Diszkrét matematika 1

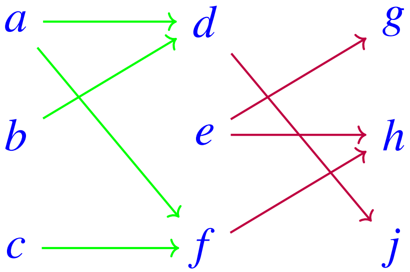
3. előadás
Relációk II.

Mérai László
merai@inf.elte.hu

Komputeralgebra Tanszék

2024 tavasz

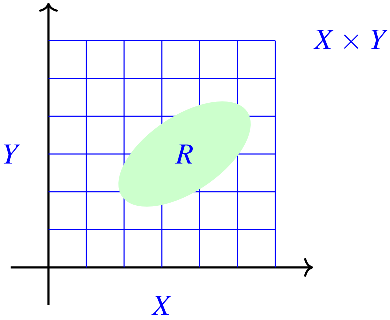
Relációk II.



Binér reláció

Definíció

- Legyen X, Y két tetszőleges halmaz. Ekkor az $R \subset X \times Y$ egy (binér) reláció az X, Y halmaz között.
- Ha $X = Y$, akkor $R \subset X \times X$ egy (binér) reláció X-en.



Példa

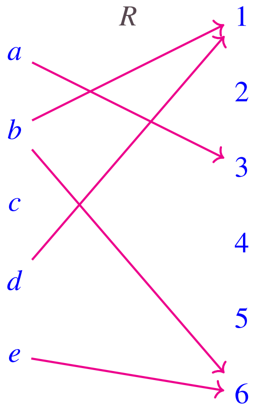
- egyenlőség reláció: $\mathbb{I}_X = \{(x, x) : x \in X\}$
- részhalmaz reláció X-en: $\{(A, B) \in 2^X \times 2^X : A \subset B : A, B \in 2^X\}$
- altér reláció: $\{(U, V) : U, V \leq \mathbb{R}^5, U \text{ altere } V\text{-nek}\}$
- sajátvektor reláció $\{(\mathbf{v}, M) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2\times 2} : \exists\lambda : M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$
- $\sin$ függvény relációja: $\{(x, \sin x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$

Értelmezési tartomány, értékkészlet

Definíció

Legyen $R \subset X \times Y$ egy reláció. Ekkor

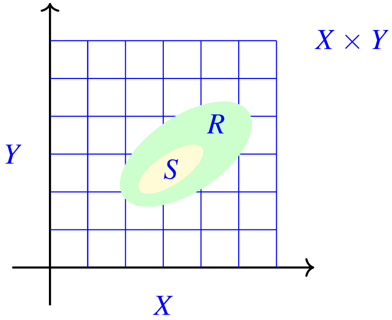
- R éretelmezési tartománya ('domain'): $\mathrm{dmn}(R) = \{x \in X : \exists y \in Y : (x,y) \in R\}$.
- R értékkészlete ('range'): $\mathrm{rng}(R) = \{y \in Y : \exists x \in X : (x,y) \in R\}$.



Példa

- Legyen $R \subset \{a,b,c,d,e\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$. $\mathrm{dmn}(R) = \{a,b,d,e\}$, $\mathrm{rng}(R) = \{1,3,6\}$.
- $N = \{(x^2, x) : x \in \mathbb{R}\}$ $\mathrm{dmn}(N) = \mathbb{R}_0^+$, $\mathrm{rng}(R) = \mathbb{R}$.

Relációk kiterjesztése, leszűkítése

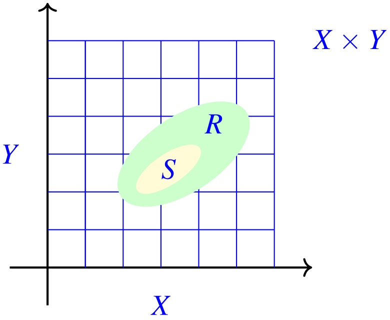


Relációk kiterjesztése, leszűkítése

Definíció

Legyen $R, S \subset X \times Y$ két binér reláció.

- R az S kiterjesztése (és S az R leszűkítése), ha $S \subset R$.



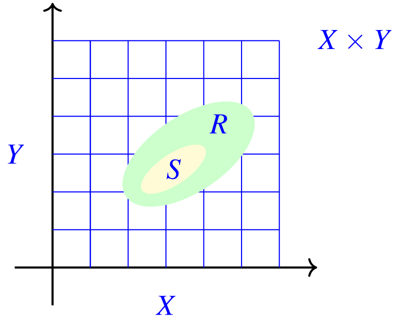
Relációk kiterjesztése, leszűkítése

Definíció

Legyen $R, S \subset X \times Y$ két binér reláció.

- R az S **kiterjesztése** (és S az R leszűkítése), ha $S \subset R$.
- Ha $A \subset X$, akkor R reláció A-ra való **leszűkítése** (A-ra való megszorítása)

$$R|_A = \{(x, y) \in R : x \in A\}.$$



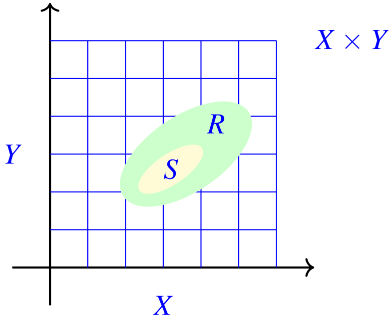
Relációk kiterjesztése, leszűkítése

Definíció

Legyen $R, S \subset X \times Y$ két binér reláció.

- R az S kiterjesztése (és S az R leszűkítése), ha $S \subset R$.
- Ha $A \subset X$, akkor R reláció A-ra való leszűkítése (A-ra való megszorítása)

$$R|_A = \{(x, y) \in R : x \in A\}.$$



Példa

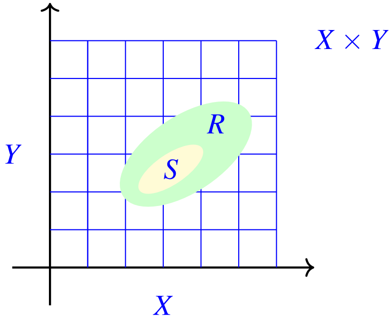
Relációk kiterjesztése, leszűkítése

Definíció

Legyen $R, S \subset X \times Y$ két binér reláció.

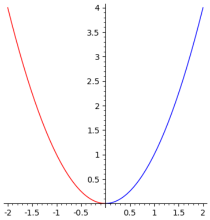
- R az S **kiterjesztése** (és S az R leszűkítése), ha $S \subset R$.
- Ha $A \subset X$, akkor R reláció A-ra való **leszűkítése** (A-ra való megszorítása)

$$R|_A = \{(x, y) \in R : x \in A\}.$$



Példa

- $N = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ és
  $S = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}_0^+\} = \{(\sqrt{x}, x) : x \in \mathbb{R}_0^+\}$.
  Ekkor $S \subset N$



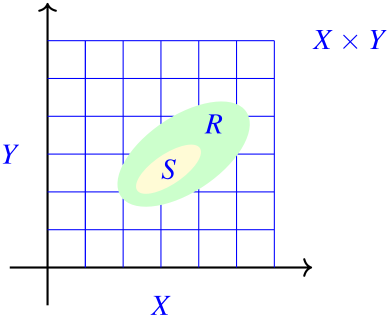
Relációk kiterjesztése, leszűkítése

Definíció

Legyen $R, S \subset X \times Y$ két binér reláció.

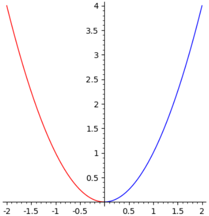
- R az S kiterjesztése (és S az R leszűkítése), ha $S \subset R$.
- Ha $A \subset X$, akkor R reláció A-ra való leszűkítése (A-ra való megszorítása)

$$R|_A = \{(x, y) \in R : x \in A\}.$$



Példa

- $N = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ és
  $S = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}_0^+\} = \{(\sqrt{x}, x) : x \in \mathbb{R}_0^+\}$.
  Ekkor $S \subset N$
- $N|_{\mathbb{R}_0^+} = S$.



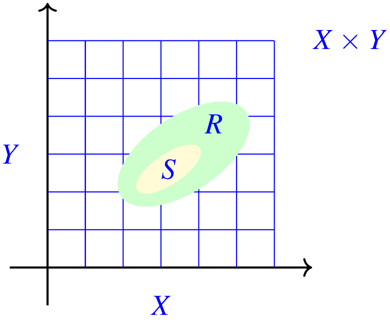
Relációk kiterjesztése, leszűkítése

Definíció

Legyen $R, S \subset X \times Y$ két binér reláció.

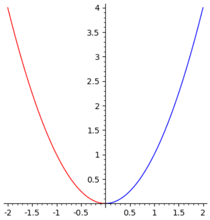
- R az S kiterjesztése (és S az R leszűkítése), ha $S \subset R$.
- Ha $A \subset X$, akkor R reláció A-ra való leszűkítése (A-ra való megszorítása)

$$R|_A = \{(x, y) \in R : x \in A\}.$$

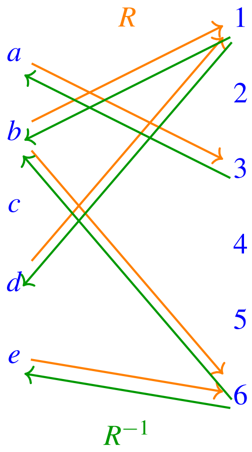


Példa

- $N = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ és
  $S = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}_0^+\} = \{(\sqrt{x}, x) : x \in \mathbb{R}_0^+\}$.
  Ekkor $S \subset N$
- $N|_{\mathbb{R}_0^+} = S$.
- '$\leq$' a '$=$' kiterjesztése.



Reláció inverze

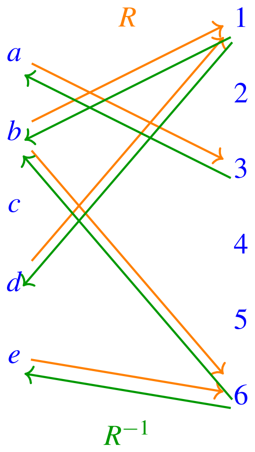


Reláció inverze

Definíció

Egy $R \subset X \times Y$ reláció inverze az

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}.$$



Reláció inverze

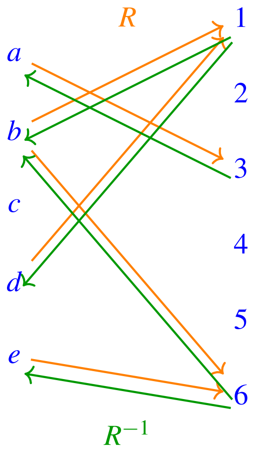
Definíció

Egy $R \subset X \times Y$ reláció inverze az

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}.$$

Példa

- $R = \{(a, 3), (b, 1), (b, 6), (d, 1), (e, 6)\}$ és $R^{-1} = \{(1, b), (1, d), (3, a), (6, b), (6, e)\}$



Reláció inverze

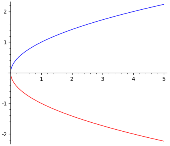
Definíció

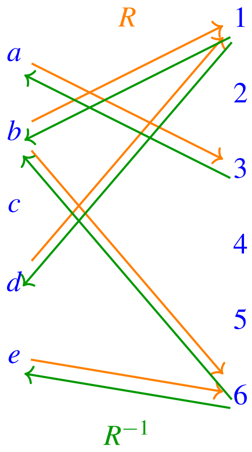
Egy $R \subset X \times Y$ reláció inverze az

$$R^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X : (x,y) \in R\}.$$

Példa

- $R = \{(a,3),(b,1),(b,6),(d,1),(e,6)\}$ és $R^{-1} = \{(1,b),(1,d),(3,a),(6,b),(6,e)\}$
- Legyen $R = \{(x,x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ Ekkor $R^{-1} = \{(x^2,x) : x \in \mathbb{R}\} \neq \{(x,\sqrt{x}) : x \in \mathbb{R}_0^+\}$





Halmaz képe, teljes inverz képe

Definíció

Legyen R egy binér reláció.

Halmaz képe, teljes inverz képe

Definíció

Legyen R egy binér reláció.

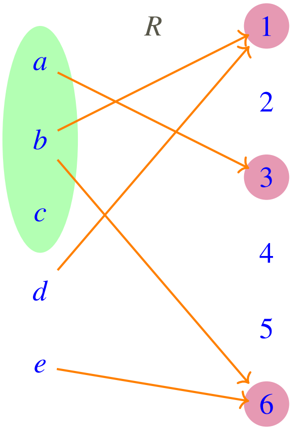
- Az A halmaz képe az $R(A) = \{y : \exists x \in A : (x, y) \in R\}$.

Halmaz képe, teljes inverz képe

Definíció

Legyen R egy binér reláció.

- Az A halmaz képe az
  $R(A) = \{y : \exists x \in A : (x, y) \in R\}$.

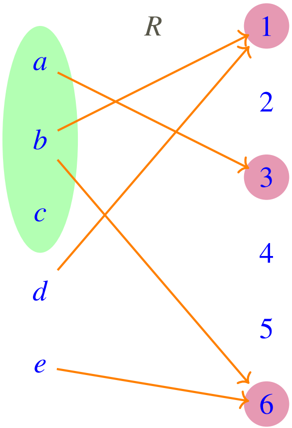


Halmaz képe, teljes inverz képe

Definíció

Legyen R egy binér reláció.

- Az A halmaz képe az $R(A) = \{y : \exists x \in A : (x, y) \in R\}$.
- Adott B halmaz inverz képe, vagy teljes ősképe az $R^{-1}(B)$, a B halmaz képe az R^{-1} reláció esetén.



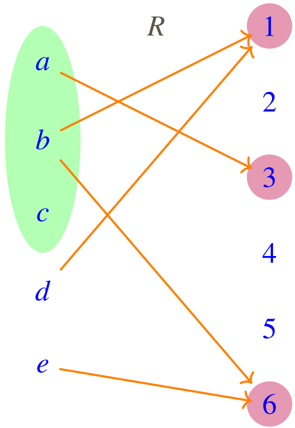
Halmaz képe, teljes inverz képe

Definíció

Legyen R egy binér reláció.

- Az A halmaz képe az $R(A) = \{y : \exists x \in A : (x, y) \in R\}$.
- Adott B halmaz inverz képe, vagy teljes ősképe az $R^{-1}(B)$, a B halmaz képe az R^{-1} reláció esetén.

Példa

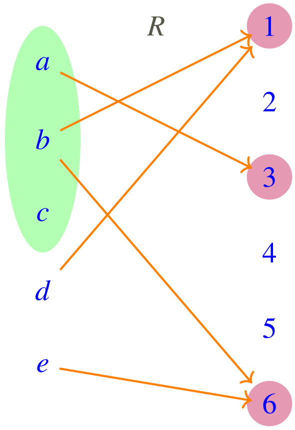


Halmaz képe, teljes inverz képe

Definíció

Legyen R egy binér reláció.

- Az A halmaz képe az $R(A) = \{y : \exists x \in A : (x, y) \in R\}$.
- Adott B halmaz inverz képe, vagy teljes ősképe az $R^{-1}(B)$, a B halmaz képe az R^{-1} reláció esetén.



Példa

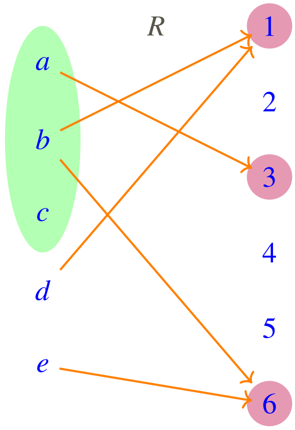
- $R = \{(a, 3), (b, 1), (b, 6), (d, 1), (e, 6)\}$. Ekkor $R(\{a, b, c\}) = \{1, 3, 6\}$

Halmaz képe, teljes inverz képe

Definíció

Legyen R egy binér reláció.

- Az A halmaz képe az $R(A) = \{y : \exists x \in A : (x, y) \in R\}$.
- Adott B halmaz inverz képe, vagy teljes ősképe az $R^{-1}(B)$, a B halmaz képe az R^{-1} reláció esetén.



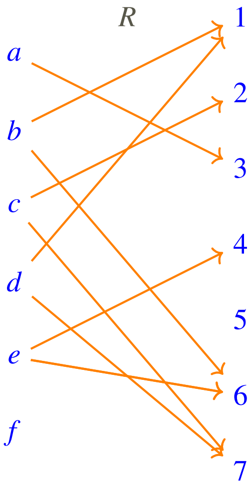
Példa

- $R = \{(a, 3), (b, 1), (b, 6), (d, 1), (e, 6)\}$. Ekkor $R(\{a, b, c\}) = \{1, 3, 6\}$
- Legyen $R = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$.
  Ekkor $R(\{2\}) = \{4\}$ (vagy ($R(2) = 4$)) és $R^{-1}(\{4\}) = \{-2, +2\}$ (vagy $R^{-1}(4) = \{-2, +2\}$).

Példa

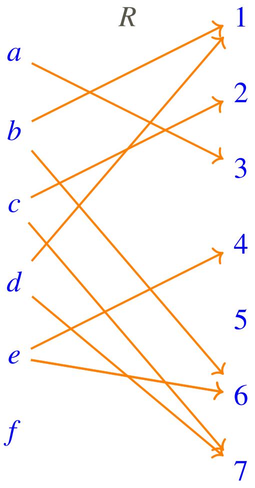
Legyen

$R = \{(a,3),(b,1),(b,6),(c,2),(c,7),(d,1),$
$(d,7),(e,4),(e,6)\}$



Példa

Legyen
$R = \{(a,3),(b,1),(b,6),(c,2),(c,7),(d,1),$
$(d,7),(e,4),(e,6)\}$



Ekkor

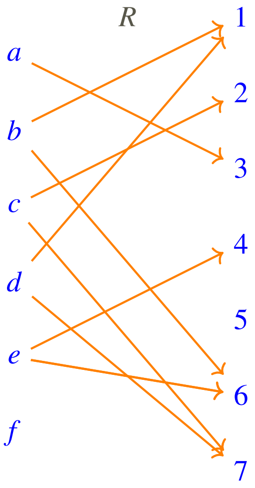
- $\mathrm{dmn}(R) =$

Példa

Legyen
$R = \{(a,3),(b,1),(b,6),(c,2),(c,7),(d,1),$
$(d,7),(e,4),(e,6)\}$

Ekkor

- $\mathrm{dmn}(R) = \{a,b,c,d,e\}$



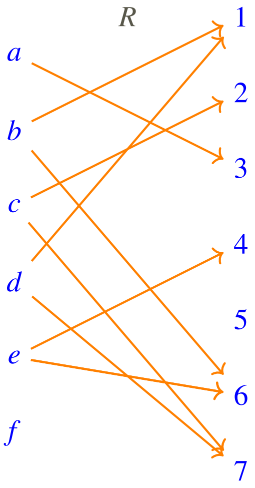
Példa

Legyen

$R = \{(a,3),(b,1),(b,6),(c,2),(c,7),(d,1),$
$(d,7),(e,4),(e,6)\}$

Ekkor

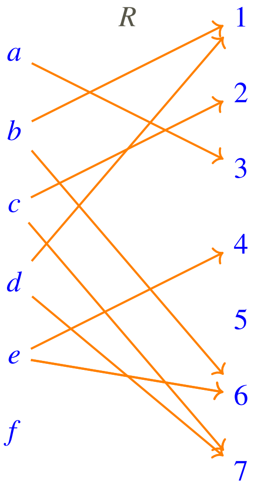
- $\mathrm{dmn}(R) = \{a,b,c,d,e\}$
- $\mathrm{rng}(R) =$



Példa

Legyen

$R = \{(a,3),(b,1),(b,6),(c,2),(c,7),(d,1),$
$(d,7),(e,4),(e,6)\}$



Ekkor

- $\mathrm{dmn}(R) = \{a,b,c,d,e\}$
- $\mathrm{rng}(R) = \{1,2,3,4,6,7\}$

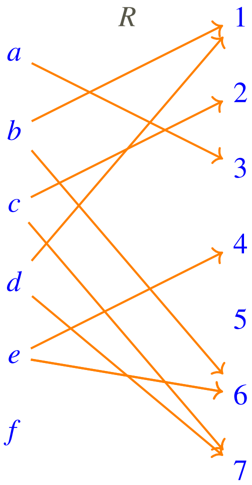
Példa

Legyen

$$R = \{(a,3),(b,1),(b,6),(c,2),(c,7),(d,1),\\ (d,7),(e,4),(e,6)\}$$

Ekkor

- $\mathrm{dmn}(R) = \{a,b,c,d,e\}$
- $\mathrm{rng}(R) = \{1,2,3,4,6,7\}$
- $R|_{\{a,e,f\}} =$



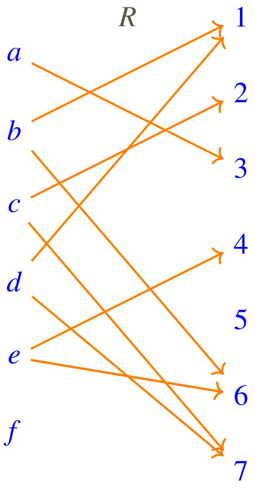
Példa

Legyen

$R = \{(a,3),(b,1),(b,6),(c,2),(c,7),(d,1),$
$(d,7),(e,4),(e,6)\}$

Ekkor

- $\mathrm{dmn}(R) = \{a,b,c,d,e\}$
- $\mathrm{rng}(R) = \{1,2,3,4,6,7\}$
- $R|_{\{a,e,f\}} = \{(a,3),(e,4),(e,6)\}$



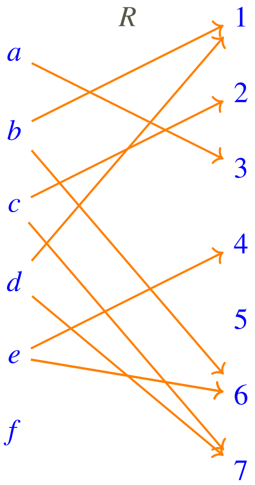
Példa

Legyen

$R = \{(a,3),(b,1),(b,6),(c,2),(c,7),(d,1),$
$(d,7),(e,4),(e,6)\}$

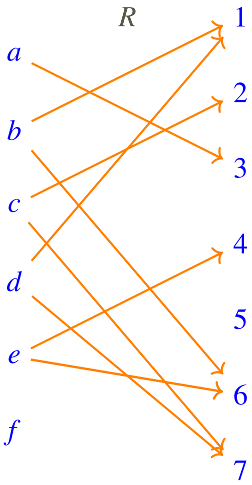
Ekkor

- $\mathrm{dmn}(R) = \{a,b,c,d,e\}$
- $\mathrm{rng}(R) = \{1,2,3,4,6,7\}$
- $R|_{\{a,e,f\}} = \{(a,3),(e,4),(e,6)\}$
- $R(\{a,b,c\}) =$



Példa

Legyen
$R = \{(a,3),(b,1),(b,6),(c,2),(c,7),(d,1),$
$(d,7),(e,4),(e,6)\}$



Ekkor

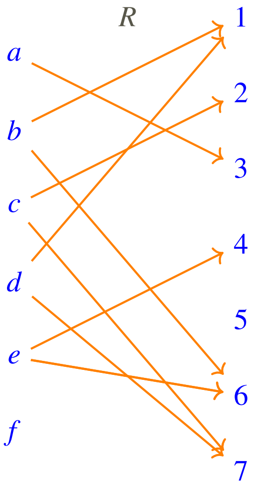
- $\mathrm{dmn}(R) = \{a,b,c,d,e\}$
- $\mathrm{rng}(R) = \{1,2,3,4,6,7\}$
- $R|_{\{a,e,f\}} = \{(a,3),(e,4),(e,6)\}$
- $R(\{a,b,c\}) = \{1,2,3,6,7\}$

Példa

Legyen
$R = \{(a,3),(b,1),(b,6),(c,2),(c,7),(d,1),$
$(d,7),(e,4),(e,6)\}$

Ekkor

- $\mathrm{dmn}(R) = \{a,b,c,d,e\}$
- $\mathrm{rng}(R) = \{1,2,3,4,6,7\}$
- $R|_{\{a,e,f\}} = \{(a,3),(e,4),(e,6)\}$
- $R(\{a,b,c\}) = \{1,2,3,6,7\}$
- $R^{-1}(\{1,2,3\}) =$

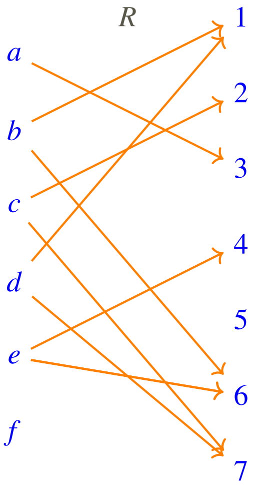


Példa

Legyen
$R = \{(a,3),(b,1),(b,6),(c,2),(c,7),(d,1),$
$(d,7),(e,4),(e,6)\}$

Ekkor

- $\mathrm{dmn}(R) = \{a,b,c,d,e\}$
- $\mathrm{rng}(R) = \{1,2,3,4,6,7\}$
- $R|_{\{a,e,f\}} = \{(a,3),(e,4),(e,6)\}$
- $R(\{a,b,c\}) = \{1,2,3,6,7\}$
- $R^{-1}(\{1,2,3\}) = \{a,b,c,d\}$



Relációk kompozíciója

Definíció

Legyenek R és S binér relációk. Ekkor az $R \circ S$ kompozíció (összetétel, szorzat) reláció:

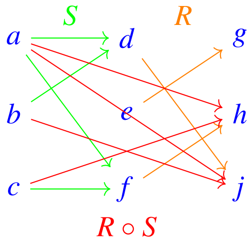
$$R \circ S = \{(x, y) : \exists z : (x, z) \in S, (z, y) \in R\}.$$

Relációk kompozíciója

Definíció

Legyenek R és S binér relációk. Ekkor az $R \circ S$ kompozíció (összetétel, szorzat) reláció:

$$R \circ S = \{(x, y) : \exists z : (x, z) \in S, (z, y) \in R\}.$$



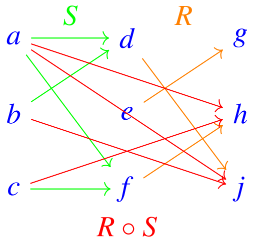
Relációk kompozíciója

Definíció

Legyenek R és S binér relációk. Ekkor az $R \circ S$ kompozíció (összetétel, szorzat) reláció:

$$R \circ S = \{(x, y) : \exists z : (x, z) \in S, (z, y) \in R\}.$$

Figyelem! Kompozíció esetén a relációkat „jobbról-balra írjuk”.



Relációk kompozíciója

Definíció

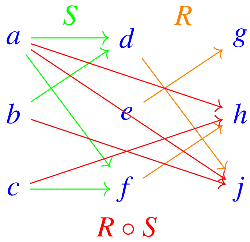
Legyenek R és S binér relációk. Ekkor az $R \circ S$ kompozíció (összetétel, szorzat) reláció:

$$R \circ S = \{(x, y) : \exists z : (x, z) \in S, (z, y) \in R\}.$$

Figyelem! Kompozíció esetén a relációkat ,,jobbról-balra írjuk".

Példa

- Legyen $R_{\sin} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \sin x = y\}$,
  $S_{\log} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \log x = y\}$.



Relációk kompozíciója

Definíció

Legyenek R és S binér relációk. Ekkor az $R \circ S$ kompozíció (összetétel, szorzat) reláció:

$$R \circ S = \{(x, y) : \exists z : (x, z) \in S, (z, y) \in R\}.$$

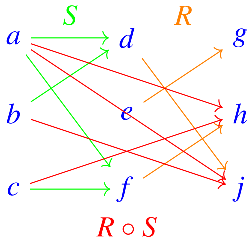
Figyelem! Kompozíció esetén a relációkat ,,jobbról-balra írjuk".

Példa

- Legyen $R_{\sin} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \sin x = y\}$,
  $S_{\log} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \log x = y\}$.

  Ekkor

  $$R_{\sin} \circ S_{\log} = \{(x, y) : \exists z : \log x = z, \sin z = y\}$$
  $$= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \sin \log x = y\}.$$



Példa

beosztás	alkalmazott
menedzser	A, B
fejlesztő	C, D, E, F, G
tesztelő	H, I,
HR	J
marketing	K, L
tech. dolgozó	M

projekt	alkalmazott	határidő
BANK	A, C, D, F,G, H	’24.03.24.
JÁTÉK	B, D, E, F, G, I	’24.03.31.

Példa

beosztás	**alkalmazott**
menedzser	A, B
fejlesztő	C, D, E, F, G
tesztelő	H, I,
HR	J
marketing	K, L
tech. dolgozó	M

projekt	**alkalmazott**	**határidő**
BANK	A, C, D, F,G, H	'24.03.24.
JÁTÉK	B, D, E, F, G, I	'24.03.31.

- $B \in$ **alkalmazottak** $\times$ **beosztás** a beosztás reláció:
  például A B menedzser.

Példa

beosztás	alkalmazott
menedzser	A, B
fejlesztő	C, D, E, F, G
tesztelő	H, I,
HR	J
marketing	K, L
tech. dolgozó	M

projekt	alkalmazott	határidő
BANK	A, C, D, F,G, H	'24.03.24.
JÁTÉK	B, D, E, F, G, I	'24.03.31.

- $B \in$ **alkalmazottak** $\times$ **beosztás** a beosztás reláció:
  például A B menedzser.
- $P \in$ **alkalmazottak** $\times$ **projekt** a projekt reláció:
  például A P BANK

Példa

beosztás	alkalmazott
menedzser	A, B
fejlesztő	C, D, E, F, G
tesztelő	H, I,
HR	J
marketing	K, L
tech. dolgozó	M

projekt	alkalmazott	határidő
BANK	A, C, D, F,G, H	'24.03.24.
JÁTÉK	B, D, E, F, G, I	'24.03.31.

- $B \in$ **alkalmazottak** $\times$ **beosztás** a beosztás reláció: például A B menedzser.
- $P \in$ **alkalmazottak** $\times$ **projekt** a projekt reláció: például A P BANK
- $H \in$ **projekt** $\times$ **határidő** a határidő reláció: például BANK H 2024.03.24.

Példa

beosztás	**alkalmazott**
menedzser	A, B
fejlesztő	C, D, E, F, G
tesztelő	H, I,
HR	J
marketing	K, L
tech. dolgozó	M

projekt	**alkalmazott**	**határidő**
BANK	A, C, D, F,G, H	’24.03.24.
JÁTÉK	B, D, E, F, G, I	’24.03.31.

- Kik dolgoznak a BANK projekten?

- $B \in$ **alkalmazottak** $\times$ **beosztás** a beosztás reláció: például A B menedzser.
- $P \in$ **alkalmazottak** $\times$ **projekt** a projekt reláció: például A P BANK
- $H \in$ **projekt** $\times$ **határidő** a határidő reláció: például BANK H 2024.03.24.

Példa

beosztás	alkalmazott
menedzser	A, B
fejlesztő	C, D, E, F, G
tesztelő	H, I,
HR	J
marketing	K, L
tech. dolgozó	M

projekt	alkalmazott	határidő
BANK	A, C, D, F,G, H	'24.03.24.
JÁTÉK	B, D, E, F, G, I	'24.03.31.

- $B \in$ **alkalmazottak** $\times$ **beosztás** a beosztás reláció: például A B menedzser.
- $P \in$ **alkalmazottak** $\times$ **projekt** a projekt reláció: például A P BANK
- $H \in$ **projekt** $\times$ **határidő** a határidő reláció: például BANK H 2024.03.24.

- Kik dolgoznak a BANK projekten? P^{-1}(BANK)

Példa

beosztás	alkalmazott
menedzser	A, B
fejlesztő	C, D, E, F, G
tesztelő	H, I,
HR	J
marketing	K, L
tech. dolgozó	M

projekt	alkalmazott	határidő
BANK	A, C, D, F,G, H	’24.03.24.
JÁTÉK	B, D, E, F, G, I	’24.03.31.

- $B \in$ **alkalmazottak** $\times$ **beosztás** a beosztás reláció: például A B menedzser.
- $P \in$ **alkalmazottak** $\times$ **projekt** a projekt reláció: például A P BANK
- $H \in$ **projekt** $\times$ **határidő** a határidő reláció: például BANK H 2024.03.24.

- Kik dolgoznak a BANK projekten? P^{-1}(BANK)
- Kik a tesztelők?

Példa

beosztás	alkalmazott
menedzser	A, B
fejlesztő	C, D, E, F, G
tesztelő	H, I,
HR	J
marketing	K, L
tech. dolgozó	M

projekt	alkalmazott	határidő
BANK	A, C, D, F,G, H	’24.03.24.
JÁTÉK	B, D, E, F, G, I	’24.03.31.

- $B \in$ **alkalmazottak** $\times$ **beosztás** a beosztás reláció: például A B menedzser.
- $P \in$ **alkalmazottak** $\times$ **projekt** a projekt reláció: például A P BANK
- $H \in$ **projekt** $\times$ **határidő** a határidő reláció: például BANK H 2024.03.24.

- Kik dolgoznak a BANK projekten? P^{-1}(BANK)
- Kik a tesztelők? B^{-1}(tesztelő)

Példa

beosztás	alkalmazott
menedzser	A, B
fejlesztő	C, D, E, F, G
tesztelő	H, I,
HR	J
marketing	K, L
tech. dolgozó	M

projekt	alkalmazott	határidő
BANK	A, C, D, F,G, H	'24.03.24.
JÁTÉK	B, D, E, F, G, I	'24.03.31.

- $B \in$ **alkalmazottak** $\times$ **beosztás** a beosztás reláció: például A B menedzser.
- $P \in$ **alkalmazottak** $\times$ **projekt** a projekt reláció: például A P BANK
- $H \in$ **projekt** $\times$ **határidő** a határidő reláció: például BANK H 2024.03.24.

- Kik dolgoznak a BANK projekten? $P^{-1}(\text{BANK})$
- Kik a tesztelők? $B^{-1}(\text{tesztelő})$
- Milyen határidejei vannak az alkalmazottaknak?

Példa

beosztás	alkalmazott
menedzser	A, B
fejlesztő	C, D, E, F, G
tesztelő	H, I,
HR	J
marketing	K, L
tech. dolgozó	M

projekt	alkalmazott	határidő
BANK	A, C, D, F,G, H	'24.03.24.
JÁTÉK	B, D, E, F, G, I	'24.03.31.

- $B \in$ **alkalmazottak** $\times$ **beosztás** a beosztás reláció: például A B menedzser.
- $P \in$ **alkalmazottak** $\times$ **projekt** a projekt reláció: például A P BANK
- $H \in$ **projekt** $\times$ **határidő** a határidő reláció: például BANK H 2024.03.24.

- Kik dolgoznak a BANK projekten? P^{-1}(BANK)
- Kik a tesztelők? B^{-1}(tesztelő)
- Milyen határidejei vannak az alkalmazottaknak? $H \circ P$

Példa

beosztás	alkalmazott
menedzser	A, B
fejlesztő	C, D, E, F, G
tesztelő	H, I,
HR	J
marketing	K, L
tech. dolgozó	M

projekt	alkalmazott	határidő
BANK	A, C, D, F,G, H	’24.03.24.
JÁTÉK	B, D, E, F, G, I	’24.03.31.

- $B \in$ **alkalmazottak** $\times$ **beosztás** a beosztás reláció: például A B menedzser.
- $P \in$ **alkalmazottak** $\times$ **projekt** a projekt reláció: például A P BANK
- $H \in$ **projekt** $\times$ **határidő** a határidő reláció: például BANK H 2024.03.24.

- Kik dolgoznak a BANK projekten? P^{-1}(BANK)
- Kik a tesztelők? B^{-1}(tesztelő)
- Milyen határidejei vannak az alkalmazottaknak? $H \circ P$
- Milyen határidejei vannak a tesztelőknek?

Példa

beosztás	alkalmazott
menedzser	A, B
fejlesztő	C, D, E, F, G
tesztelő	H, I,
HR	J
marketing	K, L
tech. dolgozó	M

projekt	alkalmazott	határidő
BANK	A, C, D, F,G, H	’24.03.24.
JÁTÉK	B, D, E, F, G, I	’24.03.31.

- $B \in$ **alkalmazottak** $\times$ **beosztás** a beosztás reláció:
  például A B menedzser.
- $P \in$ **alkalmazottak** $\times$ **projekt** a projekt reláció:
  például A P BANK
- $H \in$ **projekt** $\times$ **határidő** a határidő reláció:
  például BANK H 2024.03.24.

- Kik dolgoznak a BANK projekten? $P^{-1}(\text{BANK})$
- Kik a tesztelők? $B^{-1}(\text{tesztelő})$
- Milyen határidejei vannak az alkalmazottaknak? $H \circ P$
- Milyen határidejei vannak a tesztelőknek? $H \circ P \circ B^{-1}(\text{tesztelő})$

Kompozíció tulajdonságai 1

Tétel

Legyenek R, S, T relációk. Ekkor

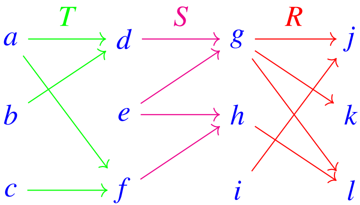
- $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ (a kompozíció asszociatív).

Kompozíció tulajdonságai 1

Tétel

Legyenek R, S, T relációk. Ekkor

- $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ (a kompozíció asszociatív).



$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

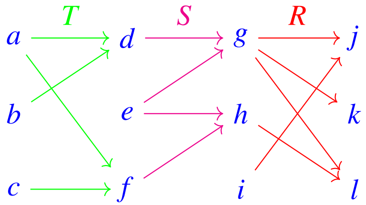
Kompozíció tulajdonságai 1

Tétel

Legyenek R, S, T relációk. Ekkor

- $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ (a kompozíció asszociatív).

Bizonyítás.



$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

Kompozíció tulajdonságai 1

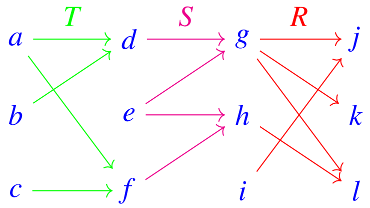
Tétel

Legyenek R, S, T relációk. Ekkor

- $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ (a kompozíció asszociatív).

Bizonyítás.

- Legyen $(x, y) \in (R \circ S) \circ T$.



$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

Kompozíció tulajdonságai 1

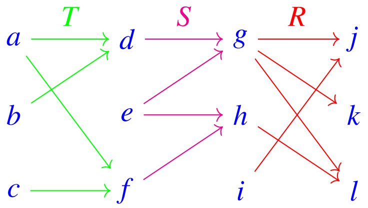
Tétel

Legyenek R, S, T relációk. Ekkor

- $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ (a kompozíció asszociatív).

Bizonyítás.

- Legyen $(x, y) \in (R \circ S) \circ T$.
- Ekkor $\exists z \in \text{rng}(T) \cap \text{dmn}(R \circ S)$: $(x, z) \in T \wedge (z, y) \in R \circ S$



$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

Kompozíció tulajdonságai 1

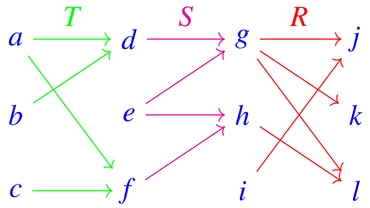
Tétel

Legyenek R, S, T relációk. Ekkor

- $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ (a kompozíció asszociatív).

Bizonyítás.

- Legyen $(x, y) \in (R \circ S) \circ T$.
- Ekkor $\exists z \in \mathrm{rng}(T) \cap \mathrm{dmn}(R \circ S)$:
  $(x, z) \in T \ \wedge \ (z, y) \in R \circ S$
- Ekkor $\exists w \in \mathrm{rng}(S) \cap \mathrm{dmn}(R)$:
  $(z, w) \in S \wedge (w, y) \in R$



$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Kompozíció tulajdonságai 1

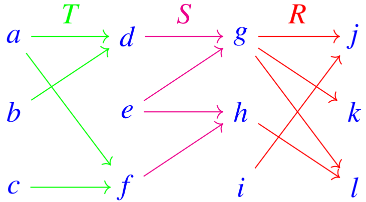
Tétel

Legyenek R, S, T relációk. Ekkor

- $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ (a kompozíció asszociatív).

Bizonyítás.

- Legyen $(x, y) \in (R \circ S) \circ T$.
- Ekkor $\exists z \in \operatorname{rng}(T) \cap \operatorname{dmn}(R \circ S)$: $(x, z) \in T \ \wedge \ (z, y) \in R \circ S$
- Ekkor $\exists w \in \operatorname{rng}(S) \cap \operatorname{dmn}(R)$: $(z, w) \in S \wedge (w, y) \in R$
- Ekkor $(x, z) \in T \wedge (z, w) \in S \Rightarrow (x, z) \in (S \circ T)$



$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Kompozíció tulajdonságai 1

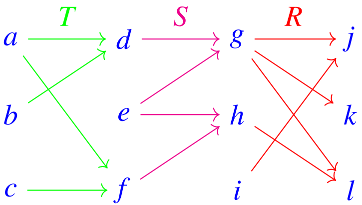
Tétel

Legyenek R, S, T relációk. Ekkor

- $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ (a kompozíció asszociatív).

Bizonyítás.

- Legyen $(x, y) \in (R \circ S) \circ T$.
- Ekkor $\exists z \in \mathrm{rng}(T) \cap \mathrm{dmn}(R \circ S)$:
  $(x, z) \in T \ \wedge \ (z, y) \in R \circ S$
- Ekkor $\exists w \in \mathrm{rng}(S) \cap \mathrm{dmn}(R)$:
  $(z, w) \in S \wedge (w, y) \in R$
- Ekkor $(x, z) \in T \wedge (z, w) \in S \Rightarrow (x, z) \in (S \circ T)$
- Ha $(x, z) \in S \circ T \ \wedge (z, y) \in R \Rightarrow (x, z) \in R \circ (S \circ T)$



$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Kompozíció tulajdonságai 1

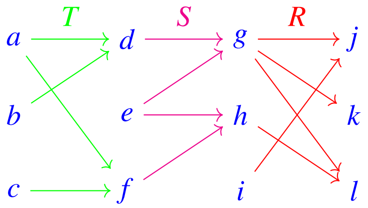
Tétel

Legyenek R, S, T relációk. Ekkor

- $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ (a kompozíció asszociatív).

Bizonyítás.

- Legyen $(x, y) \in (R \circ S) \circ T$.
- Ekkor $\exists z \in \operatorname{rng}(T) \cap \operatorname{dmn}(R \circ S)$:
  $(x, z) \in T \ \wedge \ (z, y) \in R \circ S$
- Ekkor $\exists w \in \operatorname{rng}(S) \cap \operatorname{dmn}(R)$:
  $(z, w) \in S \wedge (w, y) \in R$
- Ekkor $(x, z) \in T \wedge (z, w) \in S \Rightarrow (x, z) \in (S \circ T)$
- Ha $(x, z) \in S \circ T \ \wedge (z, y) \in R \Rightarrow (x, z) \in R \circ (S \circ T)$



$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

$\square$

Kompozíció tulajdonságia 2

Tétel

Legyenek R, S relációk. Ekkor

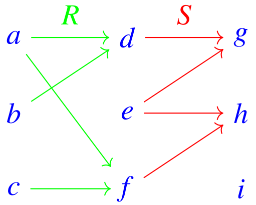
- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Kompozíció tulajdonságia 2

Tétel

Legyenek R, S relációk. Ekkor

- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.



$R \circ S$

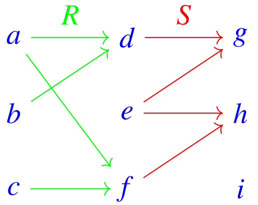
Kompozíció tulajdonságia 2

Tétel

Legyenek R, S relációk. Ekkor

- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Bizonyítás.



$R \circ S$

Kompozíció tulajdonságia 2

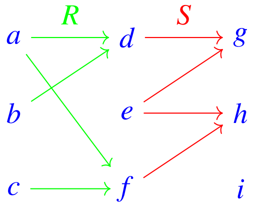
Tétel

Legyenek R, S relációk. Ekkor

- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Bizonyítás.

- Legyen $(x, y) \in (R \circ S)^{-1} \iff (y, x) \in R \circ S$.



$R \circ S$

Kompozíció tulajdonságia 2

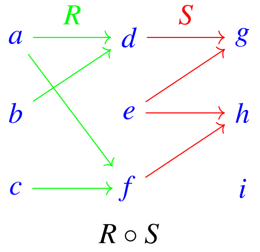
Tétel

Legyenek R, S relációk. Ekkor

- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Bizonyítás.

- Legyen $(x, y) \in (R \circ S)^{-1} \iff (y, x) \in R \circ S$.
- $\iff \exists z : (y, z) \in S \wedge (z, x) \in R$



Kompozíció tulajdonsága 2

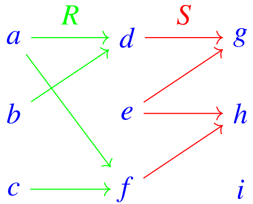
Tétel

Legyenek R, S relációk. Ekkor

- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Bizonyítás.

- Legyen $(x, y) \in (R \circ S)^{-1} \iff (y, x) \in R \circ S$.
- $\iff \exists z : (y, z) \in S \ \wedge (z, x) \in R$
- $\iff (z, y) \in S^{-1} \ \wedge (x, z) \in R^{-1}$



$R \circ S$

Kompozíció tulajdonságia 2

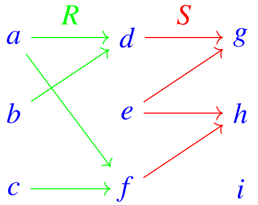
Tétel

Legyenek R, S relációk. Ekkor

- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Bizonyítás.

- Legyen $(x, y) \in (R \circ S)^{-1} \iff (y, x) \in R \circ S$.
- $\iff \exists z : (y, z) \in S \ \wedge (z, x) \in R$
- $\iff (z, y) \in S^{-1} \ \wedge (x, z) \in R^{-1}$
- $\iff (x, y) \in S^{-1} \circ R^{-1}$



$R \circ S$

$\square$

Relációk tulajdonságai 1/4.

Legyen R egy reláció X-en, azaz $R \subset X \times X$.

Relációk tulajdonságai 1/4.

Legyen R egy reláció X-en, azaz $R \subset X \times X$.

Példa

Relációk tulajdonságai 1/4.

Legyen R egy reláció X-en, azaz $R \subset X \times X$.

Példa

- $=$, $\leq$, $<$ relációk $\mathbb{R}$-en

Relációk tulajdonságai 1/4.

Legyen R egy reláció X-en, azaz $R \subset X \times X$.

Példa

- $=$, $\leq$, $<$ relációk $\mathbb{R}$-en
- $\subset$ halmazokon

Relációk tulajdonságai 1/4.

Legyen R egy reláció X-en, azaz $R \subset X \times X$.

Példa

- $=$, $\leq$, $<$ relációk $\mathbb{R}$-en
- $\subset$ halmazokon
- $|$ oszthatóság $\mathbb{Z}$-en

Relációk tulajdonságai 1/4.

Legyen R egy reláció X-en, azaz $R \subset X \times X$.

Példa

- $=$, $\leq$, $<$ relációk $\mathbb{R}$-en
- $\subset$ halmazokon
- $|$ oszthatóság $\mathbb{Z}$-en
- $K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - y| \leq 1\}$ („közelségi reláció”)

Relációk tulajdonságai 1/4.

Legyen R egy reláció X-en, azaz $R \subset X \times X$.

Példa

- $=$, $\leq$, $<$ relációk $\mathbb{R}$-en
- $\subset$ halmazokon
- $|$ oszthatóság $\mathbb{Z}$-en
- $K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - y| \leq 1\}$ („közelségi reláció”)

Definíció (szimmetrikusság)

Relációk tulajdonságai 1/4.

Legyen R egy reláció X-en, azaz $R \subset X \times X$.

Példa

- $=$, $\leq$, $<$ relációk $\mathbb{R}$-en
- $\subset$ halmazokon
- $|$ oszthatóság $\mathbb{Z}$-en
- $K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - y| \leq 1\}$ („közelségi reláció”)

Definíció (szimmetrikusság)

- R reláció szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$

  Példa: $=, K$, ellenpélda: $\leq, <, \subset, |$

Relációk tulajdonságai 1/4.

Legyen R egy reláció X-en, azaz $R \subset X \times X$.

Példa

- $=$, $\leq$, $<$ relációk $\mathbb{R}$-en
- $\subset$ halmazokon
- $|$ oszthatóság $\mathbb{Z}$-en
- $K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - y| \leq 1\}$ („közelségi reláció”)

Definíció (szimmetrikusság)

- R reláció szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$

  Példa: $=, K$, ellenpélda: $\leq, <, \subset, |$
- R reláció antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$

  Példa: $=, \leq, \subset$ ellenpélda: K

Relációk tulajdonságai 1/4.

Legyen R egy reláció X-en, azaz $R \subset X \times X$.

Példa

- $=, \leq, <$ relációk $\mathbb{R}$-en
- $\subset$ halmazokon
- $|$ oszthatóság $\mathbb{Z}$-en
- $K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - y| \leq 1\}$ („közelségi reláció”)

Definíció (szimmetrikusság)

- R reláció szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$
  Példa: $=, K$, ellenpélda: $\leq, <, \subset, |$
- R reláció antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$
  Példa: $=, \leq, \subset$ ellenpélda: K
- R reláció szigorúan antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow \neg(yRx)$
  Példa: $<$ ellenpélda: $=, \leq, K$

Relációk tulajdonságai 2/4.

Definíció (reflexivitás)

Relációk tulajdonságai 2/4.

Definíció (reflexivitás)

- R reláció reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$
  Példa: $=, \leq, \subset, |, K$ ellenpélda: $<$

Relációk tulajdonságai 2/4.

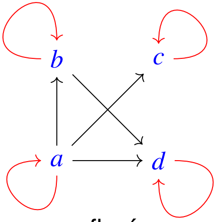
Definíció (reflexivitás)

- R reláció reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$
  Példa: $=, \leq, \subset, |, K$ ellenpélda: $<$
- R reláció irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg(xRx)$
  Példa: $<$ ellenpélda: $=, \leq, \subset, |, K$

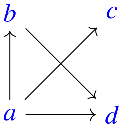
Relációk tulajdonságai 2/4.

Definíció (reflexivitás)

- R reláció reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$
  Példa: $=, \leq, \subset, |, K$ ellenpélda: $<$
- R reláció irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg(xRx)$
  Példa: $<$ ellenpélda: $=, \leq, \subset, |, K$



reflexív

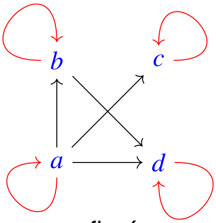


irreflexív

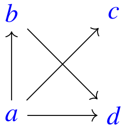
Relációk tulajdonságai 2/4.

Definíció (reflexivitás)

- R reláció reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$
  Példa: $=, \leq, \subset, |, K$ ellenpélda: $<$
- R reláció irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg(xRx)$
  Példa: $<$ ellenpélda: $=, \leq, \subset, |, K$



reflexív



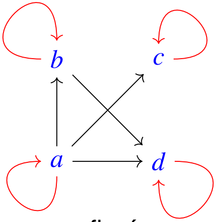
irreflexív

Definíció (tranzitivitás)

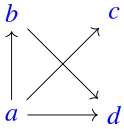
Relációk tulajdonságai 2/4.

Definíció (reflexivitás)

- R reláció reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$
  Példa: $=, \leq, \subset, |, K$ ellenpélda: $<$
- R reláció irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg(xRx)$
  Példa: $<$ ellenpélda: $=, \leq, \subset, |, K$



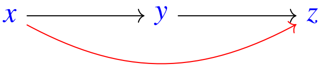
reflexív



irreflexív

Definíció (tranzitivitás)

- R reláció tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : xRy \land yRz \Rightarrow xRz$
  Példa: $=, \leq, \subset, |, <$ ellenpélda: K



Relációk tulajdonságai 3/4.

Elemek összehasoníthatósága:

Relációk tulajdonságai 3/4.

Elemek összehasonolíthatósága:

Definíció

- R reláció dichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $xRy \vee yRx$ (megengedő ,,vagy”!)
  Példa: $\leq$ ellenpélda: $\subset, |$

Relációk tulajdonságai 3/4.

Elemek összehasonílthatósága:

Definíció

- R reláció dichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $xRy \vee yRx$ (megengedő ,,vagy''!)
  Példa: $\leq$ ellenpélda: $\subset, |$

$$\begin{tikzcd} 3 \\ 2 \arrow[u] \\ 1 \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \{a,b\} & \\ \{a\} \arrow[ur] & & \{b\} \arrow[ul] \\ & \emptyset \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & 4 & \\ -2 \arrow[ur] \arrow[rr, leftrightarrow] & & 2 \arrow[ul] \\ & 1 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\leq$ reláció $\{1, 2, 3\}$-on dichotóm

$\subset$ reláció $2^{\{a,b\}}$-n nem dichotóm

$|$ reláció $\{1, \pm 2, 4\}$-en dichotóm

Relációk tulajdonságai 4/4.

Elemek összehasoníthatósága:

Relációk tulajdonságai 4/4.

Elemek összehasoníthatósága:

Definíció

- R reláció trichotóm,
  ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül
  Példa: $<$ ellenpélda: $=, \leq, K$

Relációk tulajdonságai 4/4.

Elemek összehasonílthatósága:

Definíció

- R reláció trichotóm,
  ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül
  Példa: $<$ ellenpélda: $=, \leq, K$

$$\begin{tikzcd}
3 \\
2 \arrow[u] \\
1 \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \{a,b\} & \\
\{a\} \arrow[ur] & & \{b\} \arrow[ul] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & 4 & \\
-2 \arrow[ur] \arrow[rr, leftrightarrow] & & 2 \arrow[ul] \\
 & 1 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

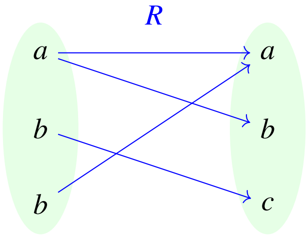
$<$ reláció $\{1, 2, 3\}$-on trichotóm

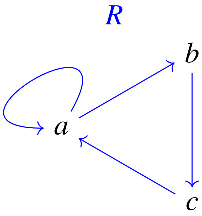
$\subset$ reláció $2^{\{a,b\}}$-n nem trichotóm

$|$ reláció $\{1, \pm 2, 4\}$-en nem trichotóm

Relációk tulajdonságai, példa

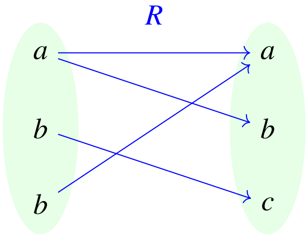
Legyen R a következő reláció:

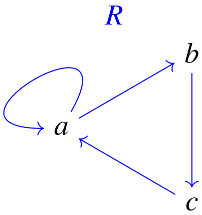




Relációk tulajdonságai, példa

Legyen R a következő reláció:

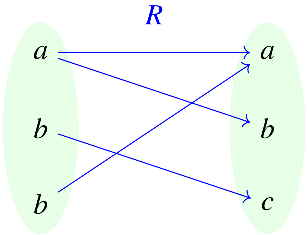


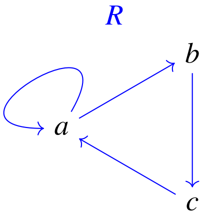


szimmetrikus			reflexív		
antiszimmetrikus			irreflexív		
szig. antiszimmetrikus			tranzitív		
dichotóm			trichotóm		

Relációk tulajdonságai, példa

Legyen R a következő reláció:

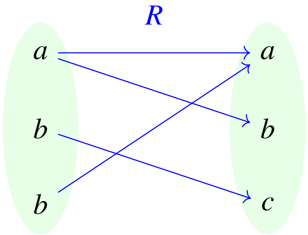


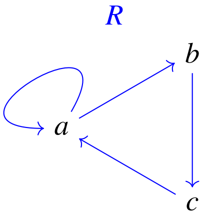


szimmetrikus	×	aRb, $\neg(bRa)$	reflexív		
antiszimmetrikus			irreflexív		
szig. antiszimmetrikus			tranzitív		
dichotóm			trichotóm		

Relációk tulajdonságai, példa

Legyen R a következő reláció:

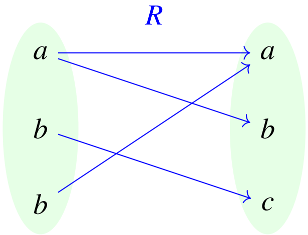


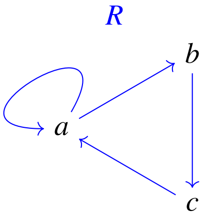


szimmetrikus	×	$aRb,\ \neg(bRa)$	reflexív		
antiszimmetrikus	✓		irreflexív		
szig. antiszimmetrikus			tranzitív		
dichotóm			trichotóm		

Relációk tulajdonságai, példa

Legyen R a következő reláció:

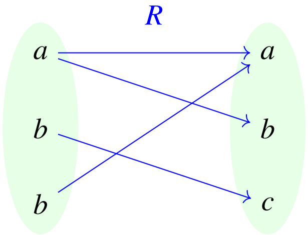


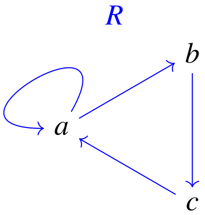


szimmetrikus	$\times$	$aRb,\ \neg(bRa)$	reflexív		
antiszimmetrikus	$\checkmark$		irreflexív		
szig. antiszimmetrikus	$\times$	aRa	tranzitív		
dichotóm			trichotóm		

Relációk tulajdonságai, példa

Legyen R a következő reláció:

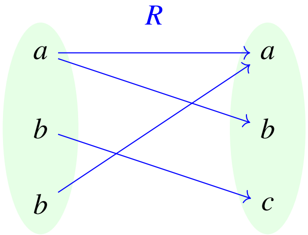


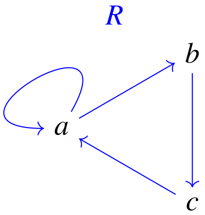


szimmetrikus	×	aRb, $\neg(bRa)$	reflexív		
antiszimmetrikus	✓		irreflexív		
szig. antiszimmetrikus	×	aRa	tranzitív		
dichotóm	×	$\neg(cRc)$	trichotóm		

Relációk tulajdonságai, példa

Legyen R a következő reláció:

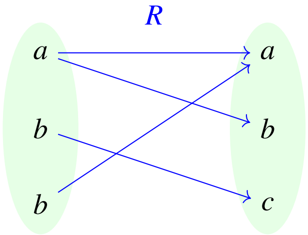


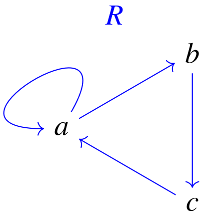


szimmetrikus	$\times$	aRb, $\neg(bRa)$	reflexív	$\times$	$\neg(bRb)$
antiszimmetrikus	$\checkmark$		irreflexív		
szig. antiszimmetrikus	$\times$	aRa	tranzitív		
dichotóm	$\times$	$\neg(cRc)$	trichotóm		

Relációk tulajdonságai, példa

Legyen R a következő reláció:

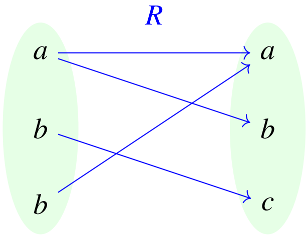


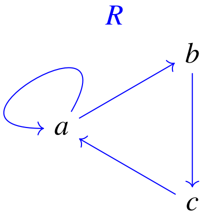


szimmetrikus	×	$aRb,\ \neg(bRa)$	reflexív	×	$\neg(bRb)$
antiszimmetrikus	✓		irreflexív	×	aRa
szig. antiszimmetrikus	×	aRa	tranzitív		
dichotóm	×	$\neg(cRc)$	trichotóm		

Relációk tulajdonságai, példa

Legyen R a következő reláció:

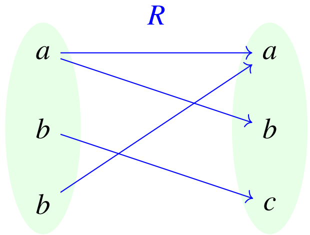


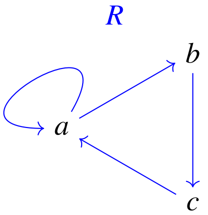


szimmetrikus	×	aRb, $\neg(bRa)$	reflexív	×	$\neg(bRb)$
antiszimmetrikus	✓		irreflexív	×	aRa
szig. antiszimmetrikus	×	aRa	tranzitív	×	$aRb, bRc, \neg(aRc)$
dichotóm	×	$\neg(cRc)$	trichotóm		

Relációk tulajdonságai, példa

Legyen R a következő reláció:





szimmetrikus	$\times$	$aRb,\ \neg(bRa)$	reflexív	$\times$	$\neg(bRb)$
antiszimmetrikus	$\checkmark$		irreflexív	$\times$	aRa
szig. antiszimmetrikus	$\times$	aRa	tranzitív	$\times$	$aRb, bRc, \neg(aRc)$
dichotóm	$\times$	$\neg(cRc)$	trichotóm	$\times$	aRa

Relációk tulajdonságai, összefoglalás.

Legyen R egy reláció X-en, azaz $R \subset X \times X$.

- R reláció szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$ (Példa: $=, K$)
- R reláció antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ (Példa: $=, \leq, \subset$)
- R reláció szigorúan antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow \neg(yRx)$ (Példa: $<$)
- R reláció reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$ (Példa: $=, \leq, \subset, |, K$)
- R reláció irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg(xRx)$ (Példa: $<$)
- R reláció tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ (Példa: $=, \leq, \subset, |$)
- R reláció dichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $xRy \vee yRx$ (megengedő ,,vagy”!)
  (Példa: $\leq$)
- R reláció trichotóm,
  ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül (Példa: $<$)

Speciális relációk

Ekvivalencia reláció, osztályozás 1

Halmaz elemeit csoportosítjuk, a csoporton belül az elemeket azonosnak tekintjük

Ekvivalencia reláció, osztályozás 1

Halmaz elemeit csoportosítjuk, a csoporton belül az elemeket azonosnak tekintjük

Példa

Ekvivalencia reláció, osztályozás 1

Halmaz elemeit csoportosítjuk, a csoporton belül az elemeket azonosnak tekintjük

Példa

- egyetemi hallgatók osztályozása évfolyam szerint

Ekvivalencia reláció, osztályozás 1

Halmaz elemeit csoportosítjuk, a csoporton belül az elemeket azonosnak tekintjük

Példa

- egyetemi hallgatók osztályozása évfolyam szerint
- cég dolgozói osztályozása beosztás szerint

Ekvivalencia reláció, osztályozás 1

Halmaz elemeit csoportosítjuk, a csoporton belül az elemeket azonosnak tekintjük

Példa

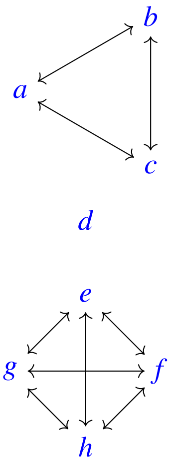
- egyetemi hallgatók osztályozása évfolyam szerint
- cég dolgozói osztályozása beosztás szerint
- sík egyeneseit irányonként osztályozzuk

Ekvivalencia reláció, osztályozás 1

Halmaz elemeit csoportosítjuk, a csoporton belül az elemeket azonosnak tekintjük

Példa

- egyetemi hallgatók osztályozása évfolyam szerint
- cég dolgozói osztályozása beosztás szerint
- sík egyeneseit irányonként osztályozzuk



R reláció hurokélek nélkül

Ekvivalencia reláció, osztályozás 1

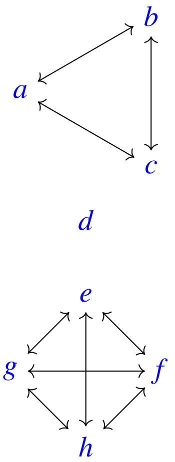
Halmaz elemeit csoportosítjuk, a csoporton belül az elemeket azonosnak tekintjük

Példa

- egyetemi hallgatók osztályozása évfolyam szerint
- cég dolgozói osztályozása beosztás szerint
- sík egyeneseit irányonként osztályozzuk

Definíció

Egy R reláció ekvivalencia reláció, ha
reflexív; tranzitív és szimmetrikus.



R reláció hurokélek nélkül

Ekvivalencia reláció, osztályozás 1

Halmaz elemeit csoportosítjuk, a csoporton belül az elemeket azonosnak tekintjük

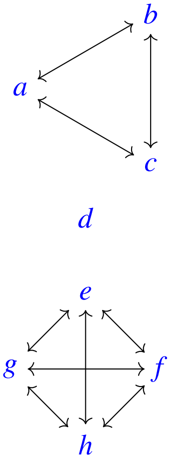
Példa

- egyetemi hallgatók osztályozása évfolyam szerint
- cég dolgozói osztályozása beosztás szerint
- sík egyeneseit irányonként osztályozzuk

Definíció

Egy R reláció ekvivalencia reláció, ha
reflexív; tranzitív és szimmetrikus.

Példa



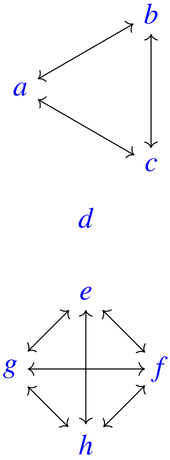
R reláció hurokélek nélkül

Ekvivalencia reláció, osztályozás 1

Halmaz elemeit csoportosítjuk, a csoporton belül az elemeket azonosnak tekintjük

Példa

- egyetemi hallgatók osztályozása évfolyam szerint
- cég dolgozói osztályozása beosztás szerint
- sík egyeneseit irányonként osztályozzuk



R reláció hurokélek nélkül

Definíció

Egy R reláció ekvivalencia reláció, ha
reflexív; tranzitív és szimmetrikus.

Példa

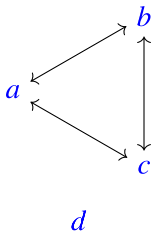
- $H_1 \sim H_2$, ha H_1 és H_2 évfolyamtársak

Ekvivalencia reláció, osztályozás 1

Halmaz elemeit csoportosítjuk, a csoporton belül az elemeket azonosnak tekintjük

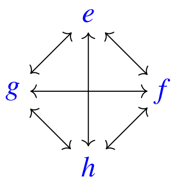
Példa

- egyetemi hallgatók osztályozása évfolyam szerint
- cég dolgozói osztályozása beosztás szerint
- sík egyeneseit irányonként osztályozzuk



Definíció

Egy R reláció ekvivalencia reláció, ha
reflexív; tranzitív és szimmetrikus.



Példa

- $H_1 \sim H_2$, ha H_1 és H_2 évfolyamtársak
- $M_1 \sim M_2$, ha M_1 és M_2 beosztása megegyezik

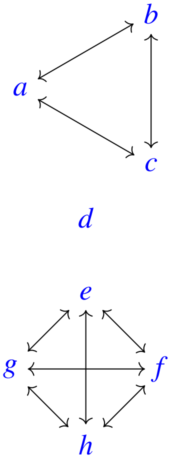
R reláció hurokélek nélkül

Ekvivalencia reláció, osztályozás 1

Halmaz elemeit csoportosítjuk, a csoporton belül az elemeket azonosnak tekintjük

Példa

- egyetemi hallgatók osztályozása évfolyam szerint
- cég dolgozói osztályozása beosztás szerint
- sík egyeneseit irányonként osztályozzuk



R reláció hurokélek nélkül

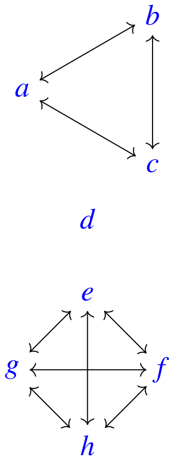
Definíció

Egy R reláció ekvivalencia reláció, ha
reflexív; tranzitív és szimmetrikus.

Példa

- $H_1 \sim H_2$, ha H_1 és H_2 évfolyamtársak
- $M_1 \sim M_2$, ha M_1 és M_2 beosztása megegyezik
- $\ell_1 \sim \ell_2$, ha ℓ_1 és ℓ_2 párhuzamosak

Ekvivalencia reláció, osztályozás 2



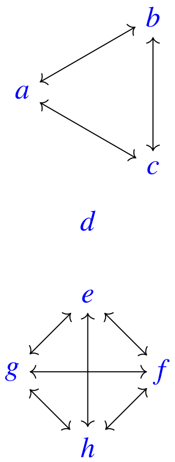
R reláció hurokélek nélkül

Ekvivalencia reláció, osztályozás 2

Definíció

Egy X halmaz részhalmazainak $\mathcal{O}$ rendszerét **osztályozásnak** nevezzük, ha

- $\mathcal{O}$ elemei páronként diszjunkt nemüres halmazok;
- $\cup\mathcal{O} = X$.



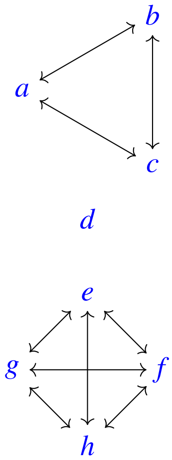
R reláció hurokélek nélkül

Ekvivalencia reláció, osztályozás 2

Definíció

Egy X halmaz részhalmazainak $\mathcal{O}$ rendszerét **osztályozásnak** nevezzük, ha

- $\mathcal{O}$ elemei páronként diszjunkt nemüres halmazok;
- $\cup\mathcal{O} = X$.



R reláció hurokélek nélkül

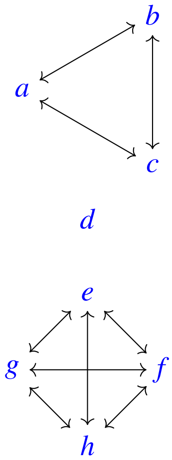
Ekvivalencia reláció, osztályozás 2

Definíció

Egy X halmaz részhalmazainak $\mathcal{O}$ rendszerét osztályozásnak nevezzük, ha

- $\mathcal{O}$ elemei páronként diszjunkt nemüres halmazok;
- $\cup\mathcal{O} = X$.

Példa



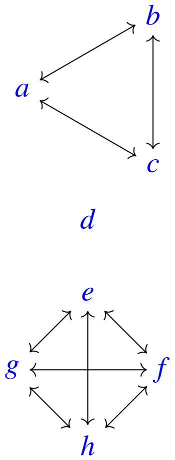
R reláció hurokélek nélkül

Ekvivalencia reláció, osztályozás 2

Definíció

Egy X halmaz részhalmazainak $\mathcal{O}$ rendszerét **osztályozásnak** nevezzük, ha

- $\mathcal{O}$ elemei páronként diszjunkt nemüres halmazok;
- $\cup\mathcal{O} = X$.



R reláció hurokélek nélkül

Példa

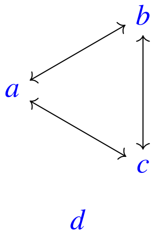
- hallgatók:
  $\{$1. évf. hallgatók$,$ 2. évf. hallgatók$,$ 3. évf. hallgatók$\}$

Ekvivalencia reláció, osztályozás 2

Definíció

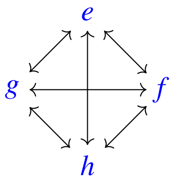
Egy X halmaz részhalmazainak $\mathcal{O}$ rendszerét osztályozásnak nevezzük, ha

- $\mathcal{O}$ elemei páronként diszjunkt nemüres halmazok;
- $\cup\mathcal{O} = X$.



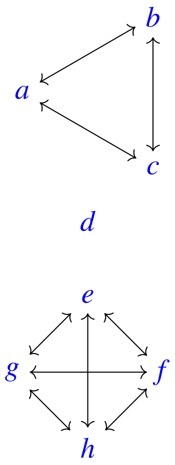
Példa

- hallgatók: $\{$1. évf. hallgatók, 2. évf. hallgatók, 3. évf. hallgatók$\}$
- dolgozók: $\{$fejlesztők, marketing, tesztelők, HR, $\dots\}$



R reláció hurokélek nélkül

Ekvivalencia reláció, osztályozás 2



R reláció hurokélek nélkül

Definíció

Egy X halmaz részhalmazainak $\mathcal{O}$ rendszerét osztályozásnak nevezzük, ha

- $\mathcal{O}$ elemei páronként diszjunkt nemüres halmazok;
- $\cup\mathcal{O} = X$.

Példa

- hallgatók:
  $\{$1. évf. hallgatók$,$ 2. évf. hallgatók$,$ 3. évf. hallgatók$\}$
- dolgozók: $\{$fejlesztők$,$ marketing$,$ tesztelők$,$ HR$, \ldots\}$
- egyenesek lehetséges irányai

Ekvivalencia reláció és osztályozás 3

Definíció

Legyen $\sim$ egy ekvivalencia reláció az X halmazon. Tetszőleges $x \in X$ esetén legyen
$$\tilde{x} = [x] = \{y \in X : y \sim x\}$$
az x **ekvivalencia osztályának** nevezzük.

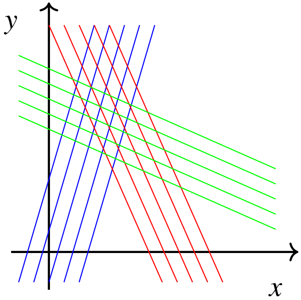
Ekvivalencia reláció és osztályozás 3

Definíció

Legyen $\sim$ egy ekvivalencia reláció az X halmazon. Tetszőleges $x \in X$ esetén legyen

$$\tilde{x} = [x] = \{y \in X : y \sim x\}$$

az x ekvivalencia osztályának nevezzük.



Példa

- $\{[\ell] : \ell$ a sík egyenese$\}$ az irányok halmaza.

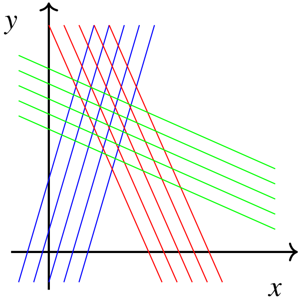
Ekvivalencia reláció és osztályozás 3

Definíció

Legyen $\sim$ egy ekvivalencia reláció az X halmazon. Tetszőleges $x \in X$ esetén legyen

$$\tilde{x} = [x] = \{y \in X : y \sim x\}$$

az x **ekvivalencia osztályának** nevezzük.



Példa

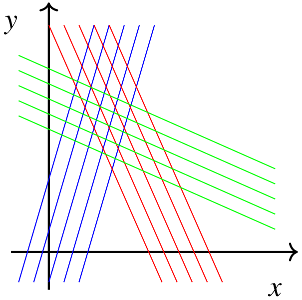
- $\{[\ell] : \ell$ a sík egyenese$\}$ az **irányok** halmaza.

Tétel

Ekvivalencia reláció és osztályozás 3

Definíció

Legyen $\sim$ egy ekvivalencia reláció az X halmazon. Tetszőleges $x \in X$ esetén legyen
$$\tilde{x} = [x] = \{y \in X : y \sim x\}$$
az x ekvivalencia osztályának nevezzük.



Példa

- $\{[\ell] : \ell$ a sík egyenese$\}$ az irányok halmaza.

Tétel

- Egy X halmazon értelmezett $\sim$ ekvivalencia reláció esetén $\{[x] : x \in X\}$ egy osztályozás.

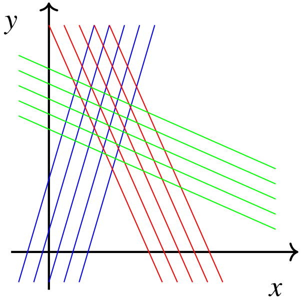
Ekvivalencia reláció és osztályozás 3

Definíció

Legyen $\sim$ egy ekvivalencia reláció az X halmazon. Tetszőleges $x \in X$ esetén legyen

$$\tilde{x} = [x] = \{y \in X : y \sim x\}$$

az x **ekvivalencia osztályának** nevezzük.



Példa

- $\{[\ell] : \ell$ a sík egyenese$\}$ az irányok halmaza.

Tétel

- Egy X halmazon értelmezett $\sim$ ekvivalencia reláció esetén $\{[x] : x \in X\}$ egy **osztályozás**.
- Tekintsük egy X halmaz $\mathcal{O}$ osztályozását. Ekkor az
  $$R = \{(x, y) : \ x \text{ és } y \text{ ugyanazon } \mathcal{O} \text{ osztályban vannak}\}$$
  egy **ekvivalencia reláció**.

Ekvivalencia reláció $\Rightarrow$ osztályozás

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{O} = \{[x] : x \in X\}$ ahol $[x] = \{y \in X : y \sim x\}$

- 1. feltétel: $\cup\mathcal{O} = X$.
  Mivel $\sim$ reflexív $\Rightarrow$ $x \in [x]$ $\Rightarrow$ $\cup\{[x] : x \in X\} = X$.

- 2. feltétel: $\cup\mathcal{O}$ elemei páronként diszjunktak.
  - Tegyük fel hogy $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Megmutatjuk, hogy $[x] = [y]$.
  - Legyen $z \in [x] \cap [y]$. Akkor (definíció szerint) $z \sim x$ és $z \sim y$.
  - Mivel $\sim$ szimmetrikus $\Rightarrow$ $x \sim z$.
  - Mivel $\sim$ tranzitív, ezért $x \sim z$ és $z \sim y$ $\Rightarrow$ $x \sim y$, azaz $x \in [y]$.
  - Ha $x' \in [x]$, akkor $x' \sim x$ és a tranzitivitás miatt $\Rightarrow$ $x' \sim y$, azaz $x' \in [y]$.
  - Tehát $[x] \subset [y]$.
  - x és y szerepének felcserélésével $[y] \subset [x]$, azaz $[x] = [y]$.

Ekvivalencia reláció $\Leftarrow$ osztályozás

Bizonyítás. Legyen $R = \{(x, y) : \ x \text{ és } y \text{ ugyanazon } \mathcal{O} \text{ osztályban vannak}\}$

- reflexivitás: Minden x ugyanabban az osztályban van, mint saját maga: xRx. Továbbá, mivel $\cup\mathcal{O} = X$, így minden x benne van valamely osztályban.
- szimmetrikusság: ha xRy, akkor x és y ugyanabban az osztályban vannak, speciálisan yRx.
- tranzitivitás Ha xRy és yRz, akkor mind x és y, mind y és z ugyanabban az osztályban vannak, speciálisan x és z is ugyanabban az osztályán vannak, azaz xRz.

$\square$

Példák

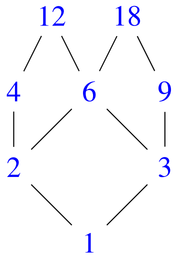
alaphalmaz	**reláció**	**osztályozás**
$\mathbb{R}$	$=$	$\{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$, 'azonosság'
$\mathbb{R}$	$\lvert x\rvert = \lvert y\rvert$	$\{\{\pm x\} : x \in \mathbb{R}\}$, 'abszolút érték'
sík egyenesei	párhuzamosság	irányok
sík szakaszai	hossz	egybevágóság

Részebenrendezés

Szeretnénk a $\leq$, $\subset$, $|$ (osztója) relációkat általánosítani.

Definíció

- Egy R reláció részbenrendezés, ha reflexív; tranzitív és antiszimmetrikus.
- Ha valamely $x, y \in X$ párra $x \preceq y$ vagy $y \preceq x$, akkor x és y összehasonlítható.
- Ha minden (x, y) pár összehasonlítható (azaz $\preceq$ dichotóm), akkor $\preceq$ rendezés.



oszthatósági reláció.

$(\leq, \mathbb{R})$

Példa

- $(\mathbb{N}, |)$, $(2^X, \subset)$, $(\mathbb{R}^5$ alterei, altér reláció$)$: részbenrendezés
- $(\leq, \mathbb{R})$: rendezés

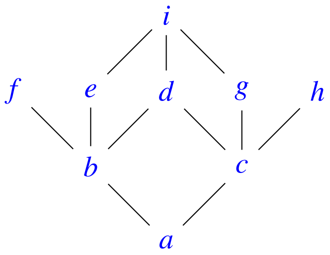
Részbenrendezés, speciális elemek

Legyen $\preceq$ egy részbenrendezés az X halmazon.

- legkisebb elem: $x \in X : \forall y \in X \; x \preceq y$
- legnagyobb elem: $x \in X : \forall y \in X \; y \preceq x$
- minimális elem: $x \in X : \neg\exists y \in X \; y \preceq x$
- maximális elem: $x \in X : \neg\exists y \in X \; x \preceq y$

Példa

- legkisebb elem: a
- legnagyobb elem: nincs
- minimális elem: a
- maximális elem: f, i, h



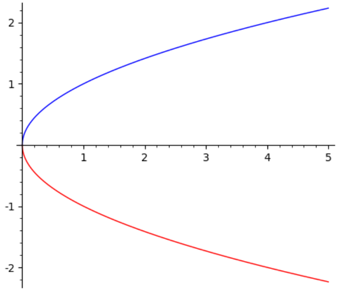
Függvények

Definíció

Legyen $f \subset X \times Y$ egy (binér) reláció. Ha egyelemű halmaz képe legfeljebb egyelemű, azaz

$$xfy \wedge xfz \Rightarrow y = z,$$

akkor az f-et függvénynek hívjuk.
Speciálisan az xfy helyett a $f(x) = y$ használjuk.



Példa

- $(x^2, x) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nem függvény
- $(x, \sqrt{x}) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ és $(x, -\sqrt{x}) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ függvények.
- Legyen $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Ekkor $\{(\mathbf{v}, M\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2\}$ egy függvény.
- Legyen $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Ekkor $\{(M\mathbf{v}, \mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2\}$ függvény $\Longleftrightarrow \det M \neq 0$.
- Legyen $R \subset X \times Y$ egy reláció.
  Ekkor $\{(A, R(A)) : A \subset X\} \subset 2^X \times 2^Y$ egy függvény.