4. előadás

VALÓS SOROZATOK 3.

Műveletek konvergens sorozatokkal

A sorozatok konvergencia-tulajdonságainak vizsgálatánál kiemelt szerepet játszanak a nullsorozatok.

1. Definíció. *Az* (a_n) *sorozatot* **nullsorozatnak** *nevezzük, ha a sorozat konvergens és* $\lim(a_n) = 0$*, azaz*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon |a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon.$$

1. Tétel (Nullsorozatok alaptulajdonságai).

1. (a_n) *nullsorozat* $\iff$ $\big(|a_n|\big)$ *nullsorozat.*
2. (a_n) *konvergens és* $\lim(a_n) = A$ $\iff$ $(a_n - A)$ *nullsorozat.*
3. **Majoráns kritérium:** *Ha* (a_n) *nullsorozat, és* $|c_n| \le |a_n|$ *(m.m.* $n \in \mathbb{N}$*), akkor* (c_n) *is nullsorozat.*

Bizonyítás.

1. $\lim(a_n) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon |a_n| < \varepsilon$, azaz $\big||a_n| - 0\big| < \varepsilon$, és ez azt jelenti, hogy $\lim\big(|a_n|\big) = 0$
2. $\lim(a_n) = A \iff \forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon |a_n - A| < \varepsilon$, azaz $\big|(a_n - A) - 0\big| < \varepsilon$, tehát $\lim(a_n - A) = 0$.
3. $\lim(a_n) = 0 \implies \forall \varepsilon > 0$ mellett egy alkalmas $n_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindexszel

   $$|a_n| < \varepsilon \quad \forall n > n_1 \text{ indexre.}$$

   Ugyanakkor a $|c_n| \le |a_n|$ (m.m. $n \in \mathbb{N}$) „majoráns feltétel” miatt van olyan $n_2 \in \mathbb{N}$, amellyel

   $$|c_n| \le |a_n| \quad \forall n > n_2 \text{ indexre.}$$

   Ha tehát $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, akkor

   $$|c_n| \le |a_n| < \varepsilon \quad \forall n > n_0 \text{ indexre,}$$

   ami azt jelenti, hogy $\lim(c_n) = 0$.

2. Tétel (Műveletek nullsorozatokkal). *Tegyük fel, hogy* $\lim(a_n) = 0$ *és* $\lim(b_n) = 0$. *Ekkor*

1. $(a_n + b_n)$ *is nullsorozat,*
2. *ha* (c_n) *korlátos sorozat, akkor* $(c_n \cdot a_n)$ *is nullsorozat,*
3. $(a_n \cdot b_n)$ *is nullsorozat.*

Bizonyítás.

1. Mivel $\lim(a_n) = \lim(b_n) = 0$, ezért $\forall \varepsilon > 0$-hoz

$$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_1 \colon |a_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_2 \colon |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Ekkor $\forall n > n_0$ indexre

$$|a_n + b_n| \le |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

és ez azt jelenti, hogy $\lim(a_n + b_n) = 0$, azaz $(a_n + b_n)$ valóban nullsorozat.

2. A (c_n) sorozat korlátos, ezért

$$\exists K > 0 \colon |c_n| < K \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel (a_n) nullsorozat, ezért

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 \colon |a_n| < \frac{\varepsilon}{K},$$

következésképpen minden $n > n_0$ indexre

$$|c_n \cdot a_n| = |c_n| \cdot |a_n| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon,$$

azaz $\lim(c_n \cdot a_n) = 0$.

3. Mivel minden konvergens sorozat korlátos, ezért a $\lim(b_n) = 0$ feltételből következik, hogy (b_n) korlátos sorozat. Az állítás tehát a 2. állítás közvetlen következménye.

Megjegyzések.

1. Az előző tételből következik, hogy egy nullsorozat konstans-szorosa, és két nullsorozat különbsége is nullsorozat.
2. Nullsorozatok *hányadosának* a határértéke (vagyis két „kicsi” szám hányadosa) bármi lehet. Ezt illusztrálják az alábbi példák:
   - $\dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^3}} = n \to +\infty, \quad \text{ha} \quad n \to +\infty,$
   - $\dfrac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{n} \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to +\infty,$
   - $\dfrac{\frac{c}{n}}{\frac{1}{n}} = c \to c, \quad \text{ha } n \to +\infty \quad (\text{itt } c \in \mathbb{R}),$
   - $\dfrac{\frac{(-1)^n}{n}}{\frac{1}{n}} = (-1)^n$ sorozat divergens.

A következő tétel már általános konvergens sorozatokra vonatkozik. Azt állítja, hogy a konvergens sorozatok a műveletek során a legtöbb esetben jól viselkednek abban az értelemben, hogy az alapműveletek és a határértékképzés sorrendje felcserélhető.

3. Tétel (Műveletek konvergens sorozatokkal). *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozat konvergens. Legyen*

$$\lim(a_n) = A \in \mathbb{R} \qquad \textit{és} \qquad \lim(b_n) = B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor

1. *$(a_n + b_n)$ is konvergens és $\lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n) = A + B$,*
2. *$(a_n \cdot b_n)$ is konvergens és $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n) = A \cdot B$,*
3. *ha $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ és $\lim(b_n) \neq 0$, akkor*

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \quad \textit{is konvergens, és} \ \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)} = \frac{A}{B}.$$

Bizonyítás. Gyakran fogjuk alkalmazni a nullsorozatok 2. alaptulajdonsága, ami azt mondja ki, hogy

$$(*) \qquad (x_n) \text{ konvergens, és } \alpha \in \mathbb{R} \text{ a határértéke} \quad \Longleftrightarrow \quad (x_n - \alpha) \ \text{ nullsorozat.}$$

1. $(*)$ miatt elég megmutatni, hogy $\big((a_n + b_n) - (A + B)\big)$ nullsorozat. Ez nyilván igaz, mert
$$\big((a_n + b_n) - (A + B)\big) = (a_n - A) + (b_n - B),$$
és két nullsorozat összege is nullsorozat.

2. $(*)$ miatt elég megmutatni, hogy $\big(a_nb_n - AB\big)$ nullsorozat. Ez a következő átalakítással igazolható:
$$a_nb_n - AB = a_nb_n - Ab_n + Ab_n - AB = \underbrace{\underbrace{\underbrace{b_n}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{(a_n - A)}_{\text{nullsorozat}}}_{\text{nullsorozat}} + \underbrace{\underbrace{A}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{(b_n - B)}_{\text{nullsorozat}}}_{\text{nullsorozat}}}_{\text{nullsorozat}}.$$
A fenti gondolatmenetben a (b_n) sorozat azért korlátos, mert konvergens.

3. A bizonyításhoz először egy önmagában is érdekes állítást igazolunk.
<u>**Segédtétel.**</u> *Ha $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ és (b_n) konvergens, továbbá $B := \lim(b_n) \neq 0$, akkor az*
$$\left(\frac{1}{b_n}\right)$$
reciprok-sorozat korlátos.
Ennek bizonyításához legyen $\varepsilon := |B|/2$. Ekkor egy alkalmas $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex mellett
$$|b_n - B| < \varepsilon = \frac{|B|}{2} \qquad \forall n > n_0 \text{ indexre.}$$

Így minden $n > n_0$ esetén

$$|b_n| \geq |B| - |b_n - B| > |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2},$$

hiszen $|B| = |B - b_n + b_n| \leq |B - b_n| + |b_n|$. Tehát

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| < \frac{2}{|B|}, \quad \text{ha } n > n_0,$$

következésképpen az

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| \leq \max\left\{\frac{1}{|b_0|}, \frac{1}{|b_1|}, \ldots, \frac{1}{|b_{n_0}|}, \frac{2}{|B|}\right\}$$

egyenlőtlenség már minden $n \in \mathbb{N}$ számra teljesül, ezért az $\big(1/b_n\big)$ sorozat valóban korlátos. A segédtételt tehát bebizonyítottuk.

Most azt látjuk be, hogy az

$$\left(\frac{1}{b_n}\right) \quad \text{sorozat konvergens} \quad \text{és} \quad \lim\left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{B}.$$

Ez $(*)$-ből következik az alábbi átalakítással:

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} = \frac{B - b_n}{B \cdot b_n} = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{B \cdot b_n}}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{(B - b_n)}_{\text{nullsorozat}}}_{\text{nullsorozat}}.$$

A 3. állítás bizonyításának a befejezéséhez már csak azt kell figyelembe venni, hogy

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

más szóval az (a_n/b_n) „hányados-sorozat” két konvergens sorozat szorzata. Így a 2. állítás és a reciprok sorozatról az előbb mondottak miatt

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \quad \text{is konvergens} \quad \text{és} \quad \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B} = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)}.$$

A műveletek és a határérték kapcsolata

A kibővített valós számok

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

halmazában bevezettünk egy rendezést. Az $\mathbb{R}$ eredeti rendezését megtartva azt mondtuk, hogy legyen

$$-\infty < x < +\infty$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Most már tudunk a műveleteket kiterjeszteni a kibővített valós számokra, mert ezek eredménye szoros kapcsolatban van a sorozatok határértékével.

Állapodjunk meg abban, hogy az $\mathbb{R}$-beli **műveleteket** az alábbiak szerint terjesztjük ki $\overline{\mathbb{R}}$-ra:

1. Összeadás:
   i) Minden x valós számra legyen
   $$x + (+\infty) := (+\infty) + x := +\infty, \qquad x + (-\infty) := (-\infty) + x := -\infty,$$
   ii) $(+\infty) + (+\infty) := +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) := -\infty.$
2. Szorzás:
   i) Minden x pozitív valós számra legyen
   $$x \cdot (+\infty) := (+\infty) \cdot x := +\infty, \qquad x \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot x := -\infty.$$
   ii) Minden x negatív valós számra legyen
   $$x \cdot (+\infty) := (+\infty) \cdot x := -\infty, \qquad x \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot x := +\infty.$$
   iii) $(+\infty)\cdot(+\infty) := +\infty, \ (-\infty)\cdot(-\infty) := +\infty, \ (+\infty)\cdot(-\infty) := (-\infty)\cdot(+\infty) := -\infty.$
3. Osztás:
   i) Minden x valós számra legyen
   $$\frac{x}{+\infty} := \frac{x}{-\infty} := 0.$$
   ii) Minden x pozitív valós számra legyen
   $$\frac{+\infty}{x} := +\infty, \qquad \frac{-\infty}{x} := -\infty.$$
   iii) Minden x negatív valós számra legyen
   $$\frac{+\infty}{x} := -\infty, \qquad \frac{-\infty}{x} := +\infty.$$

Megjegyzések.

1. A műveletek és a rendezés definíciói összhangban vannak a végtelenről kialakult szemléletes képünkkel; pl. $x + (+\infty) := +\infty$ azzal, hogy egy valós szám és egy „mindennél nagyobb” szám összege „mindennél nagyobb”.

2. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy $\overline{\mathbb{R}}$-on lényegében nem „igazi” műveleteket, azaz nem a teljes $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ halmazon értelmezett $\overline{\mathbb{R}}$-beli értékeket felvevő függvényeket értelmeztünk. Bizonyos műveleteket nem definiáltunk. Ilyenek többek között a következők:
   $$(+\infty) + (-\infty), \qquad 0 \cdot (\pm\infty), \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{c}{0} \quad (c \in \overline{\mathbb{R}}).$$
   A nem értelmezett esetek később fontos szerepet fognak játszani a határértékszámításban.

A konvergens sorozatoknál láttuk, hogy az alapműveletek és a határérték-képzés sorrendje felcserélhető. A következő tétel azt állítja, hogy a „legtöbb esetben” ez igaz a tágabb értelemben vett határértékre is.

4. Tétel (A műveletek és a határérték kapcsolata). *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatoknak van határértéke, és legyen*

$$\lim(a_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim(b_n) =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor

1. *az $(a_n + b_n)$ összeg-sorozatnak is van határértéke, és*

$$\lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n) = A + B,$$

feltéve, hogy az $A + B \in \overline{\mathbb{R}}$ összeg értelmezve van,

2. *az $(a_n \cdot b_n)$ szorzat-sorozatnak is van határértéke, és*

$$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n) = A \cdot B,$$

feltéve, hogy az $A \cdot B \in \overline{\mathbb{R}}$ szorzat értelmezve van,

3. *ha $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ hányados-sorozatnak is van határértéke, és*

$$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)} = \frac{A}{B},$$

feltéve, hogy az $\frac{A}{B} \in \overline{\mathbb{R}}$ hányados értelmezve van.

Bizonyítás. Tekintettel a már igazolt, „műveletek konvergens sorozatokkal” című tételre, elegendő a tételt igazolni a hiányzó $A \in \overline{\mathbb{R}}$ vagy $B \in \overline{\mathbb{R}}$ tartalmazó esetekre. Ez összesen 28 eset jelent (lásd a bizonyítás utáni megjegyzést). Példaként három állítás bizonyítását mutatjuk meg (a többi hasonlóan igazolható).

- $\boxed{\lim(a_n) = \lim(b_n) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim(a_n + b_n) = +\infty}$

  Legyen $P_0 := 1$ és $P > 0$ egy tetszőleges rögzített valós szám. Ekkor

$$\lim(a_n) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_1\colon a_n > P_0 = 1,$$
$$\lim(b_n) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_2\colon b_n > P.$$

  Legyen $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Ekkor $\forall n > n_0$ esetén

$$a_n + b_n > 1 + P > P \quad \Longrightarrow \quad \lim(a_n + b_n) = +\infty.$$

- $\boxed{\lim(a_n) = A \in \mathbb{R}^+,\ \lim(b_n) = -\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim(a_n b_n) = -\infty}$

  Legyen $\varepsilon := A/2$ és $P < 0$ egy tetszőleges valós szám. Ekkor

$$\lim(a_n) = A \quad \Longrightarrow \quad \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_1\colon |a_n - A| < \varepsilon = \frac{A}{2}, \text{ és így } a_n > \frac{A}{2} \quad (> 0),$$

$$\lim(b_n) = -\infty \quad \Longrightarrow \quad \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_2\colon b_n < \frac{2P}{A} \quad (< 0).$$

  Legyen $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Ekkor $\forall n > n_0$ esetén

$$a_n b_n < a_n \cdot \frac{2P}{A} < \frac{A}{2} \cdot \frac{2P}{A} = P \quad \Longrightarrow \quad \lim(a_n b_n) = -\infty.$$

- $\boxed{\lim(a_n) = A \in \mathbb{R},\ \lim(b_n) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = 0}$

  Elegendő megmutatni, hogy $(1/b_n)$ nullsorozat, hiszen az (a_n) sorozat korlátos. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám és $P := 1/\varepsilon > 0$. Ekkor

$$\lim(b_n) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 \colon b_n > P = \frac{1}{\varepsilon},$$

  és így

$$\frac{1}{b_n} < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{1}{b_n} - 0\right| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \lim(b_n) = 0.$$

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy a konvergens sorozatok és a műveletek kapcsolatára vonatkozó korábbi eredményeinket (figyelembe véve az $\overline{\mathbb{R}}$-beli műveletek definícióit) további 28 állítással egészítettük ki. Ezt szemléltetik az alábbi táblázatok.

$$A = \lim(a_n) \qquad B = \lim(b_n)$$

Összeadás	$A \in \mathbb{R}$	$A = +\infty$	$A = -\infty$
$B \in \mathbb{R}$	$A + B$	$+\infty$	$-\infty$
$B = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
$B = -\infty$	$-\infty$		$-\infty$

<table>
<tr><th>Szorzás</th><th>$A > 0$</th><th>$A = 0$</th><th>$A < 0$</th><th>$A = +\infty$</th><th>$A = -\infty$</th></tr>
<tr><td>$B > 0$</td><td colspan="3" rowspan="3">$A \cdot B$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$B = 0$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$B < 0$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$B = +\infty$</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$B = -\infty$</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>

Osztás	$A > 0$	$A = 0$	$A < 0$	$A = +\infty$	$A = -\infty$
$B > 0$	A/B	A/B	A/B	$+\infty$	$-\infty$
$B < 0$	A/B	A/B	A/B	$-\infty$	$+\infty$
$B = 0$					
$B = +\infty$	0	0	0		
$B = -\infty$	0	0	0		

Kritikus határértékekről beszélünk akkor, ha az imént megfogalmazott tétel nem alkalmazható. Ezeket az eseteket a táblázatban üresen hagyott helyek jelölik, és ez azt jelenti, hogy A és B megadott értékei nem határozzák meg az összeg-, a szorzat-, illetve a hányados-sorozat határértékét.

Ha pl. $A = +\infty$ és $B = -\infty$, akkor az $(a_n + b_n)$ összeg-sorozat határértékére (a_n) és (b_n) megválasztásától függően „minden” előfordulhat. Ezt mutatják az alábbi példák:

$$\begin{array}{llcl}
a_n := n + c, & b_n := -n \ (n \in \mathbb{N},\ c \in \mathbb{R}) & \Longrightarrow & \lim(a_n + b_n) = c, \\
a_n := 2n, & b_n := -n \ (n \in \mathbb{N}) & \Longrightarrow & \lim(a_n + b_n) = +\infty, \\
a_n := n, & b_n := -2n \ (n \in \mathbb{N}) & \Longrightarrow & \lim(a_n + b_n) = -\infty, \\
a_n := n + (-1)^n, & b_n := -n \ (n \in \mathbb{N}) & \Longrightarrow & (a_n + b_n)\text{-nek nincs határértéke.}
\end{array}$$

Ezért nem értelmeztük $\overline{\mathbb{R}}$-ben $(+\infty)$-nek és $(-\infty)$-nek az összegét.

Hasonló egyszerű példákat lehet megadni a többi kritikus esetben is. Ekkor röviden

$$(+\infty)+(-\infty) \ \ (\text{vagy } (+\infty)-(+\infty)), \qquad 0\cdot(\pm\infty), \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{0}{0}, \quad \frac{c}{0}\ (c\in\overline{\mathbb{R}})$$

típusú határértékekről beszélünk. Ilyenkor a sorozat határértékének a meghatározása során a következő „módszert" követjük: ***a kritikus határértéket valamilyen „alkalmas" átalakítással igyekszünk nem kritikus határértékre visszavezetni.*** ■

Monoton sorozatok határértéke

A sorozatok egy légyeges osztályát képezik a monoton sorozatok. Látni fogjuk azt, hogy ***minden monoton sorozatnak van határértéke***. Ha még azt is feltesszük, hogy a sorozat korlátos, akkor a sorozat konvergens is. Nem korlátos sorozatok határértéke pedig vagy $+\infty$ vagy $-\infty$. Mivel a monotonitást, illetve a korlátosságot egyszerűbb eldönteni, mint a konvergenciát vagy a határértéket, ezért a következő tétel sok esetben jól használható módszert ad a határérték-vizsgálatokhoz.

5. Tétel. *Minden (a_n) monoton sorozatnak van határértéke.*

1. a) Ha $(a_n)\nearrow$ és felülről korlátos, akkor (a_n) konvergens és

$$\lim(a_n)=\sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}.$$

b) Ha $(a_n)\searrow$ és alulról korlátos, akkor (a_n) konvergens és

$$\lim(a_n)=\inf\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}.$$

2. a) Ha $(a_n)\nearrow$ és felülről nem korlátos, akkor $\lim(a_n)=+\infty$.

b) Ha $(a_n)\searrow$ és alulról nem korlátos, akkor $\lim(a_n)=-\infty$.

Bizonyítás. Az állítást csak monoton növekvő sorozatokra fogjuk igazolni. Értelemszerű módosításokkal bizonyíthatjuk be az állítást a monoton csökkenő sorozatokra.

1. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozat monoton növekvő és felülről korlátos. Legyen

$$A:=\sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}\in\mathbb{R}.$$

Ez azt jelenti, hogy A a szóban forgó halmaznak a legkisebb felső korlátja, azaz

- $\forall n\in\mathbb{N}\colon a_n\le A$ és
- $\forall\varepsilon>0$-hoz $\exists n_0\in\mathbb{N}\colon A-\varepsilon<a_{n_0}\le A$.

Mivel a feltételezésünk szerint az (a_n) sorozat monoton növekvő, ezért az

$$A-\varepsilon<a_{n_0}\le a_n\le A.$$

becslés is igaz minden $n>n_0$ indexre. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\forall\varepsilon>0\text{-hoz } \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n>n_0\colon |a_n-A|<\varepsilon.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy az (a_n) sorozat konvergens, és $\lim(a_n)=A$.

2. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozat monoton növekvő és felülről nem korlátos. Ekkor

$$\forall P > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon a_{n_0} > P.$$

A monotonitás miatt ezért egyúttal az is igaz, hogy

$$\forall n > n_0\colon a_n \geq a_{n_0} > P,$$

és ez pontosan azt jelenti, hogy $\lim(a_n) = +\infty$.

Megjegyzés. A tételben elég feltenni azt, hogy a sorozat egy küszöbindextől kezdve monoton, hiszen véges sok tag nem befolyásolja a határértéket. ■

Nevezetes sorozatok 1.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Az $(1/n^k)$, (n^k) és $(\sqrt[k]{n})$ sorozatok határértéke.

6. Tétel. *Legyen $k = 1, 2, \ldots$ egy rögzített természetes szám. Ekkor*

$$\text{a)} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0, \qquad \text{b)} \lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty, \qquad \text{c)} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[k]{n} = +\infty.$$

Bizonyítás. A tételt a határérték definíciója alapján fogjuk bebizonyítani.

a) Azt kell megmutatni, hogy

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon \left|\frac{1}{n^k} - 0\right| < \varepsilon.$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ számot. Mivel az

$$\left|\frac{1}{n^k} - 0\right| = \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \left(\Longrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < n\right),$$

egyenlőtlenség igaz minden $n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ indexre, ezért az $n_0 := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ küszöbindex megválasztásával $(*)$ teljesül.

b) Most azt kell belátnunk, hogy

$$(**) \qquad \forall P > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon n^k > P.$$

Rögzítsük a $P > 0$ számot. Mivel az

$$n^k \geq n > P$$

egyenlőtlenség igaz minden $n > [P]$ indexre, ezért az $n_0 := [P]$ küszöbindex megválasztásával $(**)$ teljesül.

c) Végül azt kell megmutatni, hogy

$$(***) \qquad \forall P > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon \sqrt[k]{n} > P.$$

Rögzítsük a $P > 0$ számot. Mivel az

$$\sqrt[k]{n} > P \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > P^k$$

egyenlőtlenség igaz minden $n > [P^k]$ indexre, ezért az $n_0 := [P^k]$ küszöbindex megválasztásával $(***)$ teljesül.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Konvergens sorozatok m-edik gyökének határértéke, ahol $m = 2, 3, \ldots$ rögzített érték.

7. Tétel. *Legyen $m \geq 2$ rögzített természetes szám. Tegyük fel, hogy az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ sorozat konvergens és $\lim(a_n) =: A \in \mathbb{R}$. Ekkor $A \geq 0$, továbbá az $\left(\sqrt[m]{a_n}\right)$ sorozat is konvergens, és*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{A}.$$

Bizonyítás. Mivel $\sqrt[m]{a_n} \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, így a rendezés és a határérték kapcsolata alapján $A \geq 0$.

Ha $A = 0$, akkor az állítás a definíció közvetlen következménye. Valóban, rögzített $\varepsilon > 0$ mellett, ha $\lim(a_n) = 0$, akkor

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon a_n < \varepsilon^m, \quad \text{és így} \quad \sqrt[m]{a_n} < \varepsilon,$$

azaz $\lim\left(\sqrt[m]{a_n}\right) = 0$.

Tegyük fel most, hogy $m = 2$ és $A > 0$. Ekkor

$$\sqrt{a_n} - \sqrt{A} = \left(\sqrt{a_n} - \sqrt{A}\right) \cdot \frac{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}} = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}} \cdot \left(a_n - A\right),$$

és így

$$0 \leq \left|\sqrt{a_n} - \sqrt{A}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot |a_n - A| \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel $\lim(a_n) = A \implies \lim\left(|a_n - A|\right) = 0$, ezért a közrefogási elvből következik, hogy $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{A}\right| \to 0$, ha $n \to +\infty$, így $\sqrt{a_n} \to \sqrt{A}$, ha $n \to +\infty$.

Az $m > 2$ és $A > 0$ esetében a bizonyítás hasonló. A gyöktelenítéshez az

$$a_n - A = \left(\sqrt[m]{a_n} - \sqrt[m]{A}\right) \cdot \left(\left(\sqrt[m]{a_n}\right)^{m-1} + \left(\sqrt[m]{a_n}\right)^{m-2} \cdot \sqrt[m]{A} + \cdots + \left(\sqrt[m]{A}\right)^{m-1}\right)$$

azonosságot fogjuk alkalmazni. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sqrt[m]{a_n} - \sqrt[m]{A} = \frac{a_n - A}{\left(\sqrt[m]{a_n}\right)^{m-1} + \left(\sqrt[m]{a_n}\right)^{m-2} \cdot \sqrt[m]{A} + \cdots + \left(\sqrt[m]{A}\right)^{m-1}},$$

és így

$$0 \leq \left|\sqrt[m]{a_n} - \sqrt[m]{A}\right| \leq \frac{1}{\left(\sqrt[m]{A}\right)^{m-1}} \cdot |a_n - A| \to 0 \quad \text{ha } n \to +\infty.$$

Ezért a közrefogási elvből következik a tétel állítása.

$\boxed{\textbf{3.}}$ A geometriai/mértani sorozat határértéke.

8. Tétel. *Minden rögzített $q \in \mathbb{R}$ esetén a (q^n) mértani sorozat határértékére a következők teljesülnek:*

$$\lim_{n\to+\infty} q^n \begin{cases} = 0, & \textit{ha } |q| < 1, \\ = 1, & \textit{ha } q = 1, \\ = +\infty, & \textit{ha } q > 1, \\ \textit{nem létezik}, & \textit{ha } q \leq -1. \end{cases}$$

Bizonyítás.

- $\underline{q > 1.}$ Írjuk fel ezt a számot $q = 1+h$ $(h > 0)$ alakban. A Bernoulli-egyenlőtlenségből következik, hogy

$$q^n = (1+h)^n \geq 1 + nh > nh \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

  A határérték és műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel szerint $n \to +\infty$, $h > 0 \implies nh \to +\infty$. Ezért

$$q^n > nh \to +\infty \quad \text{ha} \quad n \to +\infty.$$

  Így a rendezés és a határérték kapcsolatára vonatkozó tétel alapján $\lim(q^n) = +\infty$.

- $\underline{q = 1.}$ Ekkor az azonosan 1 konstans sorozatot kapjuk, ami konvergens, és 1 a határértéke.

- $\underline{|q| < 1.}$ Ha $q = 0$, akkor az állítás nyilvánvaló. Ha $0 < |q| < 1$, akkor az $\frac{1}{|q|} > 1$ számot írjuk fel az $\frac{1}{|q|} = 1 + h$ $(h > 0)$ alakban. Ismét a Bernoulli-egyenlőtlenséget felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{|q|^n} = \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = (1+h)^n > 1 + nh > nh \quad (n \in \mathbb{N}^+),$$

  azaz

$$0 < |q|^n < \frac{1}{nh} \to 0 \quad \text{ha} \quad n \to +\infty.$$

  Így a közrefogási elv szerint $\lim(q^n) = 0$.

- $\underline{q = -1.}$ Már láttuk, hogy a $\big((-1)^n\big)$ sorozatnak nincs határértéke.

- $\underline{q < -1.}$ A (q^n) sorozat páros, illetve páratlan indexű részsorozatainak különböző a határértéke (a páros indexű részsorozat határértéke $+\infty$, a páratlan indexű részsorozaté pedig $-\infty$), ezért a (q^n) sorozatnak nincs határértéke.

Megjegyzés. Az előző tétel értelmében $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, illetve

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Azonban a $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2)^n$ határérték nem létezik. ■

$\boxed{\textbf{4.}}$ n-edik gyökös kifejezéssel megadott sorozatok határértéke.

9. Tétel.

1. *Minden $a > 0$ valós számra az $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ sorozat konvergens, és* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$

2. *Az $\left(\sqrt[n]{n}\right)$ sorozat konvergens, és* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

3. *Tegyük fel, hogy az $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ nem negatív tagokból álló sorozat konvergens, és $\lim(x_n) = A \in \mathbb{R}^+$, azaz $A > 0$ valós szám. Ekkor az $\left(\sqrt[n]{x_n}\right)$ sorozat is konvergens, és*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1.$$

Bizonyítás.

1. i) $\underline{a > 1.}$ A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$1 \le \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} < \ (n-1 \text{ darab 1-es}) \ < \frac{a+n-1}{n} = 1 + \frac{a-1}{n} \to 1,$$

ha $n \to +\infty$. Így a közrefogási elv szerint $\lim(\sqrt[n]{a}) = 1$.

ii) $\underline{a = 1.}$ Ekkor az állítás nyilvánvaló.

iii) $\underline{0 < a < 1.}$ Ekkor $\frac{1}{a} > 1$, ezért i), valamint a konvergens sorozatok és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel alapján

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \to \frac{1}{1} = 1, \quad \text{ha} \quad n \to +\infty.$$

2. Ismét a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazzuk:

$$1 \le \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} < \ (n-2 \text{ darab 1-es}) \ < \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

A jobb oldalon szereplő sorozat határértéke 1. Így a közrefogási elv alkalmazásával azt kapjuk, hogy $\lim(\sqrt[n]{n}) = 1$.

3. $\lim(x_n) = A > 0$ valós szám $\implies$ az $\varepsilon := A/2 > 0$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0$:

$$|x_n - A| < \varepsilon = \frac{A}{2} \quad \implies \quad \frac{A}{2} < x_n < \frac{3A}{2} \quad \implies \quad \sqrt[n]{\frac{A}{2}} < \sqrt[n]{x_n} < \sqrt[n]{\frac{3A}{2}}.$$

Alkalmazzuk a tétel 1. állítását $a = A/2$ és $a = 3A/2$ esetére! Ekkor

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{A}{2}} < \sqrt[n]{x_n} < \sqrt[n]{\frac{3A}{2}} \to 1, \quad \text{ha} \quad n \to +\infty.$$

Így a közrefogási elv szerint $\lim\left(\sqrt[n]{x_n}\right) = 1$.

Megjegyzések.

1. Az előző tétel értelmében $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1$. Nem annyira meglepő, hogy az $\left(\sqrt[n]{2}\right)$ sorozat konvergens, hiszen monoton csökkenő és alulról korlátos (minden értéke 1-nél nagyobb). Az alábbi táblázatban látjuk, hogy a sorozat értékei egyre közelebb kerülnek az 1 értékhez.

n	2	3	4	5	6	100	1 000	10 000
$\sqrt[n]{2}$	$1,414$	$1,256$	$1,189$	$1,149$	$1,122$	$1,0069$	$1,00069$	$1,000069$

Ennek reciprok-sorozata $\left(\sqrt[n]{0,5}\right)$ szintén konvergens, hiszen monoton növekvő és felülről korlátos (minden értéke 1-nél kisebb). A tétel általánosan azt állítja, hogy tetszőleges pozitív konstans n-edik gyökeiből képzet sorozat konvergens és határértéke 1.

2. A $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ eredmény valamivel érdekesebb. Az $\left(\sqrt[n]{n}\right)$ sorozat nyilván alulról korlátos (minden értéke 1-nél nagyobb), de nem monoton. Igazolható azonban, hogy a sorozat egy index után monoton csökkenő, ami már nem annyira nyilvánvaló. Az alábbi táblázatban látjuk, hogy a sorozat értékei egyre közelebb kerülnek az 1 értékhez.

n	2	3	4	5	6	100	1 000	10 000
$\sqrt[n]{n}$	$1,414$	$1,442$	$1,414$	$1,379$	$1,348$	$1,047$	$1,00693$	$1,00092$

3. Az $\left(\sqrt[n]{x_n}\right)$ típusú sorozatokra vonatkozó állítás jelentősen megkönnyít több n-edik gyökös kifejezésekkel megadott sorozatok határértékének kiszámítását. Pl. a

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2+1} = 1$$

határérték igazolható közrefogási elvvel:

$$1 \leftarrow \underbrace{(\sqrt[n]{n})^2}_{\to 1^2} = \sqrt[n]{n^2} < \sqrt[n]{n^2+1} < \sqrt[n]{n^2+n^2} = \sqrt[n]{2n^2} = \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{(\sqrt[n]{n})^2}_{\to 1^2} \to 1,$$

vagy az alábbi átalakítással:

$$\sqrt[n]{n^2+1} = \sqrt[n]{n^2} \cdot \sqrt[n]{1+\frac{1}{n^2}} = \underbrace{(\sqrt[n]{n})^2}_{\to 1^2} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{x_n}}_{\to 1} \to 1, \quad \text{hiszen} \quad x_n := 1 + \frac{1}{n^2} \to 1 \in \mathbb{R}^+.$$