Diszkrét matematika 1.

1. előadás

Fancsali Szabolcs (Ligeti Péter diái alapján)

nudniq@cs.elte.hu
www.cs.elte.hu/∼nudniq

Matematikai logika – emlékezetető

„Definíció”

A logika a helyes következtetések és bizonyítások tudománya. Alkalmazási területek:

- matematika
- informatika
- ...

Definíció

A predikátum olyan változóktól függő definiálatlan alapfogalom, amelyhez a változóik értékétől függően valamilyen igazságérték tartozik: igaz $(I, \uparrow)$*, hamis* $(H, \downarrow)$*, és a kettő egyidejűleg nem teljesül.*

Axiomatikus módszer

Közismert, nem definiált alapfogalmakból és bizonyos feltevésekből (axiómákból) következtetések vonunk le a logika szabályai alapján.

Logikai jelek

Logikai jelek

A predikátumokat logikai jelekkel köthetjük össze. Példák:

- tagadás (negáció), jele: $\neg A$
- és (konjunkció), jele: $A \wedge B$
- vagy (diszjunkció), megengedő vagy, jele: $A \vee B$
- ha, ..., akkor ... (implikáció), jele: $A \Rightarrow B$
- akkor és csak akkor (ekvivalencia), jele: $A \Leftrightarrow B$

Igazságtáblák

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
I	I	H	I	I	I	I
I	H	H	H	I	H	H
H	I	I	H	I	I	H
H	H	I	H	H	I	I

Logikai jelek tulajdonságai

Állítás

1. $(A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$, $(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$ (asszociativitás);
2. $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$, $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$ (kommutativitás);
3. $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$, $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ (disztributivitás);
4. $(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$, $(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ (De Morgan);
5. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (a kontrapozíció tétele);
6. $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$;
7. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ (szillogizmus);
8. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$.

Kvantorok, logikai formulák

Kvantorok

- egzisztenciális kvantor: "létezik", "van olyan", jele: $\exists$
- univerzális kvantor: "minden", jele: $\forall$

Formulák

A logikai formulák egy adott elmélet predikátumaiból épülnek fel a $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ logikai jelek, valamint a $\exists, \forall$ kvantorok segítségével.

Halmazok

Halmazelmélet predikátumai

- A halmaz: valamilyen módon definiált tulajdonság
- eleme: $x \in A$: az x elem hozzátartozik az A halmazhoz

A halmazok néhány alapvető tulajdonságát axiómákkal írjuk le.
Példa:

Meghatározottsági axióma

Egy halmazt az elemei egyértelműen meghatároznak.

- két halmaz pontosan akkor egyenlő, ha ugyanazok az elemeik
- egy halmaznak egy elem csak egyszer lehet eleme

Halmazok 2 - részhalmazok

Definíció

Az A *halmaz részhalmaza a* B *halmaznak:* $A \subset B$*, ha* $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$.
Ha $A \subset B$*-nek, de* $A \neq B$*, akkor* A *valódi részhalmaza B-nek:* $A \subsetneq B$.

Állítás (Részhalmazok tulajdonságai)

1. $\forall A \quad A \subset A$ *(reflexivitás).*
2. $\forall A, B, C \quad (A \subset B \land B \subset C) \Rightarrow A \subset C$ *(tranzitivitás).*
3. $\forall A, B \quad (A \subset B \land B \subset A) \Rightarrow A = B$ *(antiszimmetria).*

Megjegyzés

Halmazok egyenlősége egy további tulajdonságot is teljesít:

- $\forall A, B \quad A = B \Rightarrow B = A$ *(szimmetria).*

Halmazok 3 - speciális halmazok

Definíció

A halmaz és $\mathcal{F}(x)$ formula esetén $\{x \in A : \mathcal{F}(x)\}$ halmaz elemei pontosan azon elemei A-nak, melyre $\mathcal{F}(x)$ igaz.

Üres halmaz

Egy olyan halmaz, aminek nincs eleme. Jele $\emptyset$.

Halmaz megadása az elemeivel

Ha egy halmaznak csak az a elem az eleme, akkor $\{a\}$-val jelöljük. Ha egy halmaznak pontosan a és b az elemei, akkor a jele $\{a, b\}$, stb.

Műveletek halmazokkal

Definíció

Az A és B halmazok uniója: $A \cup B$ az a halmaz, mely pontosan az A és a B elemeit tartalmazza: $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$. Legyen $\mathcal{A}$ egy olyan halmaz, melynek az elemei is halmazok (halmazrendszer). Ekkor $\cup\mathcal{A} = \cup\{A : A \in \mathcal{A}\} = \cup_{A \in \mathcal{A}} A$ az a halmaz, mely az $\mathcal{A}$ összes elemének elemeit tartalmazza. Speciálisan: $A \cup B = \cup\{A, B\}$.

Állítás

1. $A \cup \emptyset = A$
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (*asszociativitás*)
3. $A \cup B = B \cup A$ (*kommutativitás*)
4. $A \cup A = A$ (*idempotencia*)
5. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

Műveletek halmazokkal - metszet

Definíció

Az A *és* B *halmazok metszete:* $A \cap B$ *az a halmaz, mely pontosan az* A *és a* B *közös elemeit tartalmazza:*
$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$.
$\mathcal{A}$ *halmazrendszer esetén* $\cap \mathcal{A} = \{x : x \in A, \forall A \in \mathcal{A}\}$.
Speciálisan: $A \cap B = \cap\{A, B\}$.
A *és* B *diszjunktak, ha* $A \cap B = \emptyset$.
Egy $\mathcal{A}$ *halmazrendszer diszjunkt, ha* $\cap \mathcal{A} = \emptyset$.
Egy $\mathcal{A}$ *halmazrendszer elemei páronként diszjunktak, ha*
$\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cap B = \emptyset$, *ha* $A \neq B$.

Metszet tulajdonságai

Állítás

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(asszociativitás)*
3. $A \cap B = B \cap A$ *(kommutativitás)*
4. $A \cap A = A$ *(idempotencia)*
5. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

Állítás (Disztributivitási szabályok)

Ha A, B, C halmazok, akkor

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Különbség, komplementer

Definíció

Az A és B halmazok különbsége: $A \setminus B$ az a halmaz, ami A azon elemeit tartalmazza, melyek nem elemei B-nek:
$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B.$
Egy X alaphalmaz és $A \subset X$ esetén az A halmaz X-re vonatkozó komplementere az $\overline{A} = X \setminus A.$

Állítás

$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$

Komplementer tulajdonságai

Állítás

Legyen $A, B \subset X$. *Ekkor igazak az alábbiak:*

1. $\overline{\overline{A}} = A$
2. $\overline{\emptyset} = X$
3. $\overline{X} = \emptyset$
4. $A \cap \overline{A} = \emptyset$
5. $A \cup \overline{A} = X$
6. $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
7. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
8. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Az utolsó kettőt de Morgan-szabályoknak nevezzük.

Egyéb halmazok

Definíció

Az A és B halmazok szimmetrikus differenciája
$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Állítás

$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Definíció

Ha A halmaz, akkor azt a halmazrendszert, amelynek elemei pontosan A részhalmazai, az A hatványhalmazának nevezzük:
$2^A = \{B : B \subset A\}$.

Állítás

$|2^A| = 2^{|A|}$.