باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

پردازش سیگنال‌های گرافی

استاد: دکتر امینی، دکتر کاظمی

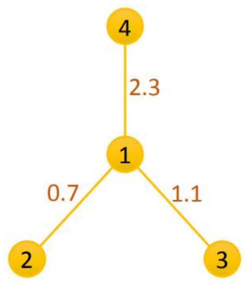
تمرین کامپیوتری سری اول

۱ آشنایی با GSPBOX

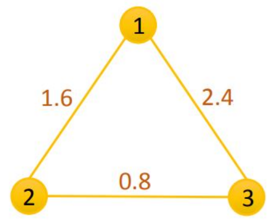
در این سوال قصد داریم با یکی از تولباکس‌های حوزه‌ی پردازش سیگنال‌های گرافی در MATLAB با نام GSPBOX آشنا شویم و مفاهیم معرفی شده در کلاس را به کمک آن پیاده‌سازی کنیم.

الف) ابتدا به کمک این لینک تولباکس موردنظر را دانلود کرده و در متلب آن را نصب کنید. از بخش Documentation این سایت میتوانید جهت آشنایی با تولباکس استفاده کنید.

ب) دو گراف زیر را در برنامه خود با نام‌های $G_۱$ و $G_۲$ تعریف و رسم کنید.



$G_۱$



$G_۲$

پ) ضرب تانسوری (کرونکر) و دکارتی دو گراف بالا را بدست آورید و به ترتیب G_t و G_s بنامید. هر دو گراف را با استفاده از تولباکس مورد بحث رسم کنید و ماتریس‌های $\mathbf{W}$ و $\mathbf{A}$ آنها را مشاهده کنید.

ت) یکی از دو ماتریس G_t یا G_s را به دلخواه انتخاب کنید و آن را H بنامید. یک سیگنال رندم در بازه $[-۱۰, ۱۰]$ تولید کرده و بر روی گراف H نمایش دهید.

ث) مقادیر ویژه و بردارهاي ویژه ماتریس لاپلاسین گراف H را بدست آورید و طیف گراف را رسم کنید.

ج) بردارویژه‌ها را به ترتیب افزایش مقدار ویژه در نظر بگیرید. دو بردار ویژه ابتدایی و دو بردار ویژه انتهایی را بر روی گراف به شکل یک سیگنال نمایش دهید و تفاوت آنها را توضیح دهید.

۲ تشخیص گروه‌بندی در گراف‌ها و رسم گراف

برای مدل کردن شبکه های دوستی در شبکه های اجتماعی از یک مدل گراف تصادفی به نام مدل بلوکی تصادفی [1] استفاده می‌شود. فرض کنید در یک اجتماع دو گروه دوستی وجود دارد، می‌خواهیم گراف دوستی ای برای این اجتماع تشکیل دهیم به طوریکه یال های گراف نشانگر وجود ارتباط دوستی بین دو فرد باشد. انتظار داریم احتمال وجود رابطه دوستی بین دو فرد از دو گروه مختلف کمتر از احتمال وجود رابطه بین دو فرد از یک گروه باشد. طبق آنچه گفته شد مدل تصادفی بلوکی به شکل زیر تعریف می‌شود.

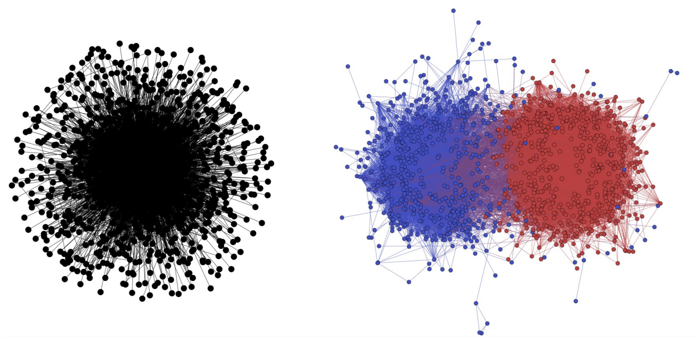
ابتدا یک بردار برچسب برای رئوس تعیین می‌شود. بردار برچسب های رئوس را به صورت $\sigma \in \{\pm ۱\}^n$ که در آن σ_i ها متغیر های تصادفی مستقل

[1] Stochastic Block Model

با توزیع یکسان هستند به طوریکه $\mathbb{P}\{\sigma_i = ۱\} = \mathbb{P}\{\sigma_i = -۱\} = \frac{۱}{۲}$ در نظر می‌گیریم. این بردار نشان می‌دهد که هر رأس در کدام گروه دوستی قرار دارد. حال اگر A ماتریس مجاورت گراف مدنظر باشد توزیع آن به فرم زیر است

$$\mathbb{P}[A_{ij} = ۱] \sim \begin{cases} p & \sigma_i = \sigma_j \\ q & \sigma_i \neq \sigma_j \end{cases} \tag{۱}$$

این مدل تصادفی را با $SBM(n,p,q)$ نمایش می‌دهیم.



الف) یک نمونه از گراف تصادفی $G \sim SBM(۱۰۰۰, ۰/۵, ۰/۲)$ را در صفحه‌ی دو بعدی رسم کنید. برای رسم این گراف از بردار های ویژه‌ی متناظر با دومین و سومین کوچکترین مقدار ویژه استفاده کنید به این صورت که مختصات رأس i متناظر با زوج مرتب $(\psi_۲(i), \psi_۳(i))$ باشند که در آن ψ_j بردار ویژه‌ی متناظر با j امین مقدار ویژه کوچک لاپلاسین گراف است. رأس های مربوط به هر گروه را به رنگ متفاوتی درآورید تا مشخص باشند. حال بر اساس مشاهدات خود یک روش برای بازیابی گروه های دوستی تنها با استفاده از مشاهده گراف ارائه دهید.

ب) دقت کنید که در بازیابی گروه های دوستی بهترین کاری که می‌توان انجام داد جدا کردن این دو گروه رأس از یکدیگر است و نمی‌توان برچسب رئوس را بدست آورد. در حقیقت همواره ابهام علامت برای برچسب ها باقی خواهد ماند. می‌توان ثابت کرد برای گراف تولید شده از مدل $SBM(n, \alpha\frac{\log(n)}{n}, \beta\frac{\log(n)}{n})$ اگر $\frac{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^۲}{۲} > ۱$ بازیابی بدون خطای دو گروه با استفاده از گراف مشاهده شده در $n \to \infty$ ممکن است. و درغیر این صورت ناممکن است. با استفاده از راه حلی که در بخش قبل پیشنهاد کردید درستی این گزاره را با چند نمونه آزمایش نمایش دهید. (گزارش تنها یک یا دو نمونه از هر حالت از پارامتر ها کافیست. به کامپیوتر خود فشار نیاورید!)