Análisis Funcional: Taller 1

10 de abril de 2025

Universidad Nacional de Colombia

Oscar Guillermo Riaño Castañeda

Andrés David Cadena Simons acadenas@unal.edu.co

Problema 1:

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Defina

$$\mathcal{K} = \{x \in E : \|x\| = 1\}.$$

Demuestre que E es de Banach si y solamente si $\mathcal{K}$ es completo.

Solución:

Supongamos que E es de Banach y veamos que $\mathcal{K}$ es completo.
Razonemos por contradicción.
Suponga $\{x_n\} \subset \mathcal{K}$ sucesión de Cauchy que converge a $x \notin \mathcal{K}$ cuando $n \to \infty$, es decir, $\|x\| \neq 1$.
Primero, note que como $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n > N$, entonces

$$\|x - x_n\| < \epsilon.$$

Suponga $\epsilon < |\|x\| - 1|$, luego sabemos que existe $N > 0$ tal que si $n > N$ se satisface que

$$\begin{aligned} |\|x\| - 1| &\leq |\|x\| - \|x_n\||\,, \\ &\leq \|x - x_n\|\,, \\ &< \epsilon, \\ &< |\|x\| - 1|\,. \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción, luego $x \in \mathcal{K}$ y por ende $\mathcal{K}$ es completo.
Por otro lado, supongamos que $\mathcal{K}$ es completo y veamos que esto implica que E es de Banach.
Primero, recuerde que $0 \in E$, por lo que si tomamos $\{x_k\} \subset E$ sucesión de Cauchy obviaremos el caso en el que esta converge a 0.
De nuevo, razonemos por contradicción.
Suponga que E no es de Banach, entonces existe $\{x_n\} \subset E$ sucesión de Cauchy tal que $x_n \to x$ con $x \notin E$ cuando $n \to \infty$.
Ahora, como $\{x_n\}$ es de Cauchy, entonces se tiene que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$ entonces

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

Siendo así, suponga ϵ_0 tal que se obtiene un $N_0 > 0$ adecuado que le satisface que existe $m > N_0$ que cumpla que $x_m = 0$, luego

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n\| < \epsilon_0.$$

Tome $\{x_k\}$ como esa subsucesión que le satisface que $\|x_k\| < \epsilon_0$.
Note que $\{\|x_k\|\} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión acotada en un compacto, luego sabemos que existe una subsucesión convergente, con la intención de no saturar la notación la tomaremos indexada

Problema 1 continúa en la siguiente página. . .

por k y convergente a algún $l \in \mathbb{R}$.
Ahora suponga $\{y_k\} = \left\{ \frac{x_k}{\|x_k\|} \right\} \subset \mathcal{K}$ y note que como $\mathcal{K}$ es completo, entonces existe $y \in \mathcal{K}$ tal que $y_k \to y \in \mathcal{K}$ cuando $k \to \infty$, luego

$$\begin{aligned} y &= \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{\|x_k\|}, \\ &= \frac{x}{l}. \end{aligned}$$

De lo que se puede concluir que $ly = x$, luego como $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial, entonces $ly \in E$, luego $x \in E$, lo que es una contradicción, pues desde un principio establecimos que $x \notin E$. Luego podemos concluir que $x \in E$ y por ende que E es un espacio de Banach.

Problema 2:

Sea $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales normados. Considere $T : E \to F$ una transformación lineal. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I) T es continua.

(II) T es continua en cero.

(III) T es acotada. Es decir, existe $M > 0$ tal que para todo $x \in E$,

$$\|Tx\|_F \leq M \|x\|_E .$$

(IV) Si $\overline{B(0,1)} = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$, entonces la imagen directa $T\left(\overline{B(0,1)}\right)$ es un conjunto acotado de F.

Solución:

Solución

Problema 3:

Demuestre que si $T \in L(E,F)$[1], entonces

(I) $\|Tx\|_F \leq \|T\| \, \|x\|_E$, para todo $x \in E$.

(II) $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \dfrac{\|Tx\|_f}{\|x\|_E}$.

(III) $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \|Tx\|_F$.

(IV) $\|T\| = \inf\{M > 0 : \|Tx\|_F \leq M \|x\|_E \,,\ \text{para todo } x \in E\}$.

Solución:

(I) Note que como T es un operador lineal, podemos obviar el caso en el que $x = 0$, pues $\|Tx\|_F = 0 \leq 0 = \|T\| \, \|x\|_E$.
Ahora, con el fin de simplificar la idea, si tomamos $x \neq 0$, entonces podemos reescribir $y = \frac{x}{\|x\|_E}$.
Siendo así, note que dado y por propiedades del supremo se satisface que

$$\|Ty\|_F \leq \sup_{\substack{y \in E \\ \|y\|_E \leq 1}} \|Ty\|_F \qquad \text{Reescribiendo la norma y multiplicando a la derecha por } \|y\|_E = 1,$$

$$\|Ty\|_F \leq \|T\| \, \|y\|_E \qquad \text{Reescribiendo } y = \frac{x}{\|x\|_E} \text{ y usando la linealidad de la norma y el operador,}$$

$$\frac{1}{\|x\|_E} \|Tx\|_E \leq \frac{1}{\|x\|_E} \|T\| \, \|x\|_E \,,$$

Lo que implica que $\|Tx\|_F \leq \|T\| \, \|x\|_E$, luego como se toma y arbitrario se extiende el resultado a todo $x \in E$ y por ende se concluye el resultado.

(II) Note que por la linealidad de la norma y el operador podemos asegurar que

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} &= \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \left\| T \frac{x}{\|x\|_E} \right\|_F , \\
&= \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \|Ty\|_F \qquad \text{como } y \text{ es unitario y distinto de 0,} \\
&\leq \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \|Tx\|_F \,, \\
&\leq \|T\| \,.
\end{aligned}$$

[1] Recuerde que $L(E,F)$ denota el conjunto de operadores lineales de E en F. Dado $T \in L(E,F)$ definimos la norma de T como $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \|Tx\|_F$.

Por otro lado veamos que si asumimos que $\|x\| \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|_E\leq 1}} \|Tx\|_F\,,\\ &\leq \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|_E\leq 1}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E},\\ &\leq \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.\end{aligned}$$

Ya que $\{x \in E : \|x\|_E \leq 1\} \subset E$ y omitimos el caso en el que $x = 0$ ya que $Tx = 0$ y por ende no es el supremo del conjunto a menos de que T sea el operador nulo.

(III) Note que si usamos la linealidad del operador y de la norma podemos ver que

$$\sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|Tx\|_F$$

luego usando (II) podemos afirmar que

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|Tx\|_F\,.$$

(IV) Note que el conjunto de los M que satisfacen la condición del conjunto no son afectados cuando se divide por la norma de x en ambos lados de la desigualdad, es decir, podemos suponer que los x dados en la condición del conjunto son unitarios. Luego la condición se transforma en ver el menor de los $M > 0$ que satisface $\|Tx\|_F \leq M$ para todo $x \in E$ que satisface $\|x\|_E = 1$, luego por (III) podemos afirmar que este M es precisamente $\|T\|$.

Problema 4:

Sean $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales normales. Suponga que F es un espacio de Banach. Muestre que $L(E, F)$ es un espacio de Banach con la norma usual de $L(E, F)$. En particular, $E^* = L(E, \mathbb{R})$, $E^{**} = L(E^*, \mathbb{R})$ son espacios de Banach.

Solución:

Dado $T \in L(E, F)$ definimos la norma de $L(E, F)$ como

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \|Tx\|_F .$$

Suponga $\{T_n\} \subset L(E, F)$ sucesión de Cauchy y veamos que esta converge a $T \in L(E, F)$.
Note que como $\{T_n\}$ es sucesión de Cauchy, entonces se cumple que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$, entonces

$$\|T_n - T_m\| < \epsilon$$

Pero note que dado $x \in E$ (distinto del nulo) podemos tomar ϵ de la forma $\frac{\epsilon}{\|x\|_E} > 0$ que nos permite afirmar que

$$\begin{aligned} \|T_n x - T_m x\|_F &\leq \|T_n - T_m\| \|x\|_E , \\ &< \frac{\epsilon}{\|x\|_E} \|x\|_E , \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Luego $\{T_n x\} \subset F$ es una sucesión de Cauchy, luego como F es Banach, podemos afirmar que $T_n x \to g_x \in F$ cuando $n \to \infty$.
Siendo así, dado x podemos definir un g_x de la forma anterior, por lo que vamos a definir $T : E \to F$ como $Tx = g_x$, luego podemos afirmar que $T_n \to T$ cuando $n \to \infty$. Ahora, veamos que $T \in L(E, F)$.
Sea α un escalar y $x, y \in E$, entonces

$$\begin{aligned} T(\alpha x + y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + y), \\ &= \lim_{n\to\infty} \alpha T_n(x) + T_n(y), \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} T_n(y), \\ &= \alpha Tx + Ty. \end{aligned}$$

Luego $T \in L(E, F)$ lo que concluye el resultado esperado.

Problema 5:

Sean E y F espacios vectoriales normados. Suponga que E es de dimensión finita (F no necesariamente de dimensión finita).

(I) Muestre que todas las normas asignadas a E son equivalentes[2].

(II) Muestre que toda transformación lineal $T : E \to F$ es continua.

(III) De un ejemplo donde se verifique que (II) puede ser falsa si E es de dimensión infinita.

Solución:

(I) Suponga $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ normas de E espacio vectorial de dimensión finita.
En particular, como E es de dimensión finita sabemos que existe una base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \cdot, e_n\} \subset E$ tal que si tomamos $x \in E$, entonces

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \qquad \text{con } x_i \text{ escalares de } E.$$

Ahora, fijemos $\|x\|_1$ como $\|e_i\|_1 = 1$, luego

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Además, note que en general para $\|x\|_2$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|x\|_2 &= \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right\|_2, \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i e_i\|_2, \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|e_i\|_2, \\
&\leq \max_{i=1,\cdot,n} \|e_i\|_2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \\
&\leq c_2 \|x\|_1 .
\end{aligned}$$

Por otro lado, queremos ver que existe $c_1 > 0$ tal que $c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2$ para todo $x \in E$, en particular, note que si definimos $A = \{x \in E : \|x\|_1\}$, nos queda que $c_1 \leq \|x\|_2$ para todo $x \in A$.
Note que como A es cerrado y acotado (en $\|\cdot\|_1$) y E es de dimensión finita, entonces A

[2] Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas sobre E. Recordemos que dos normas son equivalentes si existen constantes positivas c_1 y c_2, tales que $c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$, para todo $x \in E$.

Problema 5 continúa en la siguiente página...

es compacto, además, veamos que $\|x\|_2$ es continua en la topología de $\|\cdot\|_1$. Note que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \frac{\epsilon}{c_2} > 0$ tal que si

$$\|x - y\|_1 < \delta$$

entonces

$$\begin{aligned} |\|x\|_2 - \|y\|_2| &< |\|x - y\|_2| \,, \\ &< c_2 \|x - y\|_1 \,, \\ &< c_2 \frac{\epsilon}{c_2}, \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Luego, como $\|\cdot\|_2$ es continua en $\|\cdot\|_1$, como A es compacto, entonces $\|x\|_2$ alcanza su mínimo en A, es decir, existe $z \in A$ tal que $\|z\|_2 \leq \|x\|_2$ para todo $x \in A$, luego podemos definir $c_1 = \|z\|_2$, por lo que podemos concluir que existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_1 \|x\| \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 \qquad \text{para todo } x \in E.$$

Ahora, note que esto nos permite concluir que dadas 2 normas cualesquiera estas con equivalentes, ya que mediante $\|x\|_1$ se puede realizar el siguiente cálculo.
Suponga c_{21} y c_{22} las constantes respectivas a la equivalencia entre una norma $\|x\|_1$ y la norma $\|x\|_2$ y por otro lado suponga c_{31} y c_{32} las constantes respectivas a la equivalencia entre la norma $\|x\|_1$ y la norma $\|x\|_3$, veamos que podemos concluir que $\|x\|_2$ y $\|x\|_3$ son equivalentes

$$\|x\|_2 \leq c_{22} \|x\|_1 \leq \frac{c_{22}}{c_{31}} \|x\|_3 \,,$$

por otro lado

$$\|x\|_3 \leq c_{32} \|x\|_1 \leq \frac{c_{32}}{c_{21}} \|x\|_2$$

de lo que se puede concluir que

$$\frac{c_{31}}{c_{22}} \|x\|_2 \leq \|x\|_3 \leq \frac{c_{32}}{c_{21}} \|x\|_3 \,,$$

es decir, las normas $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_3$ son equivalentes, luego como estas son arbitrarias se puede concluir que todas las normas asignadas a E son equivalentes.

(ii) Suponga $T : E \to F$ transformación lineal.
Note que como E es de dimensión finita, podemos asumir que existe una base $\mathcal{B} := \{e_1, e_2, \cdot, e_n\}$, luego dado $x \in E$ lo podemos expresar de la forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Ahora, note que como T es una transformación lineal entonces se cumple que

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_F &= \left\| T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)\right\|_F, \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|Te_i\|_F, \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \max_{i=1,\cdots,n} \|Te_i\|_F, \\
&\leq \max_{i=1,\cdots,n} \|Te_i\|_F \, \|x\|_E, \\
&\leq M \, \|x\|_E.
\end{aligned}$$

Si tomamos $M = \max_{i=1,\cdots,n} \|Te_i\|_F$, luego $\|Tx\|_F \leq M \|x\|_E$ y por ende el operador es continuo, luego como se tomó T arbitrario se concluye que toda transformación lineal de E a F con E de dimensión finita es continua.

(III) Suponga $T : (C[0,2], \|\cdot\|_1 \to (C[0,2], \|\cdot\|_\infty))$ tal que $Tf = f$.
Suponga

$$f_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, \frac{2k-1}{2k}] \cup [\frac{2k+1}{2k}, 2], \\ 2k^2 x - 2a^2 + a, & \text{si } x \in [\frac{2k-1}{2k}, 1], \\ -2k^2 x + 2a^2 + a, & \text{si } x \in [1, \frac{2k+1}{2k}]. \end{cases}$$

Se puede verificar que $\|f_k\|_1 = 1$, no obstante note que $f_k(1) = k$, por lo que funciona como ejemplo para verificar que

$$\sup_{\substack{f \in C[0,1] \\ \|f\|_1 = 1}} \|f\|_\infty = \infty.$$

Con la intención de ser gráfico con el ejercicio veamos la gráfica para algunos valores de k.

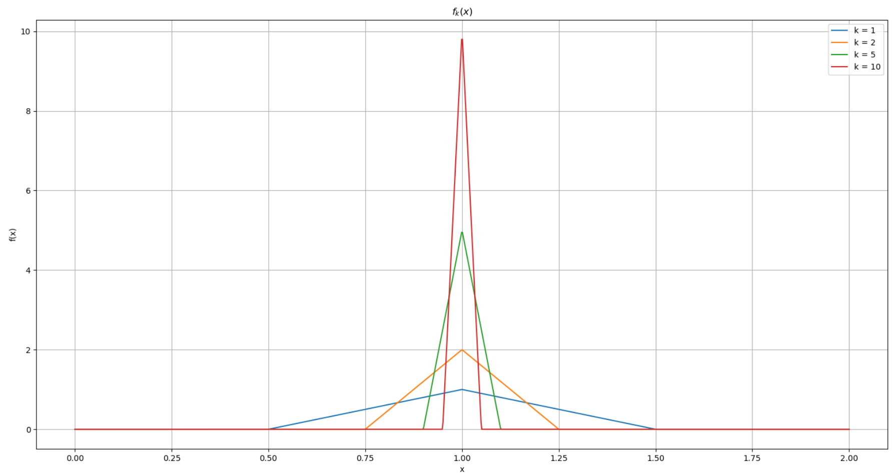

Figura 1: $f_k(x)$ con $k = 1, 2, 5$ y 10.

Problema 6:

Considere $E = c_0$ donde

$$c_0 = \{u = \{u_n\}_{n\geq 1} : \text{ tales que } u_n \in \mathbb{R}, n \geq 1, \lim_{n\to\infty} u_n = 0\}.$$

Es decir, c_0 es el conjunto de las secuencias reales que tienden a 0. Dotamos a este espacio con la norma $\|u\|_{l^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} |u_n|$. Considere el funcional $f : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n.$$

(I) Muestre que $f \in E^*$ y calcule $\|f\|_{E^*}$.

(II) ¿Es posible encontrar $u \in E$ tal que $\|u\| = 1$ y $f(u) = \|f\|_{E^*}$?

Solución:

Solución