Diszkrét matematika 1.

2. előadás

Fancsali Szabolcs (Ligeti Péter diái alapján)

nudniq@cs.elte.hu
www.cs.elte.hu/∼nudniq

Rendezett pár

Motiváció

Függvényeknél általánosabb kapcsolatok leírása (több érték)

Definíció

Bármely x, y esetén az (x, y) rendezett pár legyen
$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.
Az (x, y) rendezett pár első koordinátája x, második koordinátája pedig y.

Definíció

Az X, Y halmazok Descartes-szorzata legyen a következő:
$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$.

Binér relációk

Definíció

Adott X, Y halmazok esetén az $R \subset X \times Y$ halmazok a binér relációk. R binér reláció esetén $(x, y) \in R$ helyett xRy írható (x relációban áll y-nal).

Definíció

Az $R \subset X \times Y$ reláció értelmezési tartománya
$dmn(R) = \{x \in X : \exists y \in Y : xRy\}$.
Az $R \subset X \times Y$ reláció értékkészlete
$rng(R) = \{y \in Y : \exists x \in X : xRy\}$.

Relációk inverze

Definíció

Egy R *binér reláció* *inverze* *az* $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$.

Definíció

Legyen $R \subset X \times Y$ *binér reláció és* A *halmaz. Az* A *halmaz képe* *az* $R(A) = \{y \in Y : \exists x \in A : (x, y) \in R\}$.
Egy B *halmaz* *inverz képe* *az* $R^{-1}(B)$.

Relációk kompozíciója

Definíció

Legyen R, S *binér reláció. Ekkor az* $R \circ S$ ***kompozíció*** *reláció:*
$R \circ S = \{(x, y) : \exists z : (x, z) \in S \wedge (z, y) \in R\}$

Állítás

Legyen R, S, T *binér relációk. Ekkor*

1. *Ha* $rng(S) \supset dmn(R)$, *akkor* $rng(R \circ S) = rng(R)$
2. $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$ *(asszociativitás)*
3. $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

Relációk tulajdonságai

Definíció

Legyen R binér reláció X-en. Ekkor az R reláció

1. *reflexív*, ha $\forall x \in X : xRx$;
2. *irreflexív*, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;
3. *szimmetrikus*, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
4. *antiszimmetrikus*, ha $\forall x, y \in X : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$;
5. *tranzitív*, ha $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$;
6. *dichotóm*, ha $\forall x, y \in X : xRy \vee yRx$;
7. *trichotóm*, ha $\forall x, , y \in X : x = y, xRy, yRx$ közül pontosan az egyik teljesül;

Relációk tulajdonságai

Definíció

Legyen R binér reláció X-en. Ekkor az R reláció

1. *reflexív*, ha $\forall x \in X : xRx$;
2. *irreflexív*, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;
3. *szimmetrikus*, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
4. *antiszimmetrikus*, ha $\forall x, y \in X : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$;
5. *tranzitív*, ha $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$;
6. *dichotóm*, ha $\forall x, y \in X : xRy \vee yRx$;
7. *trichotóm*, ha $\forall x, , y \in X : x = y, xRy, yRx$ *közül pontosan az egyik teljesül;*

Ekvivalenciareláció és osztályozás

Definíció

Legyen X halmaz és R reláció X-en. Az R reláció ekvivalenciareláció, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Definíció

Az X részhalmazainak egy $\mathcal{O}$ rendszerét osztályozásnak nevezzük, ha páronként diszjunkt nem-üres halmazokból áll és $\cup\mathcal{O} = X$.

Osztályfelbontás

Tétel

Valamely X halmazon értelmezett $\sim$ ekvivalenciareláció esetén az $\overline{x} = \{y \in X : x \sim y\}$ ekvivalenciaosztályok X-nek egy osztályozását adják.

Tétel

Valamely X halmaz bármely $\mathcal{O}$ osztályozása esetén az $R = \cup\{Y \times Y : Y \in \mathcal{O}\}$ reláció egy ekvivalenciareláció, aminek ekvivalenciaosztályait éppen $\mathcal{O}$ adja.

Részbenrendezés, rendezés

Definíció

Az X halmazon értelmezett reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív relációt részbenrendezésnek nevezzük. (Jele: $\leq$)
Ha $\leq$ egy részbenrendezés X-en, akkor az $(X, \leq)$ párt részbenrendezett halmaznak nevezzük.

Definíció

$(X, \leq)$ részbenrendezett halmaz és $x, y \in X$ esetén x és y összehasonlíthatóak, ha $x \leq y \vee y \leq x$.
Az X halmazon értelmezett részbenrendezést rendezésnek nezezzük, ha $\forall x, y \in X$ összehasonlítható.

Hasse diagram

- $(X, \leq)$ ábrázolására
- X elemei csúcsok
- $a, b \in X$ között megy irányított él, ha $a < b \wedge \nexists c : a < c < b$
- ekkor azt mondjuk, hogy a megelőzi b-t
- ábrázolása: irányított él helyett a csúcs a b alatt

Legkisebb, legnagyobb és társai

Definíció

Az $(X, \leq)$ *részbenrendezett halmaz*
legkisebb eleme: olyan $x \in X : \forall y \in X,\ x \leq y$;
legnagyobb eleme: olyan $x \in X : \forall y \in X,\ y \leq x$;
minimális eleme: olyan $x \in X : \nexists y \in X, x \neq y,\ y \leq x$;
maximális eleme: olyan $x \in X : \nexists y \in X, x \neq y,\ x \leq y$.

Megjegyzés

- *minimális és maximális elem több is lehet*
- *rendezett halmazban a minimális és a legkisebb (maximális és a legnagyobb) elem egybeesik*

Függvények

Definíció

*Egy $f \subset X \times Y$ relációt **függvény**nek nevezünk, ha $\forall x, y, y'(((x,y) \in f \wedge (x,y') \in f) \Rightarrow y = y')$.*
*Függvények esetében az $(x,y) \in f$ helyett az $f(x) = y$ jelölést használjuk. Az y az f függvény x **hely**en felvett **érték**e.*
Ha $dmn(f) = X$, akkor az $f : X \to Y$ jelölést használjuk.

Definíció

Az $f : X \to Y$ függvény

- ***injektív**, ha $\forall x, x', y((f(x) = y \wedge f(x') = y) \Rightarrow x = x')$;*
- ***szürjektív**, ha rng(f)=Y;*
- ***bijektív**, ha injektív és szürjektív.*

Függvények kompozíciója

Emlékeztető

- R, S binér relációk kompozíciója:
  $R \circ S = \{(x, y) : \exists z : (x, z) \in S \wedge (z, y) \in R\}$

Tétel

1. *Ha f és g függvény, akkor $g \circ f$ is függvény.*
2. *Ha f és g függvény, akkor $g \circ f(x) = g(f(x))$.*
3. *Ha f és g injektív, akkor $g \circ f$ is injektív.*
4. *Ha $f : X \to Z$ és $g : Z \to Y$ szürjektív, akkor $g \circ f : X \to Y$ is szürjektív.*

Függvények kompozíciója

Emlékeztető

- $f \subset X \times Y$ reláció függvény, ha $\forall x, y, y'(((x, y) \in f \wedge (x, y') \in f) \Rightarrow y = y')$.
- R, S binér relációk kompozíciója: $R \circ S = \{(x, y) : \exists z : (x, z) \in S \wedge (z, y) \in R\}$

Tétel

1. *Ha f és g függvény, akkor $g \circ f$ is függvény.*
2. *Ha f és g függvény, akkor $g \circ f(x) = g(f(x))$.*
3. *Ha f és g injektív, akkor $g \circ f$ is injektív.*
4. *Ha $f : X \to Z$ és $g : Z \to Y$ szürjektív, akkor $g \circ f : X \to Y$ is szürjektív.*

Műveletek

Definíció

Legyen X halmaz.
Egy $* : X \times X \to X$ függvényt X-en értelmezett binér műveletnek nevezünk. $*(x, y)$ a művelet eredménye, helyette $x * y$-t írhatunk.
Egy $* : X \to X$ függvényt X-en értelmezett unér műveletnek nevezünk.

Definíció

Az $* : X \times X \to X$ binér művelet

- *asszociatív*, ha $\forall x, y, z \in X : (x * y) * z = x * (y * z)$
- *kommutatív*, ha $\forall x, y \in X : x * y = y * x$