Diszkrét matematika I. Előadás

7. előadás

Fák

Definíció

Egy gráfot fának nevezünk, ha összefüggő és körmentes.

Tétel

Egy G egyszerű gráfra a következő feltételek ekvivalensek:

(1) G fa;

(2) G összefüggő, de bármely él törlésével kapott részgráf már nem összefüggő;

(3) ha v és v' a G különböző csúcsai, akkor pontosan 1 út van v-ből v'-be;

(4) G-nek nincs köre, de bármilyen új él hozzávételével kapott gráf már tartalmaz kört.

A bizonyítás menete

$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$

Fák

Bizonyítás

(1) $\Rightarrow$ (2)

G összefüggősége következik a fa definíciójából. Az állítás másik részét indirekten bizonyítjuk.
Tfh. létezik egy olyan e él (a végpontjai legyenek v és v') a gráfban, aminek a törlésével kapott gráf összefüggő. Ekkor létezne út v-ből v'-be, amit kiegészítve a törölt éllel és a megfelelő csúccsal egy kört kapnánk: $v, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v', e, v$.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Legalább egy út létezik az összefüggőség miatt. Indirekten bizonyítjuk, hogy nem létezhet két különöző út:
Tfh. 2 út is létezik a különböző v és v' csúcsok között, legyenek ezek: $v, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v'$ és $v, e'_1, v'_1, e'_2, \ldots, v'_{m-1}, e'_m, v'$. Legyen k a legkisebb olyan index, amelyre $v_k \neq v'_k$. (Miért létezik ilyen?) Az e_k élt törölve összefüggő gráfot kapunk, mert a v_{k-1}, e_k, v_k séta helyettesíthető a $v_{k-1}, e'_k, v'_k, \ldots, e'_m, v', e_n, v_{n-1}, e_{n-1}, v_{n-2}, \ldots, v_{k+1}, e_{k+1}, v_k$ sétával.

Fák

Bizonyítás

$(3) \Rightarrow (4)$
Annak a bizonyítása, hogy nincs kör a gráfban indirekt:
tfh. létezik kör: $v, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v$. Ekkor v_1 és v között két különböző út is van: $v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v$ illetve v_1, e_1, v.
Ha a hozzávett e él hurokél, és a v csúcsra illeszkedik, akkor v, e, v kör lesz. Ha a hozzávett e él a különböző v és v' csúcsokra illeszkedik, akkor a köztük lévő utat megfelelően kiegészítve kapunk kört:
$v, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v', e, v$.
$(4) \Rightarrow (1)$
Az, hogy G-nek nincs köre triviálisan teljesül. Kell, hogy G összefüggő, vagyis tetszőleges v és v' csúcsa között van út. Vegyük a gráfhoz a v-re és v'-re illeszkedő e élet. Az így keletkező körben szerepel e (Miért?):
$v', e, v, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v'$. Ekkor $v, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v'$ út lesz v és v' között.

Fák

Lemma

Ha egy G véges gráfban nincs kör, de van él, akkor G-nek van legalább 2 elsőfokú csúcsa.

Bizonyítás

A G-beli utak között van maximális hosszúságú (hiszen G véges), és a hossza legalább 1, így a végpontjai különbözőek. Megmutatjuk, hogy ezek elsőfokúak. Legyen az említett út: $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$. Ha lenne az e_1-től különböző v_0-ra illeszkedő e él, annak másik végpontja (v') nem lehet az útban szereplő csúcsoktól különböző, mert akkor $v', e, v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$ út hossza nagyobb lenne, mint a maximális út hossza, ami ellentmondás. Ha viszont e másik végpontja az út valamely v_k csúcsa, akkor $v_k, e, v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$ kör lenne, ami szintén ellentmondás.

Fák

Tétel

Egy G egyszerű gráfra, amelynek n csúcsa van $(n \in \mathbb{Z}^+)$ a következő feltételek ekvivalensek:

(1) G fa;

(2) G-ben nincs kör, és $n-1$ éle van;

(3) G összefüggő, és $n-1$ éle van.

Bizonyítás

$n = 1$ esetén az állítás triviális. (Miért?)

$(1) \Rightarrow (2)$: n szerinti TI: tfh. $n = k$-ra igaz az állítás. Tekintsünk egy $k+1$ csúcsú G fát. Ennek legyen v egy olyan csúcsa, aminek a foka 1. (Miért van ilyen?) Hagyjuk el a gráfból v-t. Az így kapott gráf, G' nyilván körmentes. Összefüggő is lesz, hiszen v egy G-beli útnak csak kezdő- vagy végpontja lehet, így a G' tetszőleges v' és v'' csúcsa közti G-beli út nem tartalmazhatja sem v-t, sem a rá illeszkedő élt, így G'-beli út is lesz egyben. Tehát G' fa, ezért alkalmazva az indukciós feltevést $k-1$ éle van, és így G-nek k éle van.

Fák

Bizonyítás

(2) $\Rightarrow$ (3): n szerinti TI: tfh. $n = k$-ra igaz az állítás. Tekintsünk egy $k+1$ csúcsú körmentes G gráfot, aminek k éle van. Ennek legyen v egy olyan csúcsa, aminek a foka 1. (Miért van ilyen?) Hagyjuk el a gráfból v-t. Az így kapott G' gráf az indukciós feltevés miatt összefüggő, tehát tetszőleges v' és v'' csúcsa között vezet út G'-ben, ami tekinthető G-beli útnak is. G' tetszőleges csúcsa és v közötti utat úgy kaphatunk, hogy az adott csúcs és a v-vel szomszédos csúcs közötti utat kiegészítjük az elhagyott éllel és v-vel.
(3) $\Rightarrow$ (1): Ha a feltételnek eleget tevő gráfban van kör, akkor az abban szereplő tetszőleges él elhagyásával összefüggő gráfot kapunk. (Miért?) Folytassuk az élek törlését, amíg már nincs több kör a kapott gráfban, tehát fa lesz. Ha k élt hagytunk el, akkor a kapott gráfnak $n-1-k$ éle van, ugyanakkor az (1) $\Rightarrow$ (2) rész miatt a kapott fának $n-1$ éle van, így $k=0$, tehát a gráfunkban nem volt kör, így fa.

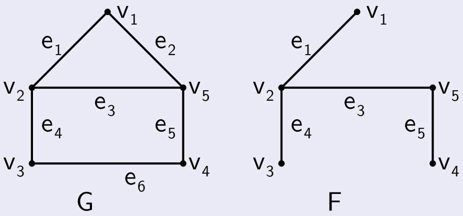
Feszítőfa

Definíció (Feszítőfa)

A G gráf egy F részgráfját a feszítőfájának nevezzük, ha a csúcsainak halmaza megegyezik G csúcsainak halmazával, és fa.

Azaz F akkor feszítőfája G-nek, ha 1. F feszítő részgráfja G-nek, és 2. emellett F még összefüggő és körmentes is (azaz F fa).

Példa



Feszítőfa

Állítás

Minden összefüggő véges gráfnak létezik feszítőfája.

Bizonyítás

Amíg van kör a gráfban, hagyjuk el annak egy élét. A kapott gráf összefüggő marad. Véges sok lépésben fát kapunk.

Nyilvánvaló, hogy ha egy G gráfnak létezik feszítőfája, akkor G-nek összefüggő gráfnak kell lennie. (Miért?)

Feszítőfák és körök

Állítás (Alsó becslés körök számára)

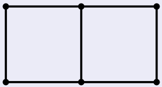
Egy $G = (\varphi, E, V)$ összefüggő véges gráfban létezik legalább $|E| - |V| + 1$ kör, amelyek élhalmaza különböző.

Bizonyítás

Tekintsük G-nek egy F feszítőfáját. Ennek $|V| - 1$ éle van. Jelöljük E'-vel G azon éleinek halmazát, amelyek nem élei F-nek. $e \in E'$-t hozzávéve F-hez keletkezik egy K_e kör (Miért?), ami kör G-ben. A K_e kör tartalmazza e-t (Miért?), és $e \neq e' \in E'$ esetén $K_{e'}$ nem tartalmazza e-t. Így kapunk $|E| - |V| + 1$ kört, amiknek az élhalmaza különbözik.

Megjegyzés

Előfordulhat, hogy a becslés nem pontos ($3 > 7 - 6 + 1 = 2$).



Feszítőfák és vágások

Definíció (Elvágó élhalmaz)

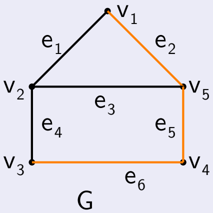
Legyen $G = (\varphi, E, V)$, $v, v' \in V$ és $E' \subset E$. Azt mondjuk, hogy E' elvágja a v és v' csúcsokat, ha minden v-ből v'-be menő út tartalmaz E'-beli élet.
Ha léteznek olyan v és v' csúcsok, amelyeket E' elvág, akkor E'-t elvágó élhalmaznak nevezzük (a v és v' csúcsokra nézve).

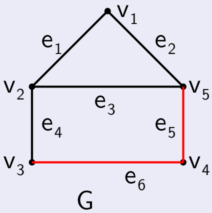
Definíció (Vágás)

Ha egy elvágó élhalmaznak nincs olyan valódi részhalmaza, amely maga is elvágó élhalmaz, akkor vágásnak nevezzük.

Feszítőfák és vágások

Példa





$\{e_2, e_5, e_6\}$ elvágó élhalmaz, mert elvágja v_4-et és v_2-t, hiszen mindhárom v_4 kezdőpontú és v_2 végpontú útban van olyan él, ami eleme:

v_4, e_6, v_3, e_4, v_2,

v_4, e_5, v_5, e_3, v_2,

$v_4, e_5, v_5, e_2, v_1, e_1, v_2$.

Ugyanakkor nem vágás, mert $\{e_5, e_6\}$ olyan valódi részhalmaza, ami szintén elvágó.

Utóbbi vágás, hiszen sem $\{e_5\}$, sem $\{e_6\}$, sem $\emptyset$ nem elvágó élhalmaz.

Feszítőfák és vágások

Állítás (alsó becslés vágások számára)

Egy $G = (\varphi, E, V)$ összefüggő véges gráfban létezik legalább $|V| - 1$ különböző vágás.

Bizonyítás

Tekintsük G-nek egy F feszítőfáját. Jelöljük E'-vel F éleinek halmazát, E''-vel pedig G azon éleinek halmazát, amelyek nem élei F-nek. Ekkor E'' nem elvágó halmaz (Miért?), de tetszőleges $e \in E'$ esetén $E'' \cup \{e\}$ már az (Miért?). Legyen E_e az a vágás, amit $E'' \cup \{e\}$ tartalmaz (Miért van ilyen?). E_e tartalmazza e-t (Miért?), de $e \neq e' \in E'$ esetén nem tartalmazza e' -t, így kaptunk $|V| - 1$ különböző vágást.

Megjegyzés

Ebben az esetben is előfordulhat, hogy a becslés nem pontos.

Erdő, feszítőerdő

Definíció

Egy körmentes gráfot erdőnek nevezünk.
Egy gráfnak olyan részgráfját, ami minden komponensből egy feszítőfát tartalmaz, feszítőerdőnek nevezzük.

Állítás

Tetszőleges gráfnak létezik feszítőerdeje.

Állítás

Egy véges erdő éleinek száma a csúcsainak és komponenseinek számának különbsége.

Megjegyzés

A nem összefüggő gráfoknál az erdők, illetve feszítőerdők azt a szerepet töltik be, mint összefüggő gráfok esetén a fák, illetve feszítőfák.

Euler-vonal

Definíció (Euler-vonal)

Egy gráfban az olyan vonalat, amelyben a gráf minden éle szerepel, Euler-vonalnak nevezzük.

Egy Euler-vonal lehet nyílt vagy zárt.

Megjegyzés

Mivel vonalban nincs élismétlődés, ezért egy Euler-vonal a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza.

Egy G gráfban a következő három lehetőség közül pontosan az egyik teljesül:

- G-ben létezik zárt Euler-vonal;
- G-ben létezik nyílt Euler-vonal;
- G-ben egyáltalán nem létezik Euler vonal.

Ezek egymást kizáró tulajdonságok. (Miért?)

Euler-vonal

Állítás

Egy *véges* gráfban pontosan akkor van zárt Euler-vonal, ha 1. *minden csúcs foka páros*, és 2. a gráf *izolált csúcsoktól eltekintve összefüggő*.

Bizonyítás

$\Rightarrow$: Legyen a zárt Euler-vonal a következő:
$v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_0$.
A vonal kezdő- és végpontját leszámítva egy csúcs minden előfordulása esetén a mellette lévő két különböző él 2-vel járul hozzá a fokszámához. A kezdő- és végpont ugyanaz, ezért ennek is páros lesz a foka. ($\Rightarrow$ 1.)
Az Euler-vonalban minden él szerepel, ezért minden olyan csúcs is, amiből legalább egy él kiindul. Ha v és v' két nem izolált csúcs, akkor szerepelnek a fenti sorozatban, így ennek az Euler-vonalnak megfelelő rész-sorozata olyan séta lesz, ami a v és v' között egy séta. ($\Rightarrow$ 2.)

Euler-vonal

Bizonyítás

$\Leftarrow$: a bizonyítás konstruktív. Hagyjuk el az esetleges izolált csúcsokat a gráfból, az így kapott gráf továbbra is tartalmazza az eredeti gráf minden élét, viszont összefüggő. (Ha üres volt a gráf, egy csúcsot hagyjunk meg.) Induljunk ki egy élt nem tartalmazó zárt vonalból (v). Minden lépésben ezt a zárt vonalat bővítjük egyre több és több élet tartalmazó zárt vonallá.

Ha az eddig kapott zárt vonalban nem minden él szerepel, akkor az összefüggőség miatt az aktuálisan tekintett zárt vonalban létezik olyan csúcs (v'), amelyre illeszkedő élek közül nem szerepel mindegyik. Induljunk el ebből a csúcsból egy fel nem használt élen, és haladjunk tovább mindig fel nem használt éleken. Mivel minden csúcsra páros sok fel nem használt él illeszkedik, a továbbhaladás csak akkor nem lehetséges, ha visszaértünk v'-be. (Miért?) Ha most az eredeti vonalon elmegyünk v-ből v'-be, az új vonalon körbemegyünk, majd az eredeti vonalon haladunk tovább, akkor az eredeti vonalnál hosszabb zárt vonalat kapunk, így ezt az eljárást ismételve véges sok lépésben megkapunk egy Euler-vonalat.

Hamilton-út, Hamilton-kör

Definíció

Egy gráfban az olyan utat, amelyben a gráf minden csúcsa szerepel, Hamilton-útnak nevezzük.
Egy gráfban az olyan kört, amelyben a gráf minden csúcsa szerepel, Hamilton-körnek nevezzük.

Megjegyzés

Mivel útban nincs csúcsismétlődés, ezért egy Hamilton-út a gráf minden csúcsát pontosan egyszer tartalmazza.

Megjegyzés

Ha $v_0, e_1, v_1, e_1, \ldots, e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n, e_0, v_0$ egy Hamilton-kör a G gráfban, akkor $v_0, e_1, v_1, e_1, \ldots, e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n$ egy Hamilton-út lesz a G gráfban.

Azaz, ha egy gráfban van Hamilton-kör, akkor biztos van benne Hamilton út. De ez fordítva nem igaz: például a P_n ösvény egy olyan gráf, amiben van Hamilton út, de nincs benne Hamilton-kör.

Hamilton-út, Hamilton-kör

Tétel (Dirac *elégséges* feltétele Hamilton-körre)

Ha a $G = (\varphi, E, V)$ gráf 1. *egyszerű*, és 2. *legalább három*, de *véges sok* csúcsa van ($\infty > |V| > 2$), és 3. *minden* csúcsának a fokszáma *legalább* $|V|/2$, akkor van G-ben Hamilton-kör.

Bizonyítás (vázlata)

Adott $n = |V|$ csúcsszámra *indirekt* tegyük fel, hogy létezik ellenpélda. Az adott $n = |V| > 2$ csúcsszámra létező ellenpéldák közül tekintsük azt, aminek a lehető legtöbb éle van. Ezt a gráfot nevezzük most G-nek. Tudjuk, hogy G ellenpélda, azaz minden csúcsának a foka legalább $n/2$, de mégsincs Hamilton köre. Viszont G maximális élszámú ellenpélda, azaz akárhogyan is húzunk be egy újabb e' élt (úgy, hogy G továbbra is egyszerű gráf maradjon, azaz nem egy létező éllel párhuzamosan, és nem is hurokélet), akkor már megszűnik ellenpéldának lenni, azaz a $G' = (\varphi', E' = E \cup \{e'\}, V' = V)$ gráfban már van Hamilton-kör. Ebből a Hamilton körből elhagyva az e' élet, egy Hamilton-utat kapunk, ami G-ben is Hamilton út (nemcsak G'-ben).

Hamilton-út, Hamilton-kör

Bizonyítás vázlatának folytatása

Tehát, ha létezik G ellenpélda, akkor abban az ellenpéldában nincs ugyan Hamilton-kör, de létezik benne Hamilton-út. Tekintsük ezt a Hamilton-utat: $v_1, e_2, v_2, e_2 \ldots, e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n$ Mivel minden csúcs fokszáma legalább $n/2$, ez igaz v_1 és v_n csúcsokra is, azaz e_2 és e_n éleken felül még mindkettőből külön-külön kiindul legalább $\frac{n}{2} - 1$ további él, amik ennek a Hamilton útnak a belső csúcsaiba futnak be.

Ezt továbbgondolva fogunk találni egy Hamilton-kört, ami ellentmond annak, hogy a gráf eredetileg ellenpélda lett volna...

Megjegyzés

1. Miért fontos, hogy *egyszerű* legyen a gráf? (Van ellenpélda.) 2.b Miért fontos, hogy véges csúcsszámú legyen a gráf? (Van ellenpélda.)
2.a Miért fontos, hogy legalább három csúcsa legyen? (Van ellenpélda.)