Diszkrét matematika 1

4. előadás Komplex számok I.

Mérai László

merai@inf.elte.hu

2024 tavasz

Komplex számok I.

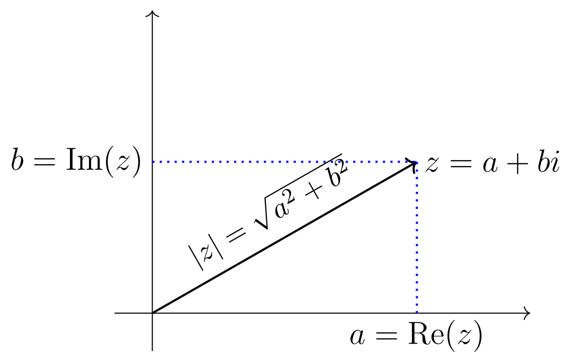
$$(\cos t + i \cdot \sin t)^n = \cos(n \cdot t) + i \cdot \sin(n \cdot t)$$

Komplex számok

- az $i \in \mathbb{C}$: $i^2 = -1$ számmal szimbolikus számolási szabályokkal

Definíció
A *komplex számok* halmaza a $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$
Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Ekkor

- z *valós része* $\mathrm{Re}(z) = a$
- z *képzetes része* $\mathrm{Im}(z) = b$
- z *abszolút értéke* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Műveletek:

- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $(a + bi) \cdot (c + di) = ac + (ad + bc)i + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

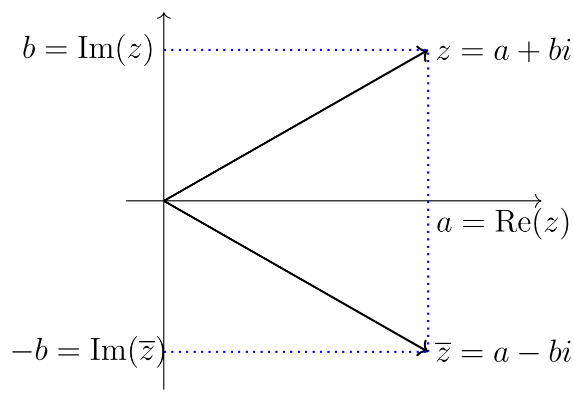
Számolás komplex számokkal

Legyen $z = a + bi \neq 0$. Ekkor $1/z$ kiszámolása a nevező *gyöktelenítésével*:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a - bi} \cdot \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a - bi)(a + bi)} = \frac{a - bi}{a^2 - i^2b^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Definíció

- Egy $z = a + bi \in \mathbb{C}$ szám *konjugáltja*:
$$\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi.$$
- Ezzel $z \neq 0$ esetén $1/z = \overline{z}/|z|^2$.



Példa

- $z = i$. Ekkor $\overline{i} = -1$, $|i| = 1$, így $1/i = -i$.
- $z = 2$. Ekkor $\overline{2} = 2$, $|2| = 2$, így $1/2 = 2/4 = 2$.

Műveletek komplex számokkal

Hasznos összefüggések:

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$ és $w = c + di \in \mathbb{C}$. Ekkor

- $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $\dfrac{w}{z} = w \cdot \dfrac{1}{z} = w \cdot \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{w \cdot \overline{z}}{|z|^2}$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (ac - (-b)(-d)) + (a(-d) + (-b)c)i = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- $|z \cdot w|^2 = (z \cdot w) \cdot \overline{z \cdot w} = (z \cdot w) \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = |z|^2 |w|^2$
- speciálisan $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $\ldots$

(További hasznos összefüggéseket ld. a kiegészítésben.)

Számfogalom bővítése

Tétel (Algebra alaptétele, biz.: NB)

Adott $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $c_n \neq 0$, a

$$c_n z^n + \dots + c_1 z + c_0 = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

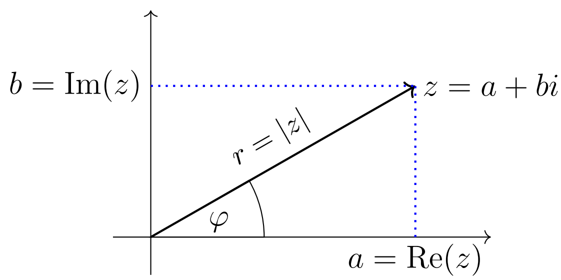
egyenlet mindig megoldható.

Komplex számok trigonometrikus alakja

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- Az $r = |z|$ az $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vektor hossza.
- A $\varphi = \arg(z) \in [0, 2\pi)$ az (a, b) vektor irányszöge, az z *argumentuma*.
- Ekkor $a = r\cos\varphi$ és $b = \sin\varphi$, így

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$



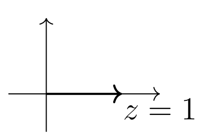
Definíció

Az $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex szám *trigonometrikus alakja*:

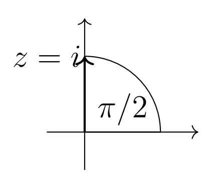
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \text{ahol } a = \mathrm{Re}(z) = r\cos\varphi \text{ és } b = \mathrm{Im}(z) = r\sin\varphi$$

Komplex számok trigonometrikus alakja, példák

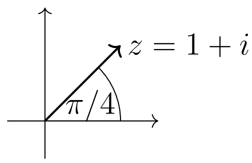
Példa



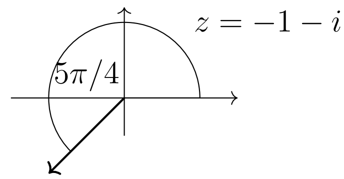
$z = 1$: $|z| = 1$, $\arg(z) = 0$
$\Longrightarrow z = 1(\cos 0 + i\sin 0)$



$z = i$: $|z| = 1$, $\arg(z) = \pi/2$
$\Longrightarrow z = 1(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))$



$z = 1 + i$: $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \pi/4$
$\Longrightarrow z = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$



$z = -1 - i$: $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = 5\pi/4$
$\Longrightarrow z = \sqrt{2}(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4))$

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

Legyen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$$

A szorzatuk:

$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot|w|(\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= |z||w|(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)) \end{aligned}$$

Addíciós képletek:
$\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi \quad \sin(\varphi+\psi) = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi$
Így

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)).$$

Tétel (Biz: ld fent)
Legyenek $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Ekkor $zw = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$.

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)).$$

Ekkor

- A szorzat *abszolút értéke*: $|zw| = |z||w|$.
- A szorzat *argumentuma*:
  - ha $0 \le \arg z + \arg w < 2\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w$;
  - ha $2\pi \le \arg z + \arg w \le 4\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w - 2\pi$.

A $\sin$, $\cos$ függvények 2π szerint periodikusak, az argumentum meghatározásnál *redukálni* kell az argumentumok összegét.

Példa

- $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$
- $(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i$
- $(1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = -4$

Általában,

- $z = 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$
- Így $(1+i)^4 = \sqrt{2}^4(\cos(4\cdot\pi/4) + i\sin(4\cdot\pi/4)) = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4$

Moivre-azonosságok

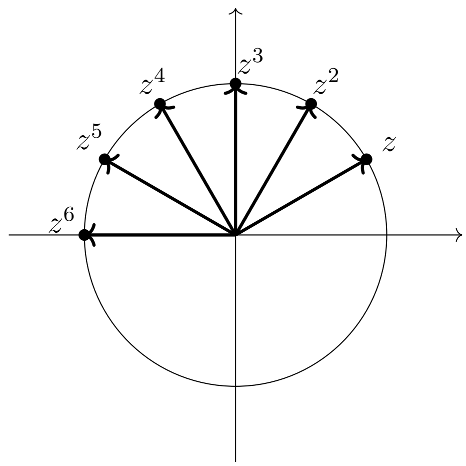
Tétel (Biz: HF)
Legyen $z, w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ nem-nulla komplex számok: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$, és legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

- $zw = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$
- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi))$
- $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

A szögek rendre összeadódnak, kivonódnak, szórzódnak. Az argumentumot ezek után *redukcióval* kapjuk!

Komplex számok hatványa

Példa
Legyen $z = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \sqrt{3}/2 + i/2$. Ekkor z hatványai:



- $z^2 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6)$
- $z^3 = \cos(3\pi/6) + i\sin(3\pi/6) = i$
- $z^4 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6)$
- $z^5 = \cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)$
- $z^6 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1$
- $\ldots$
- $z^9 = \cos(9\pi/6) + i\sin(9\pi/6) = -i$
- $\ldots$
- $z^{12} = \cos(12\pi/6) + i\sin(12\pi/6) = 1 = z^0$

Számolás komplex számokkal – kiegészítés

Tétel

1. $\overline{\overline{z}} = z$;
2. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$;
3. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;
4. $z + \overline{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}(z)$
5. $z - \overline{z} = 2i \cdot \mathrm{Im}(z)$;
6. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;
7. $z \neq 0$ esetén $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$;
8. $|0| = 0$ és $z \neq 0$ esetén $|z| > 0$;
9. $|\overline{z}| = |z|$;
10. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;
11. $|z + w| \leq |z| + |w|$ (háromszög egyenlőtlenség).