

Diszkrét matematika 1

1. előadás Logika

Mérai László

`merai@inf.elte.hu`

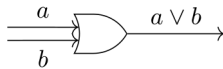
Komputeralgebra Tanszék

2024 tavasz

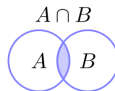
Logikai feladvány 1

Diszkrét matematika 1 – a félév anyaga

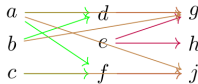
1. Logika



2. Halmazok



3. Relációk



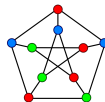
4. Komplex számok

$$(\cos t + i \cdot \sin t)^n = \cos(n \cdot t) + i \cdot \sin(n \cdot t)$$

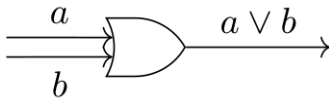
5. Kombinatorika, elemi valószínűség



6. Gráfelmélet



Logika



Logika

if ($i \geq 1$ and $a > 2$) or ($i = 0$ and $a^2 < 3$) and (i is even or a is odd) **then**

$i+ = 1$

else

$i = -i^2 + 1$

for $i = 0, 1, \dots, n$

if esik az eső, de meleg van, bár a nap is elbújt, és az idő is későre jár **then**

$i+ = 1$

else

$i = -i^2 + 1$

for $i = 0, 1, \dots, n$

Predikátumok

Definíció

Predikátum: olyan változóktól függő kijelentések, amelyhez a változóik értékétől függően valamilyen **igazságérték** tartozik:

igaz (I, \uparrow), **hamis** (H, \downarrow), és a kettő egyidejűleg nem teljesül.

Példa

$V()$: A vonat késik.

0-változós, értéke: I.

$G(x)$: x hölgy.

1-változós,

értéke: $G(\text{'Éva'}) = \text{I}$, $G(\text{'Ádám'}) = \text{H}$.

$F(x)$: x felnőtt.

1-változós.

$P(x)$: x vizsgázó puskázott.

1-változós.

$B(x, y)$: x főnöke y -nak.

2-változós.

Logikai jelek

A predikátumokat **logikai jelekkel** tudjuk összekötni:

Definíció

Legyenek A, B predikátumok. Ekkor

tagadás, jele $A \neg B$

$\neg A$	I	H
	H	I

és, jele $A \wedge B$

$A \vee B$	I	H
I	I	H
H	H	H

vagy (megengedő), jele $A \vee B$

$A \vee B$	I	H
I	I	I
H	I	H

ha ..., akkor ...

(implikáció), jele $A \Rightarrow B$

$A \Rightarrow B$	I	H
I	I	H
H	I	I

Ekvivalencia, jele $A \Leftrightarrow B$

$A \Rightarrow B$	I	H
I	I	H
H	H	I

Logikai jelek – vagy

Köznyelvbe a **vagy** háromféle értelemmel bírhat:

Megengedő vagy: „Ha megcsalsz *a*-val **vagy** *b*-vel, elhagylak”

$A \vee B$	I	H
I	I	I
H	I	H

Kizáró vagy: „**Vagy** moziba megyünk, **vagy** színházba”
(„exclusive or”, XOR, \oplus)

$A \oplus B$	I	H
I	H	I
H	I	H

Összeférhetetlen vagy: „Iszik **vagy** vezet!”

	I	H
I	H	I
H	I	I

Logikai jelek – implikáció

Az **implikáció** ($A \Rightarrow B$) csak **logikai** összefüggést jelent, és nem okozatit!

$A \Rightarrow B$	I	H
I	I	H
H	I	I

Példa

$$2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow \sin(2\pi) = 0$$

$$2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow \text{szerda van}$$

Hamis állításból minden következik:

Példa

$$2 \cdot 2 = 5 \Rightarrow \sin(2\pi) = -2$$

Adott logikai jel, más módon is kifejezhető:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

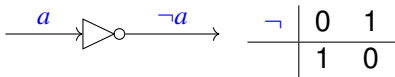
Bizonyítás. Ugyanaz az igazságtáblájuk.

Logikai áramkörök – Boole-algebrák

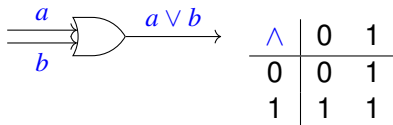
Legyenek **bitek** a logikai értékek: 0–hamis, 1–igaz.

Legyenek $a, b \in \{0, 1\}$ bitek (vagy **Boole változók**). Ekkor

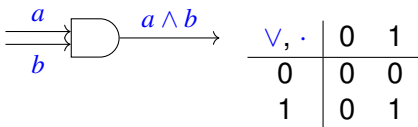
negálás



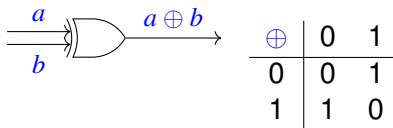
vagy



és



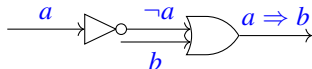
kizáró vagy, XOR



Példa

További áramkörök

Implikáció



Kvantorok

A kvantorokkal a változókból „lokális változókat” képezhetünk.

- **egzisztenciális kvantor:** \exists „létezik”, „van olyan”
- **univerzális kvantor:** \forall „minden”

Példa

$V(x)$: x veréb

$M(x)$: x madár

- Minden veréb madár: $\forall x(V(x) \Rightarrow M(x))$, ill. $\forall x(\neg V(x) \vee M(x))$,
- Van olyan madár ami veréb: $\exists x(M(x) \Rightarrow V(x))$, ill. $\exists x(\neg M(x) \vee V(x))$
- Minden veréb madár de nem minden madár veréb:

$$(\forall x(\neg V(x) \vee M(x))) \wedge (\exists x(\neg M(x) \vee V(x)))$$

Formulák

A formulák predikátumokból és logikai jelekből alkotott „mondatok”.

Definíció (Formulák)

- A predikátumok a legegyszerűbb, u.n. elemi formulák.
- Ha \mathcal{A} , \mathcal{B} két formula, akkor $\neg\mathcal{A}$, $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$ is formulák.
- Ha \mathcal{A} egy formula és x egy változó, akkor $(\exists x\mathcal{A})$ és $(\forall x\mathcal{A})$ is formulák.

Példa

Minden veréb madár de nem minden madár veréb.:

$$(\forall x(V(x) \Rightarrow M(x))) \wedge (\exists x(M(x) \wedge \neg V(x))).$$

egy formula.

Ha nem okoz félreértést, a zárójelek elhagyhatóak.