UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
Sede Bogotá
Departamento de Matemáticas

2029662 ANÁLISIS ARMÓNICO

PRIMER EXAMEN PARCIAL

MAYO 28 DE 2025

Prof.: **Ricardo Pastrán**

Nombre: ______________________________ D. I.: ____________

1. (1 pto) Pruebe que

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \geq 0, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

es una distribución temperada. Calcule su transformada de Fourier.

2. (2 pts) Para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, pruebe que la transformada de Hilbert $\mathcal{H}$ es un operador de tipo débil (1, 1):

$$\text{existe } C > 0 \text{ tal que} \quad m\Big(\Big\{x \in \mathbb{R} \,:\, |\mathcal{H}f(x)| > \alpha\Big\}\Big) \leq \frac{C}{\alpha}\|f\|_1.$$

3. (1 pto) Para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, pruebe que la transformada de Hilbert $\mathcal{H}$ es un operador de tipo fuerte (p, p) si $1 < p < \infty$.

4. (1 pto) Dada $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, defina $\mathcal{H}f$, la transformada de Hilbert de f. Dada

$$\mathcal{H}_\epsilon f(x) := \frac{1}{\pi}\int_{|y|>\epsilon} \frac{f(x-y)}{y}\,dy \quad \text{para toda } f \in L^p(\mathbb{R}),$$

pruebe que $\mathcal{H}f = \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{H}_\epsilon f$.

5. (1 pto) Dada $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, ¿qué podemos afirmar acerca del límite puntual

$$\mathcal{H}f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{H}_\epsilon f(x)?$$

Justifique su respuesta.