Couplages

Plan

Plan

Couplage

Définitions

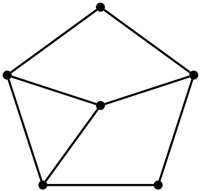
- Un *couplage* dans un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble d'arêtes $M \subseteq E$ disjointes telles que tout sommet de V est incident à au plus une arête de M.

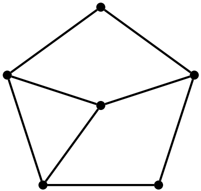
  [*Matching*]

- La cardinalité maximale d'un couplage de G est notée $\nu(G)$.

- Un couplage est *parfait* s'il est incident à tous les sommets de V.

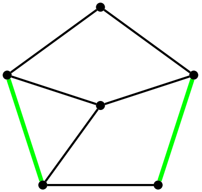
Couplage : exemples



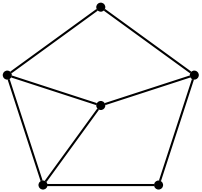


couplage M

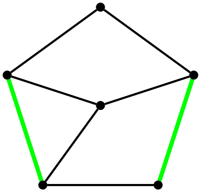
Couplage : exemples



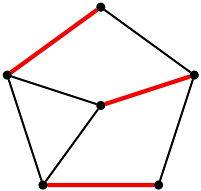
couplage M



Couplage : exemples



couplage M



couplage parfait M'

Couplage maximum vs couplage maximal

Définition

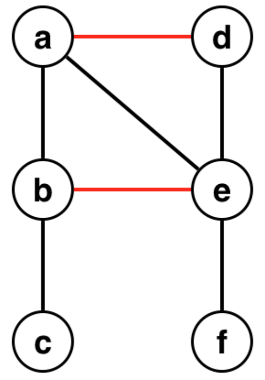
- Un *couplage maximum* dans un graphe $G = (V, E)$ est un couplage contenant le plus grand nombre possible d'arêtes (c'est-à-dire de cardinalité maximale)
- Un *couplage maximal* dans un graphe $G = (V, E)$ est un couplage M qui est maximal au sens de l'inclusion, c'est-à-dire que le graphe induit par les sommets non couverts est un stable (toute arête du graphe possède au moins une extrémité commune avec M).

Couplage maximum vs couplage maximal : exemple

Exemple

On considère le graphe G ci-contre. On s'intéresse au couplage M matérialisé en rouge sur le graphe G.

- le couplage M est-il maximum ?
- le couplage M est-il maximal ?



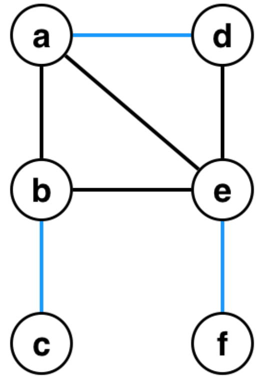
Couplage maximum vs couplage maximal : exemple

Exemple

Le couplage M est-il maximum ?

Le couplage M' représenté en bleu ci-contre contient strictement plus d'arêtes que le couplage M.

Donc le couplage M n'est pas maximum.



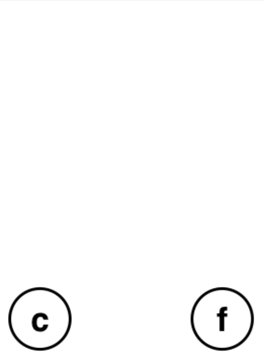
Couplage maximum vs couplage maximal : exemple

Exemple

Le couplage M est-il maximal ?

On dessine ci-contre le sous-graphe de G induit par les sommets de $V(G)$ non couverts par le couplage M.

Le graphe ainsi obtenu est un stable, donc le couplage M est maximal.

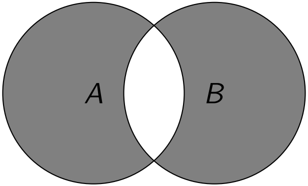


La différence symétrique

Définition

La différence symétrique de A et B, notée $A \triangle B$, est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B, mais pas dans les deux.

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

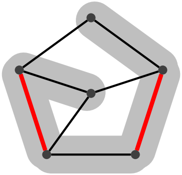


Chaînes alternées et augmentantes

Définition

Pour un couplage M donné :

- *Chaîne M-alternée* : chaîne dont les arêtes alternent entre celles de M et celles de $E \setminus M$.
- *Chaîne M-augmentante* : chaîne M-alternée entre deux sommets non couplés dans M
  (*ie* aucune arête de M n'est incidente à une extrémité de la chaîne).



couplage M

Observation

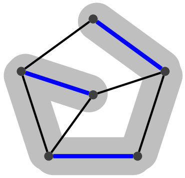
Soit M un couplage dans un graphe et supposons P une chaîne M-augmentante. Alors, $M \triangle P$ est un couplage de taille $|M| + 1$.

Chaînes alternées et augmentantes

Définition

Pour un couplage M donné :

- *Chaîne M-alternée* : chaîne dont les arêtes alternent entre celles de M et celles de $E \setminus M$.
- *Chaîne M-augmentante* : chaîne M-alternée entre deux sommets non couplés dans M (*ie* aucune arête de M n'est incidente à une extrémité de la chaîne).



couplage $M \triangle P$

Observation

Soit M un couplage dans un graphe et supposons P une chaîne M-augmentante. Alors, $M \triangle P$ est un couplage de taille $|M| + 1$.

Une caractérisation des couplages maximums

Théorème

Un couplage M dans un graphe G est maximum si et seulement si il n'y a pas de chaîne M-augmentante dans G.

$\Rightarrow$

S'il existe une chaîne M-augmentante alors on peut trouver un couplage de cardinalité supérieure. Donc si M est un couplage maximum alors, il n'existe pas de chaîne M-augmentante.

Une caractérisation des couplages maximums

$\Leftarrow$ On suppose que M n'est pas maximum. On démontre qu'il existe alors une chaîne M-augmentante.

- Soit N un couplage maximum, alors $|N| > |M|$
- Soit $G' = (V, N \cup M)$
- Tous les sommets de G' sont de degré inférieur ou égal à 2 (N et M sont des couplages)
- Les composantes connexes de G' sont
  - des sommets isolés,
  - des cycles avec autant d'arêtes de M que de N,
  - des chaînes où les arêtes de M et N alternent.
- Comme $|N| > |M|$, l'une des chaînes contient plus d'arêtes de N que de M.
- Cette chaîne est alors une chaîne M-augmentante.

Couplages et transversaux

Définition

- Un *transversal* dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble de sommets incident à toutes les arêtes du graphe.
- La cardinalité minimum d'un transversal dans G est notée $\tau(G)$.

Remarque : V est un transversal trivial de G.

Si T est un transversal de $G = (V, E)$, que peut-on dire de $G[V \setminus T]$?

Soit M un couplage et T un transversal. Comparez $|M|$ et $|T|$. [1]

1. indice : chaque arête de M est incidente à au moins un sommet de T.

Lien entre couplage maximum et transversal minimum

- Dans les graphes quelconques : $\nu(G) \leq \tau(G)$
- Dans les graphes bipartis : $\nu(G) = \tau(G)$
  (preuve tout de suite après...)

Montrer que, pour tout graphe G, on a $\nu(G) \leq \tau(G)$

Trouver un graphe pour lequel $\nu(G) < \tau(G)$

Corollaire de $\nu(G) \leq \tau(G)$

Soit un graphe G. Si M est un couplage de G et T un transversal de G tels que $|M| = |T|$, alors M est un couplage maximum de G et T est un transversal minimum de G.

Attention : la réciproque n'est pas vraie puisqu'on peut avoir $\nu(G) < \tau(G)$!

Plan

Couplage dans les graphes bipartis

Algorithme 1 : Augmenter un couplage dans $G = (A \cup B, E)$ biparti

Données : un couplage M

Résultat : un couplage strictement plus grand que M ou "M est maximum"

orienter chaque arête de M de B vers A
orienter chaque arête de $E \setminus M$ de A vers B
Soit $A_M \subset A$ et $B_M \subset B$ les sommets qui ne sont pas couverts par M
si *il y a un chemin P de A_M à B_M* **alors**
  retourner $M \Delta E(P)$
sinon
  retourner *M est optimal*

Couplage dans les graphes bipartis

Théorème de Kőnig

Dans un graphe biparti G, on a $\nu(G) = \tau(G)$.

On donne ici une démonstration, mais elle n'est pas considérée comme étant au programme de l'UE.

On a vu que $\nu(G) \leq \tau(G)$, pour rappel :

Chaque arête du couplage doit être couverte par tout transversal. Comme deux arêtes ne sont pas incidentes à un même sommet, il faut au moins un sommet par arête. Donc $\tau(G) \geq \nu(G)$.

Couplage dans les graphes bipartis

On exhibe un transversal qui a la même cardinalité qu'un couplage (cela permettra de conclure) :

- Soit M un couplage maximum, et (A, B) une bipartition de G.
- Orienter chaque arête de M de B vers A
- Orienter chaque arête de $E \setminus M$ de A vers B
- Soient A_1 et B_1 les sommets de A et B non touchés par M
- Soient A_2 et B_2 les sommets v touchés par M tels qu'il existe un chemin d'un sommet de A_1 à v
- Soient A_3 et B_3 les autres sommets (touchés par M et non atteignables depuis A_1)

On veut démontrer que

- $A_3 \cup B_2$ est un transversal de G.
- $|A_3 \cup B_2| = |M|$

Couplage dans les graphes bipartis

pas de chaîne augmentante $\Rightarrow$

- pas d'arête entre A_1 et B_1 :
  car sinon on pourrait l'ajouter au couplage
- pas d'arête entre A_2 et B_1 :
  S'il existe une telle arête ab ($a \in A_2$ et $b \in B_1$), alors $ab \notin M$ car $b \in B_1$ non touché par M. Donc elle se retrouve orientée dans le sens $a \to b$. Or, comme il existe un chemin P de A_1 vers a (car $a \in A_2$), alors en prolongeant P par l'arc ab, on aurait un chemin entre deux sommets non couverts par M (de A_1 vers B_1) et donc une chaîne augmentante.

Couplage dans les graphes bipartis

Les sommets de A_3 et B_3 ne sont pas atteignables $\Rightarrow$

- pas d'arête entre A_1 et B_3 :
  S'il existe une telle arête ab, alors $ab \notin M$ car $a \in A_1$ donc non touché par M. Donc, dans le graphe orienté, on a l'arc : $a \to b$. Et donc on aurait un chemin de A_1 vers B_3.
- pas d'arête de M entre A_3 et B_2 :
  S'il existe une telle arête $ab \in M$. Alors, dans le graphe orienté, on a l'arc $b \to a$. b atteignable depuis A_1 par définition de B_2. Donc en prolongeant par l'arc ba on aurait un chemin de A_1 vers $a \in A_3$.

Couplage dans les graphes bipartis

Les sommets de A_3 et B_3 ne sont pas atteignables $\Rightarrow$ (suite)

- pas d'arête entre A_2 et B_3 :
  S'il existe une telle arête ab :
  - Cas 1 : si $ab \notin M$
    arc orienté dans le sens $a \to b$. $a \in A_2$ donc il existe un chemin P de A_1 vers a et (P, ab) est un chemin de A_1 vers $b \in B_3$. On aurait donc un chemin de A_1 vers B_3.
  - Cas 2 : si $ab \in M$
    Dans ce cas, ab est la seule arête de M incidente à a (par définition d'un couplage). Dans le graphe orienté, $b \to a$ est donc le seul arc entrant dans a. Comme $a \in A_2$, il existe un chemin P de A_1 vers a. Et ba est forcément le dernier arc de P, ce qui implique que b atteignable depuis A_1 ce qui est en contradiction avec la définition de B_3.

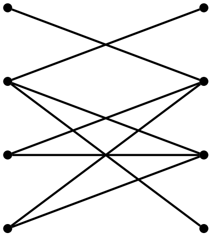
Couplage dans les graphes bipartis

On a donc

- Toutes les arêtes sont incidentes à au moins un sommet de $A_3 \cup B_2$ (voir tout ce qui précède)
  $\Rightarrow A_3 \cup B_2$ est un transversal de G.
- Toutes les arêtes de M sont entre A_2 et B_2 ou entre A_3 et B_3 (et chaque sommet de A_2, A_3, B_2 et B_3 est incident à exactement une arête de M)
  $\Rightarrow |A_3 \cup B_2| = \nu(G)$

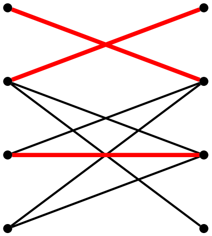
Exemple de l'utilisation du théorème de Kőnig

- Nous avons trouvé un couplage de taille 3 que nous pensons être maximum.
- Pour être sûr que nous avons trouvé un couplage maximum, il suffit de trouver un transversal de taille 3.
- Si nous trouvons un transversal de taille 3, nous pouvons être sûr que le couplage trouvé est maximum (et le transversal minimum), que le graphe soit biparti ou non.
- Sinon, le couplage n'est pas maximum ; il faut mieux chercher (soit pour le transversal, soit pour le couplage) ou vérifier si le graphe est bien biparti (sinon, on n'a pas forcément $\nu(G) = \tau(G)$) !



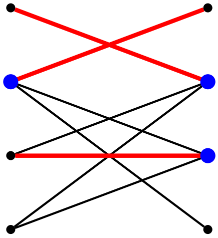
Exemple de l'utilisation du théorème de Kőnig

- Nous avons trouvé un couplage de taille 3 que nous pensons être maximum.
- Pour être sûr que nous avons trouvé un couplage maximum, il suffit de trouver un transversal de taille 3.
- Si nous trouvons un transversal de taille 3, nous pouvons être sûr que le couplage trouvé est maximum (et le transversal minimum), que le graphe soit biparti ou non.
- Sinon, le couplage n'est pas maximum ; il faut mieux chercher (soit pour le transversal, soit pour le couplage) ou vérifier si le graphe est bien biparti (sinon, on n'a pas forcément $\nu(G) = \tau(G)$) !



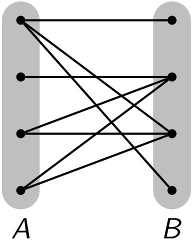
Exemple de l'utilisation du théorème de Kőnig

- Nous avons trouvé un couplage de taille 3 que nous pensons être maximum.
- Pour être sûr que nous avons trouvé un couplage maximum, il suffit de trouver un transversal de taille 3.
- Si nous trouvons un transversal de taille 3, nous pouvons être sûr que le couplage trouvé est maximum (et le transversal minimum), que le graphe soit biparti ou non.
- Sinon, le couplage n'est pas maximum ; il faut mieux chercher (soit pour le transversal, soit pour le couplage) ou vérifier si le graphe est bien biparti (sinon, on n'a pas forcément $\nu(G) = \tau(G)$) !



Théorème de Hall

- Si $G = (A \cup B, E)$ est un graphe biparti tel que G admet un couplage qui couvre tous les sommets de A, alors forcément $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq A$.
- Hall a montré que cette condition nécessaire triviale est aussi suffisante.
- Son théorème est l'un des résultats les plus importants de la théorie des couplages.

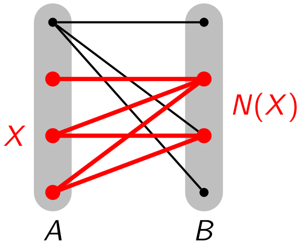


Théorème de Hall

Soit $G = (A \cup B, E)$ un graphe biparti. Alors G a un couplage couvrant tous les sommets de A ssi $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq A$.

Théorème de Hall

- Si $G = (A \cup B, E)$ est un graphe biparti tel que G admet un couplage qui couvre tous les sommets de A, alors forcément $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq A$.
- Hall a montré que cette condition nécessaire triviale est aussi suffisante.
- Son théorème est l'un des résultats les plus importants de la théorie des couplages.



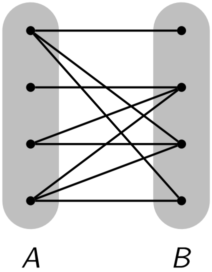
Théorème de Hall

Soit $G = (A \cup B, E)$ un graphe biparti. Alors G a un couplage couvrant tous les sommets de A ssi $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq A$.

Démonstration du théorème de Hall (1/2)

Démonstration

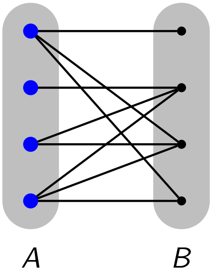
- La nécessité est évidente.
- Inversement, supposons que $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq A$.
- Soit T un transversal minimum de G, càd, $|T| = \tau(G)$.
- On a $|T| \leq |A|$.



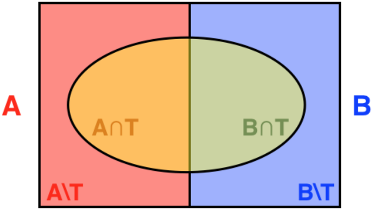
Démonstration du théorème de Hall (1/2)

Démonstration

- La nécessité est évidente.
- Inversement, supposons que $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq A$.
- Soit T un transversal minimum de G, càd, $|T| = \tau(G)$.
- On a $|T| \leq |A|$.



Démonstration du théorème de Hall (2/2)



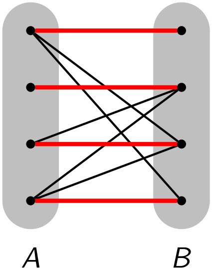
Démonstration (suite)

- Supposons par l'absurde que $|T| < |A|$.
- Comme $|T| = |A \cap T| + |B \cap T|$, on a $|A \setminus T| = |A| - |A \cap T| = |A| - |T| + |B \cap T| > |B \cap T|$.
- Donc $|N(A \setminus T)| \geq |A \setminus T| > |B \cap T|$.
- Donc $|A \setminus T|$ ne peut pas avoir tous ses voisins dans $|B \cap T|$.
- Donc il existe au moins une arête avec une extrémité dans $A \setminus T$ et l'autre dans $B \setminus T$, contradiction avec l'hypothèse que T est un transversal.

Conséquences du théorème de Hall

Le lemme des mariages

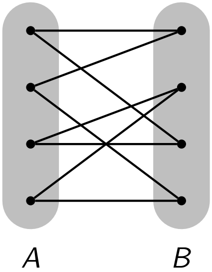
Soit $G = (A \cup B, E)$ un graphe biparti. Alors G a un couplage parfait ssi $|A| = |B|$ et $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq A$.



Couplages dans les graphes bipartis réguliers (1/2)

Corollaire

Soit $G = (A \cup B, E)$ un graphe biparti k-régulier (tous les sommets sont de degré k), pour un entier $k \geq 1$. Alors G a un couplage parfait.



Démonstration

- Comme $k|A| = |\delta(A)| = |\delta(B)| = k|B|$, on a $|A| = |B|$.
- Soit $X \subseteq A$.
- Grâce à la régularité de G, $|\delta(X)| = kX$.

Rappel : soit $X \subseteq V(G), \delta(X)$ désigne le cocycle de X (ensemble des arêtes avec une extrémité dans x et l'autre dans $V(G) \setminus X$).

Couplages dans les graphes bipartis réguliers (2/2)

Démonstration (suite)

- Comme $\delta(X) \subseteq \delta(N(X))$, on obtient $k|X| = |\delta(X)| \leq |\delta(N(X))| = k|N(X)|$.
- Donc $|N(X)| \geq |X|$.
- Donc, d'après le lemme des mariages, G a un couplage parfait.