Ecuaciones Diferenciales Parciales: Taller 5

quien sabe del 2024

Universidad Nacional de Colombia

Oscar Guillermo Riaño Castañeda

Andrés David Cadena Simons acadenas@unal.edu.co
David Felipe Viuche Malaver dviuchem@unal.edu.co

Problema 1:

(**Buena colocación de la ecuación de onda en una dimensión**). Considere el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x,0) = g(x), & \text{en } \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = h(x), & \text{en } \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

donde suponemos que $g \in C^2(\mathbb{R})$ y $h \in C^1(\mathbb{R})$.

I Sea u solución de (1) de clase C^2. Muestre que si $g(x)$ y $h(x)$ son nulas para $|x| > R$, entonces $u(x,t) = 0$ para todo $|x| > R + t$.
Sugerencia. Utilice el principio de propagación finita.

Solución:

Note que como u es solución de la ecuación de onda, entonces se satisface que para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ y $t_0 > 0$ podemos definir el siguiente cono de onda:

$$K(x_0, t_0) := \{(x,t) : 0 \leq t \leq t_0, |x - x_0| \leq t_0 - t\}$$

Ahora, por hipótesis tenemos que $Supp\ g, Supp\ h \subseteq [-R, R]$, por lo que usando el principio el principio de propagación finita tenemos que si suponemos $x_0 \notin [-R, R]$ y $t_0 > 0$ tal que $(x_0 - t_0, x_0 + t_0) \cap (-R, R) = \emptyset$, entonces $u \equiv u_t \equiv 0$ en $(x_0 - t_0, x_0 + t_0) \times (t = 0)$, y por ende $u \equiv 0$ en el cono $K(x_0, t_0)$.
Luego, si tomamos (x,t) tal que $|x| > R + t$, entonces $x \notin [-R - t, R + t]$, luego como $[-R, R] \subset [-R - t, R + t]$, entonces $x \notin [-R, R]$ y por ende se satisface que $u(x,t) = 0$.

II **(Existencia).** Muestre que existe una solución de clase C^2 del problema (1).
Sugerencia. Verifique que la fórmula de d'Alemberd es en efecto una solución de (1).

Solución:

Suponga:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy.$$

Note que:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} u(x,t) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2}\left(g(x+t)+g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy,\\ &= \frac{1}{2}\left(g(x)+g(x)\right) + \frac{1}{2}\int_{x}^{x} h(y)dy,\\ &= g(x),\end{aligned}$$

además:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} u_t(x,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2}\left(g'(x+t)-g'(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} h'(ut+x)ut + h(ut+x)du,\\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} h(x)du,\\ &= h(x).\end{aligned}$$

Ahora veamos que u es solución de la ecuación de onda.
Calculando:

$$\begin{aligned}u_x(x,t) &= \frac{1}{2}\left(g'(x+t)+g'(x-t)\right) + \frac{1}{2}\left(h(x+t)+h(x-t)\right).\\ u_t(x,t) &= \frac{1}{2}\left(g'(x+t)-g'(x-t)\right) + \frac{1}{2}\left(h(x+t)-h(x-t)\right),\end{aligned}$$

luego:

$$\begin{aligned}u_{xx}(x,t) &= \frac{1}{2}\left(g''(x+t)+g''(x-t)\right) + \frac{1}{2}\left(h'(x+t)+h'(x-t)\right).\\ u_{tt}(x,t) &= \frac{1}{2}\left(g''(x+t)+g''(x-t)\right) + \frac{1}{2}\left(h'(x+t)+h'(x-t)\right),\\ &= u_{xx}(x,t).\end{aligned}$$

De lo que se concluye que $u_{tt} - u_{xx} = 0$.
Por lo que se puede asegurar que el problema (1) tiene solución.

III **(Unicidad).** Muestre que existe una única solución del problema de Cauchy (1) en la clase $C^2(\mathbb{R}\times[0,\infty))$.
Sugerencia. Es suficiente con mostrar que el problema:

$$\begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0, & \text{en } \mathbb{R}\times(0,\infty),\\ w(x,0)=0, & \text{en } \mathbb{R},\\ w_t(x,0)=0, & \text{en } \mathbb{R}, \end{cases}$$

tiene como única solución $w=0$. Para esto, defina la energía:

$$E(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(w_t^2(x,t)+w_x^2(x,t))dx.$$

Utilice I) para justificar que la energía anterior está bien definida (como integral en todo $\mathbb{R}$). Luego muestre que $\frac{d}{dt}E(t)=0$.

Solución:

Suponga que existen $u_1(x,t),u_2(x,t)$ soluciones del problema (1), entonces sabemos que $w(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ es solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0, & \text{en } \mathbb{R}\times(0,\infty),\\ w(x,0)=0, & \text{en } \mathbb{R},\\ w_t(x,0)=0, & \text{en } \mathbb{R}, \end{cases}$$

Luego, note que como $w(x,0)=w_t(x,0)=0$, entonces por I) se satisface que $w(x,t)=0$ si $|x|>t$, por lo que podemos asegurar que dado $t\in[0,\infty)$ si definimos $g_t(x)=w(x,t)$, entonces g_t es de soporte compacto y por ende sus derivadas también. Luego, como $w(x,t)=0$ si $|x|>t$, entonces bajo las mismas condiciones sabemos que $w_t(x,t)=0$, luego podemos asegurar que $E(t)$ se encuentra bien definida y que además el conjunto de integración se puede reducir a un conjunto compacto.

Ahora veamos que $\frac{d}{dt}E(t) = 0$, para esto usaremos la derivación bajo el signo de la integral aprovechándonos de que el dominio de integración es un conjunto compacto.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) &= \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(w_t^2(x,t) + w_x^2(x,t))dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dt}(w_t^2(x,t) + w_x^2(x,t))dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(2w_t(x,t)w_{tt}(x,t) + 2w_x(x,t)w_{tx}(x,t))dx \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} w_t(x,t)w_{tt}(x,t)dx + 2\int_{-\infty}^{\infty} w_x(x,t)w_{tx}(x,t)dx \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} w_t(x,t)w_{tt}(x,t)dx + 2\left[w_x(x,t)w_t(x,t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} w_t(x,t)w_{xx}(x,t)dx\right] \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} w_t(x,t)(w_{tt}(x,t) - w_{xx}(x,t))dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir que $E(t) = c$ para alguna constante c, ahora calculemos quien es $E(0)$:

$$\begin{aligned}
E(0) &= \int_{-\infty}^{\infty}(w_t^2(x,0) + w_x^2(x,0))dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(0^2 + 0^2)dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo que $E(0) = 0 = E(t)$ para todo $t > 0$, por lo que podemos asegurar que $w_x^2(x,t) = w_t^2(x,t) = 0$ y por ende $w_t(x,t) = w_x(x,t) = 0$, luego $w(x,t) = c$ y como $w_(x,0) = 0$, se sigue por continuidad que $w(x,t) = 0$, por lo que podemos asegurar que $u_1(x,t) - u_2(x,t) = 0$ y por ende $u_1(x,t) = u_2(x,t)$.

♥

Problema 1 continúa en la siguiente página. . .

IV **(Tipo de dependencia continua).** Sea u_j solución de (1) con datos iniciales $g_j \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ y $h_j \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, para $j = 1, 2$. Dado $T > 0$ fijo, muestre que:

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \|g_1 - g_2\|_{L^\infty} + T\|h_1 - h_2\|_{L^\infty}.$$

En particular, concluya que datos iniciales próximos en la norma $L^\infty(\mathbb{R})$ general soluciones de (1) próximas en la norma $L^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$.

Solución:

Note que:

$$\begin{aligned}
|u_1(x,t) - u_2(x,t)| &\leq \frac{1}{2}\left|g_1(x+t) + g_1(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} h_1(y)dy - g_2(x+t) - g_2(x-t) - \int_{x-t}^{x+t} h_2(y)dy\right|, \\
&\leq \frac{1}{2}\left|g_1(x+t) + g_1(x-t) - (g_2(x+t) + g_2(x-t))\right| + \frac{1}{2}\left|\int_{x-t}^{x+t} h_1(y) - h_2(y)dy\right|, \\
&\leq \frac{1}{2}\left|[g_1(x+t) - g_2(x+t)] + [g_1(x-t) - g_2(x-t)]\right| + \frac{1}{2}\left|\int_{x-T}^{x+T} h_1(y) - h_2(y)dy\right|, \\
&\leq \frac{1}{2}\left|2\|g_1 - g_2\|_\infty\right| + \frac{1}{2}\left|\|h_1 - h_2\|_\infty 2T\right|, \\
&\leq \|g_1 - g_2\| + T\|h_1 - h_2\|_\infty,
\end{aligned}$$

de lo que se sigue que si tomamos $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$, entonces:

$$\|u_1 - u_2\|_\infty \leq \|g_1 - g_2\| + T\|h_1 - h_2\|_\infty$$

♥

Problema 2:

(**Equipartición de la energía**). Suponga que $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ soluciona el problema de valor inicial:

$$(1) \qquad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = g(x), & \text{en } \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = h(x), & \text{en } \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde g y h tiene soporte compacto. Definimos la energía cinética $k(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x, t)dx$ y la energía potencial $p(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x, t)dx$.

I) Muestre que $k(t) + p(t)$ es constante.

Solución:

Defina $E(t)$ tal que:

$$\begin{aligned} E(t) &= k(t) + p(t), \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x, t) + u_x^2 dx. \end{aligned}$$

Veamos que $\frac{d}{dt} E(t) = 0$.
Note que por el Problema 1, I) tenemos que al ser g y h funciones se soporte compacto (Suponga que para ambas se tiene que $Supp \ \ g, Supp \ \ h \subseteq [-R, R]$), entonces se cumple que dado $t > 0$ $u(x, t) = 0$ si $|x| > R + t$, por lo que $E(t)$ se encuentra bien definida y además en la integral el dominio de integración en realidad es un conjunto compacto, luego:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} (u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t))dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} (u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t))dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (2u_t(x, t)u_{tt}(x, t) + 2u_x(x, t)u_{tx}(x, t))dx \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t)u_{tt}(x, t)dx + 2 \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x, t)u_{tx}(x, t)dx \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t)u_{tt}(x, t)dx + 2 \left[u_x(x, t)u_t(x, t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t)u_{xx}(x, t)dx \right] \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t)(u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t))dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

de lo que se concluye que $E(t) = k(t) + p(t) = c$ con c constante.

♥

II) Muestre que $k(t) = p(t)$ para todo tiempo t suficientemente grande.

Solución:

Note que por la existencia y unicidad del problema de Cauchy (1), se tiene que:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy.$$

Más aún:

$$\begin{aligned} u_x(x,t) &= \frac{1}{2}(g'(x+t) + g'(x-t)) + \frac{1}{2}(h(x+t) + h(x-t)), \\ u_t(x,t) &= \frac{1}{2}(g'(x+t) - g'(x-t)) + \frac{1}{2}(h(x+t) - h(x-t)) \end{aligned}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} u_x^2(x,t) = \frac{1}{4}(&g'^2(x+t) + 2g'(x+t)g'(x-t) + 2g'(x+t)h(x+t) + 2g'(x+t)h(x-t) \\ &+ g'^2(x-t) + 2g'(x-t)h(x+t) + 2g'(x-t)h(x-t) \\ &+ h^2(x+t) + 2h(x+t)h(x-t) + h^2(x-t)). \\ u_t^2(x,t) = \frac{1}{4}(&g'^2(x+t) - 2g'(x+t)g'(x-t) + 2g'(x+t)h(x+t) - 2g'(x+t)h(x-t) \\ &+ g'^2(x-t) - 2g'(x-t)h(x+t) + 2g'(x-t)h(x-t) \\ &+ h^2(x+t) - 2h(x+t)h(x-t) + h^2(x-t)). \end{aligned}$$

luego:

$$u_t^2(x,t) - u_x^2(x,t) = -[g'(x+t) + h(x+t)][g'(x-t) + h(x-t)].$$

Así:

$$\begin{aligned} k(t) - p(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (u_t^2(x,t) - u_x^2(x,t))dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} [g'(x+t) + h(x+t)][g'(x-t) + h(x-t)]dx, \end{aligned}$$

luego como $Suppg', Supph \subseteq [-R,R]$, entonces:

$$k(t) - p(t) = -\int_{x\in(-R-t,R-t)\cap(-R+t,R+t)} [g'(x+t) + h(x+t)][g'(x-t) + h(x-t)]dx$$

luego para $t \geq R$ se tiene que $(-R-t, R-t) \cap (-R+t, R+t) = \emptyset$, por lo que si tomamos $t \geq R$, se cumple que:

$$\begin{aligned}
k(t) - p(t) &= -\int_{x \in (-R-t,R-t) \cap (-R+t,R+t)} [g'(x+t) + h(x+t)][g'(x-t) + h(x-t)]dx \\
&= -\int_{\emptyset} [g'(x+t) + h(x+t)][g'(x-t) + h(x-t)]dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

es decir que si $t \geq R$, se satisface que $k(t) - p(t) = 0$, en otras palabras, $k(t) = p(t)$ para un t suficientemente grande ($t \geq R$).

Problema 3:

Una onda esférica es una solución u de la ecuación de onda en tres dimensiones que es radial en espacio, es decir, $u(x,t) = u(r,t), r = |x|$.

I) Encuentre la ecuacion que satisfacen las ondas esféricas.

Solución:

Note que si $u(x,t) = u(|x|,t) = u(r,t)$, se cumple que:

$$\Delta u = \frac{2}{r}\frac{du}{dr} + \frac{d^2u}{dr^2},$$

por lo que sabemos que $u(r,t)$ debe de solucionar:

$$u_{tt}(r,t) - \frac{2}{r}u_r(r,t) - u_{rr}(r,t) = 0$$

♥

II) Para la ecuación encontrada en I), realice el cambio de variables $v = ru$ para determinar y solucionar la ecuación que satisface v. Con esto encuentre una solución de la ecuación de onda radial con datos iniciales $u(r,0) = g(r)$, $u_t(r,0) = h(r)$, donde g y h son funciones pares de r.

Solución:

Suponga $v = ru$, es decir:

$$u(x,t) = \frac{v(x,t)}{r}$$

Note que:

$$\begin{aligned}
u_r(r,t) &= \frac{1}{r}v_r(r,t) - \frac{1}{r^2}v(r,t)\\
u_{rr}(r,t) &= \frac{1}{r}v_{rr}(r,t) - \frac{2}{r^2}v_r(r,t) + \frac{2}{r^3}v(r,t)\\
u_{tt}(r,t) &= \frac{v_{tt}(r,t)}{r}
\end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación del punto I), nos queda:

$$\frac{1}{r}v_{tt}(x,t) - \frac{2}{r}\left(\frac{1}{r}v_r(r,t) - \frac{1}{r^2}v(r,t)\right) - \left(\frac{1}{r}v_{rr}(r,t) - \frac{2}{r^2}v_r(r,t) + \frac{2}{r^3}v(r,t)\right) = 0$$

realizando los cálculos:

$$v_{tt} - v_{rr} = 0$$

Problema 3 continúa en la siguiente página. . .

luego, si proponemos el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{rr} = 0, & \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ v(r,0) = rg(r), & \text{en } \mathbb{R}, \\ v_t(r,0) = rh(r), & \text{en } \mathbb{R}, \end{cases}$$

por lo realizado en el punto problema 1, sabemos que:

$$v(r,t) = \frac{1}{2}((r+t)g(r+t) + (r-t)g(r-t)) + \frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t} yh(y)dy$$

luego como $u = v/r$, entonces:

$$u(x,t) = \frac{1}{2r}((r+t)g(r+t) + (r-t)g(r-t)) + \frac{1}{2r}\int_{r-t}^{r+t} yh(y)dy$$

es solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{2}{r}u_r(r,t) - u_{rr}(r,t) = 0, & \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(r,0) = g(r), & \text{en } \mathbb{R}, \\ u_t(r,0) = h(r), & \text{en } \mathbb{R}, \end{cases}$$

♥

Problema 4:

Sea u solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = g(x), & \text{en } \mathbb{R}^n, \\ u_t(x,0) = h(x), & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

Dado $x \in \mathbb{R}^n, t > 0, r > 0$ definimos

$$U(x;r,t) := \fint_{\partial B(x,r)} u(y,t)dS(y),$$
$$G(x;r) := \fint_{\partial B(x,r)} g(y)dS(y)$$

y

$$H(x;r) := \fint_{\partial B(x,r)} h(y)dS(y).$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ fijo. Sean $m \geq 2$ entero y $u \in C^m(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ solución de (6). Muestre que U dada por (7) es de clase $C^m([0,\infty) \times [0,\infty))$ (como función de r y t) y U satisface el problema de Cauchy para la ecuación de Euler- Poisson -Darboux

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \dfrac{n-1}{r}U_r = 0, & \text{en } (0,\infty) \times (0,\infty), \\ U(r,0) = G(r), & \text{en } (0,\infty), \\ U_t(r,0) = H(r), & \text{en } (0,\infty). \end{cases}$$

Problema 4 continúa en la siguiente página. . .

Solución:

Comencemos calculando U_r:

$$\begin{aligned}
U(x;r,t) &= \fint_{\partial B(x,r)} u(y,t)dS(y) \\
&= \fint_{\partial B(0,1)} u(x+rz,t)dS(z) \quad \text{, de modo que} \\
U_r &= \fint_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rz,t)\cdot z dS(z) \\
&= \fint_{\partial B(x,r)} \nabla u(y,t)\cdot \frac{y-x}{r} dS(y) \\
&= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} u(y,t)dy \\
&= \frac{r}{n}\frac{1}{\alpha(n)r^{n}} \int_{B(x,r)} u(y,t)dy \\
&= \frac{r}{n}\fint_{B(x,r)} \Delta u(y,t)dy
\end{aligned}$$

Con esto concluimos $\lim_{x\to 0^+} U_r(x;,r,t) = \lim_{x\to 0^+} \frac{r}{n}\fint_{B(0,1)} \Delta u(x+rz,t)dz = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{r}{n}\fint_{B(0,1)} \Delta u(x+rz,t)$ ya que Δu es continua y estamos en un compacto, luego $\lim_{x\to 0^+} U_r(x;,r,t) = \lim_{x\to 0^+} \frac{r}{n}\Delta u(x,t)\fint_{B(0,1)} dz = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{r}{n}\Delta u(x,t)\frac{n\alpha(n)r^n}{n\alpha(n)r^n} = 0$ Ahora hemos de calcular $U_{rr}(x;r,t)$.

$$\begin{aligned}
U_{rr} = (U_r)_r &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{B(x,r)} \Delta u(y,t)dy\right) \\
&= \frac{1-n}{n\alpha(n)r^{n}}\int_{B(x,r)} \Delta u(y,t)dy + \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\int_{B(x,r)} \Delta u(y,t)dy,
\end{aligned}$$

centrémonos en el último término

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\int_{B(x,r)} \Delta u(y,t)dy &= \frac{\partial}{\partial r}\int_{B(0,1)} \Delta u(x+rz,t)dz \\
&= \frac{\partial}{\partial r}\int_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rz,t)\cdot z dS(z) \\
&= \int_{\partial B(x,r)} \Delta u(y,t)\frac{|y-x|^2}{r^2}dS(y),
\end{aligned}$$

dado que la región donde estamos integrando es la frontera de la bola con radio r y centro x, tenemos $|y-x|=r$, luego

$$\frac{\partial}{\partial r}\int_{B(x,r)} \Delta u(y,t)dy = \int_{\partial B(x,r)} \Delta u(y,t)dS(y)$$

al reemplazar este término en la cuenta que estábamos haciendo para U_{rr} obtenemos

$$\begin{aligned} U_{rr} &= \frac{1-n}{n\alpha(n)r^n}\int_{B(x,r)} \Delta u(y,t)dy + \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)} \Delta u(y,t)dS(y) \\ &= \fint_{B(x,r)} \Delta u dS + \left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\fint_{B(x,r)} \Delta u dy\right) \end{aligned}$$