۱۴۰۰/۹/۲۲

آیا می‌توان $x(t)$ را با دانستن $W_x(s,i)$ به صورت یکتا بازیابی کرد؟

← در صورتی که توابع $\left\{\sqrt{2^k}\,\psi(2^k t - i)\right\}_{k,i\in\mathbb{Z}}$ مستقل خطی باشند، تابع $\tilde{\psi}$ (دوگان ψ)

وجود دارد به طوری که:

$$\langle \tilde{\psi}(t), \psi(t)\rangle = 1 \quad , \quad \langle \tilde{\psi}(t), \sqrt{2^k}\,\psi(2^k t - i)\rangle = 0$$

$$\forall\ (k,i) \neq (0,0)$$

(مثلاً برای $\psi(t)$ که قبلاً اشاره شد، داریم $\tilde{\psi}(t) = \psi(t)$)

به علاوه، با توجه به ساختار توابع خواهیم داشت:

$$\forall\ i,k,i',k' \in \mathbb{Z}: \quad \langle \sqrt{2^k}\,\tilde{\psi}(2^k t - i), \sqrt{2^{k'}}\,\psi(2^{k'} t - i')\rangle = \delta[i-i']\cdot\delta[k-k']$$

اگر $\hat{\psi}(\omega)$ و $\hat{\tilde{\psi}}(\omega)$ به ترتیب تبدیل فوریه توابع $\psi(t)$ و $\tilde{\psi}(t)$ باشند، شرط کافی بازیابی

$x(t) \in L_2(\mathbb{R})$ از روی $W_x(s,i)$ عبارتست از:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\hat{\psi}(\omega)}\cdot \hat{\tilde{\psi}}(\omega)}{|\omega|}\, d\omega < \infty$$

در صورتی که $\tilde{\psi}(t)=\psi(t)$ ، رابطه فوق به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\boxed{C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\, d\omega < \infty}$$

شرط $C_\psi<\infty$ ایجاب می‌کند که $\hat{\psi}(0)=0$ ، $\lim_{\omega\to\infty}\hat{\psi}(\omega)=0$. به عبارت بهتر، تابع $\psi(t)$ مناسب باید میان‌گذر باشد.

در صورتی که شروط لازم روی $\psi(t)$ برقرار باشند، به صورت زیر می‌توان $x(t)\in L_2(\mathbb{R})$ را از ضرایب تبدیل موجک پیوسته (CWT) استخراج کرد:

$$x\in L_2(\mathbb{R}):\quad \boxed{x(t) = \frac{1}{C_\psi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} W_x(s,\tau)\,\frac{\tilde{\psi}\left(\frac{t-\tau}{s}\right)}{\sqrt{s}}\, d\tau\, \frac{ds}{s^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\,\overline{\hat{\psi}(1)}}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} W_x(s,\tau)\, e^{j\frac{t-\tau}{s}}\, d\tau\, \frac{ds}{s^2}$$

برای تفسیر مفهوم CWT به حالت گرافی، نحوه محاسبه ضرایب wavelet را بر حسب تبدیل فوریه بیان می‌کنیم. برای سادگی نمایش تعریف می‌کنیم:

$$\chi_s(t) \triangleq \frac{1}{\sqrt{s}}\,\overline{\psi\left(\frac{-t}{s}\right)}$$

$$W_x(s,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)}}{\sqrt{s}}\, x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_s(\tau - t)\, x(t)\, dt$$

$$= (\psi_s * x)(\tau) = \mathcal{F}^{-1}_{\omega} \left\{ \hat{\psi}_s(\omega) \cdot \hat{x}(\omega) \right\}(\tau)$$

$$= \boxed{\sqrt{s}\; \mathcal{F}^{-1}_{\omega} \left\{ \overline{\hat{\psi}(s\omega)} \cdot \hat{x}(\omega) \right\}(\tau)}$$

به بیان دیگر، فرایند تبدیل موجک در مقیاس s از عبور دادن سیگنال از یک فیلتر میان‌گذر (پهنای عبور بر اساس s تعیین می‌شود) حاصل می‌شود.

برای تعریف تبدیل موجک در حوزه گراف (SGWT)، از پاسخ فرکانسی فیلتر میان‌گذر شروع می‌کنیم.

فرض کنید $g(x)$ تابعی پیوسته در زمان باشد به گونه‌ای که:

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ C_g = \int_0^{\infty} \frac{|g(x)|^2}{x}\, dx < \infty \end{cases}$$

فیلتر میان‌گذر گرافی $\vec{\psi}$ را با پاسخ فرکانسی $\begin{bmatrix} g(\lambda_1) \\ \vdots \\ g(\lambda_n) \end{bmatrix}$ تعریف می‌کنیم، و λ ها مقادیر ویژه

ماتریس شیفت گراف هستند. در ادامه فرض کنیم ماتریس شیفت گراف L یا L_N است؛ در نتیجه،

$\lambda_1 = 0$ (حالت $\lambda_i \neq 0$ در ادامه ساده‌تر نیز خواهد بود)

برای تعریف تبدیل موجک گرافی لازم است تا scale کردن تابع ψ با متغیر پیوسته s را تعریف کنیم.

با توجه به اینکه $\psi(t/s)$ در حوزه فوریه معادل با $|s| \cdot \hat{\psi}(s\omega)$ است، برای فیلتر گرافی $\vec{\psi}$ نیز چنین عمل می‌کنیم:

$$\vec{\psi}_s \triangleq s \cdot GDFT^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} g(s\lambda_1) \\ \vdots \\ g(s\lambda_n) \end{bmatrix} \right\}$$

در اصل، برای تعریف $\psi_{s,i}(t) = \dfrac{\psi\left(\frac{t-i}{s}\right)}{\sqrt{s}}$ در حوزه گراف نیاز به shift به میزان i/s داریم.

اما در حوزه گراف، مقدار shift تنها مقادیر صحیح بین 1 تا n می‌تواند باشد. پس تعریف می‌کنیم:

$$\vec{\psi}_{s,i} \triangleq \frac{1}{\sqrt{s}} \, shift_i \left\{ scale_s \left\{ \vec{\psi} \right\} \right\}$$

$s \in \mathbb{R}^+ , \ 1 \le i \le n$

$$= \frac{1}{\sqrt{s}} \, shift_i \left\{ s \cdot U \cdot \begin{bmatrix} g(s\lambda_1) \\ \vdots \\ g(s\lambda_n) \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \sqrt{s} \cdot U \begin{bmatrix} g(s\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g(s\lambda_n) \end{bmatrix} U^{-1} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{ام} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \sqrt{s} \cdot U \cdot \begin{bmatrix} g(s\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(s\lambda_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{U_{i,1}} \\ \vdots \\ \overline{U_{i,n}} \end{bmatrix} = \vec{\psi}_{s,i}$$