Ecuación del calor: Teorema 1

Andrés David Cadena Simons
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

1 de agosto del 2024

Contenido

Plan

1. Teorema.

2. Demostración.

3. Bibliografía

Teorema

Asuma que $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y sea u definida por:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (\Phi(\cdot,t) * g)(x), \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)dy, \end{aligned}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$. Entonces:

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$,
2. $u_t - \Delta u = 0$ para $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$,
3. $\lim\limits_{(x,t)\to(x^0,0), x\in\mathbb{R}^n, t>0} u(x,t) = g(x^0)$ para cada punto $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Evans (1998).

Plan

Demostración

$u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.

Sabemos que respecto a la variable x se tiene que:

$$\partial_{x_i} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = -\frac{x_i}{2t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

y a su vez, utilizando un argumento inductivo podemos verificar que en general:

$$\partial^\alpha e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{p(x,t)}{(2t)^{|\alpha|}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

con α multi-índice y p es un polinomio de grado $|\alpha|$.

Además, sabemos que respecto a t se cumple que:

$$\partial_t e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{|x|^2}{4t^2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

y a su vez, usando la regla del producto de las derivadas y un argumento inductivo se puede verificar que en general:

$$\partial_t^k e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{q(x,t)}{(2t)^{2k}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

con $k \in \mathbb{N}$ y q polinomio.

Ahora, utilizando esto, podemos ver que si derivamos $e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ respecto a (x,t), dado cualquier multi-índice β, existen un polinomio p no nulo y $m \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$\partial^\beta e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{p(x,t)}{(2t)^m} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

al ser $\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ con todas sus derivadas acotadas, entonces sabemos que u y $\left(\partial^\beta \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}(\cdot,t) * g\right)(x)$ se encuentran bien definidas.

Ahora veamos que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, es decir, veamos que $\partial^\beta \left(\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}(\cdot,t) * g \right)(x) = \left(\partial^\beta \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}(\cdot,t) * g \right)(x)$.
Para esto como sabemos que dado β multi-índice se cumple que:

$$\partial^\beta e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{p(x,t)}{(2t)^m} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

luego usando la regla del producto podemos fijarnos que solamente será necesario ver que se cumple para las primeras derivadas respecto a x y t.

Veamos el caso para x_j.
Dados $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, note que:

$$\left| \frac{e^{-\frac{|x+h\epsilon_j - y|^2}{4t}} - e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{h} \right| \leq \frac{\left| e^{-\frac{(x-y+h\epsilon_j)\cdot(x-y+h\epsilon_j)}{4t}} - e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \right|}{|h|},$$

$$\leq \frac{\left| e^{-\frac{|x-y|^2 + 2(h\epsilon_j)\cdot(x-y) + |h\epsilon_j|^2}{4t}} - e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \right|}{|h|},$$

$$\leq \frac{\left| e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \left(e^{-\frac{2(h\epsilon_j)\cdot(x-y) + |h\epsilon_j|^2}{4t}} - 1 \right) \right|}{|h|},$$

Ahora veamos que $f(y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned}
\|f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(-2|x-y| - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{|x-y|^2+(1/2)|x-y|+1/8}{4t}} \right| dy, \\
&\leq \int_{|x-y|\leq 1} \left| \left(-2|x-y| - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{|x-y|^2+(1/2)|x-y|+1/8}{4t}} \right| dy, \\
&+ \int_{|x-y|>1} \left| \left(-2|x-y| - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{|x-y|^2+(1/2)|x-y|+1/8}{4t}} \right| dy, \\
&\leq I + J
\end{aligned}$$

Veamos que I converge:

$$\begin{aligned} I &\leq \int_{|x-y|\leq 1} \left| \left(-2|x-y| - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{|x-y|^2+(1/2)|x-y|+1/8}{4t}} \right| dy, \\ &\leq \int_{|x-y|\leq 1} \left| \left(-2 - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{1+1/2+1/8}{4t}} \right| dy, \\ &\leq C, \end{aligned}$$

Ahora veamos que J converge.
Para esto veamos que si $|x-y|>1$, entonces:

$$\frac{|x-y|}{2} \leq \frac{|x-y|^2}{2} \leq |x-y|^2,$$
$$-|x-y| \geq -|x-y|^2 - \frac{1}{2}|x-y|,$$

por lo que es válido decir que:

$$\begin{aligned} J &\leq \int_{|x-y|>1} \left| \left(-2|x-y| - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{|x-y|^2+(1/2)|x-y|+1/8}{4t}} \right| dy, \\ &\leq \int_{|x-y|>1} \left| \left(-2|x-y| - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{|x-y|+1/8}{4t}} \right| dy, \\ &\leq C, \end{aligned}$$

Por lo que usando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue podemos afirmar que dado $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ se satisface que:

$$\begin{aligned} \partial_{x_j} u(x,t) &= \partial_{x_j} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) g(y) dy, \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_j} \Phi(x-y,t) g(y) dy, \\ &= (\partial_{x_j} \Phi(\cdot, t) * g)(x,t), \end{aligned}$$

Ahora veamos el caso para la primera derivada respecto a t.
Dados $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, note que por desigualdad del valor medio:

$$\left| \frac{\frac{1}{(t+h)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t+h)}} - \frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{h} \right| \leq \left| \frac{\left(\frac{-2n(t+h^*)+|x-y|^2}{4(t+h^*)^{n/2+2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t+h^*)}} \right) h}{h} \right|,$$

Luego, suponga $h \leq k$, entonces como $0 \leq h^* \leq h$ se cumple que:

$$\left| \frac{\frac{1}{(t+h)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t+h)}} - \frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{h} \right| \leq \left| \frac{-2n(t+h^*) + |x-y|^2}{4(t+h^*)^{n/2+2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t+h^*)}} \right|,$$

$$\leq \left| \frac{2n(t+k) + |x-y|^2}{4(t)^{n/2+2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t+k)}} \right| = f(y),$$

luego $f(y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, por lo que usando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se tiene que dado $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ se cumple que:

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)g(y)dy, \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t \Phi(x-y,t)g(y)dy, \\ &= (\partial_t \Phi(\cdot,t) * g)(x,t), \end{aligned}$$

por lo que quedaría demostrado que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.

♥

$$u_t - \Delta u = 0 \text{ para } x \in \mathbb{R}^n \text{ y } t > 0.$$

Para esto veamos que Φ satisface la ecuación del calor.

Note que:

$$\partial^2_{x_i} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{-|x|^2}{4t}} = -\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}(2t)} \left(1 - \frac{x_i^2}{2t}\right) e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

$$\partial_t \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = -\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}(2t)} \left(n - \frac{|x|^2}{2t}\right) e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

luego:

$$\begin{aligned}\Phi_t - \Delta\Phi &= -\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}(2t)}\left(n - \frac{|x|^2}{2t}\right)e^{-\frac{|x|^2}{4t}},\\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}(2t)}\left(1 - \frac{x_i^2}{2t}\right)e^{-\frac{|x|^2}{4t}}),\\ &= 0,\end{aligned}$$

Ahora note que:

$$\begin{aligned}u_t - \Delta u &= \int_{\mathbb{R}^n}(\Phi_t - \Delta\Phi)(x-y,t)g(y)dy,\\ &= 0,\end{aligned}$$

ya que Φ soluciona la ecuación del calor.

$$\lim_{(x,t)\to(x^0,0),x\in\mathbb{R}^n,t>0} u(x,t) = g(x^0) \text{ para cada punto } x^0 \in \mathbb{R}^n.$$

Para esto primero veamos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)dx = 1,$$

para todo $t > 0$.

Para ver esto note que:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx, \\
&= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz, \\
&= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_1^2 - z_2^2 - \cdots - z_n^2} dz_1 dz_2 \cdots dz_n, \\
&= \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_i} dz_i, \\
&= \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^{n} \pi^{1/2} = 1,
\end{aligned}
$$

Dado $x^0 \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$, escoja $\delta > 0$ tal que:

$$|g(y) - g(x^0)| < \epsilon \qquad \text{si } |y - x^0| < \delta, y \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces si nosotros tomamos $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}$, nosotros tenemos que:

$$
\begin{aligned}
|u(x,t) - g(x^0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) g(y) dy - g(x^0) \right|, \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) g(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) g(x^0) dy \right|, \\
&\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)(g(y) - g(x^0)) dy \right|, \\
&= \left| \int_{B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t)(g(y) - g(x^0)) dy \right|, \\
&\quad + \left| \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t)(g(y) - g(x^0)) dy \right|, \\
&= |I| + |J|,
\end{aligned}
$$

note que:

$$\begin{aligned}
|I| &\leq \left| \int_{B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t)(g(y)-g(x^0))dy \right|, \\
&\leq \int_{B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t)|g(y)-g(x^0)|dy, \\
&\leq \epsilon \int_{B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t)dy, \\
&\leq \epsilon,
\end{aligned}$$

por otro lado, si $|x-y| \geq \delta$, entonces:

$$\begin{aligned}
|y-x^0| &\leq |y-x| + |x-x^0|, \\
&\leq |y-x| + \frac{\delta}{2}, \\
&\leq |y-x| + \frac{1}{2}|y-x^0|, \\
\frac{1}{2}|y-x^0| &\leq |y-x|,
\end{aligned}$$

consecuentemente:

$$
\begin{aligned}
|J| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t)(g(y)-g(x^0))dy \right|, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t)|g(y)-g(x^0)|dy, \\
&\leq 2\|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t)dy, \\
&\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0,\delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy, \\
&\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0,\delta)} e^{-\frac{|y-x^0|^2}{16t}} dy, \\
&\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{-r^2}{16t}} r^{n-1} dr,
\end{aligned}
$$

ahora, suponga $u = \frac{r^2}{16t}$, luego:

$$
\begin{aligned}
|J| &\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{-r^2}{16t}} r^{n-1} dr, \\
&\leq \int_{\frac{\delta^2}{16t}}^{\infty} \frac{(4\sqrt{u}\sqrt{t})^{n-1} 8t}{\sqrt{t}^n (4\sqrt{u}\sqrt{t})} e^{-u} du, \\
&\leq \int_{\frac{\delta^2}{16t}}^{\infty} 8(4\sqrt{u})^{n-2} e^{-u} du,
\end{aligned}
$$

La cual cuando $t \to 0^+$, $\frac{\delta^2}{16t} \to \infty$ y por ende la integral tiende a 0.

Por consecuente es posible afirmar que:

$$\begin{aligned} |u(x,t) - g(x^0)| &\leq |I| + |J|, \\ &\leq \epsilon, \end{aligned}$$

Cuando $t \to 0^+$, es decir, $\lim_{(x,t)\to(x^0,0), x\in\mathbb{R}^n, t>0} u(x,t) = g(x^0)$ para cada punto $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Plan

Bibliografía. I

Evans, Lawrence C. 1998. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, V. 19 GSM/19. American Mathematical Society.

Gracias por la atención

Tablero