باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

پردازش سیگنال‌های گرافی

استاد: دکتر امینی، دکتر کاظمی

تمرین سری سوم

۱ باند پایین مرتبه فیلتر

گراف بدون جهت و بدون وزن $\mathcal{G}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\mathcal{G}$، rـ منظم با قطر d باشد. نشان دهید اگر بخواهیم فیلتر گرافی ای به صورت $H(L) = \sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i L^i$ داشته باشیم که پاسخ فرکانسی آن در k مولفه ناصفر و در بقیه مولفه‌ها برابر صفر است آنگاه یک شرط لازم به صورت زیر است

$$d - k + 1 \leq M. \tag{1}$$

۲ گراف قویا منظم

گراف بدون جهت و بدون وزن $\mathcal{G}$ را قویا منظم با پارامتر های (r, s, k) گویند اگر:

(۱) kـ منظم باشد.

(۲) هر دو راس همسایه r همسایه مشترک داشته باشند.

(۳) هر دو راس که همسایه نیستند s همسایه مشترک داشته باشند.

الف) نشان دهید ماتریس لاپلاسین یک گراف قویا منظم تنها ۳ مقدار ویژه متمایز دارد که به صورت زیر هستند

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \frac{2k - r + s + \sqrt{(r-s)^2 + 4(k-s)}}{2}, \quad \theta_3 = \frac{2k - r + s - \sqrt{(r-s)^2 + 4(k-s)}}{2} \tag{2}$$

راهنمایی: با استفاده از تعریف گراف قویا منظم یک چند جمله‌ای درجه ۲ بدست آورید که ماتریس مجاورت در آن صدق می‌کند.

ب) گراف قویا منظم $\mathcal{G}$ را در نظیر بگیرید. فرض کنید سیگنال گرافی $\mathbf{x}$ با میانگین صفر و $\|x\|_2 = 1$ باشد. همینطور فرض کنید فیلتر $H = f(L) = \sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i L^i$ به گونه ای است که خروجی فیلتر به ازای ورودی $\mathbf{x}$ بر سیگنال ورودی عمود است. به بیان دیگر، اگر $\mathbf{y}$ را خروجی فیلتر در نظر بگیریم، آنگاه $\mathbf{y}^T\mathbf{x} = 0$. اندازه سیگنال خروجی، $\|\mathbf{y}\|_2$، را برحسب $f(\theta_2)$ و $f(\theta_3)$ بدست آورید.

۳ شیفت راسی و میانگین

گراف همبند $\mathcal{G}$ را با مجموعه رئوس $\{1, \ldots, n\}$ در نظر بگیرید. در یک فرایند n مرحله‌ای با شروع از سیگنال $\mathbf{y}_0$، در مرحله iام سیگنال مرحله قبل را نسبت به راس iام شیفت راسی داده و در $\sqrt{n}$ ضرب می‌کنیم. به عبارت دیگر:

$$\mathbf{y}_i = \sqrt{n}\, \mathbf{y}_{i-1} \circledast_{\mathcal{G}} \delta_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

مقدار میانگین سیگنال $\mathbf{y}_n$ را برحسب مقدار میانگین $\mathbf{y}_0$ بدست آورید.

۴ شیفت رأسی و ضرب دکارتی

گراف $\mathcal{H}$ با $n \times m$ رأس را بدین صورت می‌سازیم. ابتدا m گراف کامل K_n را درنظر بگیرید. شماره رئوس گراف کامل اول را $۱, \ldots, n$ و شماره رئوس گراف کامل دوم را $n+۱, \ldots, ۲n$ می‌گیریم و به همین صورت بقیه رئوس را شماره گذاری می‌کنیم. حال همه‌ی رئوس i, j را که $i \equiv j (mod\ m)$ است به هم متصل می‌کنیم. سیگنال δ_k را روی گراف $\mathcal{H}$ نسبت به رأس l شیفت دهید. ماتریس شیفت را لاپلاسین بگیرید، همینطور در انتخاب بردار ویژه ها اختیار دارید هر پایه ای که شیفت در آن راحت‌تر محاسبه می‌شود انتخاب کنید. مقادیر ویژه لاپلاسی گراف $\mathcal{H}$ را نیز بدست آورید.

۵ قضیه نمونه‌برداری سیگنال‌های گرافی

به صورت شهودی می دانیم که اگر سیگنالی باند محدود باشد، آن را می توان تنها بر اساس مولفه‌های فرکانس پایین (در این جا مقادیر ویژه) بیان نمود. در این سوال می‌خواهیم به بررسی دقیق‌تر این موضوع برای سیگنالهای گرافی با پهنای باند محدود ω بپردازیم. $\omega(\mathbf{x})$ را بزرگترین مقدار ویژه‌ای بگیرید که در آن $\hat{x}(\omega(\mathbf{x})) \neq ۰$ است. تعاریف زیر را در نظر بگیرید:

تعریف ۱: فضای Paley-Wiener را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$PW_\omega(G) = \mathrm{span}\{\mathbf{u}_i : \lambda_i \leq \omega\} \tag{۴}$$

که λ_i مقدار ویژه متناظر با بردار ویژه $\mathbf{u}_i$ ماتریس لاپلاسین نرمالیزه‌شده $\mathcal{L}$ است. این فضا واضحا همان فضای سیگنال‌های با پهنای باند ω است.

تعریف ۲:

مجموعه‌ی رئوس گراف ساده $\mathcal{G}$ را برابر V در نظر بگیرید. در این صورت به زیرمجموعه‌ی $S \subset V$ مجموعه‌ی یکتا کننده براي کلاس A از سیگنال‌ها می‌گوییم اگر برابر بودن دو سیگنال گرافی f و g متعلق به A روی S، برابر بودن f و g روی کل گراف را نتیجه دهد. یعنی

$$f(S) = g(S),\ S \subset V \Rightarrow f(V) = g(V) \tag{۵}$$

تعریف ۳: فرکانس قطع برای مجموعه رئوس S را با $w_c(S)$ نمایش می‌دهیم که بزرگترین فرکانس w ای است که S برای فضای $PW_w(\mathcal{G})$ مجموعه یکتا کننده باشد.

تعریف ۴: فضای سیگنال‌های گرافی روی $\mathcal{G}$ که فقط روی رئوس S مقدار دارند و روی بقیه رئوس صفر هستند را با $L_۲(S)$ نمایش می‌دهیم.

الف) نشان دهید مجموعه S برای $PW_w(\mathcal{G})$ یکتاکننده است اگر و تنها اگر

$$PW_w(\mathcal{G}) \cap L_۲(S^c) = \{O\}$$

که در آن O بردار تمام صفر است.

ب) ثابت کنید برای گراف $\mathcal{G}$، یک زیر مجموعه از رئوس S برای سیگنال‌های $x \in PW_w(G)$ یکتاکننده است اگر و تنها اگر

$$w < \inf_{\substack{\phi_۲(S^c) \\ \phi \neq ۰}} w(\phi) \triangleq w_c(S)$$

به $w_c(S)$ فرکانس قطع واقعی می‌گوییم.

۶ بانک فیلتر و اتحاد نوبل

اپراتور نمونه برداری نرخ پایین D را به صورت زیر درنظر بگیرید که در آن O ماتریس تمام صفر است.

$$D = [I_{N/M} O_{N/M} \ldots O_{N/M}] \in \mathbb{C}^{(n/M) \times N}$$

آنگاه سیگنال نمونه برداری شده به صورت Dx خواهد بود. اگر A ماتریس مجاورت گراف ساده G باشد و قرار دهیم

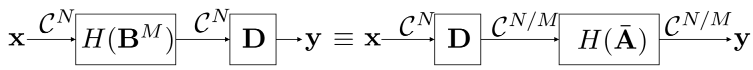
$$B^M = \begin{bmatrix} (A^M)_{۱,۱} & O \\ (A^M)_{۲,۱} & (A^M)_{۲,۲} \end{bmatrix}$$

که در آن $\left(A^M\right)_{۱,۱}$ زیرماتریس مربعی $N/M \times N/M$ حاصل از درنظر گرفتن N/M سطر و ستون اول A^M است. همنیطور قرار دهیم

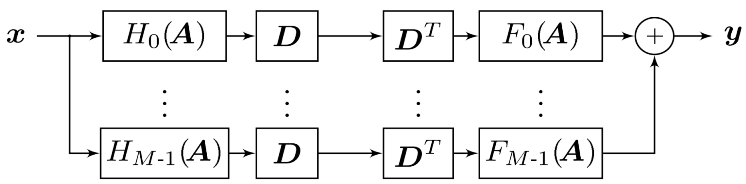
$$\bar{A} = DB^M D^T$$

الف) نشان دهید اتحاد نوبل برای هر فیلتر چندجمله‌ای به صورت $H(A) = \sum_{k=۰}^{L} h_k A^k$ برقرار است، یعنی داریم

$$DH(B^M) = H(\bar{A})D \qquad (۶)$$



بانک فیلتر M تایی زیر را درنظر بگیرید. که F_i و H_i ها همگی چندجمله ای هستند و D همان اپراتور نمونه برداری است.



ب) آیا بانک فیلتر گرافی بالا GSI است؟

پ) یک فیلتر خطی S را، با دوره تناوب M نامتغیر با شیفت گوییم هرگاه $A^M S = SA^M$ نشان دهید بانک فیلتر بالا برای تمام چندجمله‌ای های H_i, F_i با دوره تناوب M نامتغیر با شیفت است اگر و تنها اگر A^M به صورت زیر باشد

$$A^M = \begin{bmatrix} \left(A^M\right)_{۱,۱} & O \\ O & \left(A^M\right)_{۲,۲} \end{bmatrix}$$

فرض کنید هریک از فیلتر های H_i, F_i تجزیه ای به شکل زیر دارند

$$H_i(A) = \sum_{r=۰}^{M-۱} A^r E_{i,r}(A^M)$$
$$F_i(A) = \sum_{r=۰}^{M-۱} A^{M-r-۱} R_{i,r}(A^M)$$

که $E_{i,r}$ و $R_{i,r}$ ها توابع چندجمله‌ای هستند.

ت) با تعریف $\bar{A} = DA^M D^T$ شرطی پیدا کنید به طوری که بتوان فیلتر بانک قسمت (پ) را به شکل زیر پیاده‌سازی کرد. همچنین عناصر بلوکی ماتریس $P(\bar{P})$ را (که هر بلوک از مرتبه $n/M \times N/M$ است) برحسب چندجمله‌ای های $E_{i,r}, R_{i,r}$ بیابید.