باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

پردازش سیگنال‌های گرافی

استاد: دکتر امینی، دکتر کاظمی

تمرین سری اول

۱ قضیه ی کورانت_ فیشر

در این سؤال قصد داریم در چند گام قضیه ی زیر را ثابت کنیم.

قضیه‌ی کورانت_ فیشر [1]: فرض کنید M ماتریس متقارن با مقادیر ویژه ی $\mu_n \geq \cdots \geq \mu_1$ باشد. در این صورت داریم:

$$\mu_k = \max_{\substack{S \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim(S)=k}} \min_{\substack{x \in S \\ x \neq 0}} \frac{x^T M x}{x^T x} = \min_{\substack{T \in \mathbb{R}^n \\ \dim(T)=n-k+1}} \max_{\substack{x \in T \\ x \neq 0}} \frac{x^T M x}{x^T x} \qquad (1)$$

(در این سوال نمایش اول را ثابت می‌کنیم. اثبات نمایش دوم مشابه است.)

الف) نشان دهید μ_k قابل دستیابی است. یعنی نشان دهید زیرفضای $S \subseteq \mathbb{R}^n$ با بعد k وجود دارد که برای آن داشته باشیم

$$\mu_k = \min_{\substack{x \in S \\ x \neq 0}} \frac{x^T M x}{x^T x}.$$

ب) اگر $\psi_1, \ldots, \psi_n$ بردار های ویژه متناظر مقادیر ویژه ی $\mu_1, \ldots, \mu_n$ باشند، قرار دهید $T = span\{\psi_k, \ldots, \psi_n\}$ و فرض کنید $S \subseteq \mathbb{R}^n$ زیرفضای k بعدی دلخواهی باشد. ثابت کنید

$$\min_{x \in S} \frac{x^T M x}{x^T x} \leq \max_{x \in T} \frac{x^T M x}{x^T x}.$$

راهنمایی: استدلال کنید که $S \cap T \neq \varnothing$.

پ) ثابت کنید برای هر $x \in T$ (مجموعه تعریف شده در قسمت قبل) داریم

$$\frac{x^T M x}{x^T x} \leq \mu_k$$

و قضیه را نتیجه بگیرید.

۲ درهم‌تنیدگی

فرض کنید $B_{(n-1)\times(n-1)}$ یک زیر ماتریس اساسی از ماتریس متقارن $A_{n\times n}$ باشد (به عبارت دیگر B با حذف یک سطر و ستون هم شماره از A بدست می آید). نشان دهید

$$\lambda_1 \geq \gamma_1 \geq \lambda_2 \geq \gamma_2 \geq \cdots \geq \lambda_{n-1} \geq \gamma_{n-1} \geq \lambda_n \qquad (2)$$

که در آن $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ مقدار ویژه A و $\gamma_1 \geq \cdots \geq \gamma_n$ مقدار ویژه B هستند.
راهنمایی: از قضیه کورانت_ فیشر استفاده کنید.

[1] Courant-Fischer

۳ کاربردی از کیلی همیلتون

فرض کنید ماتریس‌های $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ در رابطه $A = AB - BA$ صدق کنند. ثابت کنید $A^2 = O$ است که O ماتریس تمام صفر می‌باشد.
راهنمایی: از قضیه کیلی_ همیلتون استفاده کنید.

۴ درجستجوی عدد رنگی!

انگیزه! در تمرین سری دوم خواهیم دید چطور با استفاده از این لم می‌توان کرانی برای عدد رنگی یک گراف پیدا کرد.

الف) ماتریس حقیقی متقارن A را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ C^T & D \end{bmatrix}$$

که در آن $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ، $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$ و $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$.
نشان دهید

$$\lambda_{min}(A) + \lambda_{max}(A) \leq \lambda_{max}(B) + \lambda_{max}(D)$$

راهنمایی: فرض کنید $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T]^T$ بردار وِیژه متناظر بزرگترین مقدار ویژه A باشد به طوری که $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ ، $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^m$ و $\|\mathbf{x}\| = 1$. ابتدا حکم را برای حالتی که یکی از $\mathbf{x}_1$ یا $\mathbf{x}_2$ بردار تماما صفر باشد ثابت کنید. سپس برای حالتی که هر دو بردار غیر صفر هستند با در نظر گرفتن $\mathbf{y} = [-\frac{\|\mathbf{x}_2\|}{\|\mathbf{x}_1\|}\mathbf{x}_1^T, \frac{\|\mathbf{x}_1\|}{\|\mathbf{x}_2\|}\mathbf{x}_2^T]^T$ حکم را ثابت کنید. توجه کنید که $\lambda_{min}(A) \leq \mathbf{y}^T A \mathbf{y}$. (منظور از تمامی نرم‌ها در این سوال نرم ۲ است.)

ب) با توجه به قسمت قبل با استقرا روی k ثابت کنید برای ماتریس حقیقی و متقارن

$$A = \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \cdots & M_{1,k} \\ M_{1,2}^T & M_{2,2} & \cdots & M_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1,k}^T & M_{2,k}^T & \cdots & M_{k,k} \end{bmatrix} \tag{3}$$

رابطه زیر برقرار است. ($M_{i,j} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$)

$$(k-1)\lambda_{min}(A) + \lambda_{max}(A) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_{max}(M_{i,i}). \tag{4}$$

۵ دترمینان و چندجمله ای مشخصه

می‌دانیم برای ماتریس $A \in \mathbb{R}^n$ دترمینان به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\det(A) = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \left(sgn(\pi) \prod_{i=1}^{n} A(i, \pi(i)) \right) \tag{5}$$

که در آن جمع بر روی همه‌ی جایگشت های $\{1, 2, \ldots, n\}$ است. برای تعریف $sgn(\pi)$ به لینک مراجعه کنید.
چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\chi_A(x) = \det(xI - A) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sigma_k(A) x^{n-k} \tag{6}$$

اگر λ_i ها مقادیر ویژه ی A باشند که با تکرر جبری شمرده شده‌اند (همان ریشه های چندجمله‌ای مشخصه) ثابت کنید رابطه‌ی زیر برای ضرایب $\sigma_k(A)$ برقرار است

$$\sigma_k(A) = \sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ |S| = k}} \prod_{i \in S} \lambda_i = \sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ |S| = k}} \det(A(S,S)) \tag{7}$$

که در آن منظور از $A(S,S)$ ماتریسی است که از انتخاب سطر و ستون های متناظر با اعضای S ساخته می‌شود.

۶ قضیه‌ی اینرسی سیلوستر

انگیزه! در تمرین سری دوم با استفاده از نتیجه‌ی این تمرین قضیه‌ای در رابطه با علامت درایه های بردار ویژه‌ی یک درخت ثابت خواهیم کرد.

در این سؤال قصد داریم قضیه‌ی زیر را ثابت کنیم.

قضیه‌ی اینرسی سیلوستر [۲]: فرض کنید A یک ماتریس متقارن باشد و B یک ماتریس غیرتکین باشد ($\det(B) \neq ۰$). در این صورت تعداد مقادیر ویژه ی مثبت، منفی و صفر برای ماتریس BAB^T دقیقا مشابه ماتریس A است.

الف) ابتدا استدلال کنید که چرا تعداد مقادیر ویژه ی صفر ماتریس های A و BAB^T برابر است.

ب) در این قسمت ثابت خواهیم کرد تعداد مقادیر ویژه‌ی مثبت ماتریس A حداقل به تعداد مقادیر ویژه‌ی مثبت ماتریس BAB^T است. برای این کار فرض کنید $\gamma_۱, \dots, \gamma_k$ مقادیر ویژه‌ی مثبت BAB^T باشند و Γ_k زیرفضای تولید شده توسط بردار ویژه های متناظر با این مقادیر ویژه باشد. همینطور قرار دهید $\Lambda_k = \{B^T y \ : \ y \in \Gamma_k\}$. حال اگر $\lambda_۱ \geq \cdots \geq \lambda_n$ مقادیر ویژه‌ی ماتریس A باشند ثابت کنید $\lambda_k > ۰$.

راهنمایی: از قضیه‌ی کورانت_فیشر استفاده کنید.

پ) با روش مشابه ثابت کنید تعداد مقادیر ویژه‌ی منفی ماتریس A حداقل به تعداد مقادیر ویژه‌ی منفی ماتریس BAB^T است و قضیه را نتیجه بگیرید.

۷ ترتیب لونر

ترتیب جزئی لونر [۳] روی ماتریس های متقارن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A \preceq B \iff \forall x \in \mathbb{R}^n \quad x^T(B-A)x \ \geq \ ۰$$

ثابت کنید اگر $A \preceq B$ خواهیم داشت

$$\lambda_k(A) \leq \lambda_k(B) \quad \forall\, k \in [n]$$

که در آن $\lambda_۱(A) \geq \cdots \geq \lambda_n(A)$ مقادیر ویژه‌ی A هستند.

راهنمایی: از قضیه کورانت_فیشر استفاده کنید.

[2] Sylvester's Law of Inertia
[3] Loewner Order