

Matematikai Versenyfeladatok - Beadandó házi feladatok

1) Adott egy $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat, amely kielégíti az alábbi feltételeket:

- $\forall n \in \mathbb{N} : x_n > 1$;
- $\frac{1}{2} \left(x_{n+1} - \frac{1}{x_{n+1}} \right) = \frac{x_n + 1}{x_n - 1} \quad (n \in \mathbb{N})$.

Vizsgáljuk meg (x_n) -et konvergencia szempontjából és számítsuk ki a határértékét, amikor létezik.

2) Számítsuk ki az alábbi határértéket:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1 + k \cdot ((n-k)! + 1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!}.$$

3) Számítsuk ki aza alábbi sorösszeget:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{k^2 - k + 1}.$$

4) Határozzuk meg, hogy az alábbi egyváltozós függvény értelmezési tartományának mely pontjában veszi fel a legkisebb értékét. Mekkora ez az érték?

$$f(x) = \frac{9}{4\pi^2} x^2 + \frac{3}{\pi} x \cos x - \sin^2 x - 1.$$

5) Adjuk meg azon pontok ordinátáinak halmazát, amelyekben az $f(x) = \cos(2 \ln x)$ függvény grafikonjának zérushelyei és szélsőértékhelyei által adott pontjaiba húzott érintők az y -tengelyt metszik. Vázzuk a függvényt és a szóban forgó egyeneseket, metszéspontokat. Mit mondhatunk általában, ha a 2 helyett más valós számot szerepeltetünk a hozzárendelési szabályban?

6) a) Jelölje $f(n)$ egy adott n pozitív egész számra az $\{1, \dots, n\}$ halmaz olyan részhalmazainak számát, amelyek nem tartalmaznak szomszédos egész számokat. Például $f(1) = 2$ és $f(3) = 5$ (utóbbi esetén az 5 részhalmaz: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}$). Keressünk rekurzív összefüggést az f sorozat elemeire, adjuk meg explicit alakban a sorozat n -edik elemét!

b) Jelölje $f(n, k)$ adott n pozitív egész és k természetes számra az $\{1, \dots, n\}$ halmaz olyan k -elemű részhalmazainak számát, amelyek nem tartalmaznak szomszédos egész számokat. Adjunk rekurzív összefüggést $f(n, k)$ -ra és határozzuk meg a pontos értékét egy megfelelő generátorfüggvény segítségével (tipp: célszerű a rögzített k -ra vonatkozó, n -szerinti GF-et használni!).

c) Milyen kombinatorikus azonosság adódik az a) és b) részek eredményeinek kombinálásával?