

# Numerikus módszerek 1.

2. előadás: Lineáris egyenletrendszerek megoldása, Gauss-elimináció

Krebsz Anna

ELTE IK

- 1 Lineáris egyenletrendszerek alkalmazása
- 2 Lineáris egyenletrendszerek
- 3 A Gauss-elimináció algoritmus
- 4 Műveletigény

- 1 Lineáris egyenletrendszerek alkalmazása
- 2 Lineáris egyenletrendszerek
- 3 A Gauss-elimináció algoritmus
- 4 Műveletigény

- **Általános iskolában:**

Matematikai versenyfeladat 3. osztály

A MATEK szó minden betűje egy-egy számjegyet jelöl. A számjegyekre igazak a következő állítások:

$$M + A + T + E + K = 25$$

$$M + A = 11$$

$$A + T = 10$$

$$T + E = 12$$

$$E + K = 10$$

Melyik betű melyik számjegyet jelöli, ha az öt betű öt különböző számjegyet jelöl?

- **Gazdasági számítások:**

Tegyük fel, hogy egy üzem kétféle végterméket állít elő négyféle alkatrész felhasználásával. Jelölje  $A_1, A_2$  a végtermékeket, az  $A_3, A_4$  a félkész termékeket és  $A_5, A_6$  az alapanyagokat. Az egyes alapanyagok és félkész termékek egymásba és a végtermékbe való beépülését a **közvetlen ráfordítás mátrix ( $K$ )** adja meg. A mátrix  $k_{ij}$  eleme azt mutatja, hogy az  $i$ . termékből közvetlenül (nem más terméken keresztül) mennyi épül be a  $j$ . termékbe.

A **teljes ráfordítások mátrixában ( $T$ )** a  $t_{ij}$  elem azt mutatja, hogy egy darab  $A_j$  termék összesen hány darab  $A_i$  elemet tartalmaz. Ennek meghatározása a  $T = (I - K)^{-1}$  képletből történik. A kétféle mátrix alkalmazása:  
 $x$  alapanyagból  $y = (I - K) \cdot x$  végtermék lesz és  
 $y$  végtermékhez  $x = T \cdot y = (I - K)^{-1} \cdot y$  alapanyag kell.

- Mérnöki feladatok numerikus megoldása (lásd a bevezető példát)
- Interpolációs spline-ok megadása (lásd 2. félév)
- Approximációs feladatok megoldása (lásd 2. félév)

- **Hálózatok stacionárius modellezése:** villamos hálózatok, áramkörök, víz- és gázellátó csőrendszerek irányított gráffal történő leírása után. Az él iránya megfelel a várt áramlási iránynak. Minden élhez tartozik egy szám, az ott szállított áram (víz stb.) mennyiségét adja. Egyes csomópontokhoz is tartozhat áram, ezek a külső pontok. Ilyen áram a ponton keresztül be ill. kifolyó áram, amely ugyancsak ismeretlen lehet.

A gráf minden csomópontjában felírjuk az első Kirchhoff-féle törvényt, amely szerint - figyelembe véve az élek irányát - a csomópontban találkozó élek áramainak összege nulla. Ez az anyag-megmaradási törvény egy lineáris reláció, és a minden csomópont-hoz tartozó relációk összessége adja a lineáris egyenletrendszert.

- 1 Lineáris egyenletrendszerek alkalmazása
- 2 Lineáris egyenletrendszerek**
- 3 A Gauss-elimináció algoritmus
- 4 Műveletigény



## Lineáris egyenletrendszer (LER)

Hagyományos alak:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

$n$  egyenlet,  $n$  ismeretlen

Mátrix alak:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

vagyis

$$Ax = b \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b, x \in \mathbb{R}^n.$$

**Feladat:**

$A$  és  $b$  adottak, keressük  $x$ -et.

## **Tétel:** emlékeztető lin. alg.-ból

- LER megoldható  $\iff b$  felírható az  $A$  oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként.
- Egyértelműen létezik megoldás  $\iff A$  oszlopai lineárisan függetlenek  $\iff \text{rang}(A) = n \iff \det(A) \neq 0 \iff A$  invertálható ( $x = A^{-1}b$ ).

## **Megj.:**

- Ha  $A$  speciális alakú (pl. diagonális vagy háromszög alakú), akkor egyszerűen megkapható a megoldás.
- Cramer-szabályt max.  $3 \times 3$ -as mátrixokra alkalmazunk.

# Lineáris egyenletrendszerek megoldási módszerei

- Direkt módszerek, felbontások (véges lépésszám, „pontos” megoldás)
  - Gauss-elimináció, progonka módszer
  - $LU$ -felbontás,  $LDU$ ,  $LL^T$ , Cholesky
  - QR-felbontás (Gram–Schmidt ort., Householder trf.)
  - ILU-felbontás
- Iterációs módszerek (vektor sorozat, mely a megoldáshoz „tart”)
  - mátrixnormák, Banach-féle fixponttétel
  - Jacobi-iteráció
  - Gauss–Seidel-iteráció
  - Richardson-iteráció
  - ILU-algoritmus
- Variációs módszerek (egy „célfüggvény” minimalizálása által)
  - Gradiens-módszer
  - Konjugált gradiens-módszer

- 1 Lineáris egyenletrendszerek alkalmazása
- 2 Lineáris egyenletrendszerek
- 3 A Gauss-elimináció algoritmus**
- 4 Műveletigény

Legyen  $a_{in+1} := b_i$ , azaz  $[A|b]$  a tárolási forma.

GE := Gauss-elimináció.

$$A^{(0)} := \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} = b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2n+1} = b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{nn+1} = b_n \end{array} \right]$$

**Célunk:** A LER-t egyszerűbb alakra hozni:

- 1 balról jobbra: a főátló alatt kinullázzuk az elemeket, „előre”, GE
- 2 jobbról balra: a főátló fölött nullázunk, „vissza”, visszahelyettesítés

Az 1. egyenletet változatlanul hagyjuk.

Ha  $a_{11}^{(0)} \neq 0$ , akkor az  $i$ -edik egyenletből ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) kivonjuk az 1. egyenlet  $\left(\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}\right)$ -szeresét: hogy  $a_{i1}^{(0)}$  kinullázódjon.  
 ( $\rightsquigarrow$  elimináció, kiküszöbölés)

$$A^{(1)} = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & a_{1n+1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2n+1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & a_{nn+1}^{(1)} \end{array} \right],$$

ahol

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \cdot a_{1j}^{(0)} \quad (i = 2, \dots, n; j = 2, \dots, n, n+1).$$

Az 1. és 2. egyenletet változatlanul hagyjuk.

Ha  $a_{22}^{(1)} \neq 0$ , akkor az  $i$ -edik egyenletből ( $i = 3, 4, \dots, n$ ) kivonjuk a 2. egyenlet  $\left(\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right)$ -szeresét: hogy  $a_{i2}^{(1)}$  kinullázódjon.

$$A^{(2)} = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & a_{1n+1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2n+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & a_{3n+1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & a_{nn+1}^{(2)} \end{array} \right],$$

ahol

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot a_{2j}^{(1)} \quad (i = 3, \dots, n; j = 3, \dots, n, n+1).$$



Az  $1., 2., \dots, k$ . egyenleteket változatlanul hagyjuk.

Ha  $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ , akkor az  $i$ -edik egyenletből ( $i = k + 1, \dots, n$ )

kivonjuk a  $k$ -adik egyenlet  $\left(\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\right)$ -szeresét: hogy  $a_{ik}^{(k-1)}$

kinullázzódjon. Ezt a lépést láttuk, amikor a 2. lépésben az 1. lépés eredményét felhasználtuk. Ha 2 helyére  $k$ -t írunk, akkor megkapjuk az általános képleteket.

## **Tétel:** A Gauss-elimináció általános lépése

Ha  $a_{k,k}^{(k-1)} \neq 0$ , akkor a  $k$ . lépés képletei

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot a_{kj}^{(k-1)}$$

$$\begin{aligned} k &= 1, \dots, n-1; \\ i &= k+1, \dots, n; \\ j &= k+1, \dots, n, n+1. \end{aligned}$$

Így  $n - 1$  lépés után felső háromszögmátrix alakú LER-t kapunk:

$$A^{(n-1)} = \left[ \begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n-1}^{(0)} & a_{1n}^{(0)} & a_{1n+1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} & a_{2n+1}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_{n-1n-1}^{(n-2)} & a_{n-1n}^{(n-2)} & a_{n-1n+1}^{(n-2)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & a_{nn+1}^{(n-1)} \end{array} \right].$$

Ezután visszafelé haladva: az aktuális egyenletet osztjuk a főátlóbeli elemmel, majd a főátló fölött kinullázzuk az elemeket, az eddigiekkel analóg „sorműveletek” alkalmazásával.

Végül  $[I|x]$  alakot nyerünk. ( $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  egységmátrix.)

Az algoritmus második része („jobbról-balra”), a felső háromszög alakú LER megoldása képlettel is kifejezhető. Figyeljük meg, hogy a felső-háromszögmátrixú alaknál soronként azonos felső indexek vannak.

## A visszahelyettesítés

$$x_n = \frac{a_{nn}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}},$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i-1)}} \left( a_{in+1}^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i-1)} \cdot x_j \right) \quad (i = n - 1, \dots, 1).$$

## Példa: LER megoldása GE-val

Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszert Gauss-elimináció alkalmazásával!

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

**Az elimináció:** Kézi számolásnál függőleges vonalat húzunk a jobboldali vektor elé, számítógéppel ezt programozással oldjuk meg.

### 1. lépés:

$$2. \text{ sor} - \underbrace{\left(\frac{-4}{2}\right)}_{+2} * 1. \text{ sor}$$

$$3. \text{ sor} - \underbrace{\left(\frac{6}{2}\right)}_{+3} * 1. \text{ sor}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & -2 & 3 \\ 6 & -5 & 4 & -3 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array} \right] \rightarrow$$

**2. lépés:**

$$3. \text{ sor } - \underbrace{\left(\frac{-5}{5}\right)}_{+1} * 2. \text{ sor}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow$$

**A visszahelyettesítés:**

3. sor  $/(-1)$

2. sor  $- 4 * \text{új 3. sor.}$

1. sor  $- 3 * \text{új 3. sor.}$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

2. sor /5

1. sor /2.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Tehát a lineáris egyenletrendszer megoldása az  $\mathbf{x} = [1, 1, -1]^T$  vektor.



- LER megoldása (láttuk példán is)
- Determináns meghatározása: mivel a GE lépései determináns tartók, ezért

$$\det(A) = \det(\Delta_{\text{alak}}) = \prod_{k=1}^n a_{kk}^{(k-1)}$$

Vigyázzunk : ha sort vagy oszlopot cserélünk, a determináns értéke változik.

- Több jobb oldallal ( $b$ ) megoldás: lehet egyszerre, így a mátrixon csak egyszer eliminálunk.

$$[A|b_1|b_2|b_3] \rightarrow \text{GE} \rightarrow \text{visszahely} \rightarrow [I|x_1|x_2|x_3]$$

- Mátrix inverzének meghatározása az  $A \cdot X = I$  mátrixegyenlet megoldását jelenti.

$$A \cdot [x_1 | \dots | x_n] = [e_1 | \dots | e_n] \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} Ax_1 & = & e_1 \\ \dots & & \dots \\ Ax_n & = & e_n \end{array}$$

Visszavezettük az előző pontra. A GE-t kiterjesztett mátrixon hajtjuk végre

$$[A | I] \rightarrow \text{GE} \rightarrow \text{visszahely} \rightarrow [I | A^{-1}],$$

visszahelyettesítés után jobb oldalon kapjuk az inverz mátrixot. Sor csere esetén az inverz nem változik, oszlopcsere esetén változik (lásd gyak.).

**Példa:** mátrix determinánsának és inverzének számítása  
GE-val

Mi az előző példa mátrixának determinánsa és inverze?

$$\det(A) = \det(\Delta_{\text{alak}}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (-1) = -10$$

**Az elimináció:**

**1. lépés:**

$$2. \text{ sor} - \underbrace{\left(\frac{-4}{2}\right)}_{+2} * 1. \text{ sor}$$

$$3. \text{ sor} - \underbrace{\left(\frac{6}{2}\right)}_3 * 1. \text{ sor}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow$$

**2. lépés:**

$$3. \text{ sor } - \underbrace{\left(\frac{-5}{5}\right)}_{+1} * 2. \text{ sor}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow$$

**A visszahelyettesítés:**3. sor  $/(-1)$ 2. sor  $- 4 * \text{új 3. sor.}$ 1. sor  $- 3 * \text{új 3. sor.}$ 

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

2. sor /5

1. sor /2.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] = [I|A^{-1}]$$

Az inverz a jobb oldalon álló mátrix.

Megoldható-e egyáltalán a LER? Vizsgáljuk?

*Majd GE közben kiderül.*

Megoldható, de mégsem tudjuk a GE-t végigcsinálni?

*Előfordulhat. . .  $\rightsquigarrow$  sort cserélünk  $\rightsquigarrow$  nem változik a megoldás. Ha oszlopot cserélünk, akkor a megoldás komponensei a cserének megfelelően változnak.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Biztos és stabil megoldás a főelemkiválasztás.



## **Definíció:** részleges főelemkiválasztás

A  $k$ -adik lépésben válasszunk egy olyan  $m$  indexet, melyre  $|a_{mk}^{(k-1)}|$  maximális ( $m \in \{k, k+1, \dots, n\}$ ), majd cseréljük ki a  $k$ -adik és  $m$ -edik sort.

## **Definíció:** teljes főelemkiválasztás

A  $k$ -adik lépésben válasszunk egy olyan  $(m_1, m_2)$  indexpárt, melyre  $|a_{m_1 m_2}^{(k-1)}|$  maximális ( $m_1, m_2 \in \{k, k+1, \dots, n\}$ ), majd cseréljük ki a  $k$ -adik és  $m_1$ -edik sort, valamint a  $k$ -adik és  $m_2$ -edik oszlopot.

**Tétel:**

A GE elvégezhető sor és oszlopcsere nélkül

$$\Leftrightarrow a_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

**Biz.:** trivi a rekurzióból.

**Definíció: főminorok**

Az  $A$  főminorai a

$$D_k = \det \left( \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} \right), \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

determinánsok. Ezek az  $A$  bal felső  $k \times k$ -s részmátrixaimak determinánsai.

**Tétel:**

$$D_k \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad \Leftrightarrow \quad a_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

**Biz.:** A GE átalakításai determináns tartók, ezért

$$D_k = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \dots \cdot a_{kk}^{(k-1)} = D_{k-1} \cdot a_{kk}^{(k-1)},$$

amiből az állítás adódik. A  $D_n \neq 0$  illetve az  $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$  feltétel nem szükséges a GE-hoz, csak a LER megoldhatóságához.  $\square$

**Megj.:**

- Numerikus szempontból jobb, ha alkalmazunk főelemkiválasztást. Ezzel a GE-s hányadosaink pontosabbak lesznek.
- Determináns számításakor a cserékkel vigyázni kell!

- 1 Lineáris egyenletrendszerek alkalmazása
- 2 Lineáris egyenletrendszerek
- 3 A Gauss-elimináció algoritmus
- 4 Műveletigény**

## Tétel: A Gauss-elimináció műveletigénye

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

**Biz.:** Rögzített  $k$ -ra: a  $k$ . lépés képletéből számolva

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot a_{kj}^{(k-1)} \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, n-1; \\ i = k+1, \dots, n; \\ j = k+1, \dots, n, n+1. \end{array}$$

$(n-k)$  osztás,  $(n-k)(n-k+1)$  szorzás és  $(n-k)(n-k+1)$  összeadás kell.

Összesen  $(n-k)(2(n-k)+3)$  művelet. ( $n-k =: s$ )

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(2(n-k)+3) &= \sum_{s=1}^{n-1} s(2s+3) = 2 \sum_{s=1}^{n-1} s^2 + 3 \sum_{s=1}^{n-1} s = \\ &= 2 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 3 \frac{(n-1)n}{2} = \frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2). \quad \square\end{aligned}$$

**Definíció:**  $\mathcal{O}(n^2)$  függvény

Az  $f(n)$  függvényt  $\mathcal{O}(n^2)$ -es nagyságrendűnek nevezzük, ha  $\frac{f(n)}{n^2}$  korlátos minden  $n \in \mathbb{N}$ -re.

# A visszahelyettesítés műveletigénye

A felső háromszögmátrixú LER megoldásának műveletigénye.

**Tétel:** A visszahelyettesítés műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

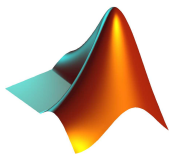
**Biz.:**

$$x_n = \frac{a_{nn}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, \quad x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i-1)}} \left( a_{in+1}^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i-1)} \cdot x_j \right) \quad (i = n-1, \dots, 1).$$

Rögzített  $i$ . sorra 1 db osztás,  $(n-i)$  szorzás és  $(n-i)$  összeadás.

Összesen:  $2(n-i) + 1$  művelet ( $n-i =: s$ ).

$$1 + \sum_{s=1}^{n-1} (2s+1) = 1 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + (n-1) = n^2 + \mathcal{O}(n). \quad \square$$



- 1 A Gauss-elimináció működése „kisebb” ( $n \approx 7$ ) LER-ekre
- 2 A beépített megoldó rutin persze sokkal gyorsabb
- 3 Egyre nagyobb méretű ( $n = 10, 20, 30, \dots, 200$ ) mátrixokra a GE futási idejének viselkedése tényleg  $n^3$ -szerű