UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Sede Bogotá

Departamento de Matemáticas

2029662 ANÁLISIS ARMÓNICO

LISTA DE EJERCICIOS 1

Prof.: **Ricardo Pastrán** 4 de abril de 2025

1. El objetivo de este ejercicio es probar que la transformada de Fourier

$$\widehat{\ } = \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C^0_\infty(\mathbb{R})$$
$$f \longmapsto \widehat{f}$$

no es sobreyectiva.

($i.$) Pruebe que $(C^0_\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

($ii.$) Use la fórmula de inversión de Fourier para probar que $\mathcal{F}$ es inyectiva.

($iii.$) Suponga que $\mathcal{F}$ es sobreyectiva. Use el teorema de la aplicación abierta para deducir que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|f\|_1 \leq C\left\|\widehat{f}\right\|_\infty, \qquad \forall f \in L^1(\mathbb{R}).$$

($iv.$) Sea $A \geq 1$, defínase

$$\phi_A := \chi_{[-A,A]}, \quad \psi_A := \phi_A * \phi_1 \qquad \text{y} \qquad g_A := \widehat{\psi_A}.$$

Pruebe que

$$\|\widehat{g_A}\|_\infty < \infty, \quad g_A(x) = \frac{\sin(2\pi Ax)\sin(2\pi x)}{(\pi x)^2}, \quad \|g_A\|_{L^1} \to +\infty \text{ cuando } A \to +\infty,$$

y concluya una contradicción con ($iii.$).

2. Sean $B_R := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ y χ_{B_R} la función característica del conjunto B_R. Se define

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathcal{R}} : L^2(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \\ f &\longmapsto \left(\chi_{B_R}\widehat{f}\right)^{\vee}. \end{aligned}$$

($i.$) Probar que $S_R \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$ y que $\|S_R\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq 1$.
($ii.$) Mostrar que para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $S_R f \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ cuando $R \to +\infty$.
($iii.$) Deducir que para cualquier $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, existe una sucesión $R_n \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$ tal que

$$\int_{B_{R_n}} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi \longrightarrow f(x), \quad \text{cuando} \quad n \to +\infty, \quad c.t.p.\, x \in \mathbb{R}^n.$$

($iv.$) Probar que para cualquier $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$: \xi \longmapsto \int_{B_R} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx \longrightarrow \widehat{f}, \quad \text{cuando} \quad R \to +\infty, \text{ en } L^2(\mathbb{R}^n).$$

3. Pruebe que para todo $\lambda > 0$

$$\left(e^{-\lambda\pi|x|^2}\right)^{\wedge}(\xi) = \lambda^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi\frac{|x|^2}{\lambda}}.$$

4. Pruebe que para todo $\lambda > 0$

$$\left(e^{-2\pi\lambda|x|}\right)^{\wedge}(\xi) = c_n \frac{\lambda}{(\lambda^2 + |\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

donde $c_n = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi^{-\frac{n+1}{2}}$.

5. Muestre que $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{x}{1+x^2} \in L^2(\mathbb{R}) - L^1(\mathbb{R})$. Además, pruebe que

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^{\wedge}(\xi) = -i\,\mathrm{sgn}(\xi)\, e^{-2\pi|\xi|}.$$