باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

پردازش سیگنال‌های گرافی

استاد: دکتر امینی، دکتر کاظمی

تمرین سری چهارم

۱ تخمین بیشینه‌گر احتمال پسین برای مساله جداسازی سیگنال‌های گرافی

گراف‌های N راسی $G_1, \dots, G_k$ را در نظر بگیرید. برای گراف G_i با ماتریس لاپلاسین $\mathbf{L}_i = \mathbf{V}_i \Lambda_i \mathbf{V}_i^T$ سیگنالی تصادفی و هموار $\mathbf{x}_i$ را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{V}_i \mathbf{h}_i, \tag{1}$$

که در آن $\mathbf{h}_i \sim \mathcal{N}(0, \Lambda_i^\dagger)$. (چرا با این روش سیگنال‌هایی نسبتا هموار خواهیم داشت؟) حال فرض کنید این سیگنال‌ها با یکدیگر ترکیب شده و سیگنال زیر را تولید کنند

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{K} \mathbf{x}_i + \mathbf{n}, \tag{2}$$

که در آن $\mathbf{n} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I})$ نویز گوسی است. نشان دهید تخمین بیشینه‌گر احتمال پسین MAP برای جداسازی سیگنال‌ها که به صورت زیر است

$$\max_{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_K} \quad \mathbb{P}\{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_K | \mathbf{x}\} \tag{3}$$

معادل مساله زیر است

$$\min_{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K} \quad \|\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{K} \mathbf{x}_i\|_2^2 + \sigma^2 \sum_{i=1}^{K} \mathbf{x}_i^T \mathbf{L}_i \mathbf{x}_i. \tag{4}$$

۲ گراف تصادفی

سیگنال گرافی تصادفی $\mathbf{x}_i \in \{0, 1\}^N$ را به این صورت در نظر بگیرید که مقادیر آن به صورت i.i.d از توزیع برنولی با پارامتر p تولید می‌شوند. با فرض داشتن M سیگنال تصادفی و مستقل $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M$، گراف بدون طوقه G را به این صورت در نظر بگیرید که وزن یال بین راس i و j برابر است با

$$w_{ij} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{M} ((\mathbf{x}_k)_i - (\mathbf{x}_k)_j)^2} \quad i \neq j \tag{5}$$

الف) فرض کنید سیگنال $\mathbf{y}$ یک سیگنال تصادفی و مستقل از سیگنال‌های قبلی با توزیع $\mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I})$ باشد. عبارت زیر را محاسبه کنید

$$\mathbb{E}[\mathbf{y}^T \mathbf{L} \mathbf{y}] \tag{6}$$

ب) مقادیر ویژه ماتریس وزن گراف را $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ در نظر بگیرید. عبارت زیر را محاسبه کنید

$$\mathbb{E}[\sum_{1 \leq i \neq j \leq N} \lambda_i \lambda_j] \tag{7}$$

۳ قدم زدن تصادفی بر روی گراف

یک قدم‌زدن تصادفی تنبل! بر روی گراف را به این صورت تعریف می‌کنیم که در هر مرحله با احتمال ۱/۲ در همان رأسی که هستیم می‌مانیم و با احتمال ۱/۲ به یکی از رئوس مجاور می‌رویم که احتمال رفتن به هرکدام از رئوس مجاور متناسب با وزن یال متصل به آن رأس است. در مرحله اولیه قدم‌زدن تصادفی از یک بردار مانند $p_۰$ شروع می‌کنیم که نشانگر احتمال حضور در هر رأس است. برای مثال اگر بخواهیم قدم‌زدن را از رأس a آغاز کنیم خواهیم داشت $p_۰ = \delta_a$.

اگر p_t بردار توزیع احتمال در مرحله‌ی t قدم‌زدن تصادفی باشد فرض کنید ماتریس $\widetilde{W}$، ماتریس انتقال این قدم زدن تصادفی باشد یعنی داشته باشیم $p_{t+۱} = \widetilde{W} p_t$. همینطور فرض کنید $\omega_۱ \geq \omega_۲ \cdots \geq \omega_n$ مقادیر ویژه این ماتریس و $\psi_۱, \psi_۲, \ldots, \psi_n$ بردار ویژه های این ماتریس باشند.

الف) ارتباط بردار ها و مقادیر ویژه ی ماتریس $\widetilde{W}$ را با بردار ها و مقادیر ویژه‌ی ماتریس مجاورت نرمالیزه $A = D^{-۱/۲} W D^{-۱/۲}$ (منظور از W در اینجا ماتریس وزن است) بیابید.

ب) ثابت کنید $w_۱ = ۱$ و $۰ \leq w_i < ۱$. همینطور بردار ویژه‌ی $\psi_۱$ را بیابید.
راهنمایی: از قضیه پرون–فروبینیوس استفاده کنید.

پ) ثابت کنید با شروع از هر بردار احتمال دلخواه $p_۰$ درنهایت به یک بردار احتمال مشخص π همگرا می‌شویم. همینطور π را بیابید.
راهنمایی: از بسط $D^{-۱/۲} p_۰$ در پایه‌ی $\psi_۱, \ldots, \psi_n$ استفاده کنید.

ت) اگر قدم‌زدن را از رأس a شروع کنیم ثابت کنید داریم:

$$|p_t(b) - \pi(b)| \leq \sqrt{\frac{d(b)}{d(a)}} \omega_۲^t \tag{۸}$$

که در آن منظور از $d(b)$ درجه رأس b است.

۴ یادگیری گراف

در این سوال فرض می‌کنیم m سیگنال گرافی در یک ماتریس $X = [x_۱, x_۲, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ داده شده است. همینطور ماتریس $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ را به صورت $Z_{ij} = \|x_i - x_j\|^۲$ تعریف می‌کنیم.

الف) فرض کنید برای یادگیری گراف از بهینه سازی زیر استفاده می‌کنیم که در آن W ماتریس وزن گراف است.

$$\min_{W \in \mathcal{W}_n} \|Z \circ W\|_{۱,۱} + ۲\sigma^۲ \sum_{i,j} W_{i,j} (\log(W_{i,j}) - ۱) \tag{۹}$$

که در آن منظور از $Z \circ W$ ضرب درایه به درایه است، همینطور $\mathcal{W}_n$ مجموعه تمام ماتریس های وزن برای گراف های n رأسی با وزن های نامنفی است.

و داریم

$\|A\|_{۱,۱} = \sum_{i,j} |A_{ij}|$ ثابت کنید جواب این بهینه سازی به صورت زیر است

$$w_{ij} = \exp(-\frac{\|x_i - x_j\|^۲}{۲\sigma^۲})$$

ب) فرض کنید برای یادگیری گراف از مسئله بهینه‌سازی زیر استفاده می‌کنیم.

$$\min_{W \in \mathcal{W}_n} \|Z \circ W\|_{۱,۱} - \alpha \mathbf{۱}^T \log(W\mathbf{۱}) + \beta \|W\|_F^۲ \tag{۱۰}$$

که در آن منظور از لگاریتم یک بردار، لگاریتم درایه به درایه است. اگر $F(Z, \alpha, \beta)$ جواب مسئله بالا باشد ثابت کنید برای هر $\gamma > ۰$ داریم

$$F(Z, \alpha, \beta) = \gamma F(Z, \frac{\alpha}{\gamma}, \gamma\beta) = \alpha F(Z, ۱, \alpha\beta)$$

۵ یادگیری از سیگنال های گوسی

می‌دانیم یکی از روش های تولید سیگنال تصادفی نرم روی گراف استفاده از بردار گوسی است. برای گراف G با ماتریس لاپلاسین L سیگنال $x \sim \mathcal{N}(0, L^{\dagger})$ را به عنوان سیگنالی نرم روی گراف درنظر می‌گیریم. فرض کنید سیگنال‌های $x_1, x_2, \dots, x_m \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, L^{\dagger})$ را مشاهده می‌کنیم. ماتریس مشاهدات را با $X = [x_1, x_2, \dots, x_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ نمایش می‌دهیم. ثابت کنید تخمین Maximum Likelihood برای L معادل حل مسئله بهینه سازی زیر است

$$\min_{L \in \mathcal{L}_n^+} -\log(\det(L)) + Tr(LS) \tag{11}$$

که در آن $S = XX^T$ است.

۶ مقاومت معادل متر است!

یکی از متر هایی که روی رئوس گراف تعریف می‌شود مقاومت معادل بین دو رأس است. در گراف وزن‌دار همبند $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{W})$ با وزن های مثبت، بجای هر یال e_{ij} یک مقاومت با مقدار $\frac{1}{w_{ij}}$ قرار می‌دهیم. و مقاومت معادل بین دو رأس u و v را با $R_{eff}(u, v)$ نمایش می‌دهیم. در این سوال قصد داریم ثابت کنیم R_{eff} تمام خواص یک متر را دارد.

الف) ثابت کنید داریم $R_{eff}(u, v) = (\delta_u - \delta_v)^T L_{\mathcal{G}}^{\dagger} (\delta_u - \delta_v)$

ب) فرض کنید در شبکه مقاومتی معرفی شده، ولتاژ های دلخواهی روی مجموعه رئوس $B \subset \mathcal{V}$ می‌گذاریم. حال می‌خواهیم این شبکه مقاومتی را حل کنیم و ولتاژ رئوس دیگر را بدست آوریم. ثابت کنید تابع ولتاژ بدست آمده روی رئوس خارج از B هارمونیک است، یعنی داریم

$$\forall u \in \mathcal{V} \backslash B \quad v(u) = \frac{1}{d(u)} \sum_{s:\ (s,u) \in E(\mathcal{G})} w_{su} v(s) \tag{12}$$

همینطور ثابت کنید میتوان ولتاژ های دیگر رئوس را از کمینه کردن انرژی کل شبکه بدست آورد یعنی کافیست تابع $v^T L_{\mathcal{G}} v$ را کمینه کنیم.

حال فرض کنید می‌خواهیم این شبکه مقاومتی را به شبکه ای روی رئوس B کاهش دهیم به‌طوری که شبکه جدید روی رئوس B معادل شبکه اولیه باشد. معنای معادل بودن این است که اگر روی بخشی از رئوس B ولتاژ های دلخواهی بگذاریم و دو شبکه را با توجه به همین ولتاژ ها حل کنیم پاسخ هر دو روی رئوس B یکسان باشد. با توجه به قسمت قبل می‌توان دید برای بدست آوردن شبکه جدید کافیست ماتریسی مانند L_B پیدا کنیم به طوری‌که برای هر انتخاب ولتاژ روی بخشی از B و با این شرط که بردار ولتاژ خارج از B هارمونیک باشد داشته باشیم

$$v(B)^T L_B v(B) = v^T L_{\mathcal{G}} v \tag{13}$$

پ) ثابت کنید ماتریس L_B ماتریس لاپلاسین یک گراف است.
راهنمایی: ابتدا یک رأس را حذف کنید و سپس با استقرا حکم را نتیجه بگیرید.

ت) ثابت کنید مقاومت معادل روی رئوس گراف یک متر است.
راهنمایی: با توجه به قسمت های قبل کافیست نامساوی مثلث را تنها برای گرافی با سه رأس ثابت کنید.