پردازش سیگنال های گرافی

دکتر آرش امینی

مهندسی برق

برنا خدابنده ۴۰۰۱۰۹۸۹۸

تمرین کامپیوتری سری دوم

۱۹ آذر ۱۴۰۲

پردازش سیگنال های گرافی

تمرین کامپیوتری سری دوم

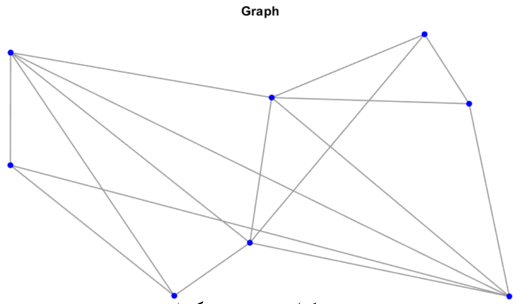
برنا خدابنده ۴۰۰۱۰۹۸۹۸

کاهش نویز در سیگنال گرافی

کد ها در فایل های `Q1.m` و `Q2.m` ضمیمه شده اند، این گزارشی از نتایج شبیه سازی ها و محاسبات خواهد بود.

تولید و تعریف گراف

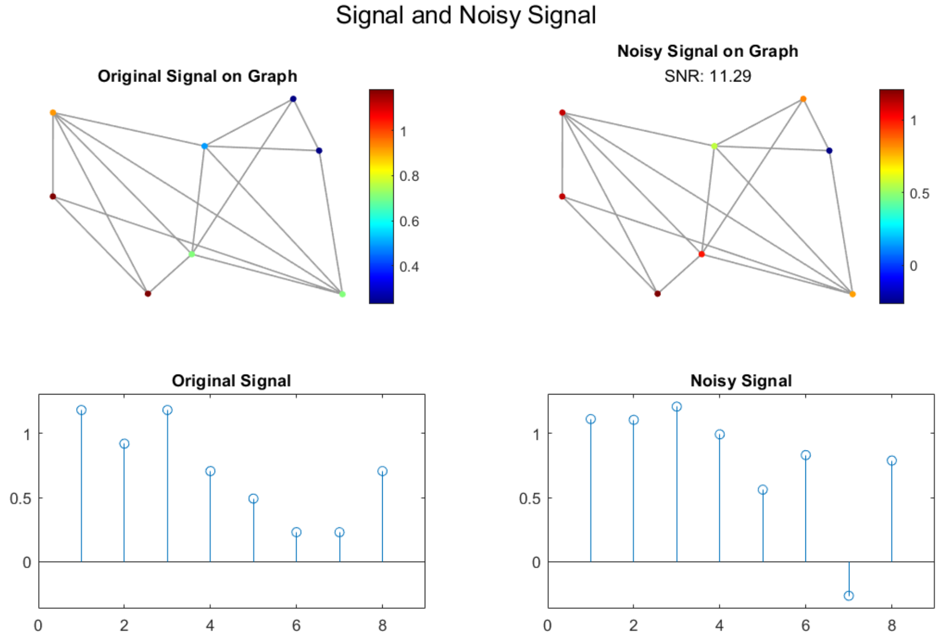
در حل این مسئله مکان راس ها اهمیتی ندارد، در نتیجه برای مکان این راس ها مکان های انتزاعی با استفاده از `graph sensor` تخصیص داده ایم.



شکل ۱: رسم گراف

تعریف سیگنال اصلی و با نویز

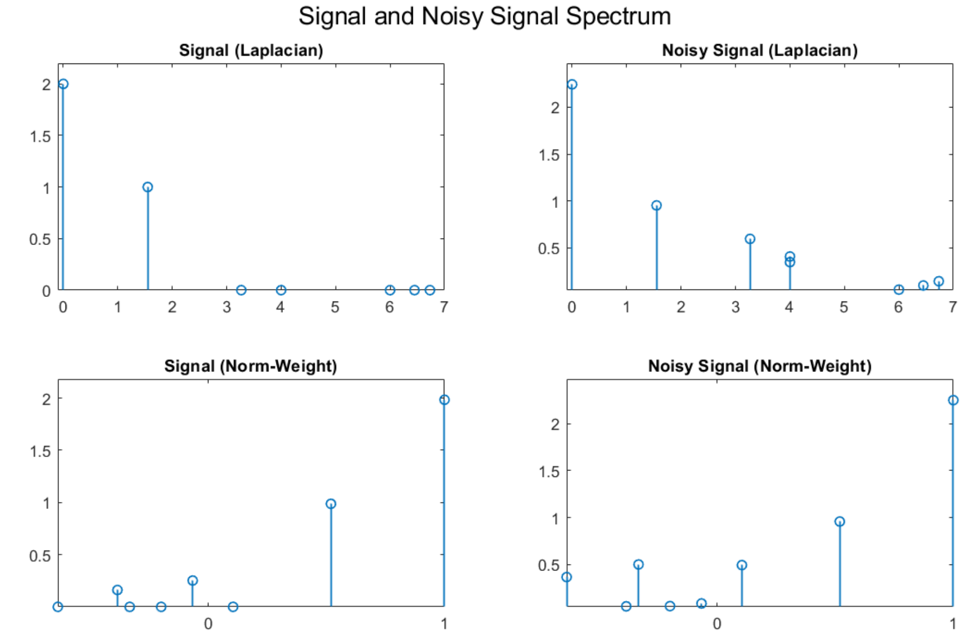
با استفاده از طیف لاپلاسی گراف، سیگنال اصلی $x = 2u_1 + u_2$ و سیگنال نویزی $x_n = x + w$ را تعریف میکنیم، در شکل زیر این سیگنال ها را روی گراف نمایش میدهیم.



شکل ۲: رسم سیگنال اصلی و نویزی بر روی گراف و به صورت سری زمانی

طیف سیگنال

حال ماتریس لاپلاسی و وزن نورمالیزه که به صورت $W_n = D^{-1/2}WD^{-1/2}$ تعریف میشنوند را تشکیل میدهیم، و سپس با قرار دادن آنها به عنوان اپراتور شیفت گرافی، طیف گراف را با استخراج سیگنال های ویژه این اپراتور ها و تجزیه سیگنال خود به این پایه ها تشکیل داده و نمایش میدهیم.

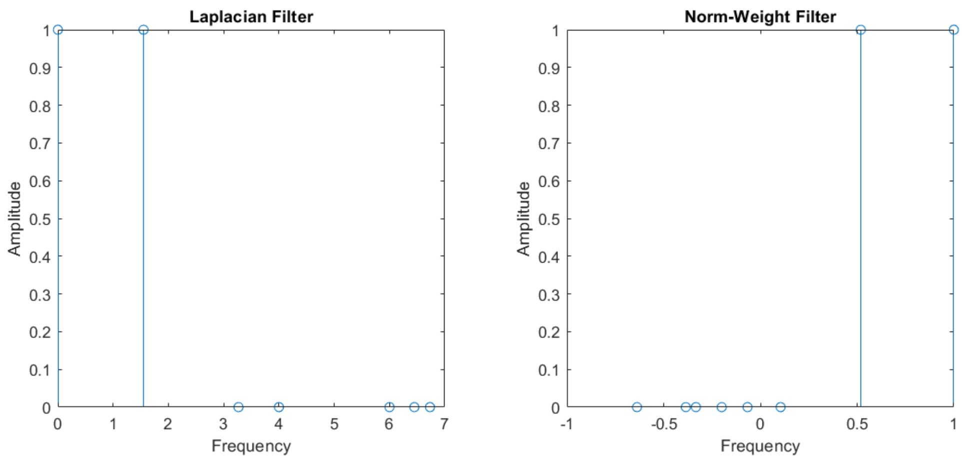


شکل ۳: طیف سیگنال، فرکانس: محور افقی، نویزی و معمولی(چپ و راست)، لاپلاسی یا وزن نورمالیزه(بالا، پایین)

ساخت فیلتر

همانطورکه از شکل معلوم است، نگه داشتن ۲ مقدار ویژه کوچک تر و بطور متقابل ۲ مقدار ویژه بزرگ تر در شیفت با وزن نورمالیزه، باید فیلتر خوبی برای این سیستم باشد، متناظر با ۲ فرکانس کم و موجود در سیگنال اصلی. به طور معادل:

$$h_L(\lambda) = [1, 1, 0, \ldots, 0]^T, \qquad h_{W_n}(\lambda) = [0, \ldots, 0, 1, 1]^T$$



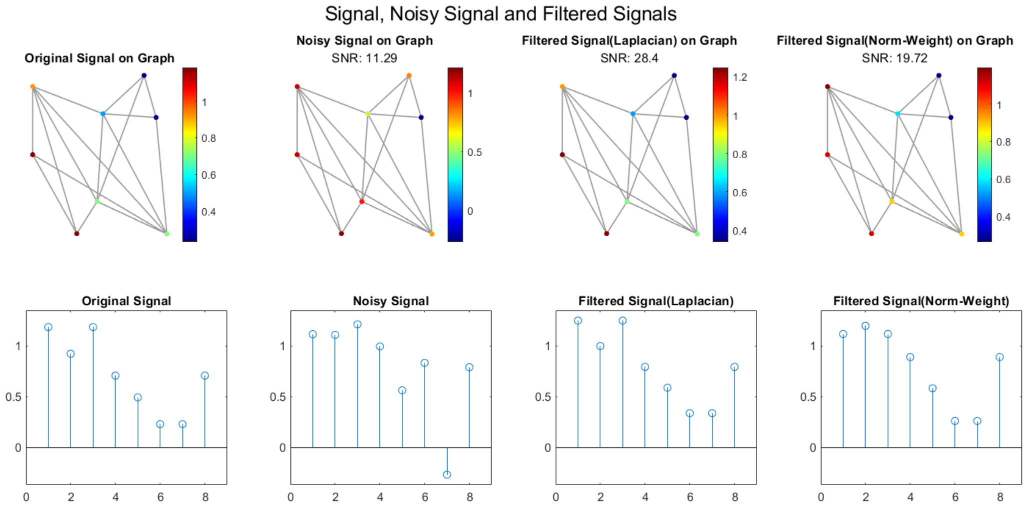
شکل ۴: فیلتر ایده آل، لاپلاسین و وزن نورمالیزه(چپ و راست)

که برای پاسخ فرکانس در واقع $h(\lambda)$ را در فرکانس های موجود در گراف رسم کرده ایم.

فیلتر کردن

حال فقط سیگنال اصلی را با استفاده از فیلتر خود، فیلتر میکنیم به صورتی که:

$$x_{\text{filtered}} = U(\hat{x} \odot h), \qquad \hat{x} = U^H x$$



شکل ۵: از چپ به راست: سیگنال اصلی، سیگنال نویزی، فیلتر شده با فیلتر لاپلاسی، فیلتر شده با فیلتر وزن نورمالیزه

همانطورکه از شکل ۵ پیداست، سیگنال های فیلتر شده دارای SNR بهبود یافته اند، و همچنین که بهترین نتیجه برای فیلتر کردن با استفاده از فیلتر با شیفت لاپلاسین گرافی است، زیرا سیگنال اصلی روی طیف این اپراتور تعریف شده است و در این حوزه هموار تر است.

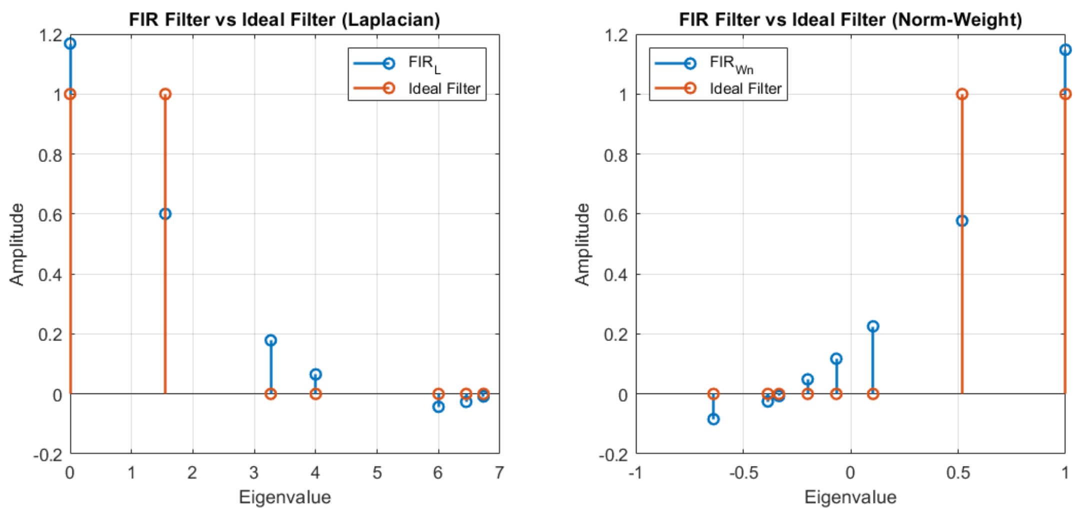
$$\text{SNR}_{\text{default}} = 11.29 \longrightarrow \underline{\text{SNR}_L = 28.4}, \quad \text{SNR}_{W_n} = 19.72$$

سنتز با FIR

میخواهیم که پاسخ این ۲ فیلتر تا حد ممکن مشابه هم باشد، از معیار l_2 برای این خطا استفاده میکنیم.

$$|x_{ideal} - x_{fir}|^2 = |\hat{x}_{ideal} - \hat{x}_{fir}|^2 = \hat{x}^2 |h_{ideal} - h_{fir}|^2 \Rightarrow h_{fir,opt} = \underset{h \in \text{FIR}}{\text{argmin}} |h_{ideal} - h|^2$$

ادامه محسابات در صفحه بعد.



شکل ۶: فیلتر FIR در مقابل ایده آل، لاپلاسین و وزن نورمالیزه(چپ و راست)

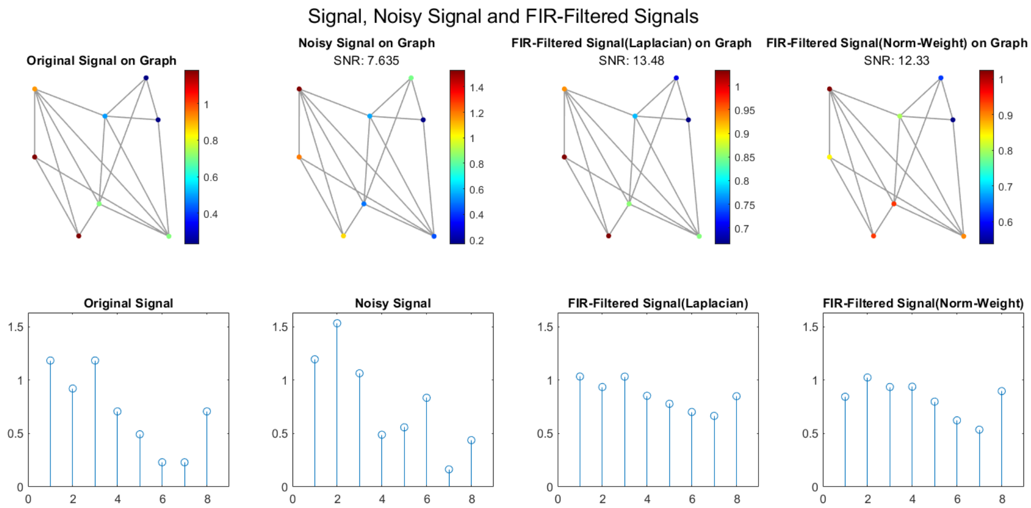
$$h_{FIR}(\lambda) = h_0 + h_1\lambda + h_2\lambda^2, \quad \lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]^T$$
$$h_{FIR} = \underbrace{\begin{pmatrix}\lambda^0 & \lambda^1 & \lambda^2\end{pmatrix}}_{\Lambda_3}\begin{pmatrix}h_0\\h_1\\h_2\end{pmatrix}$$
$$h_{opt} = \underset{h\in\text{FIR}}{\text{argmin}}|h_{ideal} - h|^2 = \Lambda_3\underset{x}{\text{argmin}}|h_{ideal} - \Lambda_3 x|^2 = \Lambda_3\Lambda_3^{\dagger}h_{ideal}$$
$$(h_0, h_1, h_2)^T = \Lambda_3^{\dagger}h_{ideal}$$
$$h_{opt} : \text{projecting } h_{ideal} \text{ onto } \mathbb{C}(\Lambda_3)$$

پس طبق روابط بالا میتوانیم فیلتر FIR با طول دلخواه را پیدا کنیم که کمترین فاصله با فیلتر ایده آل را بسازد، در شکل ۶ این فیلتر با طول ۳ را نمایش داده ایم، برای این فیلتر:

$$h_{L,0} = 1.1685, \quad h_{L,1} = -0.4237, \quad h_{L,2} = 0.0370 \quad h_{W_n,0} = 0.1568, \quad h_{W_n,1} = 0.6164, \quad h_{W_n,2} = 0.3743$$

فیلتر کردن با FIR

حال با فیلتر هایی که در قسمت قبل ساختیم، فیلتر میکنیم.



شکل ۷: از چپ به راست: سیگنال اصلی، سیگنال نویزی، فیلتر شده با فیلتر لاپلاسی، فیلتر شده با فیلتر وزن نورمالیزه

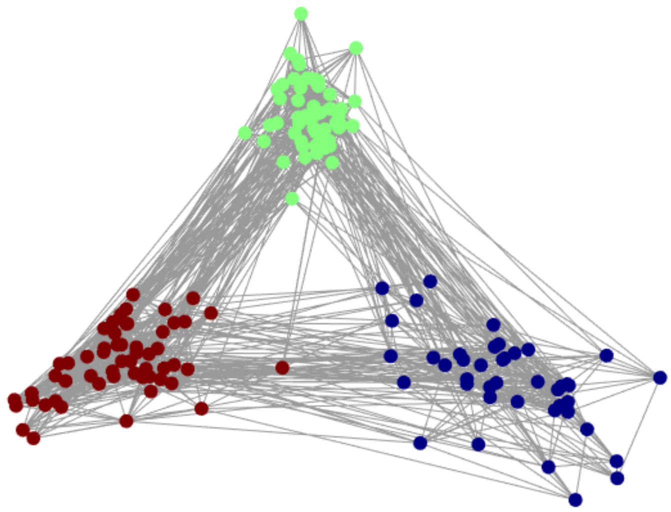
همانطورکه پیداست، SNR در شکل ۵ بسیار بهتر از ۷ که انتظار میرفت، با افزایش طول فیلتر FIR ولی این فاصله کمتر و کمتر میشود.

$$\text{SNR}_{\text{default}} = 7.635 \longrightarrow \underline{\text{SNR}_{FIR,L} = 13.48,} \quad \text{SNR}_{FIR,W_n} = 12.33$$

گروه بندی به وسیله سیگنال های گرافی

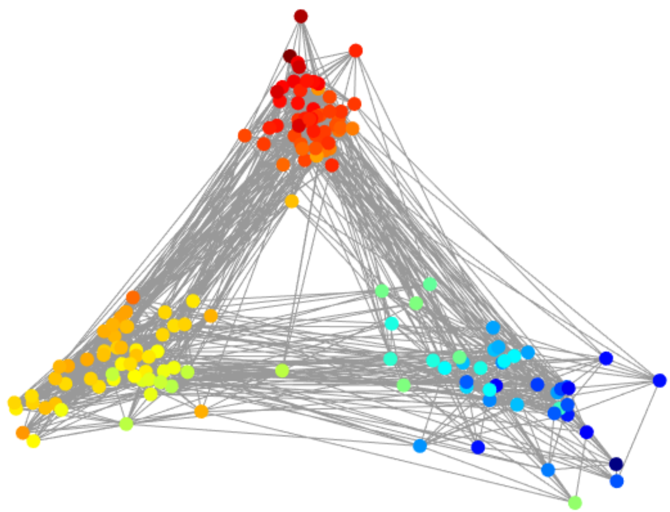
ساخت گراف

مانند تمرین اول، این گراف را تولید میکنیم، با قرار دادن گراف در یک embedding مربوط به بردار ویژه دوم و سوم، گراف زیر را میبینیم.



ساخت سیگنال نرم

حال با استفاده از گرافی که در قسمت قبل ساختیم، تعداد t سیگنال نرم را با استفاده از یک فیلتر FIR با درجه r میسازیم. فیلتر ما به صورت $\mathcal{H}(L_G) = (1 - \alpha L_G)^{r-1}$ تعریف شده است، و t سیگنال نویز سفید را از این فیلتر رد میکنیم تا سیگنال های نرم را بدست آوریم.



شکل ۸: یکی از سیگنال ها بر روی گراف

همانطور که از شکل ۸ پیداست، این سیگنال های نرم میتوانند به خودی خود طبقه بندی خوبی انجام دهند، و دیدی به گروه بندی ها به ما میدهند، حال سعی میکنیم با این سیگنال ها، گروه بندی انجام دهیم و ساختار گراف را پیدا کنیم.

تخمین لاپلاسی

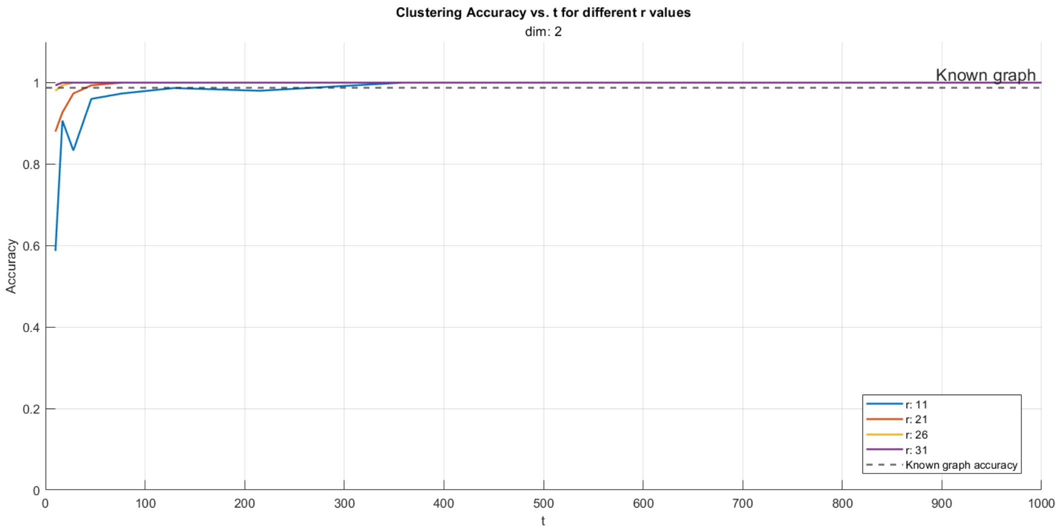
سیگنال های تصادفی، x طی یک فرایند تصادفی تولید شده اند و گوسی سفید است، spectral density این سیگنال بدین صورت است که:

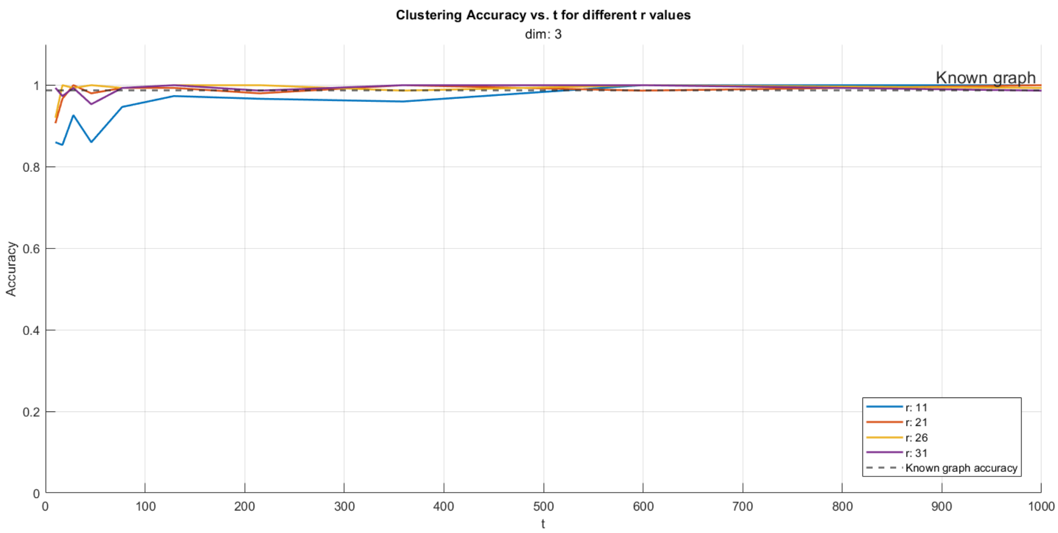
$$\Sigma_x = I_n = U\sigma^2 IU^H = U\text{diag}(\mathbf{1}_n)U^H$$
$$\Sigma_y = U\text{diag}(\mathbf{1}_n \cdot |h|^2)U^H = U\text{diag}(|h|^2)U^H = \mathcal{H}^2$$
$$\mathcal{H}L = L\mathcal{H}$$

در نتیجه، بردار ویژه های ماتریس کوواریانس، همان بردار ویژه های ماتریس لاپلاسی هستند و میتوان با استفاده از آن تخمین زد. فقط باید دقت کنیم که ترتیب مقادیر ویژه در $\mathcal{H}$، برعکس ترتیب آن در L است پس ترتیب سیگنال ویژه ها نیز برعکس در می آید.
سپس بعد از تخمین بردار ویژه ها، همان مراحل spectral clustering را انجام میدهیم.

گروه بندی

حال با بردار وِیژه های تخمین زده شده، embedding جدیدی برای سیگال ها پیدا میکنیم و گروه بندی را با استفاده از k-means انجام میدهیم.





شکل ۹: گروه بندی با استفاده از ۲ بردار ویژه اول(بالا) و با ۳ بردار ویژه اول(پایین)

همانطورکه از ۹ پیداست، این گروه بندی با دقت بسیار بالا انجام میشود.
استفاده از ۲ مثدار ویژه اول نیز کفایت میکند، در حالت کلی پیدا کردیم که برای طبقه بندی k کلاسه، استفاده از $k-1$ بردار ویژه اول برای embedding کافی است.