Diszkrét matematika 1

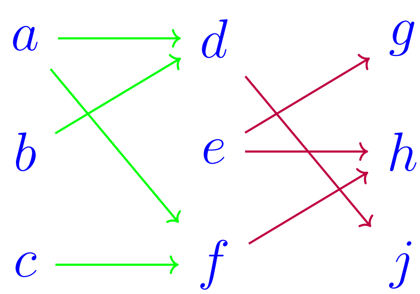
3. előadás Relációk I.

Mérai László

merai@inf.elte.hu

2024 tavasz

Relációk I.



Descarte-szorzat

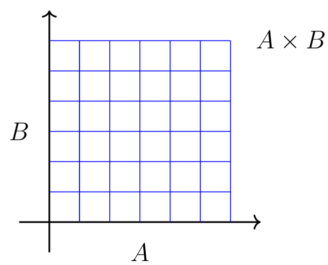
Relációk tárolása: rendezett páronként (ill. általában: rendezett n-esekként)

- IT cég: $\{(A, \text{'menedzser'}), (B, \text{'menedzser'}), (C, \text{'fejlesztő'}), \dots\}$
- sin: $\{(0, 0), (\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}), (\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}2), (\frac{\pi}{2}, 1), \dots\}$
- oszthatóság: $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (2, 6), (3, 6), (3, 12), \dots\}$

Definíció
Adott A, B halmazok *Descarte-szorzata*: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Figyelem:

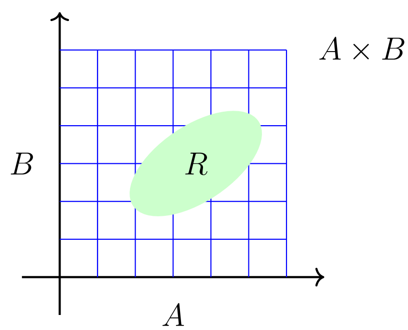
- ha $a \neq b$, akkor $(a, b) \neq (b, a)$
- ha $A \neq B$, akkor $A \times B \neq B \times A$
- $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A, \dots$



Binér reláció

Definíció

- Legyen X, Y két tetszőleges halmaz. Ekkor az $R \subset X \times Y$ egy (binér) *reláció* az X, Y halmaz között.
- Ha $X = Y$, akkor $R \subset X \times X$ egy (binér) *reláció* X-en.

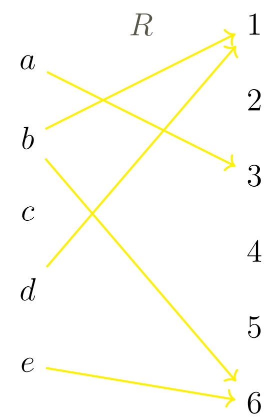


Példa

- egyenlőség reláció: $\mathbb{I}_X = \{(x, x) : x \in X\}$
- részhalmaz reláció X-en: $\{(A, B) \in 2^X \times 2^X : A \subset B : A, B \in 2^X\}$
- altér reláció: $\{(U, V) : U, V \leq \mathbb{R}^5, U \text{ altere } V\text{-nek}\}$
- sajátvektor reláció $\{(\mathbf{v}, M) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2\times 2} : \exists \lambda : M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$
- sin függvény relációja: $\{(x, \sin x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$

Értelmezési tartomány, értékkészlet

Definíció
Legyen $R \subset X \times Y$ egy reláció. Ekkor



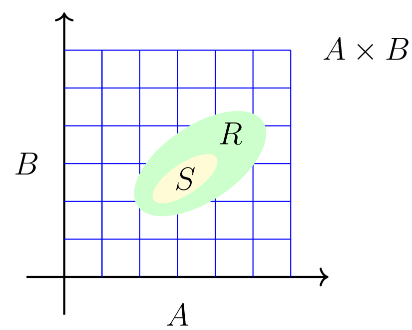
- R *éretelmezési tartománya* ('domain'): $\mathrm{dmn}(R) = \{x \in X : \exists y \in Y : (x, y) \in R\}$.
- R *értékkészlete* ('range'): $\mathrm{rng}(R) = \{y \in Y : \exists x \in X : (x, y) \in R\}$.

Példa

- Legyen $R \subset \{a, b, c, d, e\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $\mathrm{dmn}(R) = \{a, b, d, e\}$, $\mathrm{rng}(R) = \{1, 3, 6\}$.
- $N = \{(x^2, x) : x \in \mathbb{R}\}$ $\mathrm{dmn}(N) = \mathbb{R}_0^+$, $\mathrm{rng}(R) = \mathbb{R}$.

Relációk kiterjesztése, leszűkítése, inverze

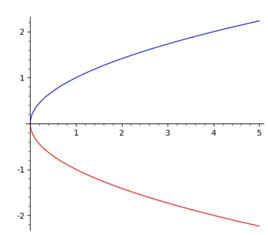
Definíció
Legyen $R, S \subset X \times Y$ két binér reláció.



- R az S *kiterjesztése* (és S az R leszűkítése), ha $S \subset R$.
- Ha $A \subset X$, akkor R reláció A-ra való *leszűkítése* (A-ra való megszorítása)

$$R|_A = \{(x, y) \in R : x \in A\}.$$

Példa

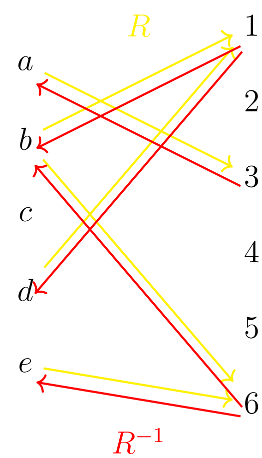


- $N = \{(x^2, x) : x \in \mathbb{R}\}$ és $S = \{(x, \sqrt{x}) : x \in \mathbb{R}_0^+\}$. Ekkor $S \subset N$
- $N|_{\mathbb{R}_0^+} = S$.

Reláció inverze

Definíció
Egy $R \subset X \times Y$ reláció *inverze* az

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}.$$



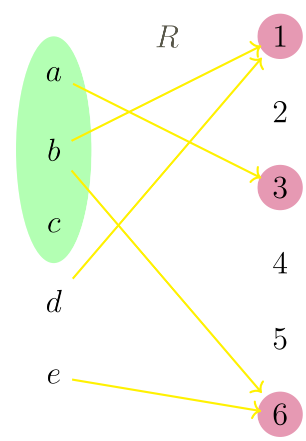
- $R = \{(a, 3), (b, 1), (b, 6), (d, 1), (e, 6)\}$ és $R^{-1} = \{(1, b), (1, d), (3, a), (6, b), (6, e)\}$

- Legyen $R = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ Ekkor

$$R^{-1} = \{(x^2, x) : x \in \mathbb{R}\} \neq \{(x, \sqrt{x}) : x \in \mathbb{R}_0^+\}$$

Halmaz képe, teljes inverz képe

Definíció
Legyen R egy binér reláció.



- Az A *halmaz képe* az $R(A) = \{y : \exists x \in A : (x, y) \in R\}$.

- Adott B halmaz *inverz képe*, vagy *teljes ősképe* az $R^{-1}(B)$, a B halmaz képe az R^{-1} reláció esetén.

Példa

- $R = \{(a, 3), (b, 1), (b, 6), (d, 1), (e, 6)\}$. Ekkor $R(\{a, b, c\}) = \{1, 3, 6\}$

- Legyen $R = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$.
  Ekkor $R(\{2\}) = \{4\}$ (vagy $(R(2) = 4)$) és
  $R^{-1}(\{4\}) = \{-2, +2\}$ (vagy $R^{-1}(4) = \{-2, +2\}$).

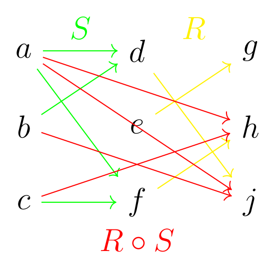
Relációk kompozíciója

Definíció
Legyenek R és S binér relációk. Ekkor az $R \circ S$ *kompozíció* (összetétel, szorzat) reláció:

$$R \circ S = \{(x, y) : \exists z : (x, z) \in S, (z, y) \in R\}.$$

Figyelem! Kompozíció esetén a relációkat „jobbról-balra írjuk”:

Példa



- Legyen $R_{\text{sin}} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \sin x = y\}$,
  $S_{\text{log}} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \log x = y\}$.

  Ekkor

  $$\begin{aligned} R_{\text{sin}} \circ S_{\text{log}} &= \{(x, y) : \exists z : \log x = z, \sin z = y\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \sin \log x = y\}. \end{aligned}$$