۱۴۰۰/۹/۲۷

$$\vec{\psi}_{s,i} = \sqrt{s}\cdot U \begin{bmatrix} g(s\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(s\lambda_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{i,1} \\ \vdots \\ \bar{u}_{i,n} \end{bmatrix}$$

ضرایب تبدیل موجک به صورت زیر قابل تعریف هستند:

$s>0 \;,\; 1 \le i \le n$

$$W_{\vec f}(\underbrace{s}_{\text{scale}}\,;\underbrace{i}_{\text{shift}}) \triangleq \langle \vec{\psi}_{s,i} , \vec{f} \rangle = \vec{\psi}_{s,i}^{H} \cdot \vec{f}$$

$$= \sqrt{s} \begin{bmatrix} u_{i,1} & \cdots & u_{i,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{g}(s\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{g}(s\lambda_n) \end{bmatrix} U^{-1} \vec{f}$$

$$= \sqrt{s}\; GDFT^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} g(s\lambda_1) \\ \vdots \\ g(s\lambda_n) \end{bmatrix} \odot GDFT\{\vec{f}\} \right\} (i)$$

ضرب درایه به درایه

مولفه i ام تبدیل فوریه معکوس

تبدیل معکوس SGWT

با فرض تک و $\lambda_1 = 0$ و $(g(0)=0)$ می دانیم که مولفه اول طیفی همه $\vec{\psi}_{s,i}$ ها برابر ۰ است.

در نتیجه، مولفه مرتبط با کوچکترین فرکانس در محاسبه تمام ضرایب موجک حذف شده است و قابل بازیابی

نکته ! بهترین بازیابی ممکن برای سیگنال دکوپله $\vec{x}$ از روی ضرایب تبدیل موجک عبارت است از :

$$\vec{x}_0 = \vec{x} - \left\langle \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ \vdots \\ U_{n,1} \end{bmatrix}, \vec{x} \right\rangle \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ \vdots \\ U_{n,1} \end{bmatrix}$$

با الهام گرفتن از رابطه معکوس CWT داریم :

$$\frac{1}{C_g} \int_0^\infty \sum_{i=1}^{n} \underbrace{W_x(s;i)}_{\text{اسکالر}} \underbrace{\vec{\psi}_{s,i}}_{\text{بردار}} \frac{ds}{s^2}$$

$$= \frac{1}{C_g} \int_0^\infty \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sqrt{s}\, U \begin{bmatrix} g(s\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(s\lambda_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{U}_{i,1} \\ \vdots \\ \overline{U}_{i,n} \end{bmatrix} \right)}_{\vec{\psi}_{s,i}} \underbrace{\left(\sqrt{s} \begin{bmatrix} U_{i,1} \cdots U_{i,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{g}(s\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{g}(s\lambda_n) \end{bmatrix} U^{-1} \vec{x} \right)}_{W_x(s;i)} \frac{ds}{s^2}$$

$$= \frac{1}{C_g} \int_0^\infty U \begin{bmatrix} g(s\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(s\lambda_n) \end{bmatrix} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \overline{U}_{i,1} \\ \vdots \\ \overline{U}_{i,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,1}, \cdots, U_{i,n} \end{bmatrix}}_{I} \right) \begin{bmatrix} \overline{g}(s\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{g}(s\lambda_n) \end{bmatrix} U^{-1} \vec{x} \frac{ds}{s}$$

$$= \frac{1}{C_g} U \left(\int_0^\infty \begin{bmatrix} |g(s\lambda_1)|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |g(s\lambda_n)|^2 \end{bmatrix} \frac{ds}{s} \right) U^{-1} \vec{x}$$

$$= \frac{1}{C_g} U \begin{bmatrix} \int_0^\infty \frac{|g(s\lambda_1)|^2}{s} ds & & \\ & \ddots & \\ & & \int_0^\infty \frac{|g(s\lambda_n)|^2}{s} ds \end{bmatrix} U^{-1} \vec{x}$$

$$= \frac{1}{c_g}\, U \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & c_g & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_g \end{bmatrix} U^{-1} \vec{x}$$

$$= \vec{x} - U \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix} U^{-1} \vec{x} = \vec{x} - \left\langle \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ \vdots \\ U_{n,1} \end{bmatrix}, \vec{x} \right\rangle \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ \vdots \\ U_{n,1} \end{bmatrix} = \vec{x}_0 \quad \checkmark$$

حالت $s \to 0$

در حالت پیوسته، هنگامی که $s \to 0$، توابع پایه تبدیل موجک که عبارت‌اند از $\psi_{s,i}(t) = \frac{\psi\left(\frac{t-i}{s}\right)}{\sqrt{s}}$

باریک و به اصطلاح localized می‌شوند. به عبارت بهتر، ضرایب تبدیل موجک در $s \to 0$ به صورت

محلی تعیین می‌شوند و نه global. آیا در مورد SGWT نیز چنین اتفاقی می‌افتد؟

برای بررسی $s \to 0$، به مقادیر $g(x)$ در $x \simeq 0$ نیاز داریم. با توجه به اینکه $g(0)=0$، از بسط

تیلور g حول $x=0$ استفاده می‌کنیم. اگر $g(0) = g^{(1)}(0) = \cdots = g^{(k)}(0) = 0$ ($k \geq 0$) و $g^{(k+1)}(0) \neq 0$،

می‌توانیم از تقریب زیر استفاده کنیم: $|x| \ll 1 \Rightarrow g(x) \simeq M x^{k+1}$

$$s \to 0 \Rightarrow g(s\lambda_i) \simeq M s^{k+1} (\lambda_i)^{k+1}$$

$$\vec{\psi}_{s,i} = \sqrt{s}\, U \begin{bmatrix} g(s\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(s\lambda_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{U}_{i,1} \\ \vdots \\ \overline{U}_{i,n} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \psi_s = \begin{bmatrix} \vec{\psi}_{s,1} & \cdots & \vec{\psi}_{s,n} \end{bmatrix} = \sqrt{s}\, U \begin{bmatrix} g(s\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(s\lambda_n) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{U}_{1,1} & \cdots & \overline{U}_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{U}_{1,n} & \cdots & \overline{U}_{n,n} \end{bmatrix}}_{U^{-1}}$$

$$= \sqrt{s}\, U \begin{bmatrix} g(s\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(s\lambda_n) \end{bmatrix} U^{-1}$$

$$s \to 0 \Rightarrow \psi_s \simeq \sqrt{s}\, U \begin{bmatrix} M s^{k+1} \lambda_1^{k+1} & & \\ & \ddots & \\ & & M s^{k+1} \lambda_n^{k+1} \end{bmatrix} U^{-1}$$

$$= M s^{k+3/2}\, U \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}^{k+1} U^{-1}$$

$$= M s^{k+3/2} \underbrace{\left(U \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} U^{-1} \right)}_{\text{shift}}{}^{k+1}$$