}\rho(x+y) &= \frac{\|x+y\|}{r},\\ &\leq \frac{\|x\|+\|y\|}{r},\\ &\leq \frac{\|x\|}{r} + \frac{y}{r},\\ &\leq \rho(x)+\rho(y).\end{aligned}$$

Por lo que podremos afirmar que el funcional de Minkowski de $C$ es

$$\rho(x) = \frac{\|x\|}{r}.$$

Lo que nos permite concluir el ejercicio.

# Problema 2:

Sea $E$ espacio vectorial normado.

(I) Sea $W \subset E$ un subespacio propio de $E$ y $x_0 \in E \setminus W$, tal que $d := d(x_0, W) > 0$. Demuestre que existe $f \in E^*$ tal que $f = 0$ restricto a $W$, $f(x_0) = d$ y $\|f\|_{E^*} = 1$.

(II) Sea $W \subset E$ un subespacio propio cerrado de $E$ y $x_0 \in E \setminus W$. Demuestre que existe $f \in E^*$ tal que $f = 0$ restricto a $W$ y $f(x_0) \neq 0$.

**Solución:**

1. Suponga $V = W \times \{tx_0\}$ y definamos el siguiente funcional

$$\begin{aligned} g : V = W \times \{tx_0\} &\to \mathbb{R}, \\ (x, tx_0) &\to td. \end{aligned}$$

Note que si tomamos $x + (0)x_0 \in V$ tal que $t = 0$ (es decir $x \in W$), entonces

$$g(x + (0)x_0) = (0)d = 0.$$

Por otro lado si tomamos $0 + (1)x_0 \in V$ (es decir $x_0 \in E \setminus W$), entonces

$$g(0 + (1)x_0) = (1)d = d.$$

Se puede verificar que $g$ es lineal ya que si suponemos $x, y \in V$ con sus $t_1$ y $t_2$ respectivos y $\lambda$ escalar, entonces

$$\begin{aligned} g(x + \lambda y) &= (t_1 + \lambda t_2)d, \\ &= t_1 d + \lambda t_2 d, \\ &= g(x) + \lambda g(y). \end{aligned}$$

Ahora veamos que $\|g\|_{V^*} = 1$.
Primero tome $a = x + tx_0 \in V$ arbitrario, entonces

$$\begin{aligned} |g(a)| &= |td|, \\ &= \left| t \inf_{y \in W} \|x_0 - y\| \right|, \\ &\leq \left| t \left\| x_0 - \left( -\frac{x}{t} \right) \right\| \right|, \\ &\leq \|tx_0 + x\|, \\ &\leq \|a\|. \end{aligned}$$

Por lo que podemos asegurar que $\|g\|_{V^*} \leq 1$. Pero note que como $d = \inf_{y \in W} \|x_0 - y\|$, entonces podemos escoger una sucesión $\{y_n\} \subset W$ tal que $\|x_0 - y_n\| \to d$ por encima

cuando $n \to \infty$.
Suponga $\{v_n\} = \left\{ \frac{x_0 - y_n}{\|x_0 - y_n\|} \right\}$ y note que

$$\begin{aligned}
\|g\|_{V^*} &= \sup_{\substack{x \in V, \\ \|x\|=1}} |g(x)|, \\
&\geq \lim_{v_n \to \infty} |g(v_n)|, \\
&\geq \lim_{v_n \to \infty} \frac{|g(x_0) - g(y_n)|}{\|x_0 - y_n\|}, \\
&\geq \lim_{n \to \infty} \frac{d}{\|x_0 - y_n\|}, \\
&\geq 1.
\end{aligned}$$

Luego podemos asegurar que $\|g\|_{V^*} = 1$.
Ahora, definamos

$$\rho(x) = \|x\| \quad , x \in E.$$

Veamos que $\rho$ domina a $g$, es decir, $g(x) \leq \rho(x)$ para todo $x \in V$.
Suponga $a = x + tx_0 \in V$, entonces

$$\begin{aligned}
g(a) &= td, \\
&\leq \|tx_0\|, \\
&\leq \|x + tx_0\|, \\
&\leq \|a\| = \rho(a).
\end{aligned}$$

lo que nos permite concluir que $\rho$ domina a $g$.
Ahora tenemos que

- $g \in V^*$.
- $\|g\|_{V^*} = 1$.
- $g|_w = 0$ y $g(x_0) = d$.
- $\rho$ es un funcional de Minkowski que domina a $g$.

Luego, usando el teorema de Helly,Hahn-Banach en su forma analítica podemos asegurar que existe $f \in E^*$ tal que $f = 0$ restricto a $W$, $f(x_0) = d$ y $\|f\|_{E^*} = 1$.

2. Note que como $W$ es un subespacio propio cerrado, entonces en particular es un subespacio propio, además como este subespacio es cerrado si $x \in E \backslash W$, entonces $x \notin \overline{W}$, ya que $W = \overline{W}$ y $x_0 \in E/W$, por lo que podemos afirmar que $d := d(x_0, W) > 0$, luego por (I) podemos afirmar que existe $f \in E^*$ tal que $f = 0$ restricto a $W$ y $f(x_0) = d \neq 0$.

## Problema 3:

Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios de Banach.

(I) Sea $K \subset E$ un subespacio cerrado de $E$. Definimos la relación sobre $E$ dada por $x \sim_K y$ si y solo si $x - y \in K$.

(a) Muestre que $\sim_K$ es una relación de equivalencia sobre $E$.

(b) Muestre que el espacio cociente $E/K$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|x + K\|_{E/K} = \inf_{k \in K} \|x - k\|, \quad x \in E.$$

Es decir, debe verificar que el espacio cociente es un espacio vectorial normado, cuya norma lo hace completo.

(II) Sea $T \in L(E, W)$ tal que existe $c > 0$ para el cual

$$\|Tx\|_F \geq c \|x\|_E ,$$

para todo $x \in E$. Si $K$ denota el espacio nulo de $T$ y $R(T)$ el rango de $T$, muestre que $\overline{T} : E/K \to R(T)$ dada por $\widetilde{T}(x + K) = T(x), x \in E$, está bien definida y es un isomorfismo. Esto es $\widetilde{T} \in L(E/K, R(T))$ y $\widetilde{T}^{-1} \in L(R(T), E/K)$.

**Solución:**

(I)

(a) Veamos que $\sim_K$ es una relación de equivalencia sobre $E$.

- Reflexiva.
  Note que $x \sim_K x$, ya que $x - x = 0 \in K$ por ser $K$ subespacio de $E$ para todo $x \in E$, lo que nos permite concluir la reflexividad.
- Simétrica.
  Note que si asumimos que $x \sim_K y$, entonces $x - y \in K$, pero como $K$ es subespacio, entonces $-(x - y) = y - x \in K$, por lo que podemos asegurar que $y \sim_K x$, lo que nos permite concluir la simetría en la relación.
- Transitiva.
  Note que si asumimos que $x \sim_K y$ y $y \sim_K z$, entonces $x - y \in K$ y $y - z \in K$, pero como $K$ es un subespacio cerrado, entonces $(x - y) + (y - z) = x - z \in K$ y por ende $x \sim_K z$, lo que nos permite concluir la transitividad.

(b) Veamos que el espacio $(E/K, \|\cdot\|_{E/K})$ es Banach.

- Veamos que $(E/K, \|\cdot\|_{E/K})$ es un espacio vectorial normado.
  Note que si $y - x = k \in K$, entonces $y = x + k$ con $x \in E$ y cualquier $k \in K$, por lo que escribiremos a $y = x + K$, luego los elementos de $E/K$ serán de la forma $[a] = \{a = x + k : k \in K, x \in E\}$, además podemos afirmar que $E/K$

es cerrado, ya que $K$ es cerrado, entonces $\lambda[a] + [b] = \lambda(x + k_1) + y + k_2 = (\lambda x + y) + \widetilde{k} = [\lambda a + b]$. Veamos que la norma está bien definida, es decir, dados $x + K, y + K \in E/K$ y $\lambda$ escalar, entonces

$$\begin{aligned} \|\lambda(x+K)\|_{E/K} &= \inf_{k\in K} \|\lambda(x-k)\|, \\ &= \lambda \inf_{k\in K} \|x-k\|, \\ &= \lambda \|x+K\|_{E/K}. \end{aligned}$$

Además si tomamos $0 \in E/K$, es decir, $x \in K$, como $K$ es subespacio cerrado, entonces $x - k, 0 \in K$ y por ende podemos afirmar que

$$\begin{aligned} \|x+K\|_{E/K} &= \inf_{k\in K} \|x-k\|, \\ &= \inf_{k\in K} \|k\|, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Y por último sabemos que la desigualdad triangular se cumple por las propiedades de la norma en $E$ y del ínfimo, primero note que dado $\epsilon > 0$ existe $k_1, k_2 \in K$ tales que

$$\begin{aligned} \|x+K\|_{E/K} &= \inf_{k\in K} \|x-k\|, \\ &\le \|x-k_1\|, \\ &\le \|x+K\|_{E/K} + \epsilon/2, \\ \|y+K\|_{E/K} &= \inf_{k\in K} \|y-k\|, \\ &\le \|y-k_2\|, \\ &\le \|y+K\|_{E/K} + \epsilon/2. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \|x+K+y+K\|_{E/K} &= \|(x+y)+K\|_{E/K}, \\ &\le \inf_{k\in K} \|x+y-k\|, \\ &\le \|x+y-(k_1+k_2)\|, \\ &\le \|x-k_1\| + \|y-k_2\|, \\ &\le \|x+K\|_{E/K} + \|y+K\|_{E/K} + \epsilon. \end{aligned}$$

Pero como la desigualdad se tiene para $\epsilon > 0$ arbitrario, entonces

$$\|(x+y)+K\|_{E/K} \le \|x+K\|_{E/K} + \|y+K\|_{E/K}.$$

Lo que concluye la desigualdad triangular y a su vez nos permite afirmar que $(E/K, \|\cdot\|_{E/K})$ es un espacio vectorial normado.

- Ahora veamos que $(E/K, \|\cdot\|_{E/K})$ es Banach.
  Suponga $\{a_n\} \subset E/K$ sucesión de Cauchy, por facilidad tomaremos al representante $a_n = x_n + k$ con $k$ fijo, entonces note que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$ entonces

$$\begin{aligned}\|a_n - a_m\|_{E/K} &= \|(x_n - x_m) + K\|, \\ &= \inf_{k \in K} \|x_n - x_m - k\| < \epsilon.\end{aligned}$$

  Vamos a tomar una subsucesión $\{a_j\}$ tal que para todo $j \in \mathbb{Z}$ se tenga que

$$\|a_j - a_{j+1}\|_{E/K} < \frac{1}{2^j}.$$

  ¿Por qué se puede obtener esta subsucesión? Note que si tomamos $\epsilon = \frac{1}{2^j}$ existe $N_0 > 0$ tal que si $n_0, m_0 > N_0$, entonces $\|x_{n_0} - x_{m_0}\| < \frac{1}{2^j}$, luego si tomamos por otro lado $\epsilon = \frac{1}{2^{j-1}}$, note que para todo $n, m$ tal que $n, m > N_0$ se satisface la condición, ya que $\frac{1}{2^j} < \frac{1}{2^{j-1}}$, la idea es tomar $n, m$ adecuados que cumplan de forma consecutiva las condiciones.
  Siendo así, note que razonando de forma análoga a cuando demostramos la desigualdad triangular por propiedades del ínfimo se tiene que dado $\delta > 0$ existe $k \in K$ tal que

$$\begin{aligned}\|a_j - a_{j+1}\|_{E/K} &= \inf_{k \in K} \|(x_j - x_{j+1}) - k\|, \\ &\leq \|(x_j - x_{j+1}) - k\|, \\ &\leq \|a_j - a_{j+1}\|_{E/K} + \delta, \\ &< \frac{1}{2^j} + \delta.\end{aligned}$$

  Tome $\delta > 0$ tal que $\frac{1}{2^j} + \delta = \frac{1}{2^{j-1}}$, entonces tomando ese $k = k_j - k_{j+1}$ tenemos que para cada $j$ se cumple que tomando $y_j = x_j - k_j$ se tiene que

$$\begin{aligned}\|(x_j - x_{j+1} - k)\| &= \|(x_j - k_j) - (x_{j+1} - k_{j+1})\|, \\ &= \|y_j - y_{j+1}\|, \\ &\leq \frac{1}{2^{j-1}}.\end{aligned}$$

  Luego, es claro que $\{y_j\} \subset E$ es una sucesión de Cauchy y por ende como $E$ es Banach, entonces existe $y \in E$ tal que $y_j \to y = x + k_0$ para algún $k_0 \in K$ (esto porque $K$ es subespacio, entonces en el peor de los casos $k_0 = 0$.) cuando $j \to \infty$. Ahora, tome $a = x + K \in E/K$, y luego dadas las condiciones anteriores, dado

$\epsilon > 0$ existe $J > 0$ tal que si $j > J$, entonces

$$\begin{aligned}
\|a_j - a\|_{E/K} &= \inf_{k \in K} \|(x_j - x) - k\|, \\
&\leq \|(x_j - k_j) - (x - k_0)\|, \\
&\leq \|y_j - y\|, \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Luego podemos afirmar que $a_j \to a$ cuando $j \to \infty$ y por ende $a_n \to a$ cuando $n \to \infty$, lo que nos permite concluir que $(E/K, \|\cdot\|_{E/K})$ es un espacio de Banach.

(c) Veamos que $\widetilde{T}$ está bien definido.
Note que si tomamos $x \sim_K x'$ entonces $x - x' \in K$ por lo que se cumple que $x = x' + K$, luego

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}(x + K) &= T(x), \\
&= T(x' + K), \\
&= T(x') + T(K) && \text{como } K \text{ es el espacio nulo,} \\
&= T(x'), \\
&= \widetilde{T}(x' + K).
\end{aligned}$$

Lo que nos asegura que $\widetilde{T}$ está bien definida.
Veamos que $\widetilde{T} \in L(E/K, R(T))$.
Veamos que es lineal gracias a la linealidad de $T$ ya que si tomamos $x + K, y + K \in E/K$ y $\lambda$ entonces

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}(x + K + \lambda(y + K)) &= \widetilde{T}((x + \lambda y) + K), \\
&= T(x + \lambda y), \\
&= T(x) + \lambda T(y), \\
&= \widetilde{T}(x + K) + \lambda T(y + K).
\end{aligned}$$

Veamos que $\widetilde{T}$ es continua gracias a la continuidad de $T$ ya que se puede ver que $\|x + K\|_{E/K} \leq 1$, entonces $\|x\| \leq 1$ ya que $0 \in K$, luego

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{T}\right\| &= \sup_{\substack{x \in E, \\ \|x+K\|_{E/K} \leq 1}} \left\|\widetilde{T}(x + K)\right\|_{R(T)}, \\
&\leq \sup_{\substack{x \in E, \\ \|x\| \leq 1}} \|T(x)\|_W, \\
&\leq \|T\|.
\end{aligned}$$

Lo que concluye que $\widetilde{T} \in L(E/K, R(T))$.
Veamos ahora que $\widetilde{T}^{-1} \in L(R(T), E/K)$, note que

$$\begin{aligned} \widetilde{T}^{-1} &: R(T) \to E/K, \\ y &= T(x) \to x + K. \end{aligned}$$

Sean $y_1, y_2 \in R(T)$ y $\lambda$ escalar, entonces

$$\begin{aligned} \widetilde{T}^{-1}(y_1 + \lambda y_2) &= \widetilde{T}^{-1}\left(T(x_1) + \lambda T(x_2)\right), \\ &= \widetilde{T}^{-1}(T(x_1 + \lambda x_2)), \\ &= \widetilde{T}^{-1}(\widetilde{T}((x_1 + \lambda x_2) + K), \\ &= (x_1 + \lambda x_2) + K, \\ &= (x_1 + K) + \lambda(x_2 + K), \\ &= \widetilde{T}^{-1}(y_1) + \lambda \widetilde{T}^{-1}(y_2). \end{aligned}$$

Y veamos que la hipótesis faltante nos da la continuidad, ya que si suponemos $\widetilde{T}^{-1}(y) = x + K$, entonces

$$\begin{aligned} \left\|\widetilde{T}^{-1}(y)\right\|_{E/K} &= \|x + K\|_{E/K}, \\ &\leq \|x\|_E, \\ &\leq \frac{1}{c}\|T(x)\|_F, \\ &\leq \frac{1}{c}\|y\|_{R(T)}. \end{aligned}$$

Luego podemos afirmar que $\widetilde{T}^{-1} \in L(R(T), E/K)$ y por ende es un isomorfismo.

## Problema 4:

Considere los espacios $C([0,1])$ y $C^1([0,1])$ ambos equipados con la norma del supremo $\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Definimos el operador derivada $D : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ dado por $f \to f'$. Muestre que $D$ es un operador no acotado, pero su gráfico $G(D)$ es cerrado.

**Solución:**

Solución.