Analízis III. gyakorlatok

Programtervező informatikus BSc 2018
A szakirány

2021–2022. tanév tavaszi félév

$\boxed{\textbf{1. gyakorlat}}$

Integrálszámítás

■ Szükséges ismeretek

- Primitív függvények meghatározásának a módszerei: Alapintegrálok. Az első helyettesítési szabály, speciális esetek. A parciális integrálás szabálya. A második helyettesítési szabály. Racionális törtfüggvények integrálása.
- Határozott integrál és alkalmazásai. A Newton–Leibniz-tétel. Síkidom területe. Síkbeli görbe ívhossza. Forgástest térfogata.
- Az improprius integrál értelmezése, ha integrandus értelmezési tartománya nem korlátos intervallum, ha az integrandus nem korlátos, de az értelmezési tartománya korlátos intervallum. Összehasonlító kritériumok. Végtelen sorokra vonatkozó integrálkritérium.

■ Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy

(a) $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{ha } \alpha \in (1,+\infty) \\ +\infty, & \text{ha } \alpha \in (-\infty,1], \end{cases}$$

(b) $$\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \text{ha } \alpha \in (-\infty,1) \\ +\infty, & \text{ha } \alpha \in [1,+\infty). \end{cases}$$

2. Számítsuk ki a

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{a+\cos x}\,dx$$

határozott integrált, ahol $a > 1$ adott valós paraméter!

3. Lássuk be, hogy a

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx,$ (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cdot\cos(3x)\,dx,$

(c) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx,$ (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx,$

improprius integrálok mindegyike konvergens, és számítsuk ki az integrálok értékeit!

4. Bizonyítsuk be, hogy

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ konvergens, (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx$ pedig divergens.

5. Döntsük el, hogy az alábbi improprius integrálok konvergensek-e:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}$, (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$.

6. (a) Bizonyítsuk be, hogy minden $x>0$ valós számra az $\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\,dt$ improprius integrál konvergens. A

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\,dt \qquad (x \in \mathbb{R}^+)$$

függvényt **gammafüggvénynek** nevezzük.

(b) Mutassuk meg, hogy

(i) $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \quad \big(x \in (0,+\infty)\big)$,

(ii) ha $n = 0,1,2,3,\ldots$, akkor $\Gamma(n+1) = n!$.

■ Házi feladatok

1. Számítsa ki az alábbi improprius integrálokat:

(a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}dx$, (b) $\displaystyle\int_3^{+\infty} e^{-x}\cdot\sin(2x)\,dx$,

(c) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{2}{x^2-2\,x}\,dx$, (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

2. Legyen $\alpha > 0$. Számítsa ki a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

határértéket!

3. Bizonyítsa be, hogy

$$\ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n + 1 \quad (2 \le n \in \mathbb{N}).$$

4. Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi számsorokat:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$, (b) $\displaystyle\sum_{n=2} \frac{1}{n\ln n}$.

Gyakorló feladatok

1. Igazolja, hogy a

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

improprius integrál konvergens!

2. Számítsa ki a következő improprius integrálokat:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx,$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \ln x, dx,$

(c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx,$ (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx,$

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x-\tfrac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda\, e^{-\lambda x} dx$ ($\lambda > 0$ valós paraméter).

3. Döntse el, hogy az alábbi improprius integrálok konvergensek-e:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2}\,dx,$ (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx,$ (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}\,dx.$

4. Lássa be, hogy a $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_{-b}^{b} \frac{x}{1+x^2}\,dx$ határérték létezik és véges, de a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

improprius integrál divergens.

5. A valószínűségszámításban a $\lambda > 0$ *paraméterű exponenciális eloszlás* sűrűségfüggvénye így van definiálva:

$$f_\lambda(x) := \lambda e^{-\lambda x} \qquad (x \in [0, +\infty)).$$

Néhány $\lambda > 0$ paraméter esetén szemléltesse az f_λ függvényt, és mutassa meg, hogy az f grafikonja alatti terület a $[0, +\infty)$ intervallumon minden $\lambda > 0$ esetén 1-gyel egyenlő, azaz

$$\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)dx = 1 \quad \text{minden } \lambda > 0 \text{ számra.}$$

■ További feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy a π szám irracionális!

2. Bizonyítsa be a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^2}{1^2}\cdot\frac{4^2}{3^2}\cdots\frac{(2n)^2}{(2n-1)^2}\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}$$

Wallis-formulát!

3. Mutassa meg, hogy

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Útmutatás. Legyen

$$G_n:=\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

és lássa be a következő állításokat:

(a) a fenti improprius integrálok konvergensek,

$$G_0=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx,\quad G_1=\frac{1}{2},\qquad G_n=\frac{n-1}{2}G_{n-2}\ \ (n=2,3,\ldots),$$

majd fejezze ki G_{2n}-et és G_{2n+1}-et.

(b) $G_n^2<G_{n-1}G_{n+1}$ $(n=1,2,\ldots)$ (ennek igazolásához tekintese a $G_{n-1}t^2+2G_nt+G_{n+1}$ $(t\in\mathbb{R})$ polinomot),

(c) $\dfrac{2}{2n+1}G_{2n+1}^2<G_{2n}^2<G_{2n-1}G_{2n+1}$ $(n=1,2,\ldots)$,

(d) alkalmazza a Wallis-formulát.

4. A valószínűségszámításban és a statisztikában fontos szerepet játszanak a következő függvények: Legyen μ tetszőleges valós és σ pozitív valós paraméter, és tekintse az

$$f(x):=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

illetve a

$$\Phi(x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \qquad (x\in\mathbb{R})$$

függvényeket. Mutassa meg, hogy

(a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$;

(b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \mu$;

(c) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \sigma^2$.

Megjegyzések. **1^o** Az f függvényt a *μ és σ paraméterű normális eloszlás* **sűrűségfüggvényének** nevezzük (l. (a)). A $\Phi(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény (ennek jelölésére gyakran az $\mathrm{erf}\,(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ szimbólumot is használják) a standard normális eloszlás **eloszlásfüggvénye**. Számos statisztikai problémánál fontos ismerni a $\Phi(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ értékeket. Az $\int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ integrált azonban nem lehet elemi függvényekkel kifejezni, ezért a pontos értékek meghatározására nincs lehetőségünk. Közelítő (numerikus) értékeit táblázatokban szokás megadni.

2^o A (b), illetve a (c) feladat eredményét röviden úgy fejezik ki, hogy az f sűrűségfüggvényű eloszlás **várható értéke**, illetve **szórása** μ, illetve σ. Ezért szokás az f függvényt a *μ várható értékű és a σ szórású normális eloszlás* **sűrűségfüggvényének** nevezni.

3^o Érdekességképpen még azt is megjegyezzük, hogy a fenti f függvénynek a harang alakú grafikonját, *Carl Friedrich* **Gauss** (1777–1855) arcképét, valamint Göttingen történelmi épületeit láthatjuk az az 1989-ben, a Német Szövetségi Bank által kibocsátott 10 márkás bankjegyen:

5. A Stirling-formula:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1,$$

azaz $n!$ közelítésére az alábbi formula érvényes:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad \text{ha } n \to +\infty.$$

Megoldás. Az alapötlet az, hogy az $\int_1^n \ln x\,dx$ integrált, azaz az ln függvény $[1, n]$ intervallumon vett grafikonja alatti területet a beírt trapézok területének összegével közelítjük.

A szóban forgó integrál könnyen meghatározható:

$$\int_1^n \ln x\,dx = \left[x\ln x - x\right]_1^n = n\ln n - n + 1 = \ln n^n - \ln e^n + \ln e = \ln\Big(e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n\Big).$$

Tekintsük most az ln (konkáv!) függvény grafikonjába beírt azon töröttvonalat, amelynek szögpontjai a görbe $1, 2, \ldots, n$ abszcisszákhoz tartozó pontjai. Az e töröttvonal alatti síkidom területe egy háromszögnek és $(n-1)$ trapéznak a területéből tevődik össze, és az értéke:

$$\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 2+\ln 3}{2}+\cdots+\frac{\ln(n-1)+\ln 2}{2}=$$
$$=\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln n-\frac{1}{2}\ln n=\ln\Big(\frac{n!}{\sqrt{n}}\Big),$$

ezért a területek különbsége:

$$\triangle_n:=\ln\Big(e\cdot\big(\frac{n}{e}\big)^n\Big)-\ln\Big(\frac{n!}{\sqrt{n}}\Big)=\ln\left(\frac{e\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}{n!}\right)>0\qquad(\forall\, n\in\mathbb{N}).$$

($\triangle_n$ azért pozitív, mert az ln függvény konkáv az egész $\mathbb{R}^+$-on.) A geometriai tartalomból nyilvánvaló, hogy a $(\triangle_n)$ sorozat monoton növekedő. Egy szellemes geometriai megfontolásból az is következik, hogy a $(\triangle_n)$ sorozat felülről korlátos és $\triangle_n\le\frac{\ln 2}{2}$ minden $n\in\mathbb{N}$ esetén. Ezért **a** $(\triangle_n)$ **sorozat konvergens**. Az exp függvény szigorúan monoton növekedő, ezért az

$$\frac{e^{\triangle_n}}{e}=\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}{n!}$$

sorozat is konvergens, és a határértéke pozitív. A sorozat reciproka, tehát az

$$a_n:=\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}\qquad(n\in\mathbb{N})$$

sorozat is konvergens. Feladatunk a határértékének a kiszámolása.

Ehhez két **észrevételt** érdemes megjegyezni: egyrészt azt, hogy

$$0<\lim(a_n)=\lim\Big(\frac{a_n^2}{a_{2n}}\Big),$$

ami az $\frac{a_n^2}{a_{2n}}=a_n\cdot\frac{a_n}{a_{2n}}$ és $\lim(a_n)=\lim(a_{2n})$ nyilvánvaló következménye. A másik észrevétel az, hogy $\frac{a_n^2}{a_{2n}}$ a Wallis-formulával hozható kapcsolatba:

$$\frac{a_n^2}{a_{2n}}=\frac{\big[n!\big]^2}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}n}\cdot\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2n}}{(2n)!}=\frac{\big[2^n n!\big]^2}{(2n)!}\cdot\sqrt{\frac{2}{n}}=$$
$$=\frac{\big[2\cdot4\cdot6\cdots(2n)\big]^2}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots(2n)}\cdot\sqrt{\frac{2}{n}}=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\sqrt{\frac{2(2n+1)}{n}}.$$

A Wallis-formula alapján

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

ezért

$$\lim(a_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}=\lim\Big(\frac{a_n^2}{a_{2n}}\Big)=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\sqrt{\frac{2(2n+1)}{n}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot2=\sqrt{2\pi},$$

ami azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}=1.$$

2. gyakorlat

Metrikus terek és normált terek 1.

Szükséges ismeretek

- A metrikus tér fogalma. Példák metrikus terekre.
- A normált tér fogalma. Példák normált terekre. Ekvivalens normák.
- Az euklideszi tér fogalma. Példák eukliszi terekre. Alaptulajdonságok.

Feladatok

1. **(A diszkrét metrikus tér.)** Mutassuk meg, hogy tetszőleges M nemüres halmazon értelmezett
$$\varrho(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x = y \\ 1, & \text{ha } x \neq y \end{cases}$$
függvény metrika M-en! Adjuk meg a $K_1(a)$ környezetet, ha $a \in M$ egy tetszőleges elem!

2. **(A Hamming-távolság.)** Legyen $\mathcal{K} \neq \emptyset$ egy véges karakterhalmaz, $n \in \mathbb{N}^+$ és H a $\mathcal{K}$ elemeiből álló n hosszúságú karaktersorozatok halmaza. Jelölje ϱ_H azt a függvényt, amely két tetszőleges H-beli karaktersorozathoz azt a számot rendeli, hogy hány helyen különbözik egymástól a két karaktersorozat. Bizonyítsuk be, hogy (H, ϱ_H) egy metrikus tér.

3. Tegyük fel, hogy az $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ függvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal:
   - f monoton növekedő,
   - $f(x) = 0 \iff x = 0$,
   - $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ $(x, y \geq 0)$.

   Bizonyítsuk be, hogy ha ϱ metrika a nemüres M halmazon, akkor $f \circ \varrho$ is metrika M-en.

4. Igazoljuk, hogy az $f(x) := \sqrt{x}$, $f(x) := \dfrac{x}{1+x}$, $f(x) := \ln(1 + x)$ $\big(x \in [0, +\infty)\big)$ függvények eleget tesznek az elzőző feladat feltételeinek. Következésképpen, ha (M, ϱ) metrikus tér, akkor
$$\text{(a) } \big(M, \sqrt{\varrho}\big), \qquad \text{(b) } \left(M, \frac{\varrho}{1+\varrho}\right), \qquad \text{(c) } \big(M, \ln(1 + \varrho)\big)$$
is metrikus tér.

5. Adjunk példát olyan metrikus térre, amelyben van olyan gömb, amelyik tartalmaz egy nagyobb sugarú valódi részgömböt.

6. Tegyük fel, hogy X olyan lineáris tér, amelyik tartalmaz az X nullelemétől, vagyis θ-tól különböző elemet is, azaz $X \neq \{\theta\}$. Legyen $\big(X, \|\cdot\|\big)$ egy normált tér, $a, b \in X$ és $0 < r, R \in \mathbb{R}$. Bizonyítsuk be, hogy a
$$K_r(a) \subset K_R(b) \quad \Longrightarrow \quad r \leq R$$
állítás igaz!

7. Mutassuk meg, hogy ha $\big(X, \|\cdot\|\big)$ normált tér, akkor a

$$\varrho(x,y) := \|x-y\| \qquad (x, y \in X)$$

függvény metrika X-en, azaz $\big(X, \varrho\big)$ metrikus tér.

8. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $1 \le p \le +\infty$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ és

$$\|x\|_p := \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}, & \text{ha } 1 \le p < +\infty \\ \max\limits_{1 \le k \le n} \{|x_k|\}, & \text{ha } p = +\infty. \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy a $p = 1$, a $p = 2$, valamint a $p = +\infty$ esetekben a fenti függvényeke mindegyike norma az $\mathbb{R}^n$ lineáris téren!

9. Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ lineáris téren értelmezett $\|\cdot\|_p$ $(1 \le p < +\infty)$ normákra tetszőlegesen rögzített $x \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén igaz az

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|x\|_p$$

határérték-egyenlőség!

10. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $0 < p < 1$ és $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Bizonyítsuk be, hogy ezek a függvények nem normák az $\mathbb{R}^n$ lineáris téren!

■ Házi feladatok

1. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$\varrho_1(x,y) := (x-y)^2, \quad \varrho_2(x,y) := \sqrt{|x-y|}, \quad \varrho_3(x,y) := \left|x^2 - y^2\right|,$$
$$\varrho_4(x,y) := |x-2y|, \quad \varrho_5(x,y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|}, \; \varrho_6(x,y) := |e^x - e^y|,$$
$$\varrho_6(x,y) := \begin{cases} |x-y|, & \text{ha } x \le y \\ 1 + |x-y|, & \text{ha } x > y. \end{cases}$$

Döntse el mindegyik függvényről, hogy metrika-e vagy sem.

2. Igaz-e, hogy az

$$\|x\| := \max\big\{|2x_1 - x_2|, |4x_1|\big\} \quad \big(x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény norma az $\mathbb{R}^2$ lineáris téren?

■ Gyakorló feladatok

1. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy szigorúan monoton növekedő függvény és

$$\varrho(x, y) := \big|f(x) - f(y)\big| \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bizonyítsa be, hogy ϱ metrika az $\mathbb{R}$ halmazon. Ha $f(x) := x$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor a „szokásos" metrikát kapjuk. Mutassa meg, hogy az $f(x) := \operatorname{arctg} x$ $(x \in \mathbb{R})$ választás is lehetséges, és az ezzel képzett metrikában bármelyik két $\mathbb{R}$-beli elem távolsága $< \pi$.

2. Tegyük fel, hogy $\|\cdot\|$ egy norma $\mathbb{R}$-en. Mutassa meg, hogy ekkor létezik olyan pozitív α valós szám, amellyel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén az $\|x\| = \alpha \cdot |x|$ egyenőség teljesül.

3. **(A $\big(C[a,b], \|\cdot\|_p\big)$ normált terek.)** Az $[a, b]$ intervallumon $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$ értelmezett folytonos függvények $C[a, b]$-vel jelölt halmazán a függvények közötti szokásos $+$ és $\cdot_\lambda$ műveletekkel egy valós lineáris teret kapunk. Legyen $1 \le p \le +\infty$, $f \in C[a, b]$ és

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int\limits_a^b |f|^p\right)^{1/p}, & \text{ha } 1 \le p < +\infty \\ \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|, & \text{ha } p = +\infty. \end{cases}$$

Bizonyítsa be, hogy a $p = 1$, a $p = 2$, valamint a $p = +\infty$ esetekben a fenti függvényeke mindegyike norma a $C[a, b]$ lineáris téren!

4. Mutassa meg, hogy az $C[a, b]$ lineáris téren értelmezett $\|\cdot\|_p$ $(1 \le p < +\infty)$ normákra tetszőlegesen rögzített $f \in C[a, b]$ vektor esetén igaz az

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|f\|_p$$

határérték-egyenlőség!

5. (a) Mutassa meg, hogy az $l_1 := \left\{x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |x_k| < +\infty\right\}$ halmaz a sorozatok közötti szokásos műveletekkel (összeadás, számmal való szorzás) lineáris tér $\mathbb{R}$ felett, és az

$$\|x\|_1 := \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k| \quad \big(x \in l_1\big)$$

függvény norma az l_1 lineáris téren.

(b) Mutassa meg, hogy az $l_\infty := \left\{x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < +\infty\right\}$ halmaz a sorozatok közötti szokásos műveletekkel (összeadás, számmal való szorzás) lineáris tér $\mathbb{R}$ felett, és az

$$\|x\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| \quad \big(x \in l_\infty\big)$$

függvény norma az l_∞ lineáris téren.

■ További feladatok

1. Bizonyítsa be, hogy a metrika megadott axiómái nem függetlenek: Legyen $\emptyset \neq M$ egy tetszőleges halmaz, és tegyük fel, hogy a $\varrho : M \times M \to \mathbb{R}$ függvényre az alábbi két tulajdonság teljesül: minden $x, y, z \in M$ esetén

1) $\varrho(x, y) = 0 \iff x = y$,

2) $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(y, z)$.

Mutassa meg, hogy (M, ϱ) metrikus tér.

2. Mutassa meg, hogy az $l_2 := \Big\{x = (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\Big|\; \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|^2 < +\infty\Big\}$ halmaz a sorozatok közötti szokásos műveletekkel (összeadás, számmal való szorzás) lineáris tér $\mathbb{R}$ felett, és az

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|^2} \quad \big(x \in l_2\big)$$

függvény norma az l_2 lineáris téren.

3. Jelölje $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a valós sorozatok szokásos $(+, \cdot_\lambda)$ műveletekkel ellátott lineáris terét, és legyen

$$\varrho(x, y) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \qquad \big(x = (x_n),\, y = (y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big).$$

Mutassa meg, hogy

(a) a ϱ függvény metrika az $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ lineáris téren,

(b) ez a metrika nem származtatható normából, vagyis nincs olyan norma $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$-en, amelyik a ϱ metrikát indukálja.

Útmutatás. A (b) igazolásához először bizonyítsa be a következő állítást:
Egy X lineáris téren definiált ϱ metrika akkor és csak akkor származtatható egy $\|\cdot\|$ normából a $\varrho(x, y) = \|x - y\|$ összefüggéssel, ha ϱ minden $x, y, z \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén teljesíti a következő két feltételt:

(i) $\varrho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, \varrho(x, y)$ (*abszolút homogenitás*),

(ii) $\varrho(x + z, y + z) = \varrho(x, y)$ (*eltolásinvariáns*).

3. gyakorlat

Metrikus terek és normált terek 2.

Szükséges ismeretek

- A konvergens sorozat fogalma normált, illetve metrikus terekben. Alaptulajdonságok.
- Vektorsorozat konvergenciája.
- A Cauchy-féle konvergenciakritérium normált terekben. Teljes normált terek vagy Banach-terek, példák. A Cauchy-kritérium $\mathbb{R}^n$-ben.
- A Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel $\mathbb{R}^n$-ben.

Feladatok

1. Melyek a konvergens sorozatok a diszkrét metrikus térben? Teljes-e a diszkrét metrikus tér?

2. Legyen $\big(X, \|\cdot\|\big)$ normált tér, $a \in X$ és $r > 0$. Mutassuk meg, hogy a

$$K_r(a) := \big\{x \in X \;\big|\; \|x - a\| < r\big\} \subset X$$

nyílt gömb nyílt halmaz, a

$$\overline{K}_r(a) := \big\{x \in X \;\big|\; \|x - a\| \le r\big\} \subset X$$

zárt gömb pedig zárt halmaz.

3. Konvergens-e az

$$f_k(x) := \frac{k^2x^3}{1 + k^2x^4} \qquad \big(x \in [1, 2],\ k \in \mathbb{N}^+\big)$$

függvénysorozat a $\big(C[1, 2], \|\cdot\|_\infty\big)$, illetve a $\big(C[1, 2], \|\cdot\|_1\big)$ normált térben?

4. Legyen

$$f_k(x) := x^k - x^{2k} \quad \big(x \in [0, 1],\ k \in \mathbb{N}^+\big).$$

Mutassuk meg, hogy az (f_k) függvénysorozat

(a) az $f(x) := 0$ $(x \in [0, 1])$ függvényhez konvergál a $\big(C[0, 1], \|\cdot\|_1\big)$ normált térben,

(b) nem konvergens a $\big(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty\big)$ normált térben!

Házi feladatok

1. Tegyük fel, hogy $\big(X, \|\cdot\|\big)$ normált tér, és legyen $\emptyset \neq A \subset X$. Bizonyítsa be, hogy

$$a \in A' \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, K(a):\ A \cap \big(K(a) \setminus \{a\}\big) \neq \emptyset.$$

2. Legyen
$$f_k(x) := \frac{kx^2}{1+kx^2} \quad \big(x \in [0,1],\ k = 1,2,3,\ldots\big).$$
Mutassa meg, hogy az (f_k) függvénysorozat a $\big(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\big)$ normált térben divergens, a $\big(C[0,1], \|\cdot\|_1\big)$ normált térben pedig az $f(x) = 1$ $(x \in [0,1])$ függvényhez konvergál!

■ Gyakorló feladatok

1. Legyen $(X, \|\cdot\|)$ tetszőleges normált tér. Bizonyítsa be, hogy ekkor

(a) tetszőleges $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ elemekre $(n \geq 2)$
$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_n\|;$$

(b) minden $x, y \in X$ esetén
$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|.$$

2. Tegyük fel, hogy az $\big(X, \|\cdot\|\big)$ normált tér $(x_k) : \mathbb{N} \to X$ sorozata konvergens. Lássa be, hogy ekkor egyértelműen létezik olyan $\alpha \in X$, amellyel
$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \ \ \exists\, k_0 \in \mathbb{N}, \ \ \forall\, k > k_0 : \ \|x_k - \alpha\| < \varepsilon.$$

3. Határozza meg az
$$A := \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \ \Big|\ n, m \in \mathbb{N}^+ \right\} \subset \mathbb{R}^2$$
halmaz torlódási pontjait az $\big(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\big)$ normált térben!

4. Bizonyítsa be, hogy az
$$f_k(x) := x^k \quad \big(x \in [0,1],\ k \in \mathbb{N}\big)$$
függvénysorozat a $\big(C[0,1], \|\cdot\|_1\big)$ normált térben konvergens, a $\big(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\big)$ normált térben pedig divergens.

Mi a helyzet akkor, ha $C[0,1]$ helyett a $C[0,\alpha]$ lineáris teret tekintjük, ahol $0 < \alpha < 1$?

5. Konvergensek-e a $\big(C(I), \|\cdot\|_\infty\big)$, illetve a $\big(C(I), \|\cdot\|_1\big)$ normált térben az alábbi függvénysorozatok:

(a) $f_k(x) := \dfrac{1}{x+k} \quad \big(x \in I := [0,2],\ k = 1,2,3,\ldots\big)$,

(b) $f_k(x) := \dfrac{k\,x}{1+k^2x^2} \quad \big(x \in I := [0,2],\ k = 1,2,3,\ldots\big)$,

(c) $f_k(x) := x^k - x^{k+1} \quad \big(x \in I := [0,1],\ k \in \mathbb{N}\big)$?

■ További feladatok

1. Bizonyítsa be, hogy az $\big(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p\big)$ $(2 \le n \in \mathbb{N})$ tér $\|\cdot\|_p$ normája $(1 \le p \le +\infty)$ akkor és csak akkor származtatható skaláris szorzatból, ha $p = 2$.

Útmutatás. Alkalmazza a Neumann–Jordan-tételt, és tekintse az $x := (1, 0, \ldots, 0)$, $y := (0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ vektorokat!

2. Legyen

$$\varrho(n, m) := \begin{cases} 2^{-n}, & \text{ha } n < m \\ 2^{-m}, & \text{ha } m < n \\ 0, & \text{ha } n = m \end{cases} \qquad (n, m = 1, 2, 3, \ldots).$$

(a) Igazolja, hogy $\big(\mathbb{N}, \varrho\big)$ metrikus tér.

(b) Jellemezze a fenti metrikus térbeli konvergens sorozatokat.

(c) Teljes-e ez a metrikus tér?

3. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $M_n := \{0, 1\}^n$ és $x = (x_1, \ldots, x_n) \in M_n$.

(a) Mutassa meg, hogy a

$$\varrho_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \qquad (x, y \in M_n)$$

függvény metrika az M_n halmazon! (Ez az ún. *Hamming-távolság.*)

(b) Jellemezze a konvergens sorozatokat az $\big(M_n, \varrho_n\big)$ metrikus térben!

(c) Teljes-e ez a metrikus tér?

4. Legyen

$$\varrho(m, n) = \begin{cases} 0, & \text{ha } m = n \\ \dfrac{1}{1 + \min\{m, n\}}, & \text{ha } m \ne n \end{cases} \qquad \big(m, n \in \mathbb{N}\big).$$

Mutassa meg, hogy

(a) $\big(\mathbb{N}, \varrho\big)$ metrikus tér,

(b) $\big(\mathbb{N}, \varrho\big)$ nem teljes.

5. Legyen A a $C[0, 1]$ lineáris térnek az a részhalmaza, amelyik pontosan az alábbi függvényeket tartalmazza:

$$f_n(x) := \begin{cases} 2n^2 x, & \text{ha } 0 \le x \le \frac{1}{2n} \\ 2n^2\big(\frac{1}{n} - x\big), & \text{ha } \frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

Igazolja, hogy

(a) az A halmaz korlátos a $\big(C[0, 1], \|\cdot\|_1\big)$ normált térben,

(b) az A halmaz nem korlátos a $\big(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty\big)$ normált térben.

4. gyakorlat

Függvények folytonossága és határértéke

Szükséges ismeretek

- $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvények folytonosságának a definíciója.
- A folytonosságra vonatkozó átviteli elv.
- $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvények határértékének a definíciója. Ekvivalens átfogalmazások.
- A határértékre vonatkozó átviteli elv.

Feladatok

1. A koordinátasíkokkal párhuzamos metszetgörbék vizsgálata alapján szemléltessük az

$$f(x,y) := y^2 - x^2 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény grafikonját, vagyis a $z = y^2 - x^2$ egyenletű felületet (ez az ún. **nyeregfelület**)!

2. A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény folytonos a $(0,0)$ pontban!

3. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény nem folytonos a $(0,0)$ pontban!

4. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy

(a) az f függvény leszűkítése minden, az origón átmenő egyenesre egy folytonos egyváltozós függvény,

(b) de f nem folytonos az origóban: $f \notin C\{(0,0)\}$!

5. Lássuk be, hogy

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = 2.$

6. (a) Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^4 y}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény folytonos a $(0,0)$ pontban!

(b) Mutassuk meg, hogy a

$$g(x,y) := \frac{x^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big)$$

függvénynek nincs határértéke a $(0,0)$ pontban!

7. Léteznek-e a

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$, (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

határértékek? Ha igen, számoljuk ki az értéküket!

Házi feladatok

1. Folytonosak-e az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3 y^2}{3x^2+2y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

$$g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

függvények az origóban?

2. Léteznek-e a

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$, (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y^4}{x^2+3y^2}$

határértékek? Ha igen, számolja ki az értéküket.

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg és szemléltesse az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek a koordinátasíkokkal párhuzamos síkmetszeteit és szintvonalait. Milyen felülettel szemléltethető a függvény a térbeli koordináta-rendszerben?

(a) $f(x,y) := \sqrt{1-x^2-y^2} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ x^2+y^2 \le 1\big)$,

(b) $f(x,y) := e^{-(x^2+y^2)} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$.

2. Az $f(x,y) := x^2 + y^2$ $\big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$ függvény grafikonja egy forgásparaboloid. Milyen felülettel szemléltethető a

$$g(x,y) := x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény a térbeli koordináta-rendszerben?

3. Legyen

$$f(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big)$$

Bizonyítsa be, hogy

(a) $\exists \lim\limits_{x\to 0} \big(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\big)$, (b) $\exists \lim\limits_{y\to 0} \big(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\big)$,

(c) $\nexists \lim\limits_{(0,0)} f$.

4. Léteznek-e a

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$, (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^4}{x^2+y^2}$,

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+y)^3}{5x^3+y^3}$, (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^3}{|x|+|y|}$,

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

határértékek? Ha igen, számoljuk ki az értéküket!

■ További feladatok

1. Legyen

$$f(x,y) := (x+y) \cdot \sin\frac{1}{x} \cdot \sin\frac{1}{y} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big)$$

Bizonyítsa be, hogy

(a) $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \big(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\big)$, (b) $\nexists \lim\limits_{y\to 0} \big(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\big)$,

(c) $\exists \lim\limits_{(0,0)} f$.

2. Mutassa meg, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = 1.$$

5. gyakorlat

Differenciálszámítás 1.

Szükséges ismeretek

- Parciális deriváltak $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvényekre.
- Iránymenti deriváltak $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvényekre.
- $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú lineáris leképezések. Lineáris leképezések és mátrixok közötti kapcsolat: $\mathcal{L}\big(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\big) \cong \mathbb{R}^{m\times n}$.
- Totális derivált értelmezése $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvényekre.
  A deriváltmátrix egyértelműsége és előállítása a parciális deriváltakkal.

Feladatok

1. Számítsuk ki az

$$f(x,y) := \frac{x^2 - y^3}{xy} \quad (x, y > 0)$$

függvény x és y változók szerinti parciális deriváltjait!

2. Melyik $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt határozzák meg (együtt) az alábbi egyenlőségek:

$$\partial_x f(x,y) = x^2 y, \quad \partial_y f(x,y) = 1 + \frac{x^3}{3} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)?$$

3. Legyen

$$f(x,y) := x^3 y + x^2 y^2 + x + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Számítsuk ki a függvény másodrendű parciális deriváltjait az $(x, y) = (1, 0)$ pontban!

4. Legyen

$$f(x,y) := x^2 - xy + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

$a := (a_1, a_2) = (1, 1)$ és v az x-tengely pozitív ágával α szöget bezáró euklideszi normában vett egységvektor.

(a) Határozzuk meg a definíció alapján a $\partial_v f(a)$ iránymenti deriváltat!

(b) Ellenőrizzük a kapott eredményt a tanult tétellel!

(c) Melyik irány esetén lesz a derivált értéke a legnagyobb?

5. Határozzuk meg az

$$f(x,y) := \frac{y^3}{e^{2x+1}} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény iránymenti deriváltját a $P\big(-\frac{1}{2}, 1\big)$ pontban az $u = (1, 2)$ vektor által meghatározott irány mentén!

6. A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x,y) := 2x^2 + 3xy - y^2 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény totálisan deriválható az $a := (1,2)$ pontban, és adjuk meg az $f'(a)$ deriváltmátrixot! Az $f'(a)$-ra így kapott eredményt ellenőrizzük a Jacobi-mátrix kiszámításával!

7. A definíció alapján lássuk be, hogy az

$$f(x,y) := \begin{bmatrix} x^2 + xy \\ y^2 - 2x^2 \end{bmatrix} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény totálisan deriválható az $a = (-1,1)$ pontban, és határozzuk meg az $f'(a)$ deriváltmátrixot! Az $f'(a)$-ra így kapott eredményt ellenőrizzük a Jacobi-mátrix kiszámításával!

8. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x,y) := \sqrt{|xy|} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény folytonos a $(0,0)$ pontban, ott léteznek a parciális deriváltak, de f nem differenciálható a $(0,0)$ pontban!

■ Házi feladatok

1. Számolja ki az

$$f(x,y) := xe^{yx} - xy \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény iránymenti deriváltját az $(1,1)$ pontban a $v = (3,4)$ vektor által meghatározott irány mentén!

2. A definíció alapján lássa be, hogy az

$$f(x,y) := x^3 + xy \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény totálisan deriválható az $a := (2,3)$ pontban, és adja meg az $f'(a)$ deriváltmátrixot! Az $f'(a)$-ra így kapott eredményt ellenőrizze a Jacobi-mátrix kiszámításával!

3. A definíció alapján lássa be, hogy az

$$f(x,y) := \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \end{bmatrix} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény deriválható a $a := (1,2)$ pontban, és adja meg $f'(a)$-t. Az $f'(a)$-ra így kapott eredményt ellenőrizze a Jacobi-mátrix kiszámításával!

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki az

(a) $f(x,y) := y^2 \ln(xy) \quad (x,y > 0)$,

(b) $f(x,y) := e^{x^2 y} - 2x^2y^7 \sin(x+y) \quad (x,y \in \mathbb{R})$,

(c) $f(x,y) := e^x \cos y - x \ln y \quad (x,y > 0)$

függvény x és y változók szerinti parciális deriváltjait!

2. Határozza meg az $f(x,y) := x^3e^{y^2}$ $\big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$ függvény összes első- és másodrendű parciális deriváltját az $(x,y) := (2,1)$ pontban!

3. Milyen v irányban lesz a $\partial_v f(1,2)$ iránymeni derivált a legnagyobb, ha

$$f(x,y) := e^{y-2x} \sin \pi xy \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}\big)?$$

4. Vizsgálja meg a definíció szerint az alábbi függvények totális differenciálhatóságát a megadott pontokban!

(a) $f(x,y) := x^2 + xy \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big), \quad a = (2,1),$

(b) $f(x,y) := (x+y)^3 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big), \quad a = (1,2),$

(c) $f(x,y) := \sqrt[3]{x^3+y^3} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big), \quad a = (0,0),$

(d) $f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad a = (0,0).$

5. Legyen

$$A := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 < 1 \quad \text{vagy} \quad x^2 + (y+1)^2 < 1\big\},$$
$$B := \big\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\big\}.$$

Bizonyítsa be, hogy a

$$\chi_{A \cup B}(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{ha } (x,y) \in A \cup B \\ 0, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big(A \cup B\big) \end{cases}$$

függvény (az $A \cup B$ halmaz *karakterisztikus függvénye*) minden irányban deriválható a $(0,0)$ pontban, de nem deriválható (totálisan) a $(0,0)$ pontban!

6. Mutassa meg, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \text{ és } y = x^2 \\ 0, & \text{egyéb } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ pontban} \end{cases}$$

képlettel értelmezett $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény a $(0,0)$ pontban deriválható minden irányban, de ott totálisan nem deriválható, mert még csak nem is folytonos a $(0,0)$ pontban!

7. Legyen

$$f(x,y) := \sqrt{3(x-1)^4 + 2y^2} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Igazolja, hogy $\exists\, \partial_x f(1,0)$, de $\nexists\, \partial_y f(1,0)$!

8. Legyen

$$f(x,t) := \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}\right) \quad \big(x \in \mathbb{R},\ t \in (0,+\infty\big),$$

ahol $a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ paraméterek. Mutassa meg, hogy fennáll a

$$\partial_t f(x,t) = a^2 \cdot \partial_{xx} f(x,t) \quad \big(x \in \mathbb{R},\ t \in (0,+\infty)\big)$$

egyenlőség! (Ez az ún. **hővezetési egyenlet**.)

6. gyakorlat

Differenciálszámítás 2.

Szükséges ismeretek

- Felület érintősíkja.
- Egy elégséges feltétel a totális deriválhatóságra.
- Algebrai műveletek differenciálható függvényekkel.
- Az összetett függvény deriválása (a láncszabály).

Feladatok

1. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az f függvény a $(0,0)$ pontban

(a) folytonos,

(b) minden irány mentén deriválható,

(c) totálisan nem deriválható!

2. Legyen

$$f(x,y) := \sqrt{x^2 - 2y^2} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 > 2y^2\big).$$

(a) Számítsuk ki az f függvény elsőrendű parciális deriváltjait!

(b) Írjuk fel a $z = \sqrt{x^2 - 2y^2}$ egyenletű felület $P_0(3,2)$ pontjához tartozó érintősíkjának az egyenletét, és adjuk meg a sík egy normálvektorát!

3. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2) \cdot \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Határozzuk meg a $\partial_1 f, \partial_2 f$ parciálisderivált-függvényeket!

(b) Bizonyítsuk be, hogy $\partial_1 f, \partial_2 f \notin C\{(0,0)\}$!

(c) Mutassuk meg, hogy $f \in D\{(0,0)\}$!

4. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy a $\partial_{12} f(0,0)$ és a $\partial_{21} f(0,0)$ parciális deriváltak léteznek, de ezek nem egyenlők:

$$\partial_{12} f(0,0) \neq \partial_{21} f(0,0).$$

Mutassuk meg azt is, hogy f nem differenciálható kétszer a $(0,0)$ pontban!

5. Tegyük fel, hogy az

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \quad \text{és a} \quad g:=(g_1,g_2):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$$

függvények mindenütt differenciálhatóak. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $F:=f\circ g$,

$$F(x):=(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=f\big(g_1(x),g_2(x)\big) \quad (x\in\mathbb{R})$$

összetett függvény mindenütt differenciálható, és $\forall\, x\in\mathbb{R}$ pontban

$$F'(x)=(f\circ g)'(x)=\partial_1 f\big(g_1(x),g_2(x)\big)\cdot g_1'(x)+\partial_2 f\big(g_1(x),g_2(x)\big)\cdot g_2'(x).$$

6. Tegyük fel, hogy az

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \quad \text{és a} \quad g:=(g_1,g_2):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$

függvények mindenütt differenciálhatóak. Bizonyítsuk be, hogy a $F:=f\circ g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény is mindenütt differenciálható, és számítsuk ki a

$$F(x)=(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=f\big(g_1(x),g_2(x)\big) \quad (x\in\mathbb{R}^2)$$

kompozíciófüggvénynek a parciálisderivált-függvényeit!

■ Házi feladatok

1. Írja fel a $z=x^2+3y^2$ egyenletű felület $(x_0,y_0)=(3,2)$ pontjához tartozó érintősíkjának az egyenletét, és adja meg a sík egy normálvektorát!

2. Legyen

$$f(x,y):=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(a) Mutassa meg, hogy $f\in C\big\{(0,0)\big\}$!

(b) Határozza meg a $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ függvényeket $\mathbb{R}^2$ minden pontjában!

(c) Bizonyítsa be, hogy $f\notin D\big\{(0,0)\big\}$!

■ Gyakorló feladatok

1. Legyen

$$f(x,y):=y\,e^{x^2} \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big),$$
$$g(u,v):=\begin{bmatrix}u\,v^2\\ u+v^2\end{bmatrix} \quad \big((u,v)\in\mathbb{R}^2\big).$$

Számítsa ki az $F:=f\circ g\in\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény parciálisderivált-függvényeit!

2. Legyen

$$f(x,y):=x^2+2y^2 \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big),$$
$$g(u,v):=\begin{bmatrix}u-v^2\\ uv\end{bmatrix} \quad \big((u,v)\in\mathbb{R}^2\big).$$

Tetszőleges $a:=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$ pontban számítsa ki $\big(f\circ g\big)'(a)$-t!

3. Mutassa meg, hogy ha $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F \in D$ és

$$f(x,y) := y \cdot F(x^2 - y^2) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

akkor

$$y^2 \cdot \partial_x f(x,y) + xy \cdot \partial_y f(x,y) = x \cdot f(x,y) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

■ További feladatok

1. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in D^3$ és

$$F(x,y,z) := f(xyz) \qquad \big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

Bizonyítsa be, hogy alkalmas $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénnyel

$$\partial_{123} F(x,y,z) = g(xyz) \qquad \big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

7. gyakorlat

Differenciálszámítás 3.

Szükséges ismeretek

- Magasabb rendű deriváltak.
- Young tétele.
- Taylor-polinomok.
- Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal.

Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, $f \in D^2\{a\}$ függvény $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ ponthoz tartozó második Taylor-polinomja a

$$T_{a,2}f(a+h) = f(a) + \langle f'(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle f''(a)\cdot h, h\rangle \qquad \left(h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \right)$$

alakban is felírható!

2. Legyen

$$P(x,y) := 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

(a) Írjuk fel a P polinom $a := (1,-2)$ ponthoz tartozó második Taylor-polinomját, vagyis $T_{a,2}P(x,y)$t!

(b) Mutassuk meg, hogy

$$P(x,y) = T_{a,2}P(x,y) \quad \big(\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

3. Alkalmas függvény alkalmas ponthoz tartozó első Taylor-polinomjával számítsuk ki az $1,02^{3,01}$ egy közelítő értékét, és azt hasonlítsuk össze számológéppel kapott eredménnyel!

4. Legyen

$$f(x,y) := \ln(1+x+y) \quad \big((x,y) \in K_{\frac{1}{4}}(0,0)\big).$$

Írjuk fel az f függvény $a := (0,0)$ ponthoz tartozó első Taylor-polinomját, és határozzuk meg, hogy $|x|, |y| \le 0,01$ esetén ez a polinom mekkora hibával közelíti meg a függvényt!

5. Adjunk közelítő képletet az

$$f(x,y) := \ln(1+x)\cdot\ln(1+y) \quad \big((x,y) \in K_{\frac{1}{2}}(0,0)\big)$$

függvényértékekre, a függvény $(0,0)$ ponthoz tartozó második Taylor-polinomjával!

Számítsunk ki néhány közelítő értéket, és azokat hasonlítsuk össze számológéppel kapott eredményekkel!

■ Házi feladatok

1. Írja fel az
$$f(x,y) := x^y + y^2 \cdot \cos(x-1) \quad \big((x,y) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}\big)$$
függvény $a = (1,3)$ ponthoz tartozó második Taylor polinomját!

2. Számítsa ki az $e^{0,1} \cdot \sin 0,2$ egy közelítő értékét alkalmas függvény alkalmas ponthoz tartozó első Taylor-polinomjával, majd azt hasonlítsa össze számológéppel kapott eredménnyel!

■ Gyakorló feladatok

1. A második Taylor-polinom segítségével adjon közelítő formulát az alábbi kifejezésekre az a pont valamely környezetéből vett (x,y) esetén:

(a) $\dfrac{\cos x}{\cos y}$, $a := (0,0)$;

(b) $\sin \dfrac{x}{1+y}$, $a := (-\pi, 2)$.

Számítson ki néhány közelítő értéket, és hasonlítsa össze azokat számológéppel kapott eredményekkel!

2. Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = (i_1, i_2) \in \mathbb{N}^2$ és $f \in D^3\{a\}$. Bizonyítsa be, hogy minden $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ pontban
$$\sum_{|i|=3} \frac{\partial^i f(a)}{i!} h^i = \partial_{111} f(a) \cdot \frac{h_1^3}{6} + \partial_{112} f(a) \cdot \frac{h_1^2 h_2}{2} + \partial_{122} f(a) \cdot \frac{h_1 h_2^2}{2} + \partial_{222} f(a) \cdot \frac{h_2^3}{6}.$$

3. Az
$$f(x,y) := x^2 y + x y^2 - 2xy \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$
függvény esetén számítsa ki az $a_{nk} \in \mathbb{R}$ $(n, k \in \mathbb{N})$ együtthatókat, ha
$$f(x,y) = \sum_{n,k=0}^{+\infty} a_{nk} (x-1)^n (y+1)^k \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

4. Legyen az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ függvény s-szer differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban. Mutassa meg, hogy a $T_{a,s} f$ az egyetlen a legfeljebb s-edfokú, n-változós polinomok között, amelyre teljesül, hogy $T_{a,s} f(a) = f(a)$ és
$$\partial_{i_1 i_2 \ldots i_k} T_{a,s} f(a) = \partial_{i_1 i_2 \ldots i_k} f(a)$$
minden $k \le s$ és $1 \le i_1, \ldots, i_k \le n$ esetén.

5. Bizonyítsa be, hogy ha a $G \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ egy legfeljebb s-edfokú, n-változós polinomra teljesül a
$$\lim_{h \to \theta_n} \frac{f(a+h) - G(a+h)}{\|h\|^s} = 0$$
egyenlőség (ahol $\|\cdot\|$ tetszőleges norma $\mathbb{R}^n$-en), akkor $G \equiv T_{a,s} f$. (Tehát a legfeljebb s-edfokú polinomok közül a $T_{a,s} f$ polinom az, amelyik az f függvényt az a pont egy környezetében a legjobban közelíti.)

8. gyakorlat

Differenciálszámítás 4.

Szükséges ismeretek

- Taylor-formula a Peano-féle maradéktaggal.
- $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvények lokális szélsőértékei.
- Elsőrendű szükséges feltétel a lokális szélsőértékre.
- Kvadratikus alakok értelmezése és osztályozása. A Sylvester-kritérium.
- Másodrendű elégséges feltétel a lokális szélsőértékre az általános, illetve az $n = 2$ speciális esetben.
- Másodrendű szükséges feltétel a lokális szélsőértékre.

Feladatok

1. A Sylvester-kritérium, ha $n = 2$: Legyen

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Mutassuk meg, hogy a

$$Q(h) := \langle A \cdot h, h\rangle = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 \quad \big(h = [h_1\ h_2]^T \in \mathbb{R}^2\big)$$

kvadratikus alak, illetve az $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix

- pozitív definit $\iff$ $a > 0$ és $\det A > 0$,
- negatív definit $\iff$ $a < 0$ és $\det A > 0$,
- indefinit $\iff$ $\det A < 0$.

2. Határozzuk meg az

$$f(x, y) := x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2 \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

3. Határozzuk meg az

$$f(x, y) := x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2 \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

4. Legyen

$$f(x, y) := x^4 + y^2 \quad \text{és} \quad g(x, y) := x^3 + y^2 \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Bizonyítsuk be a következő állításokat:

(a) Az f függvénynek az $a := (0, 0)$ pontban lokális (és abszolút) minimuma van, és g-nek ugyanott nincs lokális szélsőértéke.

(b) Az $f'(a) = (0, 0)$, $g'(a) = (0, 0)$, az $f''(a)$ és a $g''(a)$ Hesse-mátrixok pozitív szemidefinitek, de nem pozitív definitek.

A lokális szélsőértékre megfogalmazott másodrendű szükséges feltétel tehát nem elégséges.

5. Határozzuk meg az
$$f(x,y) := x^4y^5 \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$
függvény lokális szélsőértékhelyeit!

6. Határozzuk meg az
$$f(x,y) := 8x + \frac{1}{y} + \frac{y}{x} \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ és } x\cdot y\neq 0\big)$$
függvény lokális szélsőértékhelyeit!

■ Házi feladatok

1. Határozza meg az
$$f(x,y) := x^2+xy+y^2-5x-4y+1 \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$
függvény lokális szélsőértékhelyeit.

2. Határozza meg az
$$f(x,y) := x^3+y^3-9xy \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$
függvény lokális szélsőértékhelyeit.

3. Határozza meg az
$$f(x,y) := (2x^2+3y^2)\cdot e^{-x^2-y^2} \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$
függvény lokális szélsőértékhelyeit!

■ Gyakorló feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit!

(a) $f(x,y) := x^4y^2(4-x-y) \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$,

(b) $f(x,y) := x^3y^2(4-x-y) \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$,

(c) $f(x,y) := 2x^3-6x+y^3-12y+5 \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$,

(d) $f(x,y) := x^3y^5 \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$,

(e) $f(x,y) := x^2+2y+\dfrac{2}{xy} \quad (x,y\neq 0)$,

(f) $f(x,y) := \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}+(x-1)^{2022} \quad (x,y\neq 0)$,

(g) $f(x,y) := (x^2+2y^2)\cdot e^{-x^2-y^2} \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$,

(h) $f(x,y) := (1+e^y)\cos x - ye^y \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$.

9. gyakorlat

Differenciálszámítás 5.

Szükséges ismeretek

- $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvények abszolút szélsőértékei. Weierstrass tétele.
- Az egyenletes folytonosság fogalma $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényekre. Heine tétele.
- A paraméteres integrál értelmezése.
- A paraméteres integrál deriválhatósága.

Feladatok

1. Határozzuk meg az

$$f(x,y) := xy(x^2+y^2-1) \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvénynek az abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit a

$$H := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\big\}$$

zárt körlapon!

2. Határozzuk meg az

$$f(x,y) := x^3 - 12x + y^3 - 3y \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvénynek az abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit az alábbi halmazon:

$$H := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le 3, \ \ -x \le y \le 2\big\}.$$

3. Határozzuk meg az

$$f(x,y) := x^3y^5 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvénynek a

(a) lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit,

(b) az $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ pontok által határolt zárt háromszöglapon az abszolút szélsőértékhelyeit és az abszolút szélsőértékeit.

4. Téglatest alakú, felülről nyitott $4\,m^3$ térfogatú tartályt akarunk készíteni a lehető legkevesebb anyag felhasználásával. Hogyan válasszuk meg a tartály méreteit, és az elkészítéséhez mennyi anyagra lesz szükségünk?

Házi feladatok

1. Határozza meg az

$$f(x,y) := 2x + 6y + \frac{18}{xy} \quad (x>0, \ y>0)$$

függvénynek az abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit!

2. Határozza meg az

$$f(x,y) := 2x^3 - 6x + y^3 - 12y + 5 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvénynek a

(a) a lokális szélsőértékhelyeit és a lokális szélsőértékeit,

(b) az abszolút szélsőértékhelyeit és az abszolút szélsőértékeit az $A(0,0)$, $B(0,-3)$, $C(-2,-3)$, $D(-2,0)$ pontok által határolt zárt téglalapon.

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki az

$$f(x,y) := x^3 + y^3 - 9xy \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvénynek az

$$A := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 5,\ 0 \le y \le 2x\big\} \subset \mathcal{D}_f$$

halmazon az abszolút szélsőértékeit.

2. Határozza meg az

$$f(x,y) := x^3 - 3x^2 - y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvénynek a

(a) lokális szélsőértékhelyeit és a lokális szélsőértékeit,

(b) az $A := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge -1,\ x-1 \le y \le 4\big\}$ halmazon az abszolút szélsőértékeit.

3. Határozza meg az alábbi függvények abszolút szélsőértékeit:

(a) $f(x,y) := y(2x-3) \quad ((x,y) \in A)$, ahol a A halmaz az $y = x^2$ egyenletű parabola, az x-tengely és az $x = 2$ egyenes által határolt zárt síkrész;

(b) $f(x,y) := x^2 - y^2 - x \quad ((x,y) \in B)$, ahol a B halmaz az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű kör és a koordinátatengelyek által határolt zárt síkrész az első síknegyben;

(c) $f(x,y,z) := \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$, ahol x, y, z egy háromszög szögei.

4. Adott ponton áthaladó síkok közül melyik van az origótól a legmesszebb?

5. Egy folyó partján elterülő földterületből szeretnénk a maximális nagyságú egyenlőszárú tarpéz alakú területet körülhatárolni $200\,m$ hosszú kerítéssel. Hogyan válasszuk meg a trapéz adatait?

6. Legyenek adottak az $x_i \in \mathbb{R}^3$ (hely)vektorok és az $m_i > 0$ „súlyok” ($i = 1, 2, \ldots, n$; $n \in \mathbb{N}^+$). Adja meg azt az $x \in \mathbb{R}^3$ pontot, amelyre a $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2$ összeg minimális, ha r_i az x_i euklideszi távolsága x-től ($i = 1, 2, \ldots, n$).

10. gyakorlat

Integrálszámítás 1.

Szükséges ismeretek

- A többszörös integrál értelmezése $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvényekre.
- Kettős integrálok kiszámítása téglalapokon.
- Kettős integrálok kiszámítása normáltartományokon.

Feladatok

1. Tekintsük az $I := [0,1] \times [0,2]$ téglalapot. Kétféle sorrendben számítsuk ki az

$$\iint\limits_I x^3 \sqrt{y}\, dx\, dy$$

kettős integrált!

2. Számítsuk ki az

$$\iint\limits_I x \cdot \sin(xy)\, dx\, dy \qquad \left(I := \left[1,3\right] \times \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]\right).$$

kettős integrált!

3. Számítsuk ki a következő kettős integrált:

$$\iint\limits_H (2xy - x^3)\, dx\, dy,$$

ahol H az $y = x^2$ és az $y = x + 2$ egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkrész!

4. Legyen $H := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x\right\}$. Számítsuk ki a

$$\iint\limits_H (x + y)\, dx\, dy$$

integrált!

5. Jelölje H a $(0,2)$, az $(1,1)$ és a $(3,2)$ csúcspontú zárt háromszöglapot. Számítsuk ki az

$$\iint\limits_H y\, e^x\, dx\, dy$$

integrált!

6. Számítsuk ki az

$$f(x,y) := e^x\big(\sqrt{x} + y\big) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény integrálját az $x = 1$ és $y^2 = x$ egyenletű görbék által határolt korlátos és zárt halmazon úgy, hogy a H-val jelölt integrálási tartományt az x tengelyre nézve normáltartományként fogjuk fel!

■ Házi feladatok

1. Számítsa ki a

$$\iint_H \frac{y^2}{x^2+1}\,dx\,dy \qquad \big(H := [0,1]\times[-2,2]\big)$$

kettős integrált!

2. Számítsa ki a

$$\iint_H \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$$

kettős integrált, ahol H az $y \geq \frac{1}{x}$, az $y \leq x$ és az $1 \leq x \leq 2$ egyenlőtlenségekkel meghatározott korlátos és zárt síkrész!

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki a következő kettős integrálokat a megadott H téglalapokon:

(a) $\displaystyle\iint_H (4-x-y)\,dx\,dy, \qquad H := [0,2]\times[0,1],$

(b) $\displaystyle\iint_H (x^2y-2xy)\,dx\,dy, \qquad H := [0,3]\times[-2,0],$

(c) $\displaystyle\iint_H x\sqrt{x^2+y}\,dx\,dy, \qquad H := [0,1]\times[0,3],$

(d) $\displaystyle\iint_H \frac{y}{1+xy}\,dx\,dy, \qquad H := [0,1]\times[0,1],$

(e) $\displaystyle\iint_H e^{2x+y}\,dx\,dy, \qquad H := [0,\ln 2]\times[0,\ln 5],$

(f) $\displaystyle\iint_H xye^x\,dx\,dy, \qquad H := [0,1]\times[1,2],$

(g) $\displaystyle\iint_H \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\,dy, \qquad H := [0,1]\times[0,1].$

2. Számítsa ki a

$$\iint_H (x+6y)\,dy\,dx \qquad \Big(H := \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\big|\; 0\leq x\leq 1,\ x\leq y\leq 5x\big\}\Big)$$

kettős integrált!

3. Számítsa ki a

$$\iint_H \cos(x+y)\,dy\,dx \qquad \Big(H := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| 0 \le x \le \pi,\ 0 \le x \le y\big\}\Big)$$

kettős integrált!

4. Számítsa ki a

$$\iint_H e^{2x+3y}\,dx\,dy \qquad \Big(H := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| 0 \le y \le 1,\ 3y \le x \le 3\big\}\Big)$$

kettős integrált!

5. Számítsa ki a

$$\iint_H xy^2\,dx\,dy$$

kettős integrált, ahol H az $y = x^2$ és $y = \sqrt{8x}$ egyenletű görbék által közrezárt korlátos és zárt síkrész!

6. Számítsa ki a

$$\iint_H \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\,dy$$

kettős integrált, ahol H az $y^2 \le 8x$, az $y \le 2x$ és az $y + 4x \le 24$ egyenlőtlenségekkel meghatározott korlátos és zárt síkrész!

■ További feladatok

1. Legyen $H := [0,1] \times [0,1]$ és

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x-y}{(x+y)^3}, & \text{ha } xy \ne 0, \\ 0, & \text{ha } xy = 0. \end{cases}$$

Igazolja, hogy $f \notin R(H)$, de a szukcesszív integrálás elvégezhető a H téglalapon!

2. Számítsa ki a

$$\iint_H \operatorname{sign}(x - y^2)\,dy\,dx \qquad \Big(H := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le 2\big\}\Big)$$

kettős integrált!

3. Mutassuk meg, hogy minden $0 < a < b$ valós paraméter esetén

$$(*) \qquad \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right).$$

Megoldás. Legyen

$$g(x) := \frac{x^b - x^a}{\ln x} \qquad \big(x \in (0,1)\big).$$

Mivel $\lim\limits_{x\to 0+0} g(x) = 0$ és $\lim\limits_{x\to 1-0} g(x) = b - a$, továbbá $g \in C(0,1)$, ezért a szóban forgó integrál létezik.

Tekintsük ezután az

$$f(x,y) := x^y \qquad \big((x,y) \in [0,1] \times [a,b] =: I\big)$$

függvényt. Mivel $f \in C(I)$, ezért $f \in R(I)$, és

$$\iint\limits_I f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_a^b f(x,y)\,dy\right) dx = \int_a^b \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy.$$

Ekkor egyrészt

$$\int_a^b \left(\int_0^1 x^y\,dx\right) dy = \int_a^b \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_a^b \frac{1}{y+1}\,dy = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right).$$

Másrészt, ha $0 < x < 1$, akkor

$$\int_0^1 \left(\int_a^b x^y\,dy\right) dx = \int_0^1 \left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_{y=a}^{y=b} dx = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx,$$

ezért $(*)$ valóban igaz.

Megjegyzés. Igazolható, hogy a $(*)$ egyenlőség minden $-1 < a < b$ valós paraméter esetén is teljesül. ■

11. gyakorlat

Integrálszámítás 2.

Szükséges ismeretek

- Fubini tétele kettős integrálokra.
- Kettős integrálok kiszámítása téglalapokon.
- Kettős integrálok kiszámítása normáltartományokon.
- Integráltranszformáció kétváltozós függvényekre.
- Síkidom területe.
- Hengerszerű test térfogata.

Feladatok

1. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Tekintsük a következő integrált:

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Szemléltessük az integrálási tartományt! Cseréljük fel az integrálás sorrendjét!

2. Számítsuk ki a

$$\int_0^1 \int_{y^2}^1 y \sin x^2\,dx\,dy$$

integrált!

3. Számítsuk ki az

$$\iint_{1 \le x^2+y^2 \le 4} \ln\left(x^2+y^2\right) dx\,dy$$

kettős integrált!

4. Számítsuk ki az $xy = 1$, $xy = 4$, valamint az $y = x$ és az $y = 3x$ egyenletű görbék által meghatározott és az első síknegyedben fekvő zárt síkrész területét!

5. Határozzuk meg a $z = 1 - x^2 - y^2$ egyenletű felület (forgásparaboloid) és az xy sík által határolt korlátos és zárt térrész térfogatát!

6. Szemléltessük az

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = x + 2y + 3$$

egyenletekkel meghatározott korlátos és zárt térbeli tartományt, majd kettős integrál alkalmazásával számítsuk ki e térrész térfogatát!

■ Házi feladatok

1. Számítsa ki az

$$f(x,y) := \frac{1}{x^2+y^2+1} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény integrálját az $x^2+y^2 \leq 1$ és $y \geq 0$ egyenlőtlenségekkel meghatározott korlátos tartományon!

2. Számítsa ki a $z = 5 - x^2 - y^2$ forgásparaboloid és a $z = 1$ sík által határolt korlátos és zárt térrész térfogatát!

3. Számítsa ki a

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{x \sin y}{y}\, dy\, dx$$

integrált!

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki az

$$\iint\limits_{1 \leq x^2+y^2 \leq 3} \frac{x}{x^2+y^2}\, dx\, dy$$

kettős integrált!

2. Számítsa ki az

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \leq 1} e^{x^2+y^2}\, dx\, dy$$

kettős integrált!

3. Számítsa ki a

$$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\, dy\, dx \qquad \Big(D := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \leq 9,\ x \leq 0,\ y \geq 0\big\}\Big)$$

kettős integrált!

4. Számítsa ki a

$$\iint\limits_D \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\, dy\, dx \qquad \Big(D := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\big\}\Big)$$

kettős integrált!

5. Számítsa ki az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad (a, b > 0 \text{ paraméterek})$$

egyenletű ellipszis területét!

6. Mekkora annak a korlátos és zárt D síkidomnak a területe, melyet az alábbi egyenlőtlenség határoz meg:

$$x^2 + y^2 \leq 2ax \qquad (a > 0 \text{ paraméter}).$$

7. Számítsa ki az $xy = 1$, $xy = 4$, valamint az $y^2 = x$ és az $y^2 = 4x$ egyenletű görbék által meghatározott és az első síknegyedben fekvő zárt síkrész területét!

8. Számítsa ki a $z = x^2 + y^2 - 1$ forgásparaboloid, a $z = 2$ és a $z = 5$ síkok által határolt korlátos és zárt térrész térfogatát!

12. gyakorlat

Integrálszámítás 3.

■ Feladatok

1. Számítsuk ki annak a korlátos és zárt $T \subset \mathbb{R}^3$ térrésznek a $V(T)$ térfogatát, amelyet az $x^2 + y^2 + z^2 = \mathbb{R}^2$ egyenletű gömbfelület és az $x^2 - Rx + y^2 = 0$ egyenletű hengerfelület határol! (Ez az ún. **Viviani-féle test**.)

2. Legyenek a, b és c pozitív valós paraméterek. Határozzuk meg az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

egyenletű ellipszoiddal határolt térrész térfogatát!

3. Számítsuk ki a

$$\iiint\limits_H \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$$

hármas integrált, ahol H a koordinátasíkok és az $x+y+z=1$ egyenletű sík által határolt kompakt térrész!

4. Határozzuk meg az $y^2 = x$, $y = 0$ és az $x = 4$ egyenletű görbék által határolt kompakt síkidom súlypontjának a koordinátáit!

5. Legyen f nemnegatív folytonos függvény az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallumon. Tegyük fel, hogy az

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b],\ 0 \le y \le f(x)\}$$

síkidom $t(A)$ területe pozitív: $t(A) > 0$. Bizonyítsuk be, hogy a

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le x \le b,\ y^2 + z^2 \le f^2(x)\}$$

forgástest $V(H)$ térfogata egyenlő a $t(A)$-nak és a forgatás során az A súlypontja által leírt kör kerületének a szorzatával! (Ez az ún. *második Pappus–Guldin-szabály.*)