Ecuaciones Diferenciales Parciales I **Segundo Parcial**

Instrucciones.

- Esta es la parte escrita del segundo examen parcial. Justifique sus respuestas plenamente.
- **Entregue la solución de solo tres de las siguientes preguntas. Puede escoger**.

Preguntas:

1. Demuestre que $\Delta u(x) = \Delta u(x_1, \ldots, x_n) = 0$ también implica que
$$\Delta\left(|x|^{2-n} u\Big(\frac{x}{|x|^2}\Big)\right) = 0$$
para $\frac{x}{|x|^2}$ en el dominio de definición de u.

2. El bilaplaciano Δ^2 se define como $\Delta^2 f = \Delta(\Delta f)$.

   i) Encontrar todas las soluciones radiales de la ecuación biarmónica $\Delta^2 u = 0$ en n dimensiones.

   ii) Encontrar una solución fundamental de $\Delta^2 u = 0$.

   Sugerencia. Primero, muestre que el Laplaciano para funciones radiales $\psi(r)$ satisface $\frac{1}{r^{n-1}}\frac{d}{dr}(r^{n-1}\psi')$. Para i) la idea formalmente es solucionar un Laplaciano a la vez, esto es, defina $\psi = \Delta\phi$, solucione primero la ecuación $\frac{1}{r^{n-1}}\frac{d}{dr}(r^{n-1}\psi') = 0$, luego solucione ϕ de la ecuación $\psi = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{d}{dr}(r^{n-1}\phi')$. Para ii), siguiendo la notación anterior, busque que ψ sea igual a la solución fundamental de la ecuación de Laplace y luego resuelva para ϕ.

3. Sea $f \in C_c(\mathbb{R})$, es decir, f es continua con soporte compacto y sea u la solución de la ecuación del calor $u_t - u_{xx} = 0$ en $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, dada por $u(x,t) = \big(\Phi(\cdot,t) * f\big)(x)$, donde $\Phi(x,t)$ denota la solución fundamental de esta ecuación en una dimensión.

   i) Dado $k \geq 0$ entero, definimos el k-ésimo momento como
   $$M_k(f) := \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx.$$
   Muestre que los primeros momentos M_0 y M_1 son conservados por la solución u, es decir, $M_0(u(\cdot,t)) = M_0(f)$, $M_1(u(\cdot,t)) = M_1(f)$ para todo $t \geq 0$.

   Sugerencia. Una parte importante de este ejercicio es mostrar que los momentos de $u(x,t)$ están definidos. Para esto, puede utilizar sin demostrar la desigualdad de Young $\|h * g\|_{L^1} \leq \|h\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$, donde recordamos que $\|h\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|\, dx$. Demuestre también que $\|x(h * g)\|_{L^1} \leq \|(xh) * g\|_{L^1} + \|h * (xg)\|_{L^1}$. Una vez se tenga la validez de los momentos, derive respecto a t cada $M_k(u(x,t))$ para obtener el resultado buscado.

   ii) Muestre que para cada $t > 0$, $u(x,t)$ se puede extender como función analítica en la variable espacial, esto es, $z = \xi + i\eta \to u(z,t)$ define una función analítica y
   $$\begin{aligned} |u(\xi + i\eta, t)| \leq & e^{\frac{\eta^2}{4t}} \Big(\Phi(\cdot,t) * |f|\Big)(\xi) \\ \leq & e^{\frac{\eta^2}{4t}} \|f\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

4. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $T > 0$. Suponga que $u \in C_1^2(U_T)$ soluciona la ecuación del calor en U_T. Muestre que $u \in C^\infty(U_T)$.