Analízis II.

A és B szakirány

1. előadás
Differenciálszámítás 1.

1. **Emlékeztető**

- **Cél:** függvénytulajdonságok (monotonitás, szélsőérték, konvexitás) jellemzése.
- **Eddig:** – függvény határértéke, folytonossága,
  – folytonos függvények tulajdonságai,
  – hatványsorok,
  – elemi függvények értelmezése.

2. **A félév anyaga: valós-valós függvényekre**

- differenciálszámítás,
- integrálszámítás.

Az óra anyaga

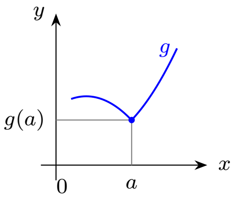
1. A derivált motivációja
2. A pontbeli derivált fogalma
3. A folytonosság és a derivált kapcsolata
4. Lineáris közelítés
5. Függvénygrafikon érintője
6. A deriváltfüggvény
7. Deriválási szabályok
8. Elemi függvények deriváltjai

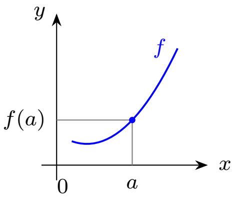
Az óra anyaga

1. A derivált motivációja

1. Függvénygrafikon „töréspontja”, „simasága”, „érintője”.

A fogalmak szemléletes jelentése világos.

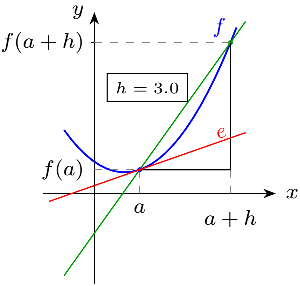




A g grafikonjának az $\big(a, g(a)\big)$ pont egy „töréspontja”. Az f grafikonja „sima”, nincs „töréspontja”.

A különbség pontos leírásához induljunk ki abból az *ötletből*, hogy húzzunk szelőt a grafikon $\big(a, f(a)\big)$ pontjában:

$$f(x) = \frac{7}{20} \cdot (x-1)^2 + \frac{7}{10} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a = \frac{3}{2}$$



$$m(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{7 \cdot (4+h)}{80}$$

$$\lim_{h \to 0} m(h) = \frac{7}{20} = 0.35$$

A szelőknek van „határhelyzete”, ha $h \to 0$, mert

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ határérték és az véges.}$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a függvény **deriválható az a pontban**.

A görbe **érintőjének** azt az egyenest célszerű nevezni, amelyhez a húrok egyenesei tartanak, ha $h \to 0$.

$\boxed{2.}$ Pillanatnyi sebesség.

A másik motiváció egy fizikai probléma. Tegyük fel, hogy egy pont mozgását a $t \mapsto s(t)$ út-idő függvény írja le. A $[t_0, t]$ időintervallumban az átlagsebesség a megtett $s(t) - s(t_0)$ út és a megtételéhez szükséges $t - t_0$ idő hányadosa, azaz

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Ha

$$\exists \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \quad \text{határérték és az véges,}$$

akkor az átlagsebesség a fenti határértékhez lesz „közel”, ha „minden határon túl” rövidítjük a $[t_0, t]$ időintervallumot. A pillanatnyi sebességet a fenti határértékkel **definiáljuk**.

Az óra anyaga

2. A pontbeli derivált fogalma

A pontbeli deriváltat a függvény értelmezési tartományának a **belső pontjaiban** fogjuk értelmezni.

Definíció.

Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. *Az* $a \in A$ *pont az* A ***halmaz belső pontja***, *ha*

$$\exists\ r > 0, \quad hogy \quad K_r(a) = (a - r, a + r) \subset A.$$

Jelölés: $\boxed{\operatorname{int} A} := \{a \in A \mid a \ \ \textit{belső pontja} \ \ A\textit{-nak}\}.$

Példák.

$\operatorname{int}(0,1) = (0,1)$, $\operatorname{int}[0,1] = (0,1)$, $\operatorname{int}\mathbb{R} = \mathbb{R}$, $\operatorname{int}\mathbb{N} = \emptyset$, $\operatorname{int}\mathbb{Q} = \emptyset$,

ha $A \subset \mathbb{R}$ véges halmaz, akkor $\operatorname{int} A = \emptyset$.

Definíció.

Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény az* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *pontban* ***differenciálható*** (*vagy* ***deriválható***)*, ha*

$$\exists \quad \text{és véges a} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{határérték.}$$

Ezt $f'(a)$*-val jelöljük, és az* f *függvény a* ***pontbeli deriváltjának*** (*vagy* ***differenciálhányadosának***) *nevezzük, azaz*

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Ezt a tényt a következőképpen fogjuk jelölni: $\boxed{f \in D\{a\}}$.

Megjegyzések.

1º Ekvivalens alak: $f \in D\{a\} \iff \boxed{\exists\ f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}.}$

2º Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, akkor

$$\triangle_a f(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}\big)$$

az f függvény a ponthoz tartozó **különbségihányados-függvénye** vagy **differenciahányados-függvénye**.

$\triangle_a f(x)$ jelentése: f grafikonján az $\big(a, f(a)\big)$, $\big(x, f(x)\big)$ pontokat összekötő szelő meredeksége. Így

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \triangle_a f(x).$$

3º A derivált definíciójában $0/0$-típusú határértékről van szó. ∎

Példa.

Tetszőleges $n \geq 1$ *természetes szám esetén az* $f(x) := x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ *függvény minden* $x \in \mathbb{R}\,(= \operatorname{int} \mathcal{D}_f)$ *pontban deriválható, és a deriváltja* nx^{n-1}*, azaz*

$$\boxed{\left(x^n\right)' = nx^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás. Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$\left(\text{mivel } a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}\right)\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}\right]}{h} = nx^{n-1}$$

a hatványfüggvény folytonossága alapján. ■

Az óra anyaga

3. A folytonosság és a derivált kapcsolata

Tétel.

Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. *Ekkor*

$\mathbf{1^o}$ $f \in D\{a\} \implies f \in C\{a\}$,

$\mathbf{2^o}$ *Az állítás megfordítása nem igaz.*

Bizonyítás.

$\mathbf{1^o}$ $f \in D\{a\} \Rightarrow a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \Rightarrow a \in \mathcal{D}'_f \Rightarrow a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$. Tehát

$$f \in C\{a\} \iff \exists \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \iff \lim_{x \to a} \big(f(x) - f(a)\big) = 0.$$

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) - f(a)\big) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \right) =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0. \blacksquare$$

2° Van olyan folytonos függvény, amelyik egy pontban folytonos, de ott nem deriválható. Például

$$\mathrm{abs} \in C\{0\}, \quad \text{de} \quad \mathrm{abs} \notin D\{0\},$$

mert az

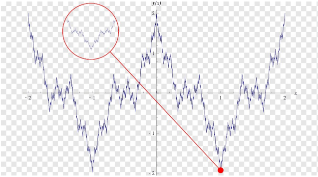
$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \frac{\mathrm{abs}\,(x) - \mathrm{abs}\,(0)}{x - 0} = \frac{|x| - |0|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvénynek a 0 pontban nincs határértéke. ■

$\mathbb{R}$-en folytonos, de sehol sem deriválható függvények

K. Weierstrass (1861)

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos\left(15^n \pi x\right)}{2^n} \quad (x \in \mathbb{R})$$

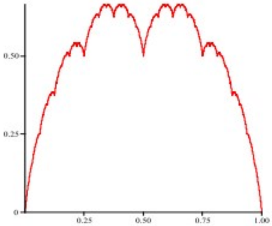


T. Takagi (1903)

B.L. van der Waerden (1930)

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{< 10^n x >}{10^n} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$< \alpha := \min\left\{|\alpha - k| \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$$



Az óra anyaga

4. Lineáris közelítés

Tétel.

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. *Ekkor* $f \in D\{a\} \iff$

$$\begin{cases} \exists\, A \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \exists\, \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R},\ \lim\limits_{a} \varepsilon = 0 : \\ f(x) - f(a) = A \cdot (x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad \big(x \in \mathcal{D}_f\big), \end{cases}$$

és $A = f'(a)$.

Bizonyítás.

$\boxed{\Longrightarrow}$ $f \in D\{a\} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R} \iff$
$\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = 0.$

Ha

$$\varepsilon(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \quad \big(x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}\big),$$

akkor $\lim\limits_{a} \varepsilon = 0$ és

$$f(x) - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad \big(x \in \mathcal{D}_f\big),$$

ezért a feltétel az $A = f'(a)$ választással teljesül.

$\boxed{\Longleftarrow}$ T.f.h. $\exists\, A \in \mathbb{R}$ és $\exists\, \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{a} \varepsilon = 0$, hogy

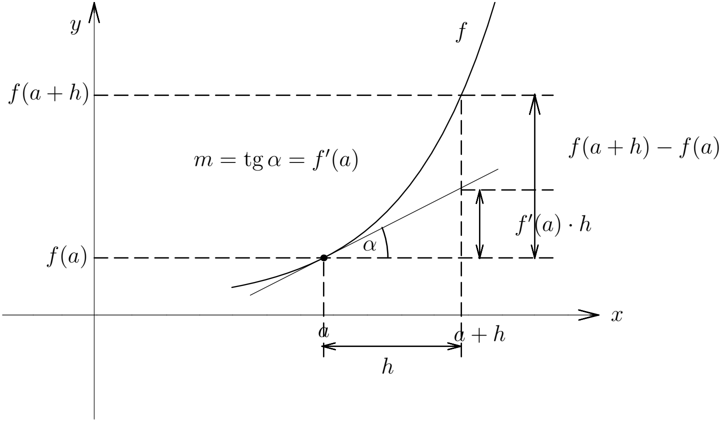
$$f(x) - f(a) = A \cdot (x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad \big(x \in \mathcal{D}_f\big).$$

Ebből

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A + \varepsilon(x) \;\longrightarrow A, \quad \text{ha} \quad x \longrightarrow a$$

adódik, ami azt jelenti, hogy $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = A$. ■

Szemléletes jelentés:



Megjegyzések.

1^o A „kis ordó” jelölés. Ha $\lim\limits_{c} F = \lim\limits_{c} G = 0$ és $\lim\limits_{x\to c} \frac{F(x)}{G(x)} = 0$, akkor $F(x)$ gyorsabban tart 0-hoz, mint $G(x)$, ha $x \to c$. A.m.h. a c-hez közeli pontokban $F(x)$ **kis ordó** $G(x)$ **nagyságrendű**, jelben:

$$F(x) = o\left(G(x)\right), \quad \text{ha } x \to c.$$

2^o Ha $f \in D\{a\} \implies$

$$f(a+h) - f(a) = \underbrace{f'(a)\cdot h}_{\text{1. tag}} + \underbrace{\varepsilon(h)\cdot h}_{\text{2. tag}} \quad \left(a+h \in \mathcal{D}_f\right).$$

Az 1. tag egy lineáris függvény, a második tag $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(a+h) = 0$ miatt az elsőhöz képest „kicsi” (elhanyagolható). Az 1. tag a **főrész**, a 2. tag a **maradéktag**.

A kis ordó jelöléssel:

$$f(a+h) - f(a) = f'(a) \cdot h + o(h) \quad \text{ha } h \to 0.$$

Az f függvény a **pontbeli deriválhatósága tehát azt jelenti, hogy a függvény megváltozása az a pont környezetében „jól” közelíthető lineáris függvénnyel.** Ezt így is jelölhetjük:

$$f(a+h) - f(a) \approx f'(a) \cdot h \quad (\text{ha } h \approx a).$$

3º A differenciál fogalma. Ha $f \in D\{a\}$, akkor az $f'(a) \cdot h$ $(h \in \mathbb{R})$ lineáris függvényt az f függvény a ponthoz tartozó **differenciáljának** nevezzük, és így jelöljük:

$$\boxed{d_a f = df}, \text{ azaz } d_a f(h) = f'(a) \cdot h \ (h \in \mathbb{R}).$$

Ha $e(x) := x$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor $\forall\, a \in \mathbb{R}$ pontban $e'(a) = 1$, így $d_a e(h) = 1 \cdot h$ $(h \in \mathbb{R})$. Tehát

$$f'(a) = \frac{d_a f}{d_a e}(a) = \frac{df}{de}.$$

Ezzel indokolható (és éppen innen ered) a „differenciálhányados" elnevezés, ill. az $f'(a)$-ra gyakran használt jelölés: $\boxed{\frac{df}{dx}(a)}$. A nevezőben e helyett x-et szokás írni. ∎

Az óra anyaga

5. Függvénygrafikon érintője

A középiskolában: pl. kör, parabola érintőjének a fogalma.

Most: Ha $f \in D\{a\} \implies \big(a, f(a)\big)$ és az $\big(x, f(x)\big)$ pontokon átmenő szelőknek van „határegyenese”, ha $x \to a$. Érintőn éppen ezt az egyenest célszerű érteni.

Definíció.

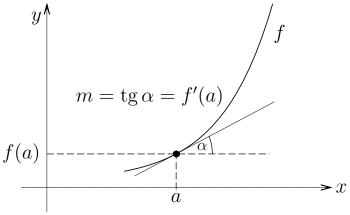
*Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az $\big(a, f(a)\big)$ pontban **van érintője**, ha $f \in D\{a\}$. Az f függvény grafikonjának $\big(a, f(a)\big)$ pontbeli **érintőjén** az*

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

egyenletű egyenest értjük.

Megjegyzések.

1° $f'(a)$ szemléletes jelentése: a grafikon $\big(a, f(a)\big)$ pontbeli érintőjének a meredeksége



2° $f'(a)$ **véges**, ezért az érintő **nem** párhuzamos az y-tengellyel.

3° A parabola érintőjének a fenti definíciója *ekvivalens* a középiskolában geometriai úton megadott definícióval. ∎

Az óra anyaga

6. A deriváltfüggvény

A derivált a leghatékonyabb segédeszköz egy függvény tulajdonságainak vizsgálatára. Ez lokálisan és globálisan is igaz. Az $f'(a)$ derivált létezése és értéke az f függvény a-beli **lokális** viselkedésére jellemző: $f'(a)$ értékéből az f függvény a pont körüli viselkedésére vonhatunk le következtetéseket. (L. a folytonosság és a derivált kapcsolata.)

Ha f pl. egy intervallum minden pontjában deriválható, akkor az $f'(x)$ értékekből az f függvény **globális** viselkedésére következtethetünk. Célszerű a deriválást olyan operációként felfogni, amely függvényekhez rendel függvényeket.

Definíció.

Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $\left\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D\{x\}\right\} \neq \emptyset$, *akkor az*

$$\left\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D\{x\}\right\} \ni x \mapsto f'(x)$$

függvényt az f ***deriváltfüggvényének*** (*vagy* ***differenciálhányados-függvényének***) *nevezzük, és az* f' *szimbólummal jelöljük.*

Az óra anyaga

7. Deriválási szabályok

Tétel: Az algebrai műveletek és a derivált kapcsolata.

T.f.h. $f, g \in D\{a\}$ *valamilyen* $a \in \operatorname{int}\left(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\right)$ *pontban. Ekkor*

1° $c \cdot f \in D\{a\}$ *és* $\left(c \cdot f\right)'(a) = c \cdot f'(a) \quad (c \in \mathbb{R})$,

2° $f + g \in D\{a\}$ *és* $\left(f + g\right)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

3° $f \cdot g \in D\{a\}$ *és*

$$\left(f \cdot g\right)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a),$$

4° *ha még a* $g(a) \neq 0$ *feltétel is teljesül, akkor*

$\dfrac{f}{g} \in D\{a\}$ *és*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}.$$

Bizonyítás.

A közös **ötlet**: $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ és $\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$ „kialakítása".

3^o A szorzatfüggvény deriválása. Világos, hogy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{f\cdot g}$.

Az $f \cdot g$ függvény különbségihányados-függvénye az a pontban

$$\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = \frac{f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(a)}{x-a} \overset{!}{=}$$

$$\overset{!}{=} \frac{f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g(x)}{x-a} =$$

$$= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(x)+f(a)\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \qquad \big(x \in \mathcal{D}_{f\cdot g}\setminus\{a\}\big).$$

Mivel $g \in D\{a\}$, ezért $g \in C\{a\}$, tehát $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$. Így

$$\lim_{x \to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} =$$
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} g(x) + f(a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} =$$
$$= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

Ez azt jelenti, hogy $f \cdot g \in D\{a\}$ és

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a). \blacksquare$$

4^o A hányadosfüggvény deriválása.

Először azt igazoljuk, hogy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}$.

Valóban: $g \in D\{a\} \implies g \in C\{a\}$. Tehát $g(a) \neq 0 \implies$
$\exists\, K(a) \subset \mathcal{D}_f : \quad g(x) \neq 0 \ \ \big(\forall\, x \in K(a)\big) \quad \implies \quad a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}$.

Az $\dfrac{f}{g}$ hányadosfüggvény különbségihányados-függvénye a-ban

$$\frac{\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) - \left(\dfrac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(a)}{g(a)}}{x-a} =$$

$$= \frac{1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{f(x)\cdot g(a) - f(a)\cdot g(x)}{x-a} =$$

$$= \frac{1}{g(a)g(x)} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot g(a) - f(a) \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right)$$

Mivel $g \in C\{a\} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a) \neq 0$, ezért

$$\lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} =$$

$$= \frac{1}{g(a) \lim\limits_{x \to a} g(x)} \left(\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(a) - f(a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) =$$

$$= \frac{1}{g^2(a)} \left(f'(a)g(a) - f(a)g'(a) \right).$$

Ez azt jelenti, hogy $\frac{f}{g} \in D\{a\}$ és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}. \blacksquare$$

Tétel: Az összetett függvény deriválása.

T.f.h. $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$ *és egy* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g$ *pontban* $g \in D\{a\}$, *továbbá* $f \in D\{g(a)\}$. *Ekkor* $f \circ g \in D\{a\}$, *és*

$$\big(f \circ g\big)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a)\,.$$

Bizonyítás.

Először azt igazoljuk, hogy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{f \circ g}$.

Valóban: $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f \implies \mathcal{D}_{f \circ g} = \mathcal{D}_g$. Mivel $g \in D\{a\}$, ezért $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g \implies a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{f \circ g}$.

$g \in D\{a\} \xRightarrow[\text{közelítés}]{\text{lineáris}} \quad \exists\, \varepsilon : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}, \quad \lim\limits_a \varepsilon = 0$:

$$(*) \qquad g(x) - g(a) = g'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad \big(x \in \mathcal{D}_g\big).$$

Hasonlóan: $f \in D\{g(a)\} \xRightarrow[\text{közelítés}]{\text{lineáris}} \quad \exists\, \eta : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{g(a)} \eta = 0$:

$$f(y) - f\big(g(a)\big) = f'\big(g(a)\big)\big(y - g(a)\big) + \eta(y)\big(y - g(a)\big) \quad \big(y \in \mathcal{D}_f\big).$$

Ebbe $y = g(x)$-et helyettesítve:

$$\begin{aligned} \big(f \circ g\big)(x) - \big(f \circ g\big)(a) &= f\left(g(x)\right) - f\left(g(a)\right) = \\ = f'\big(g(a)\big)\big(g(x) - g(a)\big) + \eta\big(g(x)\big)\big(g(x) - g(a)\big) &\overset{(*)}{=} \\ \overset{(*)}{=} A \cdot (x-a) + \delta(x)(x-a) \quad &\big(x \in \mathcal{D}_{f \circ g}\big), \end{aligned}$$

ahol

$$A := f'\left(g(a)\right) \cdot g'(a),$$

$$\delta(x) := f'\left(g(a)\right) \cdot \varepsilon(x) + \eta\left(g(x)\right) \cdot \big(g'(a) + \varepsilon(x)\big).$$

Mivel $x \to a$ esetén $g(x) \to g(a)$, ezért $\eta\big(g(x)\big) \to 0$, ha $x \to a$ (feltehető, hogy $\eta\big(g(a)\big) = 0$, így η folytonos $g(a)$-ban). Ebből, továbbá a $\lim\limits_{a} \varepsilon = 0$-ból következik, hogy

$$\delta(x) \to 0, \text{ ha } x \to a.$$

Ez pedig a lineáris közelítésre vonatkozó tétel szerint éppen azt jelenti, hogy $f \circ g \in D\{a\}$ és

$$\big(f \circ g\big)'(a) = f'\left(g(a)\right) g'(a). \ \blacksquare$$

Tétel: Hatványsor összegfüggvényének a deriválása.

T.f.h. hogy a $\sum\limits_{n=0} \alpha_n(x-a)^n$ $(x \in \mathbb{R})$ *hatványsor* R *konvergenciasugara pozitív, és legyen*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(x-a)^n \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ *pontban* $f \in D\{x\}$ *és*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n(x-a)^{n-1} \qquad \big(\forall\, x \in K_R(a)\big).$$

Bizonyítás. Nélkül. ■

Példák.

1º *Az* $\exp x := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(x \in \mathbb{R})$ *függvény deriválható, és*

$$\boxed{\exp'(x) = \left(e^x\right)' = e^x \ \ (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in$ pontban

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \ (k := n-1) \ = \\ = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp x. \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. Az exp függvény deriváltja önmaga. ■

2° *A* $\sin x := \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(x \in \mathbb{R})$ *függvény deriválható, és*

$$\boxed{\sin'(x) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in$ pontban

$$\sin'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(2n+1)\frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x. \quad \blacksquare$$

3º *A* $\cos x := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $(x \in \mathbb{R})$ *függvény deriválható, és*

$$\boxed{\cos'(x) = -\sin x \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in$ pontban

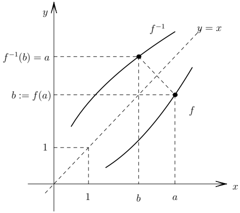
$$\cos'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (2n) \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \ (k := n-1)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sin x. \quad \blacksquare$$

Az inverz függvény deriválása.

Szemléletesen.

Tegyük fel, hogy az f függvény invertálható, és ábrázoljuk f és f^{-1} grafikonját egy olyan koordináta-rendszerben, amelynek tengelyein az egységek egyenlő hosszúak. Vegyük f grafikonjának egy (x, y) pontját, azaz legyen $y = f(x)$. Ekkor $f^{-1}(y) = x$, vagyis az (y, x) pont rajta van az f^{-1} függvény grafikonján. Ha egy pont két koordinátáját felcseréljük, akkor a pont tükörképét kapjuk meg a két tengely szögfelező egyenesére (vagyis az $y = x$ egyenletű egyenesre) vonatkozóan. Ez azt jelenti, hogy *f és f^{-1} – geometriailag – egymás tükörképei a szóban forgó szögfelezőre vonatkozóan:*



Az f grafikonjának egy $\big(a, f(a)\big) =: (a, b)$ pontját az $y = x$ egyenesre tükrözve kapjuk a (b, a) pontot. Mivel $a = f^{-1}(b)$, ezért a (b, a) pont rajta van az f^{-1} függvény grafikonján.

Az f grafikonjának $\big(a, f(a)\big) = (a, b)$ pontbeli érintőegyenesének tükörképe az f^{-1} függvény grafikonjának az $\big(f(a), a\big) = (b, a)$ pontbeli érintője. Ha az f-hez húzott érintő nem párhuzamos az x-tengellyel (vagyis $f'(a) \neq 0$), akkor a tükörképe nem párhuzamos az y-tengellyel. Ekkor a meredekségeik egymás reciprokai, vagyis

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}. \quad \blacksquare$$

Tétel.

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ *nyílt intervallum és* $f : I \to \mathbb{R}$*. Tegyük fel, hogy*

(a) f *szigorúan monoton és folytonos* I*-n,*

(b) *egy* $a \in I$ *pontban* $f \in D\{a\}$ *és* $f'(a) \neq 0$.

Ekkor az f^{-1} *inverz függvény deriválható a* $b := f(a)$ *pontban, és*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

Bizonyítás.

Először azt igazoljuk, hogy $b \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$.

Valóban: (a) $\Longrightarrow$ f invertálható, $\mathcal{R}_f = \mathcal{D}_{f^{-1}}$ nyílt intervallum és f^{-1} folytonos $\mathcal{D}_{f^{-1}}$-en $\Longrightarrow$ $b = f(a) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{f^{-1}}$.

Legyen $(y_n)\colon \mathbb{N} \to \mathcal{D}_{f^{-1}}$ olyan sorozat, amelyre $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$ és

$$x_n := f^{-1}(y_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \big(\text{így } f(x_n) = y_n\big).$$

Mivel $f^{-1} \in C\{b\} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(b) = a.$
Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \frac{1}{\dfrac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}}.$$

A határértéket véve

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(b)}{y_n-b}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\dfrac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}}\overset{\text{átviteli}}{\underset{\text{elv}}{=}}$$

$$\overset{\text{átviteli}}{\underset{\text{elv}}{=}}\lim_{x\to a}\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}=\frac{1}{f'(a)}.$$

A határértékre vonatkozó átviteli elv alapján

$$\exists\ \left(f^{-1}\right)'(b)=\lim_{y\to b}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b}=\frac{1}{f'(a)},$$

ezért $f^{-1}\in D\{b\}$ és $\left(f^{-1}\right)'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$. ■

Példák.

1º *A* $g(x) := \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ *függvény deriválható minden* $x \in (0, +\infty)$ *pontban, és*

$$\boxed{g'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)}.$$

Bizonyítás. A g függvény az $\mathbb{R}_0^+$ halmazon szigorúan monoton növekedő $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény inverze:

$$g(x) = \sqrt{x} = f^{-1}(x) \quad (x \geq 0).$$

Mivel $f \in D$ és $f'(x) = 2x > 0$, ha $x > 0$, ezért minden $x > 0$ esetén $g \in D\{x\}$ és

$$g'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad \blacksquare$$

2° *Az* $\ln := \exp^{-1}$ *függvény minden* $x \in \mathcal{D}_{\ln} = (0, +\infty)$ *pontban deriválható, és*

$$\boxed{\ln' x = (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad ((0, +\infty))}.$$

Bizonyítás. Mivel $\exp \uparrow$, folytonos és deriválható $\mathcal{D}_{\exp} = \mathbb{R}$-en, továbbá $\exp'(x) = \exp x \neq 0$ $(\forall\, x \in \mathbb{R})$, ezért minden $x \in \mathcal{D}_{\ln} = (0, +\infty)$ pontban $f \in D\{x\}$ és

$$\ln' x = (\ln x)' = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}. \blacksquare$$

Az óra anyaga

8. Elemi függvények deriváltjai

Összefoglaló táblázat

Néhány további példa

- $x^\alpha := \left(e^{\ln x}\right)^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x} \quad (x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}) \implies$
$$\left(x^\alpha\right)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha\, x^{\alpha-1}\,.$$

- $\left(\exp_a\right)(x) := a^x := \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \cdot \ln a} \quad (x \in \mathbb{R},\ a > 0) \implies$
$$\left(a^x\right)' = \left(e^{x \cdot \ln a}\right)' = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a\,.$$

- $\log_a := \left(\exp_a\right)^{-1}$, ha $0 < a \neq 1 \implies \forall\, x > 0$ esetén
$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{\exp_a'\left(\log_a x\right)} = \frac{1}{(\ln a) \cdot \exp_a\left(\log_a x\right)} = \frac{1}{x \ln a}\,.$$

- $\text{tg} := \dfrac{\sin}{\cos}$. Igazolni fogjuk, hogy $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \implies \mathcal{D}_{\text{tg}} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\underbrace{(\text{tg}\ x)'}_{} = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\sin' x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos' x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{} \quad \left(x \in \mathcal{D}_{\text{tg}} \right).$$

- $\text{ctg} := \dfrac{\cos}{\sin}$. Igazolni fogjuk, hogy $\sin x = 0 \iff x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \implies \mathcal{D}_{\text{ctg}} = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi \ \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\underbrace{(\text{ctg}\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}_{} \quad \left(x \in \mathcal{D}_{\text{ctg}} \right).$$