Valószínûségszámítás, 1. zárthelyi gyakorló feladatok, 2025. március 18.

A zárthelyi időpontja: 2025. március 25., 10:15–11:45 (90 perc)
A dolgozatban 5 feladat lesz, melyek mindenike 10 pontot ér.
A sikeres dolgozathoz minimum 30%-os eredmény (15 pont) elérése szükséges.
Segédeszköz (papír és toll – nem ceruza!) kivételével nem használható.

1. Anna nemrég találkozott egy régi barátjával egy kávézóban, és gyorsan felírta a telefonszámát egy szalvétára. Sajnos, mire hazaért, észrevette, hogy az utolsó három számjegy elmosódott, így olvashatatlanná vált. Feltéve, hogy ezeket a számjegyeket a szolgáltató véletlenszerűen és függetlenül osztotta ki (000 és 999 között), határozzuk meg az alábbi események valószínűségét!

(a) A hiányzó számjegyek a 7, 4, 0 (ebben a sorrendben)

(b) A hiányzó számjegyek halmaza $\{7, 4, 0\}$.

(c) A hiányzó számjegyek mind egyenlőek egymással.

(d) A hiányzó számjegyek közül kettő megegyezik, egy viszont ezektől különbözik.

(e) A hiányzó számjegyek páronként különbözők egymástól.

(f) Ellenőrizhető, hogy a (c), (d) és (e) kérdésre adott válaszok összege 1. Miért?

2. Az 1, 2, $\ldots, n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) számokat véletlenszerűen rendezzük sorba. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a felsorolásban nem lesz két egymást követő szám növekvő sorrendben egymás mellett (tehát nem lesz 12, 23, $\ldots, (n-1)n$ a felsorolásban)?

3. Egy orvost kihívnak egy beteg gyerekhez. Az orvos előzetes információval rendelkezik arról, hogy a környéken élő beteg gyerekek 90%-ának influenzája van, míg a maradék 10%-uk kanyaróban szenved. Tegyük fel, hogy azt is tudja, hogy a környéken más betegség jelenleg nem fordul nem fordul elő. A kanyaró jól ismert tünete a kiütés: a kanyarós gyerekek 95%-ának kiütései is lesznek. Előfordul azonban, hogy az influenzás gyerekek is kapnak kiütést, ennek valószínűsége 8%. A vizsgálat során az orvos kiütéseket talál a gyereken. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a gyerek kanyarós?

4. Korábbi eredmények azt mutatják, hogy átlagosan 1000 tranzisztorból 1 hibás.

(a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy 2000 darabos tételben pontosan 4 hibás tranzisztor található?

(b) Legfeljebb hány tranzisztort helyezhetünk el egy dobozban, hogy legalább $\frac{1}{2}$ valószínűséggel ne legyen köztük hibás darab?

5. Legyen $X \sim \mathrm{POI}(\lambda)$ egy Poisson-eloszlású valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterrel. Számítsuk ki

(a) az $\mathrm{E}[X(X-1)]$ várható értéket;

(b) a $\mathrm{D}^2[X]$ szórásnégyzetet. (*Tipp:* Használjuk az (a) feladat eredményét!)

6. Legyen $X \sim \mathrm{GEO}(p)$ egy geometriai eloszlású valószínűségi változó $p \in (0, 1]$ paraméterrel. Számítsuk ki 2^{-X} várható értékét!

7. Egy majom véletlenszerűen nyomogatja egy írógép billentyűzetének gombjait, amelyen az angol ábécé 26 betűje szerepel. A gombokat mindig egymástól függetlenül, egyenlő valószínűséggel választja. 100 gomb leütése után várhatóan hányszor jelenik meg a papíron az ABRACADABRA szó?

8. Legyen X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$$