Cvičení z logiky 1

Marta Vomlelová

Výklad:
https://dl1.cuni.cz/course/view.php?id=10297
skupiny 22vomSt, 22vomPa
16.11.2022 resp. 11.11.2022 a poslední cvičení písemky 45 min, pak výklad.
za aktivní účast trochu bodů navíc.

Konzultace: Středa 13:00-13:45 v S303 nebo po domluvě e-mailem.

Výklad: formule, logické spojky

- priorita:
  - nejnižší → ↔
  - & ∧ ∨
  - nejvyšší ¬
- Implikace je ZPRAVA asociativní

0a) Uzávorkujte formuli, aby byla zřejmá priorita a asociativita operací
p->q->r->¬ s & q
(p->(q->(r->((¬ s) & q))))
0b) nakreslete vytvořující strom pro uvedenou formuli. # (viz přednáška)

1. Sestrojte pravdivostní tabulky pro následující formule:
(tj. Určete pravdivostní hodnotu pro všechna možná ohodnocení prvovýroků)
a) p&q
b) p → q
c) ((p → q) → p) → p
d) ¬(p ∨q) ↔ ¬p&¬q
e) (p → q → r) → (p → q) → (p → r)

1) abc

ohodnocení	p	q	p&q	p->q	((p->q)->p)	((p->q)->p)->p
v_1	0	0	0	1	0	1
v_4	0	1	0	1	0	1
v_3	1	0	0	0	1	1
v_4	1	1	1	1	1	1

1) d

p	q	(p ∨q)	¬(p ∨q)	¬ p & ¬ q	¬(p ∨q) ↔ (¬ p & ¬ q)
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1

e)

p	q	r	(p → (q → r))	(p → q)	(p → r)	(p → q) → (p → r)	(p → (q → r)) → (p → q) → (p → r)
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	**1**	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Výklad: Vyrok je
splněn, pravdivý, lživý (sporný), nezávislý, splnitelný, ekvivalentní.
Model jazyka nad P je ohodnocení proměnných z P. Výrok v modelu M(P) pravdivý, lživý, sporný, ...
Model teorite T: ohodnocení, pro která jsou všechny výroky v T pravdivé.
Tautologie – pravdivá ve všech modelech jazyka.
Výroky jsou logicky ekvivalentní, pokud mají stejné modely.

2. V počítačové hře jste se dostali na místo se třemi bednami. Víte, že nejvýše
jeden z nápisů je pravdivý. Kde je klíč?
zlatá: Klíč není v této skříňce.
stříbrná: Klíč není v olověné skříňce.
olověná: Klíč je v této skříňce.

2) Pravdivost výroků na skřínkách pro jednotlivé možnosti polohy klíče:

klíč je ve:	Z:Klíč není v této skříňce.	S:Klíč není v olověné skříňce.	O:Klíč je v této skříňce.	
zlatá	0	1	0	jeden pravdivý
stříbrná	1	1	0	dvě pravdy
olověná	1	0	1	dvě pravdy

tj. klíč je ve zlaté skřínce.

3. V další místnosti víte, že právě jeden z nápisů je pravdivý. Kde je klíč?
zlatá: Klíč je ve stříbrné skříňce.
stříbrná: Klíč je v olověné skříňce.
olověná: Klíč je v této skříňce.
3)Pravdivost výroků na skřínkách pro jednotlivé možnosti polohy klíče:

klíč je ve:	Z:Klíč je ve stříbrné skříňce.	S:Klíč je v olověné skříňce.	O: Klíč je v této skříňce.	
zlatá	0	0	0	žádný pravdivý
stříbrná	1	0	0	jeden pravdivý
olověná	0	1	1	dvě pravdy

tj. klíč je ve stříbrné skřínce.
4. U předchozí úlohy víme jen, že nejvýše jeden z nápisů je pravdivý. Kde je klíč?
V tabulce 3) vidíme, že klíč může být ve zlaté i stříbrné skříňce, nemáme dost informací pro rozhodnutí (výrok 'klíč je ve zlaté skříňce' je nezávislý v teorii dostupných informací, může a nemusí být pravdivý).

5. Na rozcestí dvou cest stojí dva bratři, z nichž jeden vždy mluví pravdu a druhý

nikdy pravdu neřekne, avšak vy nevíte, který je který. Chcete se jich zeptat, která z cest vede k cíli vašeho putování.
a) Pokud smíte položit dvě otázky, je vaše úloha jednoduchá.
b) Smíte položit jen jednu otázku.
a)

levý bratr je pravdomluvný	levá cesta vede k cíli	Levý odpoví na: 5=5?	Levý odpoví na: Vede levá cesta k cíli?
0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Na základě druhých dvou sloupců dokážeme odvodit, zda 'levá cesta vede k cíli'.

b) Ukaž mi na cestu, kterou by mi NEporadil tvůj bratr, kdybych se ho zeptal, kudy jít? - a po té se vydám
Jakou cestu by mi poradil ten druhy?

V tabulce: Levý bratře, co odpoví pravý bratr, na otázku, jestli levá cesta vede k cíli?

levý bratr je pravdomluvný	levá cesta vede k cíli	Pravý bratr odpoví na 'Vede levá cesta k cíli?'	Levý odpoví na: Levý bratře, co odpoví pravý bratr, na otázku, jestli levá cesta vede k cíli?
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0

Z posledního sloupce dokážeme odvodit, zda 'levá cesta vede k cíli' - odpověď vždy znegujeme.

Výklad: Příklady tvrzení v jazycích různých řádů
“Nebude-li pršet, nezmoknem. A když bude pršet, zmokneme, na sluníčku zase uschneme.” výrok
$(\neg p \rightarrow \neg z) \wedge (p \rightarrow (z \wedge u))$
“Existuje nejmenší prvek.” 1. Řádu $\exists x\, \forall y\, (x \leq y)$
Axiom indukce. 2. řádu
$\forall X\, ((X(0) \wedge \forall x(X(x) \rightarrow X(x + 1))) \rightarrow \forall x\, X(x))$
“Libovolné sjednocení otevřených množin je otevřená množina.” 3. řádu
$\forall X \forall Y((\forall X(X(X) \rightarrow O(X)) \wedge \forall x(Y(x) \leftrightarrow \exists X(X(X) \wedge X(x)))) \rightarrow O(Y))$

6. Formalizujte věty:
a) Každý programátor umí C#.
a)∀p (programator(p)) => umí(p,c#))
b) Každý programátor umí alespoň jeden jazyk.
b)∀p: (programator(p) => ∃j (jazyk(j))∧umi(p,j))
NE!!!!!!!!!!!!!!!!!∀p ∃j: (programator(p)∧(jazyk(j))=> umi(p,j))
Za j zvolím programátora
∃j (jazyk(j)->false) # pokud existuje něco, co není jazyk, je formule pravdivá.

b)∀p∃j **(jazyk(j) &** (programator(p) => umi(p,j)))
c) Každý programátor umí alespoň dva jazyky.
c)(∀p)(∃j1)(∃j2) (jazyk(j1)&jazyk(j2)∧¬(j1=j2)∧((programator(p) =>umi(p,j1)&umi(p,j2)))

d) Každý programátor, který má rád Linux, nemá rád Windows.

$(\forall p)\,(\mathrm{programator}(p) \Rightarrow \neg(\mathrm{MaRad}(p, \mathrm{Linux}) \land \mathrm{MaRad}(p, \mathrm{Windows}))$

$(\forall p)\colon ((\mathrm{programator}\ (p) \land \mathrm{marad}(p, \mathrm{Linux})) \to (\neg \mathrm{marad}(p, \mathrm{Windows})))$

DÚ: Formalizujte v jazyce s ≤ a rovností tvrzení

a) x je minimální prvek

b) x je nejmenší prvek

c) x má bezprostředního předchůdce

d) každé dva prvky mají největšího společného předchůdce.

Výklad: Univerzum je vždy neprázdné (z definice)

$(\forall x\, p(x)) \to (\exists x\, p(x))$ # pravda jen v neprázdném univerzu, proto univerzum vždy neprázdné

7. Pro dané n v jazyce s rovností formalizujte:

a) existuje nejvýše n prvků

$\exists m\, \forall k\, (k=m)$#nejvýše jeden prvek

$(\exists m)\,(\exists n)\,\neg(m = n)$#existují alespoň dva různé prvky

$(\exists m)\,(\exists q)\,\neg(m = q) \land \neg(\exists p)((p<>m)\land(p<>q))$ # právě dva prvky

$(\exists m)\,(\exists p)\,(\forall k)\,((k = m) \lor (k = p))$ # nejvýše dva prvky

tudy ne: $(\exists m)\,(\exists n)\,(\neg(m = n) \lor (m = n))$ # pravdivé vždy, i při více prvků

$(\exists m_1)(\exists m_2)\ldots(\exists m_n)\,(\forall k)\,((k = m_1) \lor (k = m_2) \lor \ldots \lor (k = m_n))$#ano

b) existuje alespoň n prvků

$(\exists m_1)(\exists m_2)\ldots(\exists m_n)(\neg(m_1 = m_2)) \land (\neg(m_1 = m_3)) \land \ldots \land (\neg(m_{n-1} = m_n))$

$\neg((\exists m_1)(\exists m_2)\ldots(\exists m_{n-1})\,(\forall k)\,((k = m_1) \lor (k = m_2) \lor \ldots \lor (k = m_{n-1})))$ #jde taky

nelze: $\exists m \forall n\,(|\{(m,n) \text{ non } m = n\}| >= n-1)$ #nemáme přirozená čísla, natož mohutnost množin

c) existuje právě n prvků
a) $\wedge$ b)
nebo
$(\exists m_1)(\exists m_2)\ldots(\exists m_n)\ (\forall k)\ (((k = m_1) \vee (k = m_2) \vee \ldots \vee (k = m_n)) \wedge (\neg(m_1 = m_2)) \wedge (\neg(m_1 = m_3)) \wedge \ldots \wedge (\neg(m_{n-1} = m_n)))$

d) lze vyjádřit "existuje nekonečně mnoho prvků" (proč ne, případně jak ano)

8. Hra dvou hráčů. Mějme konečnou hru dvou (střídajících se) hráčů. Hra končí po n kolech výhrou jednoho ze dvou hráčů označených X a Y, přičemž X začíná. Hra je zadána formulí $\varphi(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ vyjadřující, že ve hře s tahy $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ vyhrává X. Pomocí kvantifikátorů sestrojte formuli vyjadřující
a) "X nemůže prohrát",
b) "Y nemůže prohrát",
c) "X má vyhrávající strategii",
d) "Y má vyhrávající strategii".

9. Vyjádřete formulí 1. řádu v grafu
a) v grafu existuje cesta délky 4
b) v grafu existuje kružnice délky 4
c) u a v mají společného souseda
d) existují tři nezávislé hrany
e) existuje cesta mezi u a v délky n, n > 0 je předem dané
f) v grafu existuje vrchol stupně 1
g) graf je regulární stupně 3 (všechny uzly stupně 3)
h) existuje vrcholové pokrytí velikosti n, n > 0 je předem dané.

10. Vyjádřete formulí 2. řádu v grafu
a) existuje bipartitní rozklad
b) existuje obarvení grafu třemi barvami
c) graf má tvar vrstveného grafu s n vrstvami, kde n > 0 je předem dané
*) existuje cesta mezi u a v

11. Formalizujte s relací dělitelnosti m|n (m dělí n) v teorii množin:
a) z je společný dělitel x a y
b) z je největší společný dělitel x a y
c) z je největší společný dělitel všech čísel z množiny X

12. Formalizujte v jazyce s relacemi P(x) - "x je prvočíslo" a R(x,y)
a) pro nějaké prvočíslo x máme prvek y, že platí R(x,y)
b) pro každé prvočíslo x máme prvek y, že platí R(x,y)

13. K rozmyšlení Lze obarvit čísla od 1 do n dvěma barvami tak, že neexistuje monochromatické řešení rovnice $a + b = c$ s $1 \leq a < b < c \leq n$? Sestrojte výrokovou formuli φ_n (pokud možno v CNF) pro n = 8, která je splnitelná, právě když to lze.
Nainstalujte glucose nebo sat4j.org
java -jar org.sat4j.core.jar demo.txt
Příště: konjunktivní a disjunktivní normální forma, univerzální množiny spojek.
Symboly ke kopírování: ¬ ∧ ∨ → ↔ ∀ ∃ ≤ ≥ ∈