LISTA DE EJERCICIOS 3: ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES I

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, BOGOTÁ

PRIMER SEMESTRE 2024

PROFESOR: OSCAR RIAÑO

1. Preliminares y ecuación de Laplace

Ejercicio 1. *Sea U un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ tal que su borde $\partial U = \overline{U} \setminus U$ es de clase C^1. Muestre:*

i) **Formula de integración por partes**: *Sean $i = 1, \ldots, n$ fijo, $u, v \in C^1(\overline{U})$. Entonces*

$$\int_U (\partial_{x_i} u) v \, dx = \int_{\partial U} (uv)\eta_i \, dS - \int_U u(\partial_{x_i} v) \, dx,$$

donde η_i es la i-ésima componente del vector normal a ∂U.

ii) **Formula de Green I**: *$\int_U \Delta u \, dx = \int_{\partial U} \nabla u \cdot \eta \, dS$, donde η es el vector normal a la superficie ∂U.*

iii) **Formula de Green II**: *$\int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx = -\int_U u \Delta v \, dx + \int_{\partial U} u(\nabla v \cdot \eta) \, dS$.*

iv) **Formula de Green III**: *$\int_U \big(u\Delta v - v\Delta u\big) \, dx = \int_{\partial U} \big(u(\nabla v \cdot \eta) - v(\nabla u \cdot \eta)\big) \, dS$.*

Sugerencia. Asuma sin demostrar que vale el teorema de la divergencia, el cual nos dice que dado $F \in C^1(\overline{U}; \mathbb{R}^n)$ un campo vectorial, se tiene

$$\int_U div(F) \, dx = \int_{\partial U} F \cdot \eta \, dx,$$

donde sí $F = (F_1, \ldots, F_n)$, $div(F) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$.

Para mostrar i) haga $F = (0, \ldots, \underbrace{uv}_{\text{posición } i}, \ldots, 0)$ y aplique el teorema de la divergencia. ii) se sigue de (i) haciendo $v = 1$ y utilizando la definición del Laplaciano. iii) también se sigue de i). Para iv) sume las dos fórmulas de iii) obtenidas de intercambiar a u por v.

Ejercicio 2. *Considere la función $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \eta(x)$ dada por*

$$\eta(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2 - 1}}, & si \ |x| < 1, \\ 0 & si \ |x| \geq 1, \end{cases}$$

donde C es tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) \, dx = 1$. La función anterior se llama un mollifier. Dado $\epsilon > 0$ definimos $\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \eta\big(\frac{x}{\epsilon}\big)$.

i) *Muestre que $\eta_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Además muestre que $supp(\eta_\epsilon) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \eta_\epsilon(x) \neq 0\}} = \overline{B(0, \epsilon)}$.*

ii) *Sea* $f \in C(\mathbb{R}^n)$. *Utilizando la convolución definimos* $f^\epsilon = \eta_\epsilon * f$, $\epsilon > 0$[1]. *Muestre que* $f^\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *y que* $f^\epsilon \to f$ *uniformemente en compactos* $K \subset \mathbb{R}^n$ *cuando* $\epsilon \to 0^+$.

Ejercicio 3. *Muestre que la ecuación de Laplace* $\Delta u = 0$ *es invariante por rotaciones. Más precisamente, muestre que si* O *es una matriz ortogonal de tamaño* $n \times n$ *y definimos* $v(x) = u(Ox)$, *entonces* $\Delta v = 0$.

Ejercicio 4. *Asuma que* u *es armónica en* U. *Sea* $k \in \mathbb{Z}^+$, *muestre que existe una constante* $C_k > 0$ *tal que*

$$|\partial^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

para cada bola $B(x_0, r) \subset U$ *y cada multi-índice* α *de orden* $|\alpha| = k$. *Recuerde que*

$$\|u\|_{L^1(B(x_0,r))} = \int_{B(x_0,r)} |u(x)|\, dx.$$

Sugerencia. *Justificar la demostración hecha en el libro de Evans, Partial Differential Equations, segunda edición página 29.*

Ejercicio 5. *Asuma que* $g \in C(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$[2] *y defina* u *como*

$$u(x) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\, dy,$$

$x \in \mathbb{R}^n_+$. *Muestre que*

i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$.
ii) $\Delta u = 0$ *en* $\mathbb{R}^n_+$.
iii) $\lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in \mathbb{R}^n_+}} u(x) = g(x^0)$ *para cada punto* $x^0 \in \partial \mathbb{R}^n_+$.

Sugerencia. *Justificar la demostración hecha en el libro de Evans, Partial Differential Equations, segunda edición, Teorema 14 página 37.*

Ejercicio 6. *En* $\mathbb{R}^2$, *encuentre la función de Green para el primer cuadrante* $U = \{(x, y) : x > 0,\ y > 0\}$. *Verifique su respuesta.*

Sugerencia. *Recuerde que la función de Green viene dada por* $G(x, y) = \Phi(y - x) - \phi^x(y)$ *donde*

$$\begin{cases} -\Delta \phi^x = 0 & \text{en } U, \\ \quad \phi^x = \Phi(y-x) & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

Una manera de encontrar la función ϕ^x *es escribirla como suma de diferentes proyecciones de* $\Phi(x - y)$ *sobre cada cuadrante (siga una idea similar a lo hecho para el caso* $\mathbb{R}^n_+$*).*

Ejercicio 7. *Sea* U *un abierto de* $\mathbb{R}^n$. *Decimos que una función* $v \in C^2(\overline{U})$ *es subarmónica si*

$$-\Delta v \leq 0, \qquad \text{en } U.$$

---

[1] Recordemos que dadas funciones f y g con "apropiadas" propiedades de integración, la convolución $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy$.

[2] Recuerde que dado $U \subset \mathbb{R}^n$, $f \in L^\infty(U)$ si y solo si $\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in U} |f(x)| < \infty$, es decir, si f es una función acotada en casi todo punto.

i) *Demuestre que si v es subarmónica, entonces*

$$v(x) \leq \fint_{B(x,r)} v\,dy, \text{ para toda } B(x,r) \subset U.$$

Sugerencia. *Argumente como en la demostración de la propiedad del valor medio para la ecuación de Laplace, es decir, considere $\phi(r) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS(y)$ y calcule $\phi'(r)$.*

ii) *Como consecuencia demuestre que si U es conexo $\max_{\overline{U}} v = \max_{\partial U} v$.*

iii) *Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función suave convexa ($\phi'' \geq 0$). Demuestre que si u es armónica, entonces la función $v = \phi(u)$ es subarmónica.*

iv) *Demuestre que si u es armónica, entonces $v = |\nabla u|^2$ es subarmónica.*

Ejercicio 8. *Sean U un abierto acotado con borde suave y $u \in C^2(\overline{U})$ la solución del problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } U, \\ u = g & \text{en } \partial U, \end{cases} \tag{1}$$

donde f y g son funciones continuas. Definimos el conjunto $\mathcal{A} = \{w \in C^2(\overline{U}) : w = g \text{ en } \partial U\}$ y el funcional de energía

$$E[w] = \int_U \left(\frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf\right) dx.$$

Muestre que

$$E[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} E[w].$$

Es decir, soluciones de la EDP (1) minimizan el funcional de energía $E[\cdot]$.

Sugerencia. *Sea $w \in \mathcal{A}$, puesto que u soluciona (1), tenemos que $-\Delta u - f = 0$ en U y por tanto*

$$0 = \int_U (-\Delta u - f)(u - w)\,dx.$$

Integre por partes la expresión anterior para obtener el resultado deseado. Recuerde que la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica $|\nabla u \cdot \nabla v| \leq |\nabla u||\nabla w| \leq \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla v|^2$.

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá
Email address: ogrianoc@unal.edu.co