

باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

پردازش سیگنال‌های گرافی

استاد: دکتر امینی، دکتر کاظمی

تمرین کامپیوتری سری سوم



۱ جداسازی سیگنال‌های گرافی

در این سوال قصد داریم به مساله جداسازی سیگنال‌های گرافی هموار بپردازیم. در این مساله K سیگنال گرافی هموار $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K$ که میانگین هر کدام صفر است به ترتیب بر روی گراف‌های همبند G_1, \dots, G_K در نظر گرفته می‌شود. سپس این سیگنال‌ها با یکدیگر جمع شده و سیگنال $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^K \mathbf{x}_i$ حاصل می‌شود. هدف در این مساله بازیابی سیگنال‌های $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K$ از روی \mathbf{x} و با فرض معلوم بودن گراف‌ها است. یک روش منطقی برای حل این مساله استفاده از مساله بهینه سازی زیر است

$$\underset{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K}{\text{minimize}} \quad \sum_{i=1}^K \mathbf{x}_i^T \mathbf{L}_i \mathbf{x}_i \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^K \mathbf{x}_i, \\ \mathbf{1}^T \mathbf{x}_i = 0, \quad i = 1, \dots, K. \end{cases} \quad (1)$$

علت صفر در نظر گرفتن میانگین سیگنال‌ها این است که در این مساله همواره ابهام در میانگین سیگنال‌ها وجود دارد. به این معنا که می‌توان به هر سیگنال یک بردار ثابت اضافه کرد به گونه‌ای که جمع تمام آن‌ها برابر \mathbf{x} شود و همواری آن‌ها نیز تغییر نکند. از این رو میانگین سیگنال‌های اولیه صفر فرض می‌شود و در مساله بهینه سازی نیز این فرض اعمال می‌شود تا در نهایت یک جواب یکتا برای این مساله بهینه سازی حاصل شود. در این سوال به شبیه سازی این روش و بررسی عملکرد آن می‌پردازیم.

الف) با استفاده از تابع `gsp_sensor` چهار گراف حسگر تصادفی^۱ با تعداد رئوس $N = 100$ با نام‌های G_1, \dots, G_4 تولید کنید. برای ساخت سیگنال هموار \mathbf{x}_i بر روی گراف G_i بردار ویژه‌های دوم و سوم ماتریس لاپلاسیان آن گراف را با ضرایبی که از توزیع یکنواخت در بازه $[0, 1]$ تولید شده‌اند با یکدیگر ترکیب کنید. در نهایت سیگنال \mathbf{x}_i را به گونه‌ای نرمالیزه کنید که مولفه‌های آن بین -1 و 1 باشند.

ب) سیگنال‌های $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{x}_i$ را تولید کنید.

پ) با استفاده از مساله بهینه سازی (۱) سیگنال‌های جداسازی شده $\tilde{\mathbf{x}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_4$ را بدست آورید. (برای حل مساله بهینه سازی از CVX استفاده کنید.)

ت) برای سنجش عملکرد جداسازی سیگنال i ام از رابطه زیر استفاده کنید

$$\text{SNR}_i = 10 \log_{10} \left(\frac{\|\mathbf{x}_i\|_2^2}{\|\mathbf{x}_i - \tilde{\mathbf{x}}_i\|_2^2} \right), \quad \forall i = 1, \dots, K. \quad (2)$$

همچنین برای سنجش کیفیت کلی بازسازی از رابطه زیر استفاده کنید

$$\text{SNR}_{\text{avg}} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \text{SNR}_i. \quad (3)$$

مقادیر SNR_{avg} و SNR_i را محاسبه کنید.

ث) مراحل (الف) تا (ت) را ۲۰ مرتبه تکرار کنید و میانگین SNR_{avg} را محاسبه کنید.

ج) مراحل قبل را به ازای $N = 200$ و $N = 300$ نیز تکرار کنید.

در ادامه می‌خواهیم مساله جداسازی را برای دو تصویر بررسی کنیم.

¹Random Sensor Graph

ج) تصویر face1 را با استفاده از توابع rgb2gray و double به یک ماتریس با ابعاد 64×64 تبدیل کنید که درایه‌های آن اعداد بین ۰ تا ۲۵۵ هستند. سپس آن را به یک بردار ستونی با ۴۰۹۶ درایه تبدیل کرده و به عنوان سیگنال x_1 در نظر بگیرید. به طور مشابه برای تصویر face2 عمل کرده و سیگنال x_2 را تولید کنید.

ح) سیگنال $x = x_1 + x_2$ را تولید کرده و آن را نمایش دهید. از آنجایی که برای نمایش تصویر باید درایه‌ها بین ۰ تا ۲۵۵ باشند، برای نمایش از سیگنال $\frac{x}{2}$ استفاده کنید.

خ) حال می‌خواهیم گراف مربوط به هر تصویر را بدست آوریم به گونه‌ای که سیگنال مربوطه روی آن هموار باشد. برای مثال برای سیگنال x_1 یک گراف با ۴۰۹۶ راس تشکیل دهید به گونه‌ای که هر پیکسل در تصویر به پیکسل‌های مجاورش متصل شود (برای مثال در این حالت پیکسل‌های داخلی دارای ۸ یال هستند). همچنین وزن یال‌های مورد نظر نیز را طبق رابطه زیر در نظر بگیرید

$$w_{ij} = \frac{1}{|(x_1)_i - (x_1)_j| + 0.001}. \quad (4)$$

به طور مشابه گراف مربوط به x_2 را نیز تولید کنید.

د) برای درک بهتر هموار بودن این سیگنال‌ها نمودار ۵۰۰ مولفه اول فرکانسی آن‌ها را رسم کنید.

ذ) از آنجایی که مساله جداسازی را برای سیگنال‌های با میانگین صفر در نظر گرفتیم، ابتدا میانگین سیگنال x را صفر کرده و آن را در مساله بهینه سازی (۱) قرار داده و سیگنال‌های جداسازی شده \tilde{x}_1 و \tilde{x}_2 را بدست آورید. سپس SNR مربوط به هر کدام را محاسبه کنید. دقت کنید که برای محاسبه SNR مقدار میانگین سیگنال‌های x_1 و x_2 را صفر کنید.

ر) حال تصویر مربوط به سیگنال‌های \tilde{x}_1 و \tilde{x}_2 را نمایش دهید. با توجه به اینکه مقدار میانگین این سیگنال‌ها صفر است، ابتدا به تمام درایه‌ها مقدار ۱۲۷ را اضافه کرد و سپس مقادیر بیشتر از ۲۵۵ و کمتر از ۰ را برابر ۲۵۵ و ۰ قرار دهید.