

# Exercices INF 303

Université Grenoble Alpes

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Enumération</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Réurrence</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Graphes</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Chemins et cycles</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Arbres</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>Plus courts chemins</b>	<b>18</b>
<b>7</b>	<b>Coloration</b>	<b>22</b>
<b>8</b>	<b>Couplages</b>	<b>26</b>
<b>9</b>	<b>Flots</b>	<b>30</b>
<b>10</b>	<b>Dessins de graphes</b>	<b>37</b>

---

## 1 Enumération

Exercice 1 : De combien de façons sept femmes peuvent-elle danser en couple avec sept hommes ?

Exercice 2 : De combien de façons six enfants peuvent-ils s'asseoir sur une rangée de six chaises si trois d'entre eux refusent d'occuper les extrémités de la rangée ?

Exercice 3 : De combien de façons différentes peut-on former la suite ordonnée VALET, DAME, ROI, AS si l'on veut que les cartes de cette suite soient

Question 1 – de couleurs différentes ?

Question 2 – de la même couleur ?

Question 3 – de n'importe quelle couleur ?

(Aux cartes les couleurs sont : le Carreau ♦, le Cœur ♥, le Trèfle ♣ et le Pique ♠.)

Exercice 4 : Un coffre-fort possède cinq serrures à roulettes numérotées de 0 à 9 qui forment un code. Un voleur tente d'ouvrir le coffre-fort et il ne connaît pas la combinaison des cinq serrures.

Question 1 – Combien existe-t-il de possibilités de combinaisons ?

Le voleur ne peut essayer que 100 combinaisons avant l'arrivée de la police.

Question 2 – Quelle est la probabilité qu'il réussisse à ouvrir le coffre-fort ?

Exercice 5 : 24 pilotes participent à un Grand Prix de Formule 1, mais seuls les 10 premiers marquent des points pour le championnat. Supposons que tous les pilotes terminent la course.

Question 1 – Combien de classements généraux possibles y a-t-il au total ?

Question 2 – Combien de classements possibles y a-t-il pour les 10 premiers ?

Exercice 6 : À partir d'un jeu ordinaire de 52 cartes, on compose une main de trois cartes. Combien existe-t-il de façons différentes de composer

Question 1 – trois as ?

Question 2 – trois coeurs ?

Question 3 – trois cartes d'une même couleur ?

Question 4 – une paire ? (deux cartes de même rang et une autre de rang différent)

Question 5 – trois couleurs différentes ?

Exercice 7 : On considère un ensemble fini non vide. Montrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, qu'il a autant de parties paires que de parties impaires.

Exercice 8 : Combien de nombres composés d'exactement trois chiffres et inférieurs à 500 peut-on former à l'aide des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 si les répétitions :

Question 1 – sont permises ?

Question 2 – ne sont pas permises ?

Exercice 9 : Combien peut-on former de mots de 7 lettres avec les lettres du mot PLAFOND

Question 1 – si une même lettre ne peut être employée qu'une seule fois ?

Question 2 – si on tolère les répétitions d'une même lettre ?

Exercice 10 : Combien peut-on former de mots avec les lettres du mot MISSISSIPPI (chacune de ses lettres doit être utilisée exactement une fois) ? Autrement dit, combien d'anagrammes ce mot a-t-il ?

Exercice 11 : Soient  $k, n$  deux entiers naturels. Dénombrer les mots sur  $\{0, 1\}$  de longueur  $n$  qui ont exactement  $k$  uns.

## Principe des tiroirs

Exercice 12 : Dans un village de 400 habitants, y a-t-il au moins deux personnes qui sont nées le même jour (pas forcément de la même année) ?

Exercice 13 : On considère un carré de côté  $d$ . On y place cinq points.

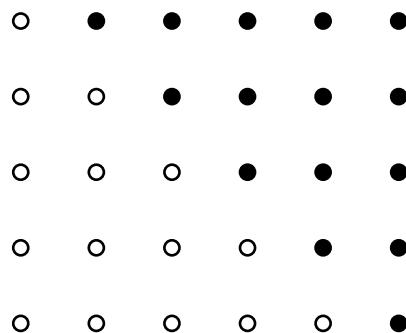
Montrer qu'au moins deux points sont à distance inférieure ou égale à  $d$ .

Exercice 14 : On place les entiers de 1 à 10 sur un cercle. Montrer qu'il existe au moins un triplet d'entiers consécutifs dont la somme est supérieure ou égale à 17.

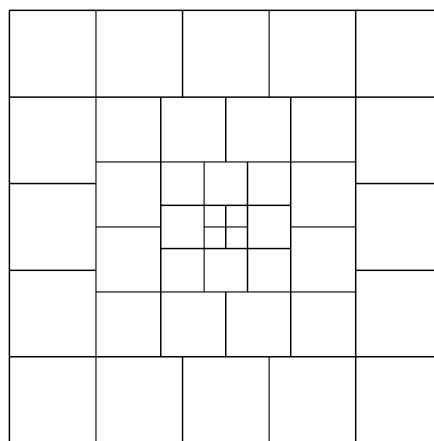
## Double-comptage

Exercice 15 : Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 0. En vous aidant de la figure ci-dessous, montrer que :

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$



Exercice 16 : Le carré ci-dessous est formé par 4 couronnes  $C_k$  ( $k = 1, \dots, 4$ ), où  $C_k$  est elle-même constituée de  $4k$  carrés identiques de côté  $k$ .



Question 1 – Pour un  $k$  fixé, quel est l'aire couverte par la  $k$ -ième couronne ?

Question 2 – Utiliser la question précédente et le dessin pour déduire une formule pour la somme des  $n$  premiers cubes.

## 2 Récurrence

### Exercice 17 :

Montrer par récurrence les résultats suivants :

Question 1 – La somme des entiers de 1 à  $n$  vaut  $\frac{n(n+1)}{2}$  pour  $n \geq 1$ .

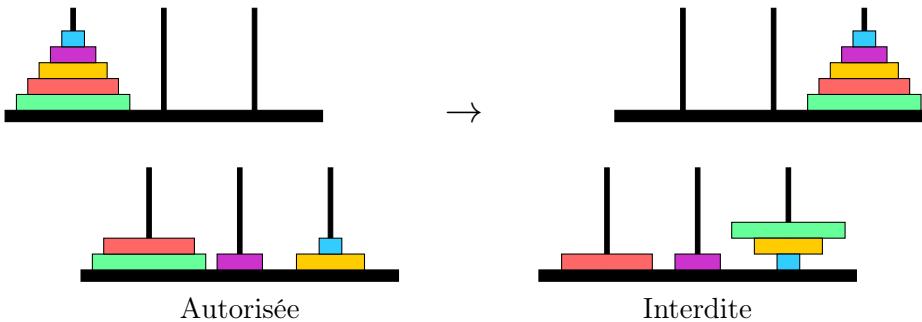
Question 2 –  $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$  pour  $n \geq 1$ .

Question 3 – La somme des  $n$  premiers cubes est  $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$  pour  $n \geq 1$ .

Question 4 –  $(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$  pour  $n \geq 0$ .

Exercice 18 : Montrer qu'avec des timbres de 3 et 5 euros, on peut faire des affranchissements pour toutes les sommes entières de plus de 8 euros. (Indice : il faut faire une récurrence à 3 crans).

Exercice 19 : Dans le jeu des tours de Hanoi, il y a 3 pics et  $n$  disques. Les disques ont tous des tailles différentes. On numérote les disques du plus petit (1) au plus grand ( $n$ ). Au départ tous les disques sont disposés du plus grand au plus petit sur un des pics. Il faut déplacer tous les disques pour les mettre sur un autre pic. Un "coup" consiste à déplacer un disque du dessus d'une pile vers le dessus d'une autre pile. De plus, il est interdit de poser un disque sur un disque plus petit



Montrer par récurrence qu'il faut au moins  $2^n - 1$  coups pour pouvoir déplacer toute la pile.

### Arbres d'informaticien : parcours et backtracking

#### Rappels et précisions de vocabulaire :

- *Enfants, fils* d'un noeud : noeuds directement reliés en dessous du noeud.
- *Descendants* d'un noeud : tous les noeuds reliés en dessous par un chemin (les enfants, les enfants des enfants,...)
- *Parent, père* d'un noeud : noeud directement relié au dessus (il est unique !)
- *Ancêtres* d'un noeud : tous les noeuds reliés au dessus (le parent, le parent du parent,...)
- *Feuille* : noeud sans enfant
- *Racine* : noeud sans parent
- *Noeud interne* : noeud avec au moins un enfant
- *Profondeur d'un noeud* : distance avec la racine (nombre de traits) (la profondeur de la racine est 0 !)

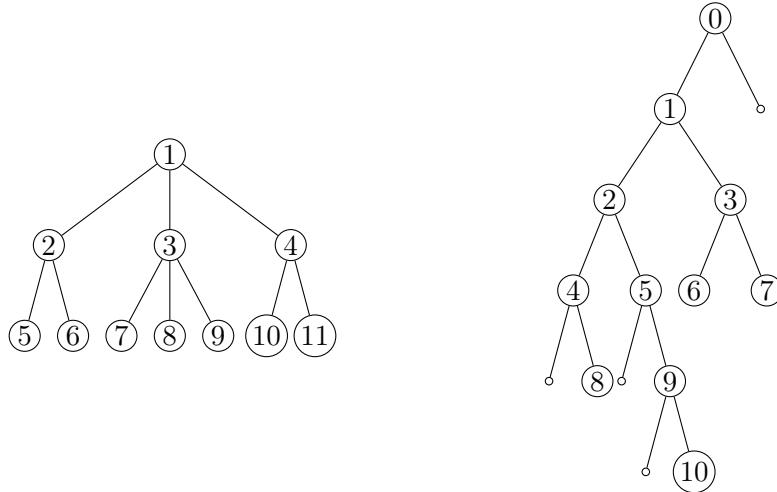
- *Profondeur (hauteur) de l'arbre* : maximum des profondeurs sur tous les noeuds
- *Largeur* : nombre maximum de noeuds sur une même profondeur.
- *Arbre trivial* : ne contient qu'un noeud
- *Arbre k-aire* : tous les noeuds ont au plus  $k$  enfants. Attention, l'ordre des enfants a une importance ! Pour  $k = 2$ , on parle d'*arbre binaire*.
- *Arbre k-aire complet* : tous les niveaux sont remplis (sauf peut-être le dernier).

Exercice 20 : Dans le cours, on a vu qu'un arbre peut toujours être encodé par un arbre binaire, en suivant la transformation suivante : chaque noeud de l'arbre de départ a comme fils gauche son premier fils, et comme fils droit son premier frère.

Question 1 – Transformer l'arbre de gauche en arbre binaire  $T_B$ .

Question 2 – Comment retrouver la profondeur d'un nœud dans l'arbre gauche en utilisant  $T_B$  ?

Question 3 – Retrouver l'arbre correspondant à l'arbre binaire de droite.



Exercice 21 : Pour l'arbre de la Figure 1, donnez l'ordre des sommets pour les parcours en profondeur préfixe, suffixe et infixe. Donnez aussi l'ordre des sommets pour le parcours en largeur.

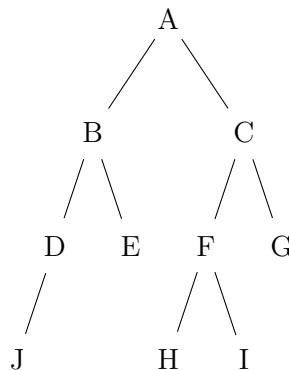


FIGURE 1 – Parcours d'un arbre

Exercice 22 : Pour un arbre à  $n$  nœuds, déterminer (en termes de  $n$ ) :

1. la plus grande profondeur possible,
2. la plus grande largeur possible,
3. la plus petite profondeur possible,
4. la plus petite largeur possible.

Exercice 23 : Pour un arbre binaire à  $n = 2^k - 1$  nœuds, déterminer (en termes de  $n$ ) :

1. la plus grande profondeur possible,
2. la plus grande largeur possible,
3. la plus petite profondeur possible,
4. la plus petite largeur possible.

Exercice 24 : Quelle est la largeur d'un arbre  $k$ -aire complet avec aussi le dernier niveau rempli en fonction de la profondeur de l'arbre ?

Exercice 25 : Reines sur un échiquier

On veut savoir s'il est possible de placer 8 reines sur un échiquier  $8 \times 8$ , de manière à ce qu'aucune paire de reines ne puissent s'attaquer.

Question 1 – Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que deux reines sur des cases  $(i, j)$  et  $(k, l)$  ne se mangent pas.

Question 2 – Comment décrire un positionnement de 8 reines sur un plateau ? Combien y a-t-il de possibilités ? Peut-on facilement éliminer certains cas ? Combien en reste-t-il ?

Question 3 – Décrire l'arbre de backtracking : sa racine, ses noeuds, la relation entre un noeud et ses fils, la condition de blocage.

Question 4 – Faire l'arbre pour le cas de 4 reines sur un plateau  $4 \times 4$ .

### 3 Graphes

#### Modélisation

Exercice 26 : Qui a tué le Duc de Dunsmore ? (d'après Claude Berge)

Un jour, Sherlock Holmes reçoit la visite de son ami Watson que l'on avait chargé d'enquêter sur un assassinat mystérieux datant de plus de 10 ans. A l'époque, le Duc de Graphistan avait été tué par l'explosion d'une bombe, qui avait également détruit le château de Graphistan où il s'était retiré. Les journaux d'alors relataient que le testament, détruit lui aussi par l'explosion, avait tout pour déplaire à l'une de ses 7 ex-femmes. Or, avant sa mort, le Duc les avait toutes invitées à passer quelques jours dans sa retraite écossaise.

HOLMES - Je me souviens de l'affaire ; ce qui est étrange, c'est que la bombe avait été fabriquée spécialement pour être cachée dans l'armure de la chambre à coucher, ce qui suppose que l'assassin a nécessairement effectué plusieurs visites au château !

WATSON - Certes, et pour cette raison, j'ai interrogé chacune des ex-épouses : Ann, Betty, Charlotte, Edith, Félicia, Georgia et Helen. Elles ont toutes juré qu'elles n'avaient été au château de Graphistan qu'une seule fois dans leur vie.

HOLMES - Hum ! leur avez-vous demandé à quelle période ont eu lieu leurs séjours respectifs ?

WATSON - Hélas, aucune ne se rappelait les dates exactes, après 10 ans ! Néanmoins, je leur ai demandé qui elles y avaient rencontré :

- Ann a déclaré y avoir rencontré Betty, Charlotte, Félicia, Georgia ;
- Betty a déclaré y avoir rencontré Ann, Charlotte, Edith, Félicia, Helen ;
- Charlotte a déclaré y avoir rencontré Ann, Betty, Edith ;
- Edith a déclaré y avoir rencontré Betty, Charlotte, Félicia ;
- Félicia a déclaré y avoir rencontré Ann, Betty, Edith, Helen ;
- Georgia a déclaré y avoir rencontré Ann, Helen ;
- Helen a déclaré y avoir rencontré Betty, Félicia, Georgia.

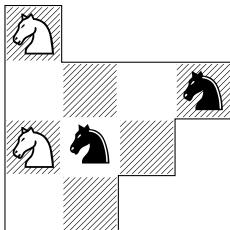
Vous voyez mon cher Holmes, ces réponses sont concordantes !

C'est alors que Holmes prit un crayon et dessina un étrange petit dessin. Puis, après moins de 30 secondes, Holmes s'écria : "tiens, tiens ! Ce que vous venez de dire détermine de façon unique l'assassin".

Question 1 – Mais qui donc est l'assassin ?

#### Exercice 27 : Échange de cavaliers (Jean-Paul Davalan)

Pour résoudre ce casse-tête vous devez échanger les positions des deux cavaliers blancs avec celles des deux noirs, en respectant évidemment les règles du déplacement du cavalier sur un échiquier et en n'utilisant que les dix cases dessinées (le cavalier ne peut pas se poser sur une case non dessinée et un cavalier à la fois peut se poser sur une case). On n'impose pas d'alterner entre un déplacement de cavalier noir et un déplacement de cavalier blanc.



Question 1 – Modéliser le problème à l'aide d'un graphe.

Question 2 – Utiliser cette modélisation pour résoudre ce casse-tête.

Question 3 – Y-a-t-il des cases inutiles ?

Exercice 28 : Dans un tournoi d'échecs, chaque participant doit rencontrer tous les autres. Chaque partie dure une heure. Déterminer la durée minimum du tournoi dans le cas où le nombre de participants est 3, 4, 5 ou 6.

Exercice 29 : Trois missionnaires, venus évangéliser la population locale, voyagent avec trois cannibales. Si les missionnaires sont en infériorité numérique par rapport aux cannibales, alors ces derniers mangent les missionnaires... Les missionnaires et les cannibales veulent traverser une rivière. Pour cela, ils disposent d'une barque, qui ne permet de transporter que deux personnes à la fois d'une rive à l'autre.

Question 1 – Modéliser le problème à l'aide d'un graphe. Tout le monde peut-il traverser sans qu'aucun missionnaire ne soit mangé ?

## Notions de base

Exercice 30 : Dessiner tous les graphes à 3 et 4 sommets, à isomorphisme près.

Exercice 31 : Une ligue de football contient 15 clubs. Pour des raisons de temps, on décide que chaque club ne jouera que la moitié des matchs possibles. Comment organiser le tournoi ? (on pourra commencer par étudier le cas de 7 clubs).

## Degrés

Exercice 32 : Séquence de degrés

On dit que séquence de nombres entiers est *réalisable* s'il existe un graphe dont les sommets ont exactement les degrés de la séquence.

Question 1 – Pour chaque séquence qui suit, dites si la séquence est réalisable ou non. Si la réponse est oui, dessinez un tel graphe et dire s'il est unique (à isomorphisme près), sinon justifiez pourquoi il n'y a pas de tel graphe.

- |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|
| a. (1; 2; 2; 4; 5; 5) | e. (2; 2; 2; 3; 3; 3) |
| b. (2; 2; 2; 2; 2; 2) | f. (0; 2; 2; 3; 4; 5) |
| c. (1; 1; 1; 1; 1; 1) | g. (5; 5; 5; 5; 2; 2) |
| d. (3; 3; 3; 3; 3; 5) |                       |

Question 2 – Donnez des conditions nécessaires pour qu'une séquence soit réalisable. Sont-elles suffisantes ?

Exercice 33 : Théorème d'Havel-Hakimi (N. Trotignon)

Soit  $G$  un graphe et  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  les degrés des sommets de  $G$ .

Question 1 – Montrer qu'il existe un graphe  $H$  sur  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , tel que  $N_H(v_n) = \{v_{n-d(v_n)}, \dots, v_{n-1}\}$  et pour tout  $1 \leq i \leq n$  on a  $\deg(v_i) = d_i$ .

Question 2 – On dit qu'une suite d'entiers  $(d_1, \dots, d_n)$  telle que  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  est une séquence de degrés s'il existe un graphe sur  $n$  sommets de degrés  $d_1, \dots, d_n$ . Montrer qu'une suite  $S$  est une séquence de degrés si et seulement si ou bien  $S = (0)$  ou bien la suite  $S'$  définie ci-dessous est une séquence de degré :  $S' = (d'_1, \dots, d'_{n-1})$  avec  $d'_i = d_i$  si  $1 \leq i \leq n - d_n - 1$  et  $d'_i = d_i - 1$  si  $n - d_n \leq i \leq n - 1$ .

Exercice 34 : Jeux de mains

Le tout-Grenoble se retrouve lors du vernissage d'une exposition dans une galerie d'art contemporain locale. Certaines des personnes présentes au vernissage se connaissent, d'autres pas. La plus élémentaire des politesses veut que les personnes qui se connaissent se serrent la main. Deux personnes ne se connaissant pas ne se serrent pas la main.

Question 1 – Démontrer qu'il existe au moins deux personnes qui ont serré le même nombre de mains.

### Exercice 35 : Le professeur McBrain

Le professeur McBrain et son épouse Muriel donnent une surprise-partie à laquelle ils invitent 4 autres couples mariés. À l'arrivée, certaines paires de personnes se sont serrées la main (bien sûr, aucun couple marié ne se serre la main). À la fin de la soirée, le professeur demande à chacune des 9 personnes, à combien de personnes elles ont serré la main au début de la soirée et il obtient 9 réponses différentes.

Question 1 – À combien de personnes Muriel a-t-elle serré la main ?

Exercice 36 : Dessinez un graphe 3-régulier qui ne soit pas le graphe complet  $K_4$ .

### Exercice 37 : Conseil municipal

Le conseil municipal d'une ville comprend 7 commissions, qui obéissent aux règles suivantes :

- Règle 1 : tout conseiller municipal fait partie de 2 commissions exactement ;
- Règle 2 : deux commissions quelconques ont exactement un conseiller en commun.

Question 1 – Combien y'a t-il de membres dans le conseil municipal ?

Exercice 38 : Sept étudiants partent en vacances. Ils décident que chacun enverra une carte à trois autres. Est-il possible que chaque étudiant reçoivent des cartes postales précisément de la part des trois personnes auxquelles il en a envoyé ?

## Représentations des graphes

### Exercice 39 :

Question 1 – Représenter le graphe correspondant à la matrice d'adjacence suivante

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Question 2 – Est-ce que les matrices suivantes sont les matrices d'incidence d'un graphe simple non orienté. Si c'est le cas, représenter ce graphe. Sinon, donner la raison.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 40 : (A. Parreau)

Dans chacun des exemples suivants, dites si la matrice utilisée peut être une matrice d'adjacence, d'incidence ou ne pas représenter un graphe. Dans les deux premiers cas, dessinez un graphe correspondant, dans le dernier cas, justifiez pourquoi.

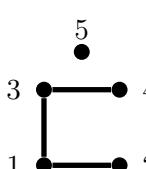
$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 41 : (A. Parreau)

Chaque colonne du tableau suivant représente un graphe différent, avec une représentation différente.

Dans chaque cas, on demande de répondre aux questions suivantes (sans passer par une autre représentation).

1. Quelle représentation du graphe a-t-on ?
2. Quels sont les voisins du sommet 1 ?
3. Quel est le nombre de voisins du sommet 4 ?
4. Est-ce que 5 est un sommet isolé ?
5. Combien y-a-t-il d'arêtes dans le graphe ?
6. Est-ce que les sommets 3 et 4 sont adjacents ?

	 $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $E = \{12, 34, 15\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	— 1 : [2, 3, 4] — 2 : [1, 3, 4] — 3 : [1, 2, 4] — 4 : [1, 2, 3] — 5 : []
1				
2				
3				
4				
5				
6				

Exercice 42 : (A. Parreau)

Complétez le tableau suivant :

Définition ensembliste	Représentation graphique	Matrice adjacence	Matrice d'incidence	Liste d'adjacence
$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $E = \{12, 45, 34, 14, 35\}$				
		$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$		
			$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	
				<ul style="list-style-type: none"> <li>— 1 : [2, 3, 5]</li> <li>— 2 : [1, 4]</li> <li>— 3 : [1, 5]</li> <li>— 4 : [2, 5]</li> <li>— 5 : [1, 3, 4]</li> </ul>

## 4 Chemins et cycles

Exercice 43 : Montrer qu'un graphe simple de degré minimum au moins  $k$  contient une chaîne élémentaire de longueur  $k$ .

Exercice 44 : Soit  $G$  un graphe simple dont exactement deux sommets  $x$  et  $y$  sont de degré impair. Montrer qu'il existe une chaîne dans  $G$  de  $x$  à  $y$ .

Exercice 45 : Soit  $G$  un graphe simple à  $n$  sommets et  $m$  arêtes. Montrer que si  $m > \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$ , alors  $G$  est connexe.

Exercice 46 : Soit  $G$  un graphe non orienté. Montrer qu'au moins un des deux graphes,  $G$  ou son complémentaire, est connexe.

Exercice 47 : Soit  $G$  un graphe simple à  $n$  sommets tel que chaque sommet est de degré supérieur ou égal à  $\frac{n}{2}$ . Montrer que  $G$  est connexe.

## Graphes eulériens

### Exercice 48 : Sans lever le crayon

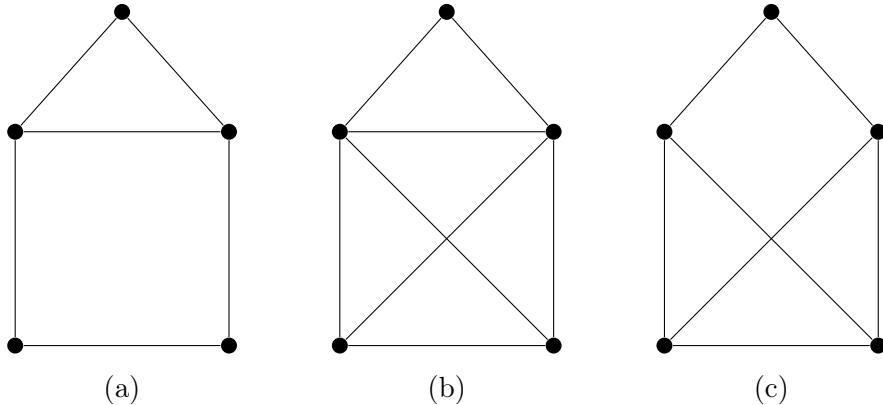
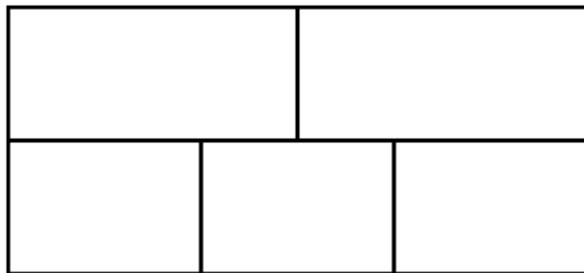


FIGURE 2 – À dessiner sans lever le crayon

Question 1 – Quels dessins dans la Figure 2 peuvent être dessinés sans lever le crayon et sans passer deux fois sur le même trait ?

Exercice 49 : Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure suivante exactement une fois ?



## Exercice 50 :

Question 1 – Soit  $G$  un graphe connexe non eulérien. Est-il toujours possible de rendre  $G$  eulérien en lui rajoutant des arêtes ?

Question 2 – Combien d'arêtes au minimum doit-on rajouter à G pour le rendre Eulérien.

## Exercice 51 : Les dominos

On considère des dominos dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4 ou 5.

Question 1 – En excluant les dominos doubles, de combien de dominos dispose-t-on ?

Question 2 – Montrez que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée (en utilisant la règle habituelle de contact entre les dominos).

Question 3 – Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?

Question 4 – Si l'on prend maintenant des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à  $n$ , est-il possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?

#### Exercice 52 : Carcasse de cube

On dispose d'un fil de fer de 120 cm. Est-il possible de préparer une carcasse de cube de 10 cm d'arête sans couper le fil ? Sinon, combien de fois au minimum faut-il couper le fil de fer pour fabriquer cette carcasse ?

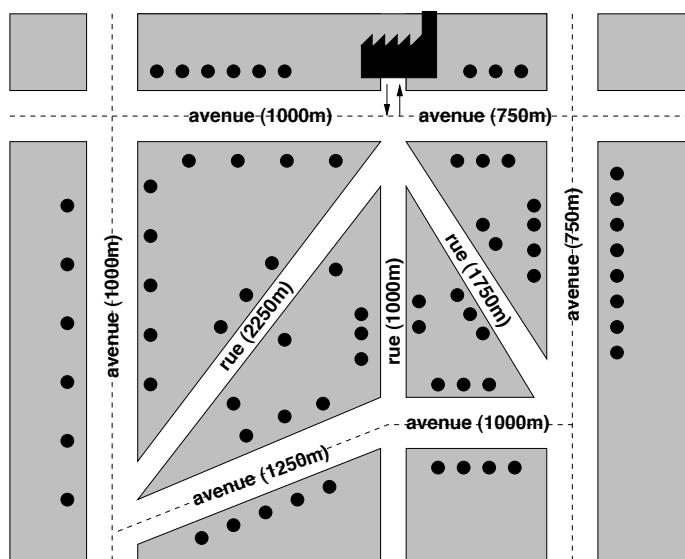
#### Exercice 53 : Jeu de cartes (Matej Stehlik)

Dans un jeu de  $52 = 13 \times 4$  cartes, chaque carte a une valeur ( $A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R$ ) et une couleur ( $\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit$ )

Question 1 – Quelle est la longueur maximale d'une suite de cartes qu'on peut construire à partir d'un jeu de 52 cartes de façon à ce que deux cartes consécutives soient de la même valeur ou de la même couleur, mais si on prend trois cartes consécutives quelconques, elles n'ont pas toutes trois la même valeur ni la même couleur ? Par exemple,  $A\spadesuit, 7\spadesuit, 7\heartsuit, D\heartsuit$  est une suite qui respecte cette règle.

#### Exercice 54 : Ramassage des poubelles

Voici le plan simplifié d'un quartier de Propreville. Une benne venant de l'usine d'incinération doit vider les 70 conteneurs indiqués sur le croquis et revenir à l'usine.



La circulation sur les avenues et sur les rues est dans les deux sens. La vitesse du camion-benne à vide (ou entre deux ramassages) est de 30km/h et il est le même dans les deux sens. Il faut compter 30 secondes pour vider un conteneur. Chaque avenue a deux voies et il faut réaliser le ramassage indépendamment de chaque côté, ce qui nécessite deux passages de la benne (un dans chaque sens). Le ramassage sur les trois rues se fait des deux cotés en même temps.

Question 1 – Trouver le trajet optimal qui minimise le temps total du parcours nécessaire pour ramasser toutes les ordures.

### Exercice 55 : Le digicode

Un digicode possède 10 touches numérotées de 0 à 9. Le code fait 4 chiffres. On cherche à deviner le code en tapant le minimum de touches. On tire parti du fait que le digicode ouvre la porte dès que les 4 chiffres sont tapés. Quelle est la longueur minimale d'une suite de chiffres de 0 à 9 telle que tout code possible de 4 chiffres apparait comme sous-suite de 4 éléments consécutifs ?

Exercice 56 : On dispose de 15 perles numérotées de 1 à 15. On veut construire un collier qui respecte la curieuse règle suivante :

*La somme des numéros de deux perles adjacentes sur le collier doit toujours être un carré parfait.*

On considère que le collier est ouvert, c'est-à-dire que les deux perles situées aux deux extrémités du collier ne sont pas adjacentes. La somme de leurs numéros ne doit donc pas nécessairement être un carré parfait.

On rappelle que les carrés parfaits sont les nombres 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25...

Question 1 – Modéliser le problème à l'aide d'un graphe dont les sommets sont les perles.

Question 2 – En déduire que l'on peut construire un collier qui respecte cette règle.

### Exercice 57 :

L'*hypercube* de dimension  $n \geq 1$  est un graphe ayant pour sommets l'ensemble de tous les mots binaires de longueur  $n$ . Par exemple, 00, 01, 10, 11 sont les 4 sommets de l'hypercube de dimension 2. Deux sommets sont liés par une arête si et seulement si les mots correspondants diffèrent exactement une coordonnée (c'est-à-dire en un bit). Par exemple, il y a une arête entre 00 et 10, mais pas entre 00 et 11. L'hypercube de dimension  $n$  est un graphe généralement noté  $Q_n$ .

Question 1 – Démontrer que  $Q_2$ ,  $Q_3$ , et  $Q_4$  sont hamiltoniens.

Une construction récursive de  $Q_n$  en fonction de  $Q_{n-1}$  consiste à considérer deux copies de  $Q_{n-1}$  que l'on connecte entre elles par un ensemble d'arêtes particulier, que l'on appelle un couplage.

Question 2 – Expliciter cette construction pour  $Q_3$  et  $Q_4$ . Donner la construction générale pour  $n$  quelconque.

Cette vision des choses permet d'appliquer un principe de récurrence pour démontrer des propriétés intéressantes de l'hypercube.

Question 3 – Démontrer que  $Q_n$  est hamiltonien pour tout  $n \geq 2$ . On pourra faire une preuve par récurrence en utilisant la question précédente, qui donne à la fois le cas de base de la récurrence et le principe de décomposition permettant d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

## 5 Arbres

### Exercice 58 : Arbres à 6 sommets

Trouver tous les arbres à 6 sommets.

### Exercice 59 : Cycles dans un graphe et son complémentaire

Soit  $G$  un graphe dont le nombre de sommets est supérieur ou égal à 5.

Question 1 – Montrer que  $G$  ou  $\bar{G}$  contient un cycle.

### Exercice 60 :

Soit  $T$  un arbre comportant au moins 3 sommets de degré 1.

Question 1 – Montrer que  $T$  contient au moins un sommet de degré au moins 3.

### Exercice 61 :

Soit  $F$  une forêt ayant  $c$  composantes connexes et  $n$  sommets, avec  $c \geq 1$  et  $n \geq 1$ .

Question 1 – Donner le nombre d'arêtes de  $F$  en fonction de  $c$  et  $n$ .

**Exercice 62 :** La séquence de degrés d'un arbre est 5, 4, 3, 2, 1, ..., 1. Déterminez le nombre de "1" dans la séquence.

## Arbre couvrants de poids minimum

### Exercice 63 : Le château d'eau :

Une communauté de communes veut desservir un ensemble de villages en eau potable à partir d'un château d'eau placé dans l'un des villages (voir Figure 3). Selon des paramètres législatifs, géologiques, etc., le coût d'installation des canalisations pour transporter l'eau est estimé pour certaines paires de villages. Certains villages ne peuvent pas être reliés directement à cause du relief. On suppose que les capacités des canalisations sont illimitées. Il faut déterminer un réseau qui puisse acheminer de l'eau dans chaque village, et ce au moindre coût.

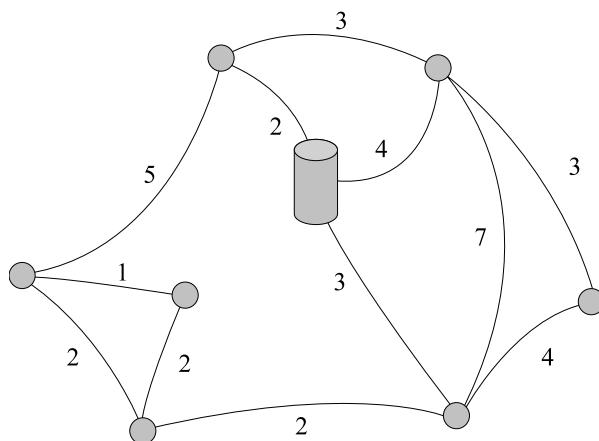


FIGURE 3 – Le château d'eau est représenté par le cylindre, les disques étant les villages à desservir. Les chiffres représentent les coûts de liaison entre deux villages.

Question 1 – Proposez une solution pour ce problème.

### Exercice 64 : Monsieur le 9 (GI)

Un opérateur téléphonique veut installer un nouveau réseau de communication haut débit connectant les principales villes de France : Brignoud, Gières, Lans en Vercors, Monestier de Clermont, Tullins et Uriage.

Les coûts de connexion entre 2 villes dépendent de la distance, du relief, des lignes déjà existantes. Ils sont donnés dans la Table 1 :

TABLE 1 – Coûts de connexion

	G	B	L	U	T	M
G	-	5	8	2	2	11
B		-	7	4	8	12
L			-	6	7	13
U				-	3	12
T					-	10
M						-

Question 1 – Quelles connexions permettent de relier les villes à moindre coût ?

### Exercice 65 : (inspiré de *Pearls in Graph Theory* de N. Hartsfield et G. Ringel)

Dans le graphe de la Figure 4, l'arbre couvrant de poids minimum a un poids de 17. Réarranger les poids des arêtes afin que les arbres couvrants de poids minimum aient un poids de 19.

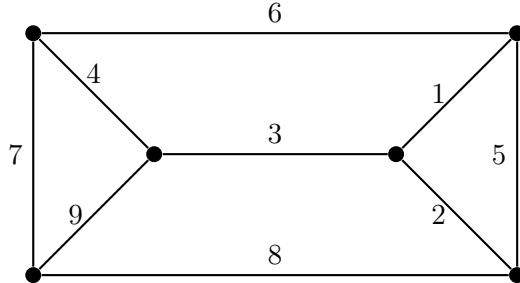


FIGURE 4 – Graphe  $G$

### Exercice 66 : (inspiré de *Pearls in Graph Theory* de N. Hartsfield et G. Ringel)

Dans le graphe du cube en dimension 3, on sait que quatre arêtes ont un poids de 1, quatre arêtes ont un poids de 2 et quatre arêtes ont un poids de 3. Quelle est une répartition possible des arêtes telle que le poids de l'arbre couvrant de poids minimum est 10 ? Même question si ce poids est 11.

### Exercice 67 : Camion (J.-F. Hèche)

Le réseau de la Figure 5 représente une partie du réseau routier d'une ville. Les nœuds correspondent aux carrefours, les arêtes aux routes que l'on suppose toutes à double sens et les nombres sur les arêtes indiquent la hauteur maximale (en centimètres) qu'un véhicule peut avoir s'il désire emprunter la route correspondante.

Un livreur désire se rendre du point  $A$  au point  $B$ . Pour ceci, il veut déterminer la hauteur maximale  $x$ , en mètres, du camion qu'il peut utiliser.

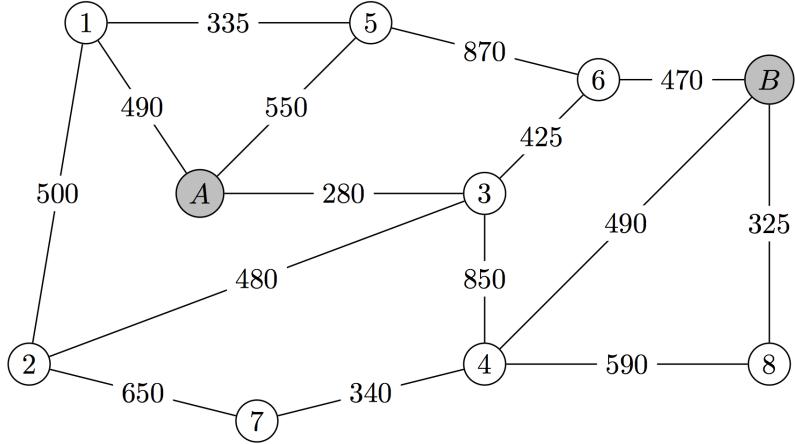


FIGURE 5 – Réseau routier avec les hauteurs maximales (en centimètres)

Question 1 – Trouver manuellement la solution au problème du livreur.

Question 2 – Déterminer quel problème de la théorie des graphes permet de décider si le livreur, ayant un camion de hauteur  $x$  mètres, peut effectuer sa livraison en utilisant uniquement les routes du réseau donné.

Question 3 – Citer un algorithme permettant de résoudre le problème précédent.

Question 4 – Appliquer l'algorithme cité ci-dessus afin de déterminer la hauteur maximale du camion pour que la livraison soit possible et donner un itinéraire réalisable.

### Exercice 68 : Traductions

Un document important, rédigé en anglais, doit être traduit en huit autres langues : allemand, danois, espagnol, français, grec, italien, néerlandais et portugais. Parce qu'il est plus difficile de trouver des traducteurs pour certaines langues que pour d'autres, certaines traductions sont plus chères que d'autres. Les coûts (en euros) sont indiqués dans la table ci-dessous.

de/à	dan.	néd.	ang.	fr.	all.	grec	it.	port.	esp.
dan.	*	90	100	120	60	160	120	140	120
néd.	90	*	70	80	50	130	90	120	80
ang.	100	70	*	50	60	150	110	150	90
fr.	120	80	50	*	70	120	70	100	60
all.	60	50	60	70	*	120	80	130	80
grec	160	130	150	120	120	*	100	170	150
it.	120	90	110	70	80	100	*	110	70
port.	140	120	150	100	130	170	110	*	50
esp.	120	80	90	60	80	150	70	50	*

On veut obtenir une version du document dans chaque langue à un coût total minimum.

Question 1 – Modéliser le problème comme un problème d'un arbre couvrant de poids minimum. Décrire clairement le graphe.

Question 2 – Quelles traductions devront être faites afin d'obtenir une version dans chaque langue à un coût total minimum ?

### Exercice 69 : Découpe (Wojciech Bienia)

A l'aide d'une scie à découper les courbes, on doit découper les 10 profils placés sur un morceau rectangulaire  $35 \times 25$  de contre-plaqué comme l'indique le schéma de la Figure 6.

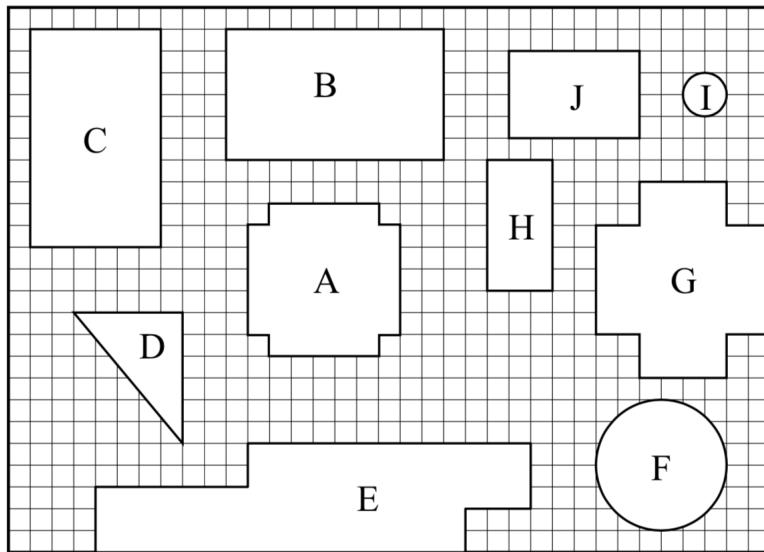


FIGURE 6 – Plan de découpe

Le problème consiste à trouver le tracé qui minimise la longueur totale de découpe réellement effectuée, c'est-à-dire que les passages en arrière, les déplacements répétés par une ligne ou un trou déjà découpés ne comptent pas comme une augmentation de la longueur. Pour découper un morceau placé à l'intérieur de la planche il faut obligatoirement commencer le déplacement de la scie à partir du bord de la planche, pour des raisons techniques.

Question 1 – Présentez le problème général comme un modèle classique de la théorie des graphes et justifiez cette modélisation.

Question 2 – Traitez l'exemple et proposez un plan optimal de découpe. Ce plan est-il unique ? (justifier)

Question 3 – La partie restante (quadrillée) du contre-plaqué peut-elle être en plusieurs morceaux à l'issue d'une découpe optimale ? Expliquez ce phénomène sur la base de la théorie des graphes.

## 6 Plus courts chemins

### Exercice 70 : Algorithme de Dijkstra (Zoltán Szigeti)

Question 1 – En appliquant l'algorithme de Dijkstra, indiquez sur la Figure 7 la longueur des plus courts chemins issus du sommet  $s$ , dans le graphe. Vous indiquerez sur le dessin toutes les traces de l'algorithme.

Question 2 – Indiquez l'arborescence des plus courts chemins issus de  $s$  sur le dessin de la Figure 8.

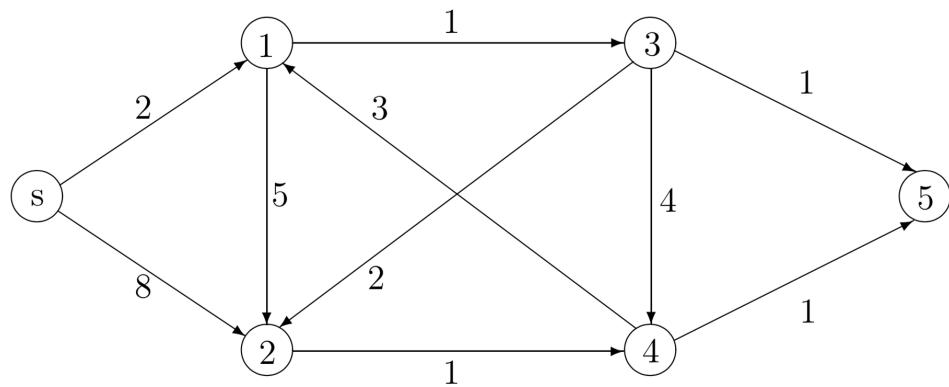


FIGURE 7 – Application de l’algorithme de Dijkstra

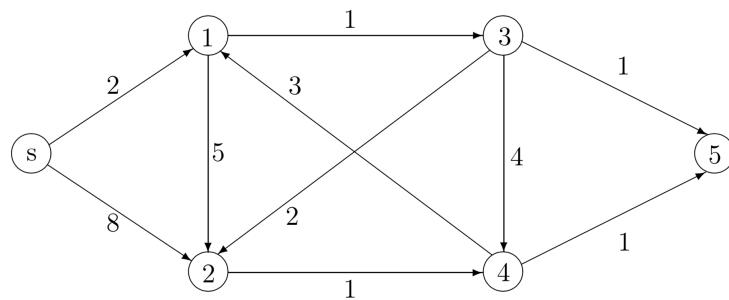


FIGURE 8 – Arborescence des plus courts chemins

**Exercice 71 :** Un élève de Polytech’Grenoble souhaite voir le soleil de minuit sur les fjords de Norvège. Il décide soudain de se rendre à Rana, charmante ville située à proximité du cercle polaire. Après avoir fait le tour de quelques compagnies aériennes, il a recensé plusieurs connexions aériennes possibles lui permettant d’aller de Grenoble (Lyon St Exupéry) à Rana, qu’il a représentées à l’aide du graphe de la Figure 9.

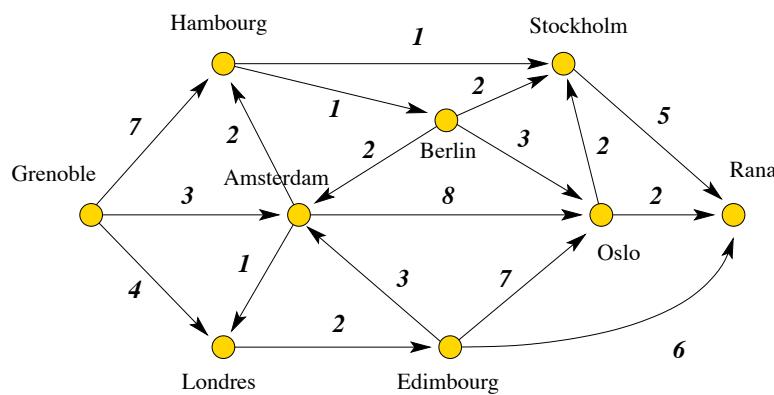


FIGURE 9 – Les valuations portées sur les arcs correspondent aux temps de vol (en heures)

Question 1 – Notre voyageur n’ayant que très peu de jours de vacances, aidez-le à déterminer le chemin le plus rapide pour se rendre de Grenoble à Rana.

Question 2 – Le graphe dessiné par notre voyageur ne tient pas compte des temps de transit à chaque escale, entre deux vols. Comment les modéliserez-vous ?

### Exercice 72 : Procédé de fabrication le plus sûr (d'après J. Moncel)

L'entreprise de semiconducteurs FLEE FOR ALL souhaite déterminer le procédé de fabrication le plus sûr pour leurs nouveaux processeurs SX-42. Il y a en effet plusieurs façons de faire pour transformer la matière première jusqu'au produit fini (enchaînement d'opérations de gravure, de vernissage, de nettoyage, de dopage, etc.). Le processus de fabrication de processeurs est extrêmement sensible, et si à une étape il y a le moindre problème alors la plaque de silicium est perdue et détruite. La Figure 10 décrit les étapes intermédiaires possibles, et la probabilité de succès de chaque étape.

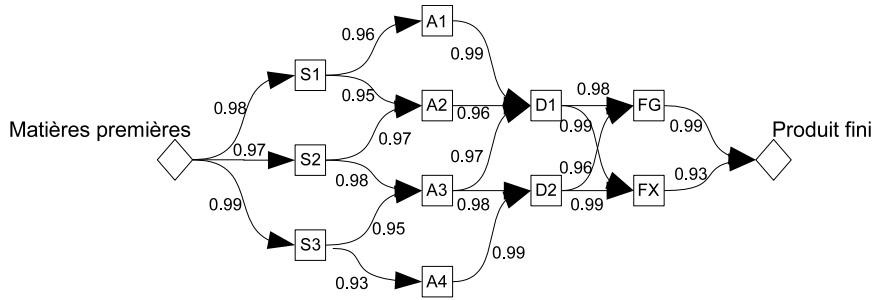


FIGURE 10 – Schéma descriptif des processus de fabrication possibles. Les produits semi-finis intermédiaires sont désignés par les abréviations S1, S2, S3, A1, A2, A3, A4, D1, D2, FG, FX. La probabilité de succès est indiquée pour chaque étape possible. Par exemple si l'on dispose de produits semi-finis de type S2, alors on a le choix entre deux processus. Le premier donnera des produits semi-finis de type A2, avec une probabilité de succès de 0.97 (il y aura donc 3% de déchets). Le second processus fournira des produits semi-finis de type A3, avec une probabilité de succès de 0.98 (il y aura donc 2% de déchets). La problématique est de déterminer le procédé de fabrication le plus sûr, c.-à-d. comportant le moins de déchets.

Question 1 – En utilisant le fait que pour tout  $a, b \in \mathbb{R}^+$  on a  $\log(ab) = \log a + \log b$ , montrer que l'on peut transformer la recherche du procédé de fabrication le plus sûr en un problème de plus long chemin dans un graphe à préciser.

Question 2 – Montrer que l'on peut ramener le problème de plus long chemin de la question précédente en problème de plus court chemin dans un graphe à préciser. Peut-on utiliser l'algorithme de Dijkstra pour cette recherche de plus court chemin ?

### Exercice 73 : Le pirate (Benjamin Lévêque)

Les ordinateurs de l'entreprise Lypotech sont connectés en réseau. Pour les ordinateurs connectés, on connaît le temps de communication. Un pirate peut détruire une connexion dans ce réseau et, pour se venger de trois années difficiles dans cette boîte, il souhaite augmenter le plus possible le temps de connexion entre le directeur (ordinateur A sur le graphique) et son secrétaire (ordinateur B).

Question 1 – Si le graphe de la Figure 11 représente les connexions entre machines, alors quelle est la connexion qu'il doit couper ?

Question 2 – Proposer un algorithme pour trouver la connexion à couper afin d'augmenter au maximum le temps de communication entre deux sommets A et B.

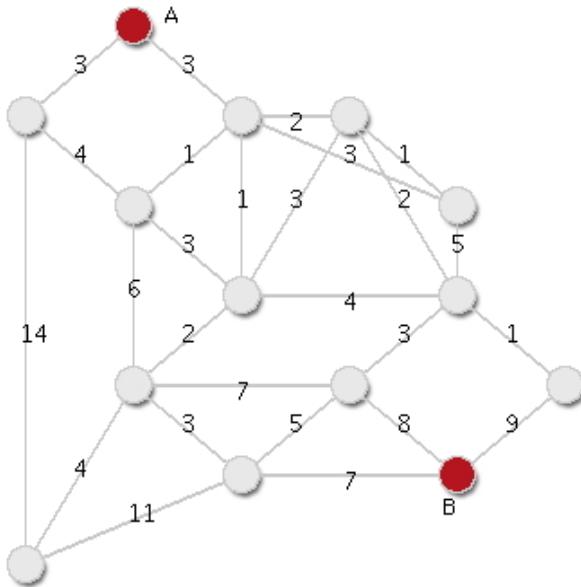


FIGURE 11 – Le réseau de l'entreprise

Exercice 74 :

Une grande entreprise de vente par correspondance a décidé de s'implanter dans un nouveau pays. Elle souhaite installer son entrepôt central et ses bureaux dans l'une des principales villes. Son argument de vente face à la concurrence repose sur la rapidité de la livraison à ses clients. Pour se conformer à cette image marketing elle veut que l'entrepôt soit dans une ville la plus proche possible de toutes les autres agglomérations (voir Figure 12).

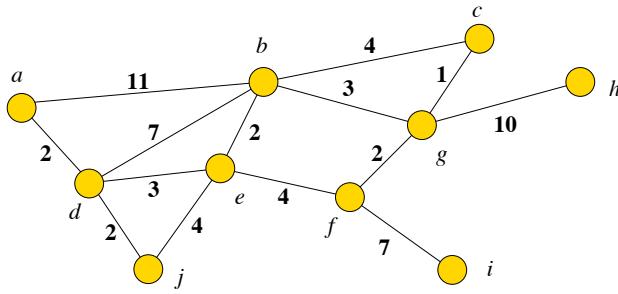
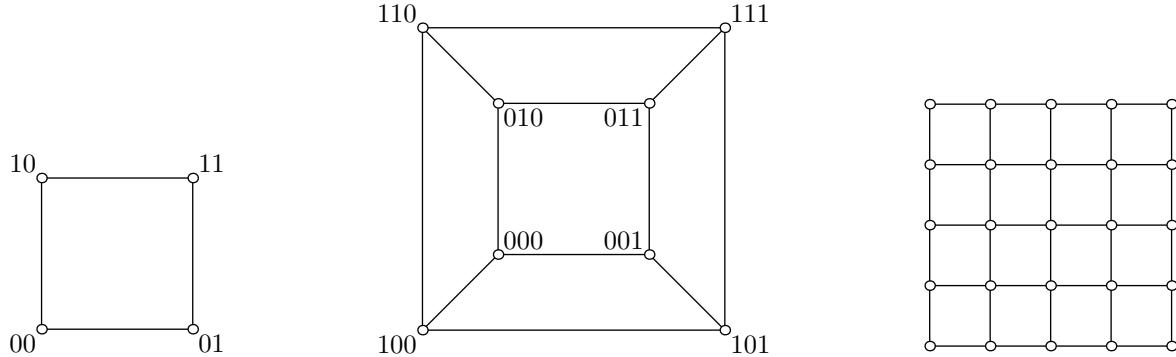


FIGURE 12 – Le graphe des différentes villes. Les valuations sur les arcs représentent les temps d'acheminement (en heure) entre 2 agglomérations, dépendants de la distance et du réseau routier (autoroute, nationale, région montagneuse...)

Question 1 – Quelle ville devrait choisir l'entreprise pour s'implanter ? Le chef de l'entreprise, qui est un ancien étudiant de l'université de Grenoble, pense que l'emplacement idéal est en  $e$ , car, dit-il, c'est "le centre du graphe"... A-t-il raison ?

## 7 Coloration

Exercice 75 : Les trois graphes ci-dessous sont-ils bipartis ?



Exercice 76 :

Question 1 – En utilisant les caractérisations appropriées des arbres et des graphes bipartis, démontrez qu'un arbre est un graphe biparti.

Question 2 – Quels sont les graphes qui sont à la fois des arbres et des bipartis complets ?

Exercice 77 : (G. Naves, Marseilles) Trouver une coloration optimale des graphes dessinés en Figure 13.

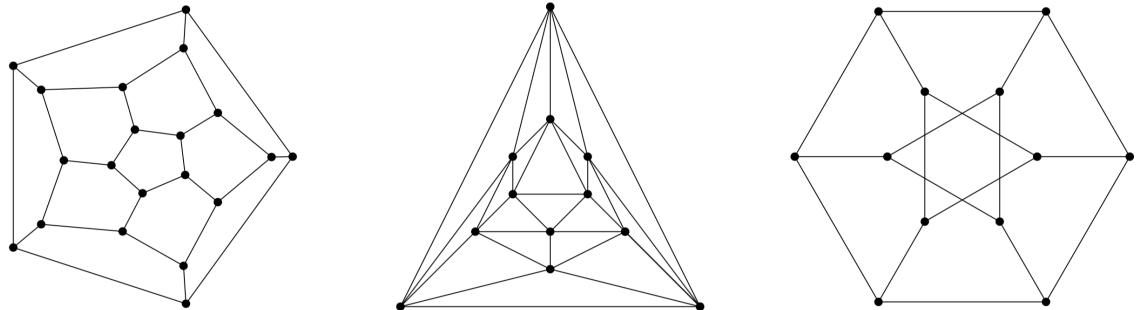


FIGURE 13 – Le dodécaèdre, l'icosaèdre et le graphe de Dürer.

Exercice 78 : Modélisez un jeu du Sudoku comme un problème de coloration de graphe. Vous indiquerez le nombre de sommets, le nombre d'arêtes, le degré minimum et le degré maximum ainsi que le nombre chromatique du graphe.

### Exercice 79 : Régulation de la circulation

La figure ci-dessous représente les trajectoires de neuf voies  $\{V_1, \dots, V_9\}$  à un carrefour très fréquenté de Kuala Lumpur (Malaisie). Chaque voie est pourvue de ses propres feux de signalisation.

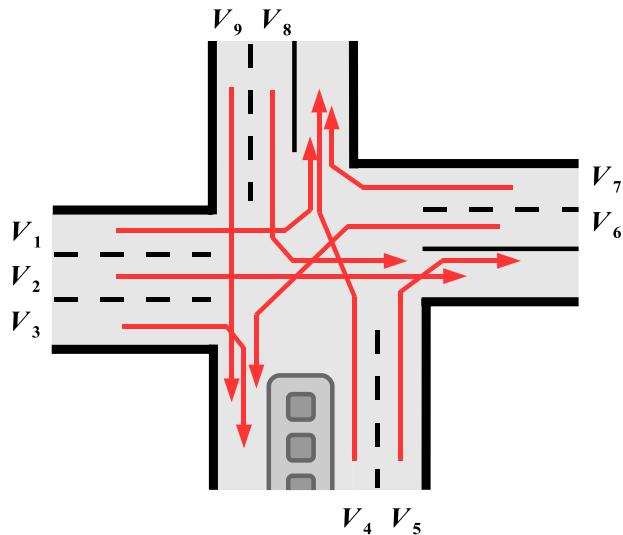


FIGURE 14 – Diagramme des neuf voies du carrefour. Le très grand nombre de véhicules empruntant ce carrefour (64 000 véhicules par jour en moyenne) conduit les autorités à réguler la circulation en phases, où à chaque phase les voies dont le feu est vert ne sont pas en conflit. Deux voies sont considérées en conflit si elles se croisent (par exemple  $V_1$  et  $V_8$ ) ou si elles ont la même destination (par exemple  $V_1$  et  $V_7$ ).

Les voitures d'une voie ne peuvent franchir le carrefour que lorsque leur feu est vert. La circulation est régulée par des cycles de 160 secondes, chaque cycle comportant 4 phases de durées 40 secondes comme suit :

- phase 1 :  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$  sont au vert (les autres au rouge)
- phase 2 :  $V_4$ ,  $V_5$  et  $V_9$  sont au vert (les autres au rouge)
- phase 3 :  $V_6$  et  $V_7$  sont au vert (les autres au rouge)
- phase 4 :  $V_8$  est au vert (les autres au rouge)

Question 1 – Modélisez la situation par un graphe, tel que le nombre minimum de phases pour réguler le trafic soit égal au nombre chromatique de ce graphe.

Question 2 – Peut-on faire mieux que 4 phases pour réguler le trafic ?

Les voies  $V_2$  et  $V_4$  sont en fait très fréquentées, de sorte que les autorités souhaitent que  $V_2$  et  $V_4$  soient au vert deux fois par cycle et non plus une seule fois comme précédemment.

Question 3 – Modifier le modèle pour prendre en compte cette contrainte ; donner un nouveau cycle ayant un nombre minimum de phases tel que  $V_2$  et  $V_4$  sont au vert deux fois dans le cycle.

### Exercice 80 : Réservations hôtelières (Louis Esperet)

À travers sa centrale de réservation, un hôtel a reçu les demandes suivantes pour la première semaine du mois de mars :

- R. Arquette a réservé une chambre la nuit du 1er mars ;
- L. Bacall a réservé une chambre les nuits des 3, 4, 5, et 6
- M. Caine a réservé une chambre les nuits des 5, 6, 7
- J. Depp a réservé une chambre les nuits des 1, 2, 3, 4
- C. Eastwood a réservé une chambre les nuits des 2, 3, 4, 5, 6
- B. Fonda a réservé une chambre la nuit du 7
- J. Goodman a réservé une chambre les nuits des 1 et 2
- T. Hanks a réservé une chambre les nuits des 5, 6, 7
- J. Irons a réservé une chambre les nuits des 1, 2 et 3
- S. Johansson a réservé une chambre les nuits des 2, 3, 4, 5

L'hôtel a seulement 4 chambres de libre mais en faisant venir très rapidement un plombier et un électricien, le gérant peut se débrouiller pour avoir 2 chambres de plus (la première chambre a des problèmes de faux-contact et dans la deuxième il y a une fuite). Le gérant préfère ne faire venir les artisans que si c'est absolument nécessaire (son beau-frère doit passer lui donner un coup de main pour les travaux la 2ème semaine de mars de toute façon). Bien sur, aucun de ces hôtes n'accepterait de changer de chambre en cours de séjour.

Question 1 – Le gérant doit-il faire venir les deux artisans ? Donner une répartition des clients dans les chambres.

### Exercice 81 : Les roues

Une roue d'ordre  $n$  est un graphe à  $n$  sommets constitué d'un cycle à  $n - 1$  sommets (appelons ses sommets  $v_1, \dots, v_{n-1}$ ) auquel on ajoute un sommet  $u$  tel que  $uv_i$  est une arête pour tout  $i$  (voir figure ci-dessous). On note  $R_n$  la roue d'ordre  $n$ .

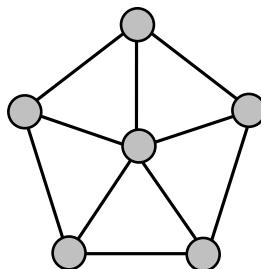


FIGURE 15 – La roue d'ordre 6 (le sommet  $u$  est celui qui se trouve au centre de la roue).

Question 1 – Démontrer que  $\chi(R_n) = 3$  si  $n \geq 5$  est impair et  $\chi(R_n) = 4$  si  $n \geq 4$  est pair.

### Exercice 82 : Produits chimiques

Huit lots de produits chimiques doivent être expédiés par avion depuis Saint-Denis (île de la Réunion) à la station scientifique de Port-aux-Français (îles Kerguélen). Pour des raisons de sécurité, certains de ces produits chimiques ne peuvent pas être transportés dans le même container. En effet, les produits interagissent entre eux et il est risqué de les stocker dans un même container si les lots ne sont pas parfaitement étanches. Les produits sont notés  $P_1, \dots, P_8$ . La table ci-dessous liste les interactions entre les produits chimiques. Par exemple, le produit  $P_1$  peut être placé dans le même container que les produits  $P_3, P_4, P_7$  et  $P_8$ , mais

ne peut pas être placé avec  $P_2$ ,  $P_5$  ou  $P_6$ .

$$\begin{array}{l|l|l} P_1 : P_2, P_5, P_6 & P_2 : P_1, P_3, P_5, P_7 & P_3 : P_2, P_4, P_7 \\ P_4 : P_3, P_6, P_7, P_8 & P_5 : P_1, P_2, P_6, P_7, P_8 & P_6 : P_1, P_4, P_5, P_8 \\ P_7 : P_2, P_3, P_4, P_5, P_8 & P_8 : P_4, P_5, P_6, P_7 \end{array}$$

Le prix de l'envoi d'un container est de 3000 euros. On peut supposer qu'il n'y a pas de contrainte de capacité sur les containers (c.-à-d. un container peut contenir un nombre maximum de  $n$  lots, avec  $n \geq 8$ ).

**Question 1 –** Donner le prix minimum de l'envoi des huit lots de produits chimiques ainsi que la répartition des lots de produits chimiques dans les containers. Justifier soigneusement. (Indice : ne réinventez pas la roue!).

### Exercice 83 :

On rappelle que  $\chi(G)$  désigne le nombre chromatique de  $G$ , c'est-à-dire le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier les sommets de  $G$  de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur.

On note  $\Delta(G)$  le degré maximum d'un sommet de  $G$ .

**Question 1 –** Démontrer que  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$  pour tout graphe  $G$ . Donner des graphes  $G$  tels que  $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ , et donner des graphes  $G$  tels que  $\chi(G) < \Delta(G) + 1$ .

Soit  $\omega(G)$  le nombre de sommets de la plus grande clique de  $G$ . On rappelle qu'une clique est un sous-graphe partiel qui est complet.

**Question 2 –** Démontrer que  $\chi(G) \geq \omega(G)$  pour tout graphe  $G$ . Donner des graphes  $G$  tels que  $\chi(G) = \omega(G)$ , et donner des graphes  $G$  tels que  $\chi(G) > \omega(G)$ .

Soit  $M_0$  le graphe  $K_2$ . Par récurrence on définit  $M_{n+1}$  en fonction de  $M_n$ ,  $n \geq 0$ , de la façon suivante :

- si  $v_1, \dots, v_k$  sont les sommets de  $M_n$ , alors les sommets de  $M_{n+1}$  sont  $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_k, u$
- si  $v_i v_j$  est une arête de  $M_n$  alors  $v_i v_j$  est aussi une arête de  $M_{n+1}$
- si  $v_i v_j$  est une arête de  $M_n$  alors  $w_i w_j$  est une arête de  $M_{n+1}$
- $uw_i$  est une arête de  $M_{n+1}$  pour tout  $i = 1, \dots, k$

**Question 3 –** Démontrer que  $M_1$  est un cycle à 5 sommets.

**Question 4 –** Démontrer que  $M_n$  a  $3 \times 2^n - 1$  sommets pour tout  $n \geq 0$ .

**Question 5 –** Démontrer par récurrence sur  $n$  que  $\omega(M_n) = 2$  pour tout  $n \geq 0$ .

**Question 6 –** Démontrer par récurrence sur  $n$  que  $\chi(M_n) = 2 + n$  pour tout  $n \geq 0$ .

Les deux questions précédentes montrent qu'il peut y avoir un écart arbitrairement grand entre  $\omega(G)$  et  $\chi(G)$ . Les graphes de la famille  $(M_n)_{n \geq 0}$  sont appelés *graphes de Mycielski* en l'honneur du mathématicien du même nom.

## 8 Couplages

### Exercice 84 : Compagnie aérienne

Une compagnie aérienne dispose de cinq avions  $A_1, A_2, \dots, A_5$ . Chaque avion peut effectuer des vols sur les routes indiquées dans la Table 3.

Avion	Routes
$A_1$	Londres-Francfort
$A_2$	Londres-Francfort, Milan-Barcelone
$A_3$	Londres-Francfort, Paris-Moscou, Athènes-Madrid, Rome-Sofia
$A_4$	Paris-Moscou, Athènes-Madrid, Rome-Sofia
$A_5$	Londres-Francfort, Milan-Barcelone

TABLE 3 – Routes des avions

Question 1 – Dessiner un graphe biparti  $G$  dont les sommets représentent les avions et les routes, et dont les arêtes représentent les routes que l'avion peut prendre.

Question 2 – L'avion  $A_3$  sert sur la route Londres-Francfort,  $A_4$  sur la route Rome-Sofia, et  $A_5$  sur la route Milan-Barcelone. Cette affectation est-elle un couplage maximum de  $G$  ?

L'avion  $A_3$  doit être retiré du service pour passer en maintenance.

Question 3 – Trouver un couplage maximum du graphe modifié.

Exercice 85 : Pour chaque graphe dans la Figure 16, trouver un couplage maximum et justifier pourquoi il est maximum.

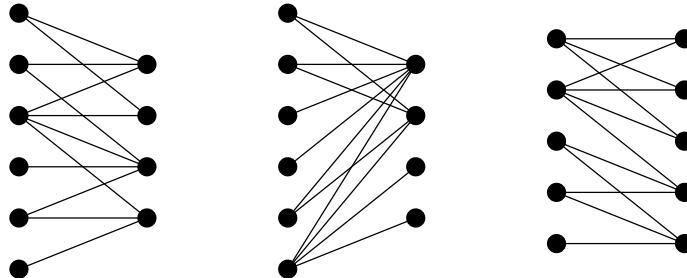


FIGURE 16 – Graphes

Exercice 86 : Pour chaque graphe dans la Figure 17, trouver un couplage parfait ou expliquer pourquoi un tel couplage n'existe pas.

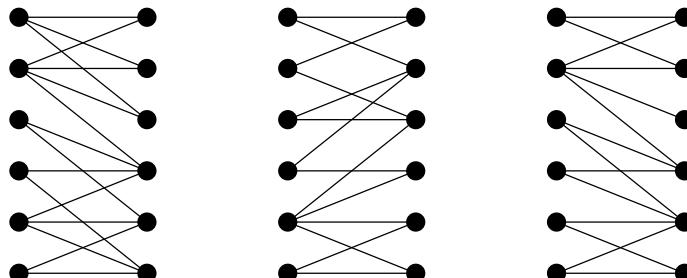


FIGURE 17 – Graphes

**Exercice 87 :** (W. Bienia) Le graphe biparti de la Figure 18 est composé de 12 sommets (6 blancs et 6 noirs). Les 4 arêtes épaisses forment le couplage  $M$ .

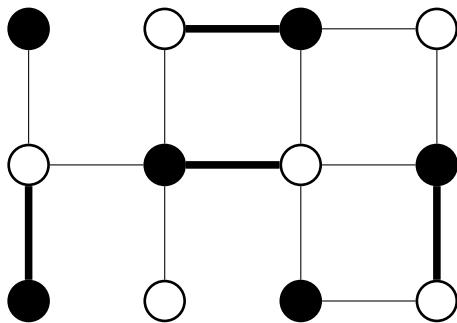


FIGURE 18 – Graphes

Question 1 – Montrez que  $M$  est un couplage maximal.

Question 2 – Appliquez la méthode vue en cours pour trouver un couplage maximum à partir de  $M$

Question 3 – Donnez un certificat que le couplage obtenu est bien maximum.

**Exercice 88 :** (W. Bienia)

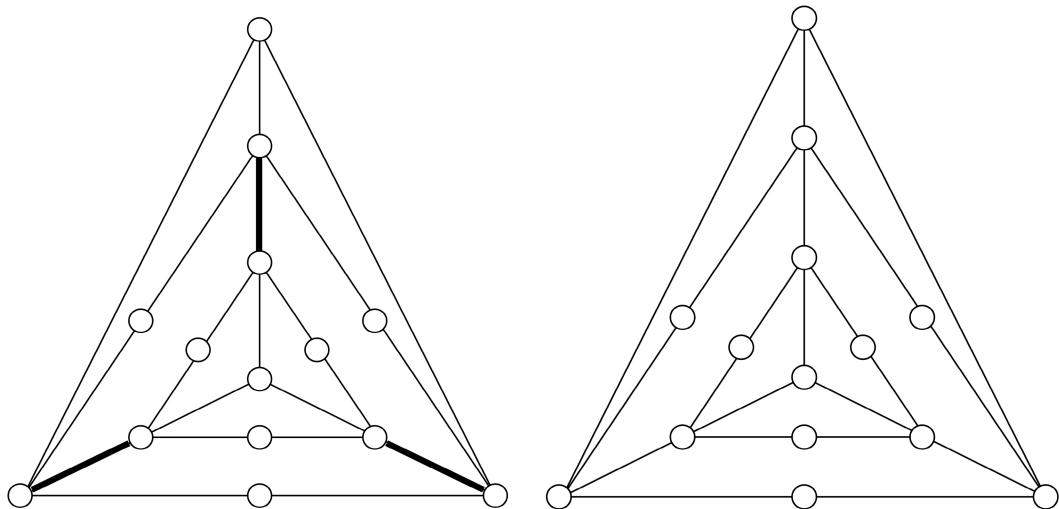


FIGURE 19 – Graphes

Question 1 – Justifiez que le graphe de la Figure 19 est biparti et que l'ensemble des arêtes épaisses forme un couplage maximal.

Question 2 – En appliquant la méthode vue en cours, à partir de ce couplage maximal, trouver un couplage maximum.

Question 3 – Donnez un certificat que le couplage obtenu est bien maximum.

Question 4 – Ce couplage est-il parfait ?

### Exercice 89 :

Soit  $G$  un graphe biparti et  $k$ -régulier (tous les sommets sont de degré  $k \geq 1$ ).

Question 1 – En utilisant le lemme des mariages, montrer que  $G$  a un couplage parfait.

Question 2 – Déduire qu'on peut partitionner ses arêtes en  $k$  couplages parfaits.

### Exercice 90 : Cartes

On distribue un jeu de 52 cartes en faisant treize paquets de quatre cartes chacun.

Question 1 – En utilisant le “lemme des mariages”, expliquer pourquoi il est possible de prendre une carte de chaque paquet de telle façon qu’on termine avec treize cartes contenant toutes les valeurs (un as, un 2, et ainsi de suite jusqu’ à un roi).

### Exercice 91 : Speed dating

A une soirée “speed dating”, 6 femmes et 6 hommes se rencontrent pour un tête à tête de 10 minutes. Après chaque entretien, chaque participant coche une case “oui” ou “non” dans son formulaire. Les organisateurs pourront donner à chacun l'email de l'autre seulement si les deux ont coché “oui”.

Les réponses sont données dans les Tables 4 et 5.

	Alain	Bertrand	Christophe	Didier	Édouard	Fabien
Amélie	non	non	non	non	oui	non
Béatrice	oui	non	non	oui	oui	non
Céline	oui	non	oui	non	oui	non
Denise	oui	oui	non	oui	oui	oui
Émilie	oui	non	oui	non	non	non
Françoise	oui	oui	non	oui	non	non

TABLE 4 – Les réponses des femmes

	Amélie	Béatrice	Céline	Denise	Émilie	Françoise
Alain	oui	non	oui	non	oui	oui
Bertrand	oui	non	oui	oui	non	non
Christophe	oui	oui	oui	oui	oui	oui
Didier	oui	oui	non	non	oui	oui
Édouard	oui	non	oui	oui	non	non
Fabien	oui	oui	non	oui	oui	oui

TABLE 5 – Les réponses des hommes

Question 1 – Comment peut-on modéliser ce problème par un graphe ?

Les organisateurs, étant très conservateurs, ne veulent pas donner plus qu'une adresse à chaque participant. Mais ils essaient quand même de satisfaire le plus grand nombre de participants.

Question 2 – Quel est le problème de graphe que l'on souhaite résoudre ?

Question 3 – Est-il possible d'envoyer une adresse email à tous les participants ? Sinon, quel est le plus grand nombre de rencontres qui peuvent s'effectuer ?

### Exercice 92 :

Considérons l'échiquier réduit de la Figure 20. On y a placé deux tours qui ne se menacent pas mutuellement.

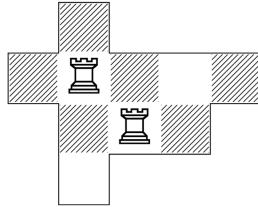


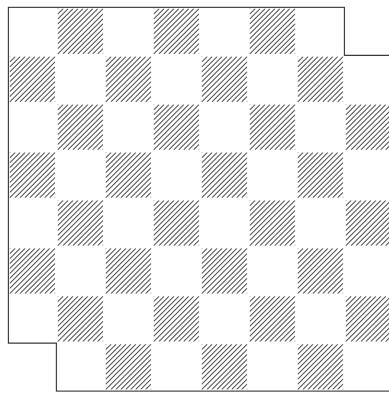
FIGURE 20 – Échiquiers

Quel est le nombre maximum de tours qu'on peut placer sur l'échiquier de sorte que les tours ne se menacent pas mutuellement ? Donnez un certificat d'optimalité.

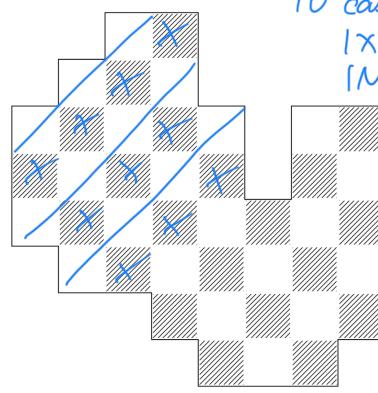
### Exercice 93 : Dominos

On se donne un échiquier auquel on a enlevé un certain nombre de cases, qu'on appelle  $E$  (voir Figure 21). Un domino est une figure  $2 \times 1$  ou  $1 \times 2$ . On se demande si il est possible de pavier (on dit aussi partitionner)  $E$  en dominos (c'est à dire recouvrir  $E$ , sans chevauchement, avec des dominos).

Question 1 – Montrer que ce problème est équivalent à un problème de couplage sur un graphe biparti que l'on explicitera. En déduire, en utilisant le cours, un algorithme pour savoir si  $E$  a un pavage en dominos.



$E_1$



$E_2$

11 case blanc  
10 case noir  
 $|X|=11$   
 $|N(X)|=10$

FIGURE 21 – Échiquiers

Question 2 – Montrer que  $E_1$  n'a pas de pavage en dominos.

Question 3 – En utilisant le théorème des mariages, montrer que  $E_2$  n'a pas de pavage en dominos.

## 9 Flots

### Exercice 94 : embouteillages en ville

Un grand nombre de personnes venant de la vallée du Grésivaudan par l'A41 rejoignent chaque matin la porte de France afin de prendre l'autoroute E711 en direction de Lyon. Tous les matins, Grenoble subit des congestions importantes.

On veut donc optimiser ce réseau routier. Pour cela, on veut estimer sa capacité.

On choisit comme mesure la quantité de voitures qui arrivent du Grésivaudan à l'entrée de Grenoble juste avant le stade par unité de temps.

Question 1 – De quelques données a-t-on besoin ?

Question 2 – Décrivez précisément le problème que l'on souhaite résoudre

### Exercice 95 : Canalisations (Jean-François Culus)

Une usine comporte généralement un gros réseau de canalisations, transportant l'eau d'une source unique (le point d'arrivée d'eau) vers une sortie unique : le tout à l'égout. Lors d'une extension de l'usine, on raccorde les anciennes canalisations aux nouvelles, augmentant donc les débits de certaines canalisations, jusqu'à saturation de certaines d'entre elles. On souhaite alors remplacer certaine de ces canalisations afin d'augmenter le flot global de l'usine.

Le but du problème est donc de savoir quelles sont les canalisations saturées qu'il serait souhaitable de remplacer par de nouvelles canalisations plus importantes.

Question 1 – Modélisez comme un problème de graphe

### Exercice 96 : Acheminement du pétrole

La compagnie pétrolière Inti T'schouff souhaite acheminer du pétrole par oléoduc vers un pays client. Le réseau d'oléoduc comporte plusieurs tronçons, chacun ayant une capacité maximale (en débit) à ne pas dépasser. Les tronçons sont directionnels. Sur le graphe de la Figure 22, la compagnie pétrolière est représentée par le cylindre, le client par le jeton. La capacité maximale de chaque arc est indiquée.

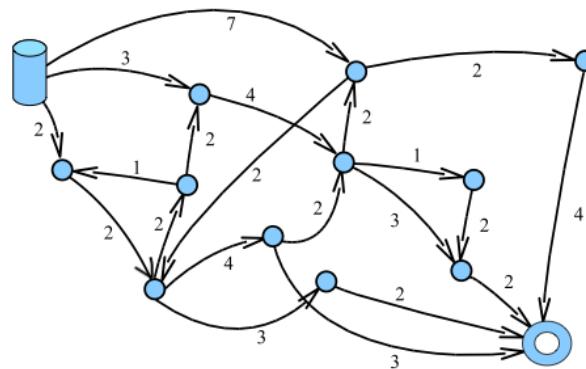
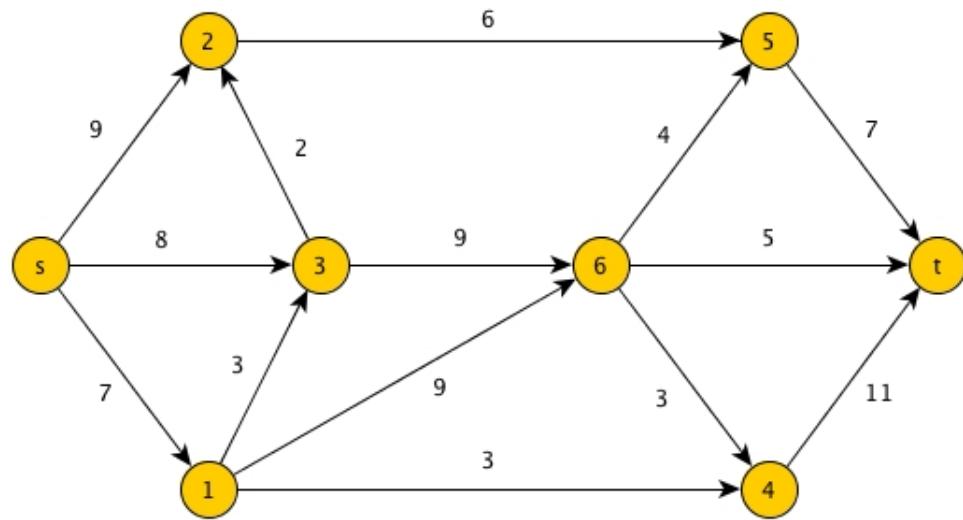


FIGURE 22 – Réseau d'Oléoduc

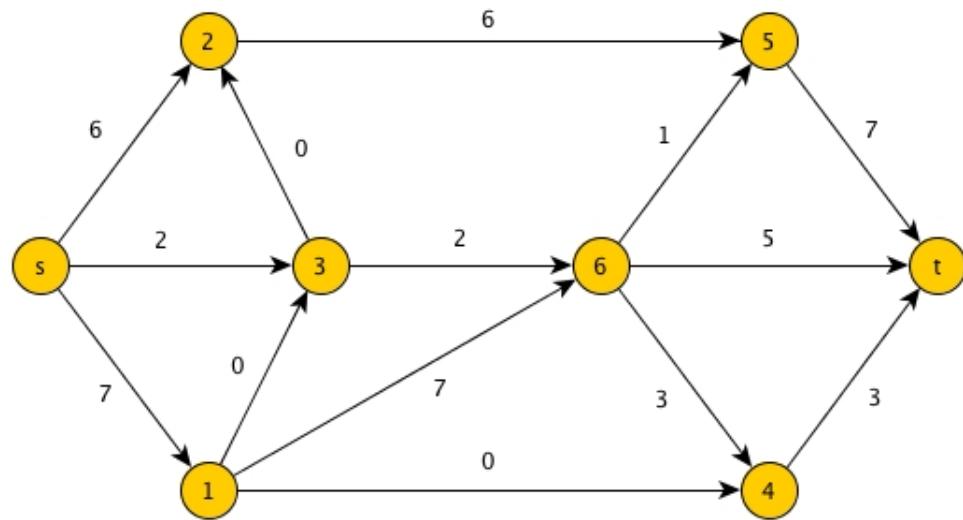
Question 1 – Quel est le débit maximum que la compagnie pétrolière peut envoyer vers le client via le réseau ?

### Exercice 97 : Flot

Le dessin ci-dessous représente un graphe avec les capacités sur les arcs.

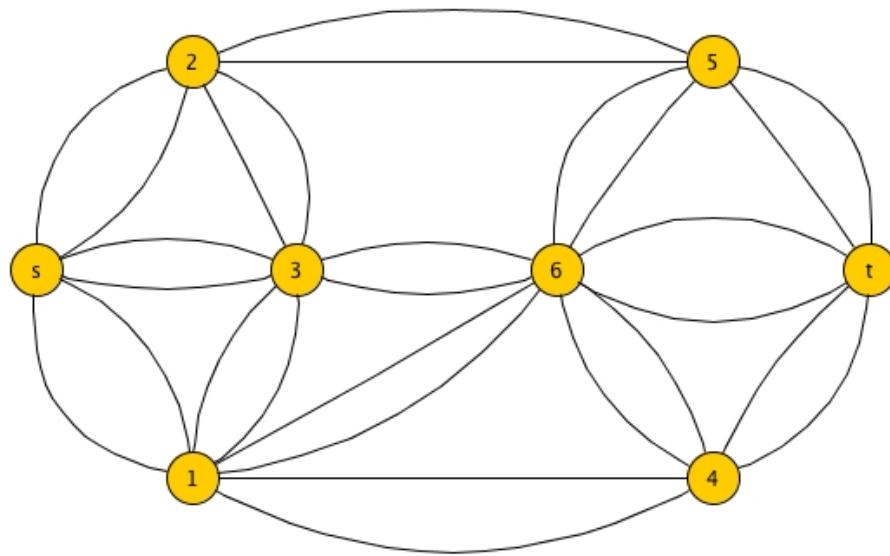


On a trouvé le flot  $f$  suivant

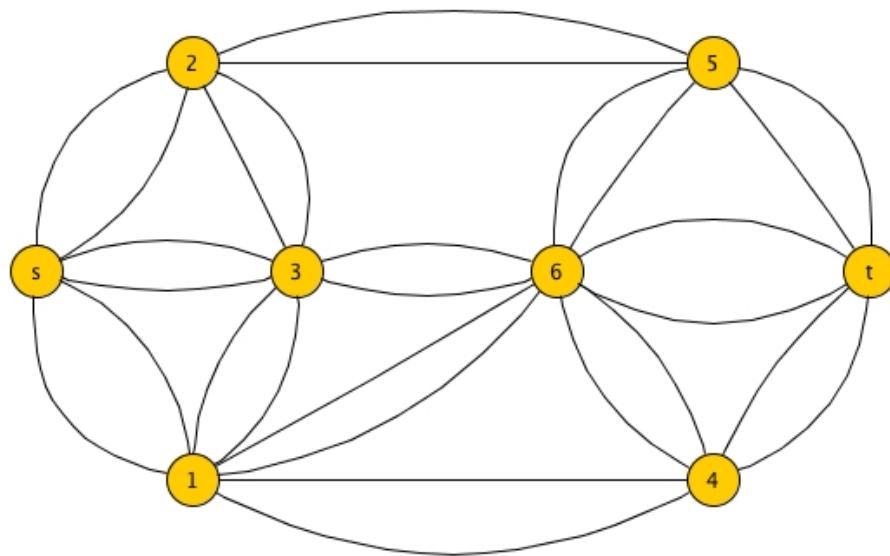


Question 1 – Vérifiez que  $f$  est bien un flot réalisable. Justifiez votre réponse.

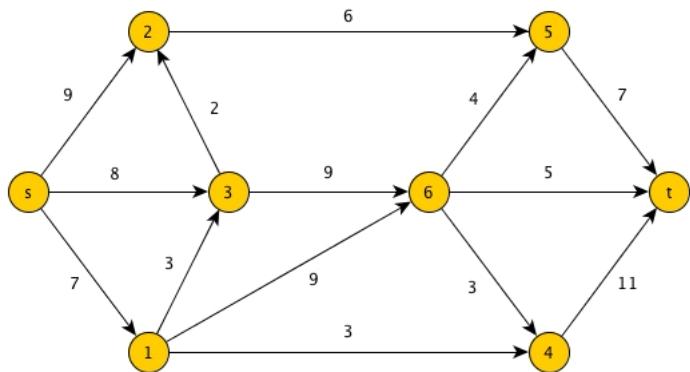
Question 2 – Représentez le graphe résiduel correspondant à ce flot sur le dessin suivant. Vous indiquerez clairement pour chaque arête le sens de la flèche et la capacité résiduelle.



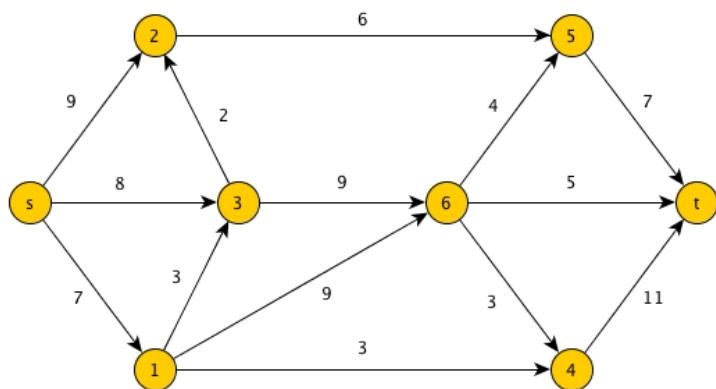
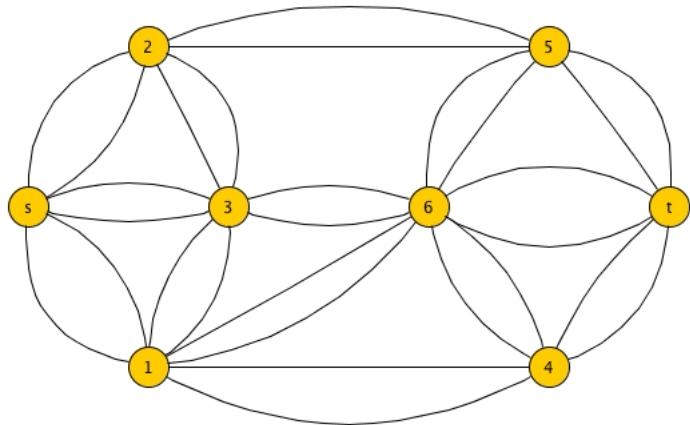
Question 3 – Représentez une  $st$ -chaîne  $f$ -augmentante sur le graphe suivant



Question 4 – Donnez, sur le graphe suivant, la nouvelle valeur  $f'$  du flot. Les valeurs affichées sont les capacités des arcs.

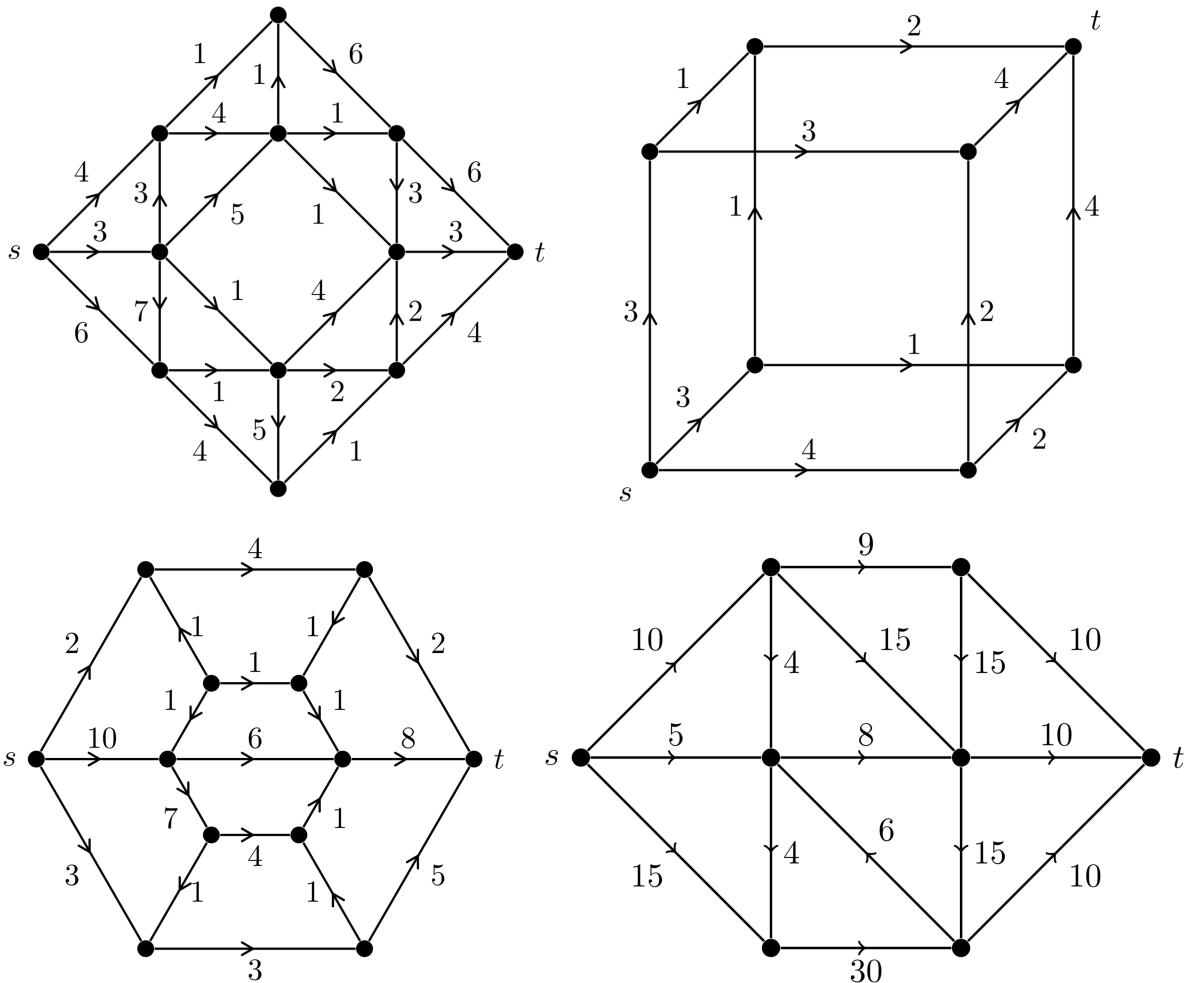


Question 5 – Est-ce que le flot  $f'$  est optimal ? précisez l'argument qui vous permet de justifier votre réponse sur l'un des deux graphes ci-dessous. Utilisez le graphe qui vous paraît le plus pertinent.



### Exercice 98 :

Utilisez l'algorithme de Ford-Fulkerson pour trouver un flot maximum dans les graphes suivants. Vous prouverez pour chacun que la valeur du flot est bien maximum.



### Exercice 99 : Bons et mauvais algorithmes de chemin augmentant

On considère le réseau de transport de la Figure 23.

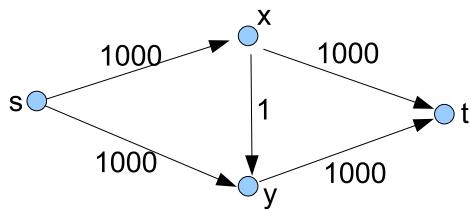


FIGURE 23 – Selon la façon dont on choisit les chemins augmentants, le nombre d’itérations de l’algorithme de Ford et Fulkerson sur cet exemple peut varier de 2 à 2000.

Question 1 – Quel est la valeur d’un  $(s, t)$ -flot maximum dans le réseau ci-dessus ? Justifiez.

Question 2 – Montrez que l’algorithme de Ford et Fulkerson peut terminer en deux itérations seulement.

Question 3 – Montrez comment l’algorithme de Ford et Fulkerson peut, en faisant des choix de chemins augmentants particulièrement peu perspicaces, terminer en 2000 itérations.

On peut démontrer qu’une “bonne” façon de choisir des chemins augmentants est de choisir un chemin augmentant empruntant un nombre minimum d’arcs. Autrement dit à la première

itération on choisirait ici soit le chemin  $s, x, t$  soit le chemin  $s, y, t$ , mais en aucun cas le chemin  $s, x, y, t$ .

Question 4 – Donnez un algorithme permettant de trouver un tel chemin augmentant.

#### Exercice 100 : Flots multi-sources

On considère un producteur de pétrole qui possède plusieurs sites de production et souhaite livrer à un client du pétrole via un réseau d'oléoducs. Chaque oléoduc est directionnel et possède une capacité maximum (en litres par unité de temps). Le pétrole est considéré comme étant le même à chacun des sites de production, nous cherchons à savoir quelle quantité maximum de pétrole nous pouvons envoyer du producteur (tous sites de production confondus) vers le consommateur (voir Figure 24). Le problème est donc très proche du problème du flot maximum, à ceci près que nous avons plusieurs sources et non une seule.

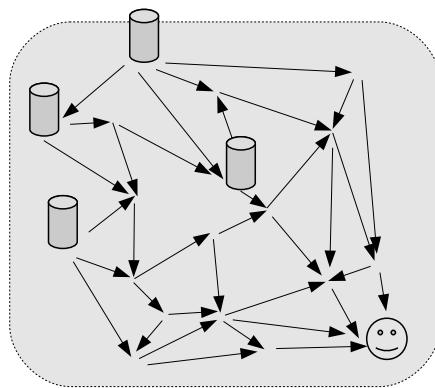


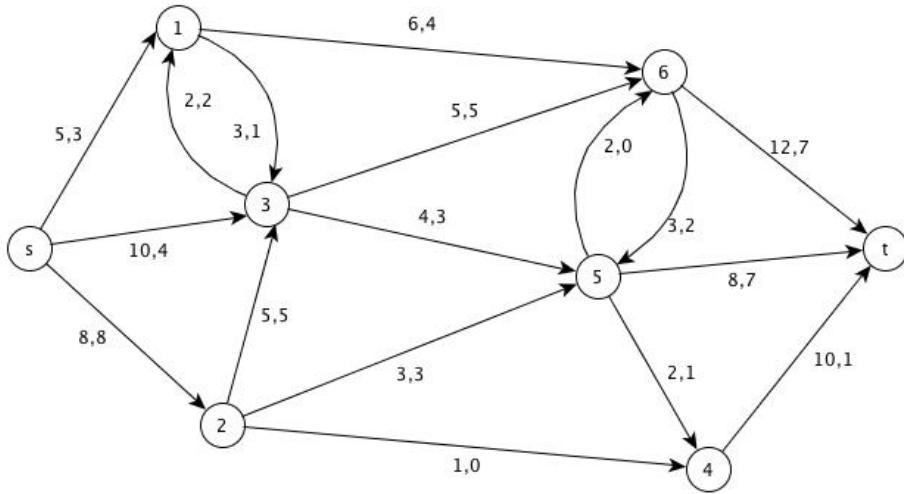
FIGURE 24 – Problème de flot multi-sources : quelle quantité maximum de pétrole pouvons-nous envoyer du producteur (tous sites de production confondus) vers le consommateur ?

Question 1 – Expliquez comment modéliser ce problème par un problème de flot maximum.

Question 2 – Même questions si on considère maintenant que le producteur a plusieurs sites de production et le consommateur plusieurs sites où il peut réceptionner le flux.

#### Exercice 101 : (Gerd Finke)

Le réseau ci-dessous décrit l'évacuation de l'eau pluviale de  $S$  vers  $T$  dans une région après un orage. Les paires de nombres sur les arcs représentent les capacités et les flots d'eau pluviale des canalisations. Par exemple, l'arc  $(1, 6)$  a une capacité de 6 unités et il y a un flot de 4 unités qui le traverse.



Question 1 – Est-ce que le réseau est saturé, c'est-à-dire le flot d'eau de 15 unités est-il le maximum que le réseau peut supporter ? Sinon, trouver le flot maximum et déterminer une coupe de capacité minimale.

Question 2 – Le canal (2, 3) est bouché. Quelle est la nouvelle valeur du flot maximum ?

On a réussi à déboucher le canal (2,3). On souhaite augmenter le flot et l'on envisage une expansion de la capacité de l'arc (2, 5). On discute actuellement une augmentation de 1 unité ou, à un coût supplémentaire, de 2 unités.

Question 3 – Quelle est votre recommandation ? Justifiez !

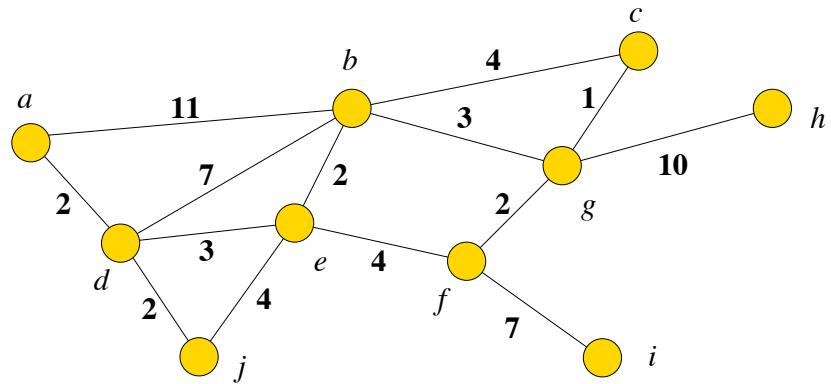
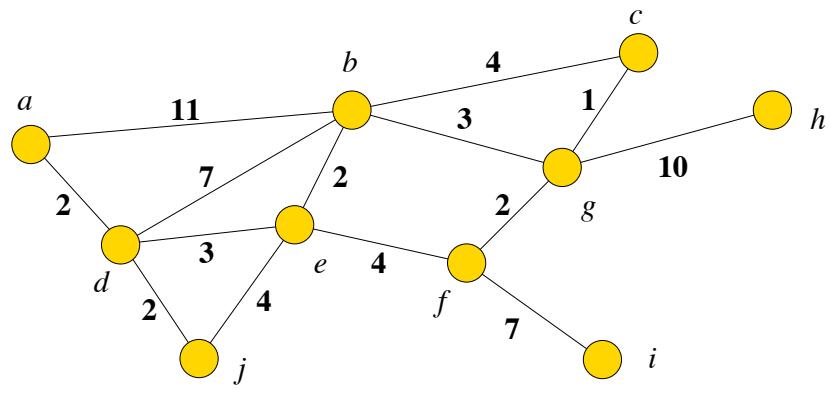
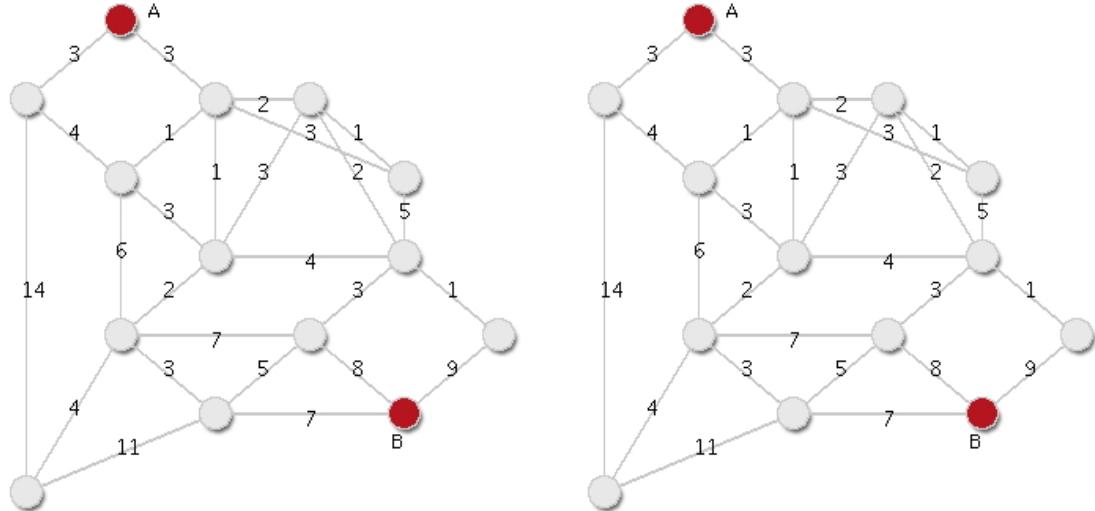
Retournons aux données initiales. Le flot total qui peut traverser le point 5 est limité à 7 unités.

Question 4 – Transformez le réseau en forme standard (capacités uniquement sur les arcs) et trouvez le nouveau flot maximum et une coupe minimale.

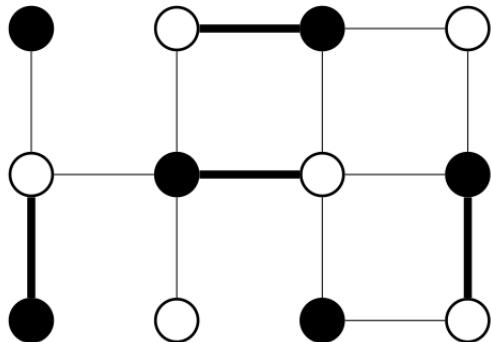
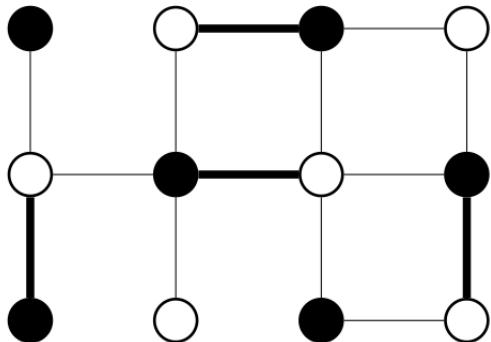
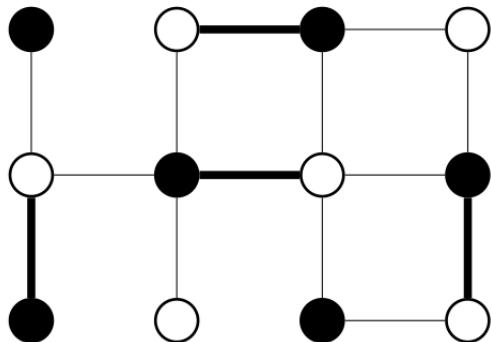
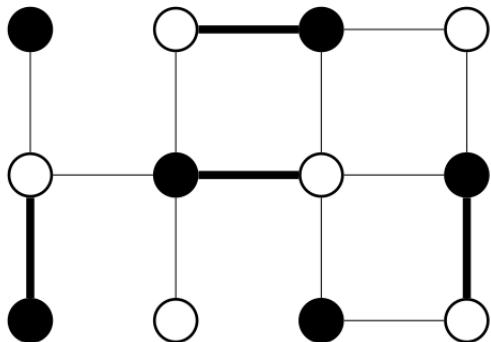
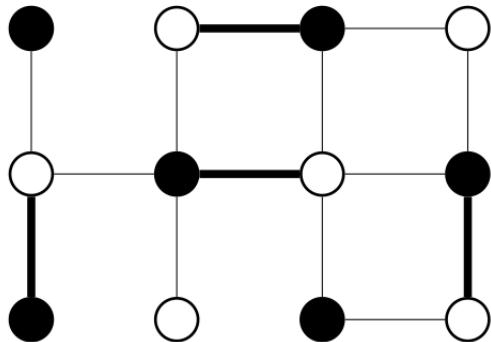
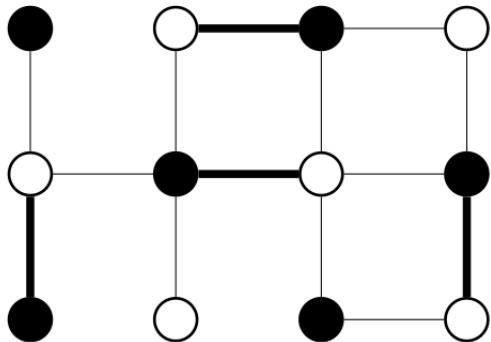
Contact UE : julie.peyre@univ-grenoble-alpes.fr

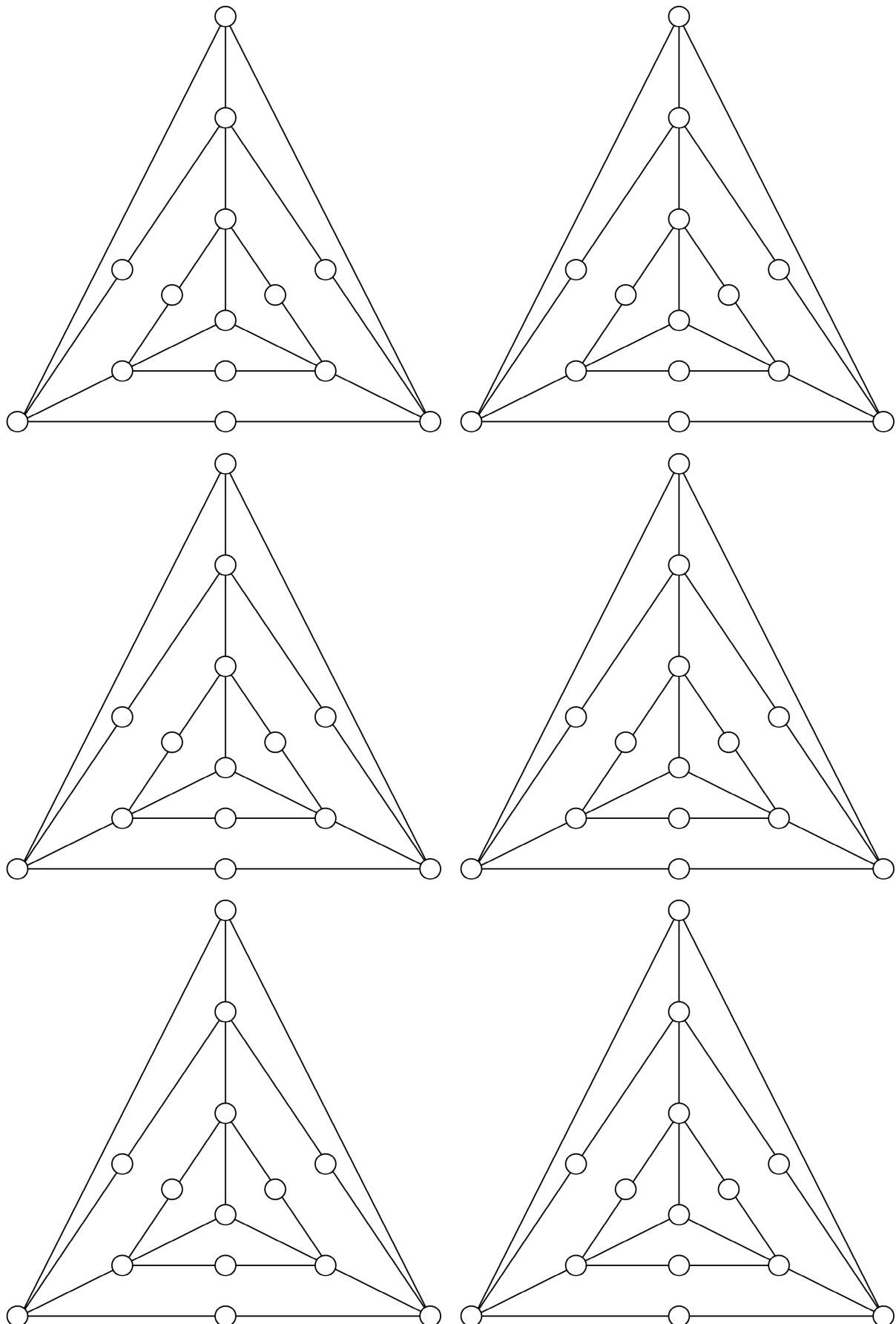
## 10 Dessins de graphes

Graphes pour exercices sur les plus courts chemins



Graphes pour exercices sur les couplages





### Graphes pour exercices sur les flots

