

پردازش سیگنال های گرافی

دکتر آرش امینی



دانشگاه صنعتی شریف

مهندسی برق

برنا خدا بنده ۴۰۰۱۰۹۸۹۸

تمرین کامپیوتری سری سوم

۱۹ دی ۱۴۰۲

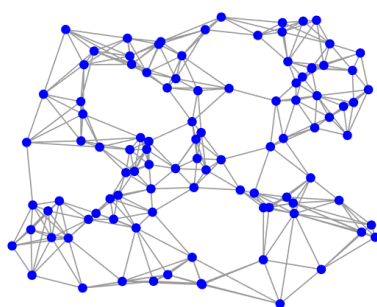


جداسازی سیگنال های گرافی

کد ها و نتایج شبیه سازی ضمیمه شده اند و در گزارش تکرار نشده اند.

سیگنال نرم تصادفی

ابتدا تعدادی گراف به صورت گراف سنسور تولید میکنیم، و با تحلیل های مناسب روی آنها، سیگنال های تصادفی ولی نرم بر روی این گراف ها تولید میکنیم.



حال کافیست از هر کدام از این گراف ها، ماتریس لاپلاسیان مربوطه L_i را استخراج کرده، و سیگنال اداقم شده از سیگنال های نرم x_i قبل که به صورت $x = \sum_{k=1}^K x_k$ را با استفاده از مسئله بهینه سازی زیر، جداسازی کنیم.

$$\min_{x_1, \dots, x_K} \sum_{i=1}^K x_i^T L_i x_i \quad s.t. \begin{cases} x = \sum_{i=1}^K x_i, \\ 1^T x_i = 0 \quad i = 1, \dots, K \end{cases}$$

این بهینه سازی، جداسازی خوبی انجام میدهد، زیرا هر کدام از x_i ها تنها بر روی L_i هموار هستند، در نتیجه میدانیم برای پاسخ اصلی، این تابع هدف مقدار کوچکی دارد. حال به هر روشی که این مسئله را حل کنیم، به پاسخ مطلوبی میرسیم. در این گزارش، ما با استفاده از CVX مسئله را حل کرده ایم.

شکل ۱: نمونه گراف سنسور

پس از انجام تحلیل ها، از معیار SNR برای سنجش عمل کرد استفاده کرده ایم، مقادیر برای یک آزمایش به صورت زیر بوده.

$$SNR_i = 10 \log \left(\frac{\|x_i\|_2^2}{\|x_i - \tilde{x}_i\|_2^2} \right)$$

$$SNR_{avg} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K SNR_i$$

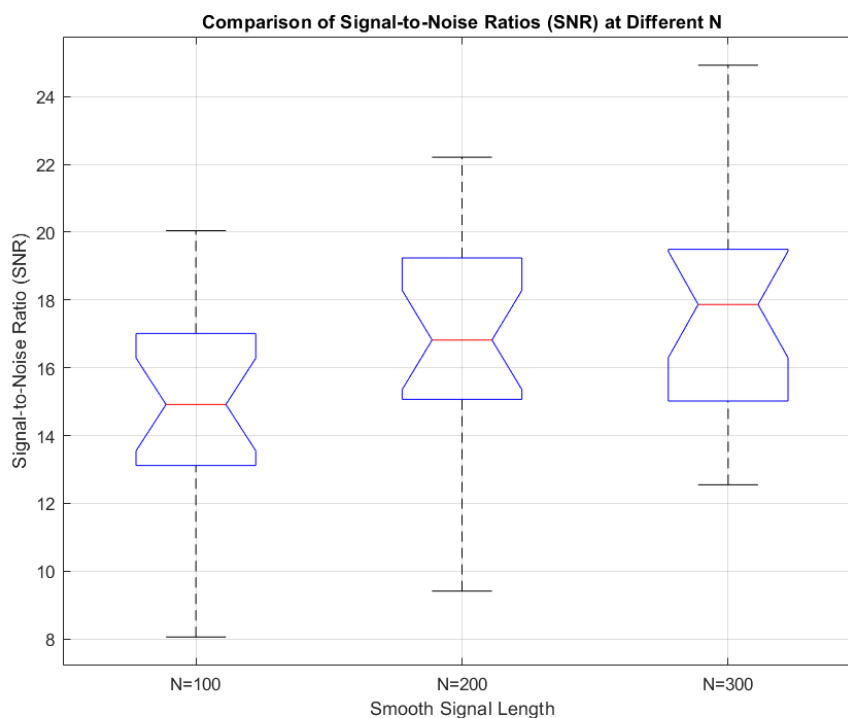
SNR ₁	SNR ₂	SNR ₃	SNR ₄	SNR _{avg}
30.21	21.31	11.26	17.77	20.14

Table 1: SNR Values (db)

برای اطمینان بیشتر روی مقادیر و کاهش واریانس اندازه گیری، آزمایش را ۲۰ بار انجام داده، و میانگین را گزارش میکنیم. سپس مرحله قبل را برای ابعاد مختلف سیگنال نیز انجام میدهیم. مقادیر به شکل زیر بوده اند.

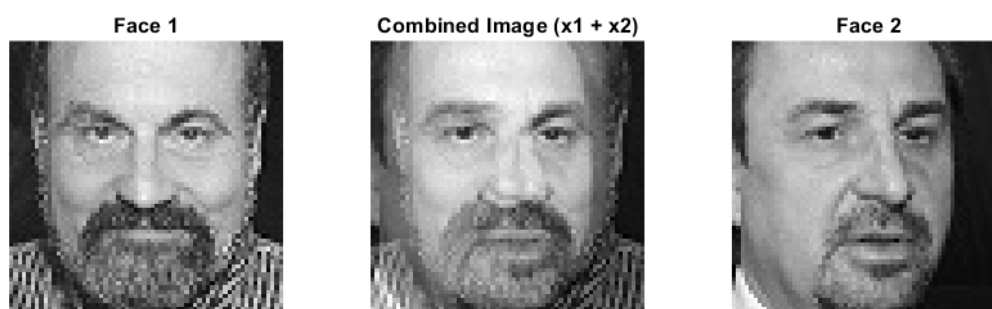
N	100	200	300
SNR	14.65	15.96	17.58

Table 2: SNR Values (db) vs dimentionality



جداسازی تصویر

ابتدا ۲ تصویر داده شده را در محیط متلب لوود کرده و به فرمت مورد نظر برای تحلیل های خود میاوریم، سپس سیگنال ناشی از اقدام این ۲ تصویر را میسازیم.



شکل ۲: تصاویر و تصویر ارقام شده

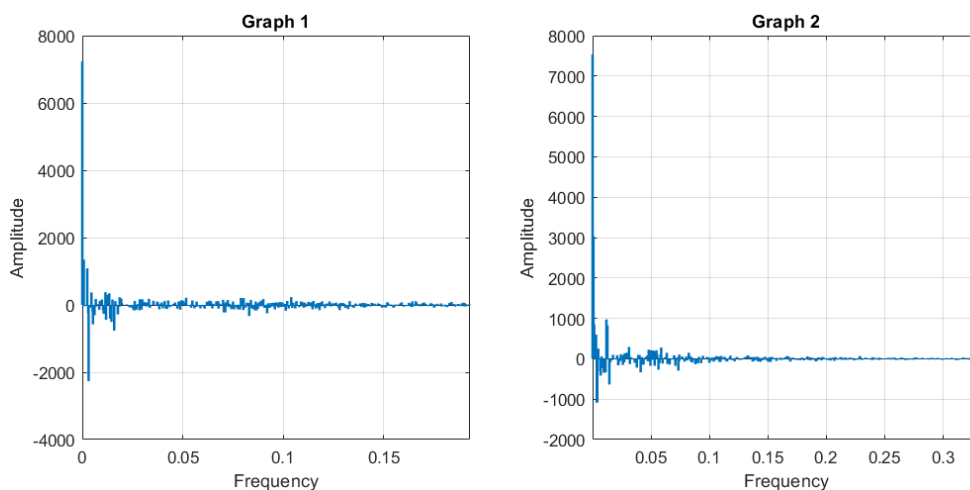
حال نیاز داریم مراحل قبل را باری دیگر طی کنیم، با این تفاوت که در قبل، گراف ها معلوم بوده و سپس سیگنال های تصادفی همواری روی گراف های دانسته شده تعریف کردیم. در اینجا تصاویر معلوم اند، در نتیجه برای اعمال کار مشابه نیاز داریم گرافی تولید کنیم که سیگنال ها بر روی آن هموار باشند.

گراف خود را یک گراف $king's$ در نظر میگیریم، که اینگونه شباهت های مکانی را در گراف خود میبینیم، و برای خاص کردن گراف برای سیگنال خود، وزن ها را به صورت زیر قرار میدهیم.

$$w_{k,ij} = \frac{1}{|(x_k)_i - (x_k)_j| + \epsilon}, \quad (i, j) \in \mathcal{E}(\text{kings}), \quad 0 < \epsilon < 1$$

در اینجا از $\epsilon = 0.001$ استفاده کردیم.

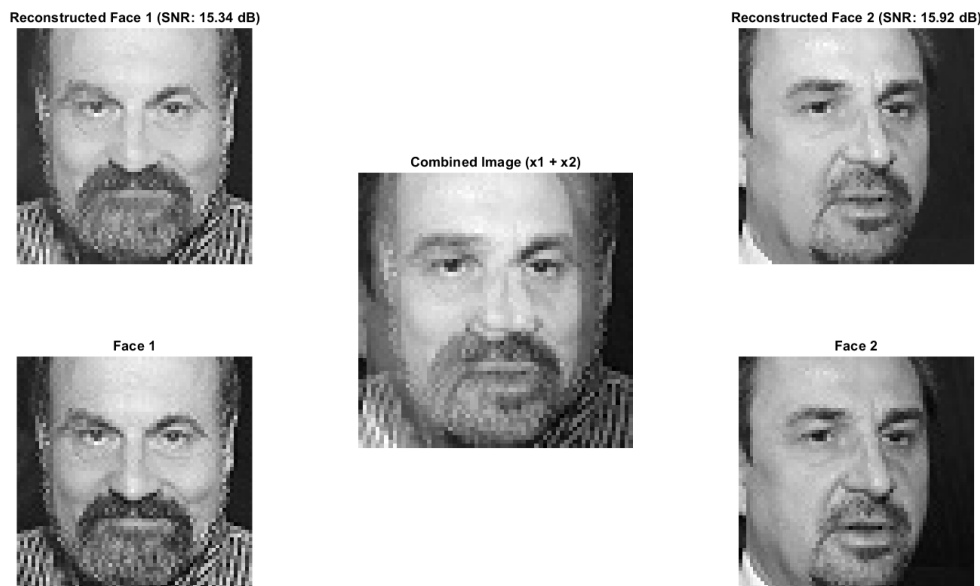
برای اثبات ادعا خود روی همواری سیگنال ها روی گراف مربوطه، ۵۰۰ مولفه فرکانسی اول سیگنال ها را روی گراف خود رسم میکنیم.



شکل ۳: تبدیل فوریه گرافی GFT با ماتریس لاپلاسین به عنوان GSO

جداسازی

حال با مراحل مشابهی، جداسازی را انجام میدهیم، همانطور که معلوم است، این جداسازی به صورت خیلی خوبی انجام شده و عکس ها به نحو خوبی جدا شده اند.



شکل ۴: بازسازی و جداسازی روی تصاویر

$$\text{SNR}_1 = 15.34\text{dB}, \quad \text{SNR}_2 = 15.92\text{dB}$$