凝聚态物理导论

刘沛松[†]
[†] 抽象物理研究所

2025 年 11 月 16 日

目录

1 格林函数

我们现在复习一下在之前的数学物理方法课程中学过的格林函数的概念. 一切的起点来自于 δ 函数的分布性质:

$$\int f(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = f(t_0) \tag{1}$$

对于任意的线性微分算符 $\hat{L}$, 我们需要满足:

$$\hat{L}[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)] = \alpha\hat{L}x_1(t)+\beta\hat{L}x_2(t) \tag{2}$$

所以对于一个线性微分方程:

$$\hat{L}x(t) = f(t) \tag{3}$$

我们可以构造出一个格林函数 $G(t,t')$, 使得:

$$\hat{L}x(t) = \int f(t')\delta(t-t')\,\mathrm{d}t' \tag{4}$$

利用线性的特点, 我们可以构造出一个格林函数满足:

$$x(t) = \int G(t,t')f(t')\,\mathrm{d}t' \tag{5}$$

代入我们的线性微分方程, 我们可以得到:

$$\hat{L}\int G(t,t')f(t')\,\mathrm{d}t' = \int f(t')\delta(t-t')\,\mathrm{d}t' \tag{6}$$

由于 $f(t')$ 是任意的, 我们可以得到格林函数需要满足的方程:

$$\hat{L}G(t,t') = \delta(t-t') \tag{7}$$

这个方程的意思就是, 如果我们对于一个线性系统施加一个 δ 函数的激励, 那么系统的响应就是格林函数 $G(t,t')$.

用生活化的方法理解也很简单, 就是我们考虑一个线性机器, 虽然你不知道他的具体工作机制, 但是你可以通过给他一个非常短暂的脉冲输入, 来观察他的输出, 来探测他的工作机制. 这个脉冲输入就是 δ 函数, 而机器的输出就是格林函数 $G(t,t')$. 因为机器的工作机制是线性的, 所以我们想知道机器对于任意输入的响应, 只需要把任意输入拆解成无数个 δ 函数脉冲的叠加, 然后把每个脉冲的响应叠加起来就可以了. 这就是格林函数方法在时域中的基本理解.

格林函数 $G(t,t')$ 实际上应该包含两层信息:

- 系统响应的强度, 也就是系统对于冲击的响应强度. 换句话说, 就是你敲打了一下这个机器, 他会响多大声.
- 系统响应的时间结构, 其实就是相位. 也就是说, 你敲打了一下这个机器, 他会在什么时候开始响, 响多长时间, 响的频率是多少等等.

对于大多数的系统来说, 我们的系统都满足时间平移不变性, 也就是说系统的性质不会随着时间的变化而变化. 比如说, 你敲打一个钟, 他会响, 这个钟的性质不会因为你在早上敲打和晚上敲打而变

化. 再比如说弹簧的刚度系数, 小物块的质量等等, 这些性质都是时间不变的. 所以我们的格林函数实际上只和时间差有关, 也就是说:

$$G(t,t') = G(t-t') \tag{8}$$

于是我们的时域方程变为:

$$\hat{L}G(t-t') = \delta(t-t') \Rightarrow \hat{L}G(\tau) = \delta(\tau) \tag{9}$$

对于时域的脉冲激励函数:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{10}$$

这实际上就是强度为 1 的所有频率的平面波的叠加.

所以现在我们可以提出一个新问题: 如何求得系统对于一个强度为 1 的任意频率 ω 做出的响应呢? 这个物理意思就是, 比如对于一个谐振子系统, 我们想知道当我们用频率为 ω 的外力去一直驱动它的时候, 它会做出什么样的响应 (包含两个层次, 响应的强度和相位).

如果我们考虑到系统的特性, 我们直觉上可以确定, 不同的系统一定对于自己的固有频率会有很强的响应, 而对于远离固有频率的驱动频率, 响应会很弱. 这个直觉来源于简单的力学实验: 共振现象发生于系统的驱动频率接近其固有频率的时候.

1.1 经典力学回顾: 带有阻尼的谐振子

我们先来回顾一下经典力学中带有阻尼的谐振子系统. 带有阻尼的谐振子系统的运动方程为:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + kx(t) = F(t) \tag{11}$$

其中 m 是质量, γ 是阻尼系数, k 是弹性系数, $F(t)$ 是外力. 现在我们考虑使用格林函数方法来求解这个方程, 格林函数需要满足:

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}G(t-t') + \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t-t') + kG(t-t') = \delta(t-t') \tag{12}$$

我们先考虑 $t \neq t'$, 的区域, 也就是齐次方程:

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}G(t-t') + \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t-t') + kG(t-t') = 0 \tag{13}$$

这又分为两个区域: $t < t'$ 和 $t > t'$, 他们的格林函数分别记为 $G^{<}(t-t')$ 和 $G^{>}(t-t')$. 我们先看特征方程:

$$m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0 \tag{14}$$

解得:

$$\lambda = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m} \tag{15}$$

根据判别式的不同, 我们有三种情况:

- $\gamma^2 > 4mk$: 过阻尼情况, 两个实根 λ_1, λ_2.

- $\gamma^2 = 4mk$: 临界阻尼情况, 一个重根 λ.
- $\gamma^2 < 4mk$: 欠阻尼情况, 一对共轭复根 $\lambda = -\beta \pm \mathrm{i}\omega_1$.

其中:

$$\beta = \frac{\gamma}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2} \tag{16}$$

对于每一种情况, 我们都可以写出齐次方程的通解.

以欠阻尼情况为例, 齐次方程的通解为:

$$G(t,t') = \mathrm{e}^{-\beta t}(C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \sin\omega_1 t) \tag{17}$$

对于 $t < t'$ 的区域, 我们的解释:

$$G^{<}(t,t') = \mathrm{e}^{-\beta t}(A_1 \cos\omega_1 t + A_2 \sin\omega_1 t) \tag{18}$$

对于 $t > t'$ 的区域, 我们的解释:

$$G^{>}(t,t') = \mathrm{e}^{-\beta t}(B_1 \cos\omega_1 t + B_2 \sin\omega_1 t) \tag{19}$$

我们现在考虑边界条件, 就是最一般的因果关系, 也就是说, 系统不可能在受到激励之前就做出响应. 所以我们有:

$$G^{<}(t,t') = 0 \quad (t < t') \tag{20}$$

所以 $A_1 = A_2 = 0$. 接下来我们需要考虑在 $t = t'$ 处的连续性条件和跳跃条件. 首先是连续性条件:

$$G^{<}(t',t') = G^{>}(t',t') \tag{21}$$

由于 $G^{<}(t',t') = 0$, 所以我们有:

$$0 = \mathrm{e}^{-\beta t'}(B_1 \cos\omega_1 t' + B_2 \sin\omega_1 t') \tag{22}$$

接下来是跳跃条件, 我们对格林函数方程在 $t = t'$ 处积分:

$$\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \left[m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}G(t-t') + \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t-t') + kG(t-t') \right] \mathrm{d}t = \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \delta(t-t')\,\mathrm{d}t \tag{23}$$

取 $\varepsilon \to 0$, 我们得到:

$$m\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t-t')\right]_{t=t'-0}^{t=t'+0} = 1 \tag{24}$$

也就是说:

$$m\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G^{>}(t',t') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G^{<}(t',t')\right) = 1 \tag{25}$$

由于 $G^{<}(t',t') = 0$, 所以:

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G^{>}(t',t') = 1 \tag{26}$$

从而我们可以解出 B_1 和 B_2:

$$B_1 = 0, \quad B_2 = \frac{1}{m\omega_1}\mathrm{e}^{\beta t'} \tag{27}$$

所以最终我们得到欠阻尼情况下的格林函数为:

$$G(t,t') = \Theta(t-t')\frac{1}{m\omega_1}\mathrm{e}^{-\beta(t-t')}\sin(\omega_1(t-t')) \tag{28}$$

其中 $\Theta(t-t')$ 是 Heaviside 阶跃函数, 保证了因果关系. 从而我们任意的一个解可以写为:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(t,t')f(t')\,\mathrm{d}t'=\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{m\omega_1}\mathrm{e}^{-\beta(t-t')}\sin(\omega_1(t-t'))f(t')\,\mathrm{d}t' \tag{29}$$

这是我们之前在数学物理方法课程中学过的内容.

先咋我们考虑 Fourier 变换的方法来求解格林函数, 我们需要求解的函数是:

$$\hat{L}G(t-t')=\delta(t-t') \tag{30}$$

注意, 我们之前就说了, 因为系统是时间平移不变的, 所以格林函数只和时间差有关:

$$\hat{L}G(\tau)=\delta(\tau) \tag{31}$$

我们对上式两边做 Fourier 变换:

$$\mathscr{F}\left[\frac{\mathrm{d}^2G(\tau)}{\mathrm{d}t^2}\right]=-\omega^2\tilde{G}(\omega),\quad \mathscr{F}\left[\frac{\mathrm{d}G(\tau)}{\mathrm{d}t}\right]=-\mathrm{i}\omega\tilde{G}(\omega),\quad \mathscr{F}\left[G(\tau)\right]=\tilde{G}(\omega) \tag{32}$$

所以我们得到:

$$(-m\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega+k)\tilde{G}(\omega)=1 \tag{33}$$

从而我们得到频域的格林函数为:

$$\tilde{G}(\omega)=\frac{1}{-m\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega+k}=\frac{1}{m(\omega_0^2-\omega^2)-\mathrm{i}\,\gamma\omega} \tag{34}$$

我们先不着急往下算东西, 我们先来物理理解一下这个频域格林函数.

$$(-m\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega+k)\tilde{G}(\omega)=1 \tag{35}$$

这个方程的物理意义是, 当我们给系统一个频率为 ω 的驱动力的时候, 如果强度是 1, 那么系统会做出的响应就是 $\tilde{G}(\omega)$, 他的强度 $|\tilde{G}(\omega)|$, 反应了系统对于强度为 1 的频率为 ω 的驱动力的响应强度, 而相位 $\arg\tilde{G}(\omega)$ 则反应了系统响应的时间结构, 其实就是延迟. 我们可以计算出响应的强度:

$$|\tilde{G}(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(m(\omega_0^2-\omega^2))^2+(\gamma\omega)^2}} \tag{36}$$

以及相位:

$$\arg\tilde{G}(\omega)=\tan^{-1}\left(\frac{\gamma\omega}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\right) \tag{37}$$

我们可以看到, 当 ω 接近 ω_0 的时候,, 响应的强度会变得很大, 这就是共振现象. 注意这里的共振峰是有限的, 因为我们有阻尼项 γ, 如果没有阻尼项, 那么在 $\omega=\omega_0$ 的时候, 响应强度会发散. 而且, 真正的共振峰位置会因为阻尼项的存在而发生偏移, 具体来说, 共振峰位置在:

$$\omega_{\text{res}}=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{2m^2}} \tag{38}$$

现在我们必须把两个拼图拼在一起, 也就是时域和频域的格林函数之间的关系. 从频域出发, 我们知道, 对于频率为 ω 强度为 1 的波, 系统的响应为 $\tilde{G}(\omega)$. 如果我们回到时域来看, 我们时域的格林函数就是把不同的频率的响应叠加起来:

$$G(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega \tag{39}$$

这个数学技巧我们要熟悉:

$$G(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}}{-m\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega+k}\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}}{-m(\omega^2+2\mathrm{i}\beta\omega-\omega_0^2)}\,\mathrm{d}\omega \tag{40}$$

我们自然是要把奇点找出来, 实际上之前解特征方程已经解出来了:

$$\omega_+=-\mathrm{i}\beta+\omega_1,\quad \omega_-=-\mathrm{i}\beta-\omega_1 \tag{41}$$

现在主要是把围道积分选对, 我们注意到被积因子中有 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}$, 所以当 $\tau>0$ 的时候, 我们应该把围道闭合在下半平面, 这样积分在无穷远处的贡献会消失 (根据 Jordan 引理). 使用留数定理, 我们考虑 $\omega=\omega_+$ 的留数:

$$\mathrm{Res}=\lim_{\omega\to\omega_+}(\omega-\omega_+)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}}{-m(\omega-\omega_+)(\omega-\omega_-)}=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_+\tau}}{-m(\omega_+-\omega_-)} \tag{42}$$

还得考虑到 $\omega=\omega_-$ 的留数 (因为大家都在下半平面, 被围道包围):

$$\mathrm{Res}=\lim_{\omega\to\omega_-}(\omega-\omega_-)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}}{-m(\omega-\omega_+)(\omega-\omega_-)}=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_-\tau}}{-m(\omega_--\omega_+)} \tag{43}$$

所以我们得到:

$$\sum\mathrm{Res}=\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\beta\tau}}{m\omega_1}\sin\omega_1\tau \tag{44}$$

这个时候应用留数定理要小心了!

$$\oint_\gamma f(\omega)\,\mathrm{d}\omega=-2\pi\mathrm{i}\sum\mathrm{Res} \tag{45}$$

这个负号是因为我们现在围道是顺时针方向的: 从负无穷到正无穷, 然后从正无穷的大半圆回到负无穷, 这是顺时针方向. 所以我们得到:

$$G(\tau)=\Theta(\tau)\frac{1}{m\omega_1}\mathrm{e}^{-\beta\tau}\sin\omega_1\tau \tag{46}$$

这就是我们之前求过的时域格林函数! 这样, 我们就确定了时域和频域格林函数之间的关系. 通过频域格林函数, 我们可以很方便地分析系统对于不同频率驱动力的响应特性, 包括共振现象和相位延迟等.

目前为止, 我们还没有仔细探究过频域格林函数的相位延迟这个问题, 我们注意到:

$$\arg\tilde{G}(\omega)=\arctan\left(\frac{\gamma\omega}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\right) \tag{47}$$

我们看看这个相位在不同频率下的表现:

1. 当 $\omega\ll\omega_0$ 的时候, 也就是驱动频率远低于系统的固有频率, 这个时候 $\arg\tilde{G}(\omega)\approx 0$, 也就是说系统的响应和驱动力是同相的, 没有相位延迟. 换句话说, 我们系统的反应频率是可以跟上驱动力的频率的, 所以没有相位延迟.

2. 当 $\omega=\omega_0$ 的时候, 也就是驱动频率等于系统的固有频率, 这个时候 $\arg\tilde{G}(\omega)=\frac{\pi}{2}$, 也就是说系统的响应相对于驱动力有 $\frac{\pi}{2}$ 的相位延迟.

3. 当 $\omega\gg\omega_0$ 的时候, 也就是驱动频率远高于系统的固有频率, 这个时候 $\arg\tilde{G}(\omega)\approx\pi$, 也就是说系统的响应相对于驱动力有 π 的相位延迟, 输出和输入是反相的. 这就是机械系统中的惯性效应.

总结 1.1: 初识格林函数

1. 我们知道了时域格林函数, 他的意义是, 当系统受到一个强度为 $\delta(t-t')$ 的冲击的时候, 系统会做出什么样的响应, 包括响应强度和时间结构.
2. 所以我们对于一个任意的外力 $f(t)$, 我们都可以通过把 $f(t)$ 拆解成无数个 δ 函数的叠加, 然后把每个 δ 函数激励下的响应叠加起来, 来求得系统的总响应.
3. 但是我们必须保持因果性: 系统不可能在受到激励之前就做出响应.
4. 我们也可以调查系统对于一个频率为 ω 强度为 1 的正弦波驱动力的响应, 这个响应就是频域格林函数 $\tilde{G}(\omega)$, 一旦你输入驱动频率 ω, 他就告诉你系统返回的波的强度和相位.
5. 所以我们立刻对应上了时域和频域格林函数之间的关系: 时间上的脉冲激励可以拆解成无数个频率为 ω 的正弦波驱动力的叠加, 而系统对于每个频率 ω 的响应就是频域格林函数 $\tilde{G}(\omega)$, 所以时域格林函数就是把所有频率的响应叠加起来.