1. A teljes indukció elve.

1. Tétel (A teljes indukció elve). *Tegyük fel, hogy minden n természetes számra adott egy $A(n)$ állítás, és azt tudjuk, hogy*

i) $A(0)$ igaz,

ii) ha $A(n)$ igaz, akkor $A(n+1)$ is igaz.

Ekkor az $A(n)$ állítás minden n természetes számra igaz.

Bizonyítás. Legyen
$$S := \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; A(n) \text{ igaz} \right\}.$$
Ekkor $\underline{S \subset \mathbb{N}}$ és S induktív halmaz, hiszen $0 \in S$, és ha $n \in S$, azaz $A(n)$ igaz, akkor $A(n+1)$ is igaz, ezért $n+1 \in S$ teljesül, következésképpen S induktív halmaz. Mivel $\mathbb{N}$ a legszűkebb induktív halmaz, ezért az $\underline{\mathbb{N} \subset S}$ tartalmazás is fennáll, tehát $S = \mathbb{N}$. Ez pedig azt jelenti, hogy az állítás minden n természetes számra igaz.

2. A szuprémum elv.

2. Tétel (A szuprémum elv). *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy*

i) $H \neq \emptyset$ és

ii) H felülről korlátos.

Ekkor
$$\exists \min\{K \in \mathbb{R} \mid K \textit{ felső korlátja } H\textit{-nak}\}.$$

Bizonyítás. Legyen
$$A := H \quad \text{és} \quad B := \{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}.$$
A feltételek miatt $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$, továbbá
$$\forall a \in A \quad \text{és} \quad \forall K \in B \quad \text{esetén} \quad a \leq K.$$
A teljességi axiómából következik, hogy
$$\exists \xi \in \mathbb{R} \colon a \leq \xi \leq K \qquad (a \in A,\ K \in B).$$
Erre a ξ-re az teljesül, hogy

- ξ felső korlátja H-nak, hiszen $a \leq \xi$ minden $a \in A$ esetén,
- ξ a legkisebb felső korlát, ui. ha K egy felső korlát (azaz $K \in B$), akkor $K \geq \xi$.

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy ξ a H halmaz legkisebb felső korlátja.

3. Az arkhimédészi tulajdonság.

7. Tétel (Az arkhimédészi tulajdonság). *Minden $a > 0$ és minden b valós számhoz létezik olyan n természetes szám, hogy $b < n \cdot a$, azaz*

$$\forall a > 0 \quad \text{és} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \text{esetén} \quad \exists n \in \mathbb{N}, \ \text{hogy} \quad b < n \cdot a.$$

Bizonyítás. Indirekt módon. Tegyük fel, hogy

$$\exists a > 0 \ \text{ és } \ \exists b \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall n \in \mathbb{N}: \ b \geq n \cdot a.$$

Legyen

$$H := \{n \cdot a \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Ekkor $H \neq \emptyset$ és H felülről korlátos, hiszen $n \cdot a \leq b$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. A szuprémum elv szerint

$$\exists \sup H =: \xi.$$

Ekkor ξ a legkisebb felső korlátja H-nak, tehát $\xi - a$ nem felső korlát. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \ n_0 \cdot a > \xi - a \qquad \Longleftrightarrow \qquad (n_0 + 1) \cdot a > \xi.$$

Azonban $(n_0 + 1) \cdot a \in H$, tehát $(n_0 + 1) \cdot a \leq \xi$, hiszen ξ felső korlátja a H halmaznak. Így ellentmondáshoz jutottunk.

4. A Cantor-tulajdonság.

8. Tétel (A Cantor-tulajdonság). *Tegyük fel, hogy minden n természetes számra adott az $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum úgy, hogy*

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. A teljességi axiómát fogjuk alkalmazni. Legyen

$$A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{és} \quad B := \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Először belátjuk, hogy

$$(*) \qquad a_n \leq b_m \quad \text{tetszőleges } n, m \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

Valóban,

i) ha $n \leq m$, akkor $a_n \leq a_m \leq b_m$,

ii) ha $m < n$, akkor $a_n \leq b_n \leq b_m$.

Mivel $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$, ezért $(*)$ miatt a teljességi axióma feltételei teljesülnek, így

$$\exists \xi \in \mathbb{R}: \ a_n \leq \xi \leq b_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ indexre.}$$

Ha $n = m$, akkor azt kapjuk, hogy

$$a_n \leq \xi \leq b_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \xi \in [a_n, b_n] \ \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén,}$$

és ez azt jelenti, hogy

$$\xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

5. Konvergens sorozatok határértékének egyértelműsége.

1. Tétel (A határérték egyértelműsége). *Ha az* $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat konvergens, akkor a konvergencia definíciójában szereplő* A *szám egyértelműen létezik.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozatra $(*)$ az A_1 és az A_2 számokkal is teljesül. Indirekt módon tegyük fel azt is, hogy $A_1 \neq A_2$. Ekkor $\forall \varepsilon > 0$ számhoz

$$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_1 \colon |a_n - A_1| < \varepsilon, \quad \text{és}$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_2 \colon |a_n - A_2| < \varepsilon.$$

Válasszuk itt speciálisan az

$$\varepsilon := \frac{|A_1 - A_2|}{2}$$

(pozitív) számot. Az ennek megfelelő n_1, n_2 indexeket figyelembe véve legyen

$$n_0 := \max\{n_1, n_2\}.$$

Ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > n_0$, akkor nyilván $n > n_1$ és $n > n_2$ is fennáll, következésképpen

$$|A_1 - A_2| = \Big|(A_1 - a_n) + (a_n - A_2)\Big| \le |a_n - A_1| + |a_n - A_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |A_1 - A_2|,$$

amiből (a nyilván nem igaz) $\Big|A_1 - A_2\Big| < \Big|A_1 - A_2\Big|$ következne. Ezért csak $A_1 = A_2$ lehet.

6. A konvergencia és a korlátosság kapcsolata.

3. Tétel. *Ha az* (a_n) *sorozat konvergens, akkor korlátos is.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (a_n) konvergens és $\lim(a_n) = A \in \mathbb{R}$. Válasszuk a konvergencia definíciója szerinti jelöléssel ε-t 1-nek. Ehhez a hibakorláthoz

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 \colon |a_n - A| < 1.$$

Így

$$|a_n| = \Big|(a_n - A) + A\Big| \le |a_n - A| + |A| < 1 + |A| \qquad (n > n_0).$$

Ha $n \le n_0$, akkor

$$|a_n| \le \max\Big\{|a_0|,\ |a_1|,\ \ldots,\ |a_{n_0}|\Big\}.$$

Legyen

$$K := \max\Big\{|a_0|,\ |a_1|,\ \ldots,\ |a_{n_0}|,\ 1 + |A|\Big\}.$$

Ekkor $|a_n| \le K$ minden $n \in \mathbb{N}$ indexre, és ez azt jelenti, hogy az (a_n) sorozat korlátos.

7. Monoton részsorozatok létezésére vonatkozó tétel.

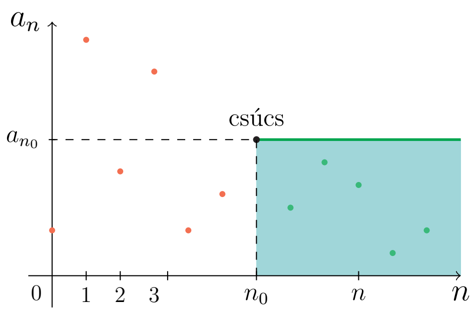
6. Tétel. *Minden $a = (a_n)$ valós sorozatnak létezik monoton részsorozata, azaz létezik olyan $\nu = \nu_n$ indexsorozat, amellyel $a \circ \nu$ monoton növekedő vagy monoton csökkenő.*

Bizonyítás.

Az állítás igazolásához bevezetjük egy sorozat csúcsának a fogalmát: Azt mondjuk, hogy a_{n_0} az (a_n) sorozat ***csúcsa*** (vagy csúcseleme), ha

$$\forall n \geq n_0 \ \text{ indexre } \ a_n \leq a_{n_0}.$$

Két eset lehetséges.



<u>1. eset.</u> A sorozatnak ***végtelen*** sok csúcsa van. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists \nu_0 \in \mathbb{N}\colon a_{\nu_0} \text{ csúcselem, azaz } \ \forall n \geq \nu_0\colon a_n \leq a_{\nu_0},$$

$$\exists \nu_1 > \nu_0\colon a_{\nu_1} \text{ csúcselem, azaz } \ \forall n \geq \nu_1\colon a_n \leq a_{\nu_1} \ (\leq a_{\nu_0}),$$

Ezek a lépések folytathatók, mert végtelen sok csúcselem van. Így olyan $\nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots$ indexsorozatot kapunk, amelyre

$$a_{\nu_0} \geq a_{\nu_1} \geq a_{\nu_2} \geq \cdots,$$

ezért a csúcsok (a_{ν_n}) sorozata (a_n)-nek egy monoton csökkenő részsorozata.

<u>2. eset.</u> A sorozatnak legfeljebb ***véges*** sok csúcsa van. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N \ \text{ esetén } \ a_n \ \text{ már nem csúcs.}$$

Mivel a_N nem csúcselem, ezért

$$\exists \nu_0 > N\colon a_{\nu_0} > a_N.$$

Azonban a_{ν_0} sem csúcselem, ezért

$$\exists \nu_1 > \nu_0\colon a_{\nu_1} > a_{\nu_0} \ (> a_N).$$

Az eljárást folytatva most olyan $\nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots$ indexsorozatot kapunk, amelyre

$$a_{\nu_0} < a_{\nu_1} < a_{\nu_2} < \cdots.$$

Ebben az esetben tehát (a_{ν_n}) sorozat (a_n)-nek egy (szigorúan) monoton növekvő részsorozata.

8. A sorozatokra vonatkozó közrefogási elv.

7. Tétel (A közrefogási elv). *Tegyük fel, hogy az (a_n), (b_n) és (c_n) sorozatokra teljesülnek a következők:*

- $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N\colon a_n \le b_n \le c_n$,
- *az (a_n) és a (c_n) sorozatnak van határértéke, továbbá*

$$\lim(a_n) = \lim(c_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor a (b_n) sorozatnak is van határértéke és $\lim(b_n) = A$.

Bizonyítás. Három eset lehetséges.

1. eset: $\boxed{A \in \mathbb{R}}$ Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám. $\lim(a_n) = \lim(c_n) = A$ azt jelenti, hogy (a_n) és (c_n) azonos A határértékkel rendelkező konvergens sorozatok. A konvergencia definíciója szerint tehát

$$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_1\colon A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_2\colon A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon.$$

Legyen $n_0 := \max\{N, n_1, n_2\}$. Ekkor $\forall n > n_0$ indexre

$$A - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < A + \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$|b_n - A| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > n_0,$$

azaz a (b_n) sorozat konvergens, tehát van határértéke, és $\lim(b_n) = A$.

2. eset: $\boxed{A = +\infty}$ Tegyük fel, hogy $P > 0$ tetszőleges valós szám. A $\lim(a_n) = +\infty$ értelmezése szerint

$$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_1\colon a_n > P.$$

Legyen $n_0 := \max\{N, n_1\}$. Ekkor $\forall n > n_0$ indexre

$$P < a_n \le b_n,$$

és ez azt jelenti, hogy $\lim(b_n) = +\infty$.

3. eset: $\boxed{A = -\infty}$ Tegyük fel, hogy $P < 0$ tetszőleges valós szám. A $\lim(c_n) = -\infty$ értelmezése szerint

$$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_1\colon c_n < P.$$

Legyen $n_0 := \max\{N, n_1\}$, akkor $\forall n > n_0$ indexre

$$P > c_n \ge b_n.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $\lim(b_n) = -\infty$.

9. A határérték és a rendezés kapcsolata.

8. Tétel. *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatnak van határértéke és*

$$\lim(a_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim(b_n) = B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor:

1. $A < B \quad \Longrightarrow \quad \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N\colon a_n < b_n.$

2. $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N\colon a_n \le b_n \quad \Longrightarrow \quad A \le B.$

Bizonyítás.

1. Azt már tudjuk, hogy bármely két különböző $\overline{\mathbb{R}}$-beli elem szétválasztható diszjunkt környezetekkel:

   $$\forall A, B \in \overline{\mathbb{R}},\ A \neq B\text{-hez } \exists r_1, r_2 > 0,\ \ K_{r_1}(A) \cap K_{r_2}(B) = \emptyset.$$

   Világos, hogy ha $A < B$, akkor $\forall x \in K_{r_1}(A), \forall y \in K_{r_2}(B)\colon x < y$.

   Mivel $\lim(a_n) = A$ és $\lim(b_n) = B$, így a definíció értelmében

   $$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_1\colon a_n \in K_{r_1}(A),$$
   $$\exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_2\colon b_n \in K_{r_2}(B).$$

   Legyen $N := \max\{n_1, n_2\}$. Ekkor $\forall n > N$ esetén

   $$a_n \in K_{r_1}(A) \quad \text{és} \quad b_n \in K_{r_2}(B) \qquad \Longrightarrow \qquad a_n < b_n.$$

2. Indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $A > B$. Ekkor a már igazolt 1. állítás szerint $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ indexre $b_n < a_n$, ami ellentmond a feltételnek.

10. Műveletek nullsorozatokkal.

2. Tétel (Műveletek nullsorozatokkal). *Tegyük fel, hogy* $\lim(a_n) = 0$ *és* $\lim(b_n) = 0$. *Ekkor*

1. $(a_n + b_n)$ *is nullsorozat,*
2. *ha* (c_n) *korlátos sorozat, akkor* $(c_n \cdot a_n)$ *is nullsorozat,*
3. $(a_n \cdot b_n)$ *is nullsorozat.*

Bizonyítás.

1. Mivel $\lim(a_n) = \lim(b_n) = 0$, ezért $\forall \varepsilon > 0$-hoz
$$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_1\colon |a_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_2\colon |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Legyen $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Ekkor $\forall n > n_0$ indexre
$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
és ez azt jelenti, hogy $\lim(a_n + b_n) = 0$, azaz $(a_n + b_n)$ valóban nullsorozat.

2. A (c_n) sorozat korlátos, ezért
$$\exists K > 0\colon |c_n| < K \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
Mivel (a_n) nullsorozat, ezért
$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon |a_n| < \frac{\varepsilon}{K},$$
következésképpen minden $n > n_0$ indexre
$$|c_n \cdot a_n| = |c_n| \cdot |a_n| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon,$$
azaz $\lim(c_n \cdot a_n) = 0$.

3. Mivel minden konvergens sorozat korlátos, ezért a $\lim(b_n) = 0$ feltételből következik, hogy (b_n) korlátos sorozat. Az állítás tehát a 2. állítás közvetlen következménye.

11. Konvergens sorozatok szorzatára vonatkozó tétel.

12. Konvergens sorozatok hányadosára vonatkozó tétel.

3. Tétel (Műveletek konvergens sorozatokkal). *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozat konvergens. Legyen*

$$\lim(a_n) = A \in \mathbb{R} \qquad \textit{és} \qquad \lim(b_n) = B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor

1. $(a_n \cdot b_n)$ *is konvergens és* $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n) = A \cdot B$,
2. *ha* $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ *és* $\lim(b_n) \neq 0$, *akkor*

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \quad \textit{is konvergens, és} \ \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)} = \frac{A}{B}.$$

Bizonyítás. Gyakran fogjuk alkalmazni a nullsorozatok 2. alaptulajdonsága, ami azt mondja ki, hogy

$$(*) \qquad (x_n) \text{ konvergens, és } \alpha \in \mathbb{R} \text{ a határértéke} \quad \Longleftrightarrow \quad (x_n - \alpha) \ \text{ nullsorozat.}$$

1. $(*)$ miatt elég megmutatni, hogy $\big(a_nb_n - AB\big)$ nullsorozat. Ez a következő átalakítással igazolható:

$$a_nb_n - AB = a_nb_n - Ab_n + Ab_n - AB = \underbrace{\underbrace{\underbrace{b_n}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{(a_n - A)}_{\text{nullsorozat}}}_{\text{nullsorozat}} + \underbrace{\underbrace{A}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{(b_n - B)}_{\text{nullsorozat}}}_{\text{nullsorozat}}}_{\text{nullsorozat}}.$$

   A fenti gondolatmenetben a (b_n) sorozat azért korlátos, mert konvergens.

2. A bizonyításhoz először egy önmagában is érdekes állítást igazolunk.

   Segédtétel. *Ha* $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ *és* (b_n) *konvergens, továbbá* $B := \lim(b_n) \neq 0$, *akkor az*

$$\left(\frac{1}{b_n}\right)$$

   reciprok-sorozat korlátos.

   Ennek bizonyításához legyen $\varepsilon := |B|/2$. Ekkor egy alkalmas $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex mellett

$$|b_n - B| < \varepsilon = \frac{|B|}{2} \qquad \forall n > n_0 \text{ indexre.}$$

Így minden $n > n_0$ esetén

$$|b_n| \geq |B| - |b_n - B| > |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2},$$

hiszen $|B| = |B - b_n + b_n| \leq |B - b_n| + |b_n|$. Tehát

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| < \frac{2}{|B|}, \quad \text{ha } n > n_0,$$

következésképpen az

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| \leq \max\left\{\frac{1}{|b_0|}, \frac{1}{|b_1|}, \ldots, \frac{1}{|b_{n_0}|}, \frac{2}{|B|}\right\}$$

egyenlőtlenség már minden $n \in \mathbb{N}$ számra teljesül, ezért az $\big(1/b_n\big)$ sorozat valóban korlátos. A segédtételt tehát bebizonyítottuk.

Most azt látjuk be, hogy az

$$\left(\frac{1}{b_n}\right) \quad \text{sorozat konvergens} \quad \text{és} \quad \lim\left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{B}.$$

Ez $(*)$-ből következik az alábbi átalakítással:

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} = \frac{B - b_n}{B \cdot b_n} = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{B \cdot b_n}}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{(B - b_n)}_{\text{nullsorozat}}}_{\text{nullsorozat}}.$$

A 3. állítás bizonyításának a befejezéséhez már csak azt kell figyelembe venni, hogy

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

más szóval az (a_n/b_n) „hányados-sorozat” két konvergens sorozat szorzata. Így a 2. állítás és a reciprok sorozatról az előbb mondottak miatt

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \quad \text{is konvergens} \quad \text{és} \quad \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B} = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)}.$$

13. Monoton növekvő sorozatok határértékére vonatkozó tétel (véges és végtelen eset).

5. Tétel. *Minden (a_n) monoton sorozatnak van határértéke.*

1. *Ha $(a_n) \nearrow$ és felülről korlátos, akkor (a_n) konvergens és*
$$\lim(a_n) = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
2. *Ha $(a_n) \nearrow$ és felülről nem korlátos, akkor* $\lim(a_n) = +\infty$

Bizonyítás.

1. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozat monoton növekvő és felülről korlátos. Legyen
$$A := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$
Ez azt jelenti, hogy A a szóban forgó halmaznak a legkisebb felső korlátja, azaz
   - $\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \leq A$ és
   - $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}\colon A - \varepsilon < a_{n_0} \leq A$.

   Mivel a feltételezésünk szerint az (a_n) sorozat monoton növekvő, ezért az
$$A - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq A.$$
becslés is igaz minden $n > n_0$ indexre. Azt kaptuk tehát, hogy
$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon |a_n - A| < \varepsilon.$$
Ez pontosan azt jelenti, hogy az (a_n) sorozat konvergens, és $\lim(a_n) = A$.
2. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozat monoton növekvő és felülről nem korlátos. Ekkor
$$\forall P > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon a_{n_0} > P.$$
A monotonitás miatt ezért egyúttal az is igaz, hogy
$$\forall n > n_0\colon a_n \geq a_{n_0} > P,$$
és ez pontosan azt jelenti, hogy $\lim(a_n) = +\infty$.

14. Az $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ sorozat konvergenciája.

2. Tétel (Az *e* szám értelmezése). *Az*

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozat szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos, tehát konvergens. Legyen

$$e := \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Bizonyítás. Az állítást a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség „ötletes” felhasználásaival bizonyítjuk.

- ***A monotonitás*** igazolásához az egyenlőtlenséget az $(n+1)$ darab

$$1, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{n}$$

számra alkalmazzuk. Mivel ezek nem mind egyenlők, ezért

$$\sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}.$$

Mindkét oldalt $(n+1)$-edik hatványra emelve azt kapjuk, hogy

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}^+),$$

amivel beláttuk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő.

- ***A korlátosság*** bizonyításához most az $(n+2)$ darab

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{n}$$

számra alkalmazzuk ismét a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt[n+2]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{2\cdot\frac{1}{2}+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+2} = \frac{n+2}{n+2} = 1.$$

Ebből következik, hogy

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4 \qquad (n \in \mathbb{N}^+),$$

ezért a sorozat felülről korlátos.

A monoton sorozatok határértékére vonatkozó tételből következik, hogy a sorozat konvergens.

15. Newton-féle iterációs eljárás m-edik gyökök keresésére.

4. Tétel (Newton-féle iterációs eljárás m-edik gyökök keresésére). *Legyen $A > 0$ valós szám és $m \geq 2$ természetes szám. Ekkor az*

$$\begin{cases} a_0 > 0 \text{ tetszőleges valós szám}, \\ a_{n+1} := \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n\right) \qquad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

rekurzióval értelmezett (a_n) sorozat konvergens, és az $\alpha := \lim(a_n)$ határértékére igaz, hogy $\alpha > 0$ és

$$\alpha^m = A.$$

Bizonyítás. Az állítást több lépésben igazoljuk.

1. lépés. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy az (a_n) sorozat „jól definiált” és $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

2. lépés. Igazoljuk, hogy az (a_n) sorozat konvergens. A monoton sorozatok konvergenciájára vonatkozó tételt fogjuk alkalmazni.

A sorozat *alulról korlátos* és 0 egy triviális alsó korlát (az 1. lépés alapján).

Most megmutatjuk azt, hogy az (a_n) sorozat *a második tagtól kezdve monoton csökkenő*, azaz

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \iff \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, \qquad \text{ha } n = 1, 2, \ldots.$$

A rekurzív képlet szerint minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{m}\left(\frac{A}{a_n^m} + m - 1\right) \leq 1 \qquad \iff \qquad a_n^m \geq A.$$

A jobb oldali egyenlőtlenség igazolására a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség következő alakját fogjuk alkalmazni: ha $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tetszés szerinti nemnegatív valós számok, akkor

$$(\triangle) \qquad x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}\right)^m,$$

és az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x_1 = x_2 = \cdots = x_m$. Fontos hangsúlyozni, hogy lényegében ezt az alakot igazoltuk gyakorlaton, és csak az m-edik gyök egyértelmű létezése után írhatjuk fel az egyenlőtlenséget a megszokott alakban.

Vegyük észre, hogy a rekurzív képlet jobb oldalán álló összeg az m darab

$$x_1 := \frac{A}{a_n^{m-1}}, \quad x_2 := a_n, \quad x_3 := a_n, \quad \ldots \quad , \quad x_m := a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

pozitív szám számtani közepe. Ezért ($\triangle$) miatt

$$a_{n+1}^m = \left(\frac{1}{m}\left(\frac{A}{a_n^{m-1}} + \underbrace{a_n + \cdots + a_n}_{m-1 \text{ darab}}\right)\right)^m = \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}\right)^m \geq$$

$$\geq x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m = \frac{A}{a_n^{m-1}} \cdot \underbrace{a_n \cdot a_n \cdot \ldots \cdot a_n}_{m-1 \text{ darab}} = A \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Sikerült igazolnunk tehát, hogy $a_n^m \geq A$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, ezzel azt, hogy az (a_n) sorozat a második tagtól kezdve monoton csökkenő.

Az (a_n) sorozat tehát monoton csökkenő a második tagtól kezdve és alulról korlátos, ezért a monoton sorozatok határértékére vonatkozó tétel alapján (a_n) konvergens.

3. lépés. Kiszámítjuk a sorozat határértékét. Legyen

$$\alpha := \lim(a_n).$$

Az eddigiekből az következik, hogy $\alpha \geq 0$. Fontos észrevétel azonban az, hogy az $\alpha > 0$ egyenlőtlenség is igaz. Ez az állítás a konvergens sorozatok és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételből, valamint a határérték és a rendezés kapcsolatára vonatkozó tételből következik, hiszen

$$a_n^m \geq A, \quad a_n \to \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad a_n^m \to \alpha^m \geq A > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha > 0.$$

Az (a_n) sorozatot megadó rekurzív összefüggésben az $n \to \infty$ határátmenetet véve az α határértékre egy egyenletet kapunk. Valóban, ha alkalmazzuk a konvergens sorozatok és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételeket (itt használjuk az $\alpha > 0$ egyenlőtlenséget), akkor az adódik, hogy

$$\alpha \leftarrow a_{n+1} = \frac{1}{m}\Bigg(\underbrace{\frac{A}{a_n^{m-1}}}_{\to \frac{A}{\alpha^{m-1}}} + (m-1) \cdot \underbrace{a_n}_{\to \alpha}\Bigg) \to \frac{1}{m}\left(\frac{A}{\alpha^{m-1}} + (m-1)\alpha\right).$$

A határérték egyértelműsége miatt

$$\alpha = \frac{1}{m}\left(\frac{A}{\alpha^{m-1}} + (m-1)\alpha\right).$$

Innen már egyszerű átrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$m\,\alpha^m = A + (m-1)\alpha^m \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha^m = A.$$

6. Tétel (A Cauchy-féle konvergenciakritérium). *Legyen (a_n) egy valós sorozat. Ekkor*

$$(a_n) \text{ konvergens} \quad \Longleftrightarrow \quad (a_n) \text{ Cauchy-sorozat.}$$

Bizonyítás.

$\boxed{\Rightarrow}$ Tegyük fel, hogy (a_n) konvergens, és $A := \lim(a_n)$ a határértéke. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám. A konvergencia definíciója szerint

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 \colon |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Így $\forall m, n > n_0$ index esetén

$$|a_n - a_m| = \Big|(a_n - A) + (A - a_m)\Big| \le |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

és ez azt jelenti, hogy (a_n) Cauchy-sorozat.

Több lépésen keresztül látjuk be, hogy (a_n) konvergens.

1. lépés. Igazoljuk, hogy (a_n) korlátos sorozat.

A Cauchy-sorozat definíciójában $\varepsilon = 1$-hez van olyan $n_1 \in \mathbb{N}$ index, hogy

$$\forall m, n > n_1 \colon |a_n - a_m| < 1.$$

Legyen $m = n_1 + 1$. Ekkor minden $n > n_1$ esetén

$$|a_n| = \Big|(a_n - a_{n_1+1}) + a_{n_1+1}\Big| \le |a_n - a_{n_1+1}| + |a_{n_1+1}| < 1 + |a_{n_1+1}|.$$

Következésképpen az

$$|a_n| \le \max\Big\{|a_0|,\, |a_1|,\, \ldots,\, |a_{n_1}|,\, 1 + |a_{n_1+1}|\Big\}$$

egyenlőtlenség már minden $n \in \mathbb{N}$ számra igaz, azaz a sorozat valóban korlátos.

2. lépés. A Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételből következik, hogy (a_n)-nek létezik egy (a_{ν_n}) konvergens részsorozata. Jelölje

$$A := \lim(a_{\nu_n}) \in \mathbb{R}.$$

3. lépés. Belátjuk, hogy $\lim(a_n) = A$ is igaz.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor A definíciójából következik, hogy

$$\exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_2 \colon \Big|a_{\nu_n} - A\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Az (a_n) Cauchy-sorozat, ezért $\varepsilon/2$-höz

$$\exists n_3 \in \mathbb{N},\ \forall n, m > n_3 \colon |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel $(\nu_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat (vagyis (ν_n) szigorúan monoton növekvő), ezért $\nu_n \ge n$ $(n \in \mathbb{N})$, amit teljes indukcióval lehet igazolni.

Ha $n > n_0 := \max\{n_2, n_3\}$, akkor $\nu_n > n_0$, ezért n és $m := \nu_n$ is nagyobb, mint n_2 és n_3, tehát alkalmazhatók a fenti egyenlőtlenségek. Ekkor

$$|a_n - A| = \Big|(a_n - a_{\nu_n}) + (a_{\nu_n} - A)\Big| \le |a_n - a_m| + |a_{\nu_n} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

és ez azt jelenti, hogy az (a_n) sorozat valóban konvergens, és $\lim(a_n) = A$.