پردازش سیگنال های گرافی (GSP)

۱۴۰۰ ,۶ ,۲۷

کلاس درس: شنبه ها و دوشنبه ها 15:00 - 16:15

نمره دهی:

تمرین دستی (احتمالاً ۴ سری) ← 2 نمره

تمرین کامپیوتری (احتمالاً 2 سری) ← 2 نمره

امتحان میان ترم ← 5 نمره

" پایان ترم ← 8 نمره

پروژه نهایی ← 4 نمره (+1 نمره تشویقی)

+1

-1

جمع: 21 نمره

پروژه نهایی: به صورت ارائه یک مقاله اخیر در حوزه GSP

مراجعه دانشجویی: با وقت قبلی aamini@sharif.edu

← اتاق 718 دانشکده برق جدید

طبقه 2 پژوهشکده الکترونیک ← reza.kazemi@sharif.edu

* درس مشق CW خواهد داشت.

* مراجع درس:

[*] "Vertex_Frequency Analysis of Graph Signals", L. Stankovic & E. Sejdic, 2019

[**] "Introduction to Graph Signal Processing", A. Orthega, 2021

عناوین درس:

* Graph representations (adjacency matrix
  Laplacian matrix)

* An overview of spectral graph theory

* Definition of signals on graphs and basis signals

* Graph shift operator

* Graph Fourier transform

* Graph filtering & convolution

* Sampling over graphs (even compressed sensing)

* Graph filter banks

* Random Graph Signals

- Graph wavelet transform
- Uncertainty principle in Graphs
- Graph learning
- Some applications of GSP $\longrightarrow$ دکتر کاظمی

مقدمه

در پردازش سیگنال به صورت کلاسیک با توابع/سیگنال های از زمان، مکان و... مواجه هستیم.

در نتیجه، سیگنال توسط مولفه های مکانی/زمانی مشخص می شود. اما دسته ای از سیگنال های

نسبتاً جدید وجود دارند که چنین نمایش هایی ندارند. به عنوان مثال فعالیت افراد در شبکه های

اجتماعی نوعی سیگنال است که به صورت تابعی از زمان یا مکان نیست، بلکه تابعی از فرد است

(مثلاً تعداد دنبال کننده ها، تعداد Like ها، تعداد tweet ها و...)

در چنین حالتی، براساس دوستی/آشنایی بین افراد می توان گرافی تشکیل داد که در آن رئوس متناظر

با کاربران شبکه هستند و یالهای گراف معرف روابط دوستی. اکنون فعالیت های مجازی افراد مانند

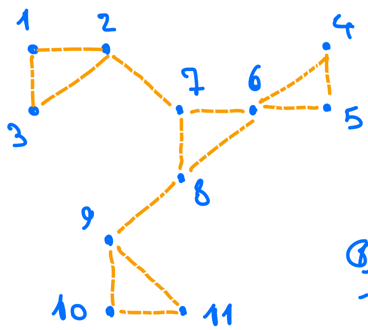
سیگنالی است که روی رئوس این گراف تعریف شده است.

← آیا این سیگنال را می توان فیلتر کرد؟

← برای چنین سیگنالی آیا محتوی فرکانسی وجود داره؟

مثال :

فرض کنید ایستگاه‌های اندازه‌گیری آلودگی توسط شهرداری در نقاط مختلف تهران در شکل زیر قرار گرفته باشند :



فرض کنید میزان واقعی آلودگی هوا در ایستگاه i ام برابر با $s[i]$ باشد. به دلیل حضور نویز در سیستم اندازه‌گیری مقدار قرائت شده در ایستگاه i ام برابر است با :

$$x[i] = s[i] + e[i]$$

می‌دانیم که میزان آلودگی هوا در ایستگاه‌های مجاور تفاوت زیادی با هم ندارند. در نتیجه، برای کاهش اثر نویز می‌توان از میانگین‌گیری استفاده کرد؛ مثلاً :

$$\hat{s}[9] = 1/4 \left(\sum_{k=8}^{11} x[k] \right)$$

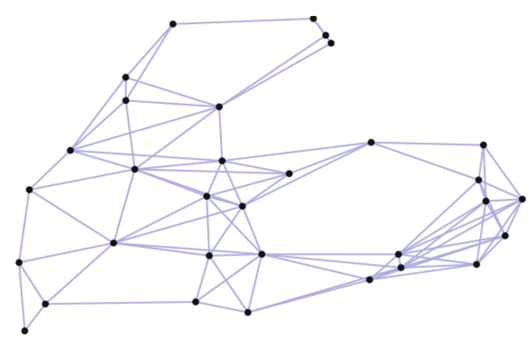
می‌توان میانگین‌گیری را به صورت وزن‌دار و بر اساس فاصله انجام داد، مثلاً :

$$\hat{s}[9] = 2/13\, x[8] + 6/13\, x[9] + 3/13\, x[10] + 2/13\, x[11]$$

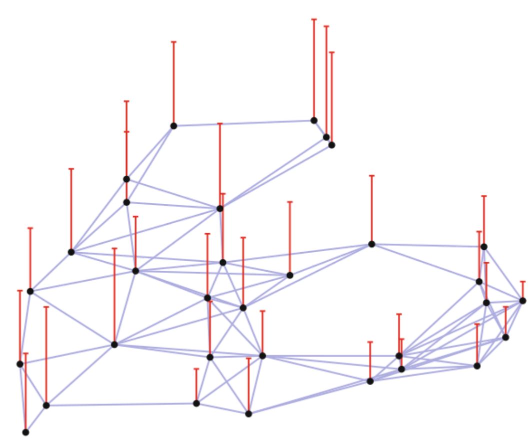
در نتیجه، با در نظر گرفتن مجاورت ایستگاه‌ها (حتی به صورت وزن‌دار)، با یک گراف روبه‌رو هستیم

اکنون، آلودگی هوا به عنوان سیگنالی روی رئوس گراف تعریف شده است که به عنوان سیگنال گرافی معرفی می‌شود. میانگین‌گیری اعمال شده در بالا، به نوعی فیلتر کردن است که با توجه به توپولوژی گراف طراحی شده است؛ درنتیجه، فیلتر گرافی نامیده می‌شود. در این درس، هدف معرفی و بررسی سیگنال‌ها و پردازش‌های گرافی است.

نمونه‌ای از یک گراف



نمونه‌ای از یک سیگنال گرافی
روی رئوس گراف



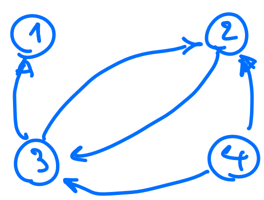
۱۴۰۰/۶/۲۹

مقدمه ای بر نظریه گراف

تعریف: گراف به صورت ساده از مجموعه‌ای از رئوس V و یال‌های E تشکیل شده است. هر یال عبارت است از یک زوج مرتب از رئوس V (کدام رأس به کدام رأس متصل است):

$$G(V,E) \quad : \quad V=\{1,\dots,n\} \quad , \quad E \subseteq V\times V$$

مثال: گراف جهت‌دار روبه‌رو متناظر با V و E به صورت زیر است:



$$V=\{1,2,3,4\}$$

$$E=\{(2,3),(3,1),(3,2),(4,2),(4,3)\}$$

دقت کنید که هم رأس ۳ به ۲ متصل است و هم ۲ به ۳. اما در مورد رأس های ۳، ۱ رابطه یکطرفه است.

نکته: در گراف های بدون جهت، تمام اتصالات دوطرفه هستند، یعنی:

$$(m,n)\in E \implies (n,m)\in E$$

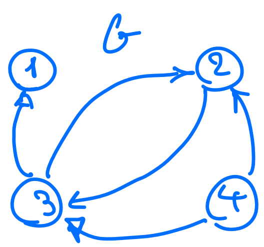
در چنین مواردی به رسم دو یال با دو جهت مختلف بین رئوس، تنها یک یال بدون جهت رسم می‌شود.

تعریف (ماتریس مجاورت) : ماتریس مجاورت نمایشی از اتصالات گراف به فرم یک ماتریس است:

$G = (V, B)$ ، $V = \{1, \dots, n\}$

$$\Rightarrow \text{ماتریس مجاورت} = A_{n \times n}[i,j] = \begin{cases} 1, & (i,j) \in B \\ 0, & (i,j) \notin B \end{cases}$$

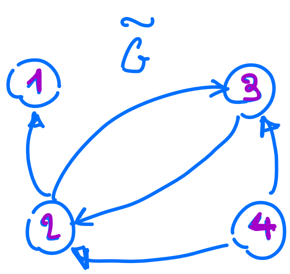
مثال:



$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

نکته: اگر گراف بدون جهت باشد داریم $A^T = A$

* در صورتی که برچسب نام رئوس (شماره) تغییر کند، ذات و خواص گراف تغییر نمی‌کند، اما ماتریس مجاورت عوض می‌شود:



$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

برای مشاهده ارتباط بین A و $\tilde{A}$، توجه کنید که رئوس G به صورت زیر جابجا شده‌اند تا $\tilde{G}$ حاصل شود:

$$(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (1, 3, 2, 4)$$

ماتریس جایگشت مربوط به این تغییر عبارت است از:

$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \implies P \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

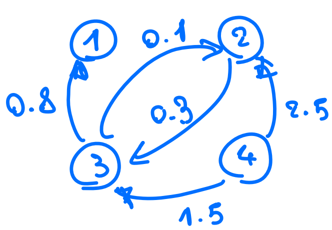
دقت کنید که ماتریس جایگشت در هر سطر و هر ستون دقیقاً "شامل یک درایه واحد است (سایر درایه‌ها ۰)

می‌توان بررسی کرد که

$$\tilde{A} = P A P^T$$

به بیان ساده‌تر، برای به دست آوردن $\tilde{A}$ باید ابتدا سطرهای A را به صورت مورد نظر جایگشت دهیم و سپس همین جایگشت را روی ستون‌های ماتریس حاصل اعمال کنیم.

نکته: یال‌های یک گراف در حالت کلی می‌توانند وزن‌دار باشند:



$$\implies W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.8 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 1.5 & 0 \end{bmatrix} = \text{weight matrix}$$

به صورت معمول، وزن یال نامنفی است و وزن ۰ بیانگر عدم اتصال است.

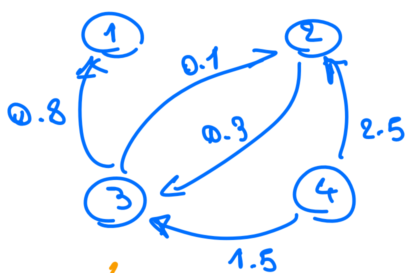
مشابه قبل، اگر گراف بدون جهت باشد، داریم: $W^T = W$

تعریف: درجه هر رأس عبارت است از جمع وزن یال‌های خروجی آن. ماتریس درجه (D) یک ماتریس قطری است که درجه رئوس روی قطر اصلی قرار داده شده‌اند:

$$G(V, W), \quad V=\{1, \dots, n\} \Rightarrow D_{n\times n}, \quad \begin{cases} D_{ii} = \sum_{k=1}^{n} w_{ik} \\ D_{ij} = 0 \quad i\neq j \end{cases}$$

در صورتی که گراف بدون جهت و بدون وزن باشد، D_{ii} عبارت است از تعداد یال‌های متصل به رأس i.

مثال:



$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & 0.3 & & \\ & & 0.9 & \\ 0 & & & 4 \end{bmatrix}$$

تعریف: ماتریس لاپلاسین (Laplacian) یک گراف به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L = D - W$$

مثال:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & -0.3 & 0 \\ -0.8 & -0.1 & 0.9 & 0 \\ 0 & -2.5 & -1.5 & 4 \end{bmatrix}$$

نکته: با توجه به تعریف ماتریس لاپلاسین، جمع درایه های هر سطر 0 می شود:

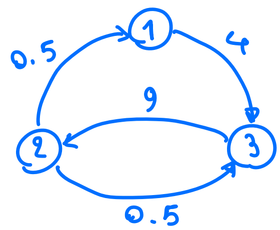
$$L_{n\times n} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

تعریف: ماتریس لاپلاسین نرمالیزه به این صورت تعریف می شود:

$$L_N = D^{-1/2}(D-W)D^{-1/2}$$

۱۴۰۰/۷/۳

مثال :



$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix} , \quad D = \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & 9 \end{bmatrix}$$

$$L = D - W = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$L_N = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{4}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{1}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{9}} \end{bmatrix}}_{D^{-1/2}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -9 & 9 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{4}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{1}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{9}} \end{bmatrix}}_{D^{-1/2}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ -1/4 & 1 & -1/6 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

خواص گراف و نمایش‌های ماتریسی :

* در گراف های بدون جهت ، ماتریس های A, W, L متقارن هستند.

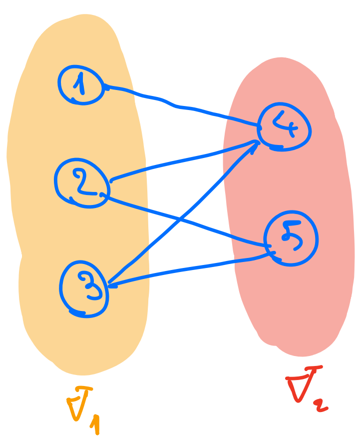
* گراف کامل گرافی است که در آن تمام رئوس ، به هم متصل هستند. در این حالت :

$$A_{n\times n} = 1_{n\times n} - I_{n\times n}$$

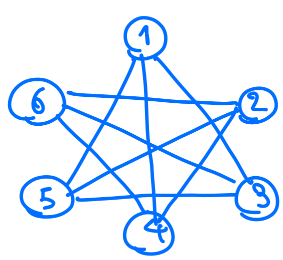
* گراف دوبخشی $G=(V,E)$ گرافی است که رئوس آن V را می‌توان به دو قسمت ناتهی V_1 و V_2 افراز کرد به طوری که تمام یال‌های گراف رأسی از V_1 را به رأسی از V_2 (یا برعکس) متصل کنند (رئوس V_1 به همدیگر اتصال نیستند). اگر G دوبخشی باشد و شماره‌گذاری رئوس به طوری باشد که

$$V_1=\{1,\dots,m\} \quad , \quad V_2=\{m+1,\dots,n\}$$

$$\Rightarrow \quad A=\begin{bmatrix} 0_{m\times m} & \square \\ \square & 0_{(n-m)\times(n-m)} \end{bmatrix}$$

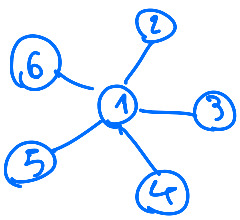


* گراف بدون وزن G را k-منتظم می‌نامیم اگر درجه تمامی رئوس آن برابر k باشد:



$$\Rightarrow \begin{cases} L_{n\times n} = k\,I_{n\times n} - W_{n\times n} \\ L_N = I_{n\times n} - \frac{1}{k} W_{n\times n} \end{cases}$$

* اگر گراف G شامل یک رأس باشد که به همه متصل است و این رأس یک طرف تمام اتصالات نیز هست، به گراف ستاره گفته می‌شود:

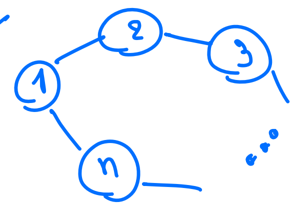


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix}$$

گراف ستاره دوبخشی کامل است.

* به گرافی به صورت $1 - 2 - 3 \cdots - n$ گراف خطی گفته می‌شود.

* به گرافی به صورت

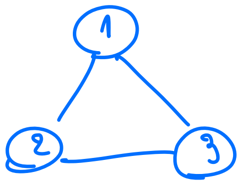


گراف دایره یا گراف دور گفته می‌شود.

← این گراف 2-منتظم است

* بین رئوس a و b از یک گراف که می‌توانند یکسان هم باشند، گشت (walk) عبارت است از دنباله‌ای از رئوس متصل به هم با شروع از a و ختم به b. در این گشت، رئوس و یال‌ها می‌توانند چندین بار تکرار شده باشند. طول گشت عبارت است از تعداد یال‌های طی شده.

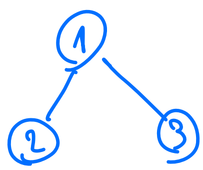
مثال :



$$① \to ② \to ① \to ③$$

این یک گشت از ① به ③ با طول 3 است

نکته : تعداد گشت های به طول k از رأس i به رأس j در گراف برابر است با درایه (i,j) از ماتریس A^k.



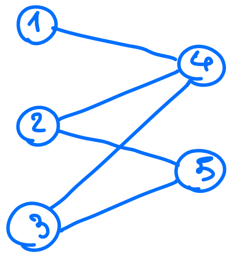
$$\left(\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\right)_{1,1} = 2$$

$$= \underbrace{(1\to1)\cdot(1\to1)}_{0} + \underbrace{(1\to2)(2\to1)}_{1} + \underbrace{(1\to3)(3\to1)}_{1}$$

$$\left(\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\right)_{2,3} = 1 = \overbrace{(2\to1)\cdot(1\to3)}^{1} + \overbrace{(2\to2)(2\to3)}^{0}$$

$$+\underbrace{(2\to3)\cdot(3\to3)}_{0}$$

مثال:



$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نکته: تعداد کل گشت‌های با طول حداکثر k از رأس i به j برابر است با درایه (i,j) از ماتریس

$$B_k = A + A^2 + \cdots + A^k \quad \left(\stackrel{?}{=} (A - I)^{-1} (A^{k+1} - A) \right)$$

---

* : مجموعه‌ای از رئوس گراف G که می‌توان از رأس a با گشتی به طول حداکثر k به آنها رسید، k-همسایگی رأس a گفته می‌شود.

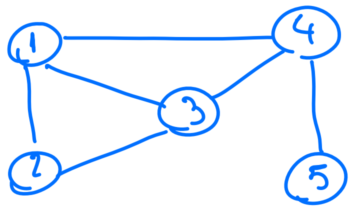
---

* : گشت بدون رأس تکراری **مسیر** (Path) گفته می‌شود.

۱۰/۷/۱۴۰۰

* : بیشترین فاصله بین دو راس یک گراف، قطر گراف گفته می‌شود.

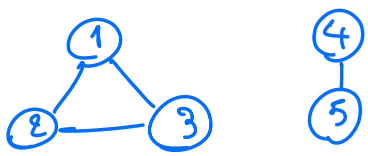
مثال:



← فاصله ② از ④ برابر است با ۲

← قطر گراف برابر است با 3

* اگر در گراف (بدون جهت) G بتوان از هر راس به هر راس دیگر مسیر پیدا کرد، گراف همبند است. در گراف‌های غیر همبند، می‌توان گراف را به چند مولفه همبندی تجزیه کرد. در این صورت ماتریس A و L را می‌توان به صورت بلوکی قطری بیان کرد.

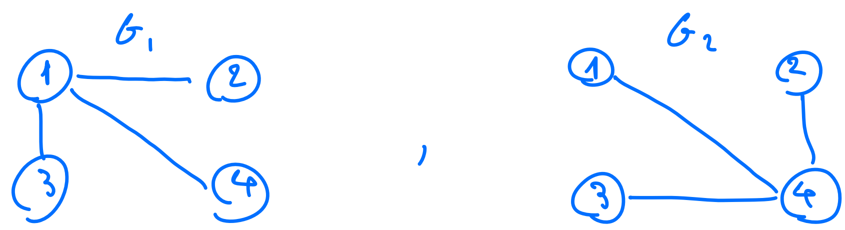


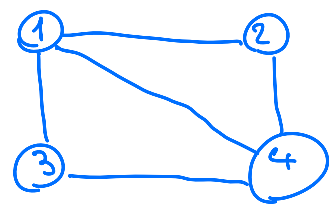
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

* درصورتی که $G_1(V, B_1)$ و $G_2(V, B_2)$ روی یک مجموعه راس تعریف شده باشند:

$$G = G_1 + G_2 \implies G = (V, B_1 \cup B_2)$$

مثال:





$G_1 + G_2$

* ضرب تانسوری دو گراف (Kronecker Product)

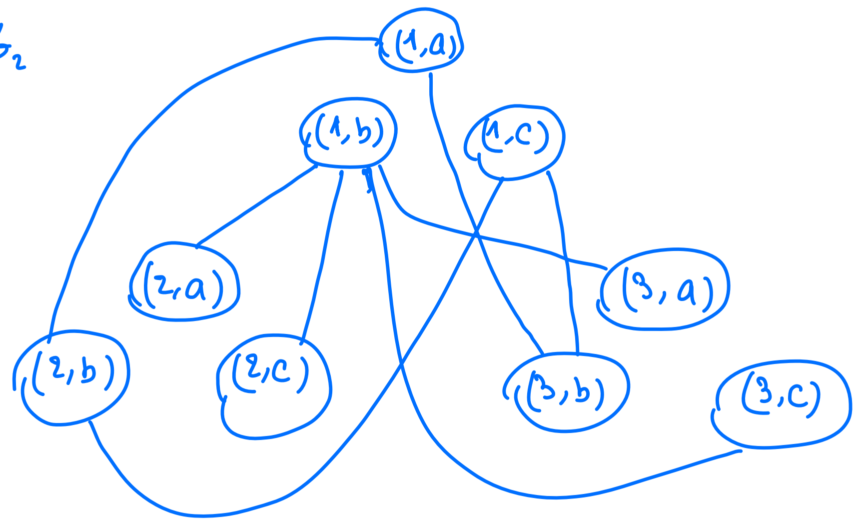
$$\begin{cases} G_1 = (V_1, B_1), & A_1 \\ G_2 = (V_2, B_2), & A_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} G = G_1 \otimes G_2 \\ A = A_1 \otimes A_2 \end{cases}$$

$$G(V, B) \quad \begin{cases} V = V_1 \times V_2 \\ \big((i_1, i_2), (j_1, j_2)\big) \in B \iff \begin{cases} (i_1, j_1) \in B_1 \\ (i_2, j_2) \in B_2 \end{cases} \end{cases}$$

مثال

$G = G_1 \otimes G_2$

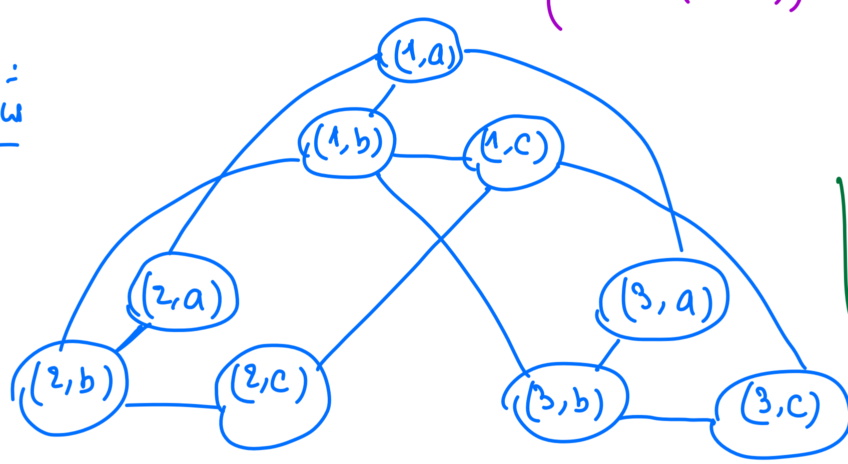


ضرب کارتزین دو گراف (Cartesian)

$$\begin{cases} G_1 = (V_1, B_1), & A_1 \\ G_2 = (V_2, B_2), & A_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} G = G_1 \times G_2 = (V, B) \\ V = V_1 \times V_2 \\ \big((i_1, i_2), (j_1, j_2)\big) \in B \iff \begin{cases} i_1 = j_1, \ (i_2, j_2) \in B_2 \\ \text{or} \\ (i_1, j_1) \in B_1, \ i_2 = j_2 \end{cases} \end{cases}$$

مثال



$$A = A_1 \otimes I_{n_2} + I_{n_1} \otimes A_2$$

یادآوری از جبر خطی

* اگر عدد λ و بردار $\vec{v}_{n\times1} \neq \vec{0}$ چنان باشند که

$$A_{n\times n}\,\vec{v}_{n\times 1} = \lambda\,\vec{v}_{n\times 1}$$

در این صورت به λ مقدار ویژه ماتریس A و به $\vec{v}$ بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ گفته می‌شود.

نکته:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow (\lambda I_{n\times n} - A)\,\vec{v} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\det(\lambda I_{n\times n} - A) = 0}$$

تعریف: با توجه به تعریف $\det(xI - A)$، این عبارت یک چند جمله‌ای درجه n برحسب x است. به این چند جمله‌ای، چند جمله‌ای مشخصه A می‌گویند:

$$P(x) = \det(xI_{n\times n} - A) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n$$

* با توجه به تعریف چند جمله‌ای مشخصه، می‌دانیم که مقادیر ویژه ماتریس A ریشه‌های این چند جمله‌ای هستند، اما ممکن است ریشه‌ها تکراری باشند:

$$P(x) = (x-\lambda_1)^{p_1} \cdots (x-\lambda_{N_m})^{p_{N_m}}$$

$$p_1 + \cdots + p_{N_m} = n$$

قضیه Cayley-Hamilton

اگر $P(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n$ چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A باشد، داریم:

$$P(A) = A^n + c_1 A^{n-1} + \cdots + c_{n-1} A + c_n I_{n\times n} = 0_{n\times n}$$

نکته: اگر چند جمله‌ای $Q(x)$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که $Q(A)=0$، در این صورت تمام مقادیر ویژه متمایز A باید ریشه Q باشند.

نکته: اگر A قطری‌پذیر باشد و $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_m}$ تمام مقادیر ویژه متمایز آن باشند و

$$Q(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_{N_m})$$

چند جمله‌ای با کمترین درجه است که $Q(A)=0$

نکته: فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ باشد با چند جمله‌ای مشخصه

$$P(x) = \det(xI - A) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_{n-1} x + c_n$$

$$= (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$$

الف) $\varphi(0) = \det(-A) = c_n = (-\lambda_1)\cdots(-\lambda_n)$

$$\Rightarrow \boxed{\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n = (-1)^n c_n}$$

ب) $\begin{bmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \cdots \\ -a_{21} & x-a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$ در x^{n-1} ضریب $= -a_{11} - a_{22} - \cdots - a_{nn}$

$= c_1 = -\lambda_1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_n$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr}(A) = -c_1}$$

قضیه Cayley-Hamilton

اگر $P(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n$ چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A باشد، داریم:

$$P(A) = A^n + c_1 A^{n-1} + \cdots + c_{n-1} A + c_n I_{n\times n} = 0_{n\times n}$$

نکته: اگر چند جمله‌ای $Q(x)$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که $Q(A)=0$، در این صورت تمام مقادیر ویژه متمایز A باید ریشه Q باشند.

نکته: اگر A **متقارن** باشد و $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_m}$ تمام مقادیر ویژه متمایز آن باشند و

$$Q(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_{N_m})$$

چند جمله‌ای با کمترین درجه است که $Q(A)=0$

نکته: فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ باشد با چند جمله‌ای مشخصه

$$P(x) = \det(xI - A) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n$$

$$= (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$$

۱۲/۷/۱۴۰۰

نکته: اگر $\vec{v}_n , \dots , \vec{v}_1$ بردارهای ویژه ماتریس $A_{n\times n}$ و مستقل از هم باشند:

$$A \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}}_{V} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \vec{v}_1 & \cdots & \lambda_n \vec{v}_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}}_{V} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = V \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} V^{-1} \quad = \text{قطری شونده}$$

نکته: اگر مقادیر ویژه $A_{n\times n}$ همگی متمایز باشند و یا A متقارن باشد $\Leftarrow$ A قطری شونده است

نکته: اگر $A_{n\times n} = V_{n\times n} \underset{n\times n}{\overset{\text{قطری}}{\Lambda}} V^{-1}$ و $f(x)$ یک چند جمله‌ای باشد، داریم:

$$f(A) = V \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n) \end{bmatrix} V^{-1}$$

طیف گراف

* فرض کنید $A_{n\times n}$ ماتریس مجاورت گراف G باشد. به مجموعه مقادیر ویژه A طیف ماتریس مجاورت گفته می‌شود.

نکته: تغییر ترتیب شماره رئوس باعث تغییر مقادیر ویژه و بردارهای ویژه (با احتمال جایگشت) ماتریس مجاورت نمی‌شود.

$$\tilde{A} = P A P^{-1}$$

$$A \vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k \Rightarrow (P^{-1} \tilde{A} P) \vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k$$

$$\Rightarrow \tilde{A} (\underbrace{P \vec{v}_k}_{\vec{u}_k}) = \lambda_k (\underbrace{P \vec{v}_k}_{\vec{u}_k}) \quad \checkmark$$

* اگر گراف G ساده باشد (رئوس به خودشان متصل نیستند)، با توجه به صفر بودن درایه‌های قطری A، ضریب c_1 در چندجمله‌ای مشخصه صفر خواهد بود:

$$P(x) = x^n + c_2 x^{n-2} + \dots + c_{n-1} x + c_n$$

* اگر گراف G ساده باشد، ضریب $-c_2$ برابر است با تعداد زوج‌های (i, j) از رئوس که هم i به j متصل است و هم j به i. به طور خاص اگر G بدون جهت باشد، c_2 برابر

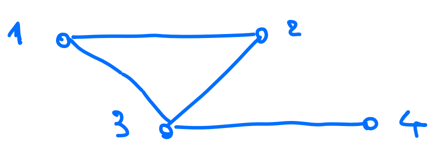
است با اسی معقول ماپل !

---

* اگر قطر گراف بدون جهت G برابر با d باشد، ماتریس مجاورت A دست کم $d+1$ مقدار ویژه متمایز دارد.

اثبات: اگر فاصله رئوس u و v برابر با d باشد، ماتریس مجاورت درایه (u,v) در ماتریس‌های $A, A^2, \dots, A^{d-1}$ برابر صفر است اما در A^d صفر نیست. درنتیجه، A^d را نمی‌توان به صورت ترکیب خطی $A, \dots, A^{d-1}$ نوشت. $\Leftarrow$ اگر $Q(x)$ چندجمله‌ای باشد و $Q(A)=0$
درجه Q حداقل $d+1$ است
$\Leftarrow$ A حداقل $d+1$ مقدار ویژه متفاوت دارد.

مثال:

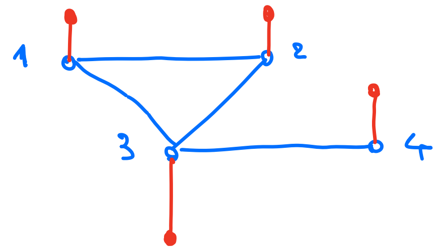


$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

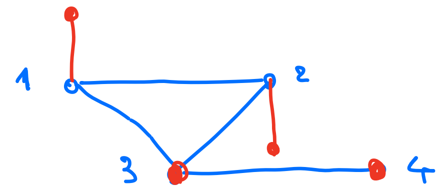
$$\Rightarrow \det(xI - A) = x^4 - 4x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \simeq -1.48 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 \simeq 0.31 \\ \lambda_4 \simeq 2.17 \end{cases}$$

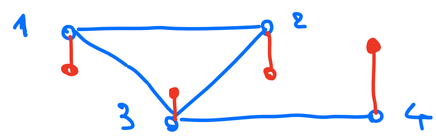
$$\lambda_1 = -1.48 \Rightarrow \vec{v}_1 \simeq \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ -0.75 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$



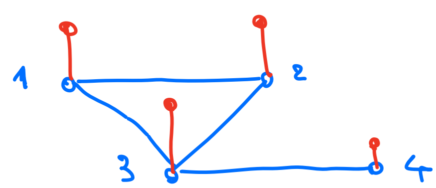
$$\lambda_2 = -1 \Rightarrow \vec{v}_2 \simeq \begin{bmatrix} 0.7 \\ -0.7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\lambda_3 = 0.31 \Rightarrow \vec{v}_3 \simeq \begin{bmatrix} -0.37 \\ -0.37 \\ 0.25 \\ 0.81 \end{bmatrix}$$



$$\lambda_4 = 2.17 \Rightarrow \vec{v}_4 \simeq \begin{bmatrix} 0.52 \\ 0.52 \\ 0.61 \\ 0.28 \end{bmatrix}$$



۱۴۰۰/۷/۱۷

* ماتریس‌های با ساختار

$$C=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} & y_n \\ y_n & y_1 & & y_{n-2} & y_{n-1} \\ y_{n-1} & y_n & \cdots & y_{n-3} & y_{n-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ y_2 & y_3 & \cdots & y_n & y_1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

ماتریس‌های دایروی (circulant)

گفته می‌شود. ← راحتی می‌توان بررسی کرد که ستون‌های ماتریس DFT بردار ویژه چنین ماتریس‌هایی هستند.

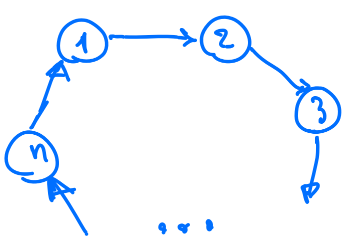
همچنین، DFT سطر اول مقادیر ویژه ماتریس را نتیجه می‌دهد:

$$Y_k \triangleq \sum_{i=1}^{n} y_i \, e^{-j\frac{2\pi}{n}(k-1)(i-1)} \quad , \quad \vec{v}_k \triangleq \begin{bmatrix} e^{-j\frac{2\pi}{n}(k-1)\times 0} \\ e^{-j\frac{2\pi}{n}(k-1)\times 1} \\ \vdots \\ e^{-j\frac{2\pi}{n}(k-1)\times(n-1)} \end{bmatrix}$$

$1 \leq k \leq n$

$$\Rightarrow \quad C\cdot\vec{v}_k = Y_k\,\vec{v}_k$$

* اگر G گراف دور جهت‌دار مانند روبه‌رو باشد داریم:



$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه، A دایروی است و ستون‌های ماتریس DFT بردار ویژه آن هستند. همچنین مقادیر ویژه

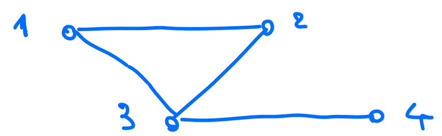
مقادیر ویژه ماتریس جایگشت عبارتند از :

$$\begin{cases} \lambda_k = e^{-i\frac{2\pi}{n}(k-1)} \\ 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

---

* فرض کنید L ماتریس لاپلاسین گراف G باشد. در این صورت مجموعه مقادیر ویژه L را طیف لاپلاسی گراف و یا به طور خلاصه طیف گراف نامیده می‌شود.

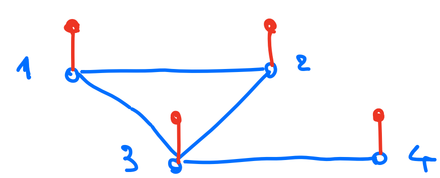
مثال:



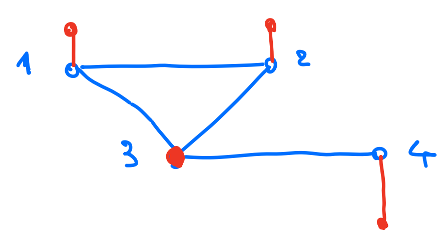
$$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(xI - L) = x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 12x \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 3 \\ \lambda_4 = 4 \end{cases}$$

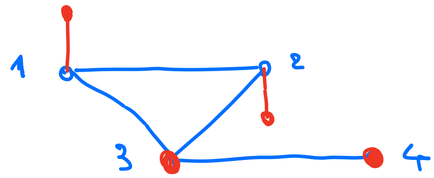
$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$



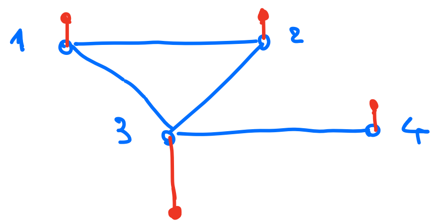
$$\lambda_2 = 1 \Rightarrow \vec{v}_2 \simeq \begin{bmatrix} 0.41 \\ 0.41 \\ 0 \\ -0.82 \end{bmatrix}$$



$$\lambda_3 = 3 \implies \vec{v}_3 \simeq \begin{bmatrix} 0.71 \\ -0.71 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\lambda_4 = 4 \implies \vec{v}_4 \simeq \begin{bmatrix} 0.29 \\ 0.29 \\ -0.87 \\ 0.29 \end{bmatrix}$$



نکته: با توجه به تعریف ماتریس لاپلاسین، بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ همواره بردار ویژه این ماتریس متناظر با مقدار ویژه صفر است.

* براساس مثال قبل به نظر می‌رسد که بردار ویژه متناظر با $\lambda = 0$ سیگنالی هموار روی گراف است و با افزایش λ میزان همواری بردار ویژه کاهش می‌یابد (تفاوت بین مقدار رئوس مجاور)

---

* فرض کنید G یک گراف بدون جهت باشد؛ در این صورت $L = [l_{i,k}]_{i,k}$ لاپلاسین است و

$$\forall\ \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times 1} \implies \vec{v}^H L \vec{v} = ?$$

$$\vec{v}^{H} L \vec{v} = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 & \cdots & \bar{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{12}+\cdots+w_{1n} & -w_{12} & \cdots & -w_{1n} \\ \vdots & & & \\ -w_{n1} & -w_{n2} & \cdots & w_{n1}+\cdots+w_{n(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} w_{ik} \Big) |v_i|^2 - \sum_{i,k} \bar{v}_i \, w_{ik} \, v_k$$

$$= \sum_{i<k} \Big(w_{ik} |v_i|^2 + w_{ki} |v_k|^2 - w_{ik} \bar{v}_i v_k - w_{ki} v_i \bar{v}_k \Big)$$

$w_{ik} = w_{ki}$

$$= \sum_{i<k} w_{ik} |v_i - v_k|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}^{H} L \vec{v} = \sum_{i<k} w_{ik} |v_i - v_k|^2}$$

← نتیجه: L یک ماتریس مثبت نیمه-معین است، یعنی تمام مقادیر ویژه آن اعداد حقیقی نامنفی هستند.

← نتیجه: اگر $\vec{v}_j$ بردار ویژه یکه متناظر با مقدار ویژه λ_j در L باشد، داریم:

$$\vec{v}_j^{H} L \vec{v}_j = \vec{v}_j^{H} (\lambda \vec{v}_j) = \lambda_j \underbrace{\|\vec{v}_j\|^2}_{1} = \sum_{i<k} w_{ik} |(v_j)_i - (v_j)_k|^2$$

$$\boxed{\sum_{i<k} w_{ik} \left|(v_j)_i - (v_j)_k\right|^2 = \lambda_j}$$

⇐ با افزایش λ_k مقدار $\sum_{i<k} w_{ik}\left|(v_j)_i-(v_j)_k\right|^2$ که نوعی ناهمواری سیگنال $\vec{v_j}$ روی گراف است افزایش می‌یابد.

← نتیجه: تعداد مقادیر ویژه ۰ در ماتریس L بیانگر تعداد مولفه‌های همبندی گراف G است.

نکته: اگر گراف G k-منتظم باشد، بردار ویژه های W و L یکسان هستند؛ رابطه مقادیر ویژه این دو نیز به این صورت است:

$$\lambda_j(L) = k - \lambda_{n+1-j}(W)$$

۱۴۰۰/۷/۱۹

نکته: نرمالیزه کردن گراف لاپلاسین برای محدود کردن بازه مقادیر ویژه صورت می‌گیرد. به طور خاص،

مقادیر ویژه ماتریس $L_N = I - D^{-1/2} W D^{-1/2}$ همواره در بازه $[0, 2]$ قرار می‌گیرند:

$$\frac{\vec{v}^H \overbrace{D^{-1/2} L D^{-1/2}}^{L_N} \vec{v}}{\vec{v}^H \vec{v}} \overset{\vec{u} = D^{-1/2}\vec{v}}{=} \frac{\vec{u}^H L \vec{u}}{\vec{u}^H D \vec{u}} = \frac{\sum_{i<j} |u_i - u_j|^2 w_{ij}}{\sum_i |u_i|^2 \left(\sum_{\substack{j \\ j \neq i}} w_{ij}\right)}$$

چون نسبت آخر نامنفی است، پس تمام مقادیر ویژه L_N نامنفی هستند. از طرفی:

$$\frac{\sum_{i<j} |u_i - u_j|^2 w_{ij}}{\sum_i |u_i|^2 \left(\sum_{\substack{j \\ j \neq i}} w_{ij}\right)} \leq \frac{2\sum_{i<j} \left(|u_i|^2 + |u_j|^2\right) w_{ij}}{\sum_i |u_i|^2 \left(\sum_{\substack{j \\ j \neq i}} w_{ij}\right)} = 2$$

$\Leftarrow$ بزرگترین مقدار ویژه نیز حداکثر ۲ خواهد بود.

$\Leftarrow$ تساوی وقتی حاصل می‌شود که برای هر $i < j$ داشته باشیم:

$$|u_i - u_j|^2 w_{ij} = 2\left(|u_i|^2 + |u_j|^2\right) w_{ij}$$

$\Leftarrow$ یا $w_{ij} = 0$ و یا $u_i = -u_j$

$\Leftarrow$ گراف دوبخشی است.

نکته: اگر G یک گراف دوبخشی با بخش های $\{1, \dots, a\}$ و $\{a+1, \dots, n\}$ باشد و

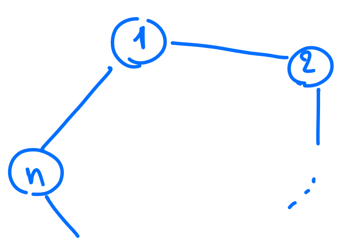
همچنین $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه ماتریس L_N متناظر با مقدار ویژه λ باشد،

در این صورت $\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_a \\ -v_{a+1} \\ \vdots \\ -v_n \end{bmatrix}$ نیز یک بردار ویژه L_N متناظر با مقدار ویژه $2-\lambda$ خواهد بود.

---

* اگر G گراف دایره (دور ساده) باشد، ماتریس لاپلاسین آن circulant خواهد بود و

در نتیجه، ستون‌های ماتریس DFT برای آن بردار ویژه هستند.



$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & \\ -1 & 0 & \cdots & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L_N = \frac{1}{2} L$$

مقادیر ویژه L: $\lambda_k(L) = 2e^{-j\frac{2\pi}{n}(k-1)\times 0} \underbrace{-1\times e^{-j\frac{2\pi}{n}(k-1)\times 1} -1\times e^{-j\frac{2\pi}{n}(k-1)(n-1)}}_{-2\cos\left(\frac{2\pi}{n}(k-1)\right)}$

$$= 2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{n}(k-1)\right)$$

$$\boxed{\lambda_k(L_N) = 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}(k-1)\right)}$$

خوشه بندی گراف

در بسیاری از کاربردها، نیاز است تا مجموعه ای از المان ها به تعدادی خوشه تقسیم بندی شوند به گونه ای که المان های داخل یک خوشه به یکدیگر شبیه باشند و المان های دو خوشه متفاوت تا حد خوبی از یکدیگر متفاوت باشند. فرض کنید می خواهیم رئوس یک گراف را به چند خوشه تقسیم کنیم (مثلاً برای تشخیص community ها در یک شبکه اجتماعی). از بردارهای ویژه ماتریس لاپلاسین می توان برای این منظور استفاده کرد:

← فرض کنید $\vec{v_i} = \begin{bmatrix} (v_i)_1 \\ \vdots \\ (v_i)_n \end{bmatrix}$ بردار ویژه یکه ماتریس لاپلاسین متناظر با مقدار ویژه λ_i باشد به گونه ای که: $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$

وضوحاً $\vec{v_1}$ بردار ثابت و از قبل تعیین شده است. در نتیجه، این بردار را در نظر نمی گیریم.

← به رأس i ام گراف، بردار $\begin{bmatrix} (v_2)_i \\ \vdots \\ (v_n)_i \end{bmatrix}$ را نسبت می دهیم و هر رأس را در فضای R^{n-1} معادل با این بردار نمایش می دهیم. اکنون نقاط را برحسب دوری و نزدیکی خوشه بندی می کنیم.

* به جای استفاده از بردار کامل $(n-1)$-بعدی می توان تنها چند مولفه اول آن را در نظر گرفت.

این نمایش با تبدیل Laplacian eigenmap گفته می شود.

۱۴۰۰/۷/۲۴

سیگنال ها و سیستم های گرافی

فرض کنید G یک گراف داده شده با رئوس $\{1, \dots, n\}$ باشد. سیگنال گرافی (یک بعدی) نگاشتی از رئوس گراف به اعداد حقیقی یا مختلط است:

$$x_G : \{1, \dots, n\} \to \mathbb{C}$$

$$x_G(a) = \cdots$$

به طور مشابه، یک سیستم گرافی روی گراف G نگاشتی از سیگنال های گرافی به سیگنال های گرافی است.

اگر این نگاشت خطی باشد می توان نوشت:

$$x_G \to \boxed{S_G} \to y_G$$

$$y_G(a) = x_G(a)\, h(a,a) + \sum_{m \neq a} x_G(m)\, h(a,m)$$

با توجه به اهمیت مجاورت در پردازش کلاسیک، می توان سیستم های خطی گرافی با تاکید بر روی مجاورت رئوس را به صورت زیر تعریف کرد:

$$y_G(a) = x_G(a)\, h(a,a) + \sum_{m \in V_a} x_G(m)\, h(a,m)$$

و در آن V_a یک مجموعه همسایگی برای راس a در گراف G است.

شیفت گرافی سیگنال

در سیگنال های گسسته کلاسیک، شیفت واحد یک سیگنال با انتقال مقادیر یک لحظه به لحظات مجاور حاصل می‌شود. به طور مشابه می‌توان از مجاورت رئوس گراف برای پیاده‌سازی مفهوم شیفت استفاده کرد:

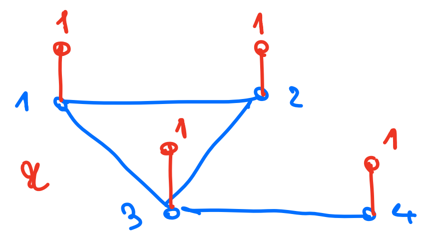
اگر $\vec{x}$ نمایش یک سیگنال گرافی به صورت بردار باشد، $W\vec{x}$ برداری است که مقادیر هر راس به رئوس مجاور آن (با لحاظ کردن وزن) منتقل شده است:

$$\vec{x}_1 = W\vec{x}$$

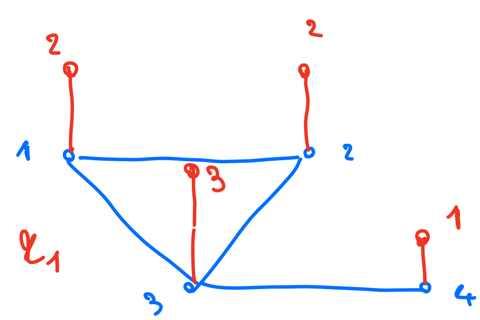
اکنون سیگنال $\vec{x}_1$ به عنوان شیفت یافته گرافی سیگنال $\vec{x}$ شناخته می‌شود.

1 واحد شیفت: $\vec{x}_1 = W\vec{x} \implies$ m واحد شیفت گرافی: $\vec{x}_m = W^m\vec{x}$

مثال:



$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



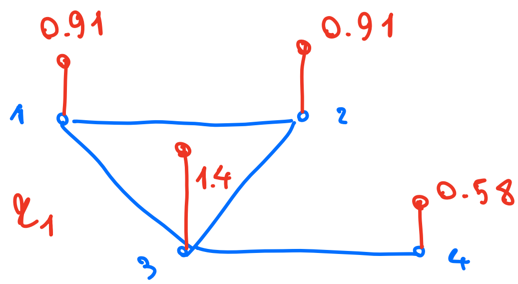
نکته: در مراجع مختلف هر یک از ۴ ماتریس W ، L ، L_N و $W_N = D^{-1/2} W D^{-1/2}$

برای شیفت در نظر گرفته شده‌اند.

مثال بالا:

$$W_N \simeq \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.41 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.41 & 0 \\ 0.41 & 0.41 & 0 & 0.58 \\ 0 & 0 & 0.58 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 \rightarrow$ با W_N شیفت داده شد



سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با شیفت (LSI)

همانگونه که قبلاً اشاره شد، در سیستم‌های خطی، خروجی در هر راس به صورت ترکیب خطی از ورودی رئوس حاصل می‌شود. در نتیجه، اگر سیگنال گرافی را با بردار $\vec{x}$ نمایش دهیم، خروجی به صورت $\vec{y} = S\vec{x}$ خواهد بود که $S_{n\times n}$ یک ماتریس است:

$$\vec{x} \rightarrow \boxed{\text{سیستم خطی}} \rightarrow \vec{y} = S\vec{x}$$

مشابه با حالت کلاسیک، یک سیستم تغییرناپذیر با شیفت است اگر و تنها اگر هر میزان شیفت در ورودی به همان میزان شیفت در خروجی منتهی شود:

$$\vec{x} \longrightarrow \boxed{\text{سیستم } SI} \longrightarrow \vec{y}$$

$$\Rightarrow \quad W^m \vec{x} \longrightarrow \boxed{\text{سیستم } SI} \longrightarrow W^m \vec{y}$$

$$\text{سیستم } LSI \overset{\forall \vec{x}, m}{\Longleftrightarrow} S(W^m \vec{x}) = W^m (S \vec{x})$$

$$\Longleftrightarrow S W^m = W^m S \Longleftrightarrow \boxed{S W = W S}$$

دسته بزرگی از سیستم های S که برای گراف G با ماتریس وزن W یک سیستم LSI ارائه می‌کنند، به صورت زیر هستند:

$$S = h_0 I + h_1 W + \cdots + h_{M-1} W^{M-1}$$

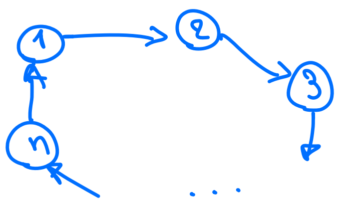
به راحتی می‌توان بررسی کرد که چنین S های با W جابجا می‌شوند. با توجه به تعبیر درایه‌های W^m توسط گشت های به طول m، سیستم معرفی شده در بالا به این صورت عمل می‌کند که برای تعیین مقدار خروجی در یک رأس، مقادیر رئوسی که در فاصله $M-1$ از این رأس قرار دارند در ترکیب خطی شرکت می‌کنند.

به بیانی دیگر سیستم S در بالا یک فیلتر FIR با طول M است.

نکته: اگر درجه چندجمله‌ای مینیمال w برابر با N_w باشد، به این معنی است که برای $m \geq N_w$ می‌توان w^m را به صورت ترکیب خطی w^i ها برای $0 \leq i < m$ نوشت. در نتیجه هر فیلتر FIR گرافی با طول $m > N_w$ معادل فیلتر FIR دیگری با طول $m \leq N_w$ خواهد بود (یعنی نیازی به افزایش طول فیلتر بیشتر از N_w نیست).

۱۴۰۰/۷/۲۶

نکته: برای گراف دور جهت‌دار با وزن‌های واحد، به راحتی مشاهده می‌شود که شیفت گرافی با شیفت دایره‌ای مرسوم یکسان است.



تبدیل فوریه گرافی (GDFT)

تبدیل فوریه کلاسیک سیگنال‌های گسسته (DFT) نمایش سیگنال براساس پایه $\{e^{j\omega n}\}_{\omega}$ است.

اهمیت عملی پایه فوریه دلیلش است که سیگنال‌های $e^{j\omega n}$ توابع ویژه سیستم‌های LSI هستند.

به عبارت بهتر، اگر S یک سیستم LSI گسسته باشد، داریم:

$$e^{j\omega n} \rightarrow \boxed{S} \rightarrow \alpha\, e^{j\omega n}$$

که در آن α پاسخ فرکانسی سیستم S در فرکانس ω نام دارد. برای معادل‌سازی مفهوم تبدیل فوریه در گراف، فرض کنید G یک گراف بدون جهت با ماتریس وزن W باشد، به طوری که $W = U \Lambda U^{-1}$

ماتریس بردار ویژه‌های یکه

ماتریس قطری

همچنین، S را یک سیستم LSI روی گراف G در نظر بگیریم:

$$S = G\text{-}LSI = h_0 I + h_1 W + \cdots + h_{M-1} W^{M-1}$$

با توجه به ثابت بودن گراف G و در نتیجه عملگر شیفت W، تفاوت سیستم‌های LSI مختلف در دوجه M و ضرایب $\{h_i\}_{i=0}^{M-1}$ است. اکنون، فرض کنید $\vec{v}_k$ بردار ویژه W متناظر با مقدار ویژه λ_k باشد:

$$\vec{v}_k \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow S\vec{v}_k = \left(h_0 I + \cdots + h_{M-1} W^{M-1}\right)\vec{v}_k$$

$$= h_0 \vec{v}_k + h_1 W\vec{v}_k + \cdots + h_{M-1} W^{M-1}\vec{v}_k$$

$$= \left(h_0 + h_1 \lambda_k + \cdots + h_{M-1}\lambda_k^{M-1}\right)\vec{v}_k$$

در نتیجه، $\vec{v}_k$ ها بردار ویژه تمامی سیستم‌های LSI نیز هستند! به عبارت بهتر، $\vec{v}_k$ نقش سیگنال $e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ را برای تبدیل فوریه سیگنال گرافی ایفا می‌کنند. به دلیل اینکه $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ بردارهای مستقل خطی هستند، برای فضای سیگنال‌های گرافی روی G (که متناظر با $\mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{C}^n$ هستند) تشکیل پایه می‌دهند. نمایش سیگنال بر این اساس تبدیل فوریه گرافی نام دارد:

$$\vec{x} = \underset{G}{\text{سیگنال گرافی روی}} \longrightarrow \text{تبدیل فوریه } \vec{x} = \hat{\vec{x}} = \left[\vec{v}_1 \ \cdots \ \vec{v}_n\right]^{-1}\vec{x}$$

$$= V^{-1}\vec{x}$$

$$\Rightarrow \hat{\vec{x}} = U^{-1}\vec{x} \Rightarrow \vec{x} = U\hat{\vec{x}} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \cdots & \vec{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\vec{x}}(1) \\ \vdots \\ \hat{\vec{x}}(n) \end{bmatrix}$$

تبدیل فوریه معکوس

$$= \sum_{i=1}^{n} (\hat{\vec{x}})(i)\, \vec{u}_i$$

اکنون خروجی یک سیستم گرافی LSI را به یک ورودی با توجه به نمایش فوریه بررسی می‌کنیم:

$$\vec{x} \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow \vec{y} = S\vec{x} = (h_0 I + \cdots + h_{M-1} W^{M-1})\,\vec{x}$$

$$= U \left(\sum_{i=0}^{M-1} h_i \Lambda^i \right) U^{-1} \vec{x}$$

$$\Rightarrow \vec{y} = U \left(\sum_{i=0}^{M-1} h_i \Lambda^i \right) U^{-1} \vec{x} \Rightarrow \underbrace{U^{-1}\vec{y}}_{\hat{\vec{y}}} = \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{M-1} h_i \Lambda^i \right)}_{\text{قطری}} \underbrace{U^{-1}\vec{x}}_{\hat{\vec{x}}}$$

با توجه به اینکه Λ یک ماتریس قطری است، $\sum_{i=0}^{M-1} h_i \Lambda^i$ نیز قطری است. در نتیجه، تبدیل فوریه خروجی از ضرب تبدیل فوریه ورودی در یک ماتریس قطری حاصل می‌شود؛ یعنی هر مولفه از تبدیل فوریه در یک عدد ثابت که تنها به سیستم وابسته است ضرب می‌شود. مشابه حالت سیگنال‌های گسسته کلاسیک، درایه‌های روی قطر اصلی $\sum_{i=0}^{M-1} h_i \Lambda^i$ پاسخ فرکانسی سیستم LSI هستند:

$$\hat{h}(S) = \sum_{i=0}^{M-1} h_i \Lambda^i = \text{پاسخ فرکانسی سیستم}$$

$$= \begin{bmatrix} h_0 + h_1 \lambda_1 + \cdots + h_{M-1} \lambda_1^{M-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_0 + h_1 \lambda_n + \cdots + h_{M-1} \lambda_n^{M-1} \end{bmatrix}$$

مشابه حالت کلاسیک، $H(z) = Z(\{h_i\}) = h_0 + h_1 z^{-1} + \cdots + h_{M-1} z^{-M+1}$: عنوان

تبدیل Z سیستم گرافی شناخته می‌شود.

فرکانس‌های بالا و پایین

در تبدیل فوریه سیگنال‌های گسسته کلاسیک، با توجه به توالی فرکانس‌ها می‌توان بخش‌های پایین، میانی و بالای طیف را مشخص کرد. اما در تبدیل فوریه گرافی به دلیل نبود محور، تعیین بالا و پایین بودن فرکانس کمی پیچیده‌تر است. قبل از بحث در این خصوص دقت کنید که عملگر شیفت گرافی W در حالت کلی انرژی سیگنال را تغییر می‌دهد (برخلاف حالت کلاسیک). به بیان دیگر، اگر یک سیگنال گرافی را 1000 بار شیفت دهیم (ضرب در W^{1000}) احتمال آنکه واگرا شود بسیار زیاد است:

$$\max_{\vec{x}} \frac{\vec{x} \text{ انرژی شیفت یافته }}{\vec{x} \text{ انرژی }} = \max_{\vec{x}} \frac{\| W\vec{x} \|^2}{\|\vec{x}\|^2} = \max_{\vec{x}} \frac{\vec{x}^T W^T W \vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}}$$

$$= \lambda_{max}\left(W^T W\right) = \left(\sigma_{max}(W)\right)^2$$

یکی از راهکارها برای جلوگیری از واگرایی انرژی سیگنال تحت شیفت های متوالی این است که ماتریس W را با یک ضریب نرمالیزه کنیم:

$$W_{norm} \triangleq \frac{1}{\sigma_{max}(W)} W$$

۱۴۰۰/۸/۱

اگر شیفت را توسط w_{norm} انجام دهیم، انرژی یا کاهش می‌یابد و یا تغییر نمی‌کند. ← علاوه تعریف تبدیل فوریه دست نخورده باقی می‌ماند؛ البته پاسخ فرکانسی یک سیستم با این تعریف تغییر می‌کند.

اکنون برگردیم به مفاهیم فرکانس بالا و پایین گرافی؛ فرکانس پایین در حالت کلاسیک معادل توابع ویژه‌ای هستند که تغییرات کمتری دارند. اکنون اگر بخواهیم برای $\vec{u}_k$ که یکی از بردار ویژه‌های یک w_{norm} (و یا w) است، تغییرات را تعریف کنیم، بهترین تغییر عبارت است از:

$$\vec{u}_k \text{ تغییرات} = |\Delta \vec{u}_k| \triangleq \|\vec{u}_k - w_{norm}\vec{u}_k\|^2$$

$$= \left\|\vec{u}_k - \frac{1}{\sigma_{max}}\lambda_k \vec{u}_k\right\|^2 = \left|1 - \frac{\lambda_k}{\sigma_{max}}\right|^2$$

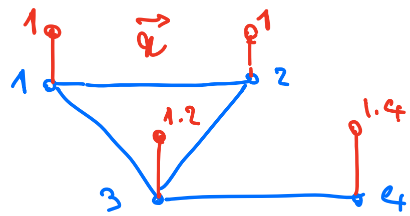
در نتیجه، بردار ویژه متناظر با بزرگترین مقدار ویژه کمترین تغییرات را دارد و به همین ترتیب هرچه مقدار ویژه کاهش می‌یابد، تغییرات بردار ویژه افزایش می‌یابد! ← بعنوان مثال، یک سیگنال low pass گرافی سیگنالی است که به صورت ترکیب خطی چند بردار ویژه متناظر با مقادیر ویژه بالا قابل نمایش باشد.

نکته: اگر ماتریس L و یا L_{norm} به عنوان شیفت در نظر گرفته شده باشند، ترتیب فرکانس برعکس است.

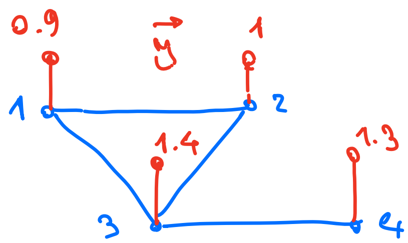
← به بیان دیگر، هرچه مقادیر ویژه افزایش می‌یابند، بردار ویژه ناهموارتر می‌شود (فرکانس بالاتر).

مثال از نویز زدایی

سیگنال $\vec{x}$ روی گراف G مطابق شکل مفروض است. همانطور که مشاهده می‌شود، سیگنال روی گراف تا حد خوبی هموار است:



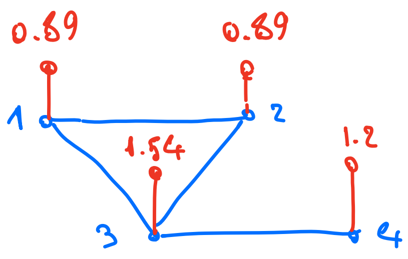
اکنون فرض کنید به جای سیگنال $\vec{x}$، سیگنال نویزی $\vec{y}$ مشاهده شده باشد:



$$\vec{y} = \vec{x} + \vec{n}$$

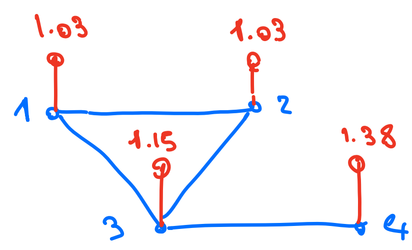
$$\rightsquigarrow \text{SNR} \simeq 19.5^{\text{dB}}$$

می‌توانیم با اعمال فیلتر low pass روی $\vec{y}$، تا حدی نویز را حذف کنیم؛ برای این منظور، مولفه‌های طیفی $\vec{y}$ متناظر با فرکانس‌های بالاتر را 0 می‌کنیم:



$W = \text{shift}$

$\text{SNR} \simeq 15^{\text{dB}}$



$L = \text{shift}$

$\text{SNR} \simeq 30.3^{\text{dB}}$

فیلتر گراف :

← **فیلتر گراف خطی** : فرض کنید بردار $\hat{\vec{h}}$ به عنوان پاسخ فرکانسی مطلوب یک سیستم گرافی مطلوب باشد. برای فیلتر کردن یک سیگنال گرافی $\vec{x}$ کافی است به کمک

$$\hat{\vec{x}} = U^{-1}\vec{x}$$

ابتدا از ورودی تبدیل فوریه بگیریم و سپس از بردار $(\hat{\vec{y}})_{n\times 1}$ که به صورت

$$1 \le i \le n : \quad (\hat{\vec{y}})(i) = (\hat{\vec{x}})(i) \cdot (\hat{\vec{h}})(i)$$

تعریف می‌شود تبدیل فوریه معکوس بگیریم : $\quad \vec{y} = U\hat{\vec{y}}$

← **تاثیر هر واحد** : فرض کنید $\hat{\vec{h}}$ پاسخ فرکانسی یک سیستم LSI گرافی باشد و $\vec{x}$ سیگنال ورودی این سیستم :

$$\vec{x} \longrightarrow \boxed{G\text{-}LSI} \longrightarrow \vec{y}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\vec{y}} = \underbrace{diag(\hat{\vec{h}})}_{H}\,\hat{\vec{x}}$$

$$\Rightarrow \quad U^{-1}\vec{y} = H\,U^{-1}\vec{x} \Rightarrow \vec{y} = U\,H\,\underbrace{U^{-1}}_{U^{H}}\,\vec{x}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{h}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{h}_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \hat{h}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{11} & \bar{u}_{21} & \cdots & \bar{u}_{n1} \\ \bar{u}_{12} & \bar{u}_{22} & \cdots & \bar{u}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{u}_{1n} & \bar{u}_{2n} & \cdots & \bar{u}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (\vec{y})(i) = \sum_{k=1}^{n} u_{i,k} \, (\hat{\vec{h}})(k) \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{u}_{j,k} \, (\vec{x})(j) \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\vec{x})(j) \left(\sum_{k=1}^{n} u_{i,k} \, (\hat{\vec{h}})(k) \, \bar{u}_{j,k} \right)$$

به عبارت بهتر، تأثیر اسکالر سیگنال گرافی ورودی روی رأس j ام در خروجی گرافی در رأس i ام عبارت است از:

$$h_i(j) = \sum_{k=1}^{n} u_{i,k} \, (\hat{\vec{h}})(k) \, \bar{u}_{j,k}$$

$$= \left(\text{ستون } j \text{ ام } U \right)^H \cdot H \cdot \left(\text{ستون } i \text{ ام } U \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{(\vec{y})(i) = \sum_{j=1}^{n} (\vec{x})(j) \, h_i(j)}$$

۱۴۰۰/۸/۳

← کانولوشن رأسی: فرض کنید $\vec{x}$, $\vec{y}$ دو سیگنال روی گراف G باشند. کانولوشن دو سیگنال را می‌توان به این صورت تعبیر کرد که از حاصل‌ضرب تبدیل فوریه دو سیگنال تبدیل فوریه معکوس بگیریم:

$$\vec{z} = \vec{x} \circledast_G \vec{y} \iff \vec{z} = U\hat{\vec{z}}\ ,\ \begin{cases} \hat{\vec{x}} = U^{-1}\vec{x} \\ \hat{\vec{y}} = U^{-1}\vec{y} \\ (\hat{\vec{z}})(i) = (\hat{\vec{x}})(i)\cdot(\hat{\vec{y}})(i) \end{cases}$$

طبق تعریف:

$$\hat{\vec{z}} = \operatorname{diag}(\hat{\vec{y}})\cdot\hat{\vec{x}} \Rightarrow U^{-1}\vec{z} = \begin{bmatrix} (\hat{\vec{y}})(1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\hat{\vec{y}})(n) \end{bmatrix} \underbrace{U^{-1}}_{U^H}\vec{x}$$

$$\Rightarrow \vec{z} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1n} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{n1} & U_{n2} & \cdots & U_{nn} \end{bmatrix}}_{U} \begin{bmatrix} (\hat{\vec{y}})(1) & & & 0 \\ & (\hat{\vec{y}})(2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & (\hat{\vec{y}})(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_{11} & \bar{U}_{21} & \cdots & \bar{U}_{n1} \\ \bar{U}_{12} & \bar{U}_{22} & \cdots & \bar{U}_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ \bar{U}_{1n} & \bar{U}_{2n} & \cdots & \bar{U}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\vec{x})(1) \\ (\vec{x})(2) \\ \vdots \\ (\vec{x})(n) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (\vec{z})(i) = \sum_{j=1}^{n} U_{i,j}\ (\hat{\vec{y}})(j) \left(\sum_{k=1}^{n} \bar{U}_{k,j}\ (\vec{x})(k) \right)$$

$$(\hat{\vec{y}})(j) = \sum_{l=1}^{n} \bar{U}_{l,j}\ (\vec{y})(l)$$

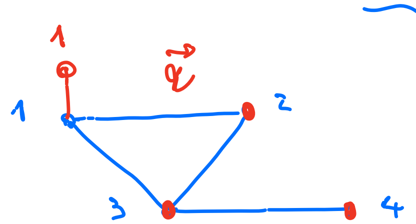
$$\Rightarrow \boxed{(\vec{z})(i) = \sum_{k,l=1}^{n} (\vec{x})(k)\,(\vec{y})(l)\left(\sum_{j=1}^{n} u_{i,j}\,\bar{u}_{k,j}\,\bar{u}_{l,j}\right)}$$

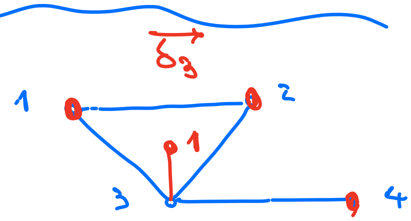
نکته: به کمک تعریف کانولوشن راسی، می‌توانیم شیفت راسی نسبت به یک راس دلخواه نیز تعریف کنیم. برای این منظور سیگنال $\vec{x}$ را با سیگنال $\vec{\delta}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ← مکان m ام، به صورت گرافی کانوالو می‌کنیم:

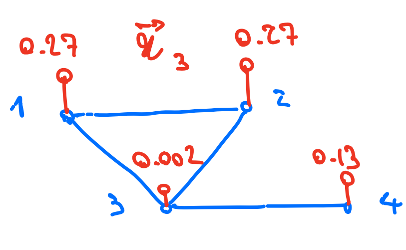
$$\vec{x}_m \triangleq \vec{x} \circledast_G \vec{\delta}_m \Rightarrow (\vec{x}_m)(i) = \sum_{k=1}^{n} (\vec{x})(k)\left(\sum_{j=1}^{n} u_{i,j}\,\bar{u}_{k,j}\,\bar{u}_{m,j}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} u_{i,j}\,\bar{u}_{m,j}\,(\hat{\vec{x}})(j)$$

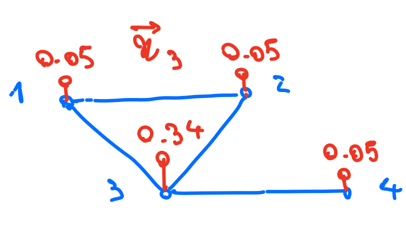
مثال:



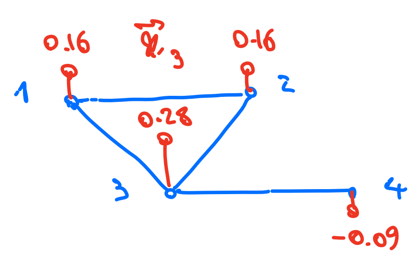




بر اساس $W=A$



بر اساس L



بر اساس L_N

نکته: با توجه به تعاریف کانولوشن گرافی و شیفت رأسی داریم:

$$\vec{x}_m \triangleq \vec{x} \circledast_G \vec{\delta}_m \Rightarrow (\vec{x}_m)(i) = \sum_{k=1}^{n} (\vec{x})(k) \left(\sum_{j=1}^{n} v_{i,j}\, \bar{v}_{k,j}\, \bar{v}_{m,j} \right)$$

$$\vec{z} = \vec{x} \circledast_G \vec{y} \Rightarrow (\vec{z})(i) = \sum_{k,l=1}^{n} (\vec{x})(k)\, (\vec{y})(l) \left(\sum_{j=1}^{n} v_{i,j}\, \bar{v}_{k,j}\, \bar{v}_{l,j} \right)$$

$$\Rightarrow (\vec{z})(i) = \sum_{l=1}^{n} (\vec{y})(l) \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} (\vec{x})(k) \left(\sum_{j=1}^{n} v_{i,j}\, \bar{v}_{k,j}\, \bar{v}_{l,j} \right)}_{(\vec{x}_l)(i)} \right)$$

$$= \sum_{l=1}^{n} (\vec{y})(l)\, (\vec{x}_l)(i)$$

$\Leftarrow$ $(\vec{x}_l)(i)$ مشابه با $x[i-l]$ برای سیگنال‌های گسسته کلاسیک است. دقت داشته باشید و $\vec{x}_l$ شیفت یافته رأسی سیگنال $\vec{x}$ نسبت به رأس l است و با شیفت گرافی تفاوت است.

نکته: کانولوشن های گرافی با هم جابجا می‌شوند (ترتیب مهم نیست):

$$\vec{x} \circledast_G \vec{y} = \vec{y} \circledast_G \vec{x} \quad , \quad (\vec{x} \circledast_G \vec{y}) \circledast_G \vec{z} = (\vec{x} \circledast_G \vec{z}) \circledast_G y$$

← یک فیلتر گرافی $(G\text{-}LSI)$ نسبت به شیفت رأسی هم ناوردا است:

$$\vec{x} \longrightarrow \boxed{G\text{-}LSI} \longrightarrow \vec{y} \quad \Longrightarrow \quad \vec{x}_m \longrightarrow \boxed{G\text{-}LSI} \longrightarrow \vec{y}_m$$

تبدیل Z

در سیگنال ها و سیستم های کلاسیک، $h[n]$ هم معرف ضرایب فیلتر است و هم سیگنالی که برای کانولوشن مورد استفاده قرار می‌گیرد. در سیگنال ها و سیستم های گرافی لزوماً چنین نیست. فرض کنید $h_0, h_1, \dots, h_{M-1}$ ضرایب یک فیلتر FIR گرافی باشند. در این صورت پاسخ فرکانسی این فیلتر عبارت است از:

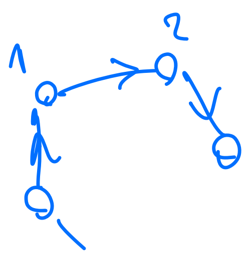
$$\begin{bmatrix} h_0 + h_1\lambda_1 + \cdots + h_{M-1}\lambda_1^{M-1} \\ \vdots \\ h_0 + h_1\lambda_n + \cdots + h_{M-1}\lambda_n^{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^0 & \lambda_1^1 & \cdots & \lambda_1^{M-1} \\ \lambda_2^0 & \lambda_2^1 & \cdots & \lambda_2^{M-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n^0 & \lambda_n^1 & \cdots & \lambda_n^{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{M-1} \end{bmatrix}$$

از طرفی، اگر یک فیلتر گرافی توسط کانولوشن با سیگنال گرافی $\vec{h}$ تعریف شده باشد، پاسخ فرکانسی آن $\hat{h} = U^{-1}\vec{h}$ است. در نتیجه، یک فیلتر FIR با ضرایب $h_0, \dots, h_{m-1}$ معادل با کانولوشن با سیگنال گرافی زیر است:

$$\vec{h} = U \begin{bmatrix} \lambda_1^0 & \lambda_1^1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ \lambda_2^0 & \lambda_2^1 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n^0 & \lambda_n^1 & \cdots & \lambda_n^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{m-1} \end{bmatrix}$$

دقت کنید که $\vec{h}$ و $\begin{bmatrix} h_0 \\ \vdots \\ h_{m-1} \end{bmatrix}$ با هم برابر نیستند (اصلاً طول برابر ندارند). اگر U ماتریس DFT می‌بود و $\lambda_i = e^{-j\frac{2\pi}{n}i}$، به دلیل صورت $\vec{h}$ همان بردار ضرایب FIR می‌شد (به عنوان

معمولی = در اصل)



۱۴۰۰/۸/۸

اگر $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ دو به دو متمایز باشند، هر کانولوشن معادل با یک فیلتر FIR با ضرایب زیر است:

$$\begin{bmatrix} h_0 \\ \vdots \\ h_{n-1} \end{bmatrix} = \Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1^0 & \lambda_1^1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n^0 & \lambda_n^1 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}}_{V}\Bigg)^{-1} U^{-1} \vec{h}$$

اکنون تبدیل z مربوط به $\vec{h}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{H(z) \triangleq h_0 + h_1 z^{-1} + \cdots + h_{n-1} z^{-(n-1)}}$$

نکته: تبدیل z سیگنال $\vec{h}$ در $z^{-1} = \lambda_k$ برابر است با k امین درایه $\hat{\vec{h}}$:

$$H(z)\Big|_{z^{-1}=\lambda_k} = h_0 + h_1 \lambda_k + \cdots + h_{n-1} \lambda_k^{n-1} = (\hat{\vec{h}})(k)$$

$$\begin{bmatrix} H(z)\Big|_{z^{-1}=\lambda_1} \\ \vdots \\ H(z)\Big|_{z^{-1}=\lambda_k} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}}_{V} \begin{bmatrix} h_0 \\ \vdots \\ h_{n-1} \end{bmatrix} = V V^{-1} U^{-1} \vec{h}$$

$$= U^{-1} \vec{h} = \hat{\vec{h}}$$

← نتیجه: اگر $\vec{y} = \vec{x} \circledast_G \vec{h}$ ، در این صورت:

$$Y(z) \overset{P(z^{-1})}{\equiv} X(z) \cdot H(z)$$

که در آن $P(x)$ چند جمله‌ای مشخصه ماتریس شیفت گراف است.

اثبات: $\vec{y} = \vec{x} \circledast_G \vec{h} \Rightarrow \underbrace{(\hat{\vec{y}})(i)}_{Y(z)|_{z^{-1}=\lambda_i}} = \underbrace{(\hat{\vec{x}})(i)}_{X(z)|_{z^{-1}=\lambda_i}} \cdot \underbrace{(\hat{\vec{h}})(i)}_{H(z)|_{z^{-1}=\lambda_i}}$

$$\Rightarrow \left(Y(z) - X(z)H(z)\right)\Big|_{z^{-1}=\lambda_i} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(z^{-1}-\lambda_1)\cdots(z^{-1}-\lambda_n)}_{P(z^{-1})} \;\Big|\; Y(z) - X(z)H(z)$$

شیفت (راسی) در حوزه طیفی

برای دو سیگنال گسسته کلاسیک $x[n], y[n]$ ، کانولوشن به این صورت تعریف می‌شود:

$$z[n] = (x*y)[n] = \sum_{m} x[n-m]\, y[m]$$

با تعبیر کانولوشن گرافی به صورت یک جمع، توانستیم $x[\cdot - m]$ را به صورت شیفت راسی در گراف تعبیر کنیم:

$$\vec{x}_m = \vec{x} \circledast_G \vec{\delta}_m \Rightarrow (\vec{x}_m)(i) = \sum_{k=1}^{n} (\hat{\vec{x}})(k) \left(\sum_{j=1}^{n} U_{i,j}\, \bar{U}_{k,j}\, \bar{U}_{m,j} \right)$$

با خاصیت مشابه، می‌توانیم از تبدیل فوریه عملگر $x[n] \cdot y[n]$ شیفت در حوزه فوریه را بدست آوریم:

$$\vec{z}: \quad (\vec{z})(i) = (\vec{x})(i) \cdot (\vec{y})(i) \Rightarrow (\hat{\vec{z}})(k) = \sum_{i=1}^{n} \bar{U}_{i,k}\, \underbrace{(\vec{x})(i) \cdot (\vec{y})(i)}_{(\vec{z})(i)}$$

$$\begin{cases} (\vec{x})(i) = \sum_{l=1}^{n} U_{i,l}\, (\hat{\vec{x}})(l) \\ (\vec{y})(i) = \sum_{t=1}^{n} U_{i,t}\, (\hat{\vec{y}})(t) \end{cases}$$

$$(\hat{\vec{z}})(k) = \sum_{i=1}^{n} \bar{U}_{i,k} \left(\sum_{l=1}^{n} U_{i,l}\, (\hat{\vec{x}})(l) \right) \left(\sum_{t=1}^{n} U_{i,t}\, (\hat{\vec{y}})(t) \right)$$

$$= \sum_{t=1}^{n} (\hat{\vec{y}})(t)\, \underbrace{\sum_{l=1}^{n} (\hat{\vec{x}})(l) \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{U}_{i,k}\, U_{i,l}\, U_{i,t} \right)}_{\text{شیفت یافته } \hat{\vec{x}} \text{ به اندازه } t}$$

دقت کنید که روابط شیفت راستی و شیفت حلقوی متفاوت هستند!

رابطه پارسوال : (Parseval)

$$\begin{cases} \hat{\vec{x}} = U^{-1}\,\vec{x} \\ \vec{x} = U\,\hat{\vec{x}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\vec{y}} = U^{-1}\,\vec{y} \\ \vec{y} = U\,\hat{\vec{y}} \end{cases}$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^{H}\,\vec{y} = \left(U\hat{\vec{x}}\right)^{H}\left(U\hat{\vec{y}}\right) = \hat{\vec{x}}^{H}\,\underbrace{U^{H}U}_{I}\,\hat{\vec{y}}$$

$$= \hat{\vec{x}}^{H}\,\hat{\vec{y}} = \langle \hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}} \rangle$$

$$\boxed{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}} \rangle}$$

حالت خاص : $\vec{x} = \vec{y} \Rightarrow \quad \|\vec{x}\|_2^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \hat{\vec{x}}, \hat{\vec{x}} \rangle = \|\hat{\vec{x}}\|_2^2$ ✓

۱۴۰۰/۸/۱۰

نویز زدایی : روش Regularization

فرض کنید $\vec{x}$ یک سیگنال گرافی روی G است و نا مطلوب هموار است. اما سیگنال نویزی $\vec{y} = \vec{x} + \vec{w}$ مشاهده شده است. یکی از روش‌های نویز زدایی، کمینه کردن تابع هزینه‌ای است که در آن از همواری سیگنال روی گراف استفاده شده باشد. منطبق با مباحث قبلی $\vec{x}^H L \vec{x}$ و $\|L\vec{x}\|^2$: کمّی همواری $\vec{x}$ روی گراف را مشخص می‌کنند. در نتیجه، با انتخاب مناسب ضرایب α و β می‌توان از کمینه سازی تابع هزینه زیر برای نویز زدایی استفاده کرد:

$$\delta(\vec{x}) = \tfrac{1}{2}\|\vec{y}-\vec{x}\|^2 + \alpha\,\vec{x}^H L\,\vec{x} + \beta\,\|L\vec{x}\|^2$$

$$\vec{x}_{\text{تخمین}} = \vec{x}_{opt} = \underset{\vec{x}}{\operatorname{argmin}}\ \delta(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \nabla\delta(\vec{x})\Big|_{\vec{x}=\vec{x}_{opt}} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{x}_{opt} = \left(I + 2\alpha L + 2\beta L^H L\right)^{-1}\vec{y}}$$

$$L = U \underbrace{\Lambda}_{\text{قطری}} U^{-1} \Rightarrow I + 2\alpha L + 2\beta L^H L = U\big(\underbrace{I + 2\alpha\Lambda + 2\beta\Lambda^2}_{\text{قطری}}\big)U^{-1}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_{opt} = U \begin{bmatrix} \frac{1}{1+2\alpha\lambda_1+2\beta\lambda_1^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{1+2\alpha\lambda_n+2\beta\lambda_n^2} \end{bmatrix} U^{-1}\,\vec{y}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\vec{x}}_{opt} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+2\alpha\lambda_1+2\beta\lambda_1^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{1+2\alpha\lambda_n+2\beta\lambda_n^2} \end{bmatrix} \hat{\vec{y}}$$

به عبارت بهتر، تخمین بهینه $\vec{x}$ توسط یک فیلتر از روی داده نویزی $\vec{y}$ ایجاد می‌شود (مشابه فیلتر Wiener در حالت کلاسیک). پاسخ فرکانسی این فیلتر مشابه بالا و براساس α, β تعیین می‌شود.

برای اعمال شرط همواری در تابع هزینه $\delta(\vec{z})$ از جملاتی مانند $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\left((\vec{z})(i)-(\vec{z})(j)\right)^2\right)^{p/2}$ برای $p\neq 2$ هم می‌توان استفاده کرد، اما بهینه‌سازی لزوماً فرم بسته و یا حالت فیلتر نخواهد داشت.

نمونه‌برداری و بازسازی سیگنال‌های lowpass

فرض کنید به غیر از k مولفه اول طیف سیگنال گرافی $\vec{x}$ بقیه ۰ باشند (سیگنال lowpass):

$$\hat{\vec{x}} = U^{-1}\vec{x} \quad , \quad (\hat{\vec{x}})(k+1) = \dots = (\hat{\vec{x}})(n) = 0$$

فرض کنید مقدار سیگنال $\vec{x}$ تنها در رئوس $i_1, \dots, i_m$ مشخص باشد. آیا می‌توان مقدار سیگنال در سایر رئوس را به کمک این نمونه‌ها درون‌یابی کرد؟

$$\vec{\varphi} = U\,\hat{\vec{\varphi}} \Rightarrow \begin{bmatrix} (\vec{\varphi})(1) \\ \vdots \\ (\vec{\varphi})(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & \cdots & U_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ U_{n1} & \cdots & U_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\hat{\vec{\varphi}})(1) \\ \vdots \\ (\hat{\vec{\varphi}})(n) \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} U_{11} & \cdots & U_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ U_{n1} & \cdots & U_{nk} \end{bmatrix}}_{U_k} \begin{bmatrix} (\hat{\vec{\varphi}})(1) \\ \vdots \\ (\hat{\vec{\varphi}})(k) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} (\vec{\varphi})(i_1) \\ \vdots \\ (\vec{\varphi})(i_m) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_{i_1,1} & \cdots & U_{i_1,k} \\ \vdots & & \\ U_{i_m,1} & \cdots & U_{i_m,k} \end{bmatrix}}_{\tilde{U}_k} \begin{bmatrix} (\hat{\vec{\varphi}})(1) \\ \vdots \\ (\hat{\vec{\varphi}})(k) \end{bmatrix}$$

اگر $\operatorname{rank}(\tilde{U}_k) = k$ ، می توان از روی نمونه ها ضرایب سیگنال را محاسبه کرد:

$$\begin{bmatrix} (\hat{\vec{\varphi}})(1) \\ \vdots \\ (\hat{\vec{\varphi}})(k) \end{bmatrix} = (\tilde{U}_k)^\dagger \begin{bmatrix} (\vec{\varphi})(i_1) \\ \vdots \\ (\vec{\varphi})(i_m) \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{\varphi} = U_k (\tilde{U}_k)^\dagger \begin{bmatrix} (\vec{\varphi})(i_1) \\ \vdots \\ (\vec{\varphi})(i_m) \end{bmatrix}}$$

در نتیجه، ماتریس $U_k(\tilde{U}_k)^\dagger$ نقش درونیابی را ایفا می کند.

Downsample و Upsample

در سیگنال های گسسته کلاسیک ، با دور ریختن چند تا درمیان و با صفر قرار دادن درین نمونه های سیگنال عملیات $\downarrow M$ و $\uparrow M$ را انجام می دهیم. برای اعمال مشابه در گراف، فرض کنید $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ رئوس گراف G باشند و $v = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_m}\}$ یک زیرمجموعه از V باشد و $\vec{x}_{n\times 1}$ یک سیگنال گرافی تعریف شده روی G باشد. تعریف می کنیم:

$$\vec{y}_{m\times 1} = \vec{x}_{\downarrow v} \triangleq \begin{bmatrix} (\vec{x})(i_1) \\ \vdots \\ (\vec{x})(i_m) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{array}{r} \\ \text{سطر } k \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} & & & \overset{\text{مکان } i_k}{\downarrow} & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & & \end{bmatrix} \\ \end{array}}_{I_{\downarrow v}} \vec{x} = I_{\downarrow v} \vec{x}$$

برعکس، فرض کنید $\vec{y}_{m\times 1}$ معادل با مقادیر سیگنال گرافی روی رئوس v از G باشد. داریم:

$$\vec{z}_{n\times 1} = \vec{y}_{\uparrow v} \Rightarrow (\vec{z})(k) = \begin{cases} (\vec{y})(j), & i_j = k \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{z} = \underbrace{(I_{\downarrow v})^T}_{I_{\uparrow v}} \vec{y} = I_{\uparrow v} \vec{y}$$

۱۵، ۸، ۱۴۰۰

ترکیب $\downarrow V$, $\uparrow V$

$$\vec{x} \rightarrow (\downarrow V) \xrightarrow{I_{\downarrow V}\vec{x}} (\uparrow V) \rightarrow \vec{z}$$

$$\vec{z} = I_{\uparrow V}\left(I_{\downarrow V}\vec{x}\right) = \left(I_{\downarrow V}\right)^T \left(I_{\downarrow V}\right) \vec{x}$$

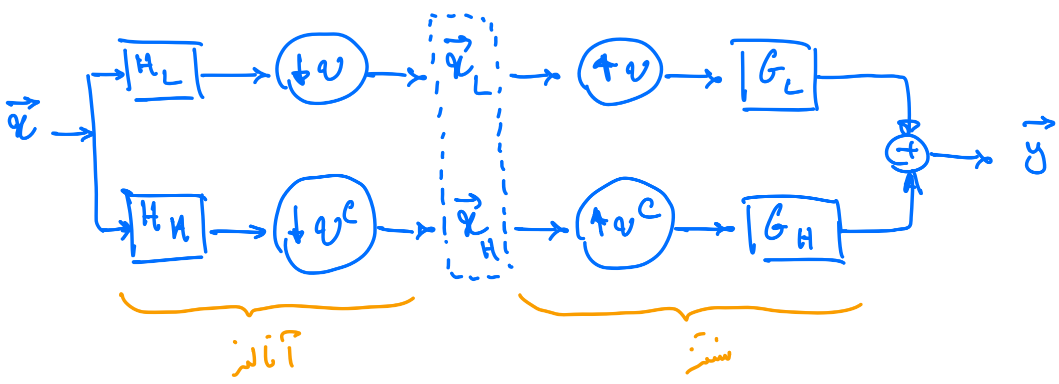
$$= \frac{1}{2}\left(I + \delta_V\right)\vec{x}$$

$$\left(\delta_V\right)_{l,q} = \begin{cases} 0, & l \neq q \\ 1, & l = q,\ l \in V \\ -1, & l = q,\ l \notin V \end{cases}$$

سیگنال های گسسته کلاسیک: $x[n] \rightarrow (\downarrow 2) \rightarrow (\uparrow 2) \rightarrow z[n] = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^n\right) x[n]$

درنتیجه، δ_V مشابه با $(-1)^n$ در حالت کلاسیک عمل می‌کند.

فیلتر بانک



فرض کنید Ω یک زیرمجموعه از رئوس گراف G و $\vec{x}$ یک سیگنال گرافی روی G باشد. با عبور دادن $\vec{x}$ از فیلترهای H_L و H_H (معمولاً نمایش فیلترهای پایین گذر و بالا گذر) دو سیگنال گرافی حاصل می‌شوند: برای حذف داده‌های redundant از $\downarrow\Omega$ و $\downarrow\Omega^c$ استفاده می‌شود. ایده آل این است که $\vec{x}_L$ و $\vec{x}_H$ روی هم امکان بازسازی $\vec{x}$ را فراهم کنند (البته به Ω هم بستگی دارد). با توجه به خطی بودن کل فرایند، بازسازی $\vec{x}$ از روی $\vec{x}_L$ و $\vec{x}_H$، بازسازی اطلاعات نیز به صورت خطی و توسط $\uparrow\Omega$ و $\uparrow\Omega^c$ و فیلترهای گرافی صورت خواهد گرفت. در شکل فوق، با فرض اینکه H_L، H_H، G_L و G_H ماتریس‌های قطری معرف پاسخ فرکانسی فیلترها هستند، شرط $\vec{x} = \vec{y}$ را بررسی می‌کنیم:

$$\vec{y} = U G_L U^{-1} \frac{I+\delta_\Omega}{2} U H_L U^{-1} \vec{x} + U G_H U^{-1} \frac{I-\delta_\Omega}{2} U H_H U^{-1} \vec{x}$$

$$= \frac{1}{2} U \left(G_L H_L + G_H H_H + G_L U^{-1} \delta_\Omega U H_L - G_H U^{-1} \delta_\Omega U H_H \right) U^{-1} \vec{x}$$

$$\vec{y} = \vec{x} \iff \boxed{G_L H_L + G_H H_H + G_L U^{-1} \delta_\Omega U H_L - G_H U^{-1} \delta_\Omega U H_H = 2I}$$

با توجه به اینکه H_H، H_L، G_H و G_L همگی قطری هستند، شرط فوق معمولاً به صورت زیر تعبیر می‌شود:

$$\begin{cases} G_L H_L + G_H H_H = 2I \\ G_L U^{-1} \delta_\Omega U H_L - G_H U^{-1} \delta_\Omega U H_H = 0 \end{cases}$$

حل کردن مسئله‌ی فوق (انتخاب برای v ، H_1, H_2 وابسته به آنها G_2 و G_1 مناسب یافت می‌شوند):

در حالت کلی دشوار است. حالت خاصی که بیشتر مورد توجه قرار گرفته است زمانی است که گراف G دوبخشی باشد. با توجه به تعبیر کلاسیک λ_2 که نرم‌ها یکی در میان هستند، گزینه منطقی برای گراف دوبخشی G انتخاب یکی از دوبخش به عنوان v است.

یادآوری: اگر $\{1, \dots, a\}$ و $\{a+1, \dots, n\}$ دوبخش گراف دوبخشی G باشند و $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه ماتریس L_N (متناظر با λ) باشد، بردار $\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_a \\ -v_{a+1} \\ \vdots \\ -v_n \end{bmatrix}$ نیز یک بردار ویژه L_N (متناظر با $2-\lambda$) است.

نتیجه: اگر G گراف دوبخشی باشد، v یکی از دوبخش باشد و تبدیل فوریه براساس L_N (یا W_N) تعریف شده باشد:

$$U^{-1} \delta_v U = U^{-1} \delta_v \left[\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_n \right]$$

$$= U^{-1} \left[\delta_v \vec{u}_1 \ \cdots \ \delta_v \vec{u}_n \right] = U^{-1} \left[\vec{u}_n \ \ \vec{u}_{n-1} \ \cdots \ \vec{u}_2 \ \ \vec{u}_1 \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۰/۸/۱۴۰۰

نویز زدایی : روش Regularization

فرض کنید $\vec{x}$ یک سیگنال گرافی روی G است و تا حدودی هموار است. اما سیگنال نویزی $\vec{y}=\vec{x}+\vec{w}$ مشاهده شده است. یکی از روش‌های نویز زدایی، کمینه کردن تابع هزینه‌ای است که در آن از همواری سیگنال روی گراف استفاده شده باشد. منطبق با مباحث قبلی $\vec{x}^H L \vec{x}$ و $\|L\vec{x}\|^2$: کمیت همواری $\vec{x}$ روی گراف را مشخص می‌کنند. در نتیجه، با انتخاب مناسب ضرایب α و β می‌توان از کمینه سازی تابع هزینه زیر برای نویز زدایی استفاده کرد:

$$\delta(\vec{x}) = \tfrac{1}{2}\|\vec{y}-\vec{x}\|^2 + \alpha\, \vec{x}^H L \vec{x} + \beta \|L\vec{x}\|^2$$

$$\vec{x}_{\text{تخمین}} = \vec{x}_{opt} = \underset{\vec{x}}{\arg\min}\ \delta(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \nabla \delta(\vec{x})\Big|_{\vec{x}=\vec{x}_{opt}} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{x}_{opt} = \left(I + 2\alpha L + 2\beta L^H L\right)^{-1} \vec{y}}$$

$$L = U \underbrace{\Lambda}_{\text{قطری}} U^{-1} \Rightarrow I + 2\alpha L + 2\beta L^H L = U \big(\underbrace{I + 2\alpha \Lambda + 2\beta \Lambda^2}_{\text{قطری}} \big) U^{-1}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_{opt} = U \begin{bmatrix} \frac{1}{1+2\alpha\lambda_1+2\beta\lambda_1^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{1+2\alpha\lambda_n+2\beta\lambda_n^2} \end{bmatrix} U^{-1} \vec{y}$$

۲۲، ۸، ۱۴۰۰

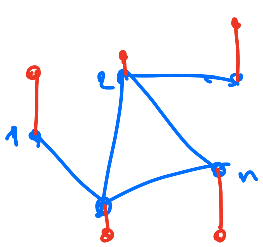
$$\frac{d}{dt}(\vec{q})(i,t) = c\sum_{j=1}^{n} w_{i,j}\left((\vec{q})(j,t)-(\vec{q})(i,t)\right)$$

$$\vec{q}(t)=e^{-cLt}\cdot\vec{q}(0) = U\begin{bmatrix} e^{-c\lambda_1 t} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{-c\lambda_n t}\end{bmatrix}U^{-1}\cdot\vec{q}(0)$$

همانگونه که انتظار می‌رود، تنها مقادیر ویژه $\lambda_i=0$ در $t\to\infty$ نقش دارند، که بردار ویژه‌ی آن‌ها مقادیر روی مولفه‌های همبندی ثابت است. به عبارت بهتر، در $t\to\infty$، مقدار $\vec{q}(t)$ در رئوس یک مولفه‌ی همبندی ثابت است، اما مقادیر $\vec{q}(t)$ در مولفه‌های همبندی متفاوت لزوماً یکسان نیست.

سیگنال‌های تصادفی گرافی

تا کنون دیدیم که گراف مشابه حوزه‌ی زمان برای سیگنال‌های گسسته کلاسیک است. در نتیجه، اگر مقادیر یک سیگنال گرافی به صورت تصادفی (با یک توزیع احتمال مشخص) تعیین شده باشند، هم می‌توان آن را به صورت یک بردار تصادفی تعبیر کرد و هم یک فرآیند تصادفی گرافی.



بر مبنای تعبیر توأم (فرآیند تصادفی گرافی) ، به دنبال نتایجی همانند کلاسیک مانند ایستان بودن هستیم. برای سادگی ایستان بودن به معنای WSS را بررسی می‌کنیم.

ابتدا دقت کنید که اپراتور شیفت گرافی (S) انرژی سیگنال را حفظ نمی‌کند. در نتیجه، انتظار اینکه $\tilde{x}$ و $S\tilde{x}$ توزیع یکسانی داشته باشند و یا ماتریس های کوواریانس برابر، عملی واقع گرایانه نیست (اگر باشد، $S^n\tilde{x}$ نیز توزیع یکسانی با $\tilde{x}$ دارد)

یادآوری: سیگنال گسسته و تصادفی $x[n]$ ایستان از نوع WSS است هرگاه:

i) $\mathbb{E}\{x[n]\} = \mu_x =$ ثابت

ii) $$\forall i,m: \quad \mathbb{E}\left\{(x[i]-\mu_x)(x[m]-\mu_x)^*\right\} = R_x\underbrace{[i-m]}_{\text{تابع خود همبستگی}}$$

تبدیل فوریه تابع خود همبستگی $R_x[\cdot]$ چگالی طیف توان نام داریم:

$$P(e^{j\omega}) \triangleq \sum_{n\in\mathbb{Z}} R_x[n]\, e^{-j\omega n} = \mathrm{DTFT}\left\{R_x[\cdot]\right\}(e^{j\omega})$$

پس می‌توان شرط توأم WSS را برحسب تابع چگالی طیف توان اینگونه بیان کرد:

$$\forall i,m: \quad \mathbb{E}\left\{(x[i]-\mu_x)(x[m]-\mu_x)^*\right\} = \mathrm{shift}_m\left\{\mathrm{DTFT}^{-1}\left\{P(e^{j\cdot})\right\}\right\}[i]$$

اکنون شیفت‌های wss را در حوزه گراف معادل سازی می‌کنیم؛ نکته کلیدی این است که تعبیر shift_m

به صورت شیفت رأسی است (m معادل یک رأس در گراف است). روابط زیر برای شیفت رأسی سیگنال

گرافی $\vec{x}$ نسبت به رأس m یادآوری می‌شود:

$$\vec{x}_m = \text{shift}_m\{\vec{x}\} \triangleq \vec{x} \circledast_G \vec{\delta}_m$$

$$\forall i: \quad (\vec{x}_m)(i) = \sum_{k=1}^{n} (\vec{x})(k) \left(\sum_{j=1}^{n} U_{i,j} \cdot \bar{U}_{k,j} \cdot \bar{U}_{m,j} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\hat{\vec{x}})(j) \quad U_{i,j} \quad \bar{U}_{m,j}$$

$$\Longrightarrow \vec{x}_m = U \cdot \text{diag}(\hat{\vec{x}}) \cdot \left(\text{ستون } m \text{ ام ماتریس } U^{-1} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n] = U \cdot \text{diag}(\hat{\vec{x}}) \cdot U^{-1}}$$

۱۴۰۰ ,۸ ,۲۴

تعریف: سیگنال گرافی تصادفی $\vec{x}$ روی گراف G ایستان از نوع WSS است (GWSS) هرگاه:

i) $\mathbb{E}\left\{(\vec{x})(i)\right\} = \mu_x =$ ثابت ، بردار درجه مؤلفه تشخیص است $\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$

یا $\mathbb{E}\left\{(\vec{x})(i)\right\} = 0 = \mu_x$

ii) $\exists\ \vec{P}_x =$ چگالی طیف توان سیگنال $\vec{x}$ روی G ،

$$\forall\, i,m:\quad \mathbb{E}\left\{\left((\vec{x})(i)-\mu_x\right)\overline{\left((\vec{x})(m)-\mu_x\right)}\right\} = \sum_{j=1}^{n} (\vec{P}_x)(j)\, U_{ij}\, \overline{U_{mj}}$$

نکته: شرط (i) برای این است که بردار $\vec{x}$ ، تمام تشخیص یافته‌های راس آن میانگین یکسان داشته باشند:

$$[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n] = U \cdot \operatorname{diag}(\hat{\vec{x}})\ U^{-1}$$

$$\Rightarrow [\mathbb{E}\{\vec{x}_1\}, \dots, \mathbb{E}\{\vec{x}_n\}] = U \cdot \operatorname{diag}\left(\mathbb{E}\{\hat{\vec{x}}\}\right) \cdot U^{-1}$$

$$= U \cdot \operatorname{diag}\left(U^{-1}\,\mathbb{E}\{\vec{x}\}\right) \cdot U^{-1}$$

$$\mathbb{E}\{\vec{x}_1\} = \dots = \mathbb{E}\{\vec{x}_n\} \Rightarrow \operatorname{rank}\left([\mathbb{E}\{\vec{x}_1\}, \dots, \mathbb{E}\{\vec{x}_n\}]\right) \leq 1$$

$\Rightarrow$ $U^{-1}\mathbb{E}\{\vec{x}\}$ حداکثر 1 درایه ناصفر دارد

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{E}\{\vec{x}\} = \vec{0} \quad \checkmark \\ \text{یا} \\ \mathbb{E}\{\vec{x}\} = \alpha \underbrace{\vec{v}_i}_{\text{ستون } i \text{ ام } U} \quad \alpha \neq 0 \end{cases} \Rightarrow U^{-1}\mathbb{E}\{\vec{x}\} = \alpha \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow \text{درایه } i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow U^{-1}\,\mathrm{diag}\left(U^{-1}\mathbb{E}\{\vec{x}\}\right) U = \alpha \begin{bmatrix} U^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \left(\text{سطر } i \text{ ام } U\right)^H \left(\text{سطر } i \text{ ام } U\right)$$

$$\alpha \left(\text{سطر } i \text{ ام } U\right)\left(\text{سطر } i \text{ ام } U\right)^H = \text{ماتریسی با ستون‌های یکسان} \Rightarrow U_{i1} = \cdots = U_{in} \quad \checkmark$$

---

* اگر اپراتور شیفت گراف توسط L تعریف شده باشد، بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ یکی از بردارهای ویژه L خواهد بود. در نتیجه، میانگین $\vec{x}$ می‌تواند غیر صفر باشد.

---

* اگر $\vec{x}$ را به صورت یک بردار تصادفی نگاه کنیم، ماتریس کوواریانس آن عبارت است از:

$$\Sigma_x = \mathbb{E}\left\{ \left(\vec{x} - \mathbb{E}\{\vec{x}\}\right)\left(\vec{x} - \mathbb{E}\{\vec{x}\}\right)^H \right\}$$

$$GWSS \Longrightarrow \Sigma_x = U \cdot diag(\vec{P}_x) \cdot U^{-1}$$

$\Longrightarrow$ Σ_x هم توسط ستون‌های U قطری می‌شود

$$\Longrightarrow \Sigma_x \cdot S = S \cdot \Sigma_x$$

ماتریس کوواریانس با ماتریس شیفت جابجا می‌شود

* در برخی مراجع، از ابتدا تعریف GWSS را به صورت جابجایی Σ_x و S تعریف می‌کنند.

* به وضوح حالت $\Sigma_x = I$ برای هر S (هر گراف و هر نوع تعریف اپراتور شیفت) خواص مورد نظر را دارد. سیگنال تصادفی با $\Sigma_x = I$ معمولاً به نام نویز سفید گرافی شناخته می‌شود.

ساعت کلاس حل تمرین: شنبه‌ها $13:30 - 15:00$

۲۹ / ۸ / ۱۴۰۰

فیلتر کردن یک سیگنال تصادفی WSS

$$\vec{x} \longrightarrow \boxed{\hat{\vec{h}}} \longrightarrow \vec{y}$$

$$\vec{x} = \text{WSS}, \quad \mathbb{E}\{\vec{x}\} = \begin{bmatrix} \mu_x \\ \vdots \\ \mu_x \end{bmatrix}, \quad \Sigma_x = U \cdot \text{diag}(\vec{p}_x) \cdot U^{-1}$$

$$\vec{y} = U \, \text{diag}(\hat{\vec{h}}) \, U^{-1} \, \vec{x} \Rightarrow \mathbb{E}\{\vec{y}\} = U \cdot \text{diag}(\hat{\vec{h}}) \cdot U^{-1} \cdot \underbrace{\mathbb{E}\{\vec{x}\}}_{\begin{bmatrix} \mu_x \\ \vdots \\ \mu_x \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\{\vec{y}\} = U \cdot \text{diag}(\hat{\vec{h}}) \begin{bmatrix} \sqrt{n}\,\mu_x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} (\hat{\vec{h}})(1)\,\sqrt{n}\,\mu_x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= (\hat{\vec{h}})(1) \begin{bmatrix} \mu_x \\ \vdots \\ \mu_x \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_y = \mathbb{E}\left\{ (\vec{y} - \mathbb{E}\{\vec{y}\})(\vec{y} - \mathbb{E}\{\vec{y}\})^H \right\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{ U \cdot \text{diag}(\hat{\vec{h}}) \cdot U^{-1} (\vec{x} - \mathbb{E}\{\vec{x}\})(\vec{x} - \mathbb{E}\{\vec{x}\})^H \cdot U \cdot \text{diag}(\hat{\vec{h}})^H \cdot U^{-1} \right\}$$

$$= U \cdot \text{diag}(\hat{\vec{h}}) \cdot U^{-1} \cdot \underbrace{\Sigma_x}_{U \, \text{diag}(\vec{p}_x) \, U^{-1}} \cdot U \, \text{diag}(\hat{\vec{h}})^H \cdot U^{-1}$$

$$= U \, \text{diag}(\hat{\vec{h}}) \, \text{diag}(\vec{p}_x) \, \text{diag}(\hat{\vec{h}})^H \cdot U^{-1}$$

$\Leftarrow$ $\vec{y}$ هم یک سیگنال WSS روی گراف است. همچنین داریم:

$$\forall\ 1 \leq i \leq n : \quad (\vec{P}_y)(i) = (\vec{P}_x)(i)\ |(\hat{\vec{h}})(i)|^2$$

نکته: اگر $\vec{x}$ یک سیگنال تصادفی گرافی از نوع WSS روی G باشد، تبدیل فوریه آن $\hat{\vec{x}}$ یک بردار ناهمبسته است.

$$\vec{x} = WSS \Longrightarrow \mathbb{E}\left\{(\vec{x} - \mathbb{E}\{\vec{x}\})(\vec{x} - \mathbb{E}\{\vec{x}\})^H\right\} = \Sigma_x = U \cdot diag(\vec{P}_x) \cdot U^{-1}$$

$$\hat{\vec{x}} = U^{-1}\ \vec{x} \Longrightarrow$$

$$\hat{\vec{x}} \text{ ماتریس کوواریانس } = \mathbb{E}\left\{(\hat{\vec{x}} - \mathbb{E}\{\hat{\vec{x}}\})(\hat{\vec{x}} - \mathbb{E}\{\hat{\vec{x}}\})^H\right\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{U^{-1}(\vec{x} - \mathbb{E}\{x\})(\vec{x} - \mathbb{E}\{x\})^H\ U\right\}$$

$$= U^{-1} \cdot \underbrace{\Sigma_x}_{U \cdot diag(\vec{P}_x) U^{-1}} \cdot U = diag(\vec{P}_x)$$

مثال (wiener filter)

فرض کنید $\vec{x}$ یک سیگنال GWSS با Σ_x معلوم و $\mu_x=0$ باشد و $\vec{w}$ یک نویز سفید گوسی

با $\Sigma_w=\sigma^2 I$, $\mu_w=0$ مستقل از $\vec{x}$ باشد. اگر $\vec{y}=\vec{x}+\vec{w}$ روی گراف ما داده شده باشد

می‌خواهیم بهترین نحوه فیلتر کردن $\vec{y}$ برای بازیابی $\vec{x}$ را به دست آوریم:

$$\vec{x} \rightarrow \Sigma_x = U \cdot \mathrm{diag}(\vec{p}_x) \cdot U^{-1} \qquad \vec{w} \rightarrow \Sigma_w = \sigma^2 I$$

$$\vec{y} \rightarrow \boxed{\hat{\vec{h}}} \rightarrow \vec{x}_{est}$$

$$\hat{\vec{h}}_{opt} = \arg\min_{\hat{\vec{h}}} \underbrace{\mathbb{E}\left\{ \| \vec{x} - \vec{x}_{est} \|^2 \right\}}_{MSE}$$

$$\Sigma_y = \mathbb{E}\left\{ (\vec{y} - \mathbb{E}\{\vec{y}\})(\vec{y} - \mathbb{E}\{\vec{y}\})^H \right\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{ \left((\vec{x} - \mathbb{E}\{\vec{x}\}) + (\vec{w} - \mathbb{E}\{\vec{w}\}) \right) \left((\vec{x} - \mathbb{E}\{\vec{x}\}) + (\vec{w} - \mathbb{E}\{\vec{w}\}) \right)^H \right\}$$

$$= \Sigma_x + \Sigma_w + 2\,\mathrm{Re}\left\{ \underbrace{\mathbb{E}\left\{ (\vec{x} - \mathbb{E}\{\vec{x}\})(\vec{w} - \mathbb{E}\{\vec{w}\})^H \right\}}_{0} \right\}$$

$$= \Sigma_x + \Sigma_w = U^{-1} \cdot \left(\mathrm{diag}(\vec{p}_x) + \sigma^2 I \right) \cdot U$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left\{ \hat{\vec{y}} \, \hat{\vec{y}}^H \right\} = \operatorname{diag}(\vec{p}_x) + \sigma^2 I$$

$$MSE = \mathbb{E}\left\{ \left\| U \hat{\vec{x}} - U \operatorname{diag}(\hat{\vec{h}}) \underbrace{U^{-1} \vec{y}}_{\hat{\vec{y}}} \right\|^2 \right\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{ \left\| U \left(\hat{\vec{x}} - \operatorname{diag}(\hat{\vec{h}}) \hat{\vec{y}} \right) \right\|^2 \right\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{ \left\| \hat{\vec{x}} - \operatorname{diag}(\hat{\vec{h}}) \hat{\vec{y}} \right\|^2 \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left\{ \left| (\hat{\vec{x}})(i) - (\hat{\vec{h}})(i) \, (\hat{\vec{y}})(i) \right|^2 \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial (\hat{\vec{h}})(i)} MSE = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left\{ \overline{(\hat{\vec{y}})(i)} \left((\hat{\vec{x}})(i) - (\hat{\vec{h}}_{opt})(i) \, (\hat{\vec{y}})(i) \right) \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\hat{\vec{h}}_{opt})(i) = \frac{\mathbb{E}\left\{ \overline{(\hat{\vec{y}})(i)} \cdot (\hat{\vec{x}})(i) \right\}}{\mathbb{E}\left\{ \overline{(\hat{\vec{y}})(i)} \cdot (\hat{\vec{y}})(i) \right\}}$$

$$= \frac{\mathbb{E}\left\{ \overline{(\hat{\vec{x}})(i)} \cdot (\hat{\vec{x}})(i) \right\}}{(\vec{p}_x)(i) + \sigma^2} = \boxed{\frac{(\vec{p}_x)(i)}{(\vec{p}_x)(i) + \sigma^2}}$$

۱۴۰۰/۹/۱

تعیین و یا دگرگونی گراف

تحلیل و پردازش گرافی براساس وجود گراف زمینه پی‌ریزی شده است. در نتیجه، قبل از استفاده از این ابزارها نیاز است تا گراف مورد نظر مشخص شود. با توجه به کاربردهای مختلف GSP، یکی از سه رویکرد زیر برای مشخص کردن گراف مورد استفاده قرار می‌گیرد:

الف) هنگامی که داده‌های مورد نمایش روی گراف در یک ساختار هندسی مشخص تولید شده باشند، تشکیل گراف معمولاً براساس موقعیت و فاصله سنسورها صورت می‌گیرد. مثلاً داده‌های مربوط به دما، آلودگی هوا و ... که در سنسورهایی با مکان‌های مشخص ثبت شده‌اند.

ب) هنگامی که تعامل بین اجزا به صورت پیش‌فرض از یک شبکه خاص تبعیت کند، گراف مورد نظر به وضوح باید منطبق بر همین شبکه اختیار شود. شبکه‌های کامپیوتری، شبکه‌های اجتماعی و مدارهای الکتریکی از مثال‌های این دسته هستند.

پ) زمانی که اجزا سیگنال نه از ساختار مکانی خاصی اقتباس شده‌اند و نه از شبکه‌ای پیش‌فرض، گراف مورد نظر براساس شباهت اجزا تخمین زده می‌شود. مثال پردازش تصویر با ابزارهای گرافی از این دسته است.

* تعیین گراف براساس موقعیت

اگر هر سنسور متناظر با یک رأس گراف باشد و $\vec{r}_i$ بردار موقعیت مکانی سنسور i باشد، فاصله بین سنسورها رابطه عکس با وزن آنها دارد:

$$d_{i,j} \triangleq \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|_2 =$$ فاصله سنسور i از j

وزن یال بین رئوس i و j:

$$w_{i,j} \underset{i\neq j}{=} \begin{cases} e^{-\left(\frac{d_{i,j}}{\tau}\right)^2}, & d_{i,j} \leq D \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

← رایج‌ترین نحوه تعیین گراف

τ و D دو ثابت قابل کنترل هستند.

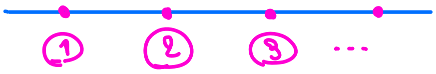
حالت‌های دیگر برای تعیین وزن‌ها عبارتند از:

$$w_{i,j} \underset{i\neq j}{=} \begin{cases} \frac{1}{d_{i,j}}, & d_{i,j} \leq D \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$w_{i,j} \underset{i\neq j}{=} \begin{cases} e^{-\frac{d_{i,j}}{\tau}}, & d_{i,j} \leq D \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$w_{i,j} \underset{i\neq j}{=} \begin{cases} 1, & d_{i,j} \leq D \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

مثال: فرض کنید سنسورهای آلودگی هوا روی یک خط و در فواصل برابر قرار گرفته باشند؛ سنسور i در موقعیت i روی این خط است. اکنون گراف وزن دار



با یک رابطه

$$w_{i,j} = \begin{cases} e^{-\left(\frac{d_{i,j}}{\tau}\right)^2}, & d_{i,j} \le D \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases} \qquad i \neq j$$

تشکیل می دهیم. اگر سیگنال گرافی مربوط با مقادیر ثبت شده آلودگی هوا را با یک فیلتر گرافی

$$\vec{x} \longrightarrow \boxed{W^0 + W^1} \longrightarrow \vec{y}$$

$W^0 + W^1$ فیلتر کنیم داریم:

$$\Rightarrow \quad \vec{y} = (W^0 + W^1)\,\vec{x} \;\Rightarrow\; (\vec{y})(i) = (\vec{x})(i) + \sum_{j=1}^{n} w_{i,j}\,(\vec{x})(j)$$

$$= \sum_{\substack{j \\ |i-j| \le D}} e^{-\frac{|i-j|^2}{\tau^2}}\,(\vec{x})(j)$$

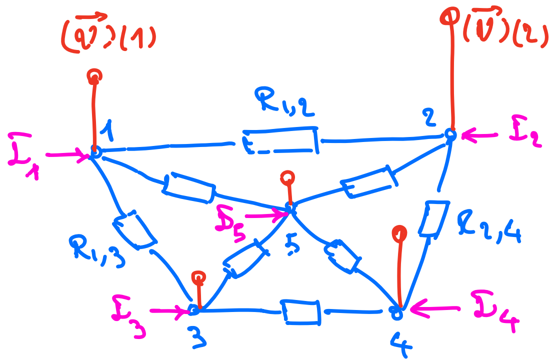
رابطه فوق مانند یک فیلتر گوسی FIR با طول $2\lfloor D \rfloor + 1$ برای سیگنال های گسسته کلاسیک عمل می کند.

- گراف های از پیش تعیین شده

با بررسی چند مثال، مواردی را بررسی می کنیم که گراف مورد نظر به دلیل شرایط فیزیکی و یا خواص مسئله از پیش تعیین شده است.

← مدار های الکتریکی مقاومتی :

مدار مقاومتی روبه رو را در نظر بگیرید :



گره های مدار هر کدام معادل با یک رأس گراف هستند.

هر گره توسط مقاومتی به سایر گره ها متصل شده است. همچنین فرض می کنیم در هر گره، یک منبع جریان با جهت فرضی ورودی وجود دارد (اگر خواستیم مقدار ۰ می گذاریم). سیگنال گرافی عبارت است از مقدار ولتاژ در هر گره. در این مثال، ماتریس وزن گراف را توسط Conductance بین گره ها تعریف می کنیم:

$$w_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{R_{ij}}, & \text{اگر } i,j \text{ متصل باشند} \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

<u>KCL</u> : $\forall i:$

$$I_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j,i \text{ متصل باشند}}}^{n} \frac{(\vec{v})(i) - (\vec{v})(j)}{R_{i,j}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} w_{i,j} \left((\vec{v})(i) - (\vec{v})(j) \right)$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} w_{i,j} \right)}_{d_i} (\vec{v})(i) - \begin{bmatrix} w_{i,1}, & \dots, & w_{i,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\vec{v})(1) \\ \vdots \\ (\vec{v})(n) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}}_{\vec{I}} = D \cdot \vec{v} - W \cdot \vec{v} = \underbrace{(D - W)}_{L} \, \vec{v}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{I} = \mathcal{L} \cdot \vec{v}}$$

برای بدست آوردن $\vec{v}$ باید وارون $\mathcal{L}$ را در $\vec{I}$ ضرب کنیم؛ امّا $\mathcal{L}$ وارون پذیر نیست. در حقیقت

$\mathcal{L}$ به تعداد مولفه های همبندی مقدار ویژه‌ی صفر دارد. به صورت معادل، برای بدست آوردن $\vec{v}$، برای

هر مولفه همبندی یک مرجع سنجش ولتاژ (مثلاً "زمین") لازم داریم.

$$\mathcal{L} = U \Lambda U^{-1} \Rightarrow \vec{I} = U \Lambda U^{-1} \vec{v} \Rightarrow \underbrace{U^{-1} \vec{I}}_{\hat{\vec{I}}} = \Lambda \underbrace{U^{-1} \vec{v}}_{\hat{\vec{v}}}$$

۱۴۰۰/۹/۶

ارجاعات در شبکه اینترنت

Link های که در صفحات اینترنتی وجود دارد باعث می‌شود که با یک کلیک بتوان از یک صفحه به صفحه‌ای دیگر وارد شد. اگر به ازای هر صفحه (Document) یک رأس در نظر بگیریم و اگر Link ای از صفحه i به صفحه j وجود دارد، رأس متناظر با صفحه i را به صورت جهت‌دار به رأس متناظر با صفحه j وصل کنیم، با گرافی جهت‌دار در خصوص اینترنت مواجه می‌شویم. البته، این گراف در طول زمان تغییر می‌کند.

یکی از معیارهای Google در رتبه‌بندی (sort) نتایج جستجو مربوط به همین گراف است.

Page Rank

رتبه صفحه الگوریتمی است برای نسبت دادن اعداد به هر صفحه اینترنتی براساس ارجاعاتی که به آن صفحه می‌شود. این الگوریتم در سال 1998 توسط بنیانگذاران Google منتشر شد، اما اولین الگوریتم از نوع خود نیست.

ایده کلی به این صورت است: فرض کنید در مجموع n صفحه اینترنتی داریم. یک کاربر به صورت تصادفی (احتمال $\frac{1}{n}$) یکی از صفحه‌ها را انتخاب می‌کند و از آن پس به صورت تصادفی یکی از Link های داخل صفحه را انتخاب و روی آن کلیک می‌کند و به همین صورت ادامه می‌دهد. احتمال مشاهده

یک صفحه پس از تعداد زیاد کلیک برابر است با PageRank مربوط به آن صفحه.

$$w_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{اگر از صفحه } i \text{ به صفحه } j \text{ یک Link باشد} \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

$$\underbrace{\vec{x}_m}_{n\times 1} =$$ بردار احتمال مشاهده صفحات پس از کلیک m ام

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix} \Rightarrow (\vec{x}_{m+1})(j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_{i,j}}{\sum_{k=1}^{n} w_{i,k}} (\vec{x}_m)(i)$$

$$\Rightarrow \vec{x}_{m+1} = (D^{-1}W)^T \vec{x}_m$$

وقتی $m \to \infty$ (تعداد کلیک زیاد)، به دنبال بردار $\vec{x}$ هستیم که در رابطه‌ی

$$\vec{x} = (D^{-1}W)^T \vec{x}$$

صدق کند. در نتیجه، به دنبال بردار ویژه $(D^{-1}W)^T$ متناظر با مقدار ویژه $\lambda = 1$ هستیم:

$$D^{-1}W \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11}+\cdots+w_{1n} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_{n1}+\cdots+w_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & & \\ w_{n1} & \cdots & w_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} w_{11}+\cdots+w_{1n} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_{n1}+\cdots+w_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w_{11}+\cdots+w_{1n} \\ \vdots \\ w_{n1}+\cdots+w_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Leftarrow$ بردار $\begin{bmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{bmatrix}$ برای $D^{-1}W$ بردار ویژه متناظر با $\lambda=1$ است

$\Leftarrow$ $D^{-1}W$ مقدار ویژه $\lambda=1$ دارد

$\Leftarrow$ $(D^{-1}W)^T$ " " " "

نکته: به کمک قضیه Gershgorin می‌توان نشان داد که تمام مقادیر ویژه $(D^{-1}W)^T$ اندازه‌ای کمتر یا مساوی ۱ دارند. در نتیجه، $\lambda=1$ بزرگترین مقدار ویژه آن است. به شکل روی روش iterative پیشنهادی مسئله به Power method عمل می‌کند و به سرعت به سمت بردار ویژه متناظر با $\lambda=1$ همگرا می‌شود.

نکته: ورژن فعلی PageRank کمی متفاوت است: کاربر در هر مرحله با احتمال d به کلیک کردن ادامه می‌دهد و به احتمال $1-d$ در صفحه فعلی به طور دائم استقرار می‌شود. اگر $(\vec{x})(j)$ احتمال خاتمه مراحل در صفحه j باشد داریم:

$$(\vec{x})(j) = \frac{1-d}{n} + d\sum_{i=1}^{n} \frac{w_{i,j}}{\sum_{k=1}^{n} w_{i,k}} (\vec{x})(i)$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix}\frac{1-d}{n}\\ \vdots \\ \frac{1-d}{n}\end{bmatrix} + d\,(D^{-1}W)^T\,\vec{x}$$

$$= \left(\frac{1-d}{n}\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix} + d(D^{-1}W)^T\right)\vec{x}$$

در نتیجه، به دنبال بردار ویژه متناظر با $\lambda = 1$ در ماتریس

$$\frac{1-d}{n} \mathbb{1}_{n\times n} + d\,(D^{-1}W)^T$$

هستیم (استدلال مشابه برای وجود این بردار).

← به طور معمول $d = 0.85$ اختیار می‌شود.

ارائه پروژه‌ها "احتمالاً" ۱۲ و 13 بهمن

گروه‌های "ترجیحاً" ۲ نفره

مقالات ۳ سال اخیر

۱۴۰۰/۹/۸

* تعیین گراف براساس شباهت اجزا

در اسلاید قبل، گراف مستقل از سیگنال تعیین می‌شد. روش دیگری که اخیراً محبوبیت بیشتری پیدا کرده است استفاده از سیگنال برای تعیین گراف است. به صورت شهودی، توقع داریم رأس‌هایی که مقدار سیگنال در آنها مشابه است با یال‌های قوی‌تری به یکدیگر متصل باشند. استفاده از شباهت می‌تواند همراه یا بدون همراهی موقعیت مکانی و ... در تعیین گراف کارآمد باشد.

مثال: فرض کنید می‌خواهیم پیکسل‌های یک تصویر را به عنوان رئوس یک گراف در نظر بگیریم و سیگنال گرافی عبارت است از مقدار (intensity) هر پیکسل. موقعیت مکانی پیکسل‌ها می‌تواند برای تعیین گراف استفاده شود، اما می‌توان از مقادیر پیکسل‌ها نیز برای این منظور استفاده کرد:

$(\vec{x})(i) =$ مقدار پیکسل i ام

$d_{i,j} =$ فاصله مکانی (اقلیدسی) پیکسل‌های i و j

$$w_{i,j} = \begin{cases} e^{-\frac{|(\vec{x})(i) - (\vec{x})(j)|^2}{\tau^2}}, & d_{i,j} \leq D \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

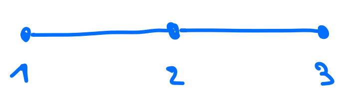
در حالت فوق، پیکسل های دور از هم (مکانی) به یکدیگر متصل نخواهند بود و وزن یال بین پیکسل‌های نزدیک به هم نیز نسبت عکس با تفاضل مقادیر پیکسل ها دارد.

فرض می کنیم در هر پیکسل چند مقدار برای سیگنال داشته باشیم (مثلاً بردار RGB و یا چند تصویر متفاوت)، می توان روش فوق را به صورت زیر بهبود داد:

$$w_{i,j} = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{\sigma^2} \dfrac{\sum_{m=1}^{M} \left| (\vec{x})(i;m) - (\vec{x})(j;m) \right|^2}{\sqrt{\sum_{m=1}^{M} \left| (\vec{x})(i;m) \right|^2} \sqrt{\sum_{m=1}^{M} \left| (\vec{x})(j;m) \right|^2}} \right), & d_{i,j} \leq D \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

← استفاده از Correlation

همبستگی بین مقادیر سیگنال در رئوس مختلف: فرض کنید در هر رأس بردار داده داشته باشیم، معیاری از شباهت بین رئوس فراهم می کند که می توانند برای تعیین گراف استفاده شود. اما معمولاً با این روش یال‌های بیشتری از آنچه نیاز است ایجاد می شود. برای توجیه این موضوع گراف زیر را در نظر بگیرید:



رأس ① به ② و رأس ② به ③ متصل است، اما ① به ③ متصل نیست. با توجه به اتصالات

گراف، توقع داریم که بردار سیگنال رئوس ① و ②، همین طور ②، ③ به یکدیگر شبیه باشند. در نتیجه،

بردار سیگنال ① و ③ هم تا حدی به هم شبیه خواهند بود و همبستگی دارند. در نتیجه، اگر یال‌های گراف

را بر اساس میزان همبستگی تعیین کنیم، رئوس ① و ③ هم به یکدیگر متصل خواهند شد.

$$X_{n\times m} = \begin{bmatrix} (\vec{x})(1;1) & \cdots & (\vec{x})(1;m) \\ \vdots & & \vdots \\ (\vec{x})(n;1) & \cdots & (\vec{x})(n;m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{r}_n^{\,T} \end{bmatrix}$$

هر سطر از ماتریس X بردار داده متعلق به یک رأس است و هر ستون یک سیگنال گرافی تک‌بعدی.

شباهت بین رئوس اساساً با ضرب داخلی سطرها ($\vec{r}_i$) است. برای یادگیری گراف، به جای استفاده

مستقیم از correlation، به صورت غیرمستقیم این کار را انجام می‌دهیم: اگر وزن بین رئوس i و j

برابر w_{ij} باشد، توقع داریم $\sum_{j\neq i} w_{ij}\vec{r}_j$ تخمینی از $\vec{r}_i$ ارائه کند.

پس $\|\vec{r}_i - \sum_{i\neq j} w_{ij}\vec{r}_j\|^2$ باید کوچک باشد. دقت کنید که در سطح $\|\cdot\|^2$ عملاً ضرب داخلی بردارهای

$\vec{r}_j$ و $\vec{r}_i$ ظاهر می‌شوند. با در نظر گرفتن کل رئوس، می‌بینیم که $\|X_{n\times m} - W_{n\times n}X_{n\times m}\|^2$ باید کوچک

باشد. در نتیجه، می‌خواهیم عبارت $\|(I-W)X\|^2$ را با فرض معلوم بودن X روی W با شرط

صفر بودن قطر اصلی W و اینکه $W = W^T$ [illegible] کنیم. برای جلوگیری از ایجاد تعداد یال زیاد در گراف، علاوه بر شرایط فوق، تنک بودن W را نیز تشویق می‌کنیم:

$$W_{est} = \underset{W_{n\times n}}{\arg\min} \; \| (I - W) X \|^2 + \alpha \underbrace{\sum_{i,j} |w_{i,j}|}_{\|W\|_1}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} w_{i,i} = 0 , & \forall i \\ w_{i,j} \geq 0 , & \forall i,j \\ w_{i,j} = w_{j,i} , & \forall i,j \end{cases}$$

اگر شرط $W = W^T$ وجود نداشت، می‌توانستیم هر سطر W را به صورت جداگانه تخمین بزنیم، زیرا تابع هزینه به صورت جدا پذیر است. در برخی مدل‌ها برای کاهش حجم محاسبات، ابتدا شرط $W = W^T$ را در نظر نمی‌گیرند و پس از به دست آمدن W از بهینه‌سازی فوق، از $W_{sym} = \frac{W + W^T}{2}$ استفاده می‌کنند.

۱۴۰۰/۹/۱۳

← استنباط گراف همواری

اساساً یک مدل فرض کنید که ماتریس مشاهدات $X = \begin{bmatrix} (\vec{x})(1;1) & \cdots & (\vec{x})(1;m) \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{x}(n;1) & \cdots & (\vec{x})(n;m) \end{bmatrix}$ از روش گراف مشخص

باشد. در حالت کلی، مشاهدات می‌توانند نویزی باشند. همچنین، قبل از آغشته شدن داده با نویز، احتمالاً

سیگنال روی گراف تا حد خوبی هموار بوده است. اگر ماتریس $Y_{n \times m}$ بیانگر داده‌های قبل از آغشته

شدن به نویز باشد، $Trace(Y^T L Y)$ همواری داده‌ها روی گراف با ماتریس لاپلاسین L را نشان

می‌دهد. همچنین، انتظار داریم فاصله X, Y از یکدیگر خیلی زیاد نباشد:

$$L_{est}, Y_{est} = \underset{L, Y}{\arg\min} \; \| X - Y \|_F^2 + \alpha \, Trace(Y^T L Y) + \beta \| Y \|_F^2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} L = \text{یک ماتریس لاپلاسین معتبر} \\ Trace(L) = n \end{cases}$$

جمله $\| L \|_F^2$ برای محدود کردن فراوانی است! در کل α و β هم باید تنظیم شوند.

یادگیری گراف در GSPBox

یکی از توابع هزینه نسبتاً رایج که در GSPBox هم پیاده شده است (برای یادگیری گراف) عبارت است از:

$$W_{est} = \underset{W_{n\times n}}{\arg\min} \sum_{i,j} \|\vec{x}(i) - \vec{x}(j)\|^2 W_{ij} - \alpha \sum_{i=1}^{n} \log\Big(\sum_{j=1}^{n} W_{ij}\Big) + \frac{\beta}{2} \|W\|_F^2$$

$$\text{s.t.} \quad W = W^T$$

در عبارت فوق، جمله $\log(.)$ کمک می‌کند که گراف همبند نشود (جلوگیری از رأس تکی). همچنین اگر $\beta = 0$، گراف بسیار تنک می‌شود. با افزایش β می‌توان میزان تنکی گراف را کنترل کرد.

نکته: متریکی به نام TCER برای سنجش همواری سیگنال گرافی روی یک گراف در GSPBox تعریف شده است و معمولاً برای سنجش کیفیت یادگیری گراف مورد استفاده قرار می‌گیرد.

شبیه‌سازی سیگنال تصادفی روی گراف:

در موارد زیادی نیاز است تا سیگنالی بر مبنای یک گراف خاص در شبیه‌سازی تولید کنیم. یکی از روش‌های تولید سیگنال استفاده از ایده فیلتری که نویز سفید است. فرض کنید $\vec{w}_{n\times1}$ یک بردار ط.خ.ث (گوسی) باشد و S اپراتور شیفت گراف. سیگنال گرافی $\vec{x}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که

$$S\,\vec{x}_{n\times1} = w_{n\times1}$$

به عبارت بهتر، بردار $\vec{x}$ توسط S سفید می‌شود. باید به این نکته دقت کرد که اگر S ماتریس L یا L_n باشد، وارون‌پذیر نیست. در چنین حالاتی نیاز است که $\vec{w}$ از ابتدا با حجم ۲ تولید شود.

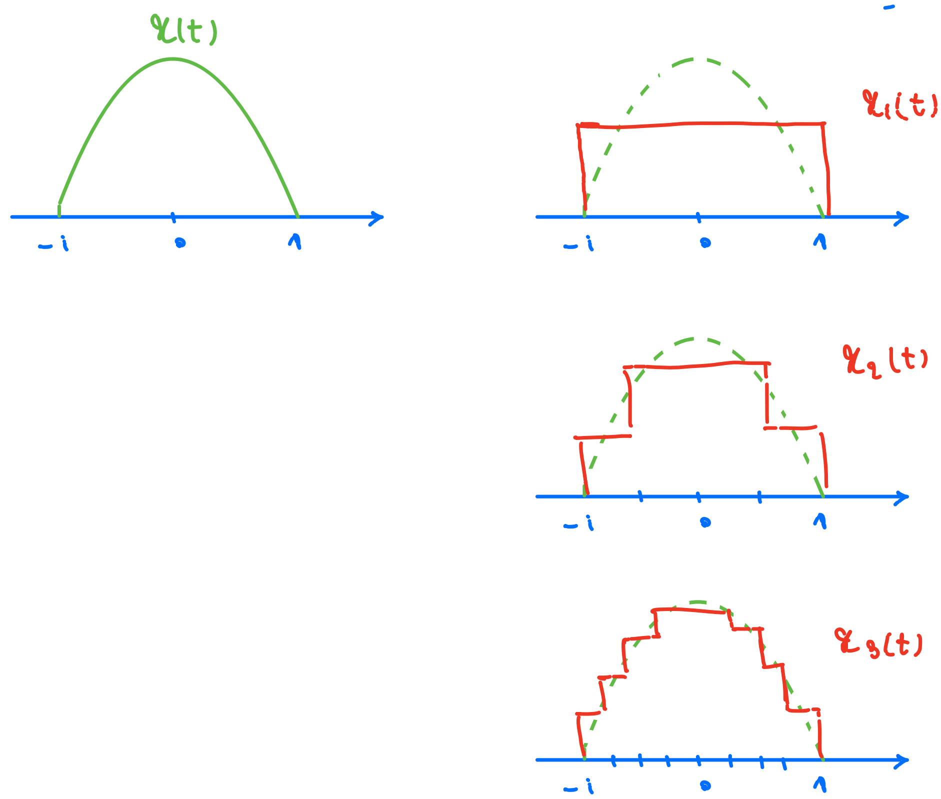
تبدیل موجک گرافی (Spectral Graph wavelet Transform)

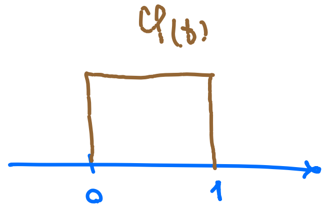
تبدیل فوریه، سیگنال مورد نظر را بر اساس سیگنال‌های ویژه عملگرهای LSI تجزیه می‌کند. با توجه به ساختار سیگنال‌های ویژه معمولاً هر قسمت از تبدیل فوریه از کل اطلاعات مکانی/زمانی حاصل شده است؛ در نتیجه، این تبدیل به صورت موضعی عمل نمی‌کند. به علاوه تکیه‌گاه‌های تبدیل فوریه بر

عملگر Shift است، حال آنکه در بسیاری از کاربردها Scale اهمیت بیشتری دارد. تبدیل موجک (wavelets) خانواده‌ای از تبدیل‌ها برای نمایش سیگنال به صورت موضعی‌تر و با در نظر گرفتن Scale است.

تبدیل موجک کلاسیک (Continuous Wavelet Transform)

سیگنال $x(t)$ و تقریب‌های آن به صورت زیر را در نظر بگیرید:





فرض کنید $\varphi(t) = u(t) - u(t-1)$

در این صورت $x_1(t)$ بهترین تقریب $x(t)$ برحسب پایه‌های $\{\varphi(t-i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ است.

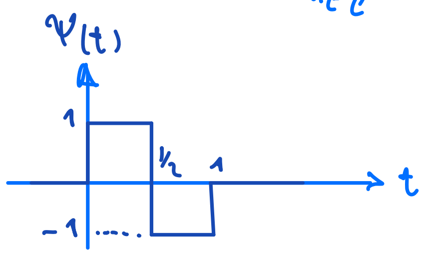
به صورت مشابه، $x_2(t)$ بهترین تقریب $x(t)$ برحسب پایه‌های $\{\sqrt{2}\varphi(2t-i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ و

$x_3(t)$ بهترین تقریب $x(t)$ برحسب پایه‌های $\{\sqrt{2^2}\varphi(2^2t-i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ است. به وضوح با افزایش

k، تقریب $x(t)$ توسط پایه‌های $\{\sqrt{2^k}\varphi(2^kt-i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ بهتر می‌شود.

۱۴۰۰ ,۹ ,۲۰

اگر قصد نمایش $\varphi(t)$ را به صورت تقریبی داشته باشیم، ابتدا $\varphi_1(t)$ را مشخص می‌کنیم و سپس اختلاف $\varphi_2(t)-\varphi_1(t)$ را در ادامه قرار می‌دهیم تا تولید $\varphi_2(t)$ میسر باشد و به همین صورت برای $\varphi_i(t)$ ها. می‌توان نشان داد که توابع $\{\psi(t-i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ که در آن



برای سیگنال های به شکل $\varphi_2(t)-\varphi_1(t)$ تشکیل پایه می‌دهند.

به صورت مشابه $\{\sqrt{2^k}\,\psi(2^k t-i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ برای سیگنال های فضای $\varphi_{k+2}(t)-\varphi_{k+1}(t)$ تشکیل پایه می‌دهد. این نمایش به این معنی است که سیگنال $\varphi(t)$ توسط پایه های

$$\{\varphi(t-i)\}_{i\in\mathbb{Z}} \cup \{\sqrt{2^k}\,\psi(2^k t-i)\}_{\substack{k=0,1,2,\dots \\ i\in\mathbb{Z}}}$$

قابل بیان است. مجموعه این پایه ها برای نمایش $\varphi(t)$ تبدیل موجک نوع Haar نام دارد. توابع φ و ψ به ترتیب Father Wavelet و Mother Wavelet نام دارند.

برای سادگی تعریف می‌کنیم $\psi_{s,i}(t) = \dfrac{\psi(\frac{t-i}{s})}{\sqrt{s}}$ ؛ می‌توان دید که $\psi_{2^{-k},2^{-k}i}(t)$ ها دو به دو

بر یکدیگر (و بر $\psi(t-i)$ ها) عمود هستند.

$$\Rightarrow \text{ضریب } \psi_{2^{-k},2^{-k}i} \text{ در تبدیل موجک } x(t) = \frac{\langle \psi_{2^{-k},2^{-k}i}(t) , x(t) \rangle}{\langle \psi_{2^{-k},2^{-k}i}(t) , \psi_{2^{-k},2^{-k}i}(t) \rangle}$$

دقت کنید که مقدار k ریز و درشت بودن توابع پایه را مشخص می‌کند (scale) در حالی که اندیس i مربوط به shift است. به علاوه، با توجه به طول محدود ψ، هر ضریب wavelet تنها به صورت موضعی به تابع $x(t)$ وابستگی دارد.

در مثال بالا $k=0,1,2,\dots$ در نظر گرفته شده بود، اما در حالت کلی k می‌تواند منفی هم باشد.

تبدیل موجک پیوسته (CWT) با در نظر گرفتن k, i به صورت پیوسته حاصل می‌شود:

$$W_x(s,i) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi_{s,i}(t)}\, x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\psi(\frac{t-i}{s})}}{\sqrt{s}}\, x(t)\,dt$$

تابع دو متغیره $W_x(s,i)$ با در نظر گرفتن $s \in \mathbb{R}^+$ و $i \in \mathbb{R}$، ضرایب تبدیل موجک پیوسته $x(t)$ هستند. دقت کنید که در نمایش جدید، به دلیل پیوستگی s، توابع $\{\psi(t-i)\}$ لحاظ نشده‌اند.

آیا می‌توان $x(t)$ را با دانستن $W_x(s,\tau)$ به صورت یکتا بازسازی کرد؟

← بله، به شرط اینکه $\psi(t)$ از نوع مطلوب باشد.

۲۲/۹/۱۴۰۰

آیا می‌توان $x(t)$ را با دانستن $W_x(s,i)$ به صورت یکتا بازیابی کرد؟

← در صورتی که توابع $\left\{\sqrt{2^k}\,\psi(2^k t - i)\right\}_{k,i\in\mathbb{Z}}$ مستقل خطی باشند، تابع $\tilde{\psi}$ (دوگان ψ)

وجود دارد به طوری که:

$$\langle \tilde{\psi}(t), \psi(t) \rangle = 1 \quad , \quad \langle \tilde{\psi}(t), \sqrt{2^k}\,\psi(2^k t - i) \rangle = 0$$

$$\forall\ (k,i) \neq (0,0)$$

(مثلاً برای $\psi(t)$ که قبلاً اشاره شد، داریم $\tilde{\psi}(t) = \psi(t)$)

به علاوه، با توجه به ساختار توابع خواهیم داشت:

$$\forall\ i,k,i',k' \in \mathbb{Z}: \quad \langle \sqrt{2^k}\,\tilde{\psi}(2^k t - i), \sqrt{2^{k'}}\,\psi(2^{k'} t - i') \rangle = \delta[i-i']\cdot\delta[k-k']$$

اگر $\hat{\psi}(\omega)$ و $\hat{\tilde{\psi}}(\omega)$ به ترتیب تبدیل فوریه توابع $\psi(t)$ و $\tilde{\psi}(t)$ باشند، شرط کافی بازیابی

$x(t)\in L_2(\mathbb{R})$ از روی $W_x(s,i)$ عبارت است از:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\hat{\psi}(\omega)}\cdot \hat{\tilde{\psi}}(\omega)}{|\omega|}\, d\omega < \infty$$

در صورتی که $\tilde{\psi}(t) = \psi(t)$ ، رابطه فوق به صورت زیر ساده می‌شود:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} \, d\omega < \infty$$

شرط $C_\psi < \infty$ ایجاب می‌کند که $\hat{\psi}(0) = 0$, $\lim_{\omega \to \infty} \hat{\psi}(\omega) = 0$. به عبارت بهتر،

تابع $\psi(t)$ مناسب باید میان‌گذر باشد.

در صورتی که شروط لازم روی $\psi(t)$ برقرار باشند، به صورت زیر می‌توان $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$ را از ضرایب

تبدیل موجک پیوسته (CWT) استخراج کرد:

$$x \in L_2(\mathbb{R}) : \quad x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(s,\tau) \, \frac{\tilde{\psi}\left(\frac{t-\tau}{s}\right)}{\sqrt{s}} \, d\tau \, \frac{ds}{s^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi \, \overline{\hat{\psi}(1)}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(s,\tau) \, e^{j \frac{t-\tau}{s}} \, d\tau \, \frac{ds}{s^2}$$

برای تعمیم مفهوم CWT به حالت گسسته، نحوه محاسبه ضرایب wavelet را بر حسب تبدیل فوریه بیان

می‌کنیم. برای سادگی نمایش تعریف می‌کنیم: $\chi_s(t) \triangleq \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{\psi\left(\frac{-t}{s}\right)}$

$$W_x(s,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)}}{\sqrt{s}}\, x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}_s(\tau - t)\, x(t)\, dt$$

$$= (\bar{\psi}_s * x)(\tau) = \mathcal{F}_\omega^{-1}\left\{ \hat{\bar{\psi}}_s(\omega) \cdot \hat{x}(\omega) \right\}(\tau)$$

$$= \boxed{\sqrt{s}\, \mathcal{F}_\omega^{-1}\left\{ \overline{\hat{\psi}(s\omega)} \cdot \hat{x}(\omega) \right\}(\tau)}$$

به بیان دیگر، ضرایب تبدیل موجک در مقیاس s از عبور دادن سیگنال از یک فیلتر میان‌گذر (پهنای طیف براساس s تعیین می‌شود) حاصل می‌شود.

برای تعریف تبدیل موجک در حوزه گراف (SGWT)، از پاسخ فرکانسی فیلتر میان‌گذر شروع می‌کنیم.

فرض کنید $g(x)$ تابعی پیوسته در زمان باشد به گونه‌ای که:

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ C_g = \int_0^{\infty} \frac{|g(x)|^2}{x}\, dx < \infty \end{cases}$$

فیلتر میان‌گذر گرافی Ψ را با پاسخ فرکانسی $\begin{bmatrix} g(\lambda_1) \\ \vdots \\ g(\lambda_n) \end{bmatrix}$ تعریف می‌کنیم، و λ_i ها مقادیر ویژه

ماتریس شیفت گراف هستند. در ادامه فرض کنید ماتریس شیفت گراف L یا L_N است؛ در نتیجه،

$\lambda_1 = 0$ (حالت $\lambda_i \neq 0$ در ادامه ساده‌تر نیز خواهد بود)

برای تعریف تبدیل موجک گرافی لازم است تا scale کردن تابع ψ با متغیر پیوسته s را تعریف کنیم.

با توجه به اینکه $\psi(t/s)$ در حوزه فوریه معادل با $|s| \cdot \hat{\psi}(s\omega)$ است، برای فیلتر گرافی $\vec{\psi}$ نیز چنین عمل می‌کنیم:

$$\vec{\psi}_s \triangleq s \cdot GDFT^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} g(s\lambda_1) \\ \vdots \\ g(s\lambda_n) \end{bmatrix} \right\}$$

در آنالوگ، برای تعریف $\psi_{s,i}(t) = \dfrac{\psi\left(\frac{t-i}{s}\right)}{\sqrt{s}}$ در حوزه گراف نیاز به shift به میزان i/s داریم.

امّا در حوزه گراف، مقدار shift تنها مقادیر صحیح بین 1 تا n می‌تواند باشد. پس تعریف می‌کنیم:

$$\vec{\psi}_{s,i} \triangleq \frac{1}{\sqrt{s}} \, shift_i \left\{ scale_s \left\{ \vec{\psi} \right\} \right\}$$

$s \in \mathbb{R}^+ , \; 1 \leq i \leq n$

$$= \frac{1}{\sqrt{s}} \, shift_i \left\{ s \cdot U \cdot \begin{bmatrix} g(s\lambda_1) \\ \vdots \\ g(s\lambda_n) \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \sqrt{s} \cdot U \begin{bmatrix} g(s\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g(s\lambda_n) \end{bmatrix} U^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{ام} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \sqrt{s} \cdot U \cdot \begin{bmatrix} g(s\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(s\lambda_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{U_{i,1}} \\ \vdots \\ \overline{U_{i,n}} \end{bmatrix} = \vec{\psi}_{s,i}$$

۱۴۰۰/۹/۲۷

$$\vec{\psi}_{s,i} = \sqrt{s}\cdot U \begin{bmatrix} g(s\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(s\lambda_n)\end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{i,1} \\ \vdots \\ \bar{u}_{i,n}\end{bmatrix}$$

ضرایب تبدیل موجک به صورت زیر قابل تعریف هستند:

$s>0 \ , \ 1\le i\le n$

$$\underbrace{W_f(s}_{\text{scale}};\underbrace{i}_{\text{shift}}) \triangleq \langle \vec{\psi}_{s,i} , \vec{f} \rangle = \vec{\psi}_{s,i}^{H} \cdot \vec{f}$$

$$= \sqrt{s}\, \begin{bmatrix} u_{i,1} & \cdots & u_{i,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{g}(s\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{g}(s\lambda_n)\end{bmatrix} U^{-1} \vec{f}$$

$$= \sqrt{s}\ \ GDFT^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} g(s\lambda_1) \\ \vdots \\ g(s\lambda_n)\end{bmatrix} \odot GDFT\{\vec{f}\} \right\}(i)$$

ضرب درایه به درایه

مولفه i ام تبدیل فوریه معکوس

تبدیل معکوس SGWT

با فرض تک و $\lambda_1=0$ و ($g(0)=0$) می دانیم که مولفه اول طیفی همه $\vec{\psi}_{s,i}$ ها برابر ۰ است.

در نتیجه، مولفه مرتبط با کوچکترین فرکانس در محاسبه تمام ضرایب موجک حذف شده است و قابل بازیابی

نکته ! بهترین بازیابی ممکن برای سیگنال دکوله $\vec{x}$ از روی ضرایب تبدیل موجک عبارت است از :

$$\vec{x}_0 = \vec{x} - \left\langle \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ \vdots \\ U_{n,1} \end{bmatrix} , \vec{x} \right\rangle \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ \vdots \\ U_{n,1} \end{bmatrix}$$

با الهام گرفتن از رابطه معکوس CWT داریم :

$$\frac{1}{C_g} \int_0^\infty \sum_{i=1}^{n} \underbrace{W_{x}(s;i)}_{\text{اسکالر}} \underbrace{\vec{\psi}_{s,i}}_{\text{بردار}} \frac{ds}{s^2}$$

$$= \frac{1}{C_g} \int_0^\infty \sum_{i=1}^{n} \Bigg(\underbrace{\sqrt{s}\, U \begin{bmatrix} g(s\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(s\lambda_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_{i,1} \\ \vdots \\ \bar{U}_{i,n} \end{bmatrix}}_{\vec{\psi}_{s,i}} \Bigg) \Bigg(\underbrace{\sqrt{s} \begin{bmatrix} U_{i,1} \cdots U_{i,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{g}(s\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{g}(s\lambda_n) \end{bmatrix} U^{-1} \vec{x}}_{W_{x}(s;i)} \Bigg) \frac{ds}{s^2}$$

$$= \frac{1}{C_g} \int_0^\infty U \begin{bmatrix} g(s\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(s\lambda_n) \end{bmatrix} \Bigg(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \bar{U}_{i,1} \\ \vdots \\ \bar{U}_{i,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,1} , \cdots , U_{i,n} \end{bmatrix}}_{I} \Bigg) \begin{bmatrix} \bar{g}(s\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{g}(s\lambda_n) \end{bmatrix} U^{-1} \vec{x} \frac{ds}{s}$$

$$= \frac{1}{C_g} U \left(\int_0^\infty \begin{bmatrix} |g(s\lambda_1)|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |g(s\lambda_n)|^2 \end{bmatrix} \frac{ds}{s} \right) U^{-1} \vec{x}$$

$$= \frac{1}{C_g} U \begin{bmatrix} \int_0^\infty \frac{|g(s\lambda_1)|^2}{s} ds & & \\ & \ddots & \\ & & \int_0^\infty \frac{|g(s\lambda_n)|^2}{s} ds \end{bmatrix} U^{-1} \vec{x}$$

$$= \frac{1}{c_g} U \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & c_g & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_g \end{bmatrix} U^{-1} \vec{x}$$

$$= \vec{x} - U \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix} U^{-1} \vec{x} = \vec{x} - \left\langle \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ \vdots \\ U_{n,1} \end{bmatrix}, \vec{x} \right\rangle \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ \vdots \\ U_{n,1} \end{bmatrix} = \vec{x}_0 \quad \checkmark$$

حالت $s \to 0$

در حالت پیوسته، هنگامی که $s \to 0$، توابع پایه تبدیل موجک که عبارتند از $\psi_{s,i}(t) = \frac{\psi\left(\frac{t-i}{s}\right)}{\sqrt{s}}$ باریک و به اصطلاح localized می‌شوند. به عبارت بهتر، ضرایب تبدیل موجک در $s \to 0$ به صورت محلی تعیین می‌شوند و نه global. آیا در مورد SGWT نیز چنین اتفاقی می‌افتد؟

برای بررسی $s \to 0$، به مقادیر $g(x)$ در $x \simeq 0$ نیاز داریم. با توجه به اینکه $g(0)=0$، از بسط تیلور g حول $x=0$ استفاده می‌کنیم. اگر $g(0) = g^{(1)}(0) = \cdots = g^{(k)}(0) = 0$ ($k \geq 0$) و $g^{(k+1)}(0) \neq 0$، می‌توانیم از تقریب زیر استفاده کنیم:

$$|x| \ll 1 \Rightarrow g(x) \simeq M x^{k+1}$$

$$s \to 0 \Rightarrow g(s \lambda_i) \simeq M s^{k+1} (\lambda_i)^{k+1}$$

$$\vec{\psi}_{s,i} = \sqrt{s}\; U \begin{bmatrix} g(s\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(s\lambda_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{U}_{i,1} \\ \vdots \\ \overline{U}_{i,n} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \psi_s = \begin{bmatrix} \vec{\psi}_{s,1} & \cdots & \vec{\psi}_{s,n} \end{bmatrix} = \sqrt{s}\; U \begin{bmatrix} g(s\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(s\lambda_n) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{U}_{1,1} & \cdots & \overline{U}_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{U}_{1,n} & \cdots & \overline{U}_{n,n} \end{bmatrix}}_{U^{-1}}$$

$$= \sqrt{s}\; U \begin{bmatrix} g(s\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(s\lambda_n) \end{bmatrix} U^{-1}$$

$$s \to 0 \Rightarrow \psi_s \simeq \sqrt{s}\; U \begin{bmatrix} M s^{k+1} \lambda_1^{k+1} & & \\ & \ddots & \\ & & M s^{k+1} \lambda_n^{k+1} \end{bmatrix} U^{-1}$$

$$= M\, s^{k+3/2}\; U \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}^{k+1} U^{-1}$$

$$= M\, s^{k+3/2} \underbrace{\left(U \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} U^{-1} \right)}_{\text{shift}}{}^{k+1}$$

۲۹ ,۹ ,۱۴۰۰

⇐ در $s \to 0$ ، بردار $\vec{\psi}_{s,n}$ با صرف نظر از جمله مرتبه $s^{k+3/2}$ ، مشابه با ستون n ام در ماتریس $(\text{shift})^{k+1}$ خواهد بود. منظور shift هرکدام از L ، L_N ، W ، W_N که باشد. درایه های ناصفر در ستون n ام ماتریس $(\text{shift})^{k+1}$ عبارتند از رأس n و همسایه های لبه ای رأس با فاصله حداکثر $k+1$. در نتیجه، $\vec{\psi}_{s,n}$ ها هم تا حد زیادی localized خواهند بود. به علاوه، هرچه تابع g به صورت نرم تر در $s \to 0$ صفر شود (مشتقات مرتبه بالاتر)، پهنای رأسی توابع پایه در حالت $s \to 0$ بیشتر خواهد بود (localization کمتر).

انرژی ضرایب (frame bounds)

به دلیل پیوستگی SGWT نسبت به متغیر scale، در عمل قابل پیاده سازی نیست. در کاربردهای مختلف معمولاً مقادیر متغیر s تعداد متناهی حالت به خود می گیرد: $\{s_1 < \dots < s_J\}$. همچنین، همانطور که قبلاً اشاره شد، ضرایب پایه های $\vec{\psi}_{s_k,n}$ بدون ضرایب $\vec{\varphi}_n$ برای بازسازی سیگنال کافی نیستند. به بیان دیگر، سیگنال غیر صفری وجود دارد که تمام ضرایب پایه های $\vec{\psi}_{s_k,n}$ برای آن صفر هستند.

فرض کنید بردارهای $\vec{\varphi}_i$ با پاسخ فرکانسی تابع $h(x)$ مطابق زیر لحاظ شده باشند:

$$\vec{\varphi}_i = U \begin{bmatrix} h(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & h(\lambda_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{i,1} \\ \vdots \\ \bar{u}_{i,n} \end{bmatrix}$$

همچنین، تعریف کنید:

$$\begin{cases} G(x) = |h(x)|^2 + \sum_{k=1}^{l} |g(s_k x)|^2 \\[2ex] A = \min\limits_{\lambda_1 \le x \le \lambda_n} G(x) \\[2ex] B = \max\limits_{\lambda_1 \le x \le \lambda_n} G(x) \end{cases}$$

در این صورت داریم:

$$A \|\vec{x}\|_2^2 \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(|\langle \vec{\varphi}_i , \vec{x} \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{l} \frac{|\langle \vec{\psi}_{s_k,i} , \vec{x} \rangle|^2}{s_k} \right)}_{E} \le B \|\vec{x}\|_2^2$$

اثبات:

$$E = \sum_{i=1}^{n} |\langle \vec{\varphi}_i , \vec{x} \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{n} \frac{|\langle \vec{\psi}_{s_k,i} , \vec{x} \rangle|^2}{s_k}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{x}^H \vec{\varphi}_i \vec{\varphi}_i^H \vec{x} + \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{s_k} \sum_{i=1}^{n} \vec{x}^H \vec{\psi}_{s_k,i} \vec{\psi}_{s_k,i}^H \vec{x}$$

$$= \vec{q}^{\,H} \left[\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{\varphi}_i \, \vec{\varphi}_i^{\,H} \right)}_{E_{\varphi}} + \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{s_k} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{\psi}_{s_k,i} \, \vec{\psi}_{s_k,i}^{\,H}}_{E_{\psi_{s_k}}} \right] \vec{q}$$

$$E_{\varphi} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\varphi}_i \, \vec{\varphi}_i^{\,H} = \sum_{i=1}^{n} U \begin{bmatrix} h(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & h(\lambda_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{U}_{i,1} \\ \vdots \\ \overline{U}_{i,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,1} & \cdots & U_{i,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{h(\lambda_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{h(\lambda_n)} \end{bmatrix} U^{-1}$$

$$= U \begin{bmatrix} h(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & h(\lambda_n) \end{bmatrix} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \overline{U}_{i,1} \\ \vdots \\ \overline{U}_{i,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,1} & \cdots & U_{i,n} \end{bmatrix} \right)}_{I} \begin{bmatrix} \overline{h(\lambda_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{h(\lambda_n)} \end{bmatrix} U^{-1}$$

$$= U \begin{bmatrix} |h(\lambda_1)|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |h(\lambda_n)|^2 \end{bmatrix} U^{-1}$$

$$E_{\psi_{s_k}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\psi}_{s_k,i} \, \vec{\psi}_{s_k,i}^{\,H} = s_k \sum_{i=1}^{n} U \begin{bmatrix} g(s_k\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(s_k\lambda_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{U}_{i,1} \\ \vdots \\ \overline{U}_{i,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,1} & \cdots & U_{i,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{g(s_k\lambda_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{g(s_k\lambda_n)} \end{bmatrix} U^{-1}$$

$$= s_k \, U \begin{bmatrix} |g(s_k\lambda_1)|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |g(s_k\lambda_n)|^2 \end{bmatrix} U^{-1}$$

$$\Rightarrow E = \vec{q}^{\,H} \left(U \begin{bmatrix} |h(\lambda_1)|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |h(\lambda_n)|^2 \end{bmatrix} U^{-1} + \sum_{k=1}^{d} U \begin{bmatrix} |g(s_k\lambda_1)|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |g(s_k\lambda_n)|^2 \end{bmatrix} U^{-1} \right) \vec{q}$$

$$= \underbrace{\vec{q}^{H}\, U}_{\hat{\vec{q}}^{H}} \begin{bmatrix} |h(\lambda_1)|^2 + \sum_{k=1}^{l} |g(s_k \lambda_1)|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |h(\lambda_n)|^2 + \sum_{k=1}^{l} |g(s_k \lambda_n)|^2 \end{bmatrix} \underbrace{U^{-1}\, \vec{q}}_{\hat{\vec{q}}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} G(\lambda_i)\, |(\hat{\vec{q}})(i)|^2$$

$$A \|\vec{q}\|_2^2 = A \|\hat{\vec{q}}\|_2^2 \leq E \leq B \|\hat{\vec{q}}\|_2^2 = B \|\vec{q}\|_2^2 \quad \checkmark$$

نکته: نسبت $\frac{B}{A}$ معیاری از پایداری نحوه‌ی دو بازنمایی سیگنال (در شرایط نویزی) است. هرچه این نسبت به 1 نزدیک‌تر باشد، پایداری بهتر است. حالت ایده‌آل $\frac{B}{A}=1$ وقتی رخ می‌دهد که انرژی سیگنال گراف به صورت دقیق توسط ضرایب تبدیل موجک نمایش داده شود. این حالت زمانی رخ می‌دهد که $G(x)=|h(x)|^2+\sum_{k=1}^{l}|g(s_k x)|^2$ تابع ثابت باشد.

پیچیدگی محاسبه ضرایب موجک

ضرایب تبدیل موجک که با $W_x(s;n)$ نمایش داده می‌شوند، از ضرب داخلی توابع $\vec{\psi}_{s,n}$ در سیگنال گرافی $\vec{x}$ ایجاد می‌شوند. با توجه به رابطه:

$$\vec{\psi}_{s,n} = \sqrt{s}\, U \begin{bmatrix} g(s\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(s\lambda_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{n,1} \\ \vdots \\ U_{n,n} \end{bmatrix}$$

ابتدا نیاز داریم تا مقادیر ویژه و بردارهای ویژه عملگر shift گرافی را بدست آوریم. این محاسبات از مرتبه $O(n^3)$ هستند که در n های بزرگ بسیار بالا به شمار می‌روند. در عین حال، ماتریس shift معمولاً بسیار تنک است و ضرب آن در بردارها و ماتریس‌ها بار محاسباتی قابل قبولی دارد. از این خاصیت برای کاهش هزینه محاسباتی تبدیل موجک استفاده می‌کنیم.

فرض کنید $P(x) = \sum_{i=0}^{m} P_i x^i$ چندجمله‌ای با درجه m باشد که تقریب مناسبی از $g(sx)$ در بازه $0 \le x \le s\lambda_n$ ارائه می‌دهد:

$$M = \max_{0 \le x \le s\lambda_n} \left| g(sx) - P(x) \right|$$