« بسمه تعالی »

۱. با استفاده از فرم وردشی، رابطه زیر را برای واگرایی (انحراف) χ^2 اثبات کنید:

$$\chi^2(P_{XY}\|Q_XQ_Y) \geq \chi^2(P_X\|Q_X) + \chi^2(P_Y\|Q_Y).$$

۲. کران پایین برای مسئله حسگری فشرده. . در مسئله حسگری فشرده، هدف بازیابی یک سیگنال (بردار) بعد بالا از روی یک‌سری اندازه‌گیری نویزی است، به طوری‌که تعداد اندازه‌گیری بسیار کوچک‌تر از ابعاد سیگنال است. این‌کار در حالت کلی غیر ممکن است، ولی اگر سیگنال تنک باشد (تعریف آن در ادامه می‌آید) این کار امکان‌پذیر می‌شود. در این‌جا، می‌خواهیم بررسی کنیم که دقت بازیابی سیگنال حداقل چه مقدار باید باشد.

به شکل ریاضی، فرض می‌کنیم که $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ سیگنالی با بعد d باشد که روی آن n اندازه‌گیری نویزی انجام می‌شود. نتیجه این اندازه‌گیری‌ها بردار $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ است که توسط رابطه زیر از روی سیگنال $\mathbf{x}$ توصیف می‌شود:

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{z}$$

که در آن $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$ ماتریس اندازه‌گیری است که ثابت فرض می‌شود و $\mathbf{z} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n)$ بردار نویز گوسی با مؤلفه‌های مستقل است. فرض می‌شود که بردار $\mathbf{x}$ برداری k_ تنک باشد، بدین معنی که تعداد مؤلفه‌های ناصفر $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_d)$ را که با $\|\mathbf{x}\|_0$ نمایش می‌دهیم، حداکثر k باشد. همچنین فرض کنید $k \leq \frac{d}{2}$. با مشاهده $\mathbf{y}$، تخمین $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ از سیگنال $\mathbf{x}$ بدست می‌آید. هدف پیداکردن کران پایین برای رابطه مینیماکس زیر است:

$$\mathsf{E} := \min_{\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y})} \max_{\mathbf{x}\in \mathsf{S}_k^d} \mathbb{E}[\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|^2].$$

که در آن S_k مجموعه همه بردارهای k_ تنک و d_ بعدی است.

برای حل این مسئله روشهای متنوعی (مقاله اصلی این کار از ابزار احتمالات ابعاد بالا استفاده کرده است) وجود دارد. در این مسئله می‌خواهیم راه حلی بر اساس روش فانو پیدا کنیم. بدین منظور مسئله را در چند فاز مطرح می‌شود. در هر فاز می‌توانید از نتایج فازهای قبل حتی اگر موفق به حل آن فاز نشده باشید، استفاده نمایید.

فاز اول: بیشینه آنتروپی تفاضلی در این فاز و فاز بعدی به منظور جلوگیری از قاطی‌شدن ابعاد، فرض می‌کنیم همه بردارها در فضای ℓ_ بعدی هستند.

این فاز به بررسی بیشینه آنتروپی تفاضلی برای یک بردار تصادفی می‌پردازد. جهت یادآوری، آنتروپی تفاضلی یک بردار تصادفی X با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$h(X) := \mathbb{E}[-\log f_X(X)] = -\int f_X(x)\log f_X(x)dx$$

- فرض کنید Y بردار تصادفی گوسی با توزیع $P_Y = \mathcal{N}(0, \beta I)$ باشد. $D(P_X\|P_Y)$ را بر حسب آنروپی تفاضلی X و گشتاور دوم X یعنی $\mathbb{E}[\|X\|^2]$ ساده نمایید.
- نشان دهید که در بین همه متغیرهای پیوسته با گشتاور دوم حداکثر t، بردار گوسی $Y \sim \mathcal{N}(0, \frac{t}{\ell}I)$ بیشینه آنتروپی تفاضلی را داراست. ضمنا مقدار $h(Y)$ را محاسبه نمایید.
- در این قسمت به محاسبه اطلاعات متقابل بین سیگنال $\mathbf{x}$ و مقدار اندازه‌گیری شده $\mathbf{Y} = A\mathbf{x} + \mathbf{z}$ می‌پردازیم. رابطه زیر را نشان دهید:

$$I(\mathbf{x};\mathbf{y}) = h(\mathbf{y}) - h(\mathbf{z})$$

فاز دوم: چرخاندن بردارهای تنک توسط ماتریس‌های جایگشت ماتریس مربعی $\mathsf{B} = [b_{ij}]$ را یک ماتریس جایگشت علامت‌دار می‌گوییم، اگر $b_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ باشد و در هر سطر و هر ستون دقیقا یک عنصر ناصفر وجود داشته باشد.

- نشان دهید ضرب دو ماتریس جایگشت علامتدار خود یک ماتریس جایگشت علامتدار خواهد بود.
- فرض کنید $\mathbf{x}$ برداری k_ تنک باشد. نشان دهید که ضرب در ماتریس جایگشت علامت‌دار تنک بودن را حفظ می‌کند، یعنی $\mathsf{B}\mathbf{x}$ خود برداری k_ تنک است.
- نشان دهید که B ماتریسی یکانی است، یعنی $\mathsf{B}\mathsf{B}^\top = I$. از اینجا نتیجه‌گیری کنید که ضرب در ماتریس B فاصله را حفظ می‌کند، یعنی برای هر دو بردار دلخواه $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ داریم:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \|\mathsf{B}\mathbf{x} - \mathsf{B}\mathbf{x}'\|.$$

- تعداد ماتریس‌های جایگشت را بر حسب ℓ بدست آورید.
- حال فرض کنید که $\mathbf{B}$ به شکل تصادفی و یکنواخت از بین همه ماتریسهای جایگشت علامتدار انتخاب می‌شود. فرض کنید که B_0 یک ماتریس جایگشت علامتدار دلخواه ولی ثابت باشد. نشان دهید که $\widetilde{\mathbb{B}} = \mathsf{B}_0\mathbf{B}$ خود یک ماتریس تصادفی از بین همه ماتریسهای جایگشت علامتدار با توزیع یکنواخت خواهد بود.

○ برای ماتریس تصادفی $\mathbf{B}$ داده شده در قسمت قبل و هر بردار دلخواه $\mathbf{x}$ رابطه زیر را تحقیق کنید:

$$\mathbb{E}[\mathbf{B}\mathbf{x}] = \mathbf{0},$$
$$\mathbb{E}[\mathbf{B}\mathbf{x}\mathbf{x}^\top\mathbf{B}^\top] = \alpha I$$

که در آن $\alpha = \frac{\|x\|^2}{\ell}$ است.

فاز سوم: عدد گنجایشی (packing) برای بردارهای تنک زیرمجموعه زیر از بردارهای kـ تنک با نرم واحد را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{A} := \{\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{k}}(x_1, \cdots, x_\ell) : x_i \in \{-1, 0, 1\}, \|\mathbf{x}\|_0 = k\}$$

○ کران پایین زیر را برای عدد گنجایشی نسبت به نرم اقلیدسی ثابت نمایید:

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}, \|.\|, \frac{1}{2}) \geq \left(\frac{\ell}{k}\right)^{\frac{k}{2}}$$

به عبارت دیگر حداقل $\left(\frac{\ell}{k}\right)^{\frac{k}{2}}$ نقطه درون $\mathcal{A}$ وجود دارند به طوریکه فاصله دو به دو آنها حداقل $\frac{1}{2}$ است.
راهنمایی: ابتدا سعی کنید تعداد نقاط با فاصله کمتر از $\frac{1}{2}$ را برای هر نقطه دلخواه از مجموعه $\mathcal{A}$ را بشمارید (یا کرانی برای آن بدست آورید) و سپس رابطه بالا را ثابت کنید. اثبات این رابطه نیاز به هیچگونه ابزار ابعاد بالا ندارد و فقط از شمارش بدست می‌آید.

فاز چهارم: روش فانو میانگین‌گیری شده در روش فانو کلاسیک، یک مجموعه 2δـ گنجایشی از فضای پارمترها در نظر می‌گرفتیم و با استفاده از نامساوی فانو کران پایینی برای مسئله تخمین پارامتر بدست می‌آوردیم. در روش فانو میانگین‌گیری شده به صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنید که به جای یک مجموعه گنجایشی تعداد زیادی مجموعه گنجایشی داریم که با اندیس $u \in \mathcal{U}$ برچسب‌گذاری شده‌اند. به طور دقیق‌تر، فرض کنید برای هر u، مجموعه $\mathcal{T}_u = \{\mathbf{x}_{1,u}, \cdots, \mathbf{x}_{M,u}\}$ شامل M نقطه با فاصله حداقل دو به دوی 2δ باشد. حال سناریوی زیر را در نظر بگیرید:

ابتدا یکی از اندیسهای مجموعه $\mathcal{U}$ را به صورت تصادفی از روی توزیع دلخواه π_U انتخاب می‌کنیم. همچنین به طور مستقل از U، اندیس $J \in \{1, \cdots, M\}$ را به طور یکنواخت انتخاب می‌نماییم و با داشتن (U, J) سیگنال $\mathbf{X} = \mathbf{x}_{J,U}$ را اندازه‌گیری می‌کنیم و بردار اندازه‌گیری $\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + \mathbf{z}$ را مشاهده می‌کنیم. اطلاعات متقابل شرطی بین سیگنال و اندازه‌گیری شده آن نسبت به توزیع π_U به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}|U) = \mathbb{E}_{u\sim\pi_U}[I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}|U = u)]$$

با استفاده از روش فانو، رابطه زیر را برای کران مینیماکس اثبات نمایید:

$$\mathsf{E} \geq \delta\left(1 - \frac{I(J; \mathbf{Y}|U) + \log 2}{\log M}\right)$$
$$\geq \delta\left(1 - \frac{I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) + \log 2}{\log M}\right)$$

فاز نهایی: کران مینیماکس برای حسگری فشرده با ترکیب قسمت‌های قبل، رابطه زیر را اثبات نمایید:

$$\mathsf{E} \geq C.\frac{k\sigma^2}{\|A\|_F^2}\log\frac{d}{k},$$

که در آن C عددی ثابت و نرم فروبینوس ماتریس A توسط رابطه $\|A\|_F^2 = \mathsf{Tr}(AA^\top)$ تعریف می‌شود.