

1. A végtelen sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium.

6. Tétel (Cauchy-féle konvergencia kritérium sorokra). *A $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m > n > n_0: |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy

$$\sum a_n \text{ konvergens} \iff (s_n) \text{ konvergens} \iff (s_n) \text{ Cauchy-sorozat,}$$

azaz

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m > n_0: |s_m - s_n| < \varepsilon$$

teljesül. Állításunk abból következik, hogy ha $m > n$, akkor

$$s_m - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m.$$

2. Végtelen sorokra vonatkozó összehasonlító kritériumok.

11. Tétel (Összehasonlító kritériumok). *Legyenek $\sum a_n$ és $\sum b_n$ nemnegatív tagú sorok. Tegyük fel, hogy*

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N: 0 \leq a_n \leq b_n.$$

Ekkor

- 1. Majoráns kritérium:** *ha a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor $\sum a_n$ sor is konvergens.*
- 2. Minoráns kritérium:** *ha a $\sum a_n$ sor divergens, akkor a $\sum b_n$ sor is divergens.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a_n \leq b_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, hiszen véges sok tag megváltozásával egy sor konvergenciája nem változik. Jelölje (s_n) , illetve (t_n) a $\sum a_n$, illetve a $\sum b_n$ sorok részletösszegeiből álló sorozatokat. A feltevésünk miatt $s_n \leq t_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Ekkor a nemnegatív tagú sorok konvergenciáról szóló tétel szerint

1. ha a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor (t_n) korlátos, így (s_n) is az. Ezért a $\sum a_n$ sor is konvergens.
2. ha $\sum a_n$ sor divergens, akkor (s_n) nem korlátos, így (t_n) sem az. Ezért a $\sum b_n$ sor is divergens.

3. A Cauchy-féle gyökkritérium.

1. Tétel (A Cauchy-féle gyökkritérium). Tekintsük a $\sum a_n$ végtelen sort, és tegyük fel, hogy létezik az

$$A := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \overline{\mathbb{R}}$$

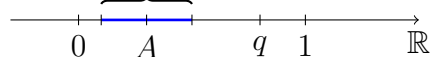
határérték. Ekkor

1. $0 \leq A < 1$ esetén a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens (tehát konvergens is),
2. $A > 1$ esetén a $\sum a_n$ sor divergens,
3. $A = 1$ esetén a $\sum a_n$ sor lehet konvergens is, divergens is.

Bizonyítás. Mivel $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$), ezért $A \geq 0$.

1. Tegyük fel, hogy $\boxed{0 \leq A < 1}$.

$$\{\sqrt[n]{|a_n|} \mid n > n_0\} \subset K(A)$$



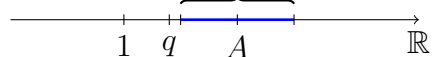
Vegyük egy A és 1 közötti q számot!

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < q \implies \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: \sqrt[n]{|a_n|} < q, \text{ azaz } |a_n| < q^n.$$

Mivel $0 < q < 1$, ezért a $\sum q^n$ mértani sor konvergens. Így a majoráns kritérium szerint a $\sum |a_n|$ sor is konvergens, és ez azt jelenti, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor abszolút konvergens.

2. Tegyük fel, hogy $\boxed{A > 1}$.

$$\{\sqrt[n]{|a_n|} \mid n > n_0\} \subset K(A)$$



Vegyük most egy 1 és A közötti q számot!

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > q \implies \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: \sqrt[n]{|a_n|} > q, \text{ azaz } |a_n| > q^n.$$

Tehát, véges sok n indextől eltekintve $|a_n| > q^n > 1$.

Ebből következik, hogy $\lim(a_n) \neq 0$, és így a $\sum a_n$ sor divergens.

3. Tegyük fel, hogy $\boxed{A = 1}$. Ekkor

- a $\sum \frac{1}{n}$ divergens sor esetében $|a_n| = \frac{1}{n}$, azaz $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$;
- a $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens sor esetében $|a_n| = \frac{1}{n^2}$, azaz $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$.

4. A d'Alembert-féle hányadoskritérium.

2. Tétel (A d'Alembert-féle hányadoskritérium). Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor tagjai közül egyik sem 0 és létezik az

$$A := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \in \overline{\mathbb{R}}$$

határérték. Ekkor

1. $0 \leq A < 1$ esetén a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens (tehát konvergens is),
2. $A > 1$ esetén a $\sum a_n$ sor divergens,
3. $A = 1$ esetén a $\sum a_n$ sor lehet konvergens is, divergens is.

Bizonyítás. Világos, hogy $A \geq 0$.

1. Legyen $\boxed{0 \leq A < 1}$ és vegyünk egy olyan q számot, amire $A < q < 1$ teljesül. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q \implies \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0: \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q, \text{ azaz } |a_{n+1}| < q|a_n|.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$|a_{n_0+1}| < q|a_{n_0}|, \quad |a_{n_0+2}| < q|a_{n_0+1}|, \quad \dots, \quad |a_{n-1}| < q|a_{n-2}|, \quad |a_n| < q|a_{n-1}|$$

minden $n \geq n_0$ esetén. Így

$$|a_n| < q|a_{n-1}| < q^2|a_{n-2}| < q^3|a_{n-3}| < \dots < q^{n-n_0}|a_{n_0}| = q^{-n_0}|a_{n_0}|q^n = aq^n,$$

ahol $a := q^{-n_0}|a_{n_0}|$ egy n -től független konstans. A $\sum aq^n$ mértani sor konvergens, mert $0 < q < 1$. Ezért a majoráns kritérium szerint a $\sum |a_n|$ sor is konvergens, vagyis a $\sum a_n$ végtelen sor abszolút konvergens.

2. Legyen $\boxed{A > 1}$ és vegyünk most egy olyan q számot, amire $1 < q < A$ teljesül. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > q \implies \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > q, \text{ azaz } |a_{n+1}| > q|a_n| > |a_n|.$$

Ebből következik, hogy $\lim(a_n) \neq 0$, így a $\sum a_n$ sor divergens.

3. Tegyük fel, hogy $\boxed{A = 1}$. Ekkor

- $\sum \frac{1}{n}$ divergens sor esetében $|a_n| = \frac{1}{n}$, azaz $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$,
- $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens sor esetében $|a_n| = \frac{1}{n^2}$, azaz $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$.

3. Tétel (Leibniz-kritérium). Konvergencia:

$A \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ Leibniz-típusú sor akkor és csak akkor konvergens, ha $\lim(a_n) = 0$.

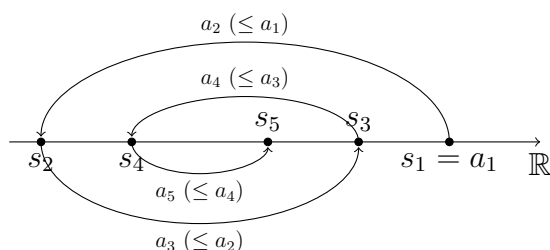
Bizonyítás.

\Rightarrow A sorok konvergenciájának szükséges feltétele értelmében, ha a $\sum (-1)^{n+1} a_n$ sor konvergens, akkor $\lim((-1)^{n+1} a_n) = 0$, ami csak akkor lehetséges, ha $\lim(a_n) = 0$.

\Leftarrow Tegyük fel, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ egy Leibniz-típusú sor, és $\lim(a_n) = 0$. Igazoljuk, hogy a sor konvergens. Legyen

$$s_n := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots + (-1)^{n+1} a_n \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Szemléltessük az (s_n) részletösszeg-sorozat első néhány tagját!



$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 - a_2 = s_1 - a_2, \\ s_3 &= a_1 - a_2 + a_3 = s_2 + a_3, \\ s_4 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = s_3 - a_4, \\ s_5 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = s_4 + a_5. \end{aligned}$$

Most megmutatjuk, hogy az ábra alapján sejthető tendencia valóban igaz, azaz, hogy az (s_{2n}) sorozat monoton növekvő, és az (s_{2n+1}) sorozat monoton csökkenő.

- A páros indexű részsorozatnál a következő csoportosításból látható, hogy

$$s_{2n} = \overbrace{\underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(a_{2n-3} - a_{2n-2})}_{\geq 0}}^{s_{2n-2}} + \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{\geq 0}$$

minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, tehát (s_{2n}) valóban monoton növekvő.

- Hasonlóan, a páratlan indexű részsorozatnál

$$s_{2n+1} = \overbrace{a_1 + \underbrace{(-a_2 + a_3)}_{\leq 0} + \underbrace{(-a_4 + a_5)}_{\leq 0} + \cdots + \underbrace{(-a_{2n-2} + a_{2n-1})}_{\leq 0}}^{s_{2n-1}} + \underbrace{(-a_{2n} + a_{2n+1})}_{\leq 0}$$

minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, tehát (s_{2n+1}) monoton csökkenő sorozat.

Másrészt, az $s_0 := 0$ értelmezés mellett

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül, amiből következik, hogy $s_{2n} \leq s_{2n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor

$$(1) \quad s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \cdots \leq s_{2n} \leq s_{2n+1} \leq \cdots \leq s_5 \leq s_3 \leq s_1.$$

Tehát (s_{2n}) és (s_{2n+1}) korlátos sorozatok. Mivel mindkettő monoton és korlátos, ezért konvergens is. Jelölje $A = \lim(s_{2n+1})$ és $B = \lim(s_{2n})$ a határértékeket. Ekkor

$$A - B = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n+1} - \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,$$

hiszen (a_{2n+1}) részsorozata az (a_n) sorozatnak. Ezért $A = B$, tehát az (s_{2n}) és az (s_{2n+1}) részsorozatok határértéke megegyezik. Ebből következik, hogy az (s_n) sorozat konvergens. Ez pedig azt jelenti, hogy a Leibniz-típusú sor valóban konvergens.

6. Minden $[0, 1]$ -beli szám felírható tizedes tört alakban.

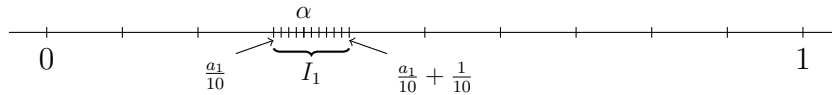
5. Tétel. Minden $\alpha \in [0, 1]$ számhoz létezik olyan $(a_n) : \mathbb{N}^+ \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ sorozat, amire az teljesül, hogy

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $\alpha \in [0, 1]$ számot!

Az első lépésben osszuk fel a $[0, 1]$ intervallumot 10 egyenlő hosszúságú részre. Ekkor

$$\exists a_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\} : \alpha \in \left[\frac{a_1}{10}, \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10} \right] =: I_1 \quad \text{azaz} \quad \frac{a_1}{10} \leq \alpha \leq \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}.$$



A második lépésben osszuk fel az I_1 intervallumot 10 egyenlő hosszúságú részre. Ekkor

$$\exists a_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\} : \alpha \in \left[\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}, \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2} \right] =: I_2, \quad \text{azaz}$$

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq \alpha \leq \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}.$$

Ha az eljárást folytatjuk, akkor az n -edik lépésben találunk olyan $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ számot, hogy

$$s_n := \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \leq \alpha \leq \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} = s_n + \frac{1}{10^n},$$

ahol s_n a sor n -edik részletösszege. Ekkor

$$|\alpha - s_n| = \left| \alpha - \left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \right) \right| \leq \frac{1}{10^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

és így

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

7. Konvergens sorok zárójelzése.

8. Tétel. Egy konvergens sor minden zárójelzése is konvergens sor, és összege az eredeti sor összegével egyenlő.

Bizonyítás. Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor (m_n) által meghatározott zárójelzése, és jelölje (σ_n) és (s_n) rendre a két sor részletösszegeiből álló sorozatokat. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor (s_n) konvergens sorozat, de ekkor minden részsorozata is konvergens, és határértéke megegyezik az (s_n) sorozat határértékével.

Mivel $\forall n \in \mathbb{N}^+$ indexre $\sigma_n = s_{m_n}$ teljesül, így (σ_n) részsorozata az (s_n) sorozatnak. Tehát a (σ_n) sorozat konvergens és $\lim(\sigma_n) = \lim(s_n)$. Ez azt jelenti, hogy a $\sum \alpha_n$ sor konvergens, és

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

10. Tétel. Ha a $\sum a_n$ végtelen sor abszolút konvergens, akkor tetszőleges $(p_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ permutációval képzett $\sum a_{p_n}$ átrendezése is abszolút konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Tehát egy abszolút konvergens sor bármely átrendezése is abszolút konvergens sor, és összege ugyanaz, mint az eredeti soré.

Bizonyítás. Legyen

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k \quad \text{és} \quad \sigma_n := \sum_{k=0}^n a_{p_k} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1. lépés. Igazoljuk, hogy a $\sum a_{p_n}$ sor abszolút konvergens. Valóban, mivel $\sum a_n$ abszolút konvergens, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ -re

$$\sum_{k=0}^n |a_{p_k}| = |a_{p_0}| + |a_{p_1}| + \cdots + |a_{p_n}| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| = K < +\infty,$$

azaz a $\sum_{k=0}^n |a_{p_k}|$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozat felülről korlátos, de nyilván monoton növekvő is, következésképpen a $\sum |a_{p_n}|$ sor konvergens. Így a $\sum a_{p_n}$ sor valóban abszolút konvergens.

2. lépés. Azt igazoljuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Legyen

$$A := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \quad \text{és} \quad B := \sum_{n=0}^{+\infty} a_{p_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n.$$

Tudjuk, hogy a $\sum |a_n|$ sor konvergens, így a Cauchy-kritérium szerint

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m > n \geq n_0: |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon.$$

Ezért $n = n_0$ mellett, ha $m > n_0$, akkor $\sum_{k=n_0+1}^m |a_k| < \varepsilon$.

Adott $\varepsilon > 0$ -ra tekintsük az $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n_0}$ tagokat, és legyen N_0 olyan index, amire az $a_{p_0} + a_{p_1} + \cdots + a_{p_{N_0}}$ összeg már tartalmazza ezeket a tagokat. Ilyen N_0 nyilván létezik, és $N_0 \geq n_0$. Legyen $n > N_0$. Ekkor

$$\sigma_n - s_n = \left(\underbrace{a_{p_0} + a_{p_1} + \cdots + a_{p_{N_0}}}_{\text{tartalmazza } a_0, \dots, a_{n_0}} + a_{p_{N_0+1}} + \cdots + a_{p_n} \right) - \left(\underbrace{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n_0}}_{\text{tartalmazza } a_0, \dots, a_{n_0}} + a_{n_0+1} + \cdots + a_n \right)$$

nem tartalmazza az $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n_0}$ tagokat. Így

$$|\sigma_n - s_n| \leq \sum_{k=n_0+1}^m |a_k| < \varepsilon,$$

ahol $m := \max\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$, hiszen $m \geq n > N_0 \geq n_0$. Ez azt jelenti, hogy $(\sigma_n - s_n)$ nullsorozat. Ezért

$$\sigma_n = (\sigma_n - s_n) + s_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 + A = A,$$

azaz

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} a_{p_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$$

9. Sorok téglányszorzatának konvergenciája.

1. Tétel. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0} a_n$ és a $\sum_{n=0} b_n$ végtelen sorok konvergensek. Ekkor a $\sum_{n=0} t_n$ téglányszorzatuk is konvergens és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n,$$

azaz konvergens sorok téglányszorzata is konvergens, és a téglányszorzat összege a két sor összegének szorzatával egyezik meg.

Bizonyítás. A bizonyítás alapja a sorozatoknál tanult műveletek és határátmenet felcserélhetőségére vonatkozó tétel. Jelölje A_n , B_n és T_n rendre a $\sum_{n=0} a_n$, $\sum_{n=0} b_n$ és $\sum_{n=0} t_n$ sorok n -edik részletösszegeit. Ekkor

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^n t_k = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\max\{i,j\}=k} a_i b_j \right) = \sum_{\max\{i,j\} \leq n} a_i b_j = \left(\sum_{i=0}^n a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^n b_j \right) = \\ &= A_n B_n \rightarrow \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right), \quad \text{ha } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a (T_n) sorozat konvergens, és így a $\sum t_n$ végtelen sor is konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \lim(T_n) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

2. Tétel (Abszolút konvergens sorok szorzatai). Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ végtelen sorok mindegyike abszolút konvergens. Ekkor

1. a $\sum_{n=0}^{\infty} t_n$ téglányszorzat is abszolút konvergens,
2. a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ Cauchy-szorzat is abszolút konvergens,
3. az összes $a_i b_j$ ($i, j \in \mathbb{N}$) szorzatból tetszés szerinti sorrendben és csoportosításban képzett $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ végtelen sor is abszolút konvergens, és

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} d_n = \sum_{n=0}^{\infty} t_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

Bizonyítás. Elég a 3. állítást igazolni. Mivel $\sum a_n$ és $\sum b_n$ abszolút konvergens, ezért

$$A_N := \sum_{n=0}^N |a_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A \in \mathbb{R}, \quad B_N := \sum_{n=0}^N |b_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} B \in \mathbb{R}.$$

Tekintsünk egy tetszőleges $\sum d_n$ sort, ahol $d_n = \sum a_i b_j$. Legyen $N \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Jelölje I , illetve J a maximális i , illetve j indexet a d_0, d_1, \dots, d_N összegekben. Ekkor

$$\sum_{n=0}^N |d_n| \leq \sum_{\substack{0 \leq i \leq I \\ 0 \leq j \leq J}} |a_i b_j| = \left(\sum_{n=0}^I |a_n| \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^J |b_n| \right) \leq A \cdot B,$$

és ez azt jelenti, hogy a $\sum |d_n|$ nemnegatív tagú sor konvergens, mert részletösszegei korlátosak. Tehát $\sum d_n$ abszolút konvergens.

A fentiek érvényesek $d_n = t_n$ esetén, így a $\sum t_n$ téglányszorzat is abszolút konvergens, tehát konvergens is. Ekkor az előző tétel szerint $(*)$ teljesül a $\sum t_n$ sorra, azaz

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Legyen $\sum t_n^*$ az a sor, amelyet a $\sum t_n$ téglányszorzatban szereplő zárójelek elhagyásával kapunk. Mivel $\sum t_n^*$ is egy lehetséges $\sum d_n$ típusú sor, ezért $\sum t_n^*$ is abszolút konvergens, és így bármely zárójelezésével az összege nem változik, azaz $(*)$ teljesül a $\sum t_n^*$ sorra:

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n^* = \sum_{n=0}^{\infty} t_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Azonban bármely $\sum d_n$ típusú sor megkapható a $\sum t_n^*$ sorból megfelelő átrendezéssel és csoportosítással. Ekkor a sor összege nem változik, tehát $(*)$ teljesül tetszőleges $\sum d_n$ sorra.

11. Hatványsorok konvergenciasugara.

3. Tétel (Hatványsor konvergenciasugara). Tetszőleges $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x-a)^n$ hatványsor konvergenciahalmazára a következő három eset egyike áll fenn:

1. $\exists 0 < R < +\infty$, hogy a hatványsor $\forall x \in \mathbb{R}: |x-a| < R$ pontban abszolút konvergens és $\forall x \in \mathbb{R}: |x-a| > R$ pontban divergens.
2. A hatványsor csak az $x = a$ pontban konvergens. Ekkor legyen $R := 0$.
3. A hatványsor abszolút konvergens $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor legyen $R := +\infty$.

R -et a hatványsor **konvergenciasugarának** nevezzük.

Bizonyítás. Az állítást elég $a = 0$ esetén igazolni.

Segéd-tétel. Tegyük fel, hogy a $\sum \alpha_n x^n$ hatványsor konvergens egy $x_0 \neq 0$ pontban. Ekkor $\forall x \in \mathbb{R}: |x| < |x_0|$ esetén a hatványsor abszolút konvergens az x pontban.

A segéd-tétel bizonyítása. Mivel a $\sum \alpha_n x_0^n$ végtelen sor konvergens, ezért $\lim(\alpha_n x_0^n) = 0$, így az $(\alpha_n x_0^n)$ sorozat korlátos, azaz

$$\exists M > 0: |\alpha_n x_0^n| \leq M < +\infty \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Legyen $x \in \mathbb{R}$ olyan, amire $|x| < |x_0|$ teljesül. Ekkor

$$|\alpha_n x^n| = |\alpha_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n =: M q^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A $\sum |\alpha_n x^n|$ végtelen sor tehát majorálható a $\sum M q^n$ mértani sorral, ami konvergens, mert $|q| = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$. Így a majoráns kritérium szerint a $\sum |\alpha_n x^n|$ sor is konvergens, tehát a $\sum \alpha_n x^n$ végtelen sor abszolút konvergens.

A tétel bizonyítása. Tekintsük a $\sum \alpha_n x^n$ hatványsort. Ez $x = 0$ -ban nyilván konvergens, ezért $\text{KH}\left(\sum \alpha_n x^n\right) \neq \emptyset$, és így

$$(1) \quad \exists \sup \text{KH}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n\right) =: R \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{és} \quad R \geq 0.$$

A következő három eset lehetséges.

1. $0 < R < +\infty$. Legyen $|x| < R$ tetszőleges. Ekkor a szuprénum definíciója szerint $\exists x_0 > 0: |x| < x_0 < R$ és x_0 a konvergenciahalmaz eleme, azaz $\sum \alpha_n x_0^n$ konvergens. Ekkor a segéd-tétel szerint $\sum \alpha_n x^n$ abszolút konvergens. Ha $|x| > R$ tetszőleges, akkor az R szám definíciója és a segéd-tétel szerint a $\sum \alpha_n x^n$ sor divergens.
2. $R = 0$. A $\sum \alpha_n x^n$ hatványsor az $x = 0$ pontban nyilván konvergens. Tegyük fel, hogy $x \neq 0$ olyan pont ahol $\sum \alpha_n x^n$ konvergens. Ekkor a segéd-tétel szerint a hatványsor konvergens az $\frac{|x|}{2} > 0$ pontban, ami nem lehetséges, mert $R = 0$. A hatványsor tehát csak az $x = 0$ pontban konvergens.
3. $R = +\infty$. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor a szuprénum definíciója értelmében $\exists x_0 > 0: |x| < x_0$ és x_0 a konvergenciahalmaz eleme, azaz $\sum \alpha_n x_0^n$ konvergens. Ekkor a segéd-tétel szerint $\sum \alpha_n x^n$ abszolút konvergens.

12. A Cauchy–Hadamard-tétel.

4. Tétel (A Cauchy–Hadamard-tétel). Tekintsük a $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x-a)^n$ hatványsort, és tegyük fel, hogy

$$\exists \lim \left(\sqrt[n]{|\alpha_n|} \right) =: A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor a hatványsor konvergenciasugara

$$R = \frac{1}{A} \quad \left(\frac{1}{+\infty} := 0, \quad \frac{1}{0} := +\infty \right).$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $A \geq 0$. Rögzítsük tetszőlegesen az $x \in \mathbb{R}$ számot, és alkalmazzuk a Cauchy-féle gyökkritériumot a $\sum \alpha_n(x-a)^n$ végtelen számsorra:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n(x-a)^n|} = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} \right) \cdot |x-a| = A|x-a|, \quad \text{és így}$$

$$A|x-a| < 1 \implies \text{a sor konvergens}, \quad A|x-a| > 1 \implies \text{a sor divergens}.$$

1. Ha $0 < A < +\infty$, akkor A -val lehet osztani, és ekkor

$$x \in \left(a - \frac{1}{A}, a + \frac{1}{A} \right) \implies \text{a sor konv.}, \quad x \notin \left[a - \frac{1}{A}, a + \frac{1}{A} \right] \implies \text{a sor div.},$$

amiből következik, hogy $R = 1/A$.

2. Ha $A = +\infty$, akkor $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq a: A|x-a| = (+\infty) \cdot |x-a| = +\infty > 1$.

Ezért a hatványsor az $x = a$ pont kivételével divergens, azaz $R = 0$.

3. Ha $A = 0$, akkor $\forall x \in \mathbb{R}: A|x-a| = 0 \cdot |x-a| = 0 < 1$.

Ezért a hatványsor minden $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens, azaz $R = +\infty$.

13. Függvények határértékének egyértelmősége.

3. Tétel (A határérték egyértelmősége). Ha az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}'_f$ pontban van határértéke, akkor a definícióban szereplő $A \in \overline{\mathbb{R}}$ egyértelműen létezik.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy két különböző $A_1, A_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ elem eleget tesz a definíció feltételeinek. Mivel két különböző $\overline{\mathbb{R}}$ -beli elem diszjunkt környezetekkel szétválasztható, ezért

$$\exists \varepsilon > 0: K_\varepsilon(A_1) \cap K_\varepsilon(A_2) = \emptyset.$$

A határérték definíciója szerint egy ilyen ε -hoz

$$\exists \delta_1 > 0, \forall x \in \dot{K}_{\delta_1}(a) \cap \mathcal{D}_f: f(x) \in K_\varepsilon(A_1),$$

$$\exists \delta_2 > 0, \forall x \in \dot{K}_{\delta_2}(a) \cap \mathcal{D}_f: f(x) \in K_\varepsilon(A_2).$$

Legyen $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ekkor

$$\forall x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f: f(x) \in K_\varepsilon(A_1) \cap K_\varepsilon(A_2) = \emptyset, \quad \text{de } \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset, \text{ mert } a \in \mathcal{D}'_f.$$

Ellentmondásra jutottunk, és ezzel a határérték egyértelműségét igazoltuk.

4. Tétel (Függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv). Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}'_f$ és $A \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\lim_a f = A \iff \forall (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{D}_f \setminus \{a\}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \text{ esetén } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A.$$

Bizonyítás. \Rightarrow $\lim_a f = A \implies \forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$, $\forall x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f$: $f(x) \in K_\varepsilon(A)$.

Legyen (x_n) egy, a tételben szereplő sorozat, és $\varepsilon > 0$ egy tetszőleges rögzített érték.

$$\lim(x_n) = a \implies \delta\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: x_n \in \dot{K}_\delta(a).$$

Mivel $x_n \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, így $x_n \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f$, amiből $f(x_n) \in K_\varepsilon(A)$ teljesül minden $n > n_0$ indexre. Ez azt jelenti, hogy az $(f(x_n))$ sorozatnak van határértéke, és $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A$.

\Leftarrow Tegyük fel, hogy

$$\forall (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{D}_f \setminus \{a\}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \text{ esetén } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A.$$

Megmutatjuk, hogy $\lim_a f = A$.

Indirekt módon tegyük fel, hogy a $\lim_a f = A$ egyenlőség nem igaz. Ez pontosan azt jelenti, hogy

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0\text{-hoz } \exists x_\delta \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f: f(x_\delta) \notin K_\varepsilon(A).$$

A $\delta = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^+$) választással ez azt jelenti, hogy

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^+\text{-hoz } \exists x_n \in \dot{K}_{1/n}(a) \cap \mathcal{D}_f: f(x_n) \notin K_\varepsilon(A).$$

Legyen $x_0 \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ tetszőleges. Az $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ sorozat nyilván a -hoz tart (hiszen $x_n \in \dot{K}_{1/n}(a)$), de a függvényértékek $(f(x_n))$ sorozata nem tart A -hoz (hiszen $f(x_n) \notin K_\varepsilon(A)$), ami ellentmond a feltételünknek.

16. Az összetett függvény folytonossága.

9. Tétel (Az összetett függvény folytonossága). Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in C\{a\}$ és $f \in C\{g(a)\}$. Ekkor $f \circ g \in C\{a\}$, azaz az összetett függvény „örökli” a belső- és a külső függvény folytonosságát.

Bizonyítás. A feltételek szerint $g(a) \in \mathcal{D}_f$, ezért $g(a) \in \mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f$, azaz $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$. Így valóban beszélhetünk az $f \circ g$ összetett függvényről, és $a \in \mathcal{D}_{f \circ g}$ is igaz.

Legyen $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{D}_{f \circ g} \subset \mathcal{D}_g$ egy olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n) = a$. Mivel $g \in C\{a\}$, így a folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint $\lim(g(x_n)) = g(a)$. Jelölje

$$b := g(a) \quad \text{és} \quad y_n := g(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $(y_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{D}_f$ és $\lim(y_n) = b$. Mivel $f \in C\{b\}$, így a folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint $\lim(f(y_n)) = f(b)$. Ugyanakkor

$$f(b) = f(g(a)) = (f \circ g)(a) \quad \text{és} \quad f(y_n) = f(g(x_n)) = (f \circ g)(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Azt igazoltuk tehát, hogy $\forall (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{D}_{f \circ g}$, $\lim(x_n) = a$ sorozat esetén igaz, hogy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = f(b) = (f \circ g)(a).$$

Ezért a folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint $f \circ g \in C\{a\}$.

15. Monoton függvények határértéke.

3. Tétel. Legyen $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ tetszőleges (korlátos vagy nem korlátos) nyílt intervallum. Ha az f függvény monoton (α, β) -n, akkor f -nek $\forall a \in (\alpha, \beta)$ pontban létezik a jobb oldali, illetve a bal oldali határértéke, és ezek végesek.

a) Ha $f \nearrow (\alpha, \beta)$ -n, akkor

$$\lim_{a+0} f = \inf \{ f(x) \mid x \in (\alpha, \beta), x > a \},$$

$$\lim_{a-0} f = \sup \{ f(x) \mid x \in (\alpha, \beta), x < a \}.$$

b) Ha $f \searrow (\alpha, \beta)$ -n, akkor

$$\lim_{a+0} f = \sup \{ f(x) \mid x \in (\alpha, \beta), x > a \},$$

$$\lim_{a-0} f = \inf \{ f(x) \mid x \in (\alpha, \beta), x < a \}.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f \nearrow (\alpha, \beta)$ -n. A jobb oldali határértékre vonatkozó állítást igazoljuk.

Legyen

$$m := \inf \{ f(x) \mid x \in (\alpha, \beta), x > a \}.$$

Világos, hogy $m \in \mathbb{R}$. Az infimum definíciójából következik, hogy

$$\text{i) } \forall x \in (\alpha, \beta), x > a: m \leq f(x),$$

$$\text{ii) } \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists x_1 \in (\alpha, \beta), x_1 > a: f(x_1) < m + \varepsilon.$$

Így $m \leq f(x_1) \leq m + \varepsilon$. Mivel $f \nearrow (\alpha, \beta)$ -n, ezért

$$m \leq f(x) \leq f(x_1) < m + \varepsilon \quad (x \in (a, x_1)).$$

A $\delta := x_1 - a > 0$ választással tehát azt mutattuk meg, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \forall x \in (\alpha, \beta), a < x < a + \delta: \underbrace{0 \leq f(x) - m < \varepsilon}_{f(x) \in K_\varepsilon(m)}.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy f -nek a -ban van jobb oldali határértéke, és az m -mel egyenlő, azaz

$$\lim_{a+0} f = m = \inf \{ f(x) \mid x \in (\alpha, \beta), x > a \}.$$

A tétel többi állítása hasonlóan bizonyítható.