COMPLEMENT DE COURS SUR LES SUITES NUMERIQUES

I- REPRESENTATION GRAPHIQUE DES TERMES D'UNE SUITE

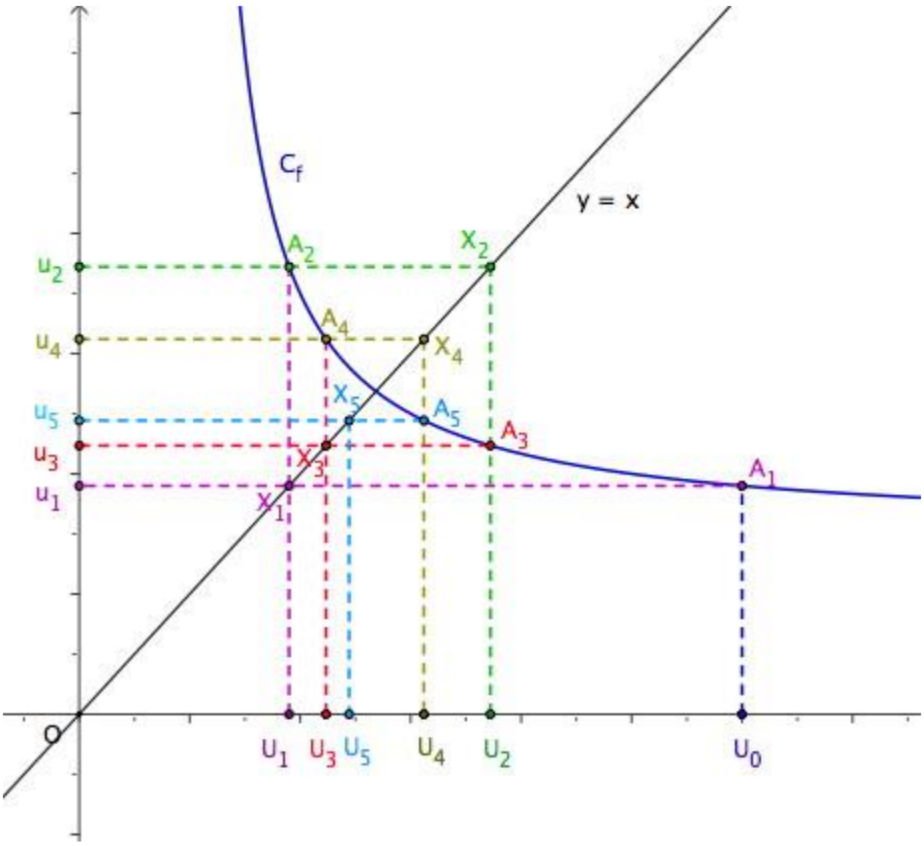
Cette fiche permet de comprendre comment :

- **représenter graphiquement les premiers termes d'une suite** définie par récurrence par une relation du type $U_{n+1}=f(U_n)$
- se servir de cette représentation graphique pour **conjecturer le comportement d'une telle suite** quant à sa convergence

Méthode

Pour conjecturer le comportement d'une suite définie à l'aide d'une fonction f **par** $U_{n+1}=f(U_n)$**, on trace dans un repère** Cf la courbe représentative de f (en bleu sur l'image)

La droite (d) d'équation $y = x$ (en noir sur l'image).



On place, sur l'axe des abscisses, le point de coordonnées $(U_0;0)$ représentant le premier terme de la suite.

Pour trouver $U_1=f(U_0)$ il faut lire l'ordonnée du point A_1 de la courbe Cf.
Le point X_1 de la droite (d) a donc pour coordonnées $(U_1;U_1)$.

Pour trouver $U_2=f(U_1)$ il faut lire l'ordonnée du point A_2 de la courbe Cf.

Et ainsi de suite …… on trouve les autres termes de la suite.

Dans le cas présenté, on peut conjecturer que la suite (Un) possède une limite réelle l qui est l'abscisse du point d'intersection de Cf et de (d).

Pour trouver la valeur de l, il faudra **résoudre l'équation :** $f(l)=l$

Au passage, on peut vérifier, sur cet exemple, qu'**une suite construite à l'aide d'une fonction décroissante n'est pas forcément décroissante.**

En effet, sur l'intervalle présenté, la fonction f est décroissante et les nombres U_0 , U_1 , U_2 , U_3, U_4 et U_5 ne sont pas rangés dans l'ordre inverse de leur rang.
Il faut regarder les emplacements sur l'axe des abscisses.

II -

Suite récurrente linéaire

En mathématiques, on appelle **suite récurrente linéaire d'ordre p**, toute suite à valeurs dans un corps commutatif K (généralement $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$) définie pour tout $n \geq n_0$ par la relation de récurrence suivante :

$a_0, a_1, \cdots a_{p-1}$ étant p scalaires fixés de K (a_0 non nul), pour tout $n \geq n_0$, on a

$$u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{p-1} u_{n+p-1}$$

Une telle suite est entièrement déterminée par la donnée des p premiers termes de la suite et par la relation de récurrence.

Les suites récurrentes linéaires d'ordre 1 s'appellent plus simplement des suites géométriques de raison a_0.

L'étude des suites récurrentes linéaires d'ordre supérieur se ramène à un problème d'algèbre linéaire. L'expression du terme général d'une telle suite est possible pour peu qu'on soit capable de factoriser un polynôme qui lui est associé, appelé polynôme caractéristique ; le polynôme caractéristique associé à une suite vérifiant la relation de récurrence ci-dessus est :

$$P(X) = X^p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i = X^p - a_{p-1} X^{p-1} - a_{p-2} X^{p-2} - \ldots - a_1 X - a_0.$$

Son degré est ainsi égal à l'ordre de la relation de récurrence. En particulier, dans le cas des suites d'ordre 2, le polynôme est de degré 2 et peut donc être factorisé à l'aide d'un calcul de discriminant. Ainsi, le terme général des suites récurrentes linéaires d'ordre 2, peut être exprimé en utilisant seulement les deux premiers termes, quelques valeurs constantes, quelques opérations élémentaires de l'arithmétique (addition, soustraction, multiplication, exponentielle) et les fonctions sinus et cosinus (si le corps des scalaires est le corps des réels). Une des suites de ce type est la très célèbre suite de Fibonacci qui peut s'exprimer à partir de puissances faisant intervenir le nombre d'or.

Suite récurrente linéaire d'ordre 1

Voir

Si la relation de récurrence est $u_{n+1} = q\, u_n$, le terme général est $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$

Suite récurrente linéaire d'ordre 2

a et b étant deux scalaires fixés de K avec b non nul, la relation de récurrence est

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \ (R)$$

On va prouver que le terme général d'une telle suite à valeurs dans K, est

$\lambda r_1^n + \mu r_2^n$ si r_1 et r_2 sont deux racines distinctes (dans K) du polynôme $X^2 - aX - b$,
$(\lambda + \mu n) r_0^n$ si r_0 est racine double du polynôme $X^2 - aX - b$,

avec λ, μ paramètres dans K déterminés par les deux premières valeurs de la suite.

On va prouver de plus que dans le premier de ces deux cas, si les deux racines r_1, r_2 du polynôme $X^2 - aX - b$ sont deux complexes conjugués $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$, alors le terme général de la suite s'écrit également

$\rho^n (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$ avec A, B paramètres dans K déterminés par les deux premières valeurs de la suite.

On ne perd rien à la généralité de la suite en supposant que celle-ci est définie sur tout $\mathbb{N}$ et pas seulement à partir de n_0. En effet, si une suite *(u)* n'est définie qu'à partir de n_0, elle induit la création d'une suite (v) définie sur $\mathbb{N}$ en posant $v_n = u_{n+n_0}$.

L'idée est alors de rechercher des suites géométriques vérifiant la récurrence *(R)*. C'est-à-dire chercher des scalaires r tels que la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie *(R)*. On démontre aisément que ce problème équivaut à résoudre l'équation du second degré $r^2 - ar - b = 0$. Le polynôme $r^2 - ar - b$ est alors appelé le polynôme caractéristique de la suite. Son discriminant est $\Delta = a^2 + 4b$. Il faudra alors distinguer plusieurs cas, selon le nombre de racines du polynôme caractéristique.

Si le polynôme possède deux racines distinctes

Soient r_1 et r_2 les deux racines distinctes. Les suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient *(R)* ainsi que toute suite dont le terme général serait $\lambda r_1^n + \mu r_2^n$ (cela tient au caractère linéaire de la récurrence). A-t-on alors trouvé toutes les suites vérifiant (R) ? Une suite vérifiant *(R)* étant entièrement déterminée par la donnée de u_0 et u_1, il suffit de prouver que l'on peut toujours trouver λ et μ solutions du système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = u_1 \end{cases}$$

Or ce système a pour déterminant $r_2 - r_1$ non nul. Il est donc toujours possible d'exprimer une suite vérifiant

(R) comme combinaison linéaire des suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Cette situation se produit pour toute suite à valeurs réelles pour laquelle le discriminant $\Delta = a^2 + 4b$ est strictement positif, ou pour toute suite à valeurs complexes pour laquelle le discriminant est non nul.

Si le polynôme possède une racine double

Si le discriminant est nul, le problème est tout autre car on ne trouve qu'une seule valeur r_0, donc une seule famille de suites géométriques $(\lambda r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant *(R)* . L'idée consiste alors à rechercher les suites $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier n, $u_n = \lambda_n r_0^n$ avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant *(R)*. Cette méthode s'appelle la méthode de variation de la constante. On s'assure d'abord de l'existence de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en vérifiant que r_0 n'est jamais nul . La relation de récurrence sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se traduit par une relation de récurrence sur $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$r_0^2\lambda_{n+2} = ar_0\lambda_{n+1} + b\lambda_n$$

En utilisant ensuite le fait que $a^2 + 4b = 0$ et que $r_0 = \dfrac{a}{2}$, on obtient la relation caractéristique de toute suite arithmétique :

$$\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1} = \lambda_{n+1} - \lambda_n$$

La suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite arithmétique de terme général

$$\lambda_n = \lambda + \mu n.$$

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant *(R)* ont alors pour terme général :

$$u_n = (\lambda + \mu n)r_0^n.$$

Ce résultat s'applique pour des suites à valeurs réelles ou complexes pour lesquelles le discriminant du polynôme caractéristique est nul.

Cas particulier de deux racines distinctes conjuguées

C'est le cas si le polynôme caractéristique est à coefficients réels et à discriminant strictement négatif. L'équation du second degré possède alors dans $\mathbb{C}$ deux racines conjuguées.

$$r_1 = \rho e^{i\theta} \text{ et } r_2 = \rho e^{-i\theta}, \text{ distinctes.}$$

Le résultat du premier des deux cas ci-dessus s'applique : les suites *complexes* vérifiant *(R)* sont donc les suites de terme général $\lambda\rho^n e^{in\theta} + \mu\rho^n e^{-in\theta}$, avec λ, μ paramètres complexes. Par le changement de paramètres $A = \lambda + \mu,\ B = i(\lambda - \mu)$, ce sont aussi les suites de termes général $u_n = \rho^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$ avec *A, B* paramètres complexes.

Les suites *réelles* vérifiant *(R)* sont donc les suites de terme général

$$u_n = \rho^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$$

avec *A, B* paramètres réels. En effet, la condition sur les paramètres *A, B* (complexes a priori) pour que cette suite soit à valeurs réelles est que A,B soient réels : c'est immédiat dans un sens (si A, B sont réels alors la suite est réelle), et pour la réciproque il suffit de remarquer que $u_0 = A$, $u_1 = A\rho\cos\theta + B\rho\sin\theta$, et $\rho\sin\theta$ non nul (donc si u_0, u_1 sont réels alors A, B aussi).

Suite récurrente d'ordre p

Sous-espace vectoriel de dimension p

Si on appelle (R_p) la relation de récurrence :

pour tout entier n, $u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{p-1} u_{n+p-1}$

et si on appelle E_{R_p}, l'ensemble des suites à valeurs dans K et vérifiant (R_p), on démontre que E_{R_p} est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs dans K. Cela tient à la linéarité de la relation de récurrence.

De plus, ce sous espace vectoriel est de dimension p. En effet, il existe un isomorphisme d'espace vectoriel entre E_{R_p} et l'ensemble K^p : à chaque suite (u) de E_{R_p}, on associe le p_uplet $(u_0, u_1, \cdots, u_{p-1})$. Il suffit alors de connaître une famille libre de p suites vérifiant (R_p), l'ensemble E_{R_p} est alors engendré par cette famille libre.

Terme général

La recherche du terme général et des suites particulières s'effectue en travaillant sur K^p . À chaque suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on associe la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$U_n = (u_n, u_{n+1}, \cdots, u_{n+p-1})$$

La relation de récurrence sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induit une relation de récurrence sur $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$U_n + 1 = AU_n$ où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

Le terme général de la suite U est alors déterminé par

$U_n = A^n U_0$ (A est la matrice compagnon du polynôme caractéristique de la suite).

Le problème semble alors terminé. Mais la réelle difficulté consiste alors à calculer A^n... On préfère plutôt déterminer une base de E_{R_p}.

Recherche d'une base

Le polynôme caractéristique de la matrice A est $P(X) = X^p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i$. Ce n'est pas un hasard si on le retrouve pour caractériser les suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant R_p.

On note *f* la transformation linéaire qui, à une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_{n+1}$. La condition *u vérifie* R_p se traduit alors par $P(f)(u) = 0$. L'ensemble E_{R_p} est donc le noyau de P(f). Si P est un polynôme scindé dans K (ce qui est toujours vrai si $K = \mathbb{C}$), il existe k racines $r_1, r_2, \cdots, r_k$ et k exposants $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ tel que $P = \prod_{i=1}^{k} (X - r_i)^{\alpha_i}$. Le noyau de P(f) est alors la somme directe des noyaux des $(f - r_i Id)^{\alpha_i}$. Il suffit donc de trouver une base de chacun de ces noyaux pour déterminer une base de E_{R_p}.

On peut montrer que toute suite de terme général $Q(n)r_i^n$ est élément du noyau de $(f - r_i Id)^{\alpha_i}$ pour peu que le degré de Q soit inférieur strictement à α_i. Cette démonstration se fait par récurrence sur α_i. Comme les suites $(n^j r_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour j = 0 à $\alpha_i - 1$ forment une partie libre de α_i éléments, la famille de toutes les suites $(n^j r_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour j = 0 à $\alpha_i - 1$ et pour i = 1 à k forme une famille libre de $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = p$ éléments de E_{R_p} (de dimension p) donc une base de E_{R_p}. Les éléments de E_{R_p} sont donc des sommes de suites dont le terme général est $Q(n)r_i^n$ avec degré de Q strictement inférieur à α_i.

Retour à la récurrence d'ordre 2

Si le polynôme caractéristique se scinde en $(X - r_1)(X - r_2)$ alors les polynômes Q sont de degré 0 et les éléments de E_{R_2} sont des suites dont le terme général est $\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$.

Si le polynôme caractéristique se scinde en $(X - r_0)^2$ alors les polynômes Q sont de degré 1 et les éléments de E_{R_2} sont des suites dont le terme général est $(\lambda_1 n + \lambda_2) r_0^n$.

Exercices – Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer en fonction de n le terme général u_n de la suite (u_n) définie sur ℕ par :

1. $\begin{cases} u_0=1 \\ u_1=3 \\ u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0=1 \\ u_1=1 \\ u_{n+2}=-u_{n+1}-u_n \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0=1 \\ u_1=5 \\ u_{n+2}=3u_{n+1}+4u_n \end{cases}$

Exercice 2 :

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0=v_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$: $\begin{cases} u_{n+1}=3u_n+2v_n \\ v_{n+1}=u_n+2v_n \end{cases}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+2}=av_{n+1}+bv_n$.
2. Déterminer (v_n) en fonction de n.
3. Déterminer (u_n) en fonction de n.

Exercice 3 :

On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par $u_0=1$, $v_0=w_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$: $\begin{cases} u_{n+1}=u_n+\sqrt{2}v_n \\ v_{n+1}=\sqrt{2}u_n+v_n+\sqrt{2}w_n \\ w_{n+1}=\sqrt{2}v_n+w_n \end{cases}$.

1. Soit $d_n=u_n-w_n$. Montrer que (d_n) est une suite constante.
2. Soit $S_n=u_n+w_n$. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n et v_n.
3. Exprimer v_{n+2} en fonction de S_{n+1} et v_{n+1}.
4. Exprimer v_{n+2} en fonction de v_n et v_{n+1}.
5. Déterminer v_n en fonction de n.
6. Déterminer S_n en fonction de n.
7. Déterminer u_n et w_n en fonction de n.