Diszkrét matematika 1.

7. előadás

Fancsali Szabolcs (Ligeti Péter diái alapján)

nudniq@cs.elte.hu
www.cs.elte.hu/∼nudniq

Séta, vonal, út

Definíció

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ *és* $G = (V, E, \varphi)$ *egy gráf. Ekkor egy* $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n)$ *sorozat* ***séta*** v_0*-ból* v_n*-be, ha*

- $v_0, v_i \in V, e_i \in E : i = 1, \ldots, n$
- $\varphi(e_j) = \{v_{j-1}, v_j\} : j = 1, \ldots, n$

A séta ***zárt****, ha* $v_0 = v_n$*.*

Definíció

- *Ha* $i \neq j$ *esetén* $e_i \neq e_j$*, akkor a sétát* ***vonal****nak nevezzük.*
- *Ha* $i \neq j$ *esetén* $v_i \neq v_j$*, akkor a sétát* ***út****nak nevezzük. Ha egy útban* $v_0 = v_n$*, akkor* ***kör****nek nevezzük.*

Állítás

Egy G *gráfban legyen* $u, v \in V$*. Ekkor* $\exists$ *séta* u*-ból* v*-be* $\Leftrightarrow$ $\exists$ *út* u*-ból* v*-be.*

Fák

Állítás

Legyen V elemein adva a következő reláció: $u \sim v$, pontosan akkor, ha $u = v$ vagy van út u és v között. Ez ekvivalenciareláció.

Definíció

A fenti ekvivalenciareláció által meghatározott osztályok által feszített részgráfok a gráf komponensei. Egy gráf összefüggő, ha egy komponensből áll.

Definíció

Egy G gráf fa, ha összefüggő és körmentes.

Fák

Tétel

Legyen $G = (V, E, \varphi)$ *egyszerű gráf. Az alábbiak ekvivalensek:*

1. G *fa*
2. G *minimális összefüggő*
3. $\forall u \neq v, u, v \in V$ *esetén egyértelműen létezik út* u*-ból* v*-be*
4. G *maximális körmentes.*

Lemma

Ha $G = (V, E, \varphi)$ *véges körmentes gráf és* $E \neq \emptyset$*, akkor* $\exists u, v \in V : u \neq v \wedge d(u) = d(v) = 1.$

Tétel

Legyen $G = (V, E, \varphi)$ *fa,* $|V| = n \in \mathbb{N}^+$*. Ekkor* $|E| = n - 1.$

Feszítőfák

Definíció

A G gráf egy T részgráfját a G feszítőfájának nevezzük, ha csúcshalmaza megegyezik G csúcshalmazával és fa.

Állítás

Minden összefüggő véges gráfnak létezik feszítőfája.

Definíció

Körmentes gráfot erdőnek nevezzük. A G gráf egy F részgráfját a G feszítőerdejének nevezzük, ha csúcshalmaza megegyezik G csúcshalmazával és minden komponensében egy feszítőfát tartalmaz.

Állítás

Véges erdő élszáma a csúcsszáma és a komponeneseinek számának különbsége.

Minimális súlyú feszítőerdő keresése

Definíció

Egy $G = (V, E, \varphi)$ *gráf esetén egy* $w : E \to \mathbb{R}$ *függvényt élsúlyozásnak nevezünk. Egy* $e \in E$ *él súlya* $w(e)$*, egy* G *gráf súlya* $\sum_{e \in E} w(e)$*.*

Probléma

Adott G gráf és w élsúlyozás esetén keressünk G-nek egy minimális súlyú feszítőerdejét.

Mohó algoritmus

- lokális optimumok segítségével keres globális optimumot
- nem univerzális, de sokszor hatásos

Minimális súlyú feszítőerdő keresése

Probléma

Adott G gráf és w élsúlyozás esetén keressünk G-nek egy minimális súlyú feszítőerdejét.

Kruskal algoritmusa

A V csúcsú üres részgráfból kiindulva minden lépésben vegyük a részgráfhoz a minimális súlyú olyan élt, amivel még nem keletkezik kör.

Fordított mohó algoritmus

A G gráfból kiindulva, amíg van kör a gráfban, annak egy köréből töröl egy maximális súlyú élt.

Tétel

Kruskal algoritmusa és a fordított mohó algoritmus is egy minimális súlyú feszítőerdőt ad.