Combinatoire des tresses

Algorithme de réduction de poignée

Adrien Brochier

Séminaire doctorant (IRMA)

18 Octobre 2007

Plan

1. Définition du groupe de tresse
2. Générateurs et relations dans B_n
3. La réduction des poignées

Plan

1. Définition du groupe de tresse
2. Générateurs et relations dans B_n
3. La réduction des poignées

- Intuition naturelle : des brins qui se croisent sans rebrousser chemin ni changer de direction générale.
- On peut voir une tresse comme la réunion de n courbes reliant les points $(1,0,0),\ldots,(n,0,0)$ aux points $(1,0,1),\ldots,(n,0,1)$ qui coupe chaque plan $z=a,\ \ a\in[0,1]$ exactement n fois.

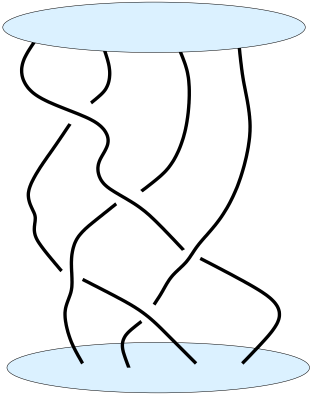


Fig.: Une tresse géométrique

Isotopie

- Si on maintient fixe les extremités des brins, et si on leur interdit de se passer au travers, la structure de la tresse ne change pas quand les brins bougent librement.
- Si deux tresses peuvent être obtenue l'une à partir de l'autre par ces mouvements, on dit qu'elles sont isotopes. C'est une relation d'équivalence.

Mais...

Comment savoir si deux tresses données sont isotopes ?

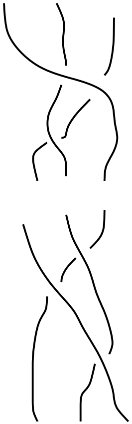


Fig.: Tresses isotopes

Loi de composition

- On définit une loi de composition sur l'ensemble des tresses : le produit de deux tresses est obtenu en les mettant bout à bout.
- Cette loi de composition est compatible avec l'isotopie.
- On appelle B_n l'ensemble des tresses géometriques à n brins quotienté par la relation d'isotopie.

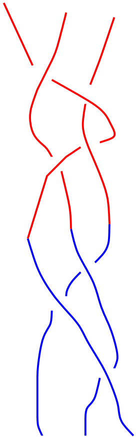


Fig.: Composition de 2 tresses

Le groupe B_n

- On vérifie facilement que la loi de composition est associative.
- Dans B_n, la classe d'équivalence de la tresse triviale est élément neutre.
- Si on compose une tresse avec son image dans un miroir placé dans le plan horizontal, on obtient une tresse isotope à la tresse triviale, les éléments de B_n sont donc inversibles.

Conséquence

B_n est muni d'une structure de groupe.

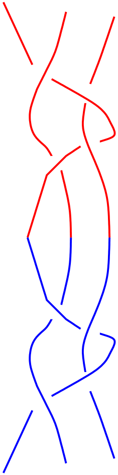


Fig.: Inverse d'une tresse

Plan

Groupe défini par générateurs et relations

- Soit A un ensemble fini. Un mot sur A est une suite finie d'éléments de A. On définit une loi de composition sur l'ensemble des mots grâce à la concaténation. L'élément neutre est le mot vide ϵ.
- Le groupe libre à n générateurs est l'ensemble des mots sur les générateurs et leurs inverses, modulo la relation $x^{-1}x = xx^{-1} = \epsilon$.
- Si A est un ensemble fini et R un ensemble de relations entre des mots sur A, le groupe défini par les générateurs A et les relations R est le quotient du groupe libre sur A par le sous groupe normal engendré par R. (Informellement, R est une liste de mots dont on veut qu'ils soient égaux à ϵ).

Exemples

- Le groupe libre à un générateur a est l'ensemble des mots de la forme a^k avec $k \in \mathbb{Z}$, il est donc isomorphe à $\mathbb{Z}$.
- Le groupe engendré par a, b et par la relation $ab = ba$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$. En effet, cette relation permet de "ramener" les lettres a au début du mot, et donc de représenter tout élément par un mot de la forme $a^k b^l$, avec $k, l \in \mathbb{Z}$. Par exemple :

$$abab^{-1}aaabba \to aabb^{-1}aaabba \to aaaaabba \to aaaaaabb \to a^6b^2$$

- Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est engendré par $n-1$ générateurs τ_i et par les relations :
  1. $\tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i$ si $|i-j| \geq 2$
  2. $\tau_i\tau_j\tau_i = \tau_j\tau_i\tau_j$ si $|i-j| = 1$
  3. $\tau_i^2 = \epsilon$

  Les τ_i correspondent aux transpositions de la forme $(i, i+1)$.

Diagramme de tresse

- Quitte à faire bouger les brins, on peut remplacer les courbes par des segments de droite, et ne jamais avoir deux croisements à la même hauteur.
- On peut donc projeter une tresse géometrique dans le plan pour obtenir un diagramme de tresse.

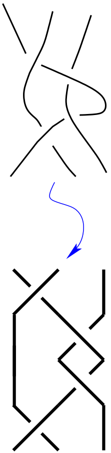
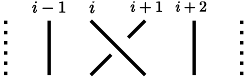
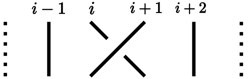


Fig.: Diagramme de tresse

Mots de tresse

- Les diagrammes de tresses sont encodés par des mots, en les parcourant de haut en bas et en posant :

$\sigma_i =$ 

$\sigma_i^{-1} =$ 

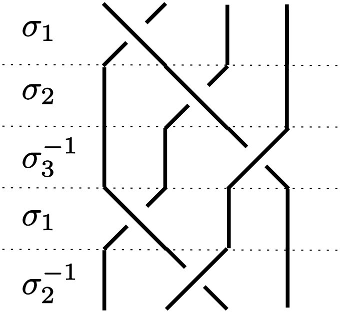


Fig.: Codage d'un diagramme

Théorème (Artin)

Le groupe de tresses B_n est engendré par $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ et par les relations :

1. $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \sigma_i\sigma_i^{-1} = 1$
2. $\sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j$ *pour* $|i-j| = 1$
3. $\sigma_j\sigma_i = \sigma_i\sigma_j$ *pour* $|i-j| \geq 2$

Remarque

La présentation de B_n ressemble à celle de $\mathfrak{S}_n$.

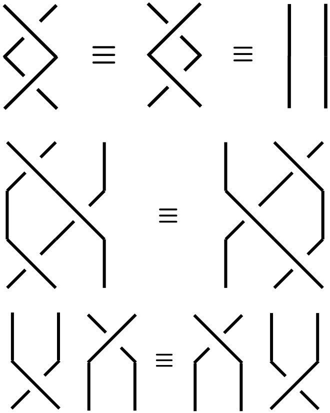


Fig.: Relations de tresse

Plan

Le problème

Question

Comment savoir si deux diagrammes de tresses sont isotopes ?

- Soient d, d' deux diagrammes de tresses, et w, w' les mots associés. On sait que d isotope à d' ssi w' peut être obtenu à partir de w par les relations de tresses (ce qu'on note $w \equiv w'$).
- Comme on est dans un groupe, on a :

$$w \equiv w' \Longleftrightarrow w^{-1}w' \equiv \epsilon$$

où w^{-1} est le mot associé à l'inverse de d. Donc il suffit de savoir reconnaitre qu'un mot représente la tresse triviale.

Mais....

Ca ne suffit pas pour résoudre le problème en pratique !

- On peut de manière naturelle associer une permutation à une tresse.
- Cette association correspond en fait au morphisme de groupe :

$$\begin{array}{rcl} \pi : B_n & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n \\ \sigma_i & \longmapsto & \tau_i = (i, i+1) \end{array}$$

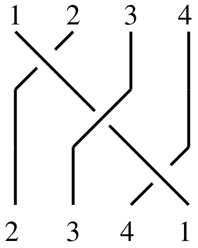


Fig.: Permutation associée à une tresse

Théorème

Soit w un mot de tresse. Si $\pi(w) \neq 1_{\mathfrak{S}_n}$, alors w ne représente pas la tresse triviale.

Des poignées. . .

- Idée : pour qu'une tresse soit triviale, il faut "décroiser tout ce qu'on a croisé".
- Bien qu'intuitif, c'est un théorème difficile : un mot qui contient des σ_1 mais pas de σ_1^{-1} ne représente pas 1.
- Si un mot contient une "poignée", cad un sous-mot de la forme $\sigma_1 w \sigma_1^{-1}$ ou $\sigma_1^{-1} w \sigma_1$, on ne peut à priori rien en dire.
- Objectif : réussir à se ramener systématiquement à des mots sans poignées.

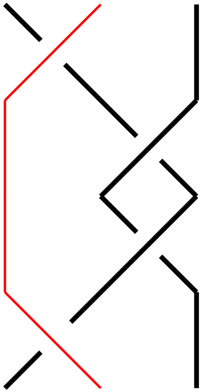


Fig.: Une poignée

Formalisation

- On appelle mot σ_i-positif (resp. σ_i-negatif) un mot qui ne contient aucun $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j < i$, qui contient au moins un σ_i (resp. σ_i^{-1}) mais aucun σ_i^{-1} (resp. σ_i).
- Une tresse sera dite σ-positive si elle peut être representée par un mot σ_i-positif pour un certain i.

Théorème (Dehornoy)

Toute tresse est soit (ces cas s'excluant mutuellement) :

1. *σ-positive*
2. *σ-negative*
3. *isotope à la tresse triviale.*

Réduction de poignée

- On dit qu'un mot w contient une poignée s'il contient un sous-mot de la forme $\sigma_i^e u \sigma_i^{-e}$ pour $e \in \{-1, 1\}$ tel que u ne contienne aucun $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j \leq i$.
- On appelle réduction d'une poignée le processus suivant :
  1. On supprime les deux $\sigma_i^{\pm 1}$ des extrémités.
  2. On remplace dans u tous les σ_{i+1}^d ($d \in \mathbb{Z}$) par la séquence $\sigma_{i+1}^{-e} \sigma_i^d \sigma_{i+1}^e$.
- On itère le processus tant qu'il reste des poignées.

Théorème

- *Cet algorithme se termine en un temps fini et est compatible avec les relations de tresses.*
- *Le mot obtenu ne contenant plus de poignée, il est vide ssi le mot de départ représente la tresse triviale.*

La réduction de poignée en image

$$\sigma_1\sigma_3\sigma_1^{-1} \longrightarrow \sigma_3$$

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_1^{-1}$$

$$\longrightarrow \quad \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2$$

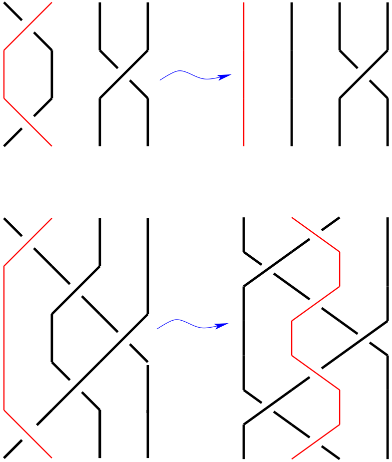


Fig.: Deux exemples...

Propriétés de la réduction de poignées

- Procédé effectif pour résoudre le problème d'isotopie.
- En pratique : cet algorithme semble avoir une complexité quadratique, mais c'est une question ouverte.
- Important : On peut plus généralement introduire un ordre sur B_n qui est décidable par la réduction de poignée en posant :

$$\beta_1 > \beta_2 \Longleftrightarrow \beta_2^{-1}\beta_1 \ \sigma\text{-positive}$$

-> C'est un ordre total
-> Il est compatible avec la multiplication à gauche, cad :

$$\forall \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in B_n,\ \ \beta_1 > \beta_2 \Rightarrow \beta_3\beta_1 > \beta_3\beta_2$$

Je vous remercie de votre attention.

Références

- E. Artin, Theorie der Zöpfe, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* (1925), 4:47–72
- P. Dehornoy, I. Dynnikov, D. Rolfsen, B. Wiest, *Why are braids orderable ?*, Panoramas et Synthèses Vol. 14, SMF (2000)
- C. Kassel, L'ordre de Dehornoy sur les tresses, *Astérisque* (2002), 276:7–28, (Séminaire Bourbaki, Vol. 1999–2000)