۱۴۰۰/۹/۲۹

⇐ در $s \to 0$ ، بردار $\vec{\psi}_{s,n}$ با صرف نظر از جمله مرتبه $s^{k+3/2}$ ، مشابه با ستون n ام در ماتریس $(shift)^{k+1}$ خواهد بود. شکل shift هر کدام از L ، L_N ، W ، W_N که باشد درایه های نا صفر درستون n ام ماتریس $(shift)^{k+1}$ عبارتند از رأس n و همسایه های لبه رأس با فاصله حداکثر $k+1$. در نتیجه، $\vec{\psi}_{s,n}$ ها هم تا حد زیادی localized خواهند بود. به علاوه، هرچه تابع g به صورت نرم تر در $s \to 0$ صفر شود (مشتقات مرتبه بالاتر)، پهنای رأسی توابع پایه در حالت $s \to 0$ بیشتر خواهد بود (localization کمتر).

انرژی ضرایب (frame bounds)

به دلیل پیوستگی SGWT نسبت به متغیر scale ، در شکل قابل پیاده سازی نیست. درکاربردهای مختلف معمولاً مقادیر متغیر s معمولاً متناهی حالت به خود می گیرد: $\{s_1 < \dots < s_J\}$. همچنین، همانطور که قبلاً اشاره شد، ضرایب پایه های $\vec{\psi}_{s_k,n}$ بدون ضرایب $\vec{\varphi}_n$ برای بازسازی سیگنال کافی نیستند.

به بیان دیگر، سیگنال غیر صفری وجود دارد که تمام ضرایب پایه های $\vec{\psi}_{s_k,n}$ برای آن صفر هستند.

فرض کنید بردارهای $\vec{\varphi}_i$ با پاسخ فرکانسی تابع $h(x)$ مطابق زیر ساخته شده باشند:

$$\vec{\varphi}_i = U \begin{bmatrix} h(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & h(\lambda_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{i,1} \\ \vdots \\ \bar{u}_{i,n} \end{bmatrix}$$

همچنین، تعریف کنید:

$$\begin{cases} G(x) = |h(x)|^2 + \sum_{k=1}^{\ell} |g(s_k x)|^2 \\[2ex] A = \min\limits_{\lambda_1 \leq x \leq \lambda_n} G(x) \\[2ex] B = \max\limits_{\lambda_1 \leq x \leq \lambda_n} G(x) \end{cases}$$

در این صورت داریم:

$$A \|\vec{x}\|_2^2 \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(|\langle \vec{\varphi}_i , \vec{x} \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{\ell} \frac{|\langle \vec{\psi}_{s_k,i} , \vec{x} \rangle|^2}{s_k} \right)}_{E} \leq B \|\vec{x}\|_2^2$$

اثبات:

$$E = \sum_{i=1}^{n} |\langle \vec{\varphi}_i , \vec{x} \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{n} \frac{|\langle \vec{\psi}_{s_k,i} , \vec{x} \rangle|^2}{s_k}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{x}^H \vec{\varphi}_i \vec{\varphi}_i^H \vec{x} + \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{s_k} \sum_{i=1}^{n} \vec{x}^H \vec{\psi}_{s_k,i} \vec{\psi}_{s_k,i}^H \vec{x}$$

$$= \vec{q}^{\,H} \left[\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{\varphi}_i \, \vec{\varphi}_i^{\,H} \right)}_{E_\varphi} + \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{s_k} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{\psi}_{s_k,i} \, \vec{\psi}_{s_k,i}^{\,H}}_{E_{\psi_{s_k}}} \right] \vec{q}$$

$$E_\varphi = \sum_{i=1}^{n} \vec{\varphi}_i \, \vec{\varphi}_i^{\,H} = \sum_{i=1}^{n} U \begin{bmatrix} h(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & h(\lambda_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{U}_{i,1} \\ \vdots \\ \overline{U}_{i,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,1} & \cdots & U_{i,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{h(\lambda_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{h(\lambda_n)} \end{bmatrix} U^{-1}$$

$$= U \begin{bmatrix} h(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & h(\lambda_n) \end{bmatrix} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \overline{U}_{i,1} \\ \vdots \\ \overline{U}_{i,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,1} & \cdots & U_{i,n} \end{bmatrix} \right)}_{I} \begin{bmatrix} \overline{h(\lambda_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{h(\lambda_n)} \end{bmatrix} U^{-1}$$

$$= U \begin{bmatrix} |h(\lambda_1)|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |h(\lambda_n)|^2 \end{bmatrix} U^{-1}$$

$$E_{\psi_{s_k}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\psi}_{s_k,i} \, \vec{\psi}_{s_k,i}^{\,H} = s_k \sum_{i=1}^{n} U \begin{bmatrix} g(s_k\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(s_k\lambda_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{U}_{i,1} \\ \vdots \\ \overline{U}_{i,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,1} & \cdots & U_{i,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{g(s_k\lambda_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{g(s_k\lambda_n)} \end{bmatrix} U^{-1}$$

$$= s_k U \begin{bmatrix} |g(s_k\lambda_1)|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |g(s_k\lambda_n)|^2 \end{bmatrix} U^{-1}$$

$$\Rightarrow E = \vec{q}^{\,H} \left(U \begin{bmatrix} |h(\lambda_1)|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |h(\lambda_n)|^2 \end{bmatrix} U^{-1} + \sum_{k=1}^{d} U \begin{bmatrix} |g(s_k\lambda_1)|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |g(s_k\lambda_n)|^2 \end{bmatrix} U^{-1} \right) \vec{q}$$

$$= \underbrace{\vec{q}^{\,H} U}_{\hat{\vec{q}}^{\,H}} \begin{bmatrix} |h(\lambda_1)|^2 + \sum_{k=1}^{\ell} |g(s_k \lambda_1)|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |h(\lambda_n)|^2 + \sum_{k=1}^{\ell} |g(s_k \lambda_n)|^2 \end{bmatrix} \underbrace{U^{-1} \vec{q}}_{\hat{\vec{q}}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} G(\lambda_i) \, |(\hat{\vec{q}})(i)|^2$$

$$A \|\vec{q}\|_2^2 = A \|\hat{\vec{q}}\|_2^2 \leq E \leq B \|\hat{\vec{q}}\|_2^2 = B \|\vec{q}\|_2^2 \quad \checkmark$$

نکته: نسبت $\frac{B}{A}$ معیاری از پایداری قوی بازسازی سیگنال (در شرایط نویزی) است. هرچه این نسبت به ۱ نزدیک‌تر باشد، پایداری بهتر است. حالت ایده‌آل $\frac{B}{A}=1$ وقتی رخ می‌دهد که انرژی سیگنال گراف به صورت دقیق توسط ضرایب تبدیل موجک نمایش داده شود. این حالت زمانی رخ می‌دهد که $G(x)=|h(x)|^2+\sum_{k=1}^{\ell}|g(s_k x)|^2$ تابع ثابت باشد.

پیچیدگی محاسبه ضرایب موجک

ضرایب تبدیل موجک که با $W_x(s;i)$ نمایش داده می‌شوند، از ضرب داخلی توابع $\vec{\psi}_{s,i}$ در سیگنال

گرافی $\vec{x}$ ایجاد می‌شوند. با توجه به رابطهٔ

$$\vec{\psi}_{s,i} = \sqrt{s}\, U \begin{bmatrix} g(s\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(s\lambda_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,1} \\ \vdots \\ U_{i,n} \end{bmatrix}$$

ابتدا نیاز داریم تا مقادیر ویژه و بردارهای ویژه عملگر shift گرافی را بدست آوریم. این محاسبات

از مرتبه $O(n^3)$ هستند که در n های بزرگ بسیار بالا به شمار می‌روند. درضمن حال، ماتریس shift

معمولاً بسیار تنک است و ضرب آن در بردارها و ماتریس‌ها بار محاسباتی قابل قبولی دارد. از این

خاصیت برای کاهش هزینه محاسباتی تبدیل موجک استفاده می‌کنیم.

فرض کنید $P(x) = \sum_{i=0}^{m} p_i x^i$ چندجمله‌ای با درجهٔ m باشد که تقریب مناسبی از $g(sx)$ در بازه

$0 \le x \le s\lambda_n$ ارائه می‌دهد:

$$M = \max_{0 \le x \le s\lambda_n} \left| g(sx) - P(x) \right|$$