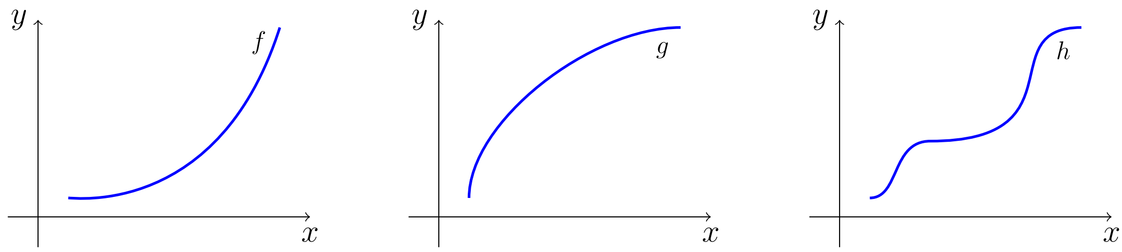
12. előadás

KONVEX FÜGGVÉNYEK

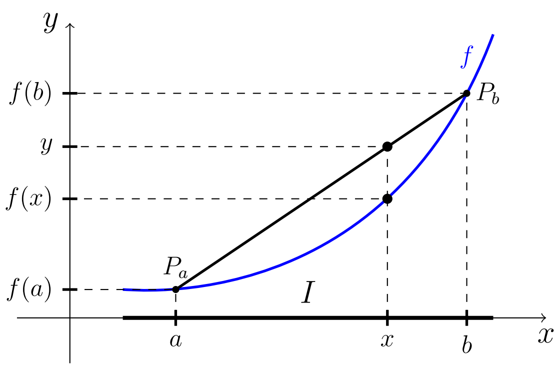
Ebben a szakaszban függvénygrafikonok bizonyos „alaki” tulajdonságainak a leírásával foglalkozunk. A címben jelzett fogalmakat tetszőleges $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon fogjuk értelmezni. I tehát lehet korlátos vagy nem korlátos, nyílt, zárt, félig nyílt vagy félig zárt intervallum.

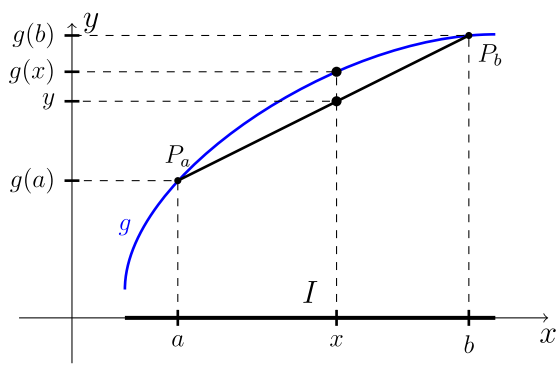
Konvex és konkáv függvény fogalma

Gondoljunk valós-valós függvény monotonitásainak fogalmára. Világos, hogy egy intervallumon értelmezett függvény többféleképpen is lehet például szigorúan monoton növekvő:



A jobb oldali grafikonnal ellentétben a másik kettő bizonyos jellegzetes „szabályosságot” mutat. Ezeket a tulajdonságokat célszerű definiálni. Az f függvényt (bal oldali ábra) ***konvexnek***, g-t pedig (középső ábra) ***konkávnak*** fogjuk nevezni. A definíciók megfogalmazásához húzzunk be húrokat:





Szemléletesen világos, hogy az I intervallum tetszőleges $a < b$ pontjai esetén az f függvény grafikonjának az (a, b) intervallumhoz tartozó része a P_a és P_b pontokat összekötő húr alatt van. A szóban forgó húr egyenesének az egyenlete:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a), \quad \text{vagy} \quad y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

A g függvény esetében a grafikon az (a, b) intervallumhoz tartozó része a P_a és P_b pontokat összekötő húr felett van.

A fentiek alapján eléggé természetesek a következő definíciók.

1. Definíció. *Legyen* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $I \subset \mathcal{D}_f$ *egy intervallum. Ha* $\forall a, b \in I$, $a < b$ *esetén igaz az, hogy*

- $f(x) \le \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \qquad \big(x \in (a, b)\big)$,

  akkor azt mondjuk, hogy az f *függvény* **konvex az *I* intervallumon**,

- $f(x) \ge \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \qquad \big(x \in (a, b)\big)$,

  akkor azt mondjuk, hogy az f *függvény* **konkáv az *I* intervallumon**,

Szigorú egyenlőtlenségek esetén **szigorúan konvex**, *illetve* **szigorúan konkáv** *függvényekről beszélünk.*

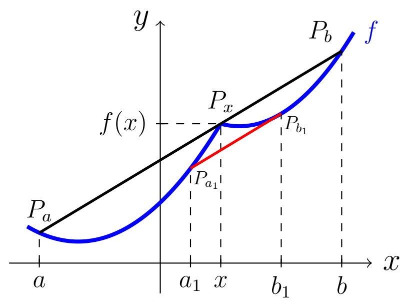
Megjegyzések.

1. Az a tulajdonság, hogy f szigorúan konvex (ill. konkáv) I-n, szemléletesen tehát azt jelenti, hogy $\forall a, b \in I$, $a < b$ esetén a függvény grafikonjának az (a, b) intervallumhoz tartozó része a $P_a := \big(a, f(a)\big)$ és $P_b := \big(b, f(b)\big)$ pontokat összekötő húr alatt (ill. felett) van.

2. Az
$$f : I \to \mathbb{R}, \quad f(x) := mx + n \qquad (m, n \in \mathbb{R})$$
lineáris függvény egyszerre konvex és konkáv, de nem szigorú értelemben, hiszen ekkor a definícióban szereplő egyenlőtlenségekben egyenlőség áll minden x-re.

3. Ha egy f függvény konvex (ill. konkáv) I-n, de van olyan $I^* \subset I$ intervallum, ahol f lineáris függvény, akkor f konvexitása nem szigorú.

4. Az előző jelenség megfordítható. Ha f konvex (ill. konkáv) I-n, de nem szigorú értelemben, akkor van olyan $I^* \subset I$ intervallum, ahol f lineáris függvény.
Ti. egy ilyen konvex függvényhez van olyan $(a, b) \subset I$ intervallum olyan $a < x < b$ ponttal, hogy P_x a P_a és P_b pontokat összekötő húron van. Ha f az I egyik részintervallumán sem lineáris, akkor $\exists a_1 \in (a, x)$ és $\exists b_1 \in (x, b)$, hogy P_{a_1} és P_{b_1} az előbbi húr alatt van. Ekkor a P_{a_1} és P_{b_1} pontokat összekötő húr f grafikonja alatt van, ami ellentmond f konvexitásának.



Az alkalmazások szempontjából érdemes a konvexitást jellemző egyenlőtlenséget más formában is megadni.

1. Tétel. *Az* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény akkor és csak akkor konvex, illetve konkáv az* $I \subset \mathbb{R}$ *intervallumon, ha* $\forall a, b \in I, \ a < b$ *és* $\forall \lambda \in (0, 1)$ *esetén*

- $f\big(\lambda a + (1 - \lambda) b\big) \le \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b)$, *illetve*

- $f\big(\lambda a + (1 - \lambda) b\big) \ge \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b)$.

Bizonyítás. Csak a konvexitásra vonatkozó állítást fogjuk bebizonyítani.
Legyen $a, b \in I$, $a < b$ és $0 < \lambda < 1$. Ekkor

$$x = \lambda a + (1-\lambda)b \in (a, b),$$

mert

$$a = \lambda a + (1-\lambda)a < \lambda a + (1-\lambda)b = x < \lambda b + (1-\lambda)b = b.$$

Másrészt az (a, b) intervallum minden eleme előáll $\lambda a + (1-\lambda)b$ alakban, ahol $0 < \lambda < 1$. Ha ugyanis $x \in (a, b)$, akkor a

$$(\triangle) \qquad \lambda := \frac{b-x}{b-a}$$

választás megfelelő, mert

$$\frac{b-x}{b-a} \cdot a + \left(1 - \frac{b-x}{b-a}\right) \cdot b = \frac{b-x}{b-a} \cdot a + \frac{x-a}{b-a} \cdot b = \frac{ab - ax + bx - ab}{b-a} = x.$$

A definíció szerint az f függvény konvex az I intervallumon, ha $\forall a, b \in I,\ a < b$ esetén

$$f(x) \le \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \qquad \big(x \in (a, b)\big).$$

Ha $a < x < b$ és $x = \lambda a + (1-\lambda)b$, akkor a fenti egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy

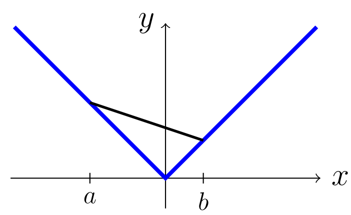
$$\begin{aligned} f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) &\le \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\big(\lambda a + (1-\lambda)b - a\big) + f(a) = \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(1-\lambda)(b-a) + f(a) = \\ &= \big(f(b) - f(a)\big)(1-\lambda) + f(a) = \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b), \end{aligned}$$

és ez a konvexitásra vonatkozó állítás bizonyítását jelenti.

Az előző tétel alapján nem nehéz igazolni, hogy az abszolút érték függvény konvex, hiszen minden $a, b \in \mathbb{R}$ és $0 < \lambda < 1$ esetén igaz, hogy

$$\big|\lambda a + (1-\lambda)b\big| \le |\lambda a| + \big|(1-\lambda)b\big| = \lambda|a| + (1-\lambda)|b|,$$

de a függvény nem szigorúan konvex.



A konvexitás néhány tulajdonsága

2. Tétel. *Ha $f : I \to \mathbb{R}$ nyílt intervallumon értelmezett függvény konvex vagy konkáv I-n, akkor f folytonos függvény.*

Bizonyítás. Legyen $a \in I$, és válasszuk olyan $\alpha, \beta \in I$ valós számokat, amikre $\alpha < a < \beta$. Legyen $(x_n) : \mathbb{N} \to (\alpha, a)$, $\lim(x_n) = a$ egy tetszőleges sorozat. Ekkor $\alpha < x_n < a < \beta$. Jelölje

$$\lambda_n := \frac{a - x_n}{a - \alpha} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \qquad \text{és} \qquad \lambda_n^* := \frac{\beta - a}{\beta - x_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$

Ekkor $0 < \lambda_n, \lambda_n^* < 1$ és ($\triangle$) miatt

$$x_n = \lambda_n \alpha + (1-\lambda_n)a \qquad \text{és} \qquad a = \lambda_n^* x_n + (1-\lambda_n^*)\beta$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ha f konvex I-n, akkor

$$f(x_n) = f\Big(\lambda_n \alpha + (1-\lambda_n)a\Big) \leq \lambda_n f(\alpha) + (1-\lambda_n) f(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a),$$

illetve

$$f(a) = f\Big(\lambda_n^* x_n + (1-\lambda_n^*)\beta\Big) \leq \lambda_n^* f(x_n) + (1-\lambda_n^*) f(\beta) \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad f(x_n) \geq \frac{f(a) - (1-\lambda_n^*) f(\beta)}{\lambda_n^*} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a).$$

Ezért a közrefogási elv miatt $\lim \Big(f(x_n)\Big) = f(a)$, és így az átviteli el szerint

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a).$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a).$$

Ekkor

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \qquad \Longrightarrow \qquad f \in C\{a\}.$$

Az állítás hasonlóan igazolható konkáv függvények esetén.

Az 1. tételből nem nehéz igazolni, hogy ha egy f függvény konvex (ill. konkáv) I-n, akkor a

$$g(x) := f(-x) \qquad (x \in -I)$$

függvény konvex (ill. konkáv) $-I$-n, ahol $-I := \{-x \mid x \in I\}$, hiszen $\forall a, b \in -I$, $a < b$, valamint $\forall \lambda \in (0,1)$ esetén

$$g\Big(\lambda a + (1-\lambda)b\Big) = f\Big(\lambda(-a) + (1-\lambda)(-b)\Big) = f\Big(\lambda^*(-b) + (1-\lambda^*)(-a)\Big) \underset{(\geq)}{\leq}$$

$$\underset{(\geq)}{\leq} \lambda^* f(-b) + (1-\lambda^*) f(-a) = \lambda^* g(b) + (1-\lambda^*) g(a) = \lambda g(a) + (1-\lambda) g(b),$$

hiszen $-b, -a \in I$, $-b < -a$ és $\lambda^* := 1 - \lambda \in (0,1)$. Ez megfelel a konvexitás geometriai interpretációjának, hiszen ***ha a függvény grafikonját az y tengelyre tükrözzük, akkor a konvexitás nem változik meg***.

Ugyanúgy az 1. tételből következik, hogy ha egy f függvény konvex (ill. konkáv) I-n, akkor a

$$g(x) := -f(x) \qquad (x \in I)$$

függvény konkáv (ill. konvex) I-n, hiszen $\forall a, b \in -I$, $a < b$, valamint $\forall \lambda \in (0,1)$ esetén

$$g\Big(\lambda a + (1-\lambda)b\Big) = -f\Big(\lambda a + (1-\lambda)b\Big) \underset{(\leq)}{\geq} -\Big(\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)\Big) = \lambda g(a) + (1-\lambda) g(b).$$

Ez megfelel a konvexitás geometriai interpretációjának, hiszen ***ha a függvény grafikonját az x tengelyre tükrözzük, akkor a konvexitás megváltozik***.

Az előző állításokból következik, hogy ha az f függvény konvex (ill. konkáv) egy nem negatív számokból álló I intervallumon, akkor

- ha f páros, akkor f konvex (ill. konkáv) $-I$-n,
- ha f páratlan, akkor f konkáv (ill. konvex) $-I$-n.

Megjegyzés. A fenti állítások megfelelői érvényesek szigorúan konvex és szigorúan konkáv függvényekre. ■

3. Tétel (Az inverz függvény konvexitása). *Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekvő konvex (ill. konkáv) függvény az I intervallumon, és tegyük fel, hogy $J := \mathcal{R}_f$ szintén intervallum. Ekkor az f függvény inverze konkáv (ill. konvex) a J intervallumon.*

Bizonyítás. A tétel feltételei garantálják, hogy $\exists f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ szintén szigorúan monoton növekvő függvény.

Legyen $\alpha, \beta \in J$, $\alpha < \beta$ és $0 < \lambda < 1$. Továbbá legyen $a := f^{-1}(\alpha)$ és $b := f^{-1}(\beta)$. Ekkor $a, b \in I$, és f^{-1} monotonitásából $a < b$ következik. Ha f konvex, akkor

$$y_1 := f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) =: y_2.$$

Mivel $y_1, y_2 \in J$, $y_1 \leq y_2$ és $f^{-1}\ \uparrow$, így $f^{-1}(y_1) \leq f^{-1}(y_2)$. Azonban

$$f^{-1}(y_1) = \lambda a + (1-\lambda)b = \lambda f^{-1}(\alpha) + (1-\lambda)f^{-1}(\beta),$$
$$f^{-1}(y_2) = f^{-1}\big(\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)\big) = f^{-1}\big(\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta\big).$$

Ezzel azt kaptuk, hogy

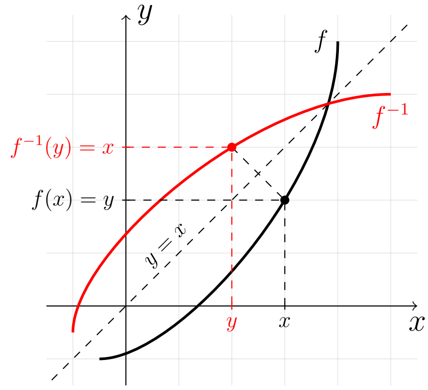
$$f^{-1}\big(\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta\big) \geq \lambda f^{-1}(\alpha) + (1-\lambda)f^{-1}(\beta),$$

amiből következik, hogy f^{-1} konkáv függvény J-n.

Az állítás hasonlóan igazolható, ha az f függvény konkáv I-n.

Megjegyzések.

1. A tétel megfelelje érvényes szigorúan konvex és szigorúan konkáv függvényekre.
2. Az állítás megfelel a konvexitás geometriai interpretációjának, hiszen ha a szigorúan monoton növekvő függvény grafikonját az $y = x$ egyenesre tükrözzük, akkor a konvexitás megváltozik.
3. ***Figyelem!*** Más a helyzet, ha f szigorúan monoton csökkenő. Hasonlóan igazolható, hogy ekkor f és f^{-1} konvexitása megegyezik.



A konvexitás igazolásához általában nem egyszerű feladat ellenőrizni a definícióban megadott egyenlőtlenséget. Ezért hasznos lehet a következő állítás.

4. Tétel. *Legyen f és g két nem negatív, azonos szigorú monotonitású, konvex függvény az I intervallumon. Ekkor fg szigorúan konvex az I intervallumon.*

Bizonyítás. Legyen $a, b \in I$, $a < b$ és $0 < \lambda < 1$. Mivel f és g nem negatív konvex függvények, így

[
$$0 \le f\Big(\lambda a + (1-\lambda)b\Big) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b),$$
$$0 \le g\Big(\lambda a + (1-\lambda)b\Big) \le \lambda g(a) + (1-\lambda) g(b).$$

Szorozzuk össze a fenti egyenlőtlenségeket! Ekkor

$$\begin{aligned}(fg)\Big(\lambda a + (1-\lambda)b\Big) &\le \Big(\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)\Big) \cdot \Big(\lambda g(a) + (1-\lambda) g(b)\Big) = \\ &= \lambda^2 f(a)g(a) + \lambda(1-\lambda)\Big(f(a)g(b) + f(b)g(a)\Big) + (1-\lambda)^2 f(b)g(b) = \\ &= \lambda(\lambda-1)\Big(f(b)-f(a)\Big)\Big(g(b)-g(a)\Big) + \lambda f(a)g(a) + (1-\lambda)f(b)g(b).\end{aligned}$$

Ha f és g azonos szigorú monotonitású függvények, akkor

$$\Big(f(b)-f(a)\Big)\Big(g(b)-g(a)\Big) > 0.$$

Ha hozzávesszük, hogy $\lambda > 0$ és $\lambda - 1 < 0$, akkor azt kapjuk, hogy

$$(fg)\Big(\lambda a + (1-\lambda)b\Big) < \lambda f(a)g(a) + (1-\lambda)f(b)g(b) = \lambda (fg)(a) + (1-\lambda)(fg)(b),$$

amiből a tétel állítása következik.

Következmény. Az előző tétel szerint, ha f nem negatív, szigorúan monoton és konvex egy intervallumon, akkor f^2 szigorúan konvex. Ehhez elegendő venni a $g := f$ esetet. Mivel $f^2 \ge 0$ és monotonitása azonos az f monotonitásával, akkor a $g := f^2$ esetből következik, hogy f^3 is szigorúan konvex. Teljes indukcióval igazolható, hogy f^n szigorúan konvex $\forall n \in \mathbb{N}^+$-ra.

Megjegyzés. Később fogunk megismerkedni a ***differenciálszámítás*** legfontosabb eredményeivel és eszköztárával. Ez a témakör a matematikai analízisnek, sőt az egész matematikának és az alkalmazásoknak is egyik igen fontos fejezete. A differenciálszámítás a gyakorlatban jól használható általános módszert ad többek között függvények tulajdonságainak (pl. monotonitás, konvexitás) a leírásához. ■

Néhány elemi függvény konvexitása

$\boxed{\textbf{1.}}$ Hatványfüggvények

5. Tétel. *Legyen*

$$h(x) := x^n \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol $2 \le n \in \mathbb{N}$. Ekkor

1. *ha $n = 2, 3, \ldots$, akkor h szigorúan konvex $[0, +\infty)$-en,*
2. *ha $n = 2k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, akkor h szigorúan konvex $(-\infty, 0]$-n,*
3. *ha $n = 2k + 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, akkor h szigorúan konkáv $(-\infty, 0]$-n,*
4. *ha $n = 2k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, akkor h szigorúan konvex $\mathbb{R}$-en.*

Bizonyítás.

1. Az állítás következik a 4. tétel következményéből az
$$f(x) := x \qquad (x \geq 0)$$
nem negatív, szigorúan monoton növekvő és konvex függvény megválasztásával.

2. Az előző pont szerint h szigorúan konvex $[0, +\infty)$-en. Ekkor az állítás abból következik, hogy $n = 2k$ mellett h páros függvény.

3. Az előző pont szerint h szigorúan konvex $[0, +\infty)$-en. Ekkor az állítás abból következik, hogy $n = 2k + 1$ mellett h páratlan függvény.

4. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $0 < \lambda < 1$. Azt kell igazolni, hogy
$$(*) \qquad x = \lambda a + (1 - \lambda)b \qquad \Longrightarrow \qquad x^n < \lambda a^n + (1 - \lambda)b^n.$$
Az 1. és 2. pont szerint f szigorúan konvex külön $[0, +\infty)$-en és $(-\infty, 0]$-n, de ebből nem következik a konvexitás a teljes $\mathbb{R}$-n. Azonban leegyszerűsíti a vizsgálatokat, hiszen így $(*)$ teljesül, ha $0 \leq a < b$ vagy $a < b \leq 0$. Marad a $a < 0 < b$ eset. Tegyük fel, hogy $0 \leq x < b$. Ekkor
$$\lambda a^n + (1 - \lambda)b^n > \lambda ab^{n-1} + (1 - \lambda)b^n = b^{n-1}\big(\lambda a + (1 - \lambda)b\big) = b^{n-1}x \geq x^{n-1}x = x^n,$$
hiszen $a^n > 0 > ab^{n-1}$, és $b > x \geq 0$ miatt $b^{n-1} > x^{n-1}$. Tehát $(*)$ teljesül ha $0 \leq x < b$. Az állítás hasonlóan igazolható, ha $a < x < 0$.

2. Reciprokfüggvények

6. Tétel. *Legyen*
$$h(x) := \frac{1}{x^n} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big).$$
ahol $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor

1. *ha $n = 1, 2, 3, \ldots$, akkor h szigorúan konvex $(0, +\infty)$-en,*
2. *ha $n = 2k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, akkor h szigorúan konvex $(-\infty, 0)$-n,*
3. *ha $n = 2k - 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, akkor h szigorúan konkáv $(-\infty, 0)$-n,*

Bizonyítás.

1. Az állítást először $n = 1$-re bizonyítjuk. Legyen $a, b \in (0, +\infty)$, $a < b$ és $0 < \lambda < 1$. Azt kell igazolni, hogy
$$(*) \qquad x = \lambda a + (1 - \lambda)b \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{x} < \lambda \frac{1}{a} + (1 - \lambda)\frac{1}{b}.$$

A fenti jelölések mellett

$$\Big(\lambda a+(1-\lambda)b\Big)\cdot\left(\lambda\,\frac{1}{a}+(1-\lambda)\,\frac{1}{b}\right)=\lambda^2+\lambda(1-\lambda)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+(1-\lambda)^2>$$

$$>\lambda^2+2\lambda(1-\lambda)+(1-\lambda)^2=\Big(\lambda+(1-\lambda)\Big)^2=1^2=1,$$

hiszen a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)>\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=1\qquad\left(\frac{a}{b}\neq\frac{b}{a},\quad\text{hiszen}\quad a\neq b\right).$$

Tehát $(*)$ teljesül, és így h szigorúan konvex $(0,+\infty)$-en.
Az $n>1$-re vonatkozó állítás következik a 4. tétel következményéből az

$$f(x):=\frac{1}{x}\qquad\Big(x\in(0,+\infty)\Big)$$

nem negatív, szigorúan monoton csökkenő és konvex függvény megválasztásával.

2. Az előző pont szerint h szigorúan konvex $(0,+\infty)$-en. Ekkor az állítás abból következik, hogy $n=2k$ mellett h páros függvény.

3. Az előző pont szerint h szigorúan konvex $(0,+\infty)$-en. Ekkor az állítás abból következik, hogy $n=2k-1$ mellett h páratlan függvény.

3. Gyökfüggvények

7. Tétel. *Legyen* $2\le q\in\mathbb{N}$ *és*

$$f(x):=\sqrt[q]{x}\qquad\Big(x\in[0,+\infty)\Big).$$

Ekkor az f *függvény szigorúan konkáv a* $[0,+\infty)$ *intervallumon.*

Bizonyítás. Az állítás következik az inverz függvény konvexitásáról szóló tételből, ha figyelembe vesszük, hogy a megadott f függvény a

$$g(x):=x^q\qquad(x\in[0,+\infty)),$$

függvény inverze, illetve g szigorúan monoton növekvő és szigorúan konvex a $[0,+\infty)$ intervallumon.

SPECIÁLIS FÜGGVÉNYEK 1.

1. Hatványfüggvények

Legyen $n = 0, 1, 2, \dots$ egy rögzített természetes szám. ***Hatványfüggvénynek*** nevezzük a

$$h_n(x) := x^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

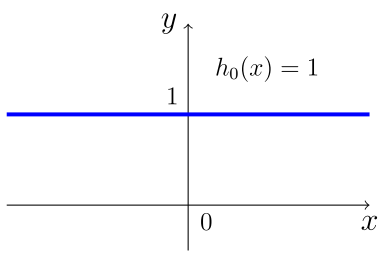
függvényt.

Ha $\underline{\boldsymbol{n = 0}}$, akkor a

$$h_0(x) := 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

konstans függvényt kapjuk. Ennek tulajdonságai:

- páros,
- $\nearrow$ és $\searrow$ $\mathbb{R}$-en,
- folytonos $\mathbb{R}$-en,
- $\lim\limits_{-\infty} h_0 = \lim\limits_{+\infty} h_0 = 1$,
- konvex és konkáv is $\mathbb{R}$-en,
- $\mathcal{R}_{h_0} = \{1\}$.

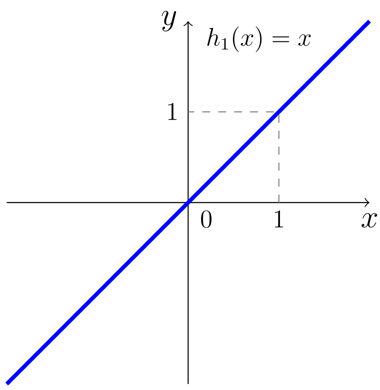


Ha $\underline{\boldsymbol{n = 1}}$, akkor a

$$h_1(x) := x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

identitásfüggvényt kapjuk. Ennek tulajdonságai:

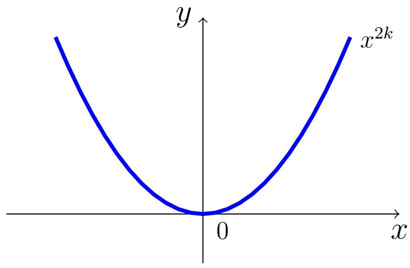
- páratlan,
- $\uparrow$ $\mathbb{R}$-en,
- folytonos $\mathbb{R}$-en,
- $\lim\limits_{-\infty} h_1 = -\infty$ és $\lim\limits_{+\infty} h_1 = +\infty$,
- konvex és konkáv is $\mathbb{R}$-en,
- $\mathcal{R}_{h_1} = \mathbb{R}$.



Ha **$n = 2k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ páros**, akkor a

$$h_{2k}(x) := x^{2k} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény tulajdonságai:

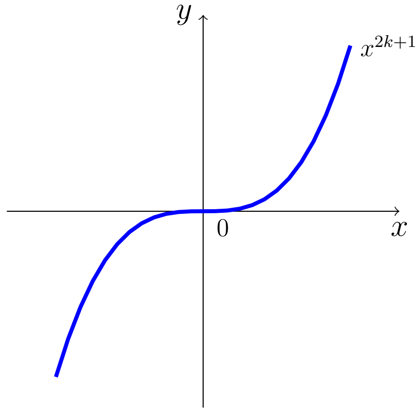


- páros,
- $\downarrow$ $(-\infty, 0]$-n és $\uparrow$ $[0, +\infty)$-n,
- 0 abszolút minimumhely,
- folytonos $\mathbb{R}$-en,
- $\lim_{-\infty} h_{2k} = \lim_{+\infty} h_{2k} = +\infty$,
- szigorúan konvex $\mathbb{R}$-en,
- $\mathcal{R}_{h_{2k}} = [0, +\infty)$.

Ha **$n = 2k + 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ páratlan**, akkor a

$$h_{2k+1}(x) := x^{2k+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény tulajdonságai:



- páratlan,
- $\uparrow$ $\mathbb{R}$-en,
- folytonos $\mathbb{R}$-en,
- $\lim_{-\infty} h_{2k+1} = -\infty$ és $\lim_{+\infty} h_{2k+1} = +\infty$,
- szigorúan konkáv $(-\infty, 0]$-n és
  szigorúan konvex $[0, +\infty)$-n.
- $\mathcal{R}_{h_{2k+1}} = \mathbb{R}$,

2. Reciprokfüggvények

Legyen $n = 1, 2, \ldots$ egy rögzített természetes szám. ***Reciprokfüggvénynek*** nevezzük a

$$h_{-n}(x) := \frac{1}{x^n} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$$

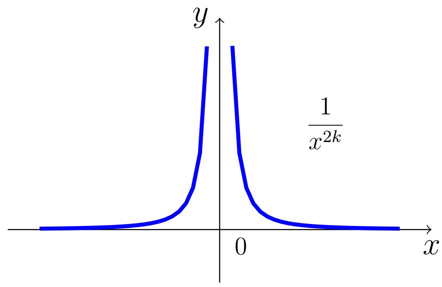
függvényt. A függvény tulajdonságai eltérnek attól függően, hogy n páros vagy páratlan szám.

Ha $\boldsymbol{n = 2k \ (k = 1, 2, \ldots)}$ **páros**, akkor a

$$h_{-2k}(x) := \frac{1}{x^{2k}} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$$

függvény tulajdonságai:

- páros,
- $\uparrow$ $(-\infty, 0)$-n és $\downarrow$ $(0, +\infty)$-n,
- folytonos az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon,
- $\lim\limits_{-\infty} h_{-2k} = \lim\limits_{+\infty} h_{-2k} = 0$, és $\lim\limits_{0} h_{-2k} = +\infty$,
- szigorúan konvex a $(-\infty, 0)$-n és $(0, +\infty)$-n,
- $\mathcal{R}_{h_{-2k}} = (0, +\infty)$.

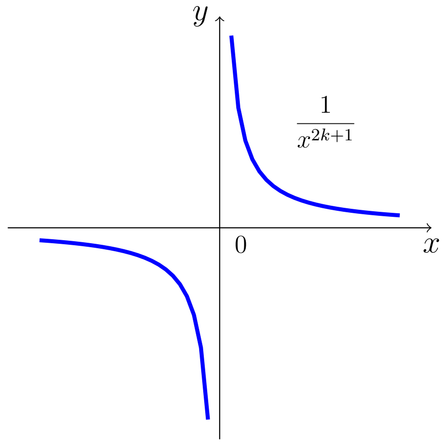


Ha $\boldsymbol{n = 2k + 1 \ (k = 0, 1, 2, \ldots)}$ **páratlan**, akkor a

$$h_{-2k-1}(x) := \frac{1}{x^{2k+1}} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$$

függvény tulajdonságai:

- páratlan,
- $\downarrow$ $(-\infty, 0)$-n és $\downarrow$ $(0, +\infty)$-n,
- folytonos az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon,
- $\lim\limits_{-\infty} h_{-2k-1} = \lim\limits_{+\infty} h_{-2k-1} = 0$, illetve
  $\lim\limits_{0-0} h_{-2k-1} = -\infty$ és $\lim\limits_{0+0} h_{-2k-1} = +\infty$,
- szigorúan konkáv $(-\infty, 0)$-n és
  szigorúan konvex $(0, +\infty)$-n.
- $\mathcal{R}_{h_{-2k-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,



3. Gyökfüggvények

Rögzítsünk egy $2 \le q \in \mathbb{N}$ természetes számot. Emlékeztetünk a gyökvonás fogalmára: bármely $x \ge 0$ esetén

$$\alpha := \sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$$

az az (egyértelműen létező) $\alpha \in [0, +\infty)$ szám, amelyre fennáll az $\alpha^q = x$ egyenlőség.

Ennek alapján vezessük be a q***-adik gyökfüggvény*** fogalmát:

$$h_{1/q} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$$

legyen az a függvény, amelyre

$$h_{1/q} := \sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}} \qquad \big(x \in [0, +\infty)\big).$$

Ez a függvény a ***q*-adik hatványfüggvény inverzeként** is értelmezhető. Azt már tudjuk, hogy a q-adik hatványfüggvény szigorúan monoton növekvő $\mathbb{R}$-en, ha q páratlan, ezért invertálható. Ha q páros, akkor már nem invertálható, de ha leszűkítjük a $[0, +\infty)$ intervallumra, akkor invertálható, mert ott szigorúan monoton növekvő, azaz minden $q = 2, 3, \ldots$ esetén a

$$h_q(x) : [0, +\infty) \to [0, +\infty), \quad h_q(x) := x^q$$

függvény szigorúan monoton növekvő a $[0, +\infty)$ intervallumon, következésképpen invertálható. A

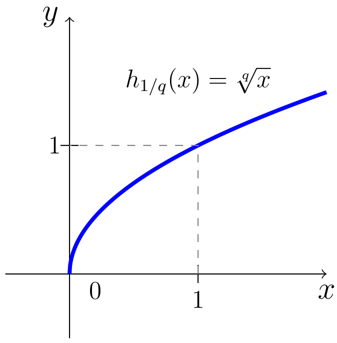
$$\left(\sqrt[q]{x}\right)^q = \sqrt[q]{x^q} = x \qquad (x \geq 0)$$

azonosság mutatja, hogy

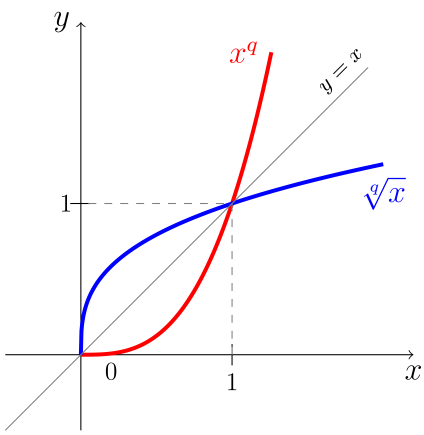
$$h_q^{-1} = h_{1/q}.$$

A következő tételben a q-adik gyökfüggvény eddig megismert tulajdonságait soroljuk fel:

- $\uparrow$ $[0, +\infty)$-n,
- folytonos a $[0, +\infty)$ halmazon,
- $\lim\limits_{+\infty} h_{1/q} = +\infty$,
- szigorúan konkáv $[0, +\infty)$-n,
- $\mathcal{R}_{h_{1/q}} = [0, +\infty)$.



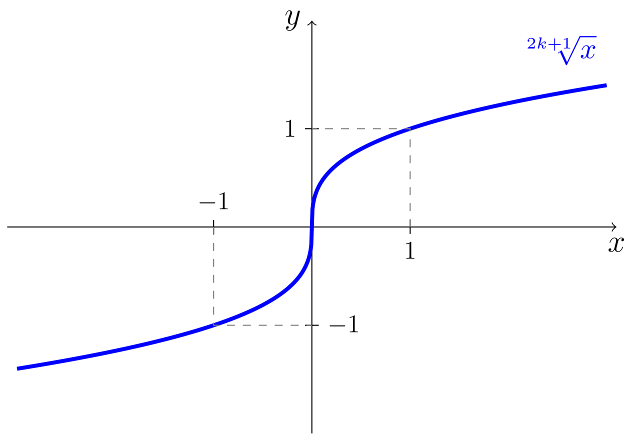
A következő ábrán egy koordináta-rendszerben szemléltetjük a h_q és a $h_{1/q}$ függvényeket:



Jegyezzük meg, hogy ha $q = 2k + 1$ ($k = 1, 2, \ldots$) páratlan szám, akkor a q-adik gyökfüggvényt az egész $\mathbb{R}$ halmazon is értelmezhetjük, mert a

$$h_{2k+1}(x) := x^{2k+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény szigorúan monoton növekedő $\mathbb{R}$-en, következésképpen invertálható. A h_{2k+1}^{-1} függvényt $(2k + 1)$-edik gyökfüggvénynek nevezzük. Ez a függvény páratlan és szigorúan monoton növekedő $\mathbb{R}$-en, szigorúan konvex $(-\infty, 0]$-n és szigorúan konkáv $[0, +\infty)$-n.



y
$\sqrt[2k+1]{x}$
1
-1
1
x
-1