Diszkrét matematika 1.

3. előadás

Fancsali Szabolcs (Ligeti Péter diái alapján)

nudniq@cs.elte.hu
www.cs.elte.hu/∼nudniq

Természetes számok

Számfogalom bővítése

Természetes számokból művelet segítségével definiálható

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- egész számok $\mathbb{Z} = \{a - b : a, b \in \mathbb{N}\}$
- racionális számok $\mathbb{Q} = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$
- valós számok $\mathbb{R} = ?$
- komplex számok $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

Peano-axiómák

Legyen $\mathbb{N}$ halmaz, $^+$ unér művelet (rákövetkező). Ekkor

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^+ \in \mathbb{N}$
3. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^+ \neq 0$
4. $\forall n, m \in \mathbb{N} : n^+ = m^+ \Rightarrow n = m$
5. $(S \subset \mathbb{N}, 0 \in S, (n \in S \Rightarrow n^+ \in S) \Rightarrow S = \mathbb{N})$

Természetes számok

Megjegyzés

- *az axiómák egyértelműen definiálják $\mathbb{N}$-et*
- $\mathbb{N}$*-en definiálható az* ***összeadás****:*
  $n + 0 = n, n + 1 := n^+, n + 2 := (n^+)^+, \ldots$

Állítás

Legyen + a fent definiált művelet. Ekkor

- *+ asszociatív és kommutatív az $\mathbb{N}$ halmazon*
- $\forall n \in \mathbb{N} : 0 + n = n + 0 = n$ *(van nullelem/semleges elem)*

Természetes számok

Megjegyzés

$\mathbb{N}$-*en definiálható a szorzás:* $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$n \cdot m := \underbrace{m + m + \cdots + m}_{n \text{ darab}}$

Állítás

Legyen $\cdot$ *a fent definiált művelet. Ekkor*

- $\cdot$ *asszociatív és kommutatív az* $\mathbb{N}$ *halmazon*
- $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \cdot n = n \cdot 1 = n$ *(van egységelem/semleges elem)*

Egész számok

Definíció

Legyen G *halmaz,* $*$ *binér művelet* G*-n. Ekkor a* $(G, *)$ *rendezett pár*

1. *grupoid*
2. *ha* $*$ *asszociatív is* G*-n, akkor félcsoport*
3. *ha ezen felül* $\exists s \in G : \forall g \in G : s * g = g * s = g$*, akkor semleges elemes félcsoport és* s *a semleges elem*
4. *ha ezen felül* $\forall g \in G \exists g^{-1} \in G : g * g^{-1} = g^{-1} * g = s$*, akkor csoport és* g^{-1} *a* g *inverze*
5. *ha* $*$ *kommutatív is* G*-n, akkor Abel-csoport*

Állítás

$(\mathbb{Z}, +)$ *a legszűkebb olyan Abel-csoport, ami tartalmazza* $\mathbb{N}$*-et.*

Egész számok

$\mathbb{Z}$-n is definiálható a szorzás:

- ha $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$: $n \cdot m := \underbrace{m + m + \cdots + m}_{n \text{ darab}}$
- ha $n \notin \mathbb{N}$: $n \cdot m = -((-n) \cdot m)$

Állítás

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ *kommutatív semlegeselemes félcsoport.*

Állítás

$\mathbb{Z}$-n *a* $\cdot$ *az* $+$*-ra nézve mindkét oldalról disztributív:*
$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ és $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

Racionális számok

Definíció

Az $(R, \oplus, \odot)$ *gyűrű, ha*

1. $(R, \oplus)$ *Abel-csoport*
2. $(R, \odot)$ *félcsoport*
3. *az* $\odot$ *a* $\oplus$ *műveletre nézve mindkét oldalról disztributív*

Definíció

Legyen $(R, \oplus, \odot)$ *gyűrű, és* $0 \in R$ *legyen a* $\oplus$ *semleges eleme. Ekkor, ha* $(R \setminus \{0\}, \odot)$ *Abel-csoport, akkor* $(R, \oplus, \odot)$ *test.*

Állítás

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *a legszűkebb olyan test, ami tartalmazza* $\mathbb{N}$*-et.*

Valós számok

$\mathbb{Z}$-n is definiálható a rendezés:

- $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ esetén legyen $0 < n$
- legyen $n < m$, ha $0 < m - n$

Állítás

Ha $a, b, c \in \mathbb{Z}$, akkor

- $0 < a \cdot b \Rightarrow 0 < a \cdot b$
- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

Definíció

Egy $(R, *, \diamond)$ test rendezett test, ha definiálható R-en rendezés a fenti két tulajdonsággal.

Valós számok definíciója

Legyen $\mathbb{R}$ az $\mathbb{N}$-et tartalmazó legszűkebb felső határ tulajdonságú rendezett test.

Komplex számok – definíció(k)

Definíció 1

Legyen $\mathbb{C} = \{a + b \cdot i : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$. Ekkor $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ a komplex számok, a szokásos $\mathbb{R}$-beli $+$ és $\cdot$ műveletekkel.

Definíció 2

$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ a komplex számok, ha

- $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$
- $(a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$

ahol $+$ és $\cdot$ a szokásos $\mathbb{R}$-beli műveletek.

Megjegyzés

- *a két definíció ugyanazt a struktúrát adja*
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *test*

Síkbeli ábrázolás – a Gauss-sík

Emlékeztető

- $z \in \mathbb{C}$ algebrai alakja: $z = a + b \cdot i$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$
- valós rész: $Re(z) = a$, képzetes rész: $Im(z) = b$
- konjugált: $\overline{z} = a - b \cdot i$

Gauss-sík

- $z = a + b \cdot i \longleftrightarrow$ a sík egy pontja
- x tengely $\longleftrightarrow$ valós rész
- y tengely $\longleftrightarrow$ képzetes rész

Definíció

- *abszolútérték:* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $z \neq 0$ *argumentuma: az x tengely pozitív részével bezárt $\varphi \in [0, 2\pi)$ szög*