Diszkrét matematika I. Előadás

8. előadás

Címkézett gráfok

Definíció

Legyen $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf, C_e és C_v halmazok az élcímkék, illetve csúcscímkék halmaza, továbbá $c_e : E \to C_e$ és $c_v : V \to C_v$ leképezések az élcímkézés, illetve csúcscímkézés. Ekkor a $(\varphi, E, V, c_e, C_e, c_v, C_v)$ hetest címkézett gráfnak nevezzük.

Definíció

Élcímkézett, illetve csúcscímkézett gráfról beszélünk, ha csak élcímkék és élcímkézés, illetve csak csúcscímkék és csúcscímkézés adott.

Megjegyzés

Címkézett gráf helyett a színezett gráf elnevezés is használatos.

Címkézett gráfok

Definíció

$C_e = \mathbb{R}$, illetve $C_v = \mathbb{R}$ esetén élsúlyozásról és élsúlyozott gráfról, illetve csúcssúlyozásról és csúcssúlyozott gráfról beszélünk, és a jelölésből C_e-t, illetve C_v-t elhagyjuk.

Definíció

Egy $G = (\varphi, E, V, w)$ élsúlyozott gráfban az $E' \subset E$ élhalmaz súlya $\sum_{e \in E'} w(e)$.

Algoritmus (Kruskal)

Egy élsúlyozott gráf esetén az összes csúcsot tartalmazó üres részgráfból kiindulva minden lépésben vegyük hozzá a minimális súlyú olyan élt, amivel nem keletkezik kör.

Címkézett gráfok

Tétel

A Kruskal-algoritmus egy minimális súlyú feszítőerdőt határoz meg. Összefüggő gráf esetén minimális súlyú feszítőfát kapunk.

Bizonyítás

Elég összefüggő gráfra bizonyítani (Miért?).
Összefüggő gráf esetén az algoritmus nyilván feszítőfát eredményez (Miért?).
Indirekt tfh. van az algoritmus által meghatározott F feszítőfánál kisebb súlyú feszítőfája a gráfnak. Ha több ilyen van, akkor F' legyen az a minimális súlyú, amelyiknek a legtöbb közös éle van F-fel. Legyen e' olyan éle F'-nek, ami nem éle F-nek. (Miért van ilyen?) Az F-hez e' hozzávételével kapott gráfban van egy K kör (Miért?). Ezen kör tetszőleges e élére $w(e) \leq w(e')$ (Miért?). Az F'-ből az e' törlésével kapott gráf nem összefüggő (Miért?), és pontosan 2 komponense van (Miért?). A K-nak van olyan éle (e''), aminek a végpontjai az F'-ből az e' törlésével kapott gráf különböző komponenseiben vannak (Miért?).

Címkézett gráfok

Biz.folyt.

Tekintsük azt a gráfot, amit F'-ből az e' törlésével és az e'' hozzávételével kapunk. Az így kapott gráf is feszítőfa (Miért?), és $w(e'') < w(e')$ esetén kisebb súlyú, mint F', míg $w(e'') = w(e')$ esetén ugyanakkora súlyú, de több közös éle van F-fel. Mindkét esetben ellentmondásra jutottunk.

Definíció

Egy algoritmust **mohó algoritmusnak** nevezünk, ha minden lépésben az adódó lehetőségek közül az adott lépésben legkedvezőbbek egyikét választja.

Megjegyzés

A Kruskal-algoritmus egy mohó algoritmus.

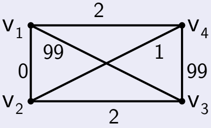
Címkézett gráfok

Megjegyzés

A mohó algoritmus nem mindig optimális.

Példa

Keressünk minimális összsúlyú Hamilton-kört a következő gráfban.



Irányított gráfok

Definíció

A $G = (\psi, E, V)$ hármast irányított gráfnak nevezzük, ha E, V halmazok, $V \neq \emptyset$, $V \cap E = \emptyset$ és $\psi \colon E \to V \times V$.
E-t az élek halmazának, V-t a csúcsok (pontok) halmazának és ψ-t az illeszkedési leképezésnek nevezzük. A ψ leképezés E minden egyes eleméhez egy V-beli rendezett párt rendel.

Elnevezés

$\psi(e) = (v, v')$ esetén azt mondjuk, hogy v kezdőpontja, v' pedig végpontja e-nek.

Definíció

Bármely $G = (\psi, E, V)$ irányított gráfból kapható egy $G' = (\varphi, E, V)$ irányítatlan gráf úgy, hogy $\psi(e) = (v, v')$ esetén $\varphi(e)$-t $\{v, v'\}$-nek definiáljuk.
Ekkor azt mondjuk, hogy G a G' egy irányítása.

Irányított gráfok

Megjegyzés

Az irányítatlan gráfokra definiált fogalmakat használni fogjuk irányított gráfok esetén is, mégpedig a megfelelő irányítatlan gráfra értve.

Definíció

Ha $e \neq e'$ esetén $\psi(e) = \psi(e')$, akkor e és e' szigorúan párhuzamos élek.

Definíció

Azon élek számát, amiknek a v csúcs kezdőpontja, v kifokának nevezzük, és $deg^+(v)$-vel vagy $d^+(v)$-vel jelöljük.
Azon élek számát, amiknek a v csúcs végpontja, v befokának nevezzük, és $deg^-(v)$-vel vagy $d^-(v)$-vel jelöljük.
Ha egy csúcs kifoka 0, akkor nyelőnek, ha a befoka 0, akkor forrásnak nevezzük.

Irányított gráfok

Állítás

A $G = (\psi, E, V)$ irányított gráfra

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |E|.$$

Bizonyítása: számoljuk meg minden él "farkát" illetve számoljuk meg minden él "orrát". Mit is számoltunk így?

Definíció

A $G = (\psi, E, V)$ és $G' = (\psi', E', V')$ irányított gráfok izomorfak, ha léteznek $f : E \to E'$ és $g : V \to V'$ bijektív leképezések, hogy minden $e \in E$-re és $v \in V$-re v pontosan akkor kezdőpontja e-nek, ha $g(v)$ kezdőpontja $f(e)$-nek, és v pontosan akkor végpontja e-nek, ha $g(v)$ végpontja $f(e)$-nek.

Irányított gráfok

Definíció

A $G' = (\psi', E', V')$ irányított gráfot a $G = (\psi, E, V)$ irányított gráf irányított részgráfjának nevezzük, ha $E' \subset E$, $V' \subset V$ és $\psi' \subset \psi$ ($\psi' = \psi\big|_{E'}$). Ekkor G-t a G' irányított szupergráfjának hívjuk.
Ha a G' irányított részgráf mindazokat az éleket tartalmazza, melyek kezdőpontjai és végpontjai V'-ben vannak, akkor G'-t a V' által meghatározott feszített irányított (vagy telített irányított) részgráfnak nevezzük.

Definíció

Ha $G' = (\psi', E', V')$ irányított részgráfja a $G = (\psi, E, V)$ irányított gráfnak, akkor a G'-nek a G-re vonatkozó komplementerén a $(\psi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V)$ gráfot értjük.

Irányított gráfok

Definíció

Ha $G = (\psi, E, V)$ egy irányított gráf, és $E' \subset E$, akkor a G-ből az E' élhalmaz törlésével kapott irányított gráfon a $G' = (\psi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V)$ irányított részgráfot értjük.

Definíció

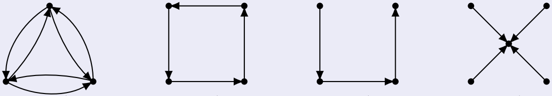
Ha $G = (\psi, E, V)$ egy irányított gráf, és $V' \subset V$, akkor legyen E' az összes olyan élek halmaza, amelyeknek kezdőpontja vagy végpontja valamely V'-beli csúcs. A G-ből a V' csúcshalmaz törlésével kapott irányított gráfon a $G' = (\psi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V \setminus V')$ irányított részgráfot értjük.

Irányított gráfok

Definíció

A $\overrightarrow{C_n}$ irányított ciklus a C_n ciklus olyan irányítása, melyben az élek irányítása azonos (minden csúcs befoka is 1 és kifoka is 1).
A $\overrightarrow{P_n}$ irányított ösvény $\overrightarrow{C_{n+1}}$-ból valamely él törlésével adódik.
Az $\overrightarrow{S_n}$ irányított csillag az S_n csillag olyan irányítása, melyben a középső csúcs nyelő, az összes többi pedig forrás.
Adott csúcshalmaznál az irányított teljes gráfban tetszőleges $v \neq v'$ csúcsokhoz található pontosan egy olyan él, aminek v a kezdőpontja és v' a végpontja (és pontosan egy olyan is, aminek v' a kezdőpontja és v a végpontja). $\overrightarrow{K_n}$ nem K_n irányítása, sőt nem is egyszerű gráf, ha $n > 1$.

Példák



$\overrightarrow{K_3}$ $\overrightarrow{C_4}$ $\overrightarrow{P_3}$ $\overrightarrow{S_4}$

Irányított gráfok

Definíció

Legyen $G = (\psi, E, V)$ egy irányított gráf. A

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$$

sorozatot irányított sétának nevezzük v_0-ból v_n-be, ha

- $v_j \in V \quad 0 \leq j \leq n$,
- $e_k \in E \quad 1 \leq k \leq n$,
- $\psi(e_m) = (v_{m-1}, v_m) \quad 1 \leq m \leq n$.

Ha $v_0 = v_n$, akkor zárt irányított sétáról beszélünk, különben nyílt irányított sétáról.

Definíció

Ha az irányított sétában szereplő élek mind különbözőek, akkor irányított vonalnak nevezzük.
Az előzőeknek megfelelően beszélhetünk zárt vagy nyílt irányított vonalról.

Irányított gráfok

Definíció

Ha az irányított sétában szereplő csúcsok mind különbözőek, akkor irányított útnak nevezzük.

Definíció

Egy legalább egy hosszú zárt irányított vonalat irányított körnek nevezünk, ha a kezdő- és végpont megyegyeznek, de egyébként az irányított vonal pontjai különböznek.

Definíció

Egy irányított gráfot erősen összefüggőnek nevezünk, ha bármely csúcsából bármely csúcsába vezet irányított út. (Azaz oda is, és vissza is létezik irányított út, ami lehet, hogy esetleg más pontokon át vezet.)

Irányított gráfok

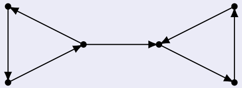
A $G = (\psi, E, V)$ irányított gráf esetén V elemeire vezessük be a $\sim$ relációt: $v \sim v'$ pontosan akkor, ha G-ben vezet irányított út v-ből v'-be, és v'-ből is vezet irányított út v-be.

A $\sim$ ekvivalenciareláció (Miért?), így meghatároz egy osztályozást V-n.

A csúcsok egy adott ilyen osztálya által meghatározott feszített irányított részgráf az irányított gráf egy erős komponense.

Megjegyzés

Az irányítatlan gráfok komponenseivel ellentétben nem feltétlenül tartozik az irányított gráf minden éle valamely erős komponenshez.



Megjegyzés

Nyilván egy irányított gráf akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha minden csúcs ugyanabba az osztályba tartozik, azaz ha csak egyetlen erős komponense van.

Irányított gráfok

Definíció

Az irányított fa olyan irányított gráf, amely fa, és van egy csúcsa, amelynek befoka 0, továbbá az összes többi csúcs befoka 1.
Azt a csúcsot, amelynek befoka 0 gyökérnek nevezzük. Az olyan csúcs, aminek a kifoka 0 a levél.

Állítás

A gyökérből bármely adott csúcsba vezető egyetlen út egyben irányított út is.

Bizonyítás

Az út hossza szerinti TI: ha az út hossza $n = 1$, akkor azért lesz irányított út, mert a gyökér befoka 0. Tfh. $n = k$-ra teljesül az állítás. Vegyünk egy olyan v csúcsot, amibe vezető út hossza $k + 1$. Az útból elhagyva v-t és a rá illeszkedő e élt egy k hosszú utat kapunk, amiről az indukciós feltevés értelmében tudjuk, hogy ir. út. v nem lehet e kezdőpontja, mert akkor az e-re illeszkedő másik csúcs befoka legalább 2 lenne.

Irányított gráfok

Definíció

A gyökérből egy adott csúcsba vezető út hosszát a csúcs szintjének hívjuk.
A csúcsok szintjeinek maximumát az irányított fa magasságának nevezzük.

Definíció

$\psi(e) = (v, v')$ esetén azt mondjuk, hogy v' a v gyereke, illetve v a v' szülője.
Ha két csúcsnak ugyanaz a szülője, akkor testvéreknek hívjuk őket.

Definíció

Bármely v csúcsra tekinthetjük azon csúcsok halmazát, amelyekhez vezet irányított út v-ből. Ezen csúcsok által meghatározott feszített irányított részgráfot (amely irányított fa, és v a gyökere) v-ben gyökerező irányított részfának nevezzük.

Irányított gráfok

Algoritmus (Dijkstra)

A $G = (\psi, E, V, w)$ élsúlyozott irányított gráfról tegyük fel, hogy az élsúlyok pozitívak, $s \in V$ és $T \subset V$.

(1) Legyen $S = \emptyset$, $H = \{s\}$ és $f(s) = 0$; minden más v csúcsra legyen $f(v) = \infty$.

(2) Ha $T \subset S$ vagy $H = \emptyset$, akkor az algoritmus véget ér.

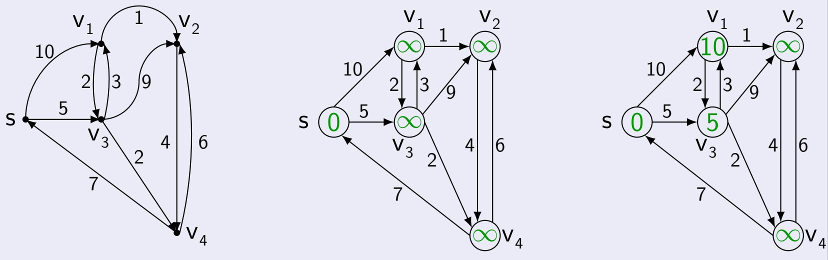
(3) Legyen $t \in H$ egy olyan csúcs, amelyre $f(t)$ minimális. Tegyük át t-t S-be, és minden e élre, aminek kezdőpontja t, végpontja pedig $v \in V \setminus S$ vizsgáljuk meg, hogy teljesül-e $f(t) + w(e) < f(v)$. Ha igen, akkor legyen $f(v) := f(t) + w(e)$, és ha $v \notin H$, tegyük át v-t H-ba. Menjünk (2)-re.

Tétel

A Dijkstra-algoritmus a csúcshalmazon értelmez egy $f\colon V \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt, amely $t \in T$ esetén az adott s csúcsból a t csúcsba vezető irányított séták súlyainak a minimuma (∞, ha nincs ilyen séta).

Irányított gráfok

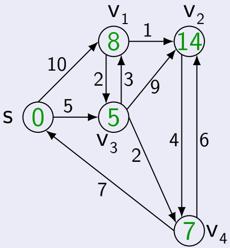
Példa



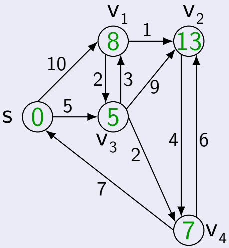
$S = \emptyset, H = \{s\}$ $\quad$ $S = \{s\}, H = \{v_1, v_3\}$

Irányított gráfok

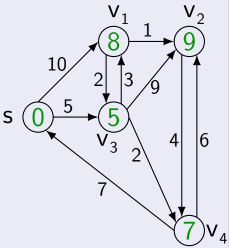
Példa



$S = \{s, v_3\}$
$H = \{v_1, v_2, v_4\}$



$S = \{s, v_3, v_4\}$
$H = \{v_1, v_2\}$



$S = \{s, v_3, v_4, v_1\}$
$H = \{v_2\}$

Irányított gráfok

Bizonyítás

NB.

Gráfok mátrixai

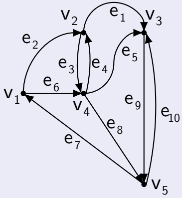
Definíció

Ha egy $G = (\psi, E, V)$ irányított gráf élei $e_1, e_2, \ldots, e_n$, csúcsai pedig $v_1, v_2, \ldots, v_m$, akkor az alábbi illeszkedési mátrix (vagy élmátrix) egyértelműen megadja a gráfot:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, ha } e_j\text{-nek } v_i \text{ kezdőpontja;} \\ -1 & \text{, ha } e_j \text{ nem hurokél, és } v_i \text{ a végpontja;} \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

A megfelelő irányítatlan gráf élmátrixa az $|a_{ij}|$ elemekből áll.

Példa



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gráfok mátrixai

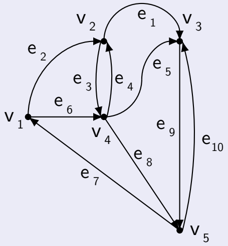
Definíció

A G irányított gráf **csúcsmátrixában** legyen b_{ij} a v_i kezdőpontú és v_j végpontú élek száma.

A megfelelő irányítatlan gráf csúcsmátrixának elemeire:

$$b_{ij} = \begin{cases} \text{a } v_i\text{-re illeszkedő hurokélek száma} & \text{, ha } i = j; \\ \text{a } v_i\text{-re és } v_j\text{-re is illeszkedő élek száma} & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Példa



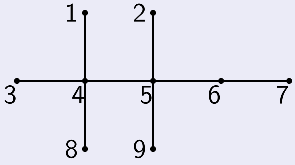
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prüfer-kód

Definíció

Legyen adott egy $F = (\varphi, E, V, w)$ csúcscímkézett fa, az egyes csúcsok címkéi 1 és n közötti különböző egész számok, ahol $n = |V|$. Töröljük az elsőfokú csúcsok közül a legkisebb sorszámút, és írjuk fel ennek szomszédjának a számát. A kapott fára (Miért fa?) folytassuk az eljárást, amíg már csak egy csúcs marad, mégpedig az n címkéjű (Miért?). A sorozat $n-1$-edik tagja szükségképpen n, ezért ez elhagyható.
A kapott $n-2$ hosszú sorozat az F fa Prüfer-kódja.

Példa



A Prüfer-kód: 4546545(9).

Prüfer-kód

Algoritmus (Prüfer-kódból fa készítése)

Legyen a Prüfer-kód $p_1, p_2, \dots, p_{n-2}, p_{n-1} = n$. Legyen a kódban nem szereplő legkisebb sorszám s_1. Ha s_i-t már meghatároztuk, akkor legyen s_{i+1} az a legkisebb sorszám, amely különbözik az alábbiaktól: $s_1, s_2, \dots, s_i; p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_{n-2}, p_{n-1} = n$. Ilyennek mindig lennie kell, mert n lehetőségből legfeljebb $n-1$ számút nem engedünk meg. Az n csúcsot tartalmazó üres gráfból kiindulva minden i-re $(1 \leq i \leq n-1)$ megrajzoljuk az s_i és p_i csúcsokra illeszkedő élt.

Prüfer-kód

45465459 1;5465459 12;465459 123;65459 1237;5459 12376;459 123768;59 1237684;9

Példa