1. Rész - sorozatok határértéke és tulajdonságaik

1.1. Sorozatok határértéke

1.1.1. polinom típus

DTK

1.1.2. gyökös típus

gyök alá limest vinni
konjugálttal szorzás
gyöktelenítés
$x_n \to \alpha \Rightarrow \sqrt{x_n} \to \sqrt{\alpha}$

1.1.3. geometriai sorozat és társai

$q^n \to 0$ ha $|q| < 1$
$n^K \cdot q^n \to 0$ ha $|q| < 1$ és $K \in \mathbb{N}$

1.1.4. n-edik gyök típus

$\sqrt[n]{n} \to 1$
$\forall a > 0 : \sqrt[n]{a} \to 1$
$\sqrt[n]{x_n} \to 1$ ha $x_n \to (0, +\infty)$

1.1.5. euler sorozatok és társai

$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x$

1.1.6. rekurzív sorozatok

L1: TFH a_n konvergens, $\lim(a_n) = \lim(a_{n+1}) = A$
A kiszámítása
L2: Monotonítás
L3: Korlátosság
L4: Eredmény felírása

2. Rész - sorok és függvények konvergenciája, határértéke, folytonossága

2.1. Sorok konvergenciája

2.1.1. szükséges feltétel

ha a sorozat határértéke nem 0, akkor a sor divergens
ha a sorozat határértéke 0, akkor a sor lehet konvergens, vagy divergens is

2.1.2. összehasonlító kritérium

majoráns: ha $0 \leq a_n \leq b_n$ és $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens
minoráns: ha $0 \leq a_n \leq b_n$ és $\sum b_n$ divergens, akkor $\sum a_n$ is divergens
itt vissza kell vezetni nevezetes sorokra

2.1.3. nevezetes sorok

- geometriai sor
  $\sum q^n$ konvergens $\frac{1}{1-q}$-hoz, ha $|q| < 1$

- hiperharmonikus sor
  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ konvergens, ha $\alpha > 1$

- teleszkópikus sor
  $\sum \frac{1}{n\cdot(n+1)}$ konvergens 1-hez

2.1.4. gyökkritérium

$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = A$
$A < 1$ esetén konvergens, $A > 1$ esetén divergens, $A = 1$ esetén nem következtethető

2.1.5. hányadoskritérium

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = A$$

$A < 1$ esetén konvergens, $A > 1$ esetén divergens, $A = 1$ esetén nem következtethető

2.1.6. leibniz sorok konvergenciája

$(-1)^n \cdot a_n$ akkor konvergens, ha a_n monoton csökkenő és $\lim a_n = 0$

2.2. Hatványsorok, konvergenciasugaruk, konvergenciahalmazuk

hatványsor: $\sum\limits_{n=0} \alpha_n \cdot (x-a)^n$
$\exists 0 < R < +\infty$ esetén $|x-a| < R$-en konvergens, $|x-a| > R$-en divergens
$R = 0$ esetén csak $x = a$ pontban konvergens
$R = +\infty$ esetén $\forall x$-re konvergens

2.2.1. konvergenciasugár

A cauchy-hadamard tételllel kiszámítható:
$A = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|}$ vagy $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|$
ahol $R = \frac{1}{A}$
és $\frac{1}{0}$ esetén $R = +\infty$, $\frac{1}{+\infty}$ esetén $R = 0$

2.2.2. konvergenciahalmaz

$$KH\left(\sum_{n=0} \alpha_n \cdot (x-a)^n\right) := \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \sum_{n=0} \alpha_n \cdot (x-a)^n \text{ számsor konvergens}\right\}$$

Biztosan tudjuk a konvergenciahalmaz belsejét, a $(a-R, a+R)$ intervallumot.
A konvergenciahalmaz határpontjairól bizonyítanunk kell, hogy konvergensek vagy divergensek.

2.3. Függvények határértéke

2.3.1. polinom/polinom típus

behelyettesítés, ha kritikus határérték, akkor DTK

2.3.2. gyökös típus

$\lim\limits_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

2.3.3. trigonometrikus típus

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
$(\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ \sin 2x = 2\sin x\cos x,\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x)$

2.3.4. exponenciális típus

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

2.4. Függvények folytonossága, szakadási helyek

2.4.1. folytonosság

részfüggvényeket vizsgálni, hogy minden pontban értelmezve vannak-e
függvények közötti váltópontokat vizsgálni, hogy a pontba balról vagy jobból érkező függvény határértéke megegyezik-e a pont értékével

2.4.2. szakadási helyek

- megszüntethető szakadási hely: $\lim_{x \to a} f(x)$ létezik, de $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ (csak egy pont van „kivágva" a függvényből)
- ugrásszakadási (elsőfajú szakadási) hely: $A := \lim_{x \to a-0} f(x) \neq \lim_{x \to a+0} f(x) =: B$ és $A, B \in \mathbb{R}$
- másodfajú szakadási hely: minden más esetben, amikor a függvény nem folytonos