NOTAS DE CLASE: SERIES DE FOURIER

OSCAR RIAÑO

ÍNDICE

1. MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

El método de separación de variables es una técnica para solucionar EDPs que se puede aplicar a diferentes problemas *lineales homogéneos*. La idea consiste en buscar soluciones de la forma

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Por lo que la separación de variables intenta convertir el problema de resolver una EDP dada, en solucionar un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para X y T. Tales ecuaciones se resuelven para ciertas condiciones iniciales y de frontera dadas. Para ilustrar esta técnica, consideremos el siguiente ejemplo.

1.1. Ejemplo: ecuación del calor en una dimensión. Sea $L > 0$ arbitrario pero fijo. Consideremos el siguiente problema mixto para la ecuación del calor:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0,L),\ t > 0, \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

donde se debe tener que $f(0) = f(L) = 0$. Note que (1.1) es el problema para la ecuación del calor en el dominio $(0, L) \times (0, \infty)$, que tiene condiciones mixtas pues involucra la *condición de borde (o de frontera)* $u(0, t) = u(L, t) = 0$ y la *condición inicial* $u(x, 0) = f(x)$.

Físicamente el problema (1.1) describe la variación de la temperatura u de una barra recta uniforme de largo L hecha de material homogéneo. Más precisamente (vea la Figura 1), se asume que la temperatura es constante en secciones transversales, es decir, la temperatura depende solo de la posición en x y el tiempo t. La superficie de la barra está aislada, no tiene intercambio de calor con regiones externas. Los extremos de la barrar están en contacto con aislantes térmicos (está es la condición de contorno $u(0, t) = u(L, t) = 0$). La condición $t = 0$ indica que la distribución inicial está dada por una función $f(x)$.

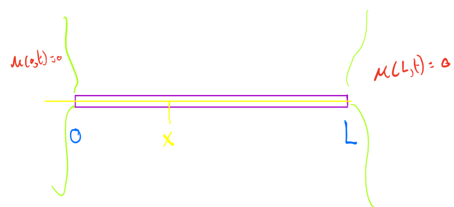

FIGURA 1. Representación problema (1.1). Se estudia la variación de temperatura de una barra larga y delgada de sección transversal constante y material homogéneo.

Intentemos encontrar una solución de (1.1) utilizando el método de separación de variables. Para esto, estudiaremos tres pasos principales.

Paso 1 (reducción a EDOs). Buscamos una solución de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$. Luego, $u_t = XT'$, $u_{xx} = X''T$, por lo que $u_t = u_{xx}$ nos dice

$$XT' = X''T, \quad \text{de lo cual tenemos} \quad \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}.$$

Puesto que $\frac{T'}{T}$ es una función de t y $\frac{X''}{X}$ es función de la variable x, la igualdad anterior obliga a que ambas funciones sean constantes, es decir,

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = c,$$

para alguna constante c. De lo anterior, buscamos solucionar el siguiente sistema de EDOs

$$\begin{cases} T' - cT = 0, \\ X'' - cX = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Aquí queda claro que intentar solucionar la ecuación en (1.1) se reduce a resolver dos EDOs.

Paso 2 (condición de frontera). Puesto que estamos buscando que $u(x, t) = X(x)Y(t)$, la condición de frontera $u(0, t) = u(L, t) = 0$ es equivalente a

$$X(0)Y(t) = X(L)Y(t) = 0,$$

para todo $t \geq 0$. Podemos hacer $Y(t) = 0$, pero esto nos daría la solución trivial $u(x,t) = 0$, que puede no ser compatible con la condición inicial $u(x,0) = f(x)$. Luego, consideramos la condición $X(0) = X(L) = 0$. Así, para solucionar la ecuación (1.2), tenemos que considerar el problema de contorno

$$\begin{cases} X'' - cX = 0, & x \in (0,L), \\ X(0) = X(L) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Observación 1.1. *Note que el problema anterior también se puede interpretar como un problema de encontrar valores propios para el operador* $\frac{d^2}{dx^2}$ *en* $[0,L]$*, con la condición de frontera dada. Esto es, se busca encontrar constantes* c *tales que exista una función propia (no trivial)* X *para la cual* $\frac{d^2X}{dx^2} = cX$ *y* $X(0) = X(L) = 0$.

Estudiemos posibles valores de la constante c en los siguientes casos.

i) **Caso** $c > 0$. Tenemos que la solución general de la EDO anterior es

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{c}x} + c_2 e^{-\sqrt{c}x}, \tag{1.4}$$

para constantes reales c_1, c_2. Despejando la condición de borde de (1.3) en la solución general (1.4), tenemos que

$$c_1 + c_2 = 0, \qquad c_1 e^{\sqrt{c}L} + c_2 e^{-\sqrt{c}L} = 0.$$

Por tanto, $c_1 = -c_2$ y se sigue

$$c_1\big(e^{\sqrt{c}L} - e^{-\sqrt{c}L}\big) = 0, \quad \text{si y solo si} \quad c_1\big(e^{2\sqrt{c}L} - 1\big) = 0.$$

Puesto que $c > 0$, $L > 0$, $e^{2\sqrt{c}L} \neq 1$, luego la identidad anterior obliga a tener que $c_1 = 0 = c_2$. Por lo que si $c > 0$, llegamos a que (1.3) solo admite la solución trivial $X(x) = 0$. Recordemos que esta no es una buena solución si buscamos que $u(x,t) = X(x)T(t)$ y la función dato inicial $f(x) \neq 0$.

ii) **Caso** $c = 0$. En este caso la EDO en (1.3) tiene como solución general

$$X(x) = c_1 x + c_2.$$

Pero de las condiciones $X(0) = c_2 = 0$ y $X(L) = c_1 L + c_2 = 0$, llegamos a que cuando $c = 0$, (1.3) solo admite la solución trivial $X(x) = 0$.

iii) **Caso** $c < 0$. Por simplicidad escribimos $c = -\lambda^2$ para algún $\lambda > 0$. Luego la solución general de la EDO en (1.3) es

$$X(x) = c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x),$$

para algunas constantes reales c_1, c_2. Las condiciones de borde $X(0) = X(L) = 0$ nos dicen

$$c_2 = 0, \qquad c_1 \sin(\lambda L) + c_2 \cos(\lambda L) = 0.$$

Por lo que tenemos que $c_1 \sin(\lambda L) = 0$. Para descartar la solución trivial, buscamos que $\sin(\lambda L) = 0$, así teniendo en cuenta que $\lambda > 0$, tenemos

$$\lambda = \frac{k\pi}{L}, \; k = 1, 2, 3, \dots.$$

Se sigue que las soluciones no triviales (funciones propias) asociadas al valor propio $c_k = \frac{k\pi}{L}$ son

$$X_k(x) = b_k \sin(\frac{\pi k}{L} x),$$

con $b_k \in \mathbb{R}$.

Observación 1.2. *Vale la pena mencionar que vamos a mantener la notación* X_k *para indicar que esta función corresponde a solucionar* (1.3) *con* $c = -\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2$. *Igualmente definiremos* Y_k *para cuando se trabaje la primera ecuación en* (1.2) *con la misma constante* c.

Paso 3 (condición inicial). Según lo discutido en el paso anterior, vamos a considerar a $c = -\lambda^2$ con $\lambda = \frac{k\pi}{L}$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$. De esta manera, la solución general de T_k en (1.2) es

$$T_k(t) = c_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t}, \quad c_k \in \mathbb{R}.$$

Como buscamos soluciones de la forma $u(x,t) = X(t)Y(t)$, juntando los resultados anteriores, tenemos

$$u_k(x,t) = b_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} \sin(\frac{\pi k}{L}x),$$

$k \in \mathbb{Z}^+$ y $b_k \in \mathbb{R}$. Así, observamos que u_k soluciona

$$\begin{cases} (u_k)_t - (u_k)_{xx} = 0, & x \in (0,L),\ t > 0, \\ u_k(0,t) = 0,\ u_k(L,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

No obstante, las funciones u_k anteriores, en general, no ofrecen soluciones al problema (1.1) donde se busca que $u(x,0) = f(x)$ con f siendo una función arbitraria. Ahora, puesto que el problema (1.3) es lineal y homogéneo, podemos aplicar el *principio de superposición*[1] para esperar que formalmente

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} \sin(\frac{\pi k}{L}x) \tag{1.6}$$

sea solución de (1.3) (sujeto a condiciones de convergencia y diferenciabilidad de la serie anterior). Note que el hecho que u_k soluciona (1.5) nos dice que (1.6) puede ser solución de (1.3) si garantizamos que $u(x,0) = f(x)$, es decir,

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\frac{\pi k}{L}x) = f(x).$$

Luego, si f se puede escribir como la serie anterior con apropiados coeficientes b_k, tendríamos que (1.6) soluciona (1.3).

Por lo anterior, buscamos encontrar la *serie de Fourier de* f con funciones sinusoidales

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\frac{\pi k}{L}x), \tag{1.7}$$

donde los coeficientes satisfacen

$$b_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{\pi k}{L}x)\,dx.$$

De esta manera, el problema anterior nos motiva a estudiar las series de Fourier.

[1]El principio de superposición nos dice que combinación lineal de soluciones a una ecuación diferencial lineal y homogénea sigue siendo solución del mismo problema.

2. Serie de Fourier

En esta sección estudiaremos la transformada y serie de Fourier con el objetivo de establecer diferentes técnicas que nos permitan solucionar varios tipos de EDPs. Primero, recordaremos algunas nociones básicas de espacios vectoriales que utilizaremos para entender la transformada de Fourier para diferentes clases de funciones. Luego, comenzaremos el análisis de la transformada de Fourier para funciones periódicas. Vale la pena mencionar que seguimos de cerca los libros [3, 4], recomendamos su lectura para un tratamiento más profundo de lo aquí expuesto. Para otras referencias sobre resultados de análisis funcional y transformada de Fourier, invitamos al lector a consultar [1, 2, 5, 6].

2.1. Espacios vectoriales. En esta parte, daremos algunos preliminares sobre espacios vectoriales que serán de utilidad para entender la transformada de Fourier en diferentes contextos. No presentaremos demostraciones de muchos de los resultados presentados abajo, sin embargo, seguiremos de cerca lo tratado en [3, 4].

Comencemos con algunos preliminares sobre espacios vectoriales. Sea V un espacio vectorial real o complejo. La norma $\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$ es una función tal que para cualquier $v_1, v_2 \in V$ y α un escalar se satisface:

i) $\|v_1\| = 0$ si y solo si $v_1 = 0$,
ii) $\|\alpha v_1\| = |\alpha|\|v_1\|$,
iii) *desigualdad triangular*: $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$.

Un espacio vectorial V dotado con una norma $\|\cdot\|$ que satisface las condiciones anteriores, se llama un *espacio vectorial normado*. Se suele denotar como $(V, \|\cdot\|)$. Recordamos que un *espacio de Banach* es un espacio vectorial normado que es completo con respecto a la norma asignada.

Un producto interno sobre un espacio vectorial complejo V es una aplicación $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ tal que para cualquier $v_1, v_2, v_3 \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

i) $(\alpha v_1 + \beta v_2 | v_3) = \alpha(v_1|v_3) + \beta(v_2|v_3)$,
ii) $(v_1|v_2) = \overline{(v_2|v_1)}$,
iii) $(v_1|v_1) \geq 0$, donde $(v_1|v_1) = 0$ si y solo si $v_1 = 0$.

Tenemos que el producto interno induce una norma en V dada por $\|v\| = (v|v)^{\frac{1}{2}}$. En este caso se dice que la norma viene dada por un producto interno. Un espacio de Banach cuya norma está dada por un producto interno se llama un *espacio de Hilbert*.

Similarmente, manteniendo i), iii) y cambiando ii) por la condición de simetría $(v_1|v_2) = (v_2|v_1)$, podemos definir el producto interno sobre un espacio vectorial V a valores reales.

Adicionalmente, dado un espacio vectorial V real o complejo con producto interno $(\cdot|\cdot)$ (por ende, con norma $\|v\| = (v|v)^{\frac{1}{2}}$) vale la *desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz (o Cauchy–Schwarz por brevedad)*

$$|(v|w)| \leq \|v\|\|w\|,$$

para $v, w \in V$.

Ejemplo 2.1 (Espacios Euclídeos)**.** *Sean $n \geq 1$ entero y $1 \leq p \leq \infty$. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach con cualquiera de las normas*

$$\|v\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

con $p < \infty$ *y* $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$*, cuando* $p = \infty$ *la norma es dada por*

$$\|v\|_\infty = \sup_{1 \le k \le n} |v_k|.$$

Si $p = 2$*, entonces la norma es inducida por el producto interno* $(v, w) = \sum_{k=1}^n v_k w_k$ *para* $v = (v_1, \ldots, v_n), w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$*.*

Misma conclusión para $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$*.*

Ejemplo 2.2 (Espacios l^p)**.** *Sea* $1 \le p < \infty$*. Consideramos el siguiente conjunto de secuencias complejas*

$$l^p = l^p(\mathbb{Z}) := \{\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} : \alpha_k \in \mathbb{C} \textit{ para todo } k, \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^p < \infty\}.$$

Notamos que l^p *es un espacio vectorial complejo con la suma* $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} + (\beta_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (\alpha_k + \beta_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *y la multiplicación por escalar* $\lambda \cdot (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (\lambda\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$*,* $\lambda \in \mathbb{C}$*. Además, consideramos la norma*

$$\|\alpha\|_p = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se puede mostrar que $(l^p, \|\cdot\|_p)$ *es un espacio de Banach. Cuando* $p = \infty$*, consideramos*

$$l^\infty = l^\infty(\mathbb{Z}) := \{\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} : \alpha_k \in \mathbb{C} \textit{ para todo } k, \sup_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k| < \infty\}$$

y definimos la norma

$$\|\alpha\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k|.$$

Tenemos que $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ *es un espacio de Banach.*

Cuando $p = 2$*, la norma es inducida por el producto interno*

$$(\alpha|\beta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \overline{\beta_k},$$

donde $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}, \beta = (\beta_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$*.*

Ejemplo 2.3 (Norma L^p)**.** *Para* $1 \le p < \infty$ *y* $f \in C([a,b])$ *definimos la norma*

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.1}$$

Tenemos que $(C([a,b]), \|\cdot\|_p)$ *es un espacio vectorial normado que no es completo. Por otro lado, consideremos la norma*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|. \tag{2.2}$$

Se puede mostrar que $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ *es un espacio de Banach.*

Cuando $p = 2$*, la norma es inducida por el producto interno*

$$(f|g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} \, dx. \tag{2.3}$$

La norma $\|\cdot\|_p$ *se le llama* la norma L^p*,* $1 \le p \le \infty$*. La* norma L^∞ *también se llama norma del supremo o del sup.*

2.2. Funciones periódicas. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se dice periódica de periodo $L \neq 0$, si

$$f(x+L) = f(x), \quad \text{para todo } \ x \in \mathbb{R}.$$

Algunas observaciones:

- Tenemos que para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, kL también es un periodo de f en el sentido que $f(x+kL) = f(x)$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$. En particular, $-L$ también es un periodo para la función f. Por esta razón se puede asumir que $L > 0$.
- Si f es constante, entonces f es periódica de cualquier periodo. Si f es periódica no constante, existe un menor periodo $L > 0$, el cual se conoce como *periodo fundamental*.

Ejemplo 2.4. *Sea $k \in \mathbb{Z}^+$ y $L > 0$. Las funciones $f_k(x) = \sin\left(\frac{2k\pi}{L}x\right)$, $g_k(x) = \cos\left(\frac{2k\pi}{L}x\right)$ son periódicas de periodo L, pero su periodo fundamental es $\frac{L}{k}$.*

Dado $L > 0$ el conjunto $C_{per}([-L,L])$ consiste de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continuas con periodo $2L$. Similarmente, dado $k \in \mathbb{Z}^+$, $C^k_{per}([-L,L])$ consiste de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periódicas con periodo $2L$ de clase C^k.

De manera equivalente, los espacios anteriores se pueden identificar como sigue:

$$C_{per}([-L,L]) := \{f \in C([-L,L]) : \ f(L) = f(-L)\}.$$

Cuando $k \in \mathbb{Z}^+$,

$$C^k_{per}([-L,L]) := \{f \in C^k([-L,L]) : \ f^{(l)}(L) = f^{(l)}(-L), \, \forall \ 0 \leq l \leq k\}.$$

Diremos que $f \in C^\infty_{per}([-L,L])$, si $f \in C^k_{per}([-L,L])$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$. Por consistencia en la notación, definimos $C^0_{per}([-L,L]) = C_{per}([-L,L])$.

De la definición de los espacios $C^k_{per}([-L,L])$ notamos que

$$C_{per}([-L,L]) \supseteq C^1_{per}([-L,L]) \supseteq \cdots \supseteq C^k_{per}([-L,L]).$$

El espacio $C^k_{per}([-L,L])$ es un espacio vectorial que resulta ser de Banach con la norma

$$\|f\|_{\infty,k} = \sum_{j=0}^{k} \|f^{(j)}\|_\infty, \tag{2.4}$$

donde la norma $\|\cdot\|_\infty$ es dada por (2.2) con $a = -L$ y $b = L$. Para $1 \leq p < \infty$, podemos asignar la norma L^p como en (2.1) con $a = -L$ y $b = L$ al espacio $C^k_{per}([-L,L])$. Se sigue qué $(C^k_{per}([-L,L]), \|\cdot\|_p)$ es un espacio normado que no es completo con respecto a la norma L^p, $1 \leq p < \infty$.

Ejemplo 2.5. *Dado $c \in \mathbb{C}$ fijo, las funciones $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = c$ pertenecen a $C^k_{per}([-\pi,\pi])$, para cualquier $k = 0, 1, 2, \ldots$. Es decir, $f, g \in C^\infty_{per}([-\pi,\pi])$. Por otro lado, vea la Figura 2 para un ejemplo de una función $h \in C_{per}([-\pi,\pi])$ con $h \notin C^1_{per}([-\pi,\pi])$.*

Observación 2.6. *i) Dado $L > 0$, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función periódica de periodo $2L$, entonces*

$$\widetilde{f}(x) := f(\frac{L}{\pi}x),$$

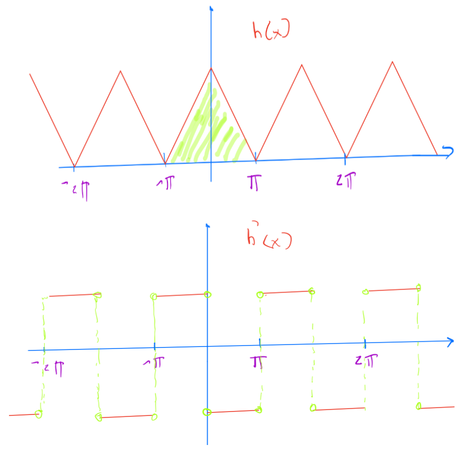

FIGURA 2. Ejemplo de una función $h \in C_{per}([-\pi,\pi]) \setminus C^1_{per}([-\pi,\pi])$.

define una función periódica de periodo 2π. En particular, obtenemos que los espacios $C^k_{per}([-L,L])$ y $C^k_{per}([-\pi,\pi])$ son isomorfos como espacios vectoriales. De igual manera, la teoría de la transformada de Fourier se puede reescalar para pasar del intervalo $[-L,L]$ a $[-\pi,\pi]$. Por estas razones y sin pérdida de generalidad, en lo que sigue trabajaremos con funciones periódicas de periodo 2π.

ii) Otra notación frecuente para funciones periódicas y transformada de Fourier es considerar funciones sobre el toro $\mathbb{T}$. El toro $\mathbb{T}$ es el intervalo $[0,2\pi]$ donde los lados opuestos se identifican. De manera más precisa, el toro es el conjunto de clases de equivalencia en $\mathbb{R}$ dada por la relación $x \sim y$ si y solo si $x-y \in 2\pi\mathbb{Z}$, es decir $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Geométricamente el toro es un círculo que se obtiene de doblar el segmento $[0,2\pi]$ uniendo los extremos del intervalo, por lo que $\mathbb{T}$ se puede ver como el subconjunto de $\mathbb{C}$ dado por

$$\{e^{ix} : x \in [0,2\pi]\}.$$

Por tanto, funciones $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ se pueden identificar como funciones periódicas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ con periodo 2π. De esta manera, $C^k_{per}([-\pi,\pi])$ es isomorfo a $C^k(\mathbb{T})$ por lo que en muchas aplicaciones se trabajan estos espacios como el mismo conjunto. No usaremos esta notación para funciones periódica, no obstante, vea [2] para un tratamiento de funciones sobre $\mathbb{T}^n$.

2.3. Transformada de Fourier. Motivado por el problema mixto para la ecuación del calor en (1.1) y su solución por el método de separación de variables (1.6), buscamos dar una teoría que justifique expansiones en series trigonométricas de la forma (1.7). Para esto y teniendo en cuenta la Observación 2.6, primero trabajaremos con funciones $f \in C_{per}([-\pi,\pi])$, es decir, funciones periódicas de periodo 2π.

Dada $f \in C_{per}([-\pi,\pi])$ buscamos representar esta función en términos de una serie trigonométrica de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big). \tag{2.5}$$

Usando la exponencial compleja tenemos

$$\cos(kx) = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}.$$

Se sigue que (2.5) es equivalente a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

donde $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ y $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$, para $k \in \mathbb{Z}^+$. De esta manera, para representar f como la serie (2.5), esto es equivalente a escribir a f como

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}. \tag{2.6}$$

Antes de continuar introduzcamos algo de notación. Dado $k \in \mathbb{Z}$, definimos

$$\Phi_k(x) = e^{ikx}. \tag{2.7}$$

Notamos que $\Phi_k \in C^{\infty}_{per}([-\pi, \pi])$, además si $(\cdot|\cdot)$ denota el producto interno en L^2 dado por (2.3) con $a = -\pi$ y $b = \pi$, tenemos

$$\begin{aligned} (\Phi_k \mid \Phi_j) &= \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_k(x)\overline{\Phi_j(x)}\, dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{kx} e^{-ijx}\, dx = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq k, \\ 2\pi, & \text{si } j = k. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Supongamos que la igualdad (2.6) se tiene y la serie converge uniformemente, entonces

$$(f \mid \Phi_k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m (\Phi_k \mid \Phi_m) = 2\pi c_k.$$

De lo cual obtenemos

$$c_k = \frac{1}{2\pi}(f \mid \Phi_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx.$$

Definición 2.7. *Dada $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$ la secuencia de números complejos $\{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ se llama la* transformada de Fourier de f *y está definida como*

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx. \tag{2.9}$$

Al número complejo $\widehat{f}(k)$ se le llama el coeficiente de Fourier*.*

La serie (puede ser no convergente)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}, \tag{2.10}$$

se llama la serie de Fourier *de f.*

Notemos que si $f \in C_{per}([-\pi,\pi])$, entonces

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(k)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)e^{-ikx}|\, dx =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\, dx \\ =& \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L^1} \\ \leq& \|f\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Por lo que recordando la norma del espacio de secuencias $l^\infty(\mathbb{Z})$, se tiene que

$$\|\{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| \leq \|f\|_\infty. \tag{2.11}$$

De esta manera, podemos concluir.

Proposición 2.8. *La aplicación*

$$\wedge : (C_{per}([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_\infty) \to l^\infty(\mathbb{Z}), \quad \textit{dada por } f \mapsto \widehat{f} := \{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

es lineal y continua.

Una propiedad muy útil de la transformada de Fourier es la relación entre diferenciabilidad y decaimiento. Más precisamente, asuma que $f \in C^1_{per}([-\pi,\pi])$, así como $f' \in C_{per}([-\pi,\pi])$ podemos calcular su transformada de Fourier, lo cual junto con integración por partes nos da

$$\begin{aligned} (f')^\wedge(k) =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx}\, dx \\ =& \frac{1}{2\pi}\, f(x)e^{-ikx}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{ik}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\, dx \\ =& \frac{1}{2\pi}\big(f(\pi)e^{-ik\pi} - f(-\pi)e^{ik\pi}\big) + (ik)\widehat{f}(k) \\ =& (ik)\widehat{f}(k). \end{aligned}$$

De lo anterior y un argumento inductivo, concluimos:

Proposición 2.9. *Sea $m \geq 1$ un entero y $f \in C^m_{per}([-\pi,\pi])$, entonces*

$$(f^{(m)})^\wedge(k) = (ik)^m \widehat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.12}$$

Observación 2.10. *La identidad (2.12) nos muestra una de las propiedades claves en aplicaciones de la transformada de Fourier, pues este operador permite convertir problemas con derivadas en problemas algebraicos de multiplicación por polinomios. Esto presenta varias ventajas a la hora de buscar o simular soluciones, por ejemplo, en el desarrollo de métodos numéricos como los métodos espectrales.*

Veamos algunas propiedades de convergencia de la serie de Fourier.

Teorema 2.11. i) *Sea $f \in C_{per}([-\pi,\pi])$. Entonces la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2$ converge absolutamente. Más aún, vale la* desigualdad de Bessel

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|_2^2. \tag{2.13}$$

ii) (Lema de Riemann-Lebesgue). *Sea $f \in C_{per}([-\pi,\pi])$, entonces*

$$\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}(k) = 0.$$

iii) *Sea* $f \in C^1_{per}([-\pi,\pi])$. *Entonces la serie de Fourier de* f, *es decir,* (2.10) *converge absoluta y uniformemente a* f, *es decir,*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx},$$

para todo $x \in [-\pi,\pi]$.

iv) *Sea* $f \in C^1_{per}([-\pi,\pi])$. *Entonces vale la identidad de Parseval*

$$\|\widehat{f}\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\|f\|_2^2. \tag{2.14}$$

De manera equivalente, si $g \in C^1_{per}([-\pi,\pi])$,

$$(\widehat{f}\,|\,\widehat{g}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi}(f\,|\,g). \tag{2.15}$$

Observación 2.12. *Existen resultados más generales con diferentes hipótesis sobre* f *que garantizan que la serie de Fourier converge puntual a* f, *vea por ejemplo* [3, 4]. *Sin embargo, para nuestros objetivos estudiaremos la convergencia uniforme de la serie de Fourier en el caso que* $f \in C^1_{per}([-\pi,\pi])$, *es decir, la parte iii) del Teorema 2.11.*

Demostración del Teorema 2.11. **Demostración de i)** Consideremos la norma L^2 como en (2.1) con producto interno $(\cdot\,|\,\cdot)$ dado por (2.3). Luego, para $N \geq 0$ entero tenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq &\|f - \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)\Phi_k\|_2^2 \\ =&\Big(f - \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)\Phi_k \,\Big|\, f - \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)\Phi_k\Big) \\ =&\|f\|_2^2 - \Big(f\,\Big|\, \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)\Phi_k\Big) - \Big(\sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)\Phi_k \,\Big|\, f\Big) \\ &+ \Big(\sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)\Phi_k \,\Big|\, \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)\Phi_k\Big). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Estudiemos los términos del lado derecho de la desigualdad anterior. La linealidad del producto interno y la definición de los coeficientes de Fourier implican

$$\begin{aligned} \Big(f\,\Big|\, \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)\Phi_k\Big) = &\sum_{k=-N}^{N} \overline{\widehat{f}(k)}(f\,|\,\Phi_k) \\ =&2\pi \sum_{k=-N}^{N} \overline{\widehat{f}(k)}\widehat{f}(k) \\ =&2\pi \sum_{k=-N}^{N} |\widehat{f}(k)|^2. \end{aligned}$$

De manera análoga, usando que $(\Phi_k \mid f) = \overline{(f \mid \Phi_k)} = 2\pi \overline{\widehat{f}(k)}$ llegamos a

$$\Big(\sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)\Phi_k \,\Big|\, f \Big) = 2\pi \sum_{k=-N}^{N} |\widehat{f}(k)|^2.$$

Las relaciones de ortogonalidad en (2.8) nos dicen

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)\Phi_k \,\Big|\, \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)\Phi_k \Big) &= \sum_{-N\leq k,k_1 \leq N} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{f}(k_1)}\,(\Phi_k \mid \Phi_{k_1}) \\ &= 2\pi \sum_{k=-N}^{N} |\widehat{f}(k)|^2.\end{aligned}$$

Colocando los resultados anteriores en la ecuación (2.16) llegamos a

$$0 \leq \|f\|_2^2 - 2\pi \sum_{k=-N}^{N} |\widehat{f}(k)|^2,$$

es decir,

$$\sum_{k=-N}^{N} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|_2^2.$$

Tomando $N \to \infty$ se completa la demostración de i).

Demostración de ii). Este resultado sigue de i) y el hecho que para una serie convergente los coeficientes de la misma tienden a cero cuando $|k| \to \infty$, es decir, $|\widehat{f}(k)|^2 \to 0$ cuando $|k| \to \infty$.

Demostración de iii). Antes de deducir la convergencia de la serie de Fourier a f, veamos primero que esta converge absoluta y uniformemente. Por el criterio M de Weierstrass[2] es suficientes con mostrar que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < \infty.$$

Para ver lo anterior, usando que $f \in C^1_{per}([-\pi,\pi])$ tenemos que (2.12) vale para $m=1$, esto y la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{C}^{2N}$ nos dicen

$$\begin{aligned}\sum_{k=-N}^{N} |\widehat{f}(k)| &= |\widehat{f}(0)| + \sum_{0<|k|\leq N} |\widehat{f}(k)| \\ &= |\widehat{f}(0)| + \sum_{0<|k|\leq N} \frac{|\widehat{f'}(k)|}{|k|} \\ &\leq |\widehat{f}(0)| + \Big(\sum_{0<|k|\leq N} |\widehat{f'}(k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{0<|k|\leq N} \frac{1}{|k|^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\widehat{f}(0)| + C\|f'\|_2,\end{aligned} \tag{2.17}$$

[2]El criterio M de Weierstrass dice que si para una secuencia de funciones $\{f_k(x)\}$ sobre un conjunto X existe una secuencia $\{M_k\}$ de números no negativos, tales que $|f_k(x)| \leq M_k$ para todo $x \in X$ y todo k, además, si $\sum M_k$ es finita, entonces $\sum f_k(x)$ converge absoluta y uniformemente.

para alguna constante $C > 0$ (esta depende de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|k|^2}$), donde en la última línea usamos la desigualdad de Bessel (2.13) con f'.

Por otro lado, puesto que ya sabemos que la serie de Fourier converge uniformemente, solo nos resta ver que esta converge puntualmente a f. Para esto, primero necesitamos el siguiente resultado.

Proposición 2.13. *Suponga que* $g \in C^1_{per}([-\pi, \pi])$, *entonces*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(k) = g(0).$$

Demostración. Consideramos la función auxiliar

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - g(0)}{e^{ix} - 1}, & \text{si } x \in [-\pi, \pi),\, x \neq 0 \\ -ig'(0), & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

y extendemos de manera periódica por $h(x+2\pi) = h(x)$. Luego como $g \in C^1_{per}([-\pi, \pi])$, tenemos que h está definida en $x = 0$, lo que nos dice que $h \in C_{per}([-\pi, \pi])$. Además, tenemos que

$$\begin{aligned} \widehat{g}(k) =& \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx}\, dx \\ =& \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(x) - g(0)}{e^{ix} - 1} \big(e^{ix} - 1\big) e^{-ikx}\, dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(0) e^{-ikx}\, dx \\ =& \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \big(e^{-i(k-1)x} - e^{-ikx}\big)\, dx + g(0)\delta_{k,0} \\ =& \widehat{h}(k-1) - \widehat{h}(k) + g(0)\delta_{k,0}, \end{aligned}$$

donde $\delta_{k,0}$ denota la función *delta de Kronecker*, que se define como $\delta_{0,0} = 1$ y $\delta_{0,k} = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ con $k \neq 0$. Por tanto, llegamos a

$$\begin{aligned} \sum_{k=-N}^{N} \widehat{g}(k) =& g(0) + \sum_{k=-N}^{N} \big(\widehat{h}(k-1) - \widehat{h}(k)\big) \\ =& g(0) + \widehat{h}(-N-1) - \widehat{h}(N). \end{aligned}$$

Como $h \in C_{per}([-\pi, \pi])$, se tiene que vale el Lemas de Riemann-Lebesgue, por lo que $\lim_{N\to\infty} \big(\widehat{h}(-N-1) - \widehat{h}(N)\big) = 0$. Así, tomando $N \to \infty$ en la identidad anterior, se completa la demostración, ☐

Retornando a la convergencia puntual de la serie de Fourier a f, consideramos $x_0 \in [-\pi, \pi)$ arbitrario pero fijo. Definimos la función

$$g(x) = f(x + x_0), \qquad x \in [-\pi, \pi).$$

Se sigue qué $g \in C^1_{per}([-\pi, \pi])$, $g(0) = f(x_0)$. Además, haciendo un cambio de variable se puede ver que

$$\widehat{g}(k) = \begin{cases} \widehat{f}(k) e^{ikx_0}, & \text{si } k \neq 0, \\ \widehat{f}(0), & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

De esta manera, aplicando la Proposición (2.13) llegamos a

$$f(x_0) = g(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx_0},$$

es decir, la serie de Fourier converge a la función f en el punto x_0. Puesto que este punto es arbitrario y la serie converge uniformemente, se completa la demostración de iii).

Demostración de iv). Dada la convergencia uniforme de la serie de Fourier a la función dada en iii), la identidad de Parseval es una consecuencia de la propiedad que permite pasar el límite uniforme dentro y fuera de la integral sobre un compacto. $\square$

Observación 2.14. *Recordando el espacio $l^1(\mathbb{Z})$, notamos que si $f \in C^1_{per}([-\pi,\pi])$, entonces por (2.17) tenemos que existe una constante $C > 0$ independiente de f tal que*

$$\|\widehat{f}\|_{l^1} \leq C(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty). \tag{2.18}$$

En particular, la aplicación

$$\wedge : C^1_{per}([-\pi,\pi]) \to l^1(\mathbb{Z}), \ \ \textit{dada por} \ f \mapsto \widehat{f} = \{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

es lineal y continua.

2.4. Convolución y aproximación. En esta sección estudiaremos la definición de convolución de funciones periódicas.

Definición 2.15. *Sean $f, g \in C_{per}([-\pi,\pi])$, la convolución de f y g denotada por $f * g$ es la función dada por*

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\,dy, \ , \ x \in \mathbb{R}. \tag{2.19}$$

Tenemos las siguientes propiedades, cuya demostración queda al lector.

Proposición 2.16. *Sean $f, g, h \in C_{per}([-\pi,\pi])$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces*

i) $f * g \in C_{per}([-\pi,\pi])$,
ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$,
iii) $f * g = g * f$,
iv) $(f + g) * h = f * h + g * h$,
v) $(\alpha f) * g = \alpha(f * g) = f * (\alpha g)$,
vi) $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

Proposición 2.17. *Sean $f, g \in C_{per}([-\pi,\pi])$. Entonces*

i) $(f * g)^\wedge(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)$ *para todo entero k.*
ii) *Sea $t \in \mathbb{R}$, definimos $f_t(x) := f(x-t)$. Tenemos $\widehat{f_t}(k) = e^{-ikt}\widehat{f}(k)$.*

Demostración. ii) se sigue de un cambio de variables y periodicidad, por lo que no realizaremos la demostración de este hecho. Para demostrar i), primero notamos que por la Proposición 2.16 se tiene que $f * g \in C_{per}([\pi,\pi])$, por lo que tiene sentido tomar la transformada de Fourier de esta función. Por otro lado, cambiando el orden de integración, que es válido pues la función $(x,y) \mapsto f(y)g(x-y)$ es absolutamente integrable, tenemos que

$$\begin{aligned}
(f*g)^\wedge(k) =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f*g)^\wedge(x)e^{-ikx}\,dx\\
=& \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)e^{-ikx}\,dydx\\
=& \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\Big(\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)e^{-ikx}\,dx\Big)dy\\
=& \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)e^{-ik(x-y)}\,dx\Big)dy\\
=& \frac{1}{2\pi}\widehat{g}(k)\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky}\,dy\\
=& \widehat{f}(k)\widehat{g}(k).
\end{aligned}$$

□

Observamos que la demostración de la parte i) de la proposición anterior justifica porque se incluyó el factor $\frac{1}{2\pi}$ en la definición de la convolución (2.19).

2.5. Núcleos de Fejér y Dirichlet. En esta parte estudiaremos diferentes maneras de estudiar la convergencia de la serie de Fourier. Para esto, dado $N \geq 1$ definimos

$$S_N(f;x) := S_N(f)(x) := \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)e^{ikx}, \tag{2.20}$$

y la suma de Cesàro dado por

$$\begin{aligned}
\sigma_N(f;x) :=& \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k(f;x)\\
=& \frac{1}{N+1}\Big(S_0(f;x)+S_1(f;x)+\cdots+S_N(f;x)\Big).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Se puede ver que

$$\sigma_N(f;x) = \sum_{k=-N}^{N}\Big(1-\frac{|k|}{N+1}\Big)\widehat{f}(k)e^{ikx}, \tag{2.22}$$

de lo cual la expresión integral de los coeficientes de Fourier nos dice que

$$\sigma_N(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\Big[\sum_{k=-N}^{N}\Big(1-\frac{|k|}{N+1}\Big)e^{ik(x-y)}\Big]\,dy.$$

Esto motiva la siguiente definición:

Definición 2.18. *Dado $N \in \mathbb{Z}^+$, el núcleo de Fejér de orden N se define por*

$$K_N(x) = \sum_{k=-N}^{N}\Big(1-\frac{|k|}{N+1}\Big)e^{ikx}.$$

Otra manera de escribir el núcleo de Fejér es la siguiente.

Proposición 2.19. *Sea $N \in \mathbb{Z}$, el núcleo de Fejér de orden N satisface*

$$K_N(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{N+1}\left[\dfrac{\sin\left(\frac{N+1}{2}x\right)}{\sin(\frac{x}{2})}\right]^2, & x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ N+1, & x = 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Demostración. Vea la demostración en [4, Lema 6.5]. □

Por lo anterior tenemos que

$$\sigma_N(f;x) = K_N * f(x).$$

Veamos algunas propiedades de los núcleos de Fejér $\{K_N\}_{N\geq 1}$.

Proposición 2.20. *Sea $\{K_N\}_{N\geq 1}$ el núcleo de Fejér. Entonces,*

i) $K_N \in C_{per}([-\pi,\pi])$.
ii) $K_N(x) \geq 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{Z}^+$. *Además,* $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(x)\,dx = 1$, *para cualquier* $N \in \mathbb{Z}^+$.
iii) *Para todo* $\delta \in (0,\pi)$,
$$\lim_{N\to\infty}\left(\int_{-\pi}^{-\delta} K_N(x)\,dx + \int_{\delta}^{\pi} K_N(x)\,dx\right) = 0.$$
iv) *(*Féjer*). Sea* $f \in C_{per}([-\pi,\pi])$, *entonces* $\sigma_N(f;x) = K_N * f \to f$ *uniformemente.*

Demostración. Dejamos las propiedades i)-iii) como ejercicio, puede consultar [4]. Veamos la deducción de iv). Puesto que f es continua y periódica, entonces f es absolutamente continua en todo $\mathbb{R}$. Por tanto, dado $\epsilon > 0$, existe $0 < \delta < \pi$ tal que si $|x-y| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon. \tag{2.23}$$

Para $x \in \mathbb{R}$ arbitrario,

$$\begin{aligned} \sigma_N(f;x) - f(x) =& (K_N * f)(x) - f(x) \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)K_N(y)\,dy - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_N(y)\,dy \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_{|\delta|\leq|y|\leq\pi} \big(f(x-y) - f(x)\big)K_N(y)\,dy \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \big(f(x-y) - f(x)\big)K_N(y)\,dy \\ =:& \mathcal{I} + \mathcal{II}. \end{aligned}$$

Puesto que $K_N \geq 0$, se sigue por la propiedad iii)

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}| \leq& 2\|f\|_\infty \int_{|\delta|\leq|y|\leq\pi} K_N(y)\,dy \\ =& 2\|f\|_\infty\Big(\int_{-\pi}^{-\delta} K_N(y)\,dy + \int_{\delta}^{\pi} K_N(y)\,dy\Big). \end{aligned}$$

Po otro lado, por (2.23) y la propiedad ii) de K_N tenemos que

$$|\mathcal{II}| \leq \epsilon\int_{-\delta}^{\delta} K_N(y)\,dy \leq \quad \epsilon\int_{-\pi}^{\pi} K_N(y)\,dy = \epsilon.$$

Concluimos que

$$|\sigma_N(f;x) - f(x)| \leq 2\|f\|_\infty \Big(\int_{-\pi}^{-\delta} K_N(y)\,dy + \int_{\delta}^{\pi} K_N(y)\,dy \Big) + \epsilon,$$

lo cual lleva al resultado deseado tomando $N \to \infty$. □

Las propiedades i)-iv) de la Proposición 2.20 nos dicen que los núcleos de Fejér $\{K_N\}_{N\geq 1}$ definen una *aproximación de la identidad.*

Definición 2.21. *Una aproximación de la identidad es una secuencia* $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ *en* $C_{per}([-\pi,\pi])$ *tal que*

i) $\varphi_n(x) \geq 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *para todo* $n \in \mathbb{Z}^+$.
ii) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\,dx = 1$.
iii) *Para todo* $\delta \in (0,\pi)$,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} \varphi_n(x)\,dx + \int_{\delta}^{\pi} \varphi_n(x)\,dx \right) = 0.$$

Proposición 2.22. *Sea* $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ *una aproximación de la identidad. Sea* $f \in C_{per}([-\pi,\pi])$, *entonces* $f * \varphi_n \to f$ *uniformemente.*

Demostración. La demostración es similar a la dada para la parte iv) en la Proposición 2.20. □

Veamos que como consecuencia de la Proposición 2.20, la serie de Fourier de una función $f \in C_{per}([-\pi,\pi])$ converge a f en la norma L^2. Para esto, estudiemos la mejor aproximación de f al espacio vectorial generado por finitos $\{\Phi_k\}$ en la norma L^2. Más precisamente, dado un entero $N \geq 1$, definimos

$$V_N = gen\{\Phi_k : -N \leq k \leq N\}. \tag{2.24}$$

Proposición 2.23. *Sea* $f \in C_{per}([-\pi,\pi])$, *la mejor aproximación de* f *en* V_N *en la norma* L^2 *es su* N*-ésima suma parcial* $S_N(f)$. *Más precisamente,*

i) *Para todo* $T_N \in V_N$, $\|f - S_N(f)\|_2 \leq \|f - T_N\|_2$.
ii) *La igualdad en i) se da si y solo si* $T_N = S_N(f)$.

Demostración. Afirmamos que $f - S_N(f)$ es ortogonal a T_N. En efecto, si $T_N = \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k \Phi_k \in V_N$, entonces

$$\begin{aligned}(f - S_N(f)|T_N) =&(f, T_N) - (S_N(f)|T_N)\\ =&\sum_{k=-N}^{N} \overline{\alpha_k}(f|\Phi_k) - \sum_{-N\leq k_1,k_2\leq N} \widehat{f}(k_1)\overline{\alpha_{k_2}}(\Phi_{k_1}|\Phi_{k_2})\\ =&2\pi \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)\overline{\alpha_k} - 2\pi \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)\overline{\alpha_k} = 0,\end{aligned}$$

donde hemos usado la relación de ortogonalidad de los $\{\Phi_k\}$ y la definición de los coeficientes de Fourier. De esta manera, $(f - S_N(f)) \perp V_N$.

Por otro lado, como $T_N - S_N(f) \in V_N$, por el argumento anterior $(f - S_N|T_N - S_N(f)) = 0$, esto implica

$$\begin{aligned}\|f - T_N\|_2^2 =&\|f - S_N(f) + (S_N(f) - T_N)\|_2^2\\ =&\|f - S_N(f)\|_2^2 + \|(S_N(f) - T_N)\|_2^2\\ \geq&\|f - S_N(f)\|_2^2.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Lo anterior completa la demostración de i). Además, ii) se sigue de observar que igualdad en (2.25) sucede si y solo si $S_N(f) = T_N$. $\square$

Teorema 2.24. *Sea $f \in C_{per}([-\pi,\pi])$. Entonces la serie de Fourier converge a f en norma L^2, esto es,*

$$\lim_{N\to\infty} \|f - S_N(f)\|_2 = \lim_{N\to\infty} \|f - \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)\Phi_k\|_2 = 0. \tag{2.26}$$

Además, vale la identidad de Parseval (2.14) y de manera equivalente (2.15).

Demostración. Dado $N \geq 1$ entero, recordamos el espacio V_N en (2.24). Se tiene por la definición de $\sigma_N(f,x)$ (vea por ejemplo, (2.22)) que $\sigma_N(f,x) \in V_N$. Por tanto, la Proposiciones 2.23 y 2.20 iv) implican que

$$\begin{aligned}\|f - S_N(f)\|_2^2 \leq & \|f - \sigma_N(f)\|_2^2 \\ \leq & (2\pi)\|f - \sigma_N(f)\|_\infty^2 \to 0,\end{aligned}$$

cuando $N \to \infty$. Esto muestra (2.26). Para deducir que vale la identidad de Parseval, tenemos de la relación de ortogonalidad de los $\{\Phi_k\}$ que

$$\|S_N(f)\|_2^2 = 2\pi \sum_{k=-N}^{N} |\widehat{f}(k)|^2,$$

tomando el límite cuando $N \to \infty$, se sigue por (2.26) que

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = 2\pi \|\widehat{f}\|_2.$$

$\square$

Ahora podemos demostrar que la aplicación $f \in C_{per}([-\pi,\pi]) \to \widehat{f}$ es inyectiva.

Corolario 2.25. *Sean $f, g \in C_{per}([-\pi,\pi])$. Suponga que $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Entonces $f = g$.*

Demostración. Sea $h = f - g$, tenemos que $h \in C_{per}([-\pi,\pi])$ y por hipótesis $\widehat{h}(k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Esto implica que $S_N(h) = 0$ para todo entero $N \geq 1$ y por el Teorema 2.24, se sigue qué $\|h\|_2 = 0$, es decir, $h = 0$ como se buscaba. $\square$

La serie de Fourier también se puede escribir por medio de una convolución. Para esto, dado $N \geq 1$ definimos el *núcleo de Dirichlet* de orden N por

$$D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx},$$

luego

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x) &= \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)e^{ikx} \\
&= \sum_{k=-N}^{N} \frac{e^{ikx}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky}\,dy \\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\Big(\sum_{k=-N}^{N} e^{ik(x-y)}\Big)\,dy \\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)D_N(x-y)\,dy \\
&=(f*D_N)(x).
\end{aligned}$$

El estudio de la convergencia puntual de la serie de Fourier es equivalente a analizar si sucede que $(D_N * f)(x) \to f(x)$ cuando $N \to \infty$. Por lo que tal pregunta requiere un análisis cuidadoso de D_N. Un problema es que los núcleos $\{D_N\}$ no son una aproximación de la identidad, lo cual parcialmente justifica la dificultad en garantizar convergencia de la serie de Fourier. En estas notas no nos centraremos en el problema de convergencia en general. Solo remarcamos que

$$D_N(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}, & x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ 2N+1, & x = 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Además

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\,dx = 1.$$

3. Aplicaciones

En esta parte, veremos algunas aplicaciones de la transformada de Fourier para encontrar soluciones a distintas ecuaciones diferenciales parciales con condiciones periódicas.

3.1. Ejemplo ecuación elíptica. Dada $f \in C_{per}([-\pi,\pi])$, buscamos solucionar la ecuación de *Poisson periódica* en una dimensión

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} = f, & x \in (-\pi,\pi), \\ u(-\pi) = u(\pi), \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\,dx = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

donde asumiremos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0 \tag{3.2}$$

y buscamos que $u \in C^2((-\pi,\pi)) \cap C([-\pi,\pi])$ sea solución de (3.1). Note que (3.2) es equivalente a $\widehat{f}(0) = 0$, en cuyo caso se dice que f *tiene media cero*.

Búsqueda de soluciones. Podemos encontrar soluciones de la ecuación anterior utilizando técnicas de EDOs. Por lo que se puede deducir que la solución general de $-\frac{d^2u}{dx^2} = f$ está dada por

$$u(x) = c_1 + c_2(x+\pi) - \int_{-\pi}^{x}\int_{-\pi}^{t} f(s)\,dsdt \\ = c_1 + c_2(x+\pi) - \int_{-\pi}^{x}(x-s)f(s)\,ds, \tag{3.3}$$

para algunas constantes c_1, c_2 y donde hemos usado el teorema de Fubini. Sin embargo, utilicemos la transformada de Fourier para estudiar (3.1).

Procedemos formalmente, es decir, no rigurosamente. Tomando la transformada de Fourier a la ecuación en (3.1) y usando la propiedad (2.12) deducimos

$$\widehat{-u_{xx}}(k) = \widehat{f}(k) \quad \text{que es equivalente} \quad k^2\widehat{u}(k) = \widehat{f}(k),$$

para todo entero k. Note que la última ecuación no requiere el cálculo de derivas, por lo que la transformada de Fourier nos lleva a un problema algebraico. Observamos también que $k^2\widehat{u}(k) = \widehat{f}(k)$ implica, con $k=0$, que $\widehat{f}(0) = 0$ que es exactamente la condición (3.2). Teniendo en cuenta (3.1), obtenemos

$$\begin{cases} \widehat{u}(k) = \dfrac{\widehat{f}(k)}{k^2}, & k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \\ \widehat{u}(0) = 0. \end{cases}$$

Luego el candidato a solución de (3.1) está dado por

$$u(x) = \sum_{|k|=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{k^2} e^{ikx}. \tag{3.4}$$

Teorema 3.1. *Sea $f \in C^1_{per}([-\pi,\pi])$ con $\widehat{f}(0) = 0$.*

i) (Existencia y unicidad). *Existe una única solución $u \in C^2_{per}([-\pi,\pi])$ del problema de Poisson (3.1).*
ii) *Sea $u \in C^2_{per}([-\pi,\pi])$ solución de (3.1) entonces existe una constante $C>0$ independiente de u y f tal que*

$$\|u\|_\infty + \left\|\frac{du}{dx}\right\|_\infty \leq C\left\|\frac{df}{dx}\right\|_\infty. \tag{3.5}$$

Demostración. i) Veamos la existencia de soluciones. Sea u dada por (3.4), entonces afirmamos que $u \in C^2_{per}([-\pi,\pi])$. Sea $g_k(x) := \frac{\widehat{f}(k)}{k^2}e^{ikx}$, tenemos para $l = 0,1,2$ que

$$\left|\frac{d^l g_k}{dx^l}(x)\right| \leq |k|^{l-2}|\widehat{f}(k)|,$$

para todo entero $k \neq 0$. Ahora, para $l = 0,1,2$, afirmamos que $|k|^{l-2}|\widehat{f}(k)|$ es sumable para todo $k \neq 0$. En efecto, tomando $N \geq 1$ entero y usando que $\widehat{f'}(k) = (ik)\widehat{f}(k)$, se sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^{2N}$ y la identidad de

Parseval (vea el Teorema 2.24) que

$$\begin{aligned}\sum_{|k|=1}^{N}|k|^{l-2}|\widehat{f}(k)| =& \sum_{|k|=1}^{N}|k|^{l-3}|\widehat{f'}(k)| \\ \le& \Big(\sum_{|k|=1}^{N}|k|^{2(l-3)}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{|k|=1}^{N}|\widehat{f'}(k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ \le& C\Big(\sum_{|k|=1}^{\infty}|k|^{2(l-3)}\Big)^{\frac{1}{2}}\|f'\|_2,\end{aligned} \tag{3.6}$$

para alguna constante $C > 0$. Tomando $N \to \infty$ se sigue lo afirmado. De esta manera, se concluye por el criterio M de Weierstrass que la serie $\sum_{|k|=1}^{\infty}\frac{d^l g_k}{dx^l}(x)$ converge absoluta y uniformemente para todo $l = 0, 1, 2$, de lo cual se sigue qué u dada por (3.4) satisface $u \in C^2_{per}([-\pi, \pi])$.

Ahora demostremos la unicidad. Sean $u, v \in C^2_{per}([-\pi, \pi])$ soluciones de (3.1) con $f \in C^1_{per}([-\pi, \pi])$ que satisface (3.2). Entonces, tenemos que $w = u - v \in C^2_{per}([-\pi, \pi])$ satisface

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2w}{dx^2} = 0, \quad x \in (-\pi, \pi), \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} w(x)\,dx = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Multiplicando por w la ecuación en (3.7) e integrando por partes, se tiene

$$\begin{aligned} 0 =& \int_{-\pi}^{\pi}\frac{d^2w}{dx^2}(x)\,w(x)\,dx \\ =& \Big(\frac{dw}{dx}(\pi)\,w(\pi) - \frac{dw}{dx}(-\pi)\,w(-\pi)\Big) - \int_{-\pi}^{\pi}\Big|\frac{dw}{dx}(x)\Big|^2 dx \\ =& -\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\frac{dw}{dx}(x)\Big|^2 dx. \end{aligned}$$

De lo cual tenemos que $\frac{dw}{dx}(x) = 0$ en $[-\pi, \pi]$, es decir w es contante, pero la condición sobre la integral en (3.7) obliga a tener que $w = 0$, por tanto $u = v$.

Solo resta por deducir (3.5). Por la unicidad, sabemos que toda solución de (3.1) en la clase $C^2_{per}([-\pi, \pi])$ es de la forma (3.4), por tanto usando (3.6) con $l = 0, 1$ existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\|u\|_\infty + \Big\|\frac{du}{dx}\Big\|_\infty \le& 2C\Big(\sum_{|k|=1}^{\infty}|k|^{2(l-3)}\Big)^{\frac{1}{2}}\|f'\|_2 \\ \le& 2(2\pi)^{\frac{1}{2}}C\Big(\sum_{|k|=1}^{\infty}|k|^{2(l-3)}\Big)^{\frac{1}{2}}\|f'\|_\infty.\end{aligned}$$

□

Observación 3.2. *i) Notamos que la solución del problema* (3.1) *construida en el Teorema 3.1 satisface $u \in C^3_{per}([-\pi, \pi])$. Esto se puede observar de la ecuación $\frac{d^2u}{dx^2} = -f$ que nos dice que si $f \in C^1_{per}([-\pi, \pi])$, entonces u tiene tercera derivada continua y periódica.*

ii) Un ejercicio interesante es relacionar las fórmulas (3.3) *y* (3.4) *para soluciones periódicas de* (3.1).

3.2. Ejemplo ecuación parabólica. Consideremos el siguiente problema asociado a la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (-\pi,\pi),\, t > 0, \\ u(-\pi,t) = u(\pi,t), & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), \end{cases} \tag{3.8}$$

donde $f \in C_{per}([-\pi,\pi])$. Buscamos una solución $u \in C([-\pi,\pi] \times [0,\infty))$ con dos derivadas continuas en espacio y una derivada continua en el tiempo en $(-\pi,\pi) \times (0,\infty))$ del problema de valor inicial anterior. Para simplificar notación, también escribiremos

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (-\pi,\pi),\, t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & f \in C_{per}([-\pi,\pi]), \end{cases}$$

donde entenderemos que estamos interesados en soluciones u periódicas en espacio de periodo 2π.

Búsqueda de soluciones. Procedemos formalmente. Tomando la transformada de Fourier en espacio a la ecuación en (3.8) tenemos

$$(\widehat{u_t - u_{xx}})(k) = \widehat{u}_t(k) - \widehat{u_{xx}}(k) = \widehat{u}_t(k) - (ik)^2\widehat{u}(k),$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. Note que la ecuación anterior es una ecuación ordinaria en tiempo. De esta manera se llega a

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\widehat{u}(k) + k^2\widehat{u}(k) = 0, & k \in \mathbb{Z},\, t > 0, \\ \widehat{u}(k,0) = \widehat{f}(k). \end{cases} \tag{3.9}$$

Observamos que la transformada de Fourier convierte el problema (3.8) en un problema de ecuación diferenciales ordinarias para los coeficientes de Fourier $\widehat{u}(k)$ en (3.9). Solucionando encontramos:

$$\widehat{u}(k) = e^{-tk^2}\widehat{f}(k),$$

luego el posible candidato a solución del problema (3.8) está dado por

$$u(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-tk^2+ikx}\widehat{f}(k).$$

Motivado por lo anterior, utilizaremos la notación $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ para definir el *semigrupo* de operadores actuando sobre $C_{per}([-\pi,\pi])$ asociados a la ecuación del calor periódica (3.8) dado por

$$(U(t)f)(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-tk^2+ikx}\widehat{f}(k), & \text{si } t > 0, \\ f(x), & \text{si } t = 0, \end{cases} \tag{3.10}$$

$f \in C_{per}([-\pi,\pi])$. Estudiemos algunas propiedades de los operadores $\{U(t)\}_{t\geq 0}$.

Teorema 3.3. i) *Sea* $f \in C_{per}([-\pi,\pi])$, *entonces para* $t>0$, $U(t)f \in C^{\infty}_{per}([-\pi,\pi])$. *Además, para todo* $t, t' \geq 0$

$$U(t)U(t')f = U(t+t')f.$$

Más aún, para cualquier entero $l \geq 0$, *existe una constante* $C>0$ *que depende de* l *e independiente de* t *y* f *tal que*

$$\Big\| \frac{d^l U(t)f}{dx^l} \Big\|_{\infty} \leq C\big(1 + t^{-\frac{1}{2}} + t^{-\frac{(1+l)}{2}}\big)\|f\|_{\infty}. \tag{3.11}$$

Si $f \in C^1_{per}([-\pi,\pi])$, *entonces existe una constante* $C>0$ *que depende de* l *e independiente de* t *y* f *tal que*

$$\Big\| \frac{d^l U(t)f}{dx^l} \Big\|_{\infty} \leq Ct^{-\frac{l}{2}}\big(\|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}\big). \tag{3.12}$$

ii) *Dado* $t \geq 0$, $U(t) : C_{per}([-\pi,\pi]) \to C_{per}([-\pi,\pi])$ *define un operador lineal continuo.*

iii) *Sea* $f \in C^1_{per}([-\pi,\pi])$, *entonces* $u(x,t) := U(t)f(x)$ *soluciona la ecuación del calor en* (3.8), *además*

$$u \in C^{\infty}([-\pi,\pi] \times (0,\infty)) \tag{3.13}$$

y

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = \lim_{t \to 0^+} (U(t)f)(x) = f(x) \tag{3.14}$$

uniformemente para $x \in [-\pi,\pi]$. *Esto es*

$$\lim_{t\to 0^+} \|U(t)f - f\|_{\infty} = 0. \tag{3.15}$$

Demostración. La idea de la demostración de i) se basa en el hecho que el decaimiento de la Gaussiana e^{-tk^2} ayuda a garantizar la convergencia uniforme de las derivadas de cualquier orden de $U(t)f$. En efecto, sean $l, N \geq 0$ enteros, entonces por (2.11) tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-N}^{N} \Big| \frac{d^l}{dx^l}\Big(e^{-tk^2+ikx}\widehat{f}(k)\Big)\Big| &= \sum_{k=-N}^{N} \Big|(ik)^l e^{-tk^2+ikx}\widehat{f}(k)\Big| \\
&\leq \sum_{k=-N}^{N} |k|^l e^{-tk^2}|\widehat{f}(k)| \\
&\leq \|\widehat{f}\|_{\infty} \sum_{k=-N}^{N} |k|^l e^{-tk^2} \\
&\leq \|f\|_{\infty} \sum_{k=-N}^{N} |k|^l e^{-tk^2}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Para terminar la estimativa de la desigualdad anterior, observamos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=-N}^{N}|k|^l e^{-tk^2} \leq & 1+2\sum_{k=1}^{N}|k|^l e^{-tk^2}\\ \leq & 1+2\sum_{k=1}^{N}\int_{k-1}^{k}(x+1)^l e^{-tx^2}\\ = & 1+2\int_0^N (x+1)^l e^{-tx^2}.\end{aligned}$$

donde hemos usado que para $k \geq 1$, si $k-1 \leq x \leq k$, entonces $k \leq x+1$ (lo que implica $k^l \leq (x+1)^l$) y $tk^2 \geq tx^2$ (esto nos da $e^{-tk^2} \leq e^{-tx^2}$), junto con la propiedad de monotonicidad de la integral. Continuando, el cambio de variables $w = t^{\frac{1}{2}}x$ nos permite deducir

$$\begin{aligned}\sum_{k=-N}^{N}|k|^l e^{-tk^2} \leq & 1+2\int_0^\infty (x+1)^l e^{-tx^2}\,dx\\ = & 1+\frac{2}{t^{\frac{1}{2}}}\int_0^\infty \Big(\frac{w}{t^{\frac{1}{2}}}+1\Big)^l e^{-w^2}\,dw\\ \leq & C_1\Big(1+t^{-\frac{1}{2}}+t^{-\frac{(1+l)}{2}}\Big)<\infty,\end{aligned}$$

para alguna constante $C_1 > 0$ independiente de t. Luego, volviendo a (3.16) deducimos

$$\sum_{k=-N}^{N}\left|\frac{d^l}{dx^l}\Big(e^{-tk^2+ikx}\widehat{f}(k)\Big)\right| \leq C_1\big(1+t^{-\frac{1}{2}}+t^{-\frac{(1+l)}{2}}\big)\|f\|_\infty. \tag{3.17}$$

Por lo tanto, tomando $N \to \infty$, la anterior desigualdad implica que la serie que define a $U(t)f$ y sus derivadas de cualquier orden convergen absoluta y uniformemente, es decir, $U(t)f \in C^\infty_{per}([-\pi,\pi])$. Note que (3.17) nos dice

$$\begin{aligned}\left|\frac{d^l U(t)f}{dx^l}(x)\right| = & \left|\sum_{k=-N}^{N}\frac{d^l}{dx^l}\Big(e^{-tk^2+ikx}\widehat{f}(k)\Big)\right|\\ \leq & C_1\big(1+t^{-\frac{1}{2}}+t^{-\frac{(1+l)}{2}}\big)\|f\|_\infty,\end{aligned}$$

con lo cual tomando el supremo sobre $x \in [-\pi,\pi]$, llegamos a (3.11). Ahora supongamos que $f \in C^1_{per}([-\pi,\pi])$. Utilizando (2.18), podemos estimar (3.16) como sigue

$$\begin{aligned}\sum_{k=-N}^{N}\left|\frac{d^l}{dx^l}\Big(e^{-tk^2+ikx}\widehat{f}(k)\Big)\right| \leq & \sum_{k=-N}^{N}|k|^l e^{-tk^2}|\widehat{f}(k)|\\ \leq & \Big(\sup_{k\in\mathbb{Z}}|k|^l e^{-tk^2}\Big)\sum_{k=-N}^{N}|\widehat{f}(k)|\\ \leq & C\Big(\sup_{k\in\mathbb{Z}}|k|^l e^{-tk^2}\Big)\big(\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty\big).\end{aligned} \tag{3.18}$$

Analicemos el supremo anterior. Tenemos que

$$\begin{aligned}\sup_{k\in\mathbb{Z}}|k|^l e^{-tk^2} \leq& 2t^{-\frac{l}{2}} \sup_{k\in\mathbb{Z},\, k\geq 0}|t^{\frac{1}{2}}k|^l e^{-(t^{\frac{1}{2}}k)^2}\\ \leq& 2t^{-\frac{l}{2}}\sup_{x\geq 0}|x|^l e^{-x^2}\\ =& Ct^{-\frac{l}{2}},\end{aligned}$$

donde $C>0$ depende solamente de l. Luego, argumentando como en la deducción de (3.11), obtenemos (3.12). La propiedad $U(t)U(t')f = U(t+t')f$ es inmediata de la definición de $U(t)$ y el hecho que $\widehat{U(t)f}(k) = e^{-tk^2}\widehat{f}(k)$. Esto completa la demostración de i).

Ahora, veamos ii). Si $t=0$, $U(t)$ es el operador identidad por definición (3.10), por lo que la continuidad y linealidad es inmediata. Si $t>0$, el operador $U(t)$ es lineal por definición y aplicando (3.11) con $l=0$, obtenemos que este es acotado.

Demostremos iii). Por la parte i), sabemos que $u(x,t)=U(t)f(x)$ define una función suave donde las derivadas de la serie en (3.10) convergen absoluta y uniformemente, por lo que podemos tomar derivadas de cualquier orden de u en la variable espacial. Veamos qué u es diferenciable en la variable temporal. Consideremos $t>0$, entonces

$$\begin{aligned}u(x,t+h)-u(x,t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\big(e^{-(t+h)k^2}-e^{-tk^2}\big)e^{ikx}\widehat{f}(k)\\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\big(e^{-hk^2}-1\big)e^{-tk^2}e^{ikx}\widehat{f}(k).\end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio

$$\big|e^{-hk^2}-1\big| = \Big|\int_0^{hk^2} e^{-s}\,ds\Big| \leq |h|k^2e^{|h|k^2}.$$

Luego concluimos

$$\begin{aligned}\big|\big(e^{-hk^2}-1\big)e^{-tk^2}e^{ikx}\widehat{f}(k)\big| \leq& |h|k^2e^{-tk^2}|\widehat{f}(k)|\\ =& \frac{|h|}{t}(tk^2)e^{-tk^2}|\widehat{f}(k)|\\ \leq& \frac{|h|}{t}\Big(\sup_{x\geq 0} xe^{-tx^2}\Big)|\widehat{f}(k)|.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Ahora, puesto que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\big(e^{-hk^2}-1\big)e^{-tk^2}e^{ikx}\widehat{f}(k)}{h} = -k^2e^{-tk^2+ikx}\widehat{f}(k). \tag{3.20}$$

Por lo deducido en (3.19) y (3.20), el hecho que $\widehat{f} \in l^1(\mathbb{Z})$, podemos aplicar el criterio M-Weierstrass para deducir que $\partial_t u(x,t)$ está definida y

$$\begin{aligned}\partial_t u(x,t) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x,t+h)-u(x,t)}{h} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-k^2) e^{-tk^2+ikx}\widehat{f}(k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^2 e^{-tk^2+ikx}\widehat{f}(k) \\ &= \partial_x^2 u(x,t),\end{aligned} \tag{3.21}$$

donde el límite anterior es uniforme en $x \in [-\pi,\pi]$. Por lo que en particular deducimos

$$\lim_{h\to 0} \Big\| \frac{u(\cdot,t+h)-u(\cdot,t)}{h} - \partial_x^2 u(\cdot,t)\Big\|_\infty = 0, \tag{3.22}$$

para cualquier $t \in (0,\infty)$.

Por otro lado, (3.21) muestra que $u(x,t)$ soluciona la ecuación del calor en $(x,t) \in (-\pi,\pi)\times(0,\infty)$. Notemos que como $u(\cdot,t) \in C^\infty_{per}([-\pi,\pi])$ por i), es decir, u es suave en la primera variable y se tiene que $\partial_t u = \partial_x^2 u$, así con un argumento inductivo podemos ver que

$$\partial_t^l u = \partial_x^{2l} u,$$

para todo entero $l \geq 0$. De igual manera, se pueden considerar derivadas mixtas. Así, se obtiene que u es suave en la variable temporal, con lo cual llegamos a (3.13).

Solo resta mostrar (3.14). Como $f, u(t) \in C^1_{per}([-\pi,\pi])$ por el Teorema 2.11 parte iii), tenemos que ambas funciones son iguales a sus series de Fourier, con lo que

$$\begin{aligned} u(x,t) - f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-tk^2+ikx}\widehat{f}(k) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}\widehat{f}(k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \big(e^{-tk^2}-1\big)e^{ikx}\widehat{f}(k).\end{aligned}$$

Puesto que la serie $\sum |\widehat{f}(k)|$ converge y

$$\big|\big(e^{-tk^2}-1\big)e^{ikx}\widehat{f}(k)\big| \leq 2|\widehat{f}(k)|,$$

dado $\epsilon > 0$ existe un entero $N = N(\epsilon) \geq 1$ tal que

$$\Big|\sum_{|k|>N} \big(e^{-tk^2}-1\big)e^{ikx}\widehat{f}(k)\Big| \leq 2\sum_{|k|>N} |\widehat{f}(k)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Por otro lado, la desigualdad del valor medio implica para $|k| \leq N$ que

$$\big|\big(e^{-tk^2}-1\big)\big| = \Big|\int_0^{tk^2} e^{-s}\,ds\Big| \leq tk^2 \leq tN^2.$$

Por lo que aplicando (2.18) tenemos

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{|k|\leq N}\big(e^{-tk^2}-1\big)e^{ikx}\widehat{f}(k)\Big| \leq & tN^2\sum_{|k|\leq N}|\widehat{f}(k)| \\ \leq & tN^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)| \\ \leq & CtN^2(\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty).\end{aligned}$$

La desigualada anterior implica que existe $t_0=t_0(\epsilon)>0$ tal que si $0\leq t\leq t_0$, entonces

$$\Big|\sum_{|k|\leq N}\big(e^{-tk^2}-1\big)e^{ikx}\widehat{f}(k)\Big|\leq\frac{\epsilon}{2}.$$

Combinando los resultados anteriores, deducimos que para $0\leq t\leq t_0$,

$$\begin{aligned}|u(x,t)-f(x)|\leq & \Big|\sum_{|k|\leq N}\big(e^{-tk^2}-1\big)e^{ikx}\widehat{f}(k)\Big|+\Big|\sum_{|k|>N}\big(e^{-tk^2}-1\big)e^{ikx}\widehat{f}(k)\Big| \\ \leq & \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} \\ = & \epsilon,\end{aligned}$$

esto es uniforme de $x\in[-\pi,\pi]$. □

3.3. Funciones sobre espacios de Banach. Antes de ver una consecuencia del Teorema 3.3, introduzcamos algo de notación. Dado un espacio de Banach $(X,\|\cdot\|_X)$ y $T>0$, denotamos por $C([0,T];X)$ el conjunto de funciones $f:[0,T]\to X$ que son continuas en el siguiente sentido: dado $t'\in(0,T)$,

$$\lim_{t\to t'}\|f(t)-f(t')\|_X=0,$$

y si $t'=0$ o $t'=T$, el límite anterior se toma lateral. Análogamente, podemos definir $C(I;X)$ donde $I\subset\mathbb{R}$ es un intervalo. Por ejemplo, $C([0,T);X)$, $C((0,T);X)$, $C([0,\infty);X)$ y $C(\mathbb{R};X)$. La interpretación es que el espacio $C(I;X)$ consiste de todas las curvas continuas con domino I en el espacio X.

$C^1([0,T];X)$ es el conjunto de funciones $f\in C([0,T];X)$ que son diferenciables en el sentido que para $t\in(0,T)$,

$$f'(t)=\lim_{h\to0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

existe en la topología de X, en el caso $t=0$, $t=T$ consideramos límites laterales y además pedimos $f'\in C([0,T];X)$. Dado $I\subset\mathbb{R}$ un intervalo, análogamente podemos definir $f\in C^1(I;X)$.

Observación 3.4. *i) Hemos decidido introducir la notación anterior por su amplio uso en ecuaciones diferenciales parciales y para mantener la idea que buscamos soluciones $u(x,t)$ que sean continuas o diferenciables en tiempo y para las cuales su variable espacial este en algún espacio $C^k_{per}([-\pi,\pi])$. Por ejemplo, trabajaremos con espacios como $u\in C([0,\infty);C^k_{per}([-\pi,\pi]))$, $u\in C^1((0,\infty);C^k_{per}([-\pi,\pi]))$.*

ii) Note que en el caso $u(x,t)=(U(t)f)(x)$ con $f\in C^1_{per}([-\pi,\pi])$, por el Teorema

3.3 i) sabemos que $u(\cdot,t)\in C^{\infty}_{per}([-\pi,\pi])$, para $t>0$. Por lo que una pregunta natural es ver si para algún entero $k\geq 0$, la aplicación

$$t\in(0,\infty)\to u(\cdot,t)\in C^{k}_{per}([-\pi,\pi])$$

es continua o diferenciable en la topología de $C^{k}_{per}([-\pi,\pi])$, esto es

$$\text{¿Para cuales enteros } k\geq 1 \text{ sucede que } u\in C((0,\infty);C^{k}_{per}([-\pi,\pi]))?$$

Pregunta similar para $u\in C^1((0,\infty);C^{k}_{per}([-\pi,\pi]))$.

En lo que sigue consideraremos los espacios $C^{k}_{per}([-\pi,\pi]))$, $k\geq 0$ con la norma dada por (2.4).

Corolario 3.5. *Dada $f\in C^1_{per}([-\pi,\pi])$, existe una única solución*

$$u\in C^1((0,\infty);C^2_{per}([-\pi,\pi]))\cap C([0,\infty);C_{per}([-\pi,\pi])) \tag{3.23}$$

del problema de Cauchy (3.8), donde la condición inicial es en el sentido

$$\lim_{t\to 0^+}\|u(\cdot,t)-f(\cdot)\|_{\infty}=0.$$

Antes de continuar con la demostración, vale la pena dar algunos comentarios.

Observación 3.6. *i) Expliquemos que si u está en la clase (3.23), entonces las derivadas en la ecuación (3.8) tienen sentido puntual en $(-\pi,\pi)\times(0,\infty)$. Por definición, u pertenece a la clase (3.23) implica que las siguientes funciones son continuas: $t\in(0,\infty)\to u(t)\in C^2_{per}([-\pi,\pi])$ y $t\in(0,\infty)\to u'(t)\in C^2_{per}([-\pi,\pi])$ (donde la derivada se considera en la topología de $C^2_{per}([-\pi,\pi])$). Luego, como $u(t)$ define una función con derivada continua en $C^2_{per}([-\pi,\pi])$, podemos identificar a u como una función de dos variables (abusando de la notación por simplicidad) como $u(x,t)=u(t)(x)$. Se puede deducir entonces que $u\in C^1((-\pi,\pi)\times(0,\infty))$ y $\partial_x^2 u\in C((-\pi,\pi)\times(0,\infty))$. Esto son los requisitos de regularidad que necesitamos para calcular las derivadas involucradas en la ecuación del calor.*

ii) Se puede ver que el Corolario 3.5 es válido si en lugar de (3.23) se considera

$$C^1((0,\infty);C_{per}([-\pi,\pi]))\cap C((0,\infty);C^2_{per}([-\pi,\pi]))\cap C([0,\infty);C_{per}([-\pi,\pi])).$$

Note que la clase de funciones anterior contiene la dada en (3.23). La idea es que $u\in C([0,\infty);C_{per}([-\pi,\pi]))$ se necesita para deducir que u converge a la condición inicial en $t=0$ en la topología de $C_{per}([-\pi,\pi])$. Además, $u\in C([0,\infty);C^2_{per}([-\pi,\pi]))$ garantiza la existencia y continuidad de $\partial_x^2 u$ y $u\in C^1([0,\infty);C_{per}([-\pi,\pi]))$ de $\partial_t u$. Sin embargo, por simplicidad decidimos trabajar con la clase (3.23).

iii) Siguiendo la demostración del Corolario 3.5 abajo, podemos mostrar que

$$u\in C^{\infty}((0,\infty);C^{\infty}_{per}([-\pi,\pi]))$$

que en particular implica que $u\in C^{\infty}([-\pi,\pi]\times(0,\infty))$.

Demostración Corolario 3.5. **Existencia de soluciones**. Dada $f\in C^1_{per}([-\pi,\pi])$, consideramos $u(x,t)=U(t)f$ donde $U(t)$ se define por (3.10). Por la parte iii) del Teorema 3.3, tenemos que u soluciona la ecuación del calor por (3.15) converge al dato inicial cuando $t\to 0^+$ en $C_{per}([-\pi,\pi])$. Así, nos resta ver u está en la clase (3.23). Dividamos esta hecho en dos partes.

Parte a): $u \in C([0,\infty); C_{per}([-\pi,\pi]))$. Para esto, estudiemos la continuidad en un punto $t' \in [0,\infty)$. Si $t'=0$, la continuidad es consecuencia de (3.15). Por lo tanto, podemos suponer que $t' \in (0,\infty)$. Si $t > t'$, escribimos

$$u(x,t) - u(x,t') = (U(t)f - U(t')f)(x) = U(t')\big(U(t-t') - 1\big)f(x).$$

Luego, por la propiedad (3.11) con $l = 0$ deducimos

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t) - u(\cdot,t')\| =&\|U(t')\big(U(t-t')-1\big)f\|_\infty \\ \le& C(1+(t')^{-\frac{1}{2}})\|\big(U(t-t')-1\big)f\|_\infty. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Por tanto, haciendo $h = t - t'$ vemos que (3.24) implica continuidad a derecha del punto t', si mostramos que $\lim_{h\to 0^+} \|\big(U(h)-1\big)f\|_\infty = 0$. Pero esto es consecuencia de (3.15).

Si $t < t'$, escribimos

$$u(x,t) - u(x,t') = (U(t)f - U(t')f)(x) = -U(t)\big(U(t'-t) - 1\big)f(x),$$

de donde se sigue de (3.11) con $l = 0$

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t) - u(\cdot,t')\| =&\|U(t)\big(U(t'-t)-1\big)f\|_\infty \\ \le& C(1+(t)^{-\frac{1}{2}})\|\big(U(t'-t)-1\big)f\|_\infty. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Tomando $t \to t'$, nuevamente por (3.15), se sigue la continuidad a izquierda de (3.25). Esto completa la demostración de la Parte a).

Parte b): $u \in C^1((0,\infty); C^2_{per}([-\pi,\pi]))$. Primero debemos ver que el límite en tiempo existe en la topología de $C^2_{per}([-\pi,\pi])$. Puesto que sabemos $\partial_t u = \partial_x^2 u$, la existencia del límite mencionado equivale a mostrar

$$\lim_{h\to 0} \Big\| \frac{u(\cdot,t+h) - u(\cdot,t)}{h} - \partial_x^2 u(\cdot,t)\Big\|_{C^2_{per}([-\pi,\pi])} = 0,$$

lo cual recordando la definición de la norma (2.4) es equivalente a mostrar

$$\lim_{h\to 0} \Big\| \frac{\partial_x^l u(\cdot,t+h) - \partial_x^l u(\cdot,t)}{h} - \partial_x^{2+l} u(\cdot,t)\Big\|_{\infty} = 0, \tag{3.26}$$

para todo $l = 0,1,2$. Observe que la norma anterior (sin considerar el límite) está bien definida, pues sabemos que para cualquier $t > 0$, $u(\cdot,t) \in C^\infty_{per}([-\pi,\pi])$ por i) en el Teorema 3.3. El caso $l = 0$ fue demostrado en (3.22) y siguiendo estas mismas ideas se puede completar los casos $l = 1,2$.

En el paso anterior vimos que la derivada de u en tiempo existe en la topología $C^2_{per}([-\pi,\pi])$ y esta debe ser igual a $\partial_t u$. Vemos la continuidad, es decir, $\partial_t u \in C((0,\infty); C^2_{per}([-\pi,\pi]))$. Debemos ver que dado $t' \in (0,\infty)$, se tiene que

$$\lim_{t\to t'} \|\partial_t u(\cdot,t) - \partial_t u(\cdot,t')\|_{C^2_{per}([-\pi,\pi])} = 0.$$

Lo cual usando la definición de la norma en $C^2_{per}([-\pi,\pi])$ y el hecho que $\partial_t u = \partial_x^2 u$ es equivalente a mostrara

$$\lim_{t\to t'} \|\partial_x^{2+l} u(\cdot,t) - \partial_x^{2+l} u(\cdot,t')\|_\infty = 0,$$

para cada $l = 0, 1, 2$. El resultado anterior se puede obtener como hicimos en la parte a). En efecto, si $t > t'$, escribimos

$$\partial_x^{2+l} u(x,t) - \partial_x^{2+l} u(x,t') = \partial_x^{2+l} U(t')\big(U(t-t') - 1\big) f(x).$$

Aplicando (3.11) con $g = \big(U(t-t') - 1\big) f(x)$ se tiene que

$$\|\partial_x^{2+l} u(\cdot,t) - \partial_x^{2+l} u(\cdot,t')\|_\infty \leq C\Big(1 + t^{-\frac{1}{2}} + t^{-\frac{l+3}{2}}\Big)\|\big(U(t-t') - 1\big) f\|_\infty.$$

Lo cual por (3.15) nos da la continuidad cuando $t \to t'^{+}$. El límite $t \to t'^{-}$ es análogo. La parte b) está completa y por ende la demostración de existencia.

Unicidad. Sean u_1, u_2 soluciones de (3.8) ambas en la clase de funciones (3.23). Entonces tenemos que $w = u_1 - u_2$ está el espacio en (3.23) y satisface

$$w_t - w_{xx} = 0, \quad x \in (-\pi, \pi),\ t > 0,$$

con $w(x,0) = 0$. Multiplicando la ecuación anterior por w e integrando entre $(-\pi, \pi)$ (todo esto es válido por la regularidad de la función w), tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} w_t(x,t) w(x,t)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} w_{xx}(x,t) w(x,t)\, dx. \tag{3.27}$$

Ahora, diferenciando bajo el signo de la integral (es válido pues $\partial_t w$ es una función continua), podemos escribir

$$\int_{-\pi}^{\pi} w_t(x,t) w(x,t)\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} w^2(x,t)\, dx\Big)$$

e integrando por partes, que se justifica del hecho que $w(\cdot,t) \in C^2_{per}([-\pi,\pi])$, $t > 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} w_{xx}(x,t) w(x,t)\, dx = -\int_{-\pi}^{\pi} w_x(x,t)^2\, dx.$$

Volviendo a (3.27) deducimos que para $t > 0$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} w^2(x,t)\, dx\Big) = -\int_{-\pi}^{\pi} w_x(x,t)^2\, dx. \leq 0,$$

esto nos dice que la función

$$t \in [0,\infty) \to \int_{-\pi}^{\pi} w^2(x,t)\, dx$$

es decreciente y por tanto

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} w^2(x,t)\, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} w^2(x,0)\, dx = 0.$$

Se sigue qué $w(x,t) = 0$ para todo $x \in [-\pi,\pi]$, $t \geq 0$. Es decir, $u_1 = u_2$. □

4. Espacios de Sobolev de tipo L^2

En esta parte, damos una muy breve introducción a los espacios de Sobolev periódicos de tipo L^2. Nuestro propósito no es dar una teoría detallada al respecto, lo que buscamos es dar ciertas aplicación de tales espacios para encontrar soluciones a problemas de valor iniciales de ciertas ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Para un tratamiento más detallado al respecto, vea [3, 4]. También, mencionamos que no utilizaremos la teoría de distribuciones temperadas, que es la manera usual para introducir espacios de Sobolev periódicos en diversos cursos de análisis de Fourier (como sucesiones y series de Fourier).

4.1. Espacio L^2. Note que $C_{per}([-\pi,\pi])$ no es un espacio completo con la norma $\|\cdot\|_2$. Por ejemplo, dado $n \geq 1$ entero considere las funciones

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [-\pi, -\frac{1}{n}], \\ n(x+\frac{1}{n}), & \text{si } x \in (-\frac{1}{n}, 0], \\ -\frac{1}{\pi}(x-\pi), & \text{si } x \in (0,\pi], \end{cases}$$

extendemos a $f_n(x)$ de manera periódica como función de periodo 2π. No es difícil mostrar que $f_n \in C_{per}([-\pi,\pi])$ para todo entero $n \geq 1$. Por otro lado, consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [-\pi, 0], \\ -\frac{1}{\pi}(x-\pi), & \text{si } x \in (0,\pi], \end{cases}$$

extendida de manera periódica con periodo 2π. Tenemos que $f \notin C_{per}([-\pi,\pi])$, pero se puede mostrar

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = \lim_{n\to\infty} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

De esta manera, podemos definir

$$L^2([-\pi,\pi]) \text{ es el espacio de completación de } (C_{per}([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_2).$$

Es decir, $f \in L^2([-\pi,\pi])$ es límite de una secuencia de Cauchy $\{f_n\} \subset C_{per}([-\pi,\pi])$ en la norma $\|\cdot\|_2$. Cuando hablemos de esta convergencia, diremos que $f_n \to f$ en el sentido L^2 cuando $n \to \infty$.

Note que se puede extender el producto interno asociado a la norma $\|\cdot\|_2$ como sigue: dados $f, g \in L^2([-\pi,\pi])$ tales que $f_n \to f$ y $g_n \to g$ en el sentido L^2 para secuencias de Cauchy $\{f_n\}, \{g_n\} \subset C_{per}([-\pi,\pi])$, entonces

$$(f|g) := \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\overline{g_n(x)} \, dx. \tag{4.1}$$

Se puede mostrar que la definición anterior es independiente de las secuencia que aproximan a f y g. Se sigue que la norma está dada por

$$\|f\|^2 = (f|f).$$

Se tiene le siguiente resultado.

Teorema 4.1. *El espacio $L^2([-\pi,\pi])$ con producto interno (4.1) es un espacio de Hilbert.*

Observación 4.2. *i) El espacio $L^2([-\pi,\pi])$ es el mismo que se obtiene de completar $C^k_{per}([-\pi,\pi])$ con la norma $\|\cdot\|_2$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$ o con $k = \infty$. En particular, esto es equivalente a decir que los espacios $C^k_{per}([-\pi,\pi])$ son densos en L^2. Esto es fácil de ver por el Teorema 2.26, que afirma que para cualquier $f \in C_{per}([-\pi,\pi])$, $S_N(f)$ converge a f en L^2 cuando $N \to \infty$. Pero como $S_N(f) \in C^\infty_{per}([-\pi,\pi])$ y $C_{per}([-\pi,\pi])$ es denso en L^2, se concluye la densidad de $C^\infty_{per}([-\pi,\pi])$ (lo cual nos da la densidad de cualquier $C^k_{per}([-\pi,\pi])$).*

ii) El espacio $L^2([-\pi,\pi])$ coincide con el espacio L^2 de Lebesgue sobre $[-\pi,\pi]$, que consiste de clases de funciones medibles con módulo cuadrado integrable en el sentido de Lebesgue. Recuerde que tales clases están dadas por la igualdad módulo un conjunto de medida nula. Esto le da una interpretación de función a los elementos de $f \in L^2([-\pi,\pi])$.

Respecto a la transformada de Fourier en $L^2([-\pi,\pi])$, tenemos por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que si $f \in L^2([-\pi,\pi])$

$$\begin{aligned}\Big|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx\Big| = |(f|\Phi_k)| \leq & \|f\|_2\|\Phi_k\|_2\\ =&(2\pi)^{\frac{1}{2}}\|f\|_2.\end{aligned}$$

La estimativa anterior se puede justificar viendo a f como función o por densidad con $C_{per}([-\pi,\pi])$. Por lo anterior, se sigue que si $f \in L^2([-\pi,\pi])$ entonces su transformada de Fourier $\widehat{f}=\{\widehat{f}(k)\}$ existe como elemento de $l^{\infty}(\mathbb{Z})$. Sin embargo, podemos decir más al respecto.

Teorema 4.3. *La transformada de Fourier*

$$\wedge : L^2([-\pi,\pi]) \to l^2(\mathbb{Z})$$

es un isomorfismo. Se tiene que vale la identidad de Parseval

$$\|\widehat{f}\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\|f\|_2^2.$$

De manera equivalente, si $f,g \in L^2([-\pi,\pi])$,

$$(\widehat{f}\,|\,\widehat{g}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi}(f\,|\,g).$$

Demostración. Primero, veamos que si $f \in L^2([-\pi,\pi])$, entonces $\widehat{f} \in l^2(\mathbb{Z})$. Consideremos una secuencia $\{f_n\} \subset C_{per}([-\pi,\pi])$ tal que f_n converge a f en el sentido de L^2. Por el Teorema 2.24, sabemos que vale la identidad de Parseval para funciones en $C_{per}([-\pi,\pi])$, lo cual implica

$$\underbrace{\|f_n - f_m\|_2^2}_{\text{Norma en } L^2([-\pi,\pi])} = 2\pi \underbrace{\|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\|_2}_{\text{Norma en } l^2(\mathbb{Z})},$$

para todo $n,m \in \mathbb{Z}$. Luego, como $\{f_n\} \subset C_{per}([-\pi,\pi])$ converge en L^2 esta define una secuencia de Cauchy, lo cual junto con la identidad anterior implica que la secuencia de transformadas de Fourier $\{\widehat{f_n}\}$ es de Cauchy en $l^2(\mathbb{Z})$. Puesto que $l^2(\mathbb{Z})$ es completo, sea $\{\alpha_k\} \in l^2(\mathbb{Z})$ el límite de $\{\widehat{f_n}\}$. Veamos qué $\widehat{f}=\{\widehat{f}(k)\}=\{\alpha_k\}$, es decir $\alpha_k = \widehat{f}(k)$ para todo entero k. Primero, notemos que

$$|\widehat{f_n}(k)-\alpha_k|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f_n}(k)-\alpha_k|^2 = \|\widehat{f_n} - \{\alpha_k\}\|_2^2 \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Por otro lado, la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos da

$$\begin{aligned}|\widehat{f_n}(k)-\widehat{f}(k)| =& \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi}\big(f_n(x)-f(x)\big)e^{-ikx}\,dx\Big|\\ \leq&(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\|f_n - f\|_2 \to 0\end{aligned} \tag{4.2}$$

cuando $n \to \infty$. Las anteriores desigualdades y la unicidad del límite muestran que $\widehat{f}(k) = \alpha_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, es decir, $\widehat{f} = \{\alpha_k\} \in l^2(\mathbb{Z})$. Podemos decir más al respecto, pues estamos concluyendo que $f_n \to f$ en L^2 y que $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ en $l^2(\mathbb{Z})$, por lo que usando el Teorema 2.24 tenemos que

$$\|f_n\|_2^2 = 2\pi\|\widehat{f_n}\|_2^2, \tag{4.3}$$

de lo cual si $n \to \infty$, se sigue que

$$\|f\|_2^2 = 2\pi\|\widehat{f}\|_2^2. \tag{4.4}$$

Esto implica que la transformada de Fourier es lineal, continua e inyectiva.

Veamos que la transformada de Fourier es sobreyectiva. Sea $\{\alpha_k\} \in l^2(\mathbb{Z})$. Dado un entero $n \geq 1$, definimos $f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \Phi_k$, de donde $f_n \in C^\infty_{per}([-\pi, \pi]) \subset C_{per}([-\pi, \pi])$. Por la relación de ortogonalidad de los $\{\Phi_k\}$, si $m \geq n$

$$\|f_n - f_m\|_2^2 = \|\sum_{n+1\leq|k|\leq m} \alpha_k \Phi_k\|_2^2 = (2\pi) \sum_{n+1\leq|k|\leq m} |\alpha_k|^2. \tag{4.5}$$

En lo anterior asumimos la convención que la suma vacía es igual a cero, por ejemplo, $\sum_{n+1\leq|k|\leq n}(\dots) = 0$. Como $\{\alpha_k\} \in l^2(\mathbb{Z})$, la estimativa (4.5) muestra que la secuencia $\{f_n\}$ es Cauchy en $L^2_{per}([-\pi, \pi])$. Ahora, como $L^2_{per}([-\pi, \pi])$ es completo, existe $f \in L^2([-\pi, \pi])$ limite en la norma L^2 de la secuencia $\{f_n\}$. Veamos qué $\widehat{f}(k) = \alpha_k$ para todo entero $k \in \mathbb{Z}$. Notemos que si $n \geq |k|$, por construcción $\widehat{f_n}(k) = \alpha_k$, además por el argumento (4.2) tenemos que $\widehat{f_n}(k) \to \widehat{f}(k)$ cuando $n \to \infty$. Se concluye que $\widehat{f}(k) = \alpha_k$ como se buscaba.

De esta manera, hemos probado que si $\{\alpha_k\} \in l^2(\mathbb{Z})$, entonces existe $f \in L^2([-\pi, \pi])$ tal que $\widehat{f} = \{\alpha_k\}$, por lo que la transformada de Fourier es sobreyectiva. Note que puesto que la transformada de Fourier es biyectiva, utilizando (4.4) concluimos la continuidad de la inversa[3] y que vale la identidad de Parseval. □

Vale la pena mencionar que como consecuencia de (4.2) tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.4. *Sean $f \in L^2([-\pi, \pi])$ y $\{f_n\} \subset C_{per}([-\pi, \pi])$ tales que $f_n \to f$ en el sentido de L^2. Entonces para cualquier entero $k \in \mathbb{Z}$*

$$\widehat{f_n}(k) \to \widehat{f}(k), \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

Observación 4.5. *Por el Teorema 4.3 existe la inversa de la transformada de Fourier y esta se denota como el operador*

$$\vee : l^2(\mathbb{Z}) \to L^2([-\pi, \pi])$$

definido como $\{\alpha_k\}^\vee = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \Phi_k$, donde el sentido de esta serie es en L^2. Más precisamente, $\{\alpha_k\}^\vee$ es el límite en L^2 de la secuencia de sumas parciales $\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \Phi_k$, que existe por la demostración del Teorema 4.3 y se denota como $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \Phi_k$.

[3]Otra manera de concluir la continuidad de la inversa es usar el teorema de la aplicación abierta. Este dice que si una función lineal continua $f : X \to Y$ entre espacios de Banach X y Y es sobreyectiva, entonces esta resulta ser una aplicación abierta (es decir, imagen por f de abiertos en X es un abierto en Y).

4.2. Espacios de Sobolev H^s_{per}, $s \geq 0$. En esta subsección estudiaremos los espacios de Sobolev periódicos y algunas de su propiedades, para más detalles sobre estos y otros espacios de funciones vea [3]. Nuestra motivación para introducir tales espacios se justifica en su amplia utilidad para ecuaciones diferenciales parciales, pues estos aparecen como conjuntos naturales para medir propiedades de integrabilidad y regularidad de funciones.

Se puede mostrar que el espacio $C^1_{per}([-\pi,\pi])$ no es completo con la norma

$$\|f\|_{H^1} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\left(\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

La norma anterior es interesante para establecer si una función es integrable y diferenciable (en algún sentido) y estudiar si su derivada conserva la misma propiedad de integrabilidad. Esto motiva a definir el espacio completado

$$H^1_{per} = H^1_{per}([-\pi,\pi]) \text{ es el espacio de completación de } (C^1_{per}([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_{H^1}).$$

Demos una descripción más detallada de H^1_{per}. Motivado por el hecho que la transformada de Fourier define un isomorfismo en $L^2([-\pi,\pi])$, afirmamos que H^1_{per} se puede identificar con el conjunto

$$\left\{f \in L^2([-\pi,\pi]) : \{\langle k\rangle \widehat{f}(k)\} \in l^2(\mathbb{Z})\right\}, \tag{4.6}$$

donde $\langle k\rangle = (1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}$. En efecto, como todo elemento de H^1_{per} es límite de una secuencia de Cauchy, consideremos $\{f_n\} \subset C^1_{per}([-\pi,\pi])$ siendo una secuencia de Cauchy en la norma H^1_{per}. Por la definición de tal norma, lo anterior sucede si y solo si $\{f_n\}$ y $\{f_n'\}$ son secuencias de Cauchy en $L^2([-\pi,\pi])$. Por completes de este último espacio, se sigue que existen $f, v \in L^2([-\pi,\pi])$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n' - v\|_2 = 0.$$

Por otro lado, lo anterior y la Proposición 4.4 implican

$$\widehat{f_n}(k) \to \widehat{f}(k), \qquad \widehat{f_n'}(k) \to \widehat{v}(k),$$

cuando $n \to \infty$. Ahora, usando que $\widehat{f_n'}(k) = (ik)\widehat{f_n}(k)$, se sigue de las convergencias anteriores que

$$\widehat{v}(k) = (ik)\widehat{f}(k).$$

Luego, como $v \in L^2([-\pi,\pi])$, por el Teorema 4.3 esto sucede si y solo si $\widehat{v} = \{(ik)\widehat{f}(k)\} \in l^2(\mathbb{Z})$. De esta manera, por la identidad de Parseval, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\left(\|f\|_2^2 + \|v\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\|\widehat{f}\|_2^2 + \|\widehat{v}\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)|\widehat{f}(k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle k\rangle^2 |\widehat{f}(k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Resumiendo, vemos que la secuencia de Cauchy $\{f_n\} \subset C^1_{per}([-\pi,\pi])$ en la norma de H^1_{per} converge a un elemento del espacio (4.6). Por tanto, podemos identificar cada elemento de H^1_{per} con un elemento en el conjunto (4.6). Recíprocamente, si f pertenece al conjunto (4.6), un argumento similar al dado en la demostración del Teorema 4.3 nos permite mostrar que f es límite de la secuencia $\{f_n\} \subset C^\infty_{per}([-\pi,\pi]) \subset C^1_{per}([-\pi,\pi])$ dada por $f_n = \sum_{k=-n}^{n} \Phi_k$.

Por tanto, abusando de la notación, podemos definir a H^1_{per} vía la identificación anterior como sigue

$$H^1_{per} = \big\{ f \in L^2([-\pi,\pi]) : \{\langle k\rangle \widehat{f}(k)\} \in l^2(\mathbb{Z}) \big\}. \tag{4.7}$$

Por lo anterior tenemos que

$$f \in H^1_{per} \text{ si y solos si } \widehat{f} \in l^2(\mathbb{Z}) \text{ y } \{ik\widehat{f}(k)\} \in l^2(\mathbb{Z}).$$

Por lo que formalmente, esperamos que la función $v = \{ik\widehat{f}(k)\}^\vee$ defina un tipo de derivada para f. Para esto, necesitamos la siguiente definición.

Definición 4.6. *Dados $f \in L^2([-\pi,\pi])$ y $l \in \mathbb{Z}^+$, diremos que f tiene derivada débil en L^2 de orden l, si existen funciones $v_1, v_2, \dots, v_l \in L^2([-\pi,\pi])$ tales que*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\phi^{(l)}(x)\,dx = (-1)^l \int_{-\pi}^{\pi} v_l(x)\phi(x)\,dx,$$

para toda función $\phi \in C^\infty_{per}([-\pi,\pi])$. En este caso, denotamos $f^{(l)} = \frac{d^l f}{dx^l} = v_l$. Cuando $l = 1$, se dice que f tiene derivada débil en L^2.

Observación 4.7. *Se puede demostrar que si $f \in L^2([-\pi,\pi])$ las derivadas débiles son únicas módulo conjuntos de medida nula.*

Ejemplo 4.8. *i) La derivada débil no se comporta bien con "saltos". Más precisamente, considere*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \in [-\pi, 0], \\ 1, & si\ x \in (0,\pi). \end{cases}$$

Entonces se puede mostrar que $f \in L^2([-\pi,\pi])$ no tiene derivada débil.

ii) La derivada débil se comporta bien con respecto a "esquinas". Considere $g(x) = |x| \in L^2([-\pi,\pi])$. Sea $\phi \in C^\infty_{per}([-\pi,\pi])$, integrando por partes deducimos

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |x|\phi'(x)\,dx &= \int_0^{\pi} x\phi'(x)\,dx - \int_{-\pi}^{0} x\phi'(x)\,dx \\
&= x\phi(x)\Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi}\phi(x)\,dx - x\phi(x)\Big|_{x=-\pi}^{x=0} + \int_{-\pi}^{0}\phi(x)\,dx \\
&= -\Big(\int_0^{\pi}\phi(x)\,dx - \int_{-\pi}^{0}\phi(x)\,dx\Big) \\
&= -\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\phi(x)\,dx,
\end{aligned}$$

donde h

$$h(x) = \begin{cases} -1, & si\ x \in [-\pi, 0], \\ 1, & si\ x \in (0,\pi). \end{cases}$$

Puesto que $\phi \in C^{\infty}_{per}([-\pi,\pi])$ es arbitrario, tenemos que g tiene derivada débil y esta es igual a $h \in L^2([-\pi,\pi])$. Note que g no tiene derivadas débiles de segundo orden.

Podemos relacionar la derivada débil con el espacio H^1_{per} como sigue

Proposición 4.9. *El espacio H^1_{per} dado por (4.7) se identifica con el espacio*

$$\big\{f \in L^2([-\pi,\pi]) :\ f \text{ tiene derivada débil en } L^2\big\}.$$

Demostración. Si $f \in H^1_{per}$, entonces sea $v = (ik\widehat{f}(k))^{\vee} \in L^2([-\pi,\pi])$. Afirmamos que v es derivada débil de f. Sea $\phi \in C^{\infty}_{per}([-\pi,\pi])$, puesto que f y v están en $L^2([-\pi,\pi])$, por el Teorema 4.3 podemos usar la identidad de Parseval para deducir

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\phi'(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{(\overline{\phi'(x)})}\,dx =& 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{\overline{\phi'}}(k)}\\
=& 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\widehat{\phi'}(-k)\\
=& 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)(-ik)\widehat{\phi}(-k)\\
=& -2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\big(ik\widehat{f}(k)\big)}_{\widehat{v}(k)}\widehat{\phi}(-k)\\
=& -\int_{-\pi}^{\pi} v(x)\phi(x)\,dx,
\end{aligned}$$

donde usamos que $\widehat{\overline{\phi}}(k) = \overline{\widehat{\phi}(-k)}$. Por tanto, v es derivada débil de f.

Recíprocamente, sea $f \in L^2([-\pi,\pi])$ y $v \in L^2([-\pi,\pi])$ su derivada débil. Entonces, como $\Phi_k(x) = e^{ikx} \in C^{\infty}_{per}([-\pi,\pi])$ para cualquier entero k, por definición de derivada débil

$$\begin{aligned}
\widehat{v}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(x)e^{-ikx}\,dx = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{d}{dx}\big(e^{-ikx}\big)\,dx\\
=& \frac{ik}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx\\
=& ik\widehat{f}(k).
\end{aligned}$$

Luego $\{ik\widehat{f}(k)\} = \widehat{v} \in l^2(\mathbb{Z})$. Concluimos que $f \in H^1_{per}$. $\square$

Podemos razonar de manera similar para definir los espacios H^m_{per}, $m = 2, 3, \dots$ con norma $\|f\|_{H^m} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\Big(\sum_{l=0}^{m} \|f^{(l)}\|_2^2\Big)^{\frac{1}{2}}$. Sin embargo, con la transformada de Fourier podemos extender los espacios de Sobolev a cualquier $s \geq 0$.

Definición 4.10. *Sea $s \geq 0$. Definimos el espacio de Sobolev periódico de orden s como*

$$H^s_{per} = H^s_{per}([-\pi,\pi]) = \big\{f \in L^2([-\pi,\pi]) : \{\langle k\rangle^s \widehat{f}(k)\} \in l^2(\mathbb{Z})\big\}.$$

Le asignamos al espacio H^s_{per} el producto interno

$$(f|g)_{H^s}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\langle k\rangle^{2s}\widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}, \tag{4.8}$$

para $f,g\in H^s_{per}$, el cual induce la norma

$$\|f\|^2_{H^s}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\langle k\rangle^{2s}|\widehat{f}(k)|^2=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+|k|^2)^s|\widehat{f}(k)|^2. \tag{4.9}$$

Observación 4.11. *i) Con la teoría de distribuciones temperadas podemos extender los espacios de Sobolev a regularidades $s<0$, para esto vea el libro* [3]. *Resaltamos que cuando $s\geq 0$, $H^s_{per}\subset L^2([-\pi,\pi])$ lo que permite interpretar el espacio H^s_{per} como un espacio de funciones.*
ii) Se puede mostrar que $C^\infty_{per}([-\pi,\pi])\subset H^s_{per}$ para todo $s\geq 0$.

Antes de dar algunas propiedades de los espacios de Sobolev, estudiemos el producto de funciones en estos espacios. La idea es definir para cuales valores de $s\geq 0$, tenemos que si $f,g\in H^s_{per}$, entonces su producto $fg\in H^s_{per}$. Note que por la definición de la norma de los espacios H^s_{per} , se debe estudiar la transformada de Fourier del producto $\widehat{fg}$. Para motivar nuestro análisis, consideremos $f,g\in C^\infty_{per}([-\pi,\pi])$, para las cuales su producto nuevamente es una función suave periódica. Puesto que la transformada de Fourier de f y g convergen absoluta y uniformemente, tenemos que

$$\begin{aligned}\widehat{fg}(k)=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(fg)(x)e^{-ikx}\,dx\\ =&\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty<k_1,k_2<\infty}\widehat{f}(k_1)\widehat{g}(k_2)\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik_1x}e^{ik_2x}e^{-ikx}\,dx\\ =&\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty<k_1,k_2<\infty}\widehat{f}(k_1)\widehat{g}(k_2)\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik_1x}e^{-ix(k-k_2)}\,dx.\end{aligned}$$

Por la relación de ortogonalidad, vemos que la última integral es no nula cuando $k_1=k-k_2$, es decir, $k_2=k-k_1$. Luego concluimos

$$\widehat{fg}(k)=\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k_1)\widehat{g}(k-k_1). \tag{4.10}$$

Es decir, el coeficiente de Fourier del producto fg es la convolución[on de las series de Fourier de f y g. Esto motiva a estudiar las convoluciones en los espacios $l^r(\mathbb{Z})$.

Teorema 4.12 (Desigualdad de Young para convoluciones)**.** *Sean $1\leq p,q,r\leq\infty$ tales que $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1$. Considere $\alpha=\{\alpha_k\}\in l^p(\mathbb{Z})$, $\beta=\{\beta_k\}\in l^q(\mathbb{Z})$, entonces la convolución $\alpha*\beta=\{(\alpha*\beta)_k\}$ dada por*

$$(\alpha*\beta)_k=\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\alpha_{k_1}\beta_{k-k_1}$$

satisface que $\alpha*\beta\in l^r(\mathbb{Z})$ y se tiene que

$$\|\alpha*\beta\|_r\leq\|\alpha\|_{l^p}\|\beta\|_{l^q}.$$

En particular, siguiendo la notación anterior, vemos que (4.10) nos dice que si $f, g \in C^{\infty}_{per}([-\pi,\pi])$, entonces $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$.

Estamos en condiciones para demostrar algunas propiedades de los espacios de Sobolev H^s_{per}.

Teorema 4.13. *Sea $s \geq 0$.*

i) *H^s_{per} es un espacio de Hilbert con el producto interno (4.8). Además, se tiene que $C^{\infty}_{per}([-\pi,\pi])$ es denso en H^s_{per}.*

ii) *Si $s_1 \geq s \geq 0$, $H^{s_1}_{per} \hookrightarrow H^s_{per}$, esto es la inclusión $f \in H^{s_1}_{per} \mapsto f \in H^s_{per}$ es densa y continua. Más aún,*
$$\|f\|_{H^s} \leq \|f\|_{H^{s_1}}.$$

iii) *Si $s = 0$ el espacio H^s_{per} es isomorfo a $L^2([-\pi,\pi])$.*

iv) *Si $s = m$ con $m \in \mathbb{Z}^+$, entonces el espacio H^m_{per} es isomorfo al espacio*
$$\big\{f \in L^2([-\pi,\pi]) : \ f \text{ tiene derivada débil en } L^2 \text{ de orden } m\big\}.$$
La norma H^m_{per} dada por (4.9) es equivalente[4] *a la norma*
$$\|f\|_{2,m} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\Big(\sum_{l=0}^{m} \|f^{(l)}\|_2^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

v) *(Sobolev embedding) Suponga que $s > \frac{1}{2}$, entonces si $f \in H^s_{per}$ se tiene que $f \in C_{per}([-\pi,\pi])$ y $\widehat{f} \in l^1(\mathbb{Z})$. Más precisamente, la aplicación $f \in H^s_{per} \mapsto f \in C_{per}([-\pi,\pi])$ es continua y existe una constante universal $C > 0$ tal que*
$$\|f\|_{\infty} \leq \|\widehat{f}\|_1 \leq C\|f\|_{H^s}. \tag{4.11}$$
Más aún, el espacio H^s_{per} define una álgebra de Banach, esto es, existe $C > 0$ tal que para todo $f, g \in H^s_{per}$, se tiene que le producto $fg \in H^s_{per}$ y
$$\|fg\|_{H^s} \leq C\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s}.$$

vi) *(Sobolev embedding) Sea $k \in \mathbb{Z}^+$, $s > k + \frac{1}{2}$, entonces si $f \in H^s_{per}$ se tiene que $f \in C^k_{per}([-\pi,\pi])$. Más precisamente, la aplicación $f \in H^s_{per} \mapsto f \in C^k_{per}([-\pi,\pi])$ es continua, por lo que existe $C > 0$ tal que*
$$\sum_{l=0}^{k} \|f^{(l)}\|_{\infty} \leq C\|f\|_{H^s}.$$

Demostración. i) La demostración que H^s_{per} es un espacio de Hilbert se deja como ejercicio al lector. Para mostrar la densidad de $C^{\infty}_{per}([-\pi,\pi])$, sea $f \in H^s_{per}$ y definimos $f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx}$, para $n \geq 1$ entero. Luego $f_n \in C^{\infty}_{per}([-\pi,\pi])$ y para cada $|k| \leq n$, $\widehat{f_n}(k) = \widehat{f}(k)$. Esto implica
$$\|f - f_n\|^2_{H^s} = \sum_{|k| \geq n+1} \langle k\rangle^{2s} |\widehat{f}(k)|^2 \to 0,$$
cuando $n \to \infty$. Esto completa la demostración de i).

[4]Dos normas $\|\cdot\|_A$ y $\|\cdot\|_B$ de un espacio vectorial V son equivalentes si existen contantes $c_1, c_2 > 0$ tales que: $c_1\|x\|_B \leq \|x\|_A \leq c_2\|x\|_B$, para todo $x \in V$.

Para ii), si $s_1 \geq s$, entonces puesto que $\langle k\rangle^{2s} = (1+|k|^2)^s \leq (1+|k|^2)^{s_1} = \langle k\rangle^{2s_1}$, tenemos que si $f \in H^{s_1}_{per}$,

$$\|f\|^2_{H^{s_1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle k\rangle^{s_1} |\widehat{f}(k)|^2 \geq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle k\rangle^{s} |\widehat{f}(k)|^2 = \|f\|^2_{H^s}.$$

Esto implica que la inclusión entre $H^{s_1}_{per}$ y H^{s}_{per} es continua. Además, como $C^{\infty}_{per}([-\pi,\pi])$ es un subconjunto denso de $H^{s_1}_{per}$, la inclusión es densa.

iii) Es consecuencia del Teorema 4.3. iv) Sigue las ideas de la demostración de la Proposición 4.9.

v) Sea $f \in H^s_{per}$, $s > \frac{1}{2}$. Entonces afirmamos que $\{\widehat{f}(k)\} \in l^1(\mathbb{Z})$. En efecto, tomando $N \geq 1$ entero, por la desigualdad de Cauchy–Schwarz tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-N}^{N} |\widehat{f}(k)| &= \sum_{k=-N}^{N} \langle k\rangle^{-s}\langle k\rangle^{s} |\widehat{f}(k)| \\
&\leq \Big(\sum_{k=-N}^{N} \langle k\rangle^{-2s}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k=-N}^{N} \langle k\rangle^{2s} |\widehat{f}(k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle k\rangle^{-2s}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle k\rangle^{2s} |\widehat{f}(k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle k\rangle^{-2s}\Big)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

Dado que $\langle k\rangle^{-2s} = (1+|k|^2)^{-s}$, entonces la serie anterior converge si $2s > 1$, es decir, $s > \frac{1}{2}$. Tomando $N \to \infty$, llegamos a que $\{\widehat{f}(k)\} \in l^1(\mathbb{Z})$. Esto nos dice que la serie de Fourier $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}$ converge absoluta y uniformemente, pero como esta también converge a f en L^2, por unicidad del límite en L^2, tenemos que $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}$ (módulo un conjunto de medida nula). Por tanto, obtenemos que f se identifica con una función continua y por la estimativa previa

$$\begin{aligned}
|f(x)| = \Big|\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}\Big| &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| \\
&\leq \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle k\rangle^{-2s}\Big)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

Note que la desigualdad anterior es exactamente (4.11). Nos resta ver qué H^s_{per} es un álgebra de Banach. Sean $f, g \in H^s_{per}$ con $s > \frac{1}{2}$. Primero, notamos que existe una constante $c_s > 0$ tal que para todo $k, k_1 \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}} \leq c_s\big((1+|k_1|^2)^{\frac{s}{2}} + (1+|k-k_1|^2)^{\frac{s}{2}}\big),$$

es decir,

$$\langle k\rangle^s \leq \langle k_1\rangle^s + \langle k-k_1\rangle^s. \tag{4.12}$$

Como $\widehat{f}, \widehat{g} \in l^1(\mathbb{Z}) \cap l^2(\mathbb{Z})$, por la desigualdad de Young, Teorema 4.12, tenemos que $\widehat{f} * \widehat{g} \in l^2(\mathbb{Z})$, esto nos dice que el producto $fg = (\widehat{f} * \widehat{g})^{\vee}$ define una función en

$L^2([-\pi,\pi])$. Además, se tiene que $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$. Este resultado, (4.12) y la desigualdad de Young implican que existe una constante $C > 0$ para la cual

$$\begin{aligned}\|fg\|_{H^s} = \|\langle k\rangle^s (\widehat{f} * \widehat{g})(k)\|_2 &\leq \|\big(\langle \cdot \rangle^s \widehat{f}\big) * \widehat{g}\|_2 + \|f * \big(\langle \cdot \rangle^s \widehat{g}\big)\|_2 \\ &\leq \|\langle \cdot \rangle^s \widehat{f}\|_2 \|\widehat{g}\|_1 + \|\widehat{f}\|_1 \|\langle \cdot \rangle^s \widehat{g}\|_2 \\ &\leq C\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s},\end{aligned}$$

donde en la penúltima línea, hemos usado (4.11) para controlar la norma $l^1(\mathbb{Z})$ de $\widehat{f}$ y $\widehat{g}$. Esto completa la deducción de v).

Finalmente vi) se puede obtener de v) y un argumento inductivo.

□

5. Existencia de soluciones ecuación del calor no lineal periódica

En esta parte, estudiaremos la existencia de soluciones para la ecuación del calor no lineal en espacios de Sobolev. Consideremos el siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + uu_x = 0, & (x,t) \in (-\pi,\pi) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [-\pi,\pi], \end{cases} \tag{5.1}$$

donde u_0 es un dato inicial en algún espacio de Sobolev periódico. Procedamos formalmente, tomando la transformada de Fourier a la ecuación en (5.1) obtenemos

$$\begin{aligned}&\widehat{u}_t(k,t) + k^2\widehat{u}(k,t) = -\widehat{uu_x}(k,t) \\ &\quad\Longrightarrow \frac{d}{dt}(e^{k^2t}\widehat{u}(k,t)) = -e^{k^2t}\widehat{(uu_x)}(k,t) \\ &\quad\Longrightarrow e^{k^2t}\widehat{u}(k,t) - \widehat{u_0}(k) = -\int_0^t e^{k^2t'}\widehat{(uu_x)}(k,t')\,dt' \\ &\quad\Longrightarrow \widehat{u}(k,t) = e^{-k^2t}\widehat{u_0}(k) - \int_0^t e^{-k^2(t-t')}\widehat{(uu_x)}(k,t')\,dt'.\end{aligned}$$

Por tanto, tomando transformada de Fourier inversa, esperamos el siguiente candidato a solución

$$\begin{aligned}u(x,t) &= (e^{-k^2t}\widehat{u_0})^{\vee} - \int_0^t (e^{-k^2(t-t')}\widehat{(uu_x)})^{\vee}(x,t')\,dt' \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2t+ikx}\widehat{u_0}(k) - \int_0^t \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2(t-t')+ikx}\widehat{(uu_x)}(k,t')\,dt'.\end{aligned}$$

Recordando la notación introducida en (3.10), de la identidad anterior, llegamos a la *fórmula integral o fórmula de Duhamel*

$$u(t) = U(t)u_0 - \int_0^t U(t-t')uu_x(t')\,dt'. \tag{5.2}$$

Note que omitimos la dependencia de la variable espacial por simplicidad en la presentación. Nuevamente, la pregunta es ver cuando soluciones de la fórmula integral (5.2) nos dan soluciones de (5.1). Para esto veamos en qué sentido buscamos soluciones.

Definición 5.1. *Dado $s \geq 0$. Diremos que el problema (5.1) está localmente bien planteado en H^s_{per} si:*

- **(Existencia y unicidad)**. *Dado* $u_0 \in H^s_{per}$, *existe* $T > 0$ *y una única solución de la fórmula integral* (5.2) *con dato inicial* u_0 *en el espacio* $C([0,T]; H^s_{per})$.
- **(Dependencia continua)**. *Dado* $u_0 \in H^s_{per}$ *existe una vecindad* V *de* u_0 *en* H^s_{per} *y* $T > 0$ *tal que la aplicación dato inicial solución* $v_0 \in H^s_{per} \mapsto v \in C([0,T]; H^s_{per})$ *es continua.*

Recuerde que en la Subsección 3.3 definimos los espacios $C(I;X)$, donde I es un intervalo no vacío.

Observación 5.2. *En la definición de buena colocación anterior, estamos buscando soluciones de la fórmula integral* (5.2)*, no directamente de* (5.1)*. La razón es que en principio la formula integral no involucra el cálculo de derivadas de segundo orden como en la ecuación en* (5.1)*. Esto también se motiva de buscar soluciones en espacios de Sobolev, donde no siempre podemos calcular derivadas de manera explícita. Por ejemplo, suponga que queremos estudiar* (1.1) *solo en* $L^2([-\pi,\pi])$*, por lo que resulta más conveniente considerar* (5.2)*. No obstante en muchos casos ambas ecuaciones son equivalente.*

La idea es usar la ecuación (5.2) para encontrar soluciones como puntos fijos en un espacio de funciones adecuado. Veamos algunos preliminares.

Definición 5.3. *i) Una función* $\Psi : M \mapsto M$ *sobre un espacio métrico* (M,d) *se dice que es una* **contracción** *si existe* $0 < L < 1$ *tal que*

$$d(\Psi(x), \Psi(y)) \leq L\, d(x,y),$$

para todo $x, y \in M$.
ii) Un **punto fijo** *de una aplicación* $\Psi : M \to M$ *es un punto* $x \in M$ *tal que* $\Psi(x) = x$.

Teorema 5.4 (Teorema de punto fijo de Banach)**.** *Sea* (M,d) *un espacio métrico completo, entonces toda contracción tiene un único punto fijo.*

5.1. Buena planteamiento ecuación del calor no lineal. Demostremos buena colocación en el sentido de la Definición 5.1.

Teorema 5.5. *El problema de Cauchy* (5.1) *esta localmente bien planteado en* H^s_{per}, $s > \frac{1}{2}$*. Esto es, para cualquier* $u_0 \in H^s_{per}$*, existe un tiempo* $T > 0$ *y una única* $u \in C([0,T]; H^s_{per})$ *solución de la fórmula integral* (5.2) *con dato inicial* u_0*. Más aún, dado* $u_0 \in H^s_{per}$*, existe una vecindad* V *de* u_0 *en* H^s_{per} *y* $T > 0$ *tal que la aplicación* $v_0 \in V \to v \in C([0,T]; H^s_{per})$ *es continua.*

Demostración. Dividiremos la demostración en tres partes: existencia, unicidad y dependencia continua.

• **Existencia de soluciones**. Sea $u_0 \in H^s_{per}$ con $s > \frac{1}{2}$ arbitrario pero fijo. Veamos que existe una solución de (5.2) con dato inicial u_0. Si $u_0 = 0$ tomando $u = 0$ tenemos la existencia buscada, por lo que asumiremos que $u_0 \neq 0$, es decir, $\|u_0\|_{H^s} > 0$. Dados $T > 0$ y $a > 0$ fijos, definimos el espacio

$$X^s_T(a) = \big\{ v \in C([0,T]; H^s_{per}) : \sup_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_{H^s} \leq a \big\}. \tag{5.3}$$

Queda como ejercicio demostrar que $X^s_T(a)$ es un espacio métrico completo con la distancia
$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)-v(t)\|_{H^s},$$
para $u,v\in X^s_T$. Ahora, para $v\in X^s_T$ consideramos la función $\Phi(v)$ dada por
$$\Phi(v)(t)=U(t)u_0-\int_0^t U(t-t')vv_x(t')\,dt'.$$
De esta manera queremos ver que existen $T>0$, $a>0$ tales que Φ es una contracción en $X^s_T(a)$. Procedemos en las siguientes partes:

i) $\underline{\Phi(v)\in X^s_T(a)}$. Escribiendo $vv_x=\frac{1}{2}\partial_x(v^2)$ (por lo que su transformada de Fourier satisface $\widehat{vv_x}(k)=\frac{ik}{2}\widehat{v^2}(k)$) y utilizando la definición de la norma en H^s_{per} tenemos

$$\begin{aligned}\|\Phi(v)(t)\|_{H^s}\leq&\|U(t)u_0\|_{H^s}+\int_0^t \|U(t-t')vv_x(t')\|_{H^s}\,dt'\\ =&\|(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}e^{-k^2t}\widehat{u_0}(k)\|_2\\ &+\frac{1}{2}\int_0^t \|(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}e^{-k^2(t-t')}\,k\,\widehat{v^2}(k,t')\|_{L^2}\,dt'\\ \leq&\|u_0\|_{H^s}+\frac{1}{2}\int_0^t \|ke^{-k^2(t-t')}\|_\infty\|v^2(t')\|_{H^s}\,dt'.\end{aligned}\tag{5.4}$$

Para completar la estimativa del lado derecho anterior, primero controlemos la siguiente norma
$$\begin{aligned}\|ke^{-k^2(t-t')}\|_\infty=&\sup_{k\in\mathbb{Z}}||k|e^{-k^2(t-t')}|\\ \leq&|t-t'|^{-\frac{1}{2}}\sup_{k\in\mathbb{Z}}\Big||(t-t')^{\frac{1}{2}}k|e^{-|(t-t')^{\frac{1}{2}}k|^2}\Big|\\ \leq&2|t-t'|^{-\frac{1}{2}}\sup_{x\geq 0}\big||x|e^{-x^2}\big|\\ \leq&2c|t-t'|^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$
esto es válido para todo $0\leq t'<t$. Luego, volviendo a (5.4), usando la estimativa anterior y el hecho que H^s_{per} es una álgebra de Banach, se deduce

$$\begin{aligned}\|\Phi(v)(t)\|_{H^s}\leq&\|u_0\|_{H^s}+c\int_0^t |t-t'|^{-\frac{1}{2}}\|v(t')\|^2_{H^s}\,dt'\\ \leq&\|u_0\|_{H^s}+c\Big(\int_0^t |t-t'|^{-\frac{1}{2}}dt'\Big)\sup_{t\in[0,T]}\|v(t)\|^2_{H^s}\\ \leq&\|u_0\|_{H^s}+cT^{\frac{1}{2}}\sup_{t\in[0,T]}\|v(t)\|^2_{H^s},\end{aligned}\tag{5.5}$$

para alguna constante $c>0$. Concluimos
$$\sup_{t\in[0,T]}\|\Phi(v)(t)\|_{H^s}\leq\|u_0\|_{H^s}+cT^{\frac{1}{2}}\sup_{t\in[0,T]}\|v(t)\|^2_{H^s}.$$
Si queremos que $\Phi(v)\in X^s_T(a)$, debemos tener que
$$\|u_0\|_{H^s}+cT^{\frac{1}{2}}\sup_{t\in[0,T]}\|v(t)\|^2_{H^s}\leq\|u_0\|_{H^s}+cT^{\frac{1}{2}}a^2\leq a$$

Por lo que podemos escoger a a y T como sigue:

$$\begin{cases} a = 2\|u_0\|_{H^s}, \\ 0 < T < (4c\|u_0\|_{H^s})^{-2}. \end{cases} \tag{5.6}$$

Esto implica que $\sup_{t\in[0,T]} \|\Phi(v)\|_{H^s} \le a$. Además, se puede mostrar que $\Phi(v) \in C([0,T]; H^s_{per})$. Por tanto, $\Phi(v) \in X^s_T$.

ii) Φ define una contracción sobre $X^s_T(a)$. Sean a y T dados por (5.6), escribiendo $\partial_x(u^2) - \partial_x(v^2) = \partial_x\big((u-v)(u+v)\big)$, podemos seguir los mismos argumentos en (5.4) y (5.5) para deducir

$$\begin{aligned}
&\|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{H^s} \\
&\quad \le cT^{\frac{1}{2}} \sup_{t\in[0,T]} \big(\|u(t)-v(t)\|_{H^s}\|u(t)+v(t)\|_{H^s}\big) \\
&\quad \le cT^{\frac{1}{2}} \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)-v(t)\|_{H^s}\big(\sup_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_{H^s} + \sup_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_{H^s}\big) \\
&\quad \le (2ca)T^{\frac{1}{2}} \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)-v(t)\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

Por (5.6), haciendo $L := (2ca)T^{\frac{1}{2}}$ tenemos que $0 < L < 1$ y por lo anterior se concluye

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{H^s} \le L \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)-v(t)\|_{H^s}.$$

De esta manera, con $a > 0$ y $T > 0$ como en (5.6), por los resultados i) y ii) anteriores se concluye que Φ es una contracción sobre $X^s_T(a)$. Por lo tanto, por el teorema de punto fijo de Banach, Teorema 5.4, existe una única función $u \in X^s_T(a)$ con $u = \Phi(u)$, esto es,

$$u(x,t) = U(t)u_0 - \int_0^t U(t-t')uu_x(t')\,dt'.$$

Concluimos que u es una solución de la fórmula integral (5.2). Esto completa la deducción de existencia de soluciones.

Observación 5.6. *Aunque el Teorema 5.4 garantiza la existencia de un único punto fijo, esto ocurre en el espacio $X^s_T(a)$. Sin embargo, se debe establecer unicidad en el espacio $C([0,T]; H^s_{per})$ donde el tiempo T y la norma no necesariamente son las escogidas antes.*

• **Unicidad**. Sean $u, v \in C([0,T]; H^s_{per})$ soluciones de la ecuación integral (5.2). Sea $M > 0$ tal que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H^s} + \sup_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_{H^s} \le M.$$

Siguiendo un argumento similar a (5.4) y (5.5), deducimos que existe $c > 0$ (independiente de T, u, v, de hecho depende de la constante en (4.11)) tal que para $t \in [0, T_1]$ con $0 < T_1 \le T$ se sigue

$$\begin{aligned}
&\|u(t)-v(t)\|_{H^s} \\
&\quad \le cT_1^{\frac{1}{2}} \sup_{t\in[0,T_1]} \|u(t)-v(t)\|_{H^s}\big(\sup_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_{H^s} + \sup_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_{H^s}\big) \\
&\quad \le cMT_1^{\frac{1}{2}} \sup_{t\in[0,T_1]} \|u(t)-v(t)\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\sup_{t\in[0,T_1]}\|u(t)-v(t)\|_{H^s}\leq cMT_1^{\frac{1}{2}}\sup_{t\in[0,T_1]}\|u(t)-v(t)\|_{H^s}.$$

Si escogemos $T_1=\text{mín}\{T,\frac{1}{(2cM)^2}\}$, la desigualdad anterior implica

$$\sup_{t\in[0,T_1]}\|u(t)-v(t)\|_{H^s}\leq \frac{1}{2}\sup_{t\in[0,T_1]}\|u(t)-v(t)\|_{H^s}.$$

Lo cual es verdad si $u(t)=v(t)$ para todo $t\in[0,T_1]$. Si $T_1=T$ acabamos. Si $T_1<T$, note que como $c>0$ no depende de T, además M esta fijo y $u(T_1)=v(T_1)\in H^1_{per}$, tomando como dato inicial estos valores en T_1, podemos usar el mismo argumento anterior para deducir que $u(t)=v(t)$ para todo $t\in[T_1,\text{mín}\{T,2T_1\}]$ (en consecuencia son iguales en $[0,\text{mín}\{T,2T_1\}]$). Por tanto, podemos iterar el argumento descrito con pasos kT_1, $k\in\mathbb{Z}^+$, hasta que se deduzca unicidad en todo el intervalo $[0,T]$.

• **Dependencia continua**. Sea $u_0\in H^s_{per}$ y $\epsilon>0$ con $0<\epsilon<\|u_0\|_{H^1}$, si $\|u_0\|_{H^1}\neq 0$. Definimos

$$V=\{v_0\in H^s_{per}\,:\,\|v_0-u_0\|_{H^s}<\epsilon\}.$$

Se sigue qué $\|v_0\|_{H^s}\leq 2\|u_0\|_{H^s}$ cuando $u_0\neq 0$. Primero mostraremos que existe $T>0$ tal que para cualquier $v_0\in V$ existe una única $v\in C([0,T];H^s_{per})$ solución de (5.2) con dato inicial v_0, es decir, todo dato inicial en V genera una única solución que existe por lo menos hasta tiempo T. Con esto estamos mostrando que la aplicación dato inicial solución $v_0\in V\to v\in C([0,T];H^s_{per})$ está definida.

Recordando la constante $c>0$ en (5.5) podemos considerar

$$\begin{cases} a=2\,\text{máx}\{2\|u_0\|_{H^s},\epsilon\},\\ 0<T<\dfrac{1}{4}(2ca)^{-2}. \end{cases}\tag{5.7}$$

Fijando la constante a y el tiempo T anteriores, se sigue de la demostración de existencia hecha antes, que dado $v_0\in V$ la aplicación

$$\Phi_{v_0}(w)=U(t)v_0-\int_0^t U(t-t')ww_x(t')\,dt',$$

con $w\in X^s_T(a)$ dado por (5.3), es una contracción. Por tanto, existe una única $v\in C([0,T];H^s_{per})$ solución de (5.2) con dato inicial v_0. Como $v_0\in V$ es arbitrario. Se tiene que la función $v_0\in V\to v\in C([0,T];H^s_{per})$ está bien definida.

De manera más precisa, notamos que el argumento anterior muestra que $v_0\in V\to v\in X^s_T(a)\subset C([0,T];H^s_{per})$. Esto nos dice que si $u,v\in X^s_T$ son soluciones con datos inicial $u_0,v_0\in V$ respectivamente, adaptando lo hecho en (5.4) y (5.5) obtenemos

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)(t)-\Phi(v)(t)\|_{H^s}\leq&\|u_0-v_0\|_{H^s}+(2ca)T^{\frac{1}{2}}\sup_{t\in[0,T]}\|u(t)-v(t)\|_{H^s}\\ \leq&\|u_0-v_0\|_{H^s}+\frac{1}{2}\sup_{t\in[0,T]}\|u(t)-v(t)\|_{H^s},\end{aligned}$$

donde hemos usado que $(2ac)T^{\frac{1}{2}}\leq\frac{1}{2}$. Se sigue que

$$\|\Phi(u)(t)-\Phi(v)(t)\|_{H^s}\leq 2\|u_0-v_0\|_{H^s}.$$

Lo cual nos da la dependencia continua. □

Observación 5.7. *i) Puesto que $U(t)$ es un operador que regulariza, vea el Teorema 3.3, se puede mostrar que si $u \in C([0,T]; H^s_{per})$ soluciona la ecuación (5.2), entonces*

$$u \in C((0,T]; H^{s_1}_{per}),$$

para todo $s_1 > s$. Esto implica junto con vi) en el Teorema 4.13 que

$$u \in C((0,T]; C^\infty_{per}([-\pi,\pi])).$$

De lo cual se sigue que

$$u \in C^\infty([-\pi,\pi] \times (0,T])$$

y satisface la ecuación del calor no lineal $u_t - u_{xx} + uu_x = 0$. En este caso se concluye la equivalencia entre (5.1) y (5.2).

ii) Utilizado principios de existencia máximal de soluciones y la ganancia de regularidad, se puede mostrar que si $u \in C([0,T]; H^s_{per})$ es solución de la ecuación (5.2), entonces

$$u \in C([0,\infty); H^s_{per}).$$

Por lo que en este caso se dice que la solución es global *en tiempo o* globalmente bien planteada.

Referencias

[1] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.

[2] L. Grafakos. *Classical Fourier analysis*, volume 249 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, third edition, 2014.

[3] R. J. Iorio, Jr. and V. d. M. a. Iorio. *Fourier analysis and partial differential equations*, volume 70 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[4] R. Iório Júnior and V. d. M. a. Iório. *Equações diferenciais parciais: uma introdução*. Projeto Euclides. [Euclid Project]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, third edition, 2013.

[5] S. Kesavan. *Functional analysis*, volume 52 of *Texts and Readings in Mathematics*. Springer, Singapore; Hindustan Book Agency, New Delhi, second edition, [2023] ©2023.

[6] W. Rudin. *Functional analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, second edition, 1991.

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

Email address: ogrianoc@unal.edu.co