Diszkrét matematika 1

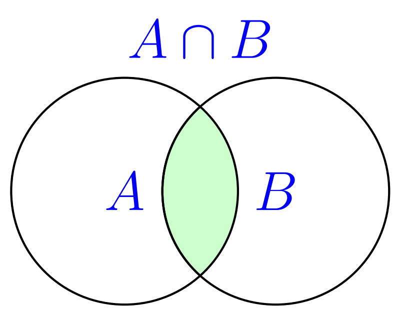
2. előadás Halmazok

Mérai László

merai@inf.elte.hu

2024 tavasz

Halmazok



Frissítve: 2024. február 9.

Halmazok

- Mi *naiv* halmazelmélettel foglalkozunk: halmazok = elemek gondolati burka

Meghatározottsági axióma
Egy halmazt az elemei egyértelműen meghatároznak.

Speciálisan:

- Két halmaz pontosan akkor *egyenlő*, ha *ugyan azok* az elemeik.

$$\{1,2,3\} = \{3,2,1\} = \{1,3,2\} = \dots$$

- Egy halmaznak egy elem csak *egyszer* lehet eleme.

$$\{1,2,3\} = \{1,1,2,3\} = \{1,1,2,2,3\} = \{1,1,2,2,3,3\} = \dots$$

- *Üres halmaz*: $\emptyset = \{\}$. **Figyelem** $\emptyset \neq \{\emptyset\}$!

Részhalmazok

Definíció

- Az A halmaz *részhalmaza* a B halmaznak, $A \subset B$, ha $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$.
- Ha $A \subset B$-nek, de $A \neq B$, akkor A *valódi részhalmaza* B-nek: $A \subsetneq B$.

A részhalmazok tulajdonságai:

Állítás (Biz.: HF)

1. $\forall A\ A \subset A$ (reflexivitás).
2. $\forall A, B, C\ A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (tranzitivitás).
3. $\forall A, B\ A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$ (antiszimmetria).

Művelet halmazokkal – unió

Definíció

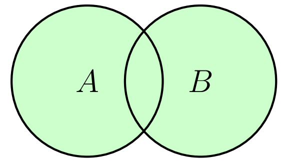
Legyen A, B két halmaz. A és B *uniója*,

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Általában: legyen $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer (halmaz, mely elemei halmazok). Ekkor

$$\cup\mathcal{A} = \cup_{A\in\mathcal{A}} A = \{x : \exists A \in \mathcal{A}, x \in A\}.$$

$A \cup B$



Példa

- $\{a, b, c\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\} = \cup\{\{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}$
- $\{M \in \mathbb{R}^{5\times5} : \det M = 0\} \cup \{M \in \mathbb{R}^{5\times5} : \det M \neq 0\} = \mathbb{R}^{5\times5}$
- $\cup_{r\in\mathbb{R}}\{M \in \mathbb{R}^{5\times5} : \det M = r\} = \mathbb{R}^{5\times5}$

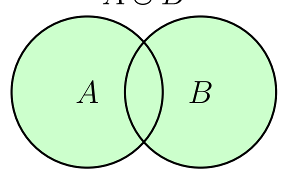
Művelet halmazokkal – unió

Az unió tulajdonságai

Állítás (Biz.: HF)

1. $A \cup \emptyset = A$
2. $A \cup B = B \cup A$ (kommutativitás)
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (asszociativitás)
4. $A \cup A = A$ (idempotencia)
5. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

$A \cup B$



Bizonyítás.

$\vdots$

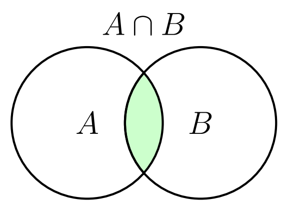
5. $\Rightarrow$: $A \subset B \Rightarrow A \cup B \subset B$, de $A \cup B \supset B$ mindig teljesül, így $A \cup B = B$.
$\Leftarrow$: Ha $A \cup B = B$, akkor A minden eleme eleme B-nek. $\square$

Művelet halmazokkal – metszet

Definíció

Legyen A, B két halmaz. A és B *metszete*,

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$



Általában: legyen $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer (halmaz, mely elemei halmazok). Ekkor

$$\cap\mathcal{A} = \cap_{A\in\mathcal{A}} A = \{x : \forall A \in \mathcal{A}, x \in A\}.$$

Példa

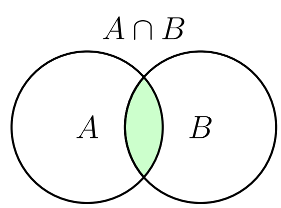
- $\{a, b, c\} \cap \{b, c, d\} = \{b, c\} = \cap\{\{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}$
- $\left\{M \in \mathbb{R}^{2\times 2} : M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}\right\} \cap \left\{M \in \mathbb{R}^{2\times 2} : M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}\right\} = \{\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2\times 2}\}$

Művelet halmazokkal – metszet

Az metszet tulajdonságai

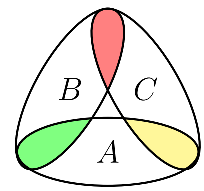
Állítás (Biz.: HF)

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$
2. $A \cap B = B \cap A$ (kommutativitás)
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asszociativitás)
4. $A \cap A = A$ (idempotencia)
5. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$



Diszjunkt halmazok

Definíció



- Az A, B halmazok *diszjunktak*, ha $A \cap B = \emptyset$.
- Legyen $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer (halmaz, mely elemei halmazok). Ekkor $\mathcal{A}$ *diszjunkt*, ha $\cap\mathcal{A} = \emptyset$.
- Legyen $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer (halmaz, mely elemei halmazok). Ekkor $\mathcal{A}$ elemei *páronként diszjunktak*, ha

$$\forall A, B \in \mathcal{A}, A \neq B : A \cap B = \emptyset$$

Megjegyzés:

- páronként diszjunkt $\Longrightarrow$ diszjunkt
- *de* diszjunkt $\not\Longrightarrow$ páronként diszjunkt

Példa

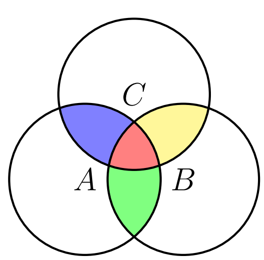
- Legyen $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ $C = \{2, 3\}$. A, B, C diszjunktak, de *nem* páronként diszjunktak.

Művelet halmazokkal

Az unió és metszet disztributivitása.

Állítás
Legyenek A, B, C tetszőleges halmazok. Ekkor

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



Bizonyítás.

1. $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C$.

   Így x pontosan akkor eleme a baloldalnak,

   $$x \in A \ \wedge \ x \in B \text{ vagy } x \in A \ \wedge \ x \in C,$$

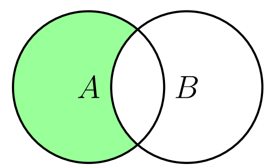
   azaz $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2. HF, hasonló $\square$

Különbség, komplementer

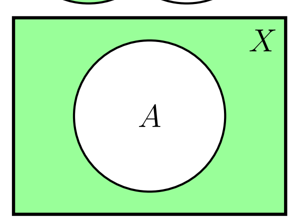
Definíció
Két A, B halmaz *különbsége*

$$A \setminus B = \{a \in A : a \notin B\}$$



Definíció
Legyen X egy rögzített alaphalmaz. Ekkor A halmaz *komplementere*

$$\overline{A} = X \setminus A = \{a \in X : a \notin A\}.$$



Állítás (Biz.: HF)

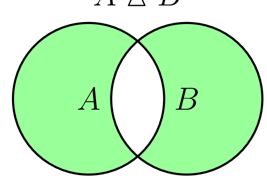
- $A \subset B \Longleftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (1. de Morgan szabály)
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (2. de Morgan szabály)

Szimmetrikus differencia

Definíció
Két A, B halmaz *szimmetrikus differenciája*

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= \{a : (a \in A) \oplus (b \in B)\} \end{aligned}$$

$A \triangle B$



Állítás (Biz.: HF)

Ekvivalens definíció a szimmetrikus differenciára

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{a : (a \in A) \oplus (b \in B)\}$$

Hatványhalmaz

Definíció
Egy A halmaz *hatványhalmaza* $\mathcal{P}(A) = 2^A = \{B : B \subset A\}$, A összes részhalmazának hallmaza.

Példa

- $\mathcal{P}(\emptyset) = 2^\emptyset = \{\emptyset\}$ (egyelemű halmaz!)
- $\mathcal{P}(\{a\}) = 2^{\{a\}} = \{\emptyset, \{a\}\}$
- $\mathcal{P}(\{a, b\}) = 2^{\{a,b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Egy véges A halmaz elemszámát jelöljük $|A|$-val.

Állítás (Biz. később)
Legyen A egy véges halmaz. Ekkor $|\mathcal{P}(A)| = \left|2^A\right| = 2^{|A|}$.