UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Análisis Funcional

Taller 1: Espacios vectoriales normados

(I-2025)

Profesor: Oscar Guillermo Riaño Castañeda

Integrantes: Andrés David Cadena Simons Jairo Sebastián Niño Castro Iván Felipe Salamanca Medina

Fecha: 03 de Junio del 2025

Ejercicio 1.

(I) Sea $\mathbb{R}$ con la σ-álgebra de Borel.

(a) Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, considere δ_{x_0} la medida de Dirac centrada en x_0 dada por: $\delta_{x_0}(A) = 1$ si $x_0 \in A$ y $\delta_{x_0}(A) = 0$ si $x_0 \notin A$ para cada $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Muestre que x_0 es una medida.

(b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible. Muestre que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta_{x_0} = f(x_0).$$

(c) De un ejemplo de una función que sea integrable con la medida δ_{x_0} para algún $x_0 \in \mathbb{R}$ pero que no sea integrable con la medida de Lebesgue.

(II) Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ con la σ-álgebra $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(a) Considere la medida contadora μ dada por $\mu(A) :=$ cardinal(A) si A es finito y $\mu(A) = \infty$ si A es infinito, para cada $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Muestre que μ es una medida.

(b) Dada $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función medible, es decir, f es una sucesión $f = \{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ para algunos $a_j \in \mathbb{R}$. Muestre que si f es integrable (es decir, $\int_{\mathbb{N}} |f|\, d\mu < \infty$), entonces

$$\int_{\mathbb{N}} f\, dx = \sum_{j=1}^{\infty} a_j.$$

(I)

Demostración. (a) Veamos que δ_{x_0} es una medida.

Note que $\delta_{x_0}(\emptyset) = 0$ ya que $x_0 \notin \emptyset$ por definición del conjunto $\emptyset$.

Por otro lado, veamos que si tomamos una unión numerable de conjuntos disjuntos y le calculamos su medida, esto va a ser igual que la suma de la medida de cada conjunto, es decir, dados $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ conjuntos disjuntos se satisface que

$$\delta_{x_0}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{x_0}(A_n), \quad \text{para toda familia numerable de conjuntos disjuntos.}$$

Esto ya que si $\delta_{x_0}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n)\right) = 0$, significa que $x_0 \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n)$, en particular, $x_0 \notin A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego es válido afirmar que

$$\begin{aligned}\delta_{x_0}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n)\right) &= 0,\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{x_0}(A_n).\end{aligned}$$

Por otra parte, si $\delta_{x_0}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n)\right) = 1$, entonces $x_0 \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n)$, pero como la familia de conjuntos $\{A_n\}$ es disjunta 2 a 2, entonces podemos afirmar que existe un único $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \in A_N$ y $x_0 \notin n$ para todo $n \neq N$, es decir que $\delta_{x_0}(A_N) = 1$ y $\delta_{x_0}(A_n) = 0$ para todo $n \neq N$, luego

$$\begin{aligned}\delta_{x_0}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n)\right) &= 1,\\ &= \delta_{x_0}(A_N),\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{x_0}(A_n).\end{aligned}$$

lo que nos permite afirmar que $\delta_{x_0} : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ es una medida.

(b) Veamos que dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función medible se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)d\delta_{x_0} = f(x_0).$$

Usaremos funciones simples para demostrar el resultado para funciones simples positivas, luego usaremos la densidad de las funciones simples positivas en las funciones medibles no negativas para extender este resultado a las funciones medibles no negativas y por último esto nos servirá para concluir el resultado a cualquier función medible.
Sea $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}(x)$, donde $a_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, además

$$\chi_{A_i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A_i,\\ 0, & \text{si } x \notin A_i\end{cases}$$

para todo $i = 1, \cdots, n$. Además, podemos suponer que los conjuntos sobre los cuales se definen las funciones características son disjuntos 2 a 2, es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.
Note que,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\delta_{x_0} &= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}(x)\right) d\delta_{x_0},\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{x_0}(A_i),\end{aligned}$$

no obstante, como en un principio asumimos que la familia numerable de conjuntos $\{A_i\}$ son disyuntos, entonces x_0 solo puede pertenecer a uno de los A_i, sin pérdida de generalidad suponga que $x_0 \in A_I$ (caso contrario $x \notin \bigcup_{i=1}^{n}(A_i)$ y por ende $f(x_0) = 0$ lo que concluye el resultado), entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\delta_{x_0} &= \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{x_0}(A_i),\\ &= a_I,\\ &= f(x_0).\end{aligned}$$

Lo que nos permite afirmar el resultado para funciones simples positivas, ahora veamos que esto se repite para funciones simples no negativas.
Tomemos $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ una función medible no negativa.
Entonces, como las funciones simples no negativas se pueden aproximar por funciones simples positivas, sabemos que existe una sucesión monótona de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ simples positivas tales que

$$0 \leq f_1(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \cdots \leq f(x) \text{ y } \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego como cada f_n es simple positiva, es medible y por ende usando el teorema de la convergencia monótona podemos afirmar que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\delta_{x_0} &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, d\delta_{x_0},\\ &= \lim_{n\to\infty} f_n(x_0),\\ &= f(x_0),\end{aligned}$$

por lo que podemos afirmar el resultado para funciones medibles no negativas.
Ahora usemos que las funciones medibles se pueden reescribir como suma de funciones medibles no negativas, sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible, vamos a particionar a f como su parte no negativa (f^+) y su parte negativa (f^-) de forma que $f = f^+ - f^-$. Luego,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\delta_{x_0} = \int_{\mathbb{R}} f^+(x)\, d\delta_{x_0} + \int_{\mathbb{R}} -f^-(x)\, d\delta_{x_0}.$$

Pero como el resultado vale para funciones medibles no negativas se puede afirmar que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\delta_{x_0} &= f^+(x_0) + -f^-(x_0),\\ &= f(x_0).\end{aligned}$$

Lo que concluye el teorema.

(c) Sea $f(x) = |x|$ y $x_0 = 0$.
Sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}} |x|\, dx = \infty.$$

pero note que

$$\int_{\mathbb{R}} |x| \, d\delta_0 = |0| = 0.$$

por lo cual podemos afirmar que $|x|$ no es integrable respecto a Lebesgue, pero si respecto a la medida de Dirac centrada en 0.

□

(II)

Demostración. (a) Veamos que μ es medida.

Note que si tomamos $\emptyset \in P(\mathbb{N})$ como $\mathrm{cardinal}(\emptyset) = 0$, entonces $\mu(\emptyset) = 0$. Por otro lado, veamos que dados $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ conjuntos disjuntos 2 a 2 se satisface que

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n\right).$$

Esto ya que, si suponemos que $\mathrm{cardinal}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n)\right) = n < \infty$, entonces podemos afirmar que todos los conjuntos A_n son finitos, pues $\mathrm{cardinal}\left(A_n\right) \leq \mathrm{cardinal}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n)\right)$, además, sabemos que los conjuntos A_n con cardinal distinto a 0 deben de ser finitos, de lo contrario $\mathrm{cardinal}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n)\right) = \infty$, por lo que podemos asumir que para cierta selección de n_j se tiene que usando el principio de inclusión-exclusión y que la familia de conjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es disjunta 2 a 2 se cumple que

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n)\right) &= \mathrm{cardinal}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n)\right), \\
&= \mathrm{cardinal}\left(\bigcup_{n_j=0}^{m}(A_{n_j})\right), \\
&= \sum_{n_j} \mathrm{cardinal}\left(A_{n_j}\right), \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cardinal}\left(A_n\right), \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).
\end{aligned}$$

Caso contrario, si $\mathrm{cardinal}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n)\right) = \infty$, entonces sabemos que existe al menos un A_I tal que $\mathrm{cardinal}(A_I) = \infty$ o que existe una subcolección $\{A_{n_j}\}_{n_j\in\mathbb{N}} \subset \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para todo n_j se satisface que $\mathrm{cardinal}\left(A_{n_j}\right) \leq 1$, supongamos que $A_I \notin \{A_{n_j}\}_{n_j\in\mathbb{N}}$, por lo que podemos afirmar en ambos casos que

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n)\right) &= \mathtt{cardinal}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n)\right),\\
&= \infty,\\
&= \sum_{n_j\in\mathbb{N}} \mathtt{cardinal}\left(A_{n_j}\right) + A_I,\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathtt{cardinal}\left(A_n\right),\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).
\end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir que μ es una medida.

(b) Vemos que si f es integrable, entonces

$$\int_{\mathbb{N}} f\,dx = \sum_{j=1}^{\infty} a_j.$$

Para esto, usaremos un argumento similar al numeral anterior, demostraremos el resultado para funciones simples positivas, este se podrá extender a las funciones medibles no negativas por densidad y el teorema de la convergencia monótona para en el final descomponer a la f como suma de 2 funciones medibles no negativas, por lo que se demostrará para funciones positivas y se procederá con la descomposición con el fin de no aburrir al profesor.
Suponga f función simple medible y positiva, es decir que existen $a_i \in \mathbb{R}$ tales que $a_i > 0$ y además tomemos la colección de conjuntos A_i medibles como conjuntos unitarios, luego $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}(x)$, luego

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}} f\,dx &= \int_{\mathbb{N}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}(x)\right)\,dx,\\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i),\\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i.
\end{aligned}$$

Lo que demuestra que el resultado se cumple para funciones medibles simples y positivas, luego por densidad este resultado se puede extender a funciones medibles no negativas.
Siendo así, suponga f función medible, note que como lo hicimos anterior-

mente podemos descomponer a f como $f = f^+ + (-f^-)$, luego

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}} f\,dx &= \int_{\mathbb{N}} f^+ + (-f^-)\,dx,\\ &= \int_{\mathbb{N}} f^+\,dx + \int_{\mathbb{N}} (-f^-)\,dx,\\ &= \sum_{i^+=1}^{n} a_{i^+} + \sum_{i^-=1}^{n} a_{i^-},\\ &= \sum_{i=1}^{m} a_i.\end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir el ejercicio.

□

Ejercicio 3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Vamos a seguir la prueba como en el libro de Haim Brezis. Veamos dos casos

- **Caso 1:** Si $p = \infty$, sea (f_j) una sucesión de Cauchy en $L^\infty(\Omega)$. Por definición, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}^+$ y un conjunto E_ϵ con $\mu(E_\epsilon) = 0$ (μ es la medida de Lebesgue), tal que si $j, m \geq N$, entonces

$$\|f_j - f_m\|_\infty = \sup_{x \in \Omega \setminus E_\epsilon} |f_j(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

En particular, para todo $k \in \mathbb{Z}^+$ existe N_k y E_k con $\mu(E_k) = 0$ tal que si $j, m \geq N_k$, entonces

$$\|f_j - f_m\|_\infty = \sup_{x \in \Omega \setminus E_k} |f_j(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}.$$

Sea $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, por tanto

$$\mu(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) = 0,$$

por tanto $\mu(E) = 0$ y, además, la sucesión $(f_j(x))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ para todo $x \in \Omega \setminus E$, de manera que $f_j(x) \to f(x)$, con $f(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \Omega \setminus E$. Sea $x \in \Omega \setminus E$ cualquiera y $j \geq N_{2k}$. Sea $m \geq j$, suficientemente grande para que $|f(x) - f_m(x)| < \frac{1}{2k}$, entonces

$$|f(x) - f_j(x)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_j(x)| < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k},$$

como x es arbitrario, concluimos que $|f(x) - f_j(x)| < \dfrac{1}{k}$, para todo $x \in \Omega \setminus E$, y como $\mu(E) = 0$, concluimos que $\|f - f_j\|_\infty < \dfrac{1}{k}$ para $j \geq N_k$, es decir, $f_j \to f$ en $L^\infty(\Omega)$.

- **Caso 2:** Si $1 \leq p < \infty$, sea (f_j) una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Para todo $\epsilon > 0$ existe $N_\epsilon > 0$ tal que si $j, m \geq N_\epsilon$, entonces $\|f_j - f_m\|_p < \epsilon$. Para $\epsilon = \dfrac{1}{2}$, existe $j_1 \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $m \geq j_1$, entonces

$$\|f_{j_1} - f_m\|_p < \frac{1}{2}.$$

Ahora, para $\epsilon = \dfrac{1}{4}$, existe $j_2 \in \mathbb{Z}^+$, con $j_2 > j_1$ tal que si $m \geq j_2$, entonces

$$\|f_{j_2} - f_m\|_p \leq \frac{1}{4},$$

en particular, $\|f_{j_1} - f_{j_2}\|_p < \dfrac{1}{2}$. Análogamente, para $\epsilon = \dfrac{1}{8}$, existe $j_3 \in \mathbb{Z}^+$ con $j_3 > j_2$ tal que si $m \geq j_3$, entonces

$$\|f_{j_3} - f_m\|_p < \frac{1}{8},$$

en particular $\|f_{j_2} - f_{j_3}\| < \dfrac{1}{4}$. Realizando un argumento inductivo, encontramos que para todo $k \in \mathbb{Z}^+$, existe una sucesión creciente de enteros positivos (j_k), tal que la subsucesión (f_{j_k}) cumple que

$$\left\|f_{j_k} - f_{j_{k+1}}\right\|_p < \frac{1}{2^k}.$$

Veamos que la subsucesión (f_{j_k}) converge en $L^p(\Omega)$. Dado $m \in \mathbb{Z}^+$ definimos

$$g_m(x) = \sum_{k=1}^{m} |f_{j_{k+1}}(x) - f_{j_k}(x)|,$$

entonces

$$\|g_m\|_p = \left\| \sum_{k=1}^{m} |f_{j_{k+1}} - f_{j_k}| \right\|_p \leq \sum_{k=1}^{m} \left\|f_{j_{k+1}} - f_{j_k}\right\|_p \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

además, si $m_1 \leq m_2$, entonces

$$g_{m_1}(x) = \sum_{k=1}^{m_1} |f_{j_{k+1}}(x) - f_{j_k}(x)| = \sum_{k=1}^{m_2} |f_{j_{k+1}}(x) - f_{j_k}(x)| = g_{m_2}(x),$$

es decir, g_{m_1} es una sucesión monótona creciente. Así, por el Teorema de la Convergencia Monótona, tenemos que

$$1 = 1^p \geq \lim_{m\to\infty} \|g_m\|_p^p = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega |g_m(x)|^p \, dx = \int_\Omega \lim_{m\to\infty} |g_m(x)|^p \, dx,$$

por tanto, $\lim_{m\to\infty} |g_m(x)| < \infty$ para casi todo $x \in \Omega$, es decir, $\lim_{m\to\infty} |g_m(x)| < \infty$ para todo $x \in \Omega \setminus E$, donde $\mu(E) = 0$, definimos

$$g(x) = \begin{cases} \lim_{m\to\infty} g_m(x), & \text{si } x \in \Omega \setminus E \\ 0, & \text{en otro caso .} \end{cases}$$

Por lo hecho anteriormente, $g \in L^p(\Omega)$ y $\|g\|_p \leq 1$, además, para $x \in \Omega \setminus E$, podemos escribir

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{j_{k+1}}(x) - f_{j_k}(x)|.$$

Sean $m, k \in \mathbb{Z}^+$ con $m \geq k \geq 2$, entonces existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $m = k + l$ y para $x \in \Omega \setminus E$

$$\begin{aligned} |f_{j_m}(x) - f_{j_k}(x)| &= |(f_{j_m}(x) - f_{j_{k+l-1}}(x)) + (f_{j_{k+l-1}}(x) - f_{j_{k+l-2}}(x)) + \cdots + (f_{j_{k+1}}(x) - f_{j_k}(x))| \\ &\leq \sum_{i=1}^{l} |f_{j_{k+i}}(x) - f_{j_{k+i-1}}(x)| \\ &= \sum_{i=k}^{m} |f_{j_{i+1}}(x) - f_{j_i}(x)| \\ &\leq \sum_{i=k}^{\infty} |f_{j_{i+1}}(x) - f_{j_i}(x)| \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |f_{j_{i+1}}(x) - f_{j_i}(x)| - \sum_{i=1}^{k-1} |f_{j_{i+1}}(x) - f_{j_i}(x)| \\ &= g(x) - g_{k-1}(x), \end{aligned}$$

por tanto,

$$|f_{j_m}(x) - f_{j_k}(x)| \leq g(x) - g_{k-1}(x) \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

es decir, la sucesión $(f_{j_k}(x))$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ para casi todo $x \in \Omega$, más precisamente, para $x \in \Omega \setminus E$. Definimos entonces

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{k\to\infty} f_{j_k}(x), & \text{si } x \in \Omega \setminus E \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $x \in \Omega \setminus E$. Vimos que, dados $m \geq k \geq 2$, se tiene que

$$|f_{j_m}(x) - f_{j_k}(x)| \leq g(x) - g_{k-1}(x) \leq g(x),$$

como esto se tiene para todo $m \geq k \geq 2$, por la definición de f $k \geq 2$ y $x \in \Omega \setminus E$

$$|f(x) - f_{j_k}(x)| \leq g(x), \tag{1}$$

en particular, como $|f(x)| - |f_{j_k}(x)| \leq |f(x) - f_{j_k}(x)|$, tenemos que

$$|f(x)| \leq g(x) + |f_{j_k}(x)|,$$

de manera que $\|f\|_p \leq \|g\|_p + \|f_{j_k}\|_p < \infty$, dado que $g \in L^p(\Omega)$ y $f_{j_k} \in L^p(\Omega)$. Finalmente por la desigualdad (1) y el Teorema de la Convergencia Dominada, se tiene

$$\lim_{k\to\infty} \|f_{j_k} - f\|_p^p = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |f_{j_k}(x) - f(x)|^p\, dx = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} |f_{j_k}(x) - f(x)|^p\, dx = 0,$$

es decir, $f_{j_k} \to f$ en $L^p(\Omega)$. Como la sucesión (f_j) es de Cauchy, al tener una subsucesión convergente, la sucesión "completa" es convergente, con lo que se concluye el resultado.

□

Ejercicio 5. Considere el espacio L^p, $1 \leq p \leq \infty$. Sean

$$f_0(x) = \begin{cases} |x|^{-\alpha}, & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{si } |x| > 1. \end{cases} \quad f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } |x| \leq 1 \\ |x|^{-\alpha}, & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

(I) ¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(II) ¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_1 \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(III) ¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_2(x) = \dfrac{1}{1 + |x|^\alpha} \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. (I) Consideramos dos casos acá:
a) $1 \leq p < \infty$
En primer lugar, haciendo el cambio a coordenadas polares se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_0(x)d\lambda(x) = \int_0^1 \int_{S^{n-1}} (r^{-\alpha})r^{n-1} dS\,dr = \int_0^1 C(r^{-\alpha})r^{n-1}dr,$$

en donde en la primera igualdad se utilizó el cambio a coordenadas polares, y en la segunda igualdad C corresponde a la medida de la S^{n-1} esfera respecto a la medida de Lebesgue. Luego

$$\begin{aligned}\|f_0\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (f_0(x))^p d\lambda(x)\right)^{1/p} &= \left(\int_0^1 \int_{S^{n-1}} (r^{-\alpha})^p r^{n-1} dS\,dr\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^1 C(r^{-\alpha})^p r^{n-1} dr\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^1 Cr^{-\alpha p+n-1} dr\right)^{1/p}\end{aligned}$$

Veamos cuando $\int_0^1 r^{-\alpha p+n-1}dr$ converge. Esto ocurre si y sólo si

$$\begin{aligned} -\alpha p + n - 1 &> -1 \\ -\alpha p + n &> 0 \\ n &> \alpha p \\ \frac{n}{p} &> \alpha \end{aligned}$$

b) $p = \infty$
En este caso se tiene que

$$\|f_0\|_{L^\infty} = \text{ínf}\{C \geq 0 : |f_0(x)| \leq C \quad \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Como $0 \leq C$ para todo $C \in \mathbb{R}^+$, es suficiente considerar cuándo$|x| \leq 1$. De esta forma

$$\|f_0(x)\|_{L^\infty} = \text{ínf}\{C \geq 0 : |x|^{-\alpha} \leq C \quad \text{para casi todo } x\},$$

luego este ínfimo existe siempre que $|x|^{-\alpha}$ sea acotado en $|x| \leq 1$ (para casi todo x). Esto se tiene si y solo si $\alpha \leq 0$.
Por tanto, $f_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$ si y solo si $\alpha < \frac{n}{p}$, y para $p = \infty$, $f_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $\alpha \leq 0$.

(II) Consideramos dos casos
a) $1 \leq p < \infty$
Al igual que en el item (I), se considera el cambio a coordenadas polares de la misma forma. Así:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1(x)d\lambda(x) = \int_1^\infty \int_{S^{n-1}} (r^{-\alpha})r^{n-1}dSdr = \int_1^\infty C(r^{-\alpha})r^{n-1}dr$$

Esto nos lleva a:

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (f_1(x))^p d\lambda(x)\right)^{1/p} &= \left(\int_1^\infty \int_{S^{n-1}} (r^{-\alpha})^p r^{n-1}dSdr\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_1^\infty C(r^{-\alpha})^p r^{n-1}dr\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_1^\infty Cr^{-\alpha p+n-1}dr\right)^{1/p} \end{aligned}$$

Veamos cuando $\int_1^\infty r^{-\alpha p+n-1}dr$ converge. Esto ocurre si y sólo si

$$\begin{aligned} -\alpha p + n - 1 &< -1 \\ -\alpha p + n &< 0 \\ n &< \alpha p \\ \frac{n}{p} &< \alpha \end{aligned}$$

b) $p = \infty$
En este caso se tiene que

$$\|f_1\|_{L^\infty} = \text{ínf}\{C \geq 0 : |f_1(x)| \leq C \quad \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Como $0 \leq C$ para todo $C \in \mathbb{R}^+$, es suficiente considerar cuándo$|x| > 1$. De esta forma

$$\|f_1(x)\|_{L^\infty} = \text{ínf}\{C \geq 0 : |x|^{-\alpha} \leq C \quad \text{para casi todo } x\},$$

luego este ínfimo existe siempre que $|x|^{-\alpha}$ sea acotado en $|x| > 1$. Esto se tiene siempre que $\alpha \geq 0$.
Por tanto, $f_1 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$ si y sólo si $\alpha > \frac{n}{p}$, y para $p = \infty$, $f_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $\alpha \geq 0$.

(III) Consideramos dos casos:
a) $1 \leq p < \infty$
Queremos ver cuando $f_2 \in L^p$. Esto es, cuando

$$\begin{aligned}\|f_2\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (f_2(x))^p d\lambda(x)\right)^{1/p} &= \left(\int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \left(\frac{1}{1+r^\alpha}\right)^p r^{n-1} dS dr\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^\infty C\left(\frac{1}{1+r^\alpha}\right)^p r^{n-1} dr\right)^{1/p} \\ &< \infty\end{aligned}$$

Para ello, veamos cuando $\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+r^\alpha}\right)^p r^{n-1} dr\right)$ converge. Como

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+r^\alpha}\right)^p r^{n-1} dr = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+r^\alpha}\right)^p r^{n-1} dr + \int_1^\infty \left(\frac{1}{1+r^\alpha}\right)^p r^{n-1} dr$$

y la primera integral converge por ser $\left(\frac{1}{1+r^\alpha}\right)^p r^{n-1}$ continua en el compacto $[0, 1]$, es suficiente estudiar la convergencia de la segunda integral. Para ello, utilizaremos criterio de comparación por paso al límite. Sea $g(r) = \left(\frac{1}{1+r^\alpha}\right)^p r^{n-1}$, consideremos los siguientes casos:
✓ $\alpha > 0$
Considerando $h(r) = r^{-\alpha p+n-1}$, se tiene que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{g(r)}{h(r)} = \lim_{r\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{1+r^\alpha}\right)^p r^{n-1}}{r^{-\alpha p+n-1}} = \lim_{r\to\infty} \left(\frac{r^\alpha}{1+r^\alpha}\right)^p = 1$$

donde la última igualdad se tiene pues al evaluar el límite, $\alpha > 0$. Así,

$$\int_1^\infty h(r) dr \quad \text{converge si y sólo si} \quad \int_1^\infty g(r) dr \quad \text{converge}$$

la primera converge si y sólo si

$$\begin{aligned} -\alpha p + n - 1 &< -1 \\ -\alpha p + n &< 0 \\ \frac{n}{p} &< \alpha \end{aligned}$$

✓ $\alpha = 0$
Para este caso,

$$\int_1^\infty g(r)dr = \int_1^\infty \frac{1}{2^p} r^{n-1} dr$$

la cual diverge pues $n \geq 1$.
✓ $\alpha < 0$
Considerando $t(r) = r^{n-1}$, se tiene que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{g(r)}{t(r)} = \lim_{r\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{1+r^\alpha}\right)^p r^{n-1}}{r^{n-1}} = \lim_{r\to\infty} \left(\frac{1}{1+r^\alpha}\right)^p = 1$$

donde la última igualdad se tiene pues al evaluar el límite, $\alpha < 0$. Así,

$$\int_1^\infty t(r)dr \quad \text{converge si y sólo si} \quad \int_1^\infty g(r)dr \quad \text{converge}$$

la primera converge si y sólo si $n - 1 < 0$. Es decir, cuando $n < 1$ lo cual no se tiene dado que $n \geq 0$. Por lo tanto, $\int_1^\infty g(r)dr$ diverge.
b) $p = \infty$ En este caso se tiene que

$$\begin{aligned} \|f_2\|_{L^\infty} &= \inf\{C \geq 0 : |f_2(x)| \leq C \quad \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \inf\{C \geq 0 : \frac{1}{1+|x|^\alpha} \leq C \quad \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

Luego este ínfimo existe siempre pues:

$$\begin{aligned} |x|^\alpha &\geq 0 \\ 1 + |x|^\alpha &\geq 1 \\ 1 &\geq \frac{1}{1+|x|^\alpha} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f_2 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$ si y sólo si $\frac{n}{p} < \alpha$, y para $p = \infty$, $f_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

□

Ejercicio 8.

(I) Sea $1 < p < \infty$. Considere las secuencias $x_n = \{x_n^j\}_{j=1}^\infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x = \{x^j\}_{j=1}^\infty$. Asuma que $x_n, x \in l^p$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Muestre que $x_n \rightharpoonup x$ en l^p si y sólo si $\{x_n\}$ es acotada en l^p y $x_n^j \to x^j$ para cada entero positivo j.

(II) Considere la secuencia $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, 0, 0, 0, ...\right)$. ¿En cuales espacios l^p, con $1 \leq p \leq \infty$ esta secuencia converge débilmente?

Demostración. (I) ▪ ($\Longrightarrow$) Supongamos que $x_n \rightharpoonup x$ en l^p. Como l^p es un espacio de Banach, sabemos que $\{x_n\}$ es acotada y además, $\|x\|_{l^p} \leq \liminf \|x_n\|_{l^p}$. Dado $j \in \mathbb{Z}^+$, definimos

$$\begin{aligned} \pi_j : l^p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \pi_j(y) = y^j, \end{aligned}$$

donde $y = \{y^i\}_{i=1}^{\infty} \in l^p$. Veamos que $\pi_j \in (l^p)^\star$ para todo $j \in \mathbb{Z}^+$. π_j es claramente lineal como consecuencia de la suma y producto por escalar definida en l^p, además

$$|\pi_j(y)| = |y^j| = (|y^j|^p)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y^i|^p\right)^{1/p} = \|y\|_{l^p},$$

por tanto, π_j es continuo y $\|\pi_j\|_{(l^p)^\star} \leq 1$. Sabemos que $x_n \rightharpoonup x$ si y sólo si $\langle f; x_n\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle f; x\rangle$ para todo $f \in (l^p)^\star$, en particular para π_j. En este caso, se obtiene que

$$\pi_j(x_n) = x_n^j \xrightarrow{n\to\infty} x^j = \pi_j(x),$$

como $j \in \mathbb{Z}^+$ es arbitrario, se obtiene el resultado.

▪ ($\Longleftarrow$) Supongamos ahora que $\{x_n\}$ es acotada y que $x_n^j \to x^j$ para todo $j \in \mathbb{Z}^+$. Sea V una vecindad débil de x, que sin pérdida de generalidad, podemos expresar como

$$V = \{y \in l^p : |\langle f_i; y - x\rangle| < \epsilon \text{ para todo } i = 1, ..., k\},$$

para algunos $f_1, ..., f_k \in (l^p)^\star$ y $\epsilon > 0$. Queremos ver que existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $n \geq N$, entonces $x_n \in V$. Sea f_i con $1 \leq i \leq k$, dado que $1 < p < \infty$, por el Teorema de Representación de Riesz, existe una única $y_i = \{y_i^j\}_{j=1}^{\infty} \in l^{p'}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ tal que

$$\langle f_i; z\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} y_i^j z^j,$$

para toda $z = \{z^j\}_{j=1}^{\infty} \in l^p$. Entonces, dado $n \in \mathbb{N}$

$$|\langle f_i; x_n - x\rangle| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} y_i^j (x_n^j - x^j)\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |y_i^j||x_n^j - x^j|.$$

Ahora, note que si $z = \{z^j\}_{j=1}^{\infty} \in l^q$ con $1 \leq q < \infty$, entonces, dado $l \geq 1$, la sucesión

$$z_l = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{l-1 \text{ ceros}}, z^l, z^{l+1}, ...),$$

también está en l^q, dado que

$$\|z_j\|_{l^q}^q = \sum_{j=l}^{\infty} |z^j|^q \leq \sum_{j=1}^{\infty} |z^j|^q = \|z\|_{l^q}^q < \infty,$$

de esta manera, también vale la desigualdad de Hölder para estas sucesiones, en otras palabras, dadas $z = \{z^j\}_{j=1}^{\infty} \in l^q$ y $w = \{w^j\}_{j=1}^{\infty} \in l^{q'}$ con $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$, dado $l \geq 1$

$$\sum_{j=l}^{\infty} |z^j||w^j| \leq \left(\sum_{j=l}^{\infty} |z^j|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{j=l}^{\infty} |w^j|^{q'} \right)^{1/q'}.$$

Como $y_i \in l^{p'}$, entonces

$$\|y_i\|_{l^{p'}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_i^j|^{p'} \right)^{1/p'} < \infty,$$

además, como $\{x_n\}$ es una sucesión acotada, podemos definir

$$M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| + \|x\| + 1,$$

de esta manera, por ser una serie absolutamente convergente, existe $J_i \in \mathbb{Z}^+$ con $J_i \geq 2$ tal que

$$\|y_i\|_{l^{p'}} = \left(\sum_{j=J_i}^{\infty} |y_i^j|^{p'} \right)^{1/p'} < \frac{\epsilon}{2M}.$$

Entonces

$$|\langle f_i; x_n - x \rangle| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |y_i^j||x_n^j - x^j| = \underbrace{\sum_{j=1}^{J_i - 1} |y_i^j||x_n^j - x^j|}_{S_1} + \underbrace{\sum_{j=J_i}^{\infty} |y_i^j||x_n^j - x^j|}_{S_2},$$

Acotemos primero S_2, por la observación que hicimos antes con las sucesiones z_l, la manera como escogimos J_i y la definición de M, tenemos que

$$\begin{aligned}
S_2 = \sum_{j=J_i}^{\infty} |y_i^j||x_n^j - x^j| &\leq \left(\sum_{j=J_i}^{\infty} |y_i^j|^{p'}\right)^{1/p'} \left(\sum_{j=J_i}^{\infty} |x_n^j - x^j|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{j=J_i}^{\infty} |y_i^j|^{p'}\right)^{1/p'} \|x_n - x\|_{l^p} \\
&\leq \left(\sum_{j=J_i}^{\infty} |y_i^j|^{p'}\right)^{1/p'} (\|x_n\|_{l^p} + \|x\|_{l^p}) \\
&< \frac{\epsilon}{2M}(\|x_n\|_{l^p} + \|x\|) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Para S_1, definamos

$$N = \max_{1 \leq j \leq J_i - 1} |y_i^j| + 1.$$

Como $x_n^j \to x^j$ para todo $j \in \mathbb{Z}^+$, existe n_i tal que si $n \geq n_i$, entonces

$$|x_n^j - x^j| < \frac{\epsilon}{2NJ_i},$$

para todo $j = 1, ..., J_i - 1$, de esta manera

$$S_1 = \sum_{j=1}^{J_i - 1} |y_i^j||x_n^j - x^j| < N \frac{\epsilon}{2NJ_i} \sum_{j=1}^{J_i - 1} 1 = \frac{\epsilon}{2J_i} \cdot (J_i - 1) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Así

$$|\langle f_i; x_n - x \rangle| \leq S_1 + S_2 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

para $n \geq n_i$. De esta manera, para $n \geq N = \max_{1 \leq i \leq k} n_i$, se tiene que

$$|\langle f_i; x_n - x \rangle| < \epsilon \text{ para todo } i = 1, ..., k,$$

es decir, para $n \geq N$, $x_n \in V$, lo cuál prueba el resultado.

(I) Vamos a dividir la prueba en 3 casos

(a) **Caso** $p = 1$. En este caso, note que

$$\|x_n\|_{l^1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j},$$

como la serie armónica no es convergente, tenemos que la sucesión $\{x_n\}$ es no acotada y, por tanto, no puede converger débilmente en $\sigma(l^1, (l^1)^\star)$.

(b) **Caso** $1 < p < \infty$ En este caso, tenemos que

$$\|x_n\|_{l^p}^p = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^p} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^p} = C_p < \infty,$$

la convergencia de esta serie se sigue de que $p > 1$ y el criterio de la integral para convergencia de series. También se puede ver como la evaluación en p de la función zeta de Riemann. De esta manera, la sucesión $\{x_n\}$ es acotada en l^p. Consideremos la sucesión $x = \left\{\frac{1}{j}\right\}_{j=1}^{\infty}$. Por lo que vimos anteriormente, $x \in l^p$ y $\|x_n\|_{l^p} \leq \|x\|_{l^p}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Sea $j \in \mathbb{Z}^+$, entonces $x^j = \frac{1}{j}$ y

$$x_n^j = \begin{cases} \frac{1}{j}, & \text{si } n \geq j, \\ 0, & \text{si } n < j, \end{cases}$$

de manera que, para $n \geq j$ se tiene que $|x_n^j - x^j| = \left|\frac{1}{j} - \frac{1}{j}\right| = 0$, es decir, $x_n^j \to x^j$ para todo $j \in \mathbb{Z}^+$. Usando el ítem (I), tenemos que $x_n \rightharpoonup x$ en l^p.

(c) **Caso** $p = \infty$ Consideremos nuevamente la sucesión $x = \left\{\frac{1}{j}\right\}_{j=1}^{\infty}$, claramente $x \in l^\infty$. Sea $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{1}{n+1} < \epsilon$, entonces, por la forma de los x_n^j's

$$\|x - x_n\|_{l^\infty} = \sup_{j \in \mathbb{Z}^+} |x^j - x_n^j| = \sup_{j \geq n+1} \frac{1}{j} = \frac{1}{n+1} < \epsilon,$$

es decir, $x_n \to x$ fuertemente en l^∞, y como la convergencia fuerte implica la convergencia débil, tenemos que $x_n \rightharpoonup x$ en l^∞.

$\square$