

باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

پردازش سیگنال‌های گراف

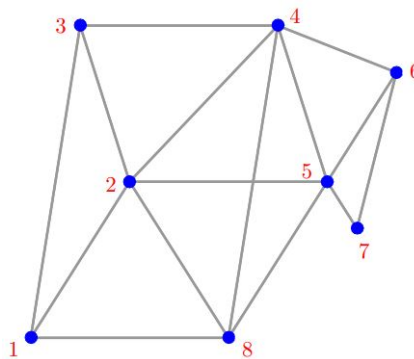
استاد: دکتر امینی، دکتر کاظمی

تمرین کامپیوتری سری دوم



۱ کاهش نویز در سیگنال گراف

الف) گراف G را به صورت زیر تعریف کنید.



- ب) سیگنال گرافی x را به صورت $x = 2u_1 + u_2$ تعریف کنید که در آن u_1 و u_2 بردارویژه‌های اول و دوم ماتریس لاپلاسیان گراف بالا هستند.
- پ) یک نویز سفید گوسی به سیگنال گرافی x با $\text{SNR} = 10\text{dB}$ اضافه کنید و سیگنال اصلی و نویزی را بر روی گراف نمایش دهید. همچنین جهت مشاهده بهتر، می‌توانید سیگنال‌های اصلی و نویزی را به صورت زمانی (بر روی محور افقی) مشاهده کنید.
- ت) طیف فرکانسی هر دو سیگنال بدون نویز و نویزی را یک بار با فرض ماتریس W_{norm} تعریف شده در کلاس و بار دیگر با فرض ماتریس لاپلاسیان به عنوان اپراتور شیفت، نمایش دهید (به مقیاس فرکانس توجه کنید).
- ث) برای هر یک از حالات استفاده از W_{norm} و ماتریس لاپلاسیان به عنوان اپراتور شیفت، یک فیلتر پایین گذر ایده آل در نظر بگیرید و با توجه به بخش قبل تصمیم بگیرید که این فیلتر چه فرکانس‌هایی را عبور دهد. پاسخ فرکانسی این فیلترها را رسم کنید (ترتیب درست فرکانس در هر یک از حالات فوق را در نظر داشته باشید).
- ج) سیگنال نویزی بخش (ت) را با هر دو فیلتر بخش (ث) فیلتر کنید. هر سه سیگنال اصلی، نویزی و حذف نویز شده به کمک فیلتر را برای دو حالت بر روی گراف و به صورت زمانی، نمایش دهید.
- چ) برای هر دو روش، مقدار SNR را پس از حذف نویز محاسبه کرده و بررسی کنید که در این مثال بهتر است کدام ماتریس را به عنوان اپراتور شیفت در نظر بگیریم.
- ح) برای هر یک از فیلترهای ایده آل، بهترین تقریب از یک فیلتر LSI با طول ۳ را طراحی کنید. به بیان دیگر فرض کنید که فیلتر شما FRI می باشد و بهترین ضرایب h_0 ، h_1 و h_2 را برای هر دو حالت بدست آورید. روش خود را برای یافتن این ضرایب توضیح دهید.
- خ) پاسخ فرکانسی فیلترهای FRI بخش قبل را به همراه پاسخ فرکانسی فیلترهای ایده آل متناظرشان برای هر دو حالت رسم کنید.
- د) مراحل (ج) و (چ) را به کمک فیلترهای LSI ای که در بخش قبل طراحی کردید تکرار کنید. همچنین نتیجه را با فیلترهای ایده آل مقایسه کنید.

۲ گروه‌بندی به وسیله سیگنال‌های گرافی

در این سوال قصد داریم عمل گروه‌بندی رئوس گراف را (مشابه سوال دوم تمرین کامپیوتری قبل) تنها با استفاده از سیگنال‌های گرافی انجام دهیم. فرض کنید گراف G دارای k گروه دوستی است. اما برای تشخیص این گروه‌ها گراف به ما داده نمی‌شود، بجای آن سیگنال‌های نرم بر روی گراف را مشاهده می‌کنیم و هدف ما تشخیص این گروه‌بندی‌ها از روی این سیگنال‌ها است. برای شبیه‌سازی مسئله به صورت زیر عمل می‌کنیم.

(۱) ابتدا برای $k = 3$ گراف G را به صورت تصادفی تولید می‌کنیم. برای این کار ابتدا با احتمال مساوی به هر رأس یک برچسب در مجموعه‌ی $\{1, 2, 3\}$ می‌زنیم. حال یک گراف تصادفی تولید می‌کنیم که در آن احتمال حضور یال‌های درون گروهی p و احتمال حضور یال‌های بین گروهی q است. در این مسئله بگیرد $(p = 8 \frac{\log(n)}{n}, q = \frac{\log(n)}{n})$ هم‌طور تعداد رئوس گراف را $n = 150$ قرار دهید. یک بار یک نمونه از این گراف را با توجه به بردار ویژه‌های دوم و سوم آن رسم کنید (رنگ رئوس نشانگر برچسب آنها باشد)

(۲) حال باید سیگنال‌های نرم روی گراف تولید کنیم. برای اینکار ابتدا سیگنال‌های گوسی استاندارد تولید می‌کنیم و سپس آنها را با یک فیلتر پایین‌گذر فیلتر می‌کنیم. پس ابتدا تعداد T سیگنال را با توزیع $x^t \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ تولید کنید. سپس آنها را با فیلتر $\mathcal{H}(L_G) = (I - \alpha L_G)^{r-1}$ فیلتر کنید. در اینجا r مرتبه فیلتر است و $\alpha = 1/2d_{max}$ که در آن d_{max} بزرگترین درجه گراف است. آزمایش را برای r های مختلف و همچنین تعداد سیگنال‌های مشاهده شده مختلف انجام خواهیم داد.

(۳) اگر خود گراف G را در اختیار داشتیم گروه بندی رئوس را با استفاده از سه بردار ویژه متناظر با مقادیر ویژه کوچک لاپلاسن انجام می‌دادیم. حال چون گراف را نداریم می‌توان از ماتریس کواریانس تجربی سیگنال‌ها در حکم لاپلاسن گراف استفاده کرد (استدلال کنید که چرا). برای جدا سازی گروه‌ها از سه بردار ویژه متناظر با بزرگترین مقدار ویژه های ماتریس کواریانس تجربی داده‌ها استفاده می‌کنیم. (استدلال کنید چرا) سپس با استفاده از الگوریتم k-means جداسازی را انجام می‌دهیم.

برای مجموعه‌ی $\{11, 21, 26, 31\}$ و $T \in [10, 10^3]$ (امتحان سه یا چهار حالت برای T کافیت) خطای تخمین را بدست آورید. هم‌طور خطای تخمین را برای حالتی که به خود گراف G دسترسی داریم بدست آورید و مقایسه کنید.

توجه: در هر قسمت اگر آزمایش‌ها طولانی شد و یا دستگاه شما توانایی انجام عملیات را نداشت مختار هستید اعداد را تغییر دهید و پایین بیاورید، هدف تمرین تست قدرت کامپیوترها نیست!