Flots - exemple et compléments

Plan

1. Exemple d'utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson

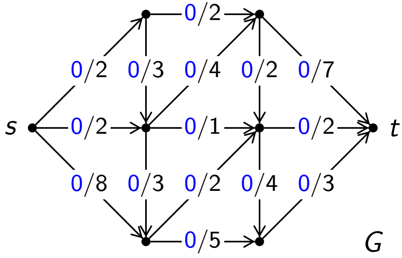
2. Compl ?ments sur les flots
   - Flots entiers
   - Flots et couplages

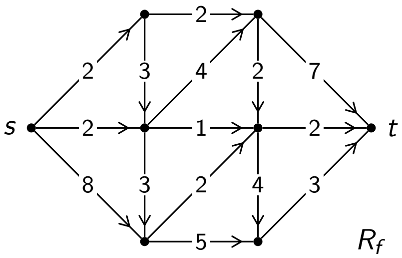
Plan

1. Exemple d'utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson

2. Compl ?ments sur les flots
   - Flots entiers
   - Flots et couplages

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford–Fulkerson

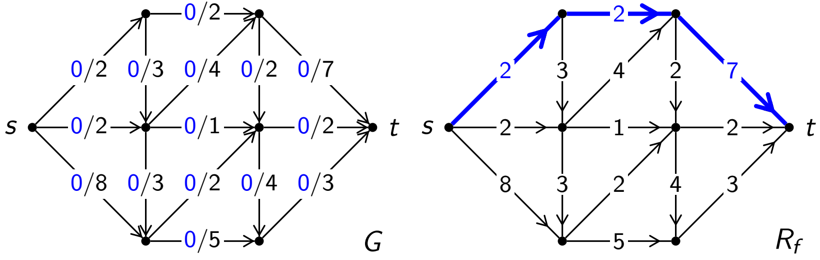




On initialise au flot nul

$\mathrm{val}(f) = 0$

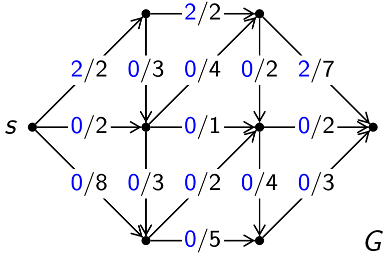
Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford–Fulkerson



$\mathrm{val}(f) = 0$

chemin augmentant de capacit ? r ?siduelle 2

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford–Fulkerson

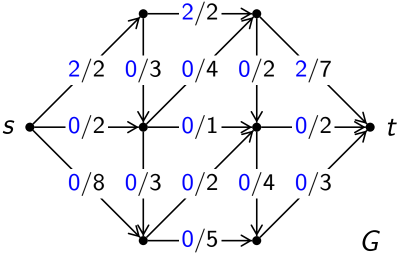


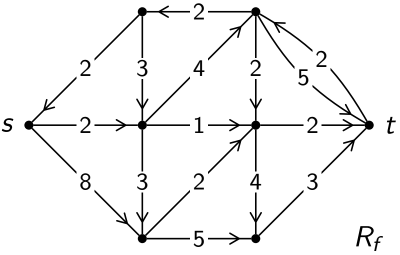
On augmente le flot

$\mathrm{val}(f) = 2$

mise ? jour du graphe r ?siduel ...

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford–Fulkerson

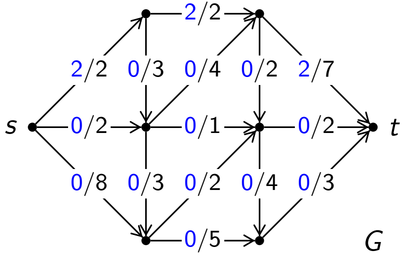


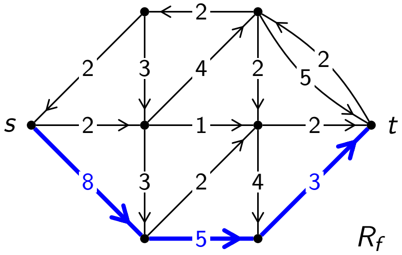


$\mathrm{val}(f) = 2$

graphe r ?siduel mis ? jour

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford–Fulkerson

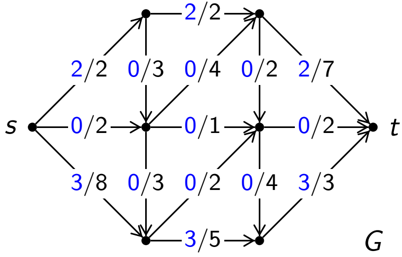




val$(f) = 2$

chemin augmentant de capacit ? r ?siduelle 3

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford–Fulkerson

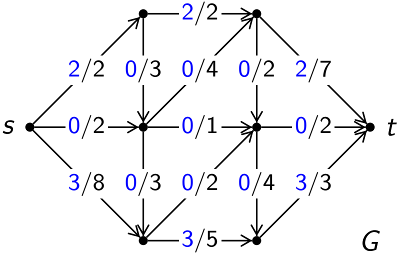


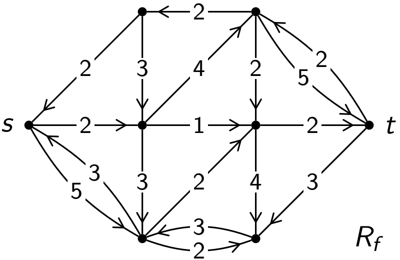
On augmente le flot

$\mathrm{val}(f) = 5$

mise ? jour du graphe r ?siduel ...

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford–Fulkerson

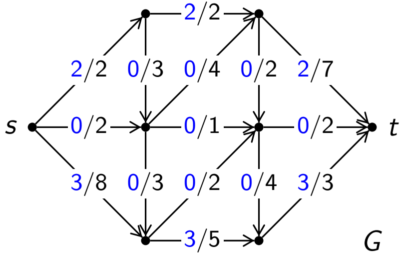


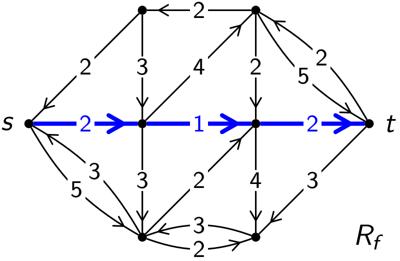


$\mathrm{val}(f) = 5$

graphe r ?siduel mis ? jour

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford–Fulkerson

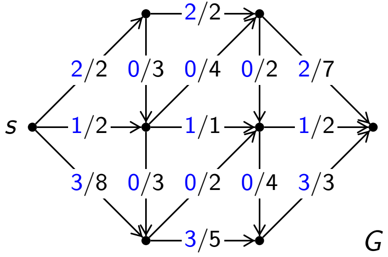




$\mathrm{val}(f) = 5$

chemin augmentant de capacit ? r ?siduelle 1

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford–Fulkerson

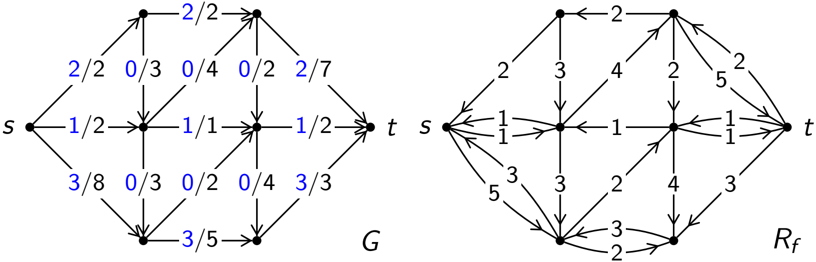


On augmente le flot

$$\text{val}(f) = 6$$

mise ? jour du graphe r ?siduel ...

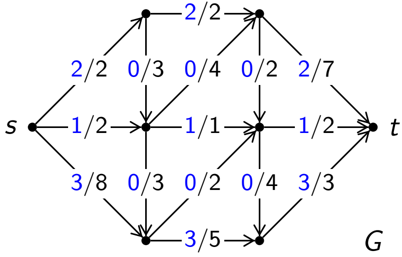
Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford–Fulkerson

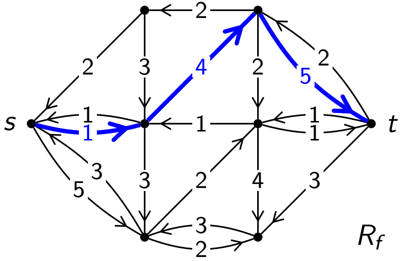


$\mathrm{val}(f) = 6$

graphe r ?siduel mis ? jour

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford–Fulkerson

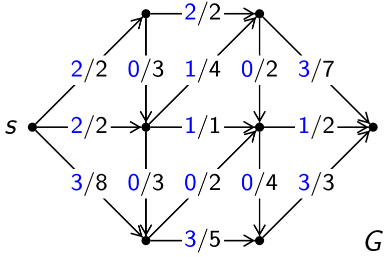




val$(f) = 6$

chemin augmentant de capacit ? r ?siduelle 1

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford–Fulkerson

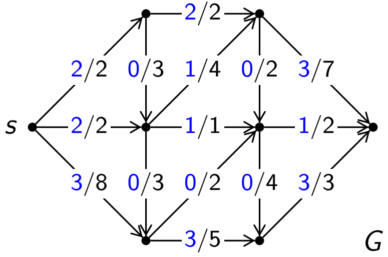


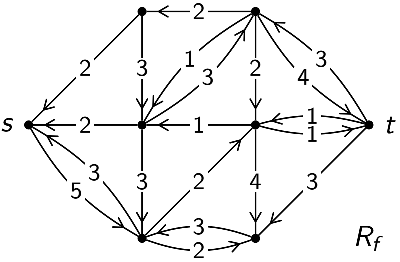
On augmente le flot

$\mathrm{val}(f) = 7$

mise ? jour du graphe r ?siduel ...

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford–Fulkerson

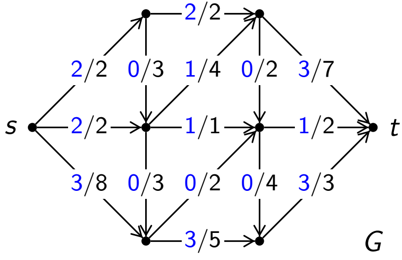




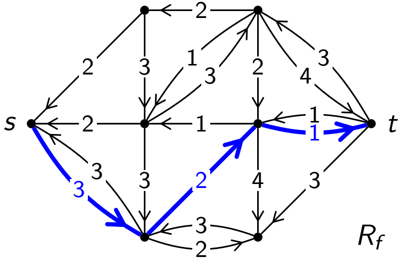
$\mathrm{val}(f) = 7$

graphe r ?siduel mis ? jour

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford–Fulkerson

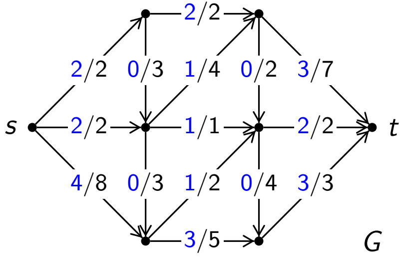


val(f) = 7



chemin augmentant de capacit ? r ?siduelle 1

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford–Fulkerson

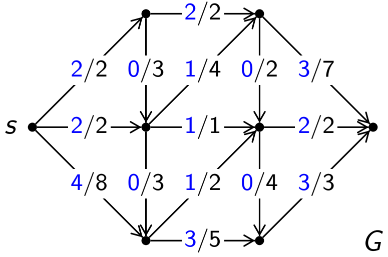


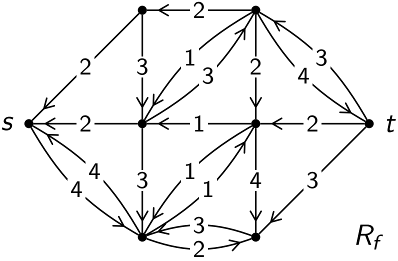
On augmente le flot

$$\mathrm{val}(f) = 8$$

mise ? jour du graphe r ?siduel ...

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford–Fulkerson

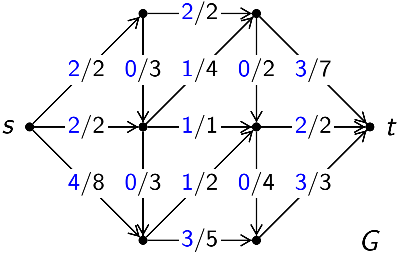


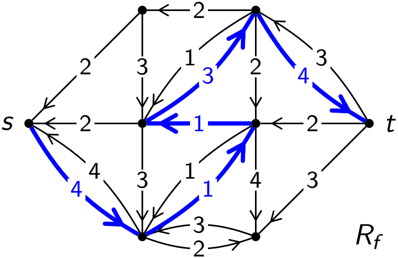


$\text{val}(f) = 8$

graphe r ?siduel mis ? jour

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford–Fulkerson

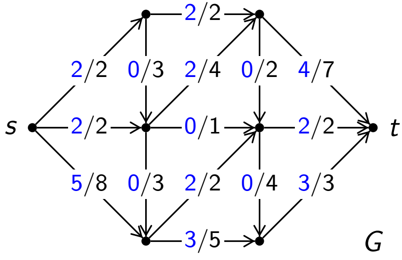




$\text{val}(f) = 8$

chemin augmentant de capacit ? r ?siduelle 1

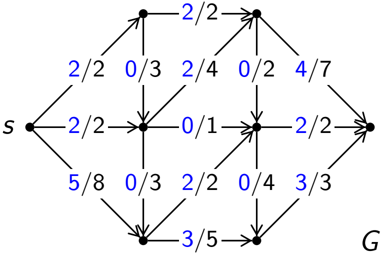
Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford–Fulkerson

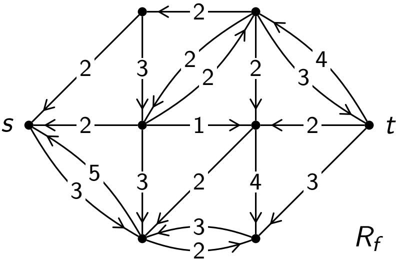


On augmente le flot
$\mathrm{val}(f) = 9$

mise ? jour du graphe r ?siduel ...

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford–Fulkerson

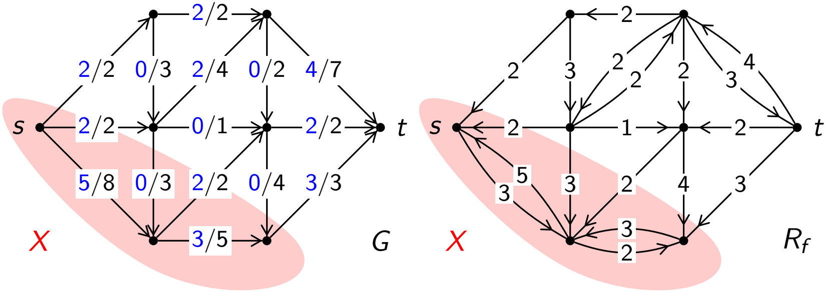




$\mathrm{val}(f) = 9$

graphe r ?siduel mis ? jour

Exemple de l'utilisation de l'algorithme de Ford–Fulkerson



$\mathrm{val}(f) = 9 = \mathrm{cap}(X)$

Plan

1. Exemple d'utilisation de l'algorithme de Ford-Fulkerson

2. Compl ?ments sur les flots
   - Flots entiers
   - Flots et couplages

Flots entiers (1/2)

Th ?or ?me d'int ?gralit ?

Si les capacit ?s des arcs sont enti ?res, alors il existe un flot maximum entier (avec une valeur enti ?re sur chaque arc).

D ?monstration

- R ?currence sur le nombre d'it ?rations k de Ford–Fulkerson.
- Le cas de base $k = 0$ est ?vident, car le flot nul est entier.
- Supposons qu'apr ?s $k \geq 0$?tapes l'algorithme Ford–Fulkerson trouve un flot f tel que $\text{val}(f)$ est entier.
- Comme c et f sont entiers pour chaque arc de G, alors les capacit ?s r ?siduelles de R_f sont enti ?res.

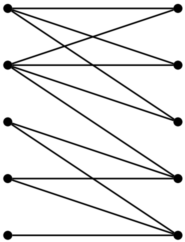
Flots entiers (2/2)

D ?monstration (suite)

- Donc, la capacit ? r ?siduelle ε du chemin augmentant P choisi par l'algorithme est enti ?re.
- Donc, le nouveau flot f' est de valeur $\text{val}(f') = \text{val}(f) + \varepsilon$, un entier.
- Le th ?or ?me est prouv ? par r ?currence.

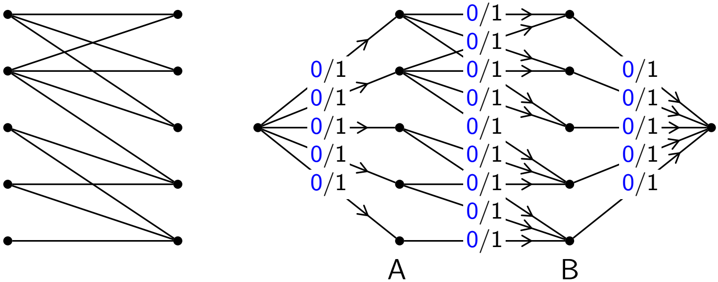
Flots et couplages

On peut utiliser le th ?or ?me de flot-max/coupe-min et le th ?or ?me d'int ?gralit ? pour prouver le th ?or ?me de Kőnig sur les couplages dans les graphes bipartis. On consid ?re un graphe $G = (A \cup B, V)$.



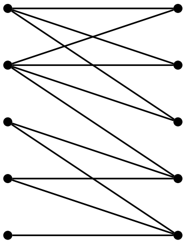
Flots et couplages

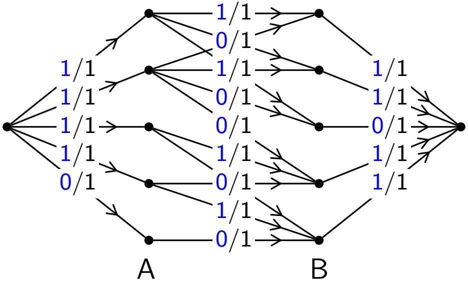
On peut utiliser le th ?or ?me de flot-max/coupe-min et le th ?or ?me d'int ?gralit ? pour prouver le th ?or ?me de Kőnig sur les couplages dans les graphes bipartis. On consid ?re un graphe $G = (A \cup B, V)$.



Flots et couplages

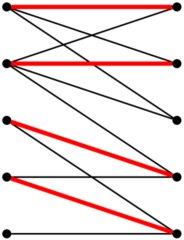
On peut utiliser le th ?or ?me de flot-max/coupe-min et le th ?or ?me d'int ?gralit ? pour prouver le th ?or ?me de Kőnig sur les couplages dans les graphes bipartis. On consid ?re un graphe $G = (A \cup B, V)$.

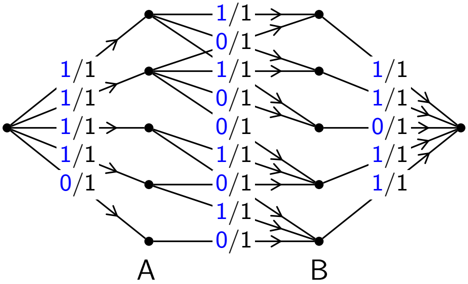




Flots et couplages

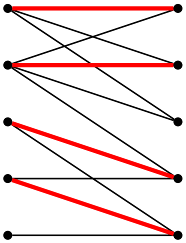
On peut utiliser le th ?or ?me de flot-max/coupe-min et le th ?or ?me d'int ?gralit ? pour prouver le th ?or ?me de Kőnig sur les couplages dans les graphes bipartis. On consid ?re un graphe $G = (A \cup B, V)$.

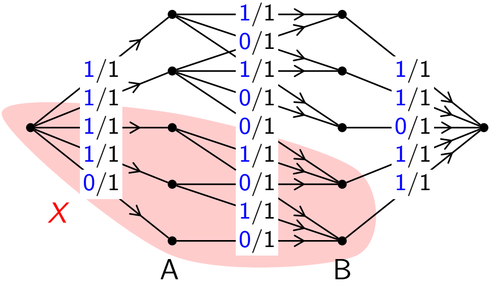




Flots et couplages

On peut utiliser le th ?or ?me de flot-max/coupe-min et le th ?or ?me d'int ?gralit ? pour prouver le th ?or ?me de Kőnig sur les couplages dans les graphes bipartis. On consid ?re un graphe $G = (A \cup B, V)$.

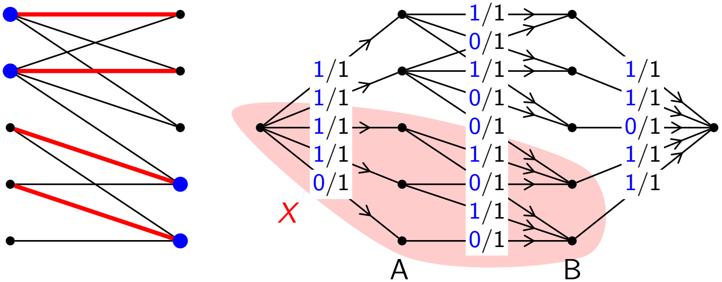




Soit R_f le graphe r ?siduel final (sur graphe G') et X la st-coupe associ ?e.

Flots et couplages

On peut utiliser le th ?or ?me de flot-max/coupe-min et le th ?or ?me d'int ?gralit ? pour prouver le th ?or ?me de Kőnig sur les couplages dans les graphes bipartis. On consid ?re un graphe $G = (A \cup B, V)$.

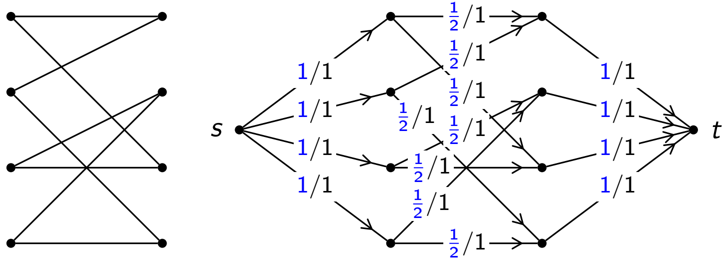


Soit R_f le graphe r ?siduel final (sur graphe G') et X la st-coupe associ ?e. On trouve alors un transversal T du graphe initial G :

$$T = (A \cap (V \setminus X)) \cup (B \cap X)$$

Couplages dans les graphes bipartis r ?guliers

On peut aussi (re-)prouver que tout graphe biparti k-r ?gulier ($k \geq 1$) poss ?de un couplage parfait.



Merci pour votre attention !