

پردازش سیگنال های گرافی

دکتر آرش امینی



دانشگاه صنعتی شریف

مهندسی برق

برنا خدا بنده ۴۰۰۱۰۹۸۹۸

تمرین کامپیوتری سری اول

۲۶ آبان ۱۴۰۲

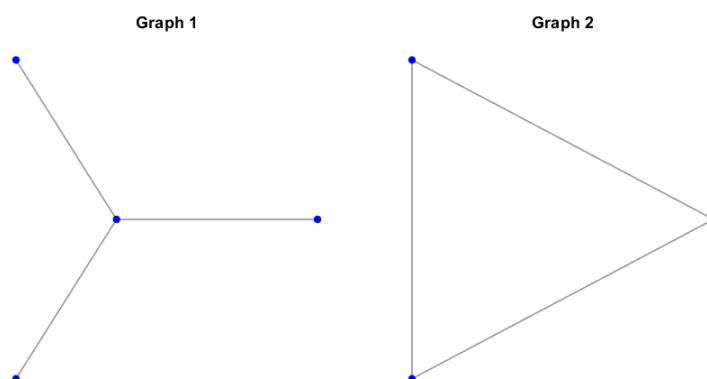


آشنایی با GSPBOX

ابتدا این توبلاکس را نصب کرده، و سپس کارهای خواسته شده را انجام میدهیم. کد کامل این بخش در فایل `Q1.m` ضمیمه شده است.

تعریف و رسم گراف

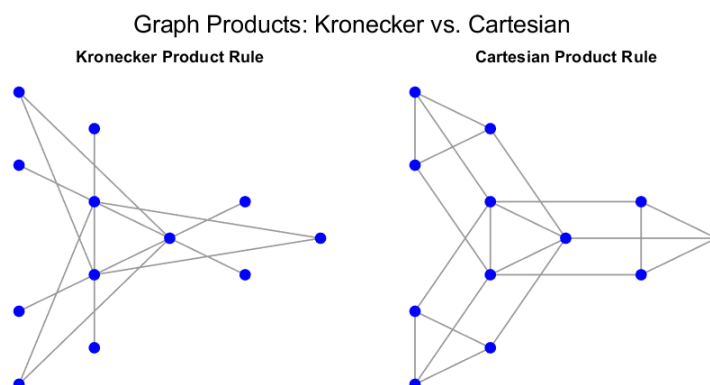
گراف های خواسته شده را به صورت دستی تعریف کرده، و رسم میکنیم، مختصات را با استفاده از گراف های آماده GSPBOX میدهیم، در واقع برای گراف دوم از `ring` استفاده کرده و برای گراف اول از `comet` استفاده میکنیم تا مختصات مد نظر ما را بدهد.



شکل ۱: رسم گراف های G_2 ، G_1

ضرب گراف

با استفاده از تابع `gsp_graph_product` ضرب های گرافی را تشکیل میدهیم.



شکل ۲: رسم گراف های G_t ، G_s

همانطور که از ۲ معلوم است، نظم خاصی در گراف های تشکیل شده از راه ضرب گرافی وجود دارد.

برای ماتریس وزن و اتصالات گراف های تشکیل شده، نتایج در فایل های Gs_matrices.txt ذخیره شده است. ولی در زیر آورده شده اند.

$$A(G_s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

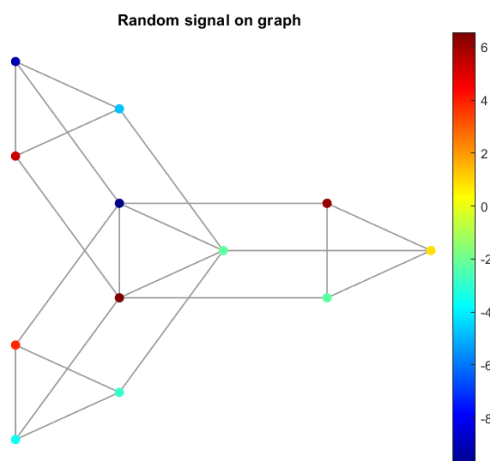
$$W(G_s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{28}{25} & \frac{42}{25} & 0 & \frac{44}{25} & \frac{66}{25} & 0 & \frac{92}{25} & \frac{138}{25} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{28}{25} & 0 & \frac{14}{25} & \frac{44}{25} & 0 & \frac{22}{25} & \frac{92}{25} & 0 & \frac{46}{25} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{42}{25} & \frac{14}{25} & 0 & \frac{66}{25} & \frac{22}{25} & 0 & \frac{138}{25} & \frac{46}{25} & 0 \\ 0 & \frac{28}{25} & \frac{42}{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{28}{25} & 0 & \frac{14}{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{42}{25} & \frac{14}{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{44}{25} & \frac{66}{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{44}{25} & 0 & \frac{22}{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{66}{25} & \frac{22}{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{92}{25} & \frac{138}{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{92}{25} & 0 & \frac{46}{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{138}{25} & \frac{46}{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(G_t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W(G_t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{5} & \frac{12}{5} & \frac{7}{10} & 0 & 0 & \frac{11}{10} & 0 & 0 & \frac{23}{10} & 0 & 0 \\ \frac{8}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{7}{10} & 0 & 0 & \frac{11}{10} & 0 & 0 & \frac{23}{10} & 0 \\ \frac{12}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & 0 & 0 & \frac{11}{10} & 0 & 0 & \frac{23}{10} \\ \frac{7}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{12}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{10} & 0 & \frac{8}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{10} & \frac{12}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{12}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{23}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{23}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{23}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

بررسی فرکانسی

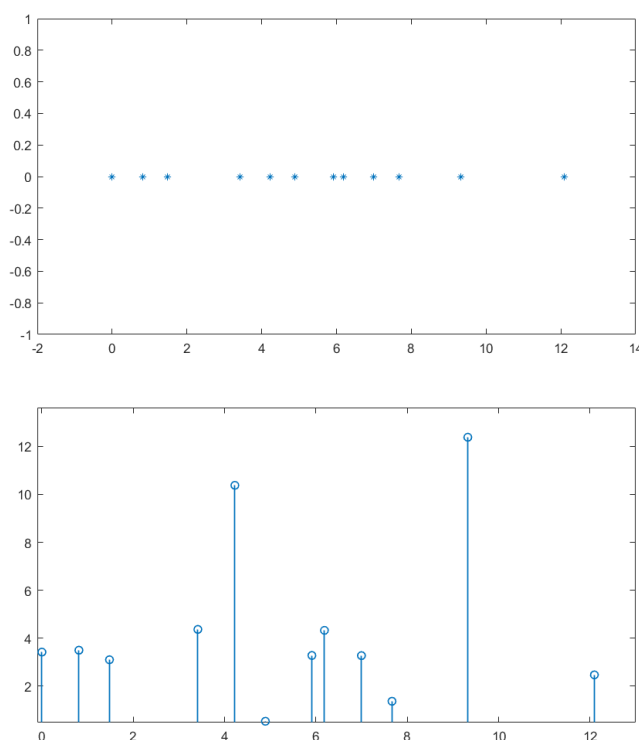
برای ماتریس H ما G_t را انتخاب کرده ایم. سیگنال رندم تولید شده به شکل زیر در آمده:



شکل ۳: نمایش سیگنال تصادفی

طیف گراف

برای بررسی طیف گراف، تبدیل فوریه آن را گرفته و مقادیر ویژه را بررسی میکنیم، نمایش آن را با یکی تبدیل فوریه گرفتن روی سیگنال دیده شده در شکل ۳ انجام میدهیم و یکی صرفا با کشیدن مقادیر ویژه.

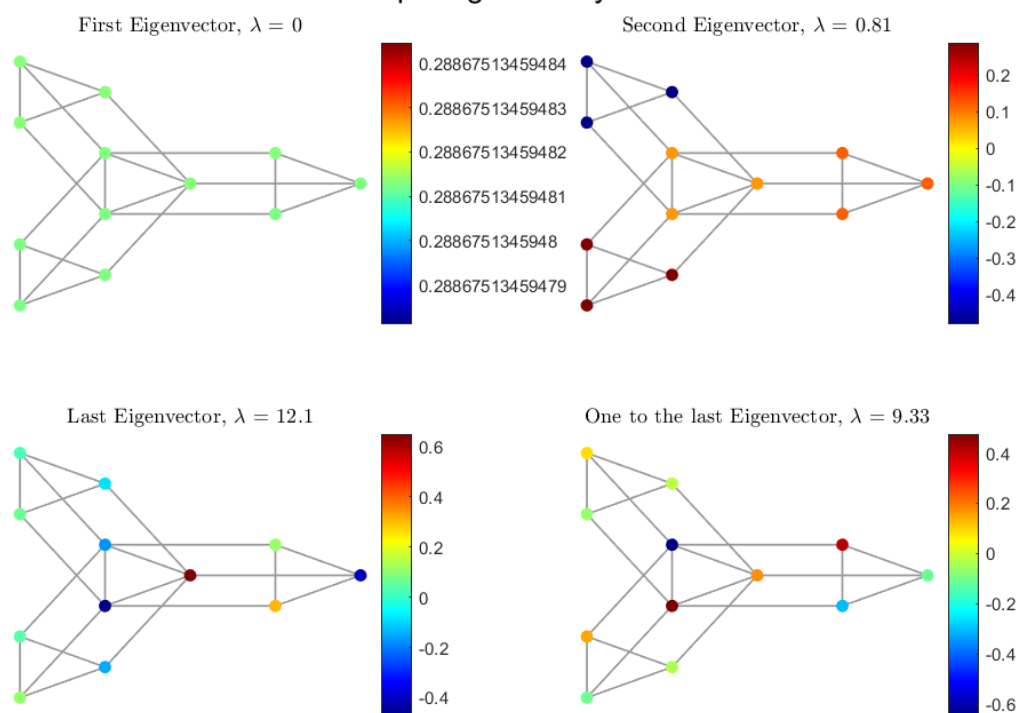


شکل ۴: طیف گراف

سیگنال ویژه های گراف

رسم بدین صورت در می آید.

Graph Signal Analysis

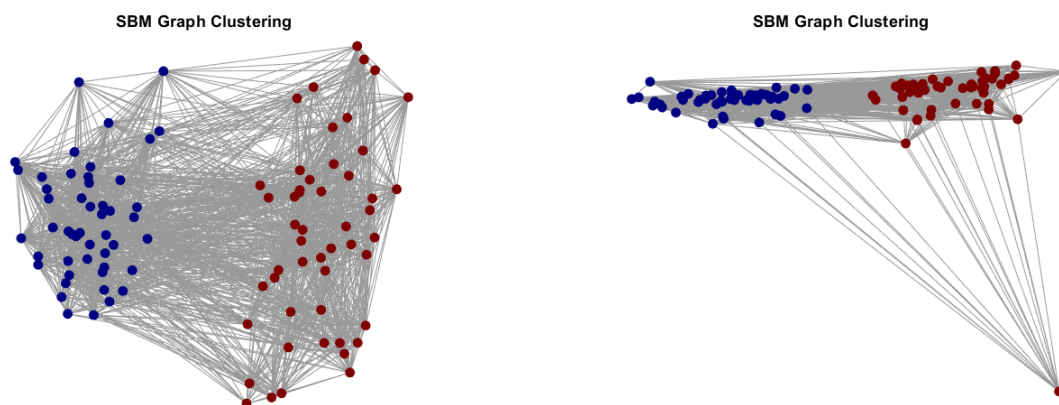


شکل ۵: سیگنال ویژه های گراف

همانطور که از شکل ۵ واضح است، بردار ویژه های اول سیگنال های هموار تری هستند، بدین صورت که اولین سیگنال ویژه به کل ثابت بوده و دومین سیگنال ویژه در همسایگی خود نسبتاً ثابت است، آخرین بردار ویژه ها همواری خاصی ندارند.

تشخیص گروه بندی در گراف و رسم گراف

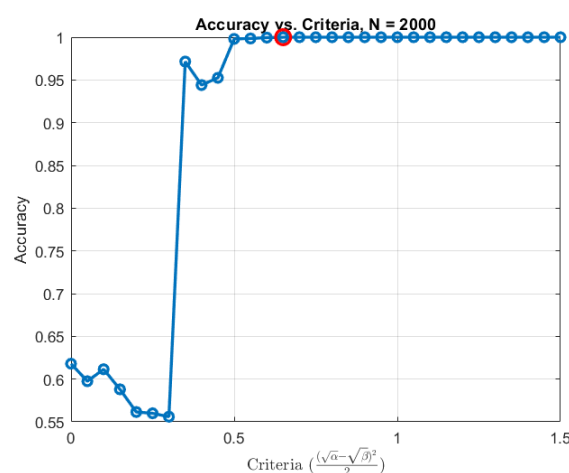
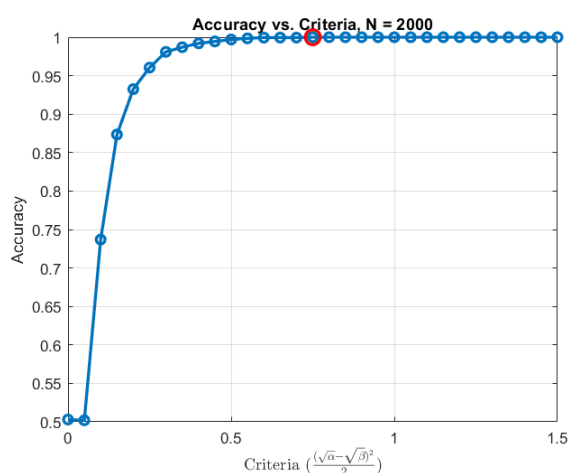
کد های مربوطه در فایل Q2.m ضمیمه شده اند.
شبکه دوستی را همانطور که گفته شده است، تشکیل می‌دهیم و گراف مد نظر را ساخته و تحلیل های فرکانسی مورد نظر را روی گراف SBM ساخته شده انجام می‌دهیم.
در این تحلیل گفته شده که از ماتریس لاپلاسی گراف استفاده کنیم، ولی در عمل دیده شد که استفاده از ماتریس لاپلاسی نورمالیزه به ما طبقه بندی می‌دهد که برای بسیاری طبقه بندی مانند kmeans راحت تر و با دقت بالا تر است.
حال ما جفت این تحلیل ها را انجام داده ایم.



شکل ۶: Laplacien eigenmaps چپ (لاپلاسی نورمالیزه)، راست (لاپلاسی)

حدود طبقه بندی درست

از شکل ۶ واضح می‌شود که علامت بردار ویژه اول، می‌تواند معیار خوبی برای طبقه بندی باشد، می‌توانیم از الگوریتم های clustering متفاوت مانند kmeans نیز استفاده کنیم، در عمل همه این ها را امتحان کرده ولی در گزارش نتیجه kmeans برای نورمالیزه و علامت برای لاپلاسی را آورده ایم.



شکل ۷: چپ (لاپلاسی نورمالیزه+kmeans)، راست (لاپلاسی+علامت)

همانطور که از شکل ۷ واضح است، در جفت روش ها ما موفق به رسیدن به دقت 100% بعد از مقدار مشخصی از $\left(\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{2}\right)$ شده ایم. و با دقت کامل گره بندی کرده ایم.