Diszkrét matematika 1.

4. előadás

Fancsali Szabolcs (Ligeti Péter diái alapján)

nudniq@cs.elte.hu
www.cs.elte.hu/∼nudniq

Trigonometrikus alak

Definíció

$z \in \mathbb{C}$ *trigonometrikus alakja:* $z = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

Moivre azonosságok

Legyenek $z = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi), w = |w|(\cos\psi + i \cdot \sin\psi) \neq 0.$

Ekkor igazak az alábbiak

- $z \cdot w = |z| \cdot |w|(\cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi))$
- $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi - \psi) + i \cdot \sin(\varphi - \psi))$
- $z^n = |z|^n(\cos n \cdot \varphi + i \cdot \sin n \cdot \varphi)$

Geometriai jelentés

Egy z komplex számmal való szorzásnak a Gauss síkon egy forgatva-nyújtás felel meg. (φ-vel forgatás és $|z|$-vel nyújtás)

Gyökvonás komplex számokból

Tétel

Legyen $z = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) \neq 0, n \in \mathbb{N}^+$. *Ekkor a* z*-nek* n *darab különböző* n*-edik gyöke van, azon* w_k*-k, amikre* $w_k^n = z$ *:*

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right),$$

ahol $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Komplex egységgyökök

Definíció

Az $\varepsilon^n = 1$ egyenlet megoldásait n-edik egységgyökÖknek nevezzük

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k^{(n)} = \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}\right),$$

ahol $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Tétel

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^+$ és $w \in \mathbb{C}$, amire $w^n = z$. Ekkor z n-edik gyökei az alábbi alakban írhatók fel:

$$w\varepsilon_k : k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Komplex számok rendje

Definíció

Egy z komplex szám különböző (egész kitevőjű) hatványainak számát a z rendjének nevezzük, jele $o(z)$.

Tétel

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Ekkor, ha z nem egységgyök, akkor bármely két egész kitevős hatványa különbözik, vagyis $o(z) = \infty$.

Tétel

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ egységgyök, valamint $d \in \mathbb{N}^+$ a legkisebb, amire $z^d = 1$. Ekkor $o(z) = d$ és z hatványai $o(z)$ szerint periodikusan ismétlődnek.

Komplex egységgyökök 2

Definíció

Egy $z \in \mathbb{C}$ $n-$edik egységgyököt primitív n-edik egységgyöknek nevezünk, ha $o(z) = n$.

Állítás

Legyen $z \in \mathbb{C}$ egy n-nedik egységgyök. Ekkor z primitív n-edik egységgyök pontosan akkor, ha minden $w \in \mathbb{C}$ n-edik egységgyök előáll z pozitív egész kitevőjű hatványaként.

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{2k\pi}{n}$ egy n-edik egységgyök. Ekkor ε_k primitív n-edik egységgyök pontosan akkor, ha n és k relatív prímek.

Gyökvonás komplex számokból

Tétel

Legyen $z = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) \neq 0, n \in \mathbb{N}^+$. *Ekkor a* z*-nek* n *darab különböző* n*-edik gyöke van, azon* w_k*-k, amikre* $w_k^n = z$ *:*

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right),$$

ahol $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Komplex egységgyökök

Definíció

Az $\varepsilon^n = 1$ egyenlet megoldásait n-edik egységgyökököknek nevezzük

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k^{(n)} = \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}\right),$$

ahol $k = 0, 1, \ldots, n-1.$

Tétel

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^+$ *és* $w \in \mathbb{C}$, *amire* $w^n = z$. *Ekkor* z n*-edik gyökei az alábbi alakban írhatók fel:*

$$w\varepsilon_k : k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Komplex számok rendje

Definíció

Egy z komplex szám különböző (egész kitevőjű) hatványainak számát a z rendjének nevezzük, jele $o(z)$.

Tétel

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Ekkor, ha z nem egységgyök, akkor bármely két egész kitevős hatványa különbözik, vagyis $o(z) = \infty$.

Tétel

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ egységgyök, valamint $d \in \mathbb{N}^+$ a legkisebb, amire $z^d = 1$. Ekkor $o(z) = d$ és z hatványai $o(z)$ szerint periodikusan ismétlődnek.

Primitív egységgyökök

Definíció

Egy $z \in \mathbb{C}$ $n-$edik egységgyököt primitív n-edik egységgyöknek nevezünk, ha $o(z) = n$.

Állítás

Legyen $z \in \mathbb{C}$ egy n-edik egységgyök. Ekkor z primitív n-edik egységgyök pontosan akkor, ha minden $w \in \mathbb{C}$ n-edik egységgyök előáll z pozitív egész kitevőjű hatványaként.

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{2k\pi}{n}$ egy n-edik egységgyök. Ekkor ε_k primitív n-edik egységgyök pontosan akkor, ha n és k relatív prímek.

Exponenciális alak

Állítás (NemBiz)

$\forall z \in \mathbb{C}$-re az alábbi sorok konvergensek:

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Következmény

$\forall z \in \mathbb{C} : e^{iz} = \cos z + i \sin z$, *speciálisan* $\forall \varphi \in \mathbb{R} : e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

Definíció

$\forall z \in \mathbb{C}$ *komplex szám a* $z = r \cdot e^{i\varphi}$ *exponenciális alakba írható, ahol* $r = |z|, \varphi = arg(z)$.

Kvaterniók

Definíció 1

Legyen
$\mathbb{H} = \{a+b\cdot i+c\cdot j+d\cdot k : a,b,c,d \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$.
Ekkor $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ a kvaterniók, a szokásos $\mathbb{C}$-beli $+$ és $\cdot$ műveletekkel.

Definíció 2

$(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, \oplus, \odot)$ a kvaterniók, ha

- $(z,w) \oplus (z',w') = (z+z', w+w')$
- $(z,w) \odot (z',w') = (z\cdot z' - \overline{w'}\cdot w, w'\cdot z + w\cdot \overline{z'})$

ahol $+$ és $\cdot$ a szokásos $\mathbb{C}$-beli műveletek.

Megjegyzés

- *a 2 def ugyanazt a struktúrát adja*
- $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ *„majdnem” test (nem komm)*

Kvaterniók

Definíció

Legyen $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ a kvaterniók, ahol
$\mathbb{H} = \{a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k : a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$.

Megjegyzés

- *... és tovább ... oktávok:* $(\mathbb{H} \times \mathbb{H}), \oplus, \odot)$*, ahol* $\odot$ *és* $\oplus$ *...*
- *kapcsolat a térbeli forgatásokkal*

Alkalmazások

- robotika
- CAD programok
- négynégyzetszám-tétel
  $(\forall n \in \mathbb{N} \exists a, b, c, d \in \mathbb{N} : n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$