Ecuaciones Diferenciales Parciales I: Taller 2

08 de marzo del 2024

Universidad Nacional de Colombia

Andrés David Cadena Simons   David Felipe Viuche Malaver

Problema 1:

Considere el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \partial_x^2 u - u &= 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(0,y) &= f(y), & y \in \mathbb{R} \\ \partial_x u(0,y) &= g(y), & y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Donde $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ y se busca una solución $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

I) Encuentre una solución del problema anterior y muestre su unicidad.
Sugerencia: note que como la EDP no depende de y, podemos buscar soluciones como en EDO, es decir, $u(x,y) = c(y)e^{\lambda x}$ para algún λ para la unicidad, muestre que si w es una solución $C^2(\mathbb{R}^2)$ del problema (1) con $f = g = 0$, entonces intgrando la ecuación $\partial_x^2 w - w = 0$ se sigue que:

$$w(x,y) = \int_0^x (x-s)w(s,y)ds$$

Itere la formula anterior (reemplace el valor de w nuevamente por la integral) para mostrar que $w(x,y) = 0$ para cualquier punto arbitrario (x,y).

Solución:

Suponga que $u(x,y) = c(y)e^{\lambda x}$, de aquí tenemos que:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u - u &= c(y)\lambda^2 e^{\lambda x} - c(y)e^{\lambda x} \\ &= c(y)e^{\lambda x}(\lambda^2 - 1) \\ &= c(y)e^{\lambda x}(\lambda - 1)(\lambda + 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como no deseamos que u sea la solución trivial, entonces

De aquí se puede deducir que $\lambda = \pm 1$, luego $u(x,y) = C_1(y)e^x + C_2 e^{-x}$.
Ahora, para cálcular C_1 y C_2 usaremos los datos iniciales, así:

$$\begin{aligned} u(0,y) &= C_1 + C_2 = f(y) \\ \partial_x u(0,y) &= C_1 - C_2 = g(y) \end{aligned}$$

De aquí se puede deducir que:

$$C_1 = \left(\frac{f(y) + g(y)}{2}\right)$$

$$C_2 = \left(\frac{f(y) - g(y)}{2}\right)$$

Luego:

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= C_1(y)e^x + C_2e^{-x}\\
&= \left(\frac{f(y)+g(y)}{2}\right)e^x + \left(\frac{f(y)-g(y)}{2}\right)e^{-x}\\
&= f(y)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) + g(y)\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\\
&= f(y)cosh(x) + g(y)sinh(x)
\end{aligned}$$

Ahora, comprobemos la solución:

$$\begin{aligned}
\partial_x^2 u - u &= \partial_x^2(f(y)cosh(x) + g(y)sinh(x)) - (f(y)cosh(x) + g(y)sinh(x))\\
&= \partial_x(f(y)sinh(x) + g(y)cosh(x)) - (f(y)cosh(x) + g(y)sinh(x))\\
&= (f(y)cosh(x) + g(y)sinh(x)) - f(y)cosh(x) + g(y)sinh(x)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Ahora, para demostrar la unicidad de la solución, vamos a suponer que existe $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que v es solución de (1) con $f = g = 0$, así tome $w = u - v$ y tome $y \in \mathbb{R}$ fijo, entonces:

$$\begin{aligned}
w &= C_1e^x + C_2e^{-x}\\
w(0) &= C_1 + C_2 = 0\\
w'(0) &= C_1 - C_2 = 0
\end{aligned}$$

De aquí podemos deducir que:

$$\begin{aligned}
C_1 &= -C_2\\
C_1 &= C_2
\end{aligned}$$

Luego $C_1 = \pm C_2$, lo que implica que $C_1 = C_2 = 0$.
Así:

$$\begin{aligned}
w(x) &= C_1e^x + C_2e^{-x}\\
&= (0)e^x + (0)e^{-x}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Luego como dado $y \in \mathbb{R}$ arbitrario $w = 0$, entonces podemos concluir en que $w(x,y) = u(x,y) - v(x,y) = 0$, lo que implica que $u(x,y) = v(x,y)$.
Así, podemos concluir que u es solución única del problema de valor inicial (1) con $f = g = 0$

Problema 1 continúa en la siguiente página. . .

II) Sean $f, g, \widetilde{f}, \widetilde{g} \in C^2(\mathbb{R})$ funciones acotadas, tales que existe $\epsilon > 0$ para el cual

$$\|f - \widetilde{f}\|_\infty < \epsilon, \qquad \|g - \widetilde{g}\|_\infty < \epsilon,$$

Donde $\|h\|_\infty = sup_{x\in\mathbb{R}}|h(x)|$. Sean $u(x, y)$ y $\widetilde{u}(x, y)$ soluciones del problema de Cauchy (1) con datos iniciales $f, g, \widetilde{f}, \widetilde{g}$, respectivamente. Muestre que:

$$|u(x, y) - \widetilde{u}(x, y)| \leq \epsilon(|sinh(x)| + |cosh(x)|),$$

Para cualquier $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. ¿Qué puede decir de la dependencia continua de los datos? Es decir, si los datos iniciales están cercanos en la distancia $\|\cdot\|_\infty$, ¿sucede lo mismo con las soluciones del problema de Cauchy (1)?

Solución:

Note que:

$$\begin{aligned}
|u(x, y) - \widetilde{u}(x, y)| &\leq |f(y)cosh(x) + g(y)sinh(x) - \widetilde{f}(y)cosh(x) - \widetilde{g}(y)sinh(x)| \\
&\leq |(f(y) - \widetilde{f}(y))cosh(x) + (g(y) - \widetilde{g}(y))sinh(x)| \\
&\leq |(f(y) - \widetilde{f}(y))cosh(x)| + |(g(y) - \widetilde{g}(y))sinh(x)| \\
&\leq sup_{y\in\mathbb{R}}|f(y) - \widetilde{f}(y)||cosh(x)| + sup_{y\in\mathbb{R}}|g(y) - \widetilde{g}(y)||sinh(x)| \\
&\leq \|f - \widetilde{f}\|_\infty|cosh(x)| + \|g - \widetilde{g}\|_\infty|sinh(x)| \\
&\leq \epsilon|cosh(x)| + \epsilon|sinh(x)| \\
&\leq \epsilon(|cosh(x)| + |sinh(x)|)
\end{aligned}$$

♥

Sobre la dependencia continua no se puede decir mucho al respecto, pues, aunque los datos iniciales estén cercanos en la distancia $\|\cdot\|_\infty$ tendríamos problemas en la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\|u - \widetilde{u}\|_\infty = sup_{x\in\mathbb{R}}|u(x, y - \widetilde{u}(x, y))| &\leq \epsilon(sup_{x\in\mathbb{R}}(|cosh(x)| + |sinh(x)|)) \\
&\leq \epsilon\||cosh| + |sinh|\|_\infty = \infty
\end{aligned}$$

Por ende, en un principio no podemos concluir nada sobre la cercanía de las soluciones, respecto a la cercanía de los datos iniciales.

Problema 2:

Clasifique las siguientes ecuaciones según su tipo y llévelas a su forma canónica.

(I) $4u_{xx} + 12u_{xy} + 5u_{yy} = 6u_x - u_y$

Solución:

Respuesta: Hiperbólica $v_{\xi\eta} = \frac{4}{9}v_\xi + \frac{1}{9}v_\eta$

Note que:

- $a = 4$
- $b = 6$
- $c = 5$
- $g = 6u_x - u_y$

De aquí podemos determinar δ, así:

$$\begin{aligned}\delta(x,y) &= b^2 - ac \\ &= (6)^2 - (4)(5) \\ &= 16 \\ &> 0\end{aligned}$$

Luego podemos concluir en que la EDP es **Hiperbólica**.

a) Paso 1) Solucionar:
Note que en este caso:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \\ &= \frac{(6) \pm \sqrt{(6)^2 - (4)(5)}}{(4)} \\ &= \frac{6 \pm 4}{4} \\ &= \frac{3 \pm 2}{2}\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}y &= \frac{5}{2}x + C_1 \\ y &= \frac{1}{2}x + C_2\end{aligned}$$

Problema 2 continúa en la siguiente página. . .

b) Paso 2) Despejar las constantes:

$$\xi = C_1 = y - \frac{5}{2}x$$
$$\eta = C_2 = y - \frac{1}{2}x$$

c) Paso 3) Verificar:
Suponga $u(x,y) = v(\xi,\eta)$, luego:

- $$\begin{aligned} u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x \\ &= v_\xi\left(-\frac{5}{2}\right) + v_\eta\left(-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} u_y &= v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y \\ &= v_\xi + v_\eta \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} u_{xx} &= \left(-\frac{5}{2}\right)(v_{\xi\xi}\xi_x + v_{\xi\eta}\eta_x) + \left(-\frac{1}{2}\right)(v_{\xi\eta}\xi_x + v_{\eta\eta}\eta_x) \\ &= \left(-\frac{5}{2}\right)\left(v_{\xi\xi}\left(-\frac{5}{2}\right) + v_{\xi\eta}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(v_{\xi\eta}\left(-\frac{5}{2}\right) + v_{\eta\eta}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \left(\frac{25}{4}\right)v_{\xi\xi} + \left(\frac{10}{4}\right)v_{\xi\eta} + \left(\frac{1}{4}\right)v_{\eta\eta} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} u_{xy} &= v_{\xi\xi}\xi_x + v_{\xi\eta}\eta_x + v_{\xi\eta}\xi_x + v_{\eta\eta}\eta_x \\ &= v_{\xi\xi}\left(-\frac{5}{2}\right) + v_{\xi\eta}\left(-\frac{1}{2}\right) + v_{\xi\eta}\left(-\frac{5}{2}\right) + v_{\eta\eta}\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{5}{2}\right)v_{\xi\xi} + (-3)v_{\xi\eta} + \left(-\frac{1}{2}\right)v_{\eta\eta} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} u_{yy} &= v_{\xi\xi}\xi_y + v_{\xi\eta}\eta_y + v_{\xi\eta}\xi_y + v_{\eta\eta}\eta_y \\ &= v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta} + v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\ &= v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \end{aligned}$$

Luego, reemplazando en $4u_{xx} + 12u_{xy} + 5u_{yy} = 6u_x - u_y$ tenemos:

$$\begin{aligned} 4u_{xx} + 12u_{xy} + 5u_{yy} &= 6u_x - u_y \\ v_{\xi\eta} &= \frac{4}{9}v_\xi + \frac{1}{9}v_\eta \end{aligned}$$

(II) $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 4 + 2u_x$

Solución:

Respuesta: Parabólica $v_{\xi\xi} = 2v_\xi + 4v_\eta + 4$

Note que:

- $a = 1$
- $b = -2$
- $c = 4$
- $g = 4 - 2u_x$

De aquí podemos determinar δ, así:

$$\begin{aligned} \delta(x, y) &= b^2 - ac \\ &= (-2)^2 - (1)(4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego podemos concluir en que la EDP es **Parabólica**.

a) Paso 1) Solucionar:
Note que en este caso:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{b}{a} \\ &= -\frac{2}{1} \\ &= -2 \end{aligned}$$

Luego:

$$y = -2x + C_1$$

b) Paso 2) Despejar las constantes:

$$\eta = C_1 = y + 2x$$

Ahora, para calcular ξ usaremos el determinante de la matrix Jacobiana asegurandonos que este mismo sea distinto de 0, así podrá notar que $\xi = y + x$ satisface:

$$\begin{aligned} \eta_x - 2\eta_y &= 1 - 2 \\ &= -1 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

c) Paso 3) Verificar:
Suponga $u(x, y) = v(\xi, \eta)$, luego:

- $$\begin{aligned} u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x \\ &= v_\xi + 2v_\eta \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} u_y &= v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y \\ &= v_\xi + v_\eta \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} u_{xx} &= (v_{\xi\xi}\xi_x + v_{\xi\eta}\eta_x) + 2(v_{\xi\eta}\xi_x + v_{\eta\eta}\eta_x) \\ &= v_{\xi\xi} + 4v_{\xi\eta} + 4v_{\eta\eta} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} u_{xy} &= v_{\xi\xi}\xi_x + v_{\xi\eta}\eta_x + v_{\xi\eta}\xi_x + v_{\eta\eta}\eta_x \\ &= v_{\xi\xi} + 3v_{\xi\eta} + 2v_{\eta\eta} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} u_{yy} &= v_{\xi\xi}\xi_y + v_{\xi\eta}\eta_y + v_{\xi\eta}\xi_y + v_{\eta\eta}\eta_y \\ &= v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta} + v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\ &= v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \end{aligned}$$

Luego, reemplazando en $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 4 + 2u_x$ tenemos:

$$\begin{aligned} u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} &= 4 + 2u_x \\ v_{\xi\xi} &= 2v_\xi + 4v_\eta + 4 \end{aligned}$$

(III) $(1+x^2)^2 u_{xx} - (1+y^2)^2 u_{yy} = 0$

Solución:

Respuesta: Hiperbólica

$$v_{\xi\eta} = \left(\frac{tan\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right)}{2} + \frac{tan\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)}{2} \right) v_\xi + \left(\frac{tan\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)}{2} - \frac{tan\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right)}{2} \right) v_\eta$$

Note que:

- $a = (1+x^2)^2$
- $b = 0$
- $c = -(1+y^2)^2$
- $g = 0$

De aquí podemos determinar δ, así:

$$\begin{aligned}
\delta(x,y) &= b^2 - ac \\
&= (0)^2 - (1+x^2)^2(-(1+y^2)^2) \\
&= (1+x^2)^2(1+y^2)^2 \\
&> 0
\end{aligned}$$

Luego podemos concluir en que la EDP es **Hiperbólica**.

a) Paso 1) Solucionar:
Note que en este caso:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \\
&= \pm \frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1+x^2)^2} \\
&= \pm \frac{1+y^2}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
arctan(y) &= arctan(x) + C_1 \\
arctan(y) &= -arctan(x) + C_2
\end{aligned}$$

b) Paso 2) Despejar las constantes:

$$\begin{aligned}
\xi = C_1 &= arctan(y) - arctan(x) \\
\eta = C_2 &= arctan(y) + arctan(x)
\end{aligned}$$

c) Paso 3) Verificar:
Suponga $u(x,y) = v(\xi,\eta)$, luego:

- $$\begin{aligned} u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x \\ &= \left(\frac{1}{1+x^2}\right)(-v_\xi + v_\eta) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} u_y &= v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y \\ &= \left(\frac{1}{1+y^2}\right)(v_\xi + v_\eta) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} u_{xx} &= \left(\frac{1}{1+x^2}\right)(-v_{\xi\xi}\xi_x - v_{\xi\eta}\eta_x + v_{\xi\eta}\xi_x + v_{\eta\eta}\eta_x) - \left(\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)(-v_\xi + v_\eta) \\ &= \left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\eta_x) - \left(\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)(-v_\xi + v_\eta) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} u_{yy} &= \left(\frac{1}{1+y^2}\right)(v_{\xi\xi}\xi_x + v_{\xi\eta}\eta_x + v_{\xi\eta}\xi_x + v_{\eta\eta}\eta_x) - \left(\frac{2y}{(1+y^2)^2}\right)(v_\xi + v_\eta) \\ &= \left(\frac{1}{(1+y^2)^2}\right)(v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\eta_x) - \left(\frac{2y}{(1+y^2)^2}\right)(v_\xi + v_\eta) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} arctan(y) &= \frac{\xi+\eta}{2} \\ y &= tan\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) \\ arctan(x) &= \frac{\eta-\xi}{2} \\ x &= tan\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right) \end{aligned}$$

Luego, reemplazando en $(1+x^2)^2 u_{xx} - (1+y^2)^2 u_{yy} = 0$ tenemos:

$(1+x^2)^2 u_{xx} - (1+y^2)^2 u_{yy} = 0$

$$\begin{aligned} -4v_{\xi\eta} &= -2xv_\xi + 2xv_\eta - 2yv_\xi - 2yv_\eta \\ v_{\xi\eta} &= \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)v_\xi + \left(\frac{y}{2} - \frac{x}{2}\right)v_\eta \\ v_{\xi\eta} &= \left(\frac{tan\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right)}{2} + \frac{tan\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)}{2}\right)v_\xi + \left(\frac{tan\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)}{2} - \frac{tan\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right)}{2}\right)v_\eta \end{aligned}$$

Problema 3:

Considere la ecuación

$$u_{xx} + 4u_{xy} + u_x = 0. \tag{1}$$

(I) Lleve la ecuación a su forma canónica.

Solución:

Primero calculemos su determinante para identificar si es de tipo hiperbólico, elíptico o parabólico. Tenemos $a = 1, b = 2, c = 0$. Luego $\Delta = b^2 - ac = 2^2 - (1)(0) = 4 > 0$, por lo tanto la EDP es de tipo hiperbólico en el plano xy.
Tenemos entonces que el cambio de variables está dado por las ecuaciones características.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - (1)(0)}}{1} = 2 \pm 2, \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = (2 \pm 2), \qquad \text{solucionando la EDO tenemos,} \tag{3}$$

$$y = (2 \pm 2)x + c, \tag{4}$$

al igualar a la constante obtenemos los cambios de variables ξ y η. De este modo, nos queda $\xi = y - 4x$, $\eta = y$. Ahora veamos las derivadas de u en términos de ξ y η.

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi(-4) + u_\eta(0) \\ &= -4u_\xi, \\ u_{xx} &= -4(u_\xi)_x = -4(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) = -4(u_{\xi\xi}(-4) + u_{\eta\xi}(0)) \\ &= 16u_\xi\xi. \qquad\qquad \text{y} \\ u_{xy} &= -4(u_\xi)_y = -4((u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) = -4(u_{\xi\xi}(1) + u_{\xi\eta}(1)) \\ &= -4(u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}). \end{aligned}$$

Por lo que al reemplazar, 1 nos queda:

$$\begin{aligned} 16u_{\xi\xi} + 4(-4)(u_{\xi\eta}) - 4u\xi &= 0 \\ 16u_{\xi\xi} - 16u_{\xi\xi} - 16u_{\xi\eta} - 4u_\xi &= 0 \\ 16u_{\xi\eta} + 4u_\xi &= 0 \end{aligned}$$

Al dividir la igualdad por 4 tenemos que la forma canónica de 1 es:

$$4u_{\xi\eta} + u_\xi = 0. \tag{5}$$

♥

(II) Encuentre la solución específica $u(x, 8x) = 0, u_x(x, 8x) = 4e^{-2x}$.

Solución:

Si tomamos $w(\eta) = u_\xi$ en la ecuación 5 nos queda una EDO de orden 1 que podemos solucionar por variables separables como sigue:

$$\begin{aligned} 4w' &= -w, \\ \frac{4dw}{w} &= -d\eta, \\ 4log(w) &= -\eta + h(\xi), \\ w^4 &= h(\xi)e^{-\eta}, \end{aligned}$$

luego,

$$w = u_\xi = h(\xi)e^{-\frac{\eta}{4}}. \tag{6}$$

Integrando respecto a la variable ξ nos queda

$$u(\xi, \eta) = e^{\frac{-\eta}{4}}(H(\xi) + C(\eta)),$$

con H siendo una antiderivada de h. Luego, al regresar a x e y obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, y) &= e^{-\frac{-y}{4}}(H(y - 4x) + C(y)), \text{ al derivar respecto a } x \text{ y usar las condiciones iniciales para } u_x, \\ u_x(x, 8x) &= -4e^{-2x}H'(4x) = 4e^{-2x}H'(4x), \text{ por lo que} \\ H'(4x) &= -1, \text{ y al integrar respecto a x llegamos a} \\ H(4x) &= -4x, \text{ de modo que} \\ H\left(4(\frac{y}{4} - x)\right) &= 4x - y = H(y - 4x). \end{aligned}$$

Y al usar a condición inicial sobre u tenemos

$$u(x, 8x) = e^{-2x}(H(4x) + C(8x)) = 0$$

Como el factor exponencial nunca es cero, entonces $(H(4x) + C(8x)) = 0$, luego $4x = C(8x)$, por lo que $C\left(8(\frac{x}{8})\right) = 4\left(\frac{x}{8}\right) = \frac{x}{2} = C(x)$.

Por lo tanto la solución específica $u(x, y) = e^{-\frac{y}{4}}(4x - \frac{y}{2})$

♥

Problema 4:

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto. Considere la ecuación de segundo orden:

$$a(x,y)u_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0$$

Donde $u : U \to \mathbb{R}$ pertenece a $C^2(U)$ y los términos a, b, c son funciones $C^1(U)$.
Definimos el determinante de la ecuación por:

$$\delta(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y)$$

Considere el cambio de variable:

$$\xi = \xi(x,y)$$
$$\eta = \eta(x,y)$$

Donde las funciones son de clase $C^2(U)$ y el Jacobiano $det\left((\xi\eta)_{(x,y)}\right) \neq 0$ en todo punto $(x,y) \in U$. Muestre que el signo del determinante $\delta(x,y)$ es invariante por el cambio de variables (ξ, η). Es decir, considere $u(x,y) = v(\xi,\eta)$, usando que u satisface la ecuación muestre que v satisface la siguiente ecuación:

$$A(\xi,\eta)v_{\xi\xi} + 2B(\xi,\eta)v_{\xi\eta} + C(\xi,\eta) = G(\xi,\eta,v,v_\xi,v_\eta)$$

Para agunas funciones A, B, C, G. Luego muestre que el signo de $\delta(\xi,\eta) = B^2(\xi,\eta) - A(\xi,\eta)C(\xi,\eta)$ es igual al signo de $\delta(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y)$.

Solución:

Suponiendo que $u(x,y) = v(\xi,\eta)$ y que $v(\xi,\eta)$ es $C^2(U)$ vamos a calcular sus derivadas de primer y segundo orden, por ende:

- $u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x$
- $u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y$
- $u_{xx} = \xi_x^2 v_{\xi\xi} + 2\xi_x \eta_x v_{\xi\eta} + \eta_x^2 v_{\eta\eta}$
- $u_{yy} = \xi_y^2 v_{\xi\xi} + 2\xi_y \eta_y v_{\xi\eta} + \eta_y^2 v_{\eta\eta}$
- $u_{xy} = \xi_x \xi_y v_{\xi\xi} + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) v_{\xi\eta} + \eta_x \eta_y v_{\eta\eta}$

Ahora, reemplazando:

$$\begin{aligned} au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0 & \\ &= a(\xi_x^2 v_{\xi\xi} + 2\xi_x\eta_x v_{\xi\eta} + \eta_x^2 v_{\eta\eta}) + 2b(\xi_x\xi_y v_{\xi\xi} + (\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x)v_{\xi\eta} + \eta_x\eta_y v_{\eta\eta}) \\ &\quad + c(\xi_y^2 v_{\xi\xi} + 2\xi_y\eta_y v_{\xi\eta} + \eta_y^2 v_{\eta\eta}) \\ &= v_{\xi\xi}(a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2) + 2v_{\xi\eta}(a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y) \\ &\quad + v_{\eta\eta}(a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2) \end{aligned}$$

Problema 4 continúa en la siguiente página. . .

De aquí podemos concluir en que:

- $A = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2$
- $B = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y$
- $C = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2$

Ahora para calcular el determinante calcularemos las expresiones B^2 y $-AC$ (con mucha paciencia en el trabajo borrador), así:

$$\begin{aligned}B^2 =&(a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y)\\ =&a^2\xi_x^2\eta_x^2 + 2ab\xi_x^2\eta_x\eta_y + 2ab\xi_x\xi_y\eta_x^2 + 2av\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + b^2\xi_x^2\eta_y^2\\ &+ 2b\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + b^2\xi_y^2\eta_x^2 + 2bc\xi_x\xi_y\eta_y^2 + 2bc\xi_y^2\eta_x\eta_y + c^2\xi_y^2\eta_y^2\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}-AC =&-(a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2)(a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2)\\ &- a^2\xi_x^2\eta_x^2 - 2ab\xi_x^2\eta_x\eta_y - ac\xi_x^2\eta_y^2 - 2ab\xi_x\xi_y\eta_x^2\\ &- 4b^2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y - 2bc\xi_x\xi_y\eta_y^2 - ac\xi_y^2\eta_x^2 - 2bc\xi_y^2\eta_x\eta_y - c^2\xi_y^2\eta_y^2\end{aligned}$$

Luego de esto podremos calcular $\delta(\xi,\eta) = B^2 - AC$, así:

$$\begin{aligned}B^2 - AC &= 2(ac-b^2)\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + (b^2-ac)\xi_y^2\eta_x^2 + (b^2-ac)\xi_x^2\eta_y^2\\ &= (b^2-ac)\xi_x^2\eta_y^2 - 2(b^2-ac)\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + (b^2-ac)\xi_y^2\eta_x^2\\ &= (b^2-ac)(\xi_x^2\eta_y^2 - 2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + \xi_y^2\eta_x^2)\\ &= (b^2-ac)(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2\end{aligned}$$

Luego como $(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2$ es una función siempre positiva (distinta de cero ya que el determinante del Jacobiano es distinto de 0 en todo punto $(x,y) \in U$), entonces el signo de $\delta(\xi,\eta)$ está totalmente determinado y es igual al signo de $\delta(x,y) = b^2 - ac$.

♥