Análisis Armónico: Taller 2

18 de mayo de 2025

Universidad Nacional de Colombia

Ricardo Ariel Pastrán Ramirez

Andrés David Cadena Simons   acadenas@unal.edu.co

Problema 1:

Convolución

(I) Pruebe que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p \leq 2$, entonces

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$$

en $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

(II) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, donde $1 < p < \infty$, entonces $f * g \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$. ¿Qué se puede afirmar cuando $p = 1$ o $p = \infty$?

Antes de comenzar será de utilidad demostrar la siguiente desigualdad.

Lema 1: Desigualdad de Young

Suponga $p, q, r \leq 1$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. Luego dadas $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Definamos T_g al operador

$$T_g(f) = f * g.$$

Veamos que $T_g : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ es un operador acotado ya que usando la desigualdad de Minkowski.

$$\begin{aligned}
\|T_g(f)\|_q &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}, \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) \, dy \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y) g(x-y)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} dy, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} dy, \\
&\leq \|g\|_q \|f\|_1 .
\end{aligned}$$

Por otro lado también podemos ver que $T_g : L^{q'}(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ya que usando la desigualdad de Hölder podemos ver que

$$\begin{aligned}
\|T_g(f)\|_\infty &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\, dx \right|, \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|\, dy \right|, \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{q'}\, dy \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^{q}\, dy \right)^{\frac{1}{q}}, \\
&\leq \|g\|_q \|f\|_{q'}.
\end{aligned}$$

Luego, usando el teorema de interpolación de Riesz-Thorin sabemos que podemos definir T_g : $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^r(\mathbb{R}^n)$ con

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} &= \frac{1-t}{1} + \frac{t}{q'}, \\
\frac{1}{r} &= \frac{1-t}{q}.
\end{aligned}$$

Lo que implica

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1,$$

lo que concluye el lema.

Solución:

(I) Veamos que $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ya que usando la desigualdad integral de Minkowski's se cumple que

$$\begin{aligned}
\|f*g\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\, dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} dy, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} dy, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, \|g\|_p\, dy, \\
&\leq \|f\|_1 \|g\|_p.
\end{aligned}$$

Ahora veamos que $\widehat{f*g} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, ya que usando el teorema de interpolación de

Riesz-Thorin podemos ver que como

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n),$$
$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n).$$

Luego podemos definir $\mathcal{F} : L^p \to L^q(\mathbb{R}^n)$ con

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{1} + \frac{t}{2},$$
$$\frac{1}{q} = \frac{t}{2}.$$

Lo que implica que

$$\frac{1}{p} - 1 + \frac{2}{q} = \frac{1}{q},$$

que a su vez implica que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

en donde sabemos que $q = p'$, lo que nos permite concluir que $\widehat{f * g} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.
Ahora veamos que se cumple la propiedad.
Recuerde que si $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces $g \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$, suponga $g_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que $g = g_1 + g_2$, además, suponga $\{g_k\} \subseteq L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que $g_k \to g_2$ cuando $k \to \infty$, entonces

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= (f * \widehat{(g_1 + g_2)})(\xi), \\
&= \widehat{f * g_1}(\xi) + \widehat{f * g_2}(\xi), \\
&= \widehat{f * g_1}(\xi) + \lim_{k\to\infty} \widehat{f * g_k}(\xi), \\
&= \widehat{f}(\xi)\widehat{g_1}(\xi) + \lim_{k\to\infty} \widehat{f}(\xi)\widehat{g_k}(\xi), \\
&= \widehat{f}(\xi)\widehat{g_1}(\xi) + \widehat{f}(\xi)\widehat{g_2}(\xi), \\
&= \widehat{f}(\xi)\left(\widehat{g_1}(\xi) + \widehat{g_2}(\xi)\right), \\
&= \widehat{f}(\xi)\widehat{g_1 + g_2}(\xi), \\
&= \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

Lo que concluye el resultado.

(II) Veamos que $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$.
Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (este viene dado por la continuidad de las traslaciones en $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, es decir que $\lim_{h\to 0} \|g(x+h) - g(x)\|_{p'} = 0$) tal que si

$$|x - y| < \delta,$$

entonces usando la desigualdad de Young y la continuidad de las traslaciones de la norma en $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ (es este caso tomamos ese ϵ como $\frac{\epsilon}{\|f\|_p}$) se tiene que

$$\begin{aligned}
|(f*g)(x)-(f*g)(y)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)\,dz - \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(y-z)\,dz\right|, \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(z)\left(g(x-z)-g(y-z)\right)\,dz\right|, \\
&\leq \sup_{z\in\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(z)\left(g(x-z)-g(y-z)\right)\,dz\right|, \\
&\leq \left\|f*(g(y-\cdot)-g(x-\cdot))\right\|_\infty, \\
&\leq \|f\|_p \, \|g(y)-g(x)\|_{p'} \\
&< \|f\|_p \frac{\epsilon}{\|f\|_p}, \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir que $f*g \in C(\mathbb{R}^n)$.
Ahora veamos que $f*g(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$.
Suponga $\{g_k\} \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ (continua de soporte compacto) tal que $g_k \to g$ cuando $k \to \infty$, sin pérdida de generalidad suponga $supp(g_k) \subset B_k(0)$, luego dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $k > N$, entonces

$$\|g-g_k\|_{p'} < \epsilon.$$

Además, note que como $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, podemos asegurar que dado $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que si $k > R$, entonces

$$\left(\int_{|x|>k} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Luego tomando k adecuado que cumpla las 2 condiciones anteriores se cumple que

$$\begin{aligned}
|(f*g)(x)| &= |(f*(g_k+g-g_k))(x)|, \\
&= |(f*g_k(x))| + |(f*(g-g_k))(x)|, \\
&= I + J.
\end{aligned}$$

Estudiemos I y supongamos $|x| > 2k$, entonces

$$\begin{aligned}
|(f * g_k)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g_k(x-y)\, dy \right|, \\
&\leq \int_{B_k(x)} |f(y) g_k(x-y)|\ dy, \\
&\leq \|g_k\|_\infty \int_{B_k(x)} |f(y)|\, dy, \\
&\leq \|g_k\|_\infty \int_{|y| \geq k} |f(y)|\, dy, \\
&< \|g_k\|\, \epsilon.
\end{aligned}$$

Ahora estudiemos J, usando la desigualdad de Young se tiene que

$$\begin{aligned}
|(f * (g - g_k))(x)| &\leq \|(f * (g - g_k))\|_\infty, \\
&\leq \|f\|_p \|g - g_k\|_{p'}, \\
&< \|f\|_p\, \epsilon.
\end{aligned}$$

luego tenemos que tomando x suficientemente grande y un k adecuado se cumple que

$$\begin{aligned}
|(f * g)(x)| &= I + J, \\
&< \|g_k\|\, \epsilon + \|f\|\, \epsilon, \\
&< M\epsilon.
\end{aligned}$$

Por lo que podemos asegurar que $(f * g)(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$, lo que concluye el ejercicio.

Problema 2:

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, f es continua en 0 y $\widehat{f} \geq 0$ entonces $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Solución:

Usemos el núcleo del calor

$$g_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|}{4t}},$$

en donde

$$\widehat{g_t}(\xi) = e^{-4\pi^2 t|\xi|^2}.$$

Note que usando que g_t es par y propiedades de la transformada de Fourier se cumple que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g_t(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g_t(-x)\,dx,\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{\widehat{g_t}}(x)\,dx,\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\widehat{g_t}(\xi)\,d\xi.\end{aligned}$$

Además si tomamos $t \to 0$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g_t(x)\,dx = f(0).$$

Luego como $\widehat{f} \geq 0$ y $\widehat{f}(\xi)e^{-4\pi^2 t|\xi|^2} \to \widehat{f}(\xi) \to \widehat{f}(\xi)$ de manera creciente y monótona cuando $t \to 0$, usando el teorema de la convergencia monótona tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{f}\right\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\,d\xi,\\ &= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\widehat{g_t}(\xi)\,d\xi,\\ &= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g_t(x)\,dx,\\ &= f(0).\end{aligned}$$

Problema 3:

Producto de convolución $\mathcal{S}' * \mathcal{S}$.

(I) Sean f, ϕ y $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pruebe que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f * \phi(x)\psi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widetilde{\phi} * \psi(x)\, dx,$$

donde $\widetilde{\phi}(x) = \phi(-x)$. Esto motiva la siguiente definición: Sean $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$T * \phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \psi \longmapsto T * \phi(\psi) := T(\widetilde{\phi} * \psi).$$

Pruebe que $T * \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y que

$$\widehat{(T * \phi)} = \widehat{T}\widehat{\phi} \quad \text{en} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

(II) Por otro lado, si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se define:

$$T *_1 \phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longmapsto T *_1 \phi(x) := T(\tau_x \widetilde{\phi}),$$

donde $\tau_x \phi(y) = \phi(y - x)$. Pruebe entonces que

$$T *_1 \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{y} \quad T *_1 \phi = T * \phi.$$

Solución:

Solución

Problema 4:

Topología sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} d : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) &\longrightarrow \mathbb{R}+ \\ (\phi, \psi) &\longmapsto \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n} 2^{-(|\alpha|+|\beta|)} \frac{\|\phi - \psi\|_{\alpha,\beta}}{1 + \|\phi - \psi\|_{\alpha,\beta}} \end{aligned}$$

(I) Pruebe que $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n); d)$ es un espacio métrico completo.

(II) Pruebe que para cualquier sucesión $(\phi_k)_k \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, vale

$$\phi_k \xrightarrow{d} \phi \text{ si y solo si } \|\phi_k - \phi\|_{\alpha,\beta} \to 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$$

(III) Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pruebe que

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ si y solo si } x^\alpha \partial^\beta f \in L^2(\mathbb{R}^n), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

(IV) Muestre que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ \phi &\longmapsto \widehat{\phi} \end{aligned}$$

es un isomorfismo topológico.

Solución:

Solución

Problema 5:

Valor principal.
Definimos

$$v.p.\left(\frac{1}{x}\right) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C},$$
$$\phi \longmapsto \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx.$$

Pruebe que $v.p.\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y calcule $\left(\widehat{v.p.\left(\frac{1}{x}\right)}\right)$.

Solución:

Solución