

Valószínűesszámtás, 1. zárthelyi gyakorló feladatok, 2025. március

1. Egy vizsgateszt minden kérdésére négy válaszlehetőség van megadva, amelyekből minden esetben pontosan egy helyes. Egy vizsgázó a kérdések $3/5$ -részére tudja a helyes választ. Viszont a vizsgadruk miatt még akkor is csak $0,99$ valószínűséggel jelöli be a helyes választ, ha tudja azt. Ha nem tudja a helyes választ, akkor tippel, azaz véletlenszerűen választ a négy válaszlehetőség közül. Tegyük fel, hogy a vizsgázó egy adott kérdésre helyesen választott. Mekkora a valószínűsége, hogy tudta is a helyes választ?
2. Dani sportlövészetre jár, de még elég bizonytalanul céloz: húsz lövésből átlagosan ötször találja el a célt. (Tekintsük úgy, hogy minden lövésnél a többitől függetlenül $\frac{5}{20}$ a valószínűsége annak, hogy Dani találatot ér el.) Hány egymás után leadott lövés kell ahhoz, hogy Dani legalább 95% -os valószínűséggel legalább egyszer célba találjon?
3. Egy táncversenyen 30 táncpár (összesen 60 ember) mérkőzik meg egymással. A verseny előtt véletlenszerűen kiválasztanak 15 versenyzőt (minden 15 fős csoportot azonos valószínűséggel választva), akiken doppingvizsgálatot végeznek. Legyen X az, hogy hány olyan táncpár van, ahol mindkét tagon elvégezték a doppingvizsgálatot.
 - (a) Mennyi X várható értéke?
 - (b) Mennyi $P(X = 5)$?
4. Egy szabálytalan érmét dobálunk ($0 < p < 1$ a fej valószínűsége). Jelölje X hogy hányadikra kaptuk az első fejet, Y pedig azt, hogy hányadikra jött ki az első írás.
 - a) Van-e olyan p érték, amikor X és Y független?
5. Egy elképzelt faluban 100 háztartásban élnek az emberek, mindegyikben négyen. Egy közvéleménykutatásban megkérdeznek véletlenszerűen 15 embert, minden 15 főből álló csoportot azonos valószínűséggel választva (különböző embereket választanak). Mennyi a valószínűsége, hogy van legalább egy olyan háztartás, aminek minden tagját megkérdezik ebben a közvéleménykutatásban?
6. Legyen X az, hogy Zsófi hányszor utazik külföldre 2022-ben, és Y az, hogy hányszor utazik külföldre 2023-ban. Tegyük fel, hogy ezek független, azonos paraméterű, geometriai eloszlású valószínűségi változók (a lehetséges legkisebb érték 1), valamint az $X + Y$ összeg várható értéke 5. Mennyi a valószínűsége, hogy Zsófi 2022-ben és 2023-ban összesen pontosan 4-szer utazik külföldre?
7. Legyen X az, hogy ha 5-ször dobunk két szabályos kockával, akkor hányszor lesz a dobott számok különbsége legalább 3. Adjuk meg X szórásnégyzetét!