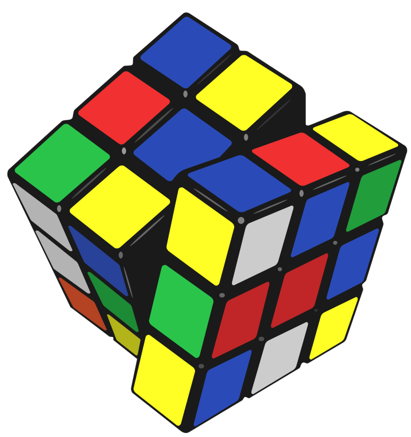
Diszkrét matematika 1

5. előadás Kombinatorika I.

Mérai László
merai@inf.elte.hu

2024 tavasz

Kombinatorika I.



Kombinatorika

Célunk

- véges halmazok elemeinek rendezése valamely szempont szerint
- különböző lehetőségek leszámlálása

Példa

- Bármely 8 ember közül van olyan 2, akik a hét ugyanazon napján születtek.
- Hány ember kell, hogy mindenképpen legyen 2, akiknek az év ugyanazon napján van a szülinapjuk?
- Hány ember kell, hogy mindenképpen legyen 1 közülük, akiknek február 29-én van a szülinapja?
- Mennyi a lehetséges rendszámtáblák/telefonszámok/IP címek száma?
- A Lottón hány lehetséges szelvény van?

Elemi valószínűség

Kombinatorika segítségével kiszámolhatjuk bizonyos események valószínűségét.

$$\text{elemi valószínűség} = \frac{\text{jó lehetőségek száma}}{\text{összes lehetőségek száma}}$$

Példa

- 6-ost dobunk a kockán: $\frac{1}{6}$
- Párost dobunk a kockán: $\frac{3}{6}$
- Nyerünk a lottón: $\frac{1}{\text{lehetséges szelvények száma}}$
- 4-esünk a lottón: $\frac{\text{4-es szelvények száma}}{\text{lehetséges szelvények száma}}$

Részleteket lásd később.

Összeadás-szabály

Példa

- Egy pékségben 3 féle édes és 2 féle sós péksütemény van. Hányféleképpen tudunk egy édes *vagy* sós süteményt választani?
- $3 + 2 = 5$ lehetséges módon.

Összeadás-szabály

- Adott két véges diszjunkt halmaz

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \quad \text{és} \quad B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

  Hányféleképpen tudunk A-ból *vagy* B-ből egy elemet választani?

- A lehetséges választások: $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_n$.
- Ezek száma: $k + n$.

Szorzat-szabály

Példa

- Egy pékségben 3 féle édes és 2 féle sós péksütemény van. Hányféleképpen tudunk egy édes *és* egy sós süteményt választani? $\Rightarrow 3 \times 4 = 12$

Összeadás-szabály

- Adott két véges diszjunkt halmaz

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \quad \text{és} \quad B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

  Hányféleképpen tudunk A-ból *és* B-ből egy-egy elemet választani?

$$\begin{array}{c|cccc}
 & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\
\hline
a_1 & (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \dots & (a_1, b_n) \\
a_2 & (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \dots & (a_2, b_n) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_k & (a_k, b_1) & (a_k, b_2) & \dots & (a_k, b_n)
\end{array}$$

- Ezek száma: $k \times n$.

Szorzat-szabály, ismétléses variáció

Feladat: Egy n-elemű halmazból kiválasztunk k-szor elemet. A sorrend számít, egy elemet többször választhatunk. Hány választási lehetőség van?

Példa

- Lehetséges IP-címek száma: $n = 2$ (alaphalmaz: $\{0, 1\}$), $k = 32$ (bitek száma). $\implies$ 2^{32} lehetőség
- Telefonszámok (körzetszám nélkül): $n = 10$ (alaphalmaz: $\{0, 1, \ldots, 9\}$), $k = 7$ (telefonszám hossza). $\implies$ 10^7 lehetőség
- Szeminárium-termek kulcstartó lehetséges kódja: $n = 10$ (alaphalmaz: $\{0, 1, \ldots, 9\}$), $k = 4$ (kód hossza). $\implies$ 10^4 lehetőség

A szorzat-szabály szerint: n^k lehetséges sorrend.

Bizonyítás.

n-féleképpen választhatjuk az 1. elemet *és* n-féleképpen választhatjuk a 2. elemet *és* n-féleképpen választhatjuk a 3. elemet *és* … $\square$

Szorzat-szabály, ismétléses variáció

Tétel

Legyen A egy véges halmaz. Ekkor A hatávnyhalmazának elemszáma $|\mathcal{P}(A)| = |\{B : B \subset A\}| = \left|2^A\right| = 2^{|A|}$.

Bizonyítás.

- Állítsuk sorrendbe A elemeit.
- Minden egyes elemre válasszunk a $\left\{\text{benne van}, \text{nincs benne}\right\}$ halmazból.
- Az ilyen $|A|$ hosszú „benne van"/„nincs benne" sorozatok szám: $2^{|A|}$. $\square$

Példa

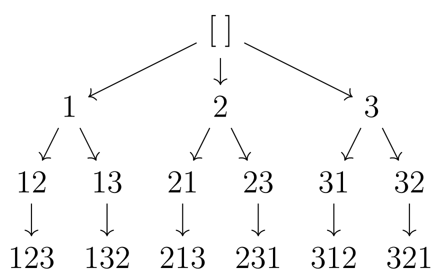
- Lifttel utazunk a földszintről a 7. emeletre.

- Két utazás különböző, ha menet közben máshol állnak meg.
- Hány típusú utazás van? $\Longrightarrow$ 6 közbenső emelet, 2 választás $\left\{\text{megáll, nem áll meg}\right\}$ $\Longrightarrow$ 2^6 lehetőség

Szorzat-szabály 2

Példa

- Hányféleképpen tudunk 3 embert sorba állítani?



Szorzat-szabály 2

- Adott egy $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ véges halmaz, és minden a_i elemhez egy B_i véges halmaz.
- A B_i halmazok elemszáma *megegyezik*: $|B_1| = |B_2| = \cdots = |B_k| = \ell$
- Választunk egy $a_i \in A$ elemet *és* választunk egy $b \in B_i$ elemet.
- Ezek száma: $k \times \ell$

- 3 embert $3 \times 2 \times 1 = 6$ módon tudunk sorba állítani.

Szorzat-szabály 2, ismétlés nélküli permutáció

Feladat: Egy n-elemű halmaz elemeit sorba állítjuk. Hány lehetőség van?

Példa

- A vizsgán 10 feladat van kitűzve. Hányféleképpen oldhatjuk meg ezeket?

  $\Longrightarrow 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \approx 3,6 \cdot 10^6$

- Egy lóversenyen 70 induló van. A verseny lehetséges kimenetele (nincs döntetlen, mindenki célba ér):

  $\Longrightarrow 70 \cdot 69 \cdot 68 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \approx 1,2 \cdot 10^{100}$ (v.s atomok száma a megfigyelt univerzumban: $10^{78} - 10^{82}$)

- Egy 200 fős évfolyam hányféleképpen tudja aláírni a jelenléti ívet?

  $\Longrightarrow \quad 200 \cdot 199 \cdot \ldots 2 \cdot 1 \approx 7,89 \cdot 10^{374}$ lehetőség

A szorzat-szabály 2 szerint: $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ lehetséges sorrend.

Bizonyítás.

n-féleképpen választhatjuk az 1. elemet *és* $(n-1)$-féleképpen választhatjuk a 2. elemet *és* $(n-2)$-féleképpen választhatjuk a 3. elemet *és* … □

Szorzat-szabály 2, ismétlés nélküli variáció

Feladat: Egy n-elemű halmazból választunk. A sorrend számít, de egy elemet *csak* egyszer választhatunk. Hány lehetőség van?

Példa

- A vizsgán 10 feladat van kitűzve. Hányféleképpen oldhatjuk meg ezek közül 3-at? $\Longrightarrow 10 \cdot 9 \cdot 8$

- Egy lóversenyen 70 induló van. Hány lehetőség van a dobogó (1-3.) helyezettjeire? $\Longrightarrow 70 \cdot 69 \cdot 68$

- Egy 200 fős évfolyam hallgatóiból hányféleképpen jöhet be 100 fő az előadóba?

  $\Longrightarrow \quad 200 \cdot 199 \cdot \ldots 102 \cdot 101$

A szorzat-szabály 2 szerint: $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ lehetséges sorrend.

Bizonyítás. HF □

Kivonás-szabály

Példa

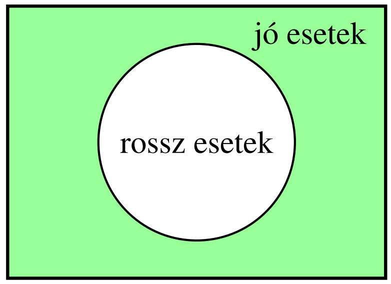
- Háromszor dobunk kockával. Hány dobássorozat van, amiben *van* hatos?

- összes $-$ nincs hatos$= 6^2 - 5^2$

Kivonás-szabály

- Adott események számát szeretnénk leszámlálni.

- Ekkor események száma = összes eset − rossz esetek.



Kivonás-szabály

Példa

- Hány 7 jegyű szám van?

  Rossz esetek: 7 hosszú sorozatok melyek 0-val kezdődnek. $\Longrightarrow 10^7 - 10^6 = (10-1)\cdot 10^6 = 9 \times 10^6$

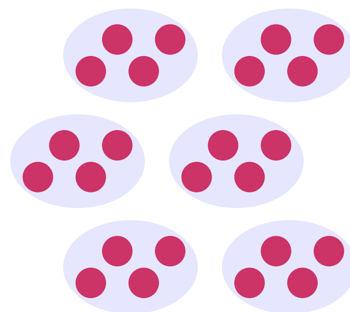
- Az $1,2,3,4,5$ lehetséges sorrendje, ahol 1 és 2 *nincs* egymás mellet. Rossz esetek: Az $1,2,3,4,5$ lehetséges sorrendje, ahol 1 és 2 egymás mellet vannak: $12,3,4,5$ *vagy* $21,3,4,5$ lehetséges sorrendje: $4!+4! = 2\cdot 4! \Longrightarrow 5! - 2\cdot 4!$

- Egy lóversenyen 70 induló van. Hány lehetőség van a dobogó (1-3.) helyezettjeire, ha a 13. rajtszámú közöttük van? Rossz esetek: 13. rajtszámú *nincs* közöttük: $69\cdot 68\cdot 67 = \dfrac{69!}{66!} \Longrightarrow \dfrac{70!}{67!} - \dfrac{69!}{66!}$

Osztás-szabály

Tehén-szabály – osztás-szabály

- Adott lehetőségeket szeretnénk megszámolni.
- Ehelyett más eseteket számolunk meg.
- Egy lehetőséget L-szer számolunk.
- Összesen N esetet számoltunk le.
- Összesen N/L lehetőség van.



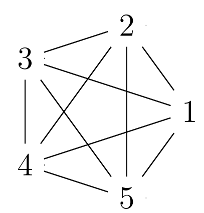
Példa

- Egy lóversenyen 70 induló van. Hány lehetőség van a dobogó (1-3.) helyezettjeire?
- esetek: összes lehetséges sorrend $70!$
- L: egy lehetőséget $67!$-szer számolunk (4-70. helyezettek sorrendje)
- számolandó lehetőségek: $70!/67!$

Osztás-szabály

Példa

- 5 ember találkozik, mindenki kezet fog. Hány kézfogás történt?
  - Kiválasztunk 2 embert, aki kezet fog: $5 \cdot 4 = \frac{5!}{3!}$
  - A kézfogás szimmetrikus, így minden kézfogást 2-szer számoltunk.
  - Összes kézfogás: $\frac{5!/3!}{2}$



- Egy lóversenyen 70 induló van. Hány lehetőség van a dobogó (1-3.) helyezettjeire (sorrend *nem* számít)?

- Lehetséges esetek, ahol a sorrend *számít*: $70 \cdot 69 \cdot 68 = 70!/67!$
- L: Egy lehetőséget $3!$-szer számoltunk (1-3. helyezettek sorrendje.)
- számolandó lehetőségek: $\dfrac{70!/67!}{3!}$

Osztás-szabály, ismétlés nélküli kombináció

Feladat: Egy n elemű halmazból választunk k elemet, a sorrend *nem* számít.

- Válasszunk n-ből k elemet, úgy, hogy a sorrend számít $\Longrightarrow n!/(n-k)!$ (ld. ismétlés nélküli variáció)
- Egy számolandó lehetőséget $L = k!$-szor számoltunk.
- Így összesen $\dfrac{n!/(n-k)!}{k!}$ lehetőség van.

Definíció
Legynek $n, k \in \mathbb{N}$. Ekkor a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

értéket *binomiális együtthatónak* nevezzük.

Osztás-szabály, ismétléses nélküli kombináció

Emlékeztető: Egy n elemű halmazból k elemet $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ módon választhatunk (sorrend nem számít).

Példa

- n ember találkozik. Ekkor a kézfogások száma: $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- Lóversenyen 70 induló, dobogósok lehetséges halmaza (sorrend nem számít): $\dbinom{70}{3} = \dfrac{70!}{3! \cdot 67!} \approx 55.000$

- Lottó: 90-ből 5 számot választunk: $\binom{90}{5} = \frac{90!}{5! \cdot 95!} \approx 44.000.000$
- Hány olyan 20 hosszú $0 - 1$ sorozat van, ami *pontosan* 7 darab 1-et tartalmaz? Hányféleképpen tudjuk kiválasztani az 1-ek pozícióját? $\binom{20}{7} = \frac{20!}{7! \cdot 13!} \approx 78.000$