

Második ZH**2024. december 17.****MINTA-feladatsor**

Minden megoldást indoklással kell alátámasztani. Az előadáson és a gyakorlaton elhangzott állításokra szabad hivatkozni azok pontos megfogalmazása után, másra nem. (A tanult módszerek következetes alkalmazása elég indoklás.) Saját magad ellenőrzésére legfeljebb kétsoros kijelzőjű, nem programozható számológép használható, de minden részletszámításnak, ahogy órán tanultuk, szerepelnie kell a beadott lapokon. Más segédeszköz nem használható. Minden feladat megoldása 10 pontot ér. Egy lapra több feladat megoldása is írható. Felhasználható idő: 100 perc.

1. feladat (5+5 pont)

(a) Számítsuk ki az alábbi polinomok legnagyobb közös osztóját \mathbb{Z}_2 felett (modulo 2):

$$f(x) = x^5 + x^4 + x^2 + x, \quad g(x) = x^5 + x$$

(b) Adjuk meg az alábbi $f, g \in \mathbb{C}[x]$ polinomok legnagyobb közös osztóját:

$$f(x) = (x-1)^2 \cdot (x-i) \cdot (x+1)^3 \cdot (x+i) \cdot (x-2)^2$$

$$g(x) = (x-1) \cdot (x-i)^3 \cdot (x+1)^2 \cdot (x+i)^2 \cdot (x-2)^3$$

2. feladat (10 pont)

Tekintsük az $f = x^{39} + x^{26} + x^{13} + x^2 + 11x + 11 \in \mathbb{Z}_{13}[x]$ polinomot. Adjuk meg az f polinom összes többszörös gyökét (modulo 13)!

3. feladat (5+5 pont)

(a) Hogyan kell megválasztani a P és Q komplex számokat, hogy az $f(x) = x^4 + x^2 + Px + Q$ polinom \mathbb{C} fölött (maradék nélkül) osztható legyen a $g(x) = x^2 + 2x + 1$ polinommal?

(b) Adj meg egy olyan $f(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ polinomot, ami legfeljebb harmadfokú, és egyszerre teljesíti a következő feltételeket: $f(1) \equiv 1$, $f(2) \equiv 0$, $f(3) \equiv 1$, $f(4) \equiv 0$ (modulo 5).

4. feladat (10 pont)

Tekintsük az $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_7[x]$ irreducibilis polinomot és legyen $\mathbb{F}_{49} = \{g \pmod{f} : g \in \mathbb{Z}_7[x]\}$. Számítsuk ki a $g(x) = 3x + 4$ elem reciprokát!

5. feladat (5+5 pont)

Tekintsük a következő bináris kódolást:

$$(c_1, c_2, c_3) \mapsto (c_1, c_2, c_3, c_2 + c_3, c_1 + c_3, c_1 + c_2, c_1 + c_2 + c_3).$$

(a) Írja fel a kód egy-egy generátor- és ellenőrző mátrixát!

(b) Határozza meg a kód minimális távolságát!