Diszkrét matematika 1.

10. előadás

Fancsali Szabolcs (Ligeti Péter diái alapján)

nudniq@cs.elte.hu
www.cs.elte.hu/∼nudniq

Síkgráfok

Definíció

Egy G gráf síkgráf, ha lerajzolható úgy, hogy az élei csak a csúcsokban messék egymást. Egy síkgráf élei által határolt síkidom a gráf tartománya.

Tétel (Euler-formula)

Ha egy összefüggő $G = (V, E, \varphi)$ síkgráfnak t tartománya van, akkor $|V| + t = |E| + 2$.

Állítás

Legyen $G = (V, E, \varphi)$ összefüggő, egyszerű, síkgráf és $|V| \geq 3$. Ekkor $|E| \leq 3|V| - 6$. Ha G páros gráf is, akkor $|E| \leq 2|V| - 4$ is igaz.

Következmény

A K_5 és a $K_{3,3}$ gráfok egyike sem síkgráf.

Síkgráfok 2

Definíció

G és G' gráfok topológikusan izomorfak, ha az alábbi lépéseket véges sokszor végrehajtva izomorf gráfokat kapunk: egy élen egy új csúcsot veszünk fel vagy egy 2 fokú csúcsra illeszkedő éleket összeolvasztjuk és a csúcsot elhagyjuk.

Tétel (Kuratowski tétele)

Egy G gráf síkgráf $\Leftrightarrow$ nem tartalmaz olyan részgráfot, ami topológikusan izomorf K_5-tel vagy $K_{3,3}-$mal.

Tétel (Fáry-Wágner tétele)

Minden egyszerű síkgráfnak létezik olyan lerajzolása, amiben az élek egyenes szakaszok.

Fabejárások

Szélességi bejárás – BFS

Adott v_0 csúcsból indulva járjuk be a v_0 összes $v_1, \ldots, v_a$ szomszédját, majd v_1 összes olyan $v_{a+1}, \ldots, v_b$ szomszédját, ahol még nem jártunk, stb.

Mélységi bejárás – DFS

Adott v_0 csúcsból indulva induljunk egy v_1 szomszédjába, ezután v_1-nek egy v_2 szomszédjába, majd tovább. Ha már ez nem lehetséges, akkor lépjünk vissza az utolsó olyan már bejárt csúcsba, ahonnan tovább lehet menni, stb.

Állítás

Adott G összefüggő gráfban mindkét eljárás egy feszítőfát konstruál $(|V| + |E|)$-vel arányos lépésben.

Alkalmazások

- legröv. (irányított) út/kör keresés
- max. folyam konstruálása
- erős öfüggőség eldöntése
- síkbarajzolhatóság eldöntése

Párosítások páros gráfban

Definíció

$M \subset E$ párosítás, ha M-beli éleknek nincs közös csúcsuk (független éleknek is nevezzük).
Egy $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_m, v_m)$ utat javító útnak nevezünk az M-re nézve, ha $(\forall e \in M : v_0, v_m \notin \varphi(e)) \wedge (\forall i \in \{1, \ldots, m\} : e_i \in M \Leftrightarrow 2|i)$

Egerváry és König algoritmusa (magyar módszer)

Cél: $G = ((A, B), E, \varphi)$ páros gráfban max élszámú párosítás keresés

- $M = \emptyset$ majd ehhez vegyünk ftlen éleket amíg lehet
- keressünk P jav. utat és növeljük a párosítást amíg lehet
- jav út keresés: módosított BFS $\forall a \in A$ csúcsból, felváltva nem-párosításbeli és párosításbeli élekkel

Gráfszínezések

Definíció

Egy G hurokmentes gráf k színnel színezhető, ha minden csúcsot ki lehet színezni k szín egyikével úgy, hogy a szomszédos csúcsok színe különböző. G kromatikus száma $\chi(G) = k$, ha k színnel színezhető, de $k-1$-el nem.

Tétel (Ötszíntétel)

Ha G síkgráf, akkor $\chi(G) \leq 5$.

Tétel (Négyszíntétel)

Ha G síkgráf, akkor $\chi(G) \leq 4$.

Színezési érdekességek

- ha G nem sík, akkor $\chi(G)$-t még becsülni is nehéz
- élszínezés, $\chi_e(G)$ élkromatikus szám def hasonló
- Vizing tétele: $\chi_e(G) \leq \max_{v \in V} d(v) + 1$
- $\max_{v \in V} d(v) \leq \chi_e(G)$ trivi, a pontos érték meghatározása nehéz

Nagy hálózatok

Nagy hálózatok jellemzése

- Internet, kapcsolati hálók, biológiai hálózatok, ...
- globális jellemzés esélytelen
- lokális tulajdonságok mérése
- modellezés

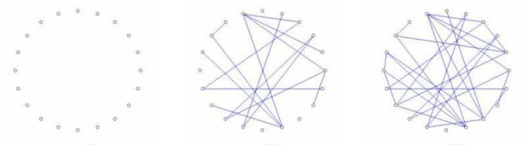
Vizsgált jellemzők

- maximális komponens mérete, maximális teljes részgráf (klikk) mérete, ...
- fokszámeloszlás: $p_k = P(deg(v) = k)$
- átlagos úthossz
- klaszterezettség: egy csúcs szomszédai milyen gyakran vannak összekötve
- centralitás mértékek: mik a fontos csúcsok

Erdős-Rényi modell

Konstrukció

- $G(n,p)$ gráf n csúcson
- minden lehetséges élet p valószínűséggel behúzunk a többitől függetlenül



$p = 0$ $p = 0.1$ $p = 0.2$

Tulajdonságok

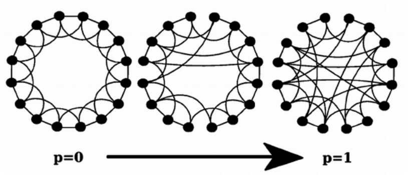
- $np < 1$: nagy valószínűséggel $\nexists \log n$ méretűnél nagyobb komponens
- $np = 1$: maximális komponens mérete $\sim n^{2/3}$
- $np > 1$: van „óriás” komponens ($\sim cn$ méretű), a többi $\log n$-es
- fokszámeloszlás: $p_k = \binom{n-1}{k} p^k (1 - p^{n-1-k})$
- átlagos úthossz: $\log n$
- klaszterezettség: $\frac{1}{n}$

Watts-Strogatz kis-világ modell

Konstrukció

n csúcs, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, K átlagos fokszám, $n \gg K \gg \log n, p$ valószínűség

1. $\forall v_i$-t összekötünk k szomszédjával (fele előtte, fele utána)
2. $\forall v_i, \forall (v_i, v_j)$ élt $i < j$ esetén p valószínűséggel kicseréljük véletlen (v_i, v_l) élre



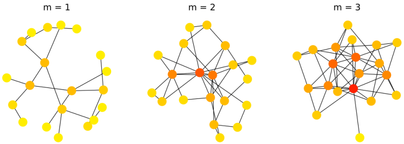
Tulajdonságok

- $p = 0:$ szabályos „gyűrű-gráf”, $p = 1:$ Erdős-Rényi gráf, $0 < p < 1$ az érdekes
- fokszámeloszlás: $p_k = \sum_{i=0}^{f(k,K)} C^i_{K/2}(1-p)^i p^{K/2-i} \frac{(pK/2)^{k-K/2-i}}{(k-K/2-i)!} e^{pK/2}$
- átlagos úthossz: $< \log n$
- kis-világ tulajdonság: lokálisan klaszterezett, klaszterezettség: $\frac{3(k-2)}{4(k-1)}(1-p)^3$

Barabási-Albert modell

Konstrukció

1. kiindulunk egy összefüggő gráfból $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ csúcsokon
2. hozzáadunk új csúcsokat, mindet $m \leq n$ korábbi csúcshoz kötünk, v_i-hez $\deg(v_i)$-vel arányos valószínűséggel



Tulajdonságok

- növekedés és preferenciális kapcsolódás
- fokszámeloszlás: $p_k \sim k^{-\gamma}$ valamely $\gamma \in \mathbb{R}^+$ értékre
- átlagos úthossz: $\frac{\log n}{\log \log n}$
- klaszterezettség: $\frac{1}{n^{0.75}}$
- néhány γ érték: INTERNET: 2.1, hivatkozások: 3, USA elektromos hálózat: 4