

# Apuntes de Análisis Armónico

Autor: Andrés David Cadena Simons

2 de abril de 2025



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Sede Bogotá

Departamento de Matemáticas

2029662 ANÁLISIS ARMÓNICO

Programa: Maestría en Ciencias Matemáticas

Créditos de la asignatura: 4

Profesor: Ricardo Pastrán. Edificio: 404. Oficina: 314. **Atención:** L y C: 16-17

Email: rapastranr@unal.edu.co

### DESCRIPCIÓN

Este curso ofrece una exploración profunda del análisis armónico, un área central en el análisis moderno con amplias aplicaciones en ecuaciones diferenciales parciales y teoría de números. El curso cubrirá tanto resultados clásicos como técnicas modernas, centrándose en el estudio de funciones y operadores a través del análisis de Fourier y herramientas relacionadas. Los estudiantes comenzarán repasando el operador transformada de Fourier, conceptos fundamentales que descomponen las funciones en sus componentes de frecuencia. A partir de ahí, el curso profundizará en temas avanzados como la teoría de Calderón-Zygmund, funciones maximales, integrales singulares, la teoría de Littlewood-Paley y aplicaciones a la teoría analítica de números y a las ecuaciones diferenciales parciales. El papel del análisis armónico en la comprensión de la regularidad y el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales también será un área clave de enfoque.

### OBJETIVOS

- Adquirir un dominio sólido de las técnicas clásicas y modernas del análisis armónico.
- Comprender y aplicar métodos avanzados de análisis armónico a diversos problemas matemáticos.
- Utilizar las herramientas que proporciona el análisis armónico en el estudio de las EDP.

### CONTENIDO

#### 1. Transformada de Fourier e Interpolación de Operadores.

- 1.1. Definición de la Transformada de Fourier
- 1.2. La transformada en espacios  $L^p$
- 1.3. Teoremas de Interpolación para operadores lineales

#### 2. Función Maximal de Hardy-Littlewood.

- 2.1. Aproximaciones de la identidad
- 2.2. Desigualdades tipo fuerte y tipo débil
- 2.3. Teorema de interpolación de Marcinkiewicz
- 2.4. La función maximal de Hardy-Littlewood

3. **Transformada de Hilbert.**
  - 3.1. El conjugado del núcleo de Poisson
  - 3.2. Los teoremas de Riesz y Kolmogorov
  - 3.3. Integrales truncadas y convergencia puntual
  - 3.4. Multiplicadores
4. **Integrales singulares.**
  - 4.1. Definición de operadores integrales singulares
  - 4.2. El método de las rotaciones
  - 4.3. Integrales singulares con núcleo par
  - 4.4. Integrales singulares con núcleo variable
5. **Teorema de Calderón-Zygmund y generalizaciones.**
  - 5.1. El teorema de Calderón-Zygmund
  - 5.2. Integrales truncadas y el valor principal
  - 5.3. Operadores generalizados de Calderón-Zygmund
  - 5.4. Integrales singulares de Calderón-Zygmund
6. **Propiedades de diferenciabilidad en términos de espacios de funciones.**
  - 6.1. Potenciales de Riesz
  - 6.2. Espacios de Sobolev
  - 6.3. Potenciales de Bessel
  - 6.4. Los espacios de funciones continuas de Lipschitz
7. **Espacios  $H^1$  y  $BMO$ .**
  - 7.1. El espacio atómico  $H^1$
  - 7.2. El espacio  $BMO$
  - 7.3. Un resultado de interpolación
  - 7.4. La desigualdad John-Nirenberg
8. **Teoría de Littlewood-Paley y Multiplicadores.**
  - 8.1. Teoría de Littlewood-Paley
  - 8.2. Teorema del multiplicador de Hörmander
  - 8.3. Multiplicadores de Bochner-Riesz
  - 8.4. La función maximal y la transformada de Hilbert a lo largo de una parábola
9. **Aplicaciones a la Teoría Analítica de Números y a las Ecuaciones Diferenciales Parciales** (Por ejemplo: teoremas de restricción y estimativas de Strichartz).

## REFERENCIAS

1. J. DUOANDIKOETXEA, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, 29, AMS 2001.
2. E. M. STEIN, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, 1970.
3. E. M. STEIN y G. WEISS, *Fourier Analysis on Euclidean spaces*, Princeton University Press, 1971.
4. E. M. STEIN, *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, 1993.

5. C. MUSCALU y W. SCHLAG, *Classical and multilinear harmonic analysis*, Vol. I. Cambridge University Press, 2013.
6. L. GRAFAKOS, *Classical Fourier Analysis*, Tercera edición, Grad. Text in Math., 269, Springer, 2014.

### CALIFICACIÓN

Dos exámenes parciales valiendo cada uno el 25% de la nota. Otro 25% se obtendrá de talleres. El 25% restante se obtendrá de un trabajo investigativo desarrollado por el estudiante a lo largo del semestre que abarque o use algunos de los temas del curso. El primer examen parcial se realizará el día miércoles 28 de mayo y el segundo examen parcial el día miércoles 23 de julio.

# Índice general

<b>1. Transformada de Fourier e Interpolación de Operadores.</b>	<b>7</b>
1.1. Transformada de Fourier. . . . .	7
1.2. La transformada de Fourier en $L^p(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	8



# Capítulo 1

## Transformada de Fourier e Interpolación de Operadores.

### 1.1. Transformada de Fourier.

Insertar historia de la transformada de Fourier (1807) y la vida de Fourier (1768-1830).

Todo esto inspirado en la ecuación del calor

$$\begin{cases} \partial_t U = \partial_x^2 u, & \text{con } (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & \text{para todo } t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x) & f(0) = f(\pi) = 0. \end{cases}$$

Fourier se inspira en buscar una solución de la forma separación de variables

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Esto motiva a pensar en qué condiciones tiene que cumplir una función  $f$  periódica de periodo  $2\pi$  para poderla escribir como combinación lineal de funciones trigonométricas, es decir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

Por cuestiones de facilidad en la escritura vamos a pensar el problema en funciones de periodo 1, para esto recordemos que

$$e^{ixk} = \cos(kx) + i \sin(kx),$$

luego podemos reescribir la expresión anterior de la forma

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i x k}$$

donde

$$c_k = \widehat{f}(k) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i x k} dx, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

El restante de teoría de Fourier se deja como lectura o motivante para entrar al curso de Series de Fourier.

## 1.2. La transformada de Fourier en $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

### Definición 1.2.1: Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$

Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , llamaremos la transformada de Fourier de  $f$  a  $\widehat{f}$  definida por

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \quad (1.1)$$

donde  $\xi \in \mathbb{R}^n$  y  $x \cdot \xi$  es el producto punto entre  $x$  y  $\xi$ .

### Nota 1.2.1:

Veamos que  $\widehat{f}$  tiene sentido como integral.  
Para ver esto note que

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi)| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right|, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi}| dx, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx, \\ &\leq \|f\|_1. \end{aligned}$$

luego se puede ver que

$$\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1 < \infty.$$

Lo que nos permite definir la transformada de Fourier como un operador  $\widehat{\cdot} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ .

Veamos el comportamiento de la transformada de Fourier anteriormente definida.

### Teorema 1.2.1:

Sean  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , entonces se satisface que

1.  $\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$ .
2. Si  $\tau_h f(x) = f(x - h)$  con  $h \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_h f}(\xi) &= e^{-2\pi i h \cdot \xi} \widehat{f}(\xi), \\ \tau_h \widehat{f}(\xi) &= \widehat{e^{2\pi i h \cdot x} f(x)}. \end{aligned}$$

3.  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es transformación lineal invertible y  $S = (T^{-1})^t = (T^t)^{-1}$ , entonces

$$\widehat{f \circ T} = |\det(T)|^{-1} (\widehat{f} \circ S).$$



En particular, si  $T$  es una rotación

$$\widehat{f \circ T} = \widehat{f} \circ T.$$

Si  $T$  es dilatación (o contracción)  $Tx = rx$ , entonces

$$\widehat{f \circ T}(\xi) = \frac{1}{r^n} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{r}\right).$$

4. Si  $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , para  $|\alpha| \leq k$  entonces  $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$  y  $\partial^\alpha \widehat{f} = \widehat{(-2\pi i x)^\alpha f}$ .



# Bibliografía