COURS D'ANALYSE SEMESTRE 2

VOLUME HORAIRE : 40 H

- **Pré-requis** : Notions de fonction, d'application, de logique, nombres complexes.
- **Objectif général** : Connaître et bien comprendre les fondamentaux de l'analyse.
- **Compétences minimales** : - Savoir majorer, minorer, encadrer.
  - Savoir calculer des limites, dériver, intégrer.
  - Savoir étudier localement une fonction.
  - Savoir gérer des approximations.
- **Programme:** - Chapitre 1 : Suites numériques (suites récurrentes, etc.).
  - Chapitre 2 : Fonctions réelles d'une variable réelle (limites, continuité, dérivation, intégration).
  - Chapitre 3: Approximation d'une fonction numérique (théorèmes de Taylor).

- **Prolongements possibles** : - Résolution approchée d'équations.
  - Gestion des erreurs d'arrondis.
  - Calcul approché d'intégrales.
  - Interpolation polynomiale.
  - Fonctions de plusieurs variables : optimisation, applications en infographie 2D ou 3D.
  - Séries, intégrales généralisées

COURS D'ANALYSE

CHAPITRE 1 : SUITES NUMERIQUES

Objectif général : Connaitre les fondamentaux sur les suites numériques.

Objectifs spécifiques :

A la fin de ce chapitre l'étudiant doit être capable de :

- Connaître la définition et les différentes modes de génération d'une suite
- Déterminer les termes généraux des différentes suites récurrentes linéaires
- Utiliser le raisonnement par récurrence pour démontrer des résultats faisant appel à la récurrence
- Savoir étudier le comportement d'une suite à l'infini ainsi que son sens de variation
- Utiliser les suites dans des situations de la vie courante, notamment dans les autres disciplines de la formation en DUT et en DSTI.

I – Généralités

1- Définitions et notations

a) notion de suite

Une suite U est une application définie sur l'ensemble IN des entiers naturels. L'image U(n) de l'entier n par l'application U est notée U_n : c'est le terme général de la suite ; la suite est aussi notée (U_n)

On distingue plusieurs suites selon leur ensemble d'arrivée :

- La suite U est numérique si son ensemble d'arrivée est un ensemble de nombres

L'application qui à tout entier naturel n associe le réel $\sqrt{3n+5}$ est une suite numérique réelle.

L'application qui à tout entier naturel n associe le nombre complexe z = $(1 + i)^n$ est une suite numérique complexe.

- On définit de même des suites de fonctions, des suites de transformations planes,… selon que l'ensemble d'arrivée est un ensemble de fonctions, de transformations ,… .

Remarque : On peut définir une suite à partir d'un certain rang mais cela ne gène point de les considérer définies à partir de zéro lorsque nous énoncerons leurs propriétés générales.

b) Génération d'une suite numérique réelle

Il y a essentiellement deux moyens distincts de définir une suite numérique :

- On donne pour tout entier n le terme général U_n

Exemple 1 : U est la suite définie par : $U_n = \frac{2n-1}{n^2+3}$

Lorsqu'une suite est ainsi définie, son étude pourra utiliser certaines propriétés de la fonction f telle que $f(n) = U_n$.

- On donne un terme et une relation liant 2 termes consécutifs, dite relation de récurrence de la forme $U_{n+1} = f(U_n)$ où f est une fonction numérique réelle. Une telle suite est dite suite récurrente ou définie par récurrence.

Exemple 2 : $U_0 = 1$ et pour tout entier n, $U_{n+1} = \sqrt{5+2U_n} - 1$. Pour cet exemple, $U_{n+1} = f(U_n)$ où f est la fonction réelle définie par $f(x) = \sqrt{5+2x} - 1$.

Cette définition exige pour la détermination des termes de la suite, un calcul de proche en proche.

Applications :

a) Calculer les 4 premiers termes de la suite de l'exemple 2 précédent

b)On considère la suite de l'exemple 1. Calculer U_8 ; puis U_{2n} et $U_{n+1} - U_n$ en fonction de n

2) Deux suites usuelles

a) Suites arithmétiques

- *Définition*

Une suite U est dite arithmétique si la différence entre deux termes consécutifs est un réel constant r.

Ce réel r est alors appelé raison de la suite.

Exemple : On donne les suites U et V telles que : $U_n = -8n + 11$ et $V_n = n^2 + 2$

Sont-elles arithmétiques ?

On a : $U_{n+1} - U_n = -8(n+1) +11 - (-8n + 11) = -8$; U_n est donc arithmétique de raison -8

$V_{n+1} - V_n = (n+ 1)^2 + 2 - n^2 - 2 = 2n + 1$ qui n'est pas constant ; donc V n'est pas arithmétique

- *Propriétés*

Soit U une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_0 Alors

$U_n = U_0 + nr$ pour tout entier n

$U_n = U_p + (n - p) r$ pour tous entiers n et p

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à la demi-somme des termes extrêmes que multiplie le nombre de termes. Par exemple

$U_0 + U_1 + U_2 + \ldots. + U_n = \frac{(U_0 + U_n)(n+1)}{2}$

En particulier $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots. + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Applications :

1) Trouver 4 termes consécutifs d'une suite arithmétique sachant que leur somme vaut 16 et la somme des carrés vaut 84

2) La somme des 2 premiers termes d'une suite arithmétique est m + 11 ; leur produit est

8m + 24. Trouver les 3 premiers termes de cette suite. (2 solutions)

----

b) Suites géométriques

- **Définition**

Une suite V est dite géométrique si le rapport entre deux termes consécutifs est un réel constant q.

Ce réel q est alors appelé raison de la suite.

- *Exemples*

- La suite V est telle que $V_n = 2^n$; alors $V_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2\,V_n$.

Elle est donc géométrique de raison 2.

-La suite V est telle que $V_n = n^2$ n'est pas géométrique. En effet il n'existe aucun réel constant q tel que $(n+1)^2 = q\,n^2$.

- **Propriétés**

Soit V une suite géométrique de raison q et de premier terme V_0. Alors :

- Pour tout entier n on a : $V_n = V_0\,q^n$.
- Pour tous entiers n et p, on a : $V_n = V_p\,q^{n-p}$.
- La somme S de termes consécutifs est telle que
  - Si q = 1 , la suite étant alors constante S = (nombre de termes)$\times$(premier terme).
  - Si $q \neq 1$, on a S = (premier terme)$\times \dfrac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$

En particulier si x est distinct de 1 on a : $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Applications

1) Déterminer 3 termes consécutifs a , b et c d'une suite géométrique à termes positifs sachant

que $ac = \frac{25}{9}$ et $a + b + c = \frac{65}{9}$.

2) Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 2$ et pour tout entier n $U_{n+1} = 1{,}5U_n + 1$.

Utiliser la suite V définie par : $V_n = U_n + 2$ pour calculer $\sum_{k=0}^{k=n} U_k$.

c) Application aux variations diverses

La variation de certaines grandeurs peut se traduire au moyen de suites arithmétiques et géométriques. C'est le cas lorsque la variation relative est un réel constant : ce réel est naturellement la raison d'une suite arithmétique. Lorsque la variation est une fraction constante de la valeur prise précédemment par cette grandeur, on peut utiliser une suite géométrique pour étudier ce phénomène.

Un cas classique est celui des placements. Un capital C_0 est placé en banque l'année notée 0. On note C_n le capital disponible à la fin de l'année n . Soit x le taux d'intérêt .Il y a deux modes de placement :

- Les intérêts ne s'ajoutent pas au capital (intérêts simples)

Alors $C_{n+1} = C_n + i$ où i est l'intérêt annuel qui est constant car $i = \frac{xC_0}{100}$; la suite (C_n) est donc arithmétique , alors on a $C_n = C_0 + ni$

- Les intérêts s'ajoutent au capital (intérêts composés)

On a $C_{n+1} = C_n + i$ où i est l'intérêt généré par le capital C_n ; donc $i = \frac{xC_n}{100}$; donc

$C_{n+1}= \frac{100+x}{100}C_n$; donc (C_n) est une suite géométrique de raison $\frac{100+x}{100}$ d'où

$C_n = (\frac{100+x}{100})^n C_0$

Exercice 1

Deux entreprises A et B estiment le coût de bitumage d'une route de banlieue longue de 800mètres. Pour l'entreprise A , le premier décamètre coûte 100.000 F, le deuxième 99.000 F, le troisième 98.000 F ; ainsi de suite. Pour l'entreprise B , le premier hectomètre coûte 500.000 F, et chaque hectomètre suivant coûtera 5% plus cher que le précédent. En notant A_n le prix du $n^{ième}$ décamètre proposé par l'entreprise A et B_n le prix du $n^{ième}$ hectomètre proposé par l'entreprise B, déterminer laquelle de ces deux entreprises propose un moindre coût.

d) Remarque

Les suites arithmétique et géométrique peuvent être définies par récurrence, il existe d'autres types de suites récurrentes que l'on définira ci-après.

3) Raisonnement ou démonstration par récurrence

Pour démontrer qu'une propriété qui dépend de l'entier naturel n notée (P_n) est vraie pour tout $n \geq n_0$, on peut procéder de la manière suivante appelée raisonnement par récurrence :

- **Etape de l'initialisation** : On vérifie que (P_{n_0}) est vraie ;

- Etape de l'hérédité : On suppose que la propriété est vraie jusqu'au rang n, c'est-à-dire (P_n) est vraie. Cette hypothèse est dite hypothèse de récurrence. On montre ensuite que (P_{n+1}) est vraie.

- Conclusion : Pour tout $n \geq n_0$, (P_n) est vraie .

Application : Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $1^2 + 2^2 + ... + n^2 + = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4) Autres types de suites récurrentes classiques

a) Définitions :

Une suite (U_n) est dite récurrente du premier ordre s'il existe un réel α et une fonction réelle f telle que $U_0 = \alpha$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

- Si $f(x) = ax + b$, où a et b sont des nombres réels donnés, on dit que la suite (U_n) définie par $U_0 = \alpha$ et $U_{n+1} = aU_n + b$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 1.

- Si $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, où a, b, c et d sont des réels donnés, on dit que la suite (U_n) définie par $U_0 = \alpha$ et $U_{n+1} = \frac{aU_n + b}{cU_n + d}$ est une suite homographique.

Une suite (U_n) est dite récurrente linéaire du second ordre s'il existe quatre réels α, β, a, b tels $U_0 = \alpha$, $U_1 = \beta$ et $U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n$.

b) Etude des suites récurrentes linéaires d'ordre 1

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = \alpha$ et $U_{n+1} = aU_n + b$

- **Cas particuliers :**

. Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors la suite est stationnaire (constante à partir du rang 1)

. Si $a = 1$, alors la suite est arithmétique de raison b

. Si $b = 0$ et $a \neq 0$, alors la suite est géométrique de raison a

- **Cas général :** $a \neq 0$**,** $a \neq 1$ **et** $b \neq 0$

On résout l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire $ax + b = x$. La solution est $x_0 = \frac{b}{1-a}$, appelée point fixe de la suite (U_n). On montre ensuite que la suite auxiliaire (V_n) définie par $V_n = U_n - x_0$ est une suite géométrique de raison a, ce qui permet d'exprimer V_n en fonction de n puis U_n en fonction de n.

Preuve (exercice 2).

Application : Déterminer le terme général de la suite (U_n) définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 5U_n + 4$

----

c) Etude des suites homographiques

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = \alpha$ et $U_{n+1} = \dfrac{aU_n + b}{cU_n + d}$

On cherche le(s) point(s) fixe(s), c'est-à-dire le(les) solution(s) de l'équation $f(x) = x$, où $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

L'équation $f(x) = x$ s'écrit $\dfrac{ax+b}{cx+d} = x$, ce qui devient $cx^2 + (d-a)x - b) = 0$ (1).

1er cas : si l'équation (1) du second degré admet une racine double x_0, alors la suite auxiliaire (V_n) définie par $V_n = \dfrac{1}{U_n - x_0}$ est une suite arithmétique.

2ème cas : si l'équation (1) admet deux solutions réelles x_1 et x_2, alors la suite auxiliaire (V_n) définie par $V_n = \dfrac{U_n - x_1}{U_n - x_2}$ (respectivement $V_n = \dfrac{U_n - x_2}{U_n - x_1}$) est une suite géométrique

Preuve (exercice 3).

Remarque : si l'équation (1) admet deux solutions complexes (conjuguées), alors on peut toujours utiliser le 2ème cas, mais (V_n) est une suite complexe et ce cas n'est pas envisagé dans ce cours.

Applications : Déterminer le terme général de la suite (U_n) dans chacun des cas suivants :

a) $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{7U_n - 3}{U_n + 3} \end{cases}$, b) $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \dfrac{8U_n - 9}{U_n + 2} \end{cases}$

d) Etude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = \alpha$, $U_1 = \beta$ et $U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n$.

On cherche une solution trigonométrique de la forme $U_n = q^n$. On obtient alors l'équation $q^2 = aq + b$ à partir e la relation de récurrence $U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n$.

L'équation du second degré $x^2 = ax + b$ (2) est appelée équation caractéristique de la suite (U_n).

1[er] cas : Si (2) admet une racine double x_0, alors $U_n=(\lambda n+\gamma)x_0^n$

2[ème] cas : Si (2) admet deux racines réelles x_1 et x_2, alors $U_n=\lambda x_1^n+\gamma x_2^n$

3[ème] cas : Si (2) admet deux solutions complexes conjuguées x_1 et x_2 avec $x_1=re^{i\theta}$ et $x_2=re^{-i\theta}$, alors $U_n=r^n(\lambda\cos n\theta+\gamma\sin n\theta)$

Preuve (exercice 4).

Remarque : dans chacun des trois cas ci-dessus, on calcule les constantes λ et γ à partir des premiers termes de la suite.

Applications : Déterminer le terme général de la suite (U_n) dans chacun des cas suivants :

a) $\begin{cases} U_0=2 \\ U_1=1 \\ U_{n+2}=3U_{n+1}-2U_n \end{cases}$, b) $\begin{cases} U_0=-1 \\ U_1=3 \\ U_{n+2}=4U_{n+1}-4U_n \end{cases}$, c) $\begin{cases} U_0=3 \\ U_1=-2 \\ U_{n+2}=-2U_{n+1}-2U_n \end{cases}$

5) Suite extraite

a) Définition : Soit (U_n) une suite numérique. Une suite (V_n) est dite extraite de (U_n) s'il existe une application croissante $\begin{matrix}\varphi: IN\to IN \\ x\mapsto\varphi(n)\end{matrix}$ telle que $V_n=U_{\varphi(n)}$ pour tout entier naturel n.

b) Exemple : Soit (U_n) la suite définie par $U_n=(-1)^n$ pour tout $n\in IN$.

On considère les deux suites extraites (V_n) et (W_n) définies par $V_n=U_{2n}=(-1)^{2n}=1$ et $W_n=U_{2n+1}=(-1)^{2n+1}=-1$. Ces deux suites, constantes, sont les suites extraites de (U_n) de rang pair et de rang impair respectivement.

6) Propriétés des suites numériques

a) <u>suites monotones</u>

La suite U est dite croissante (respectivement décroissante) lorsque pour tout entier naturel n on a : $U_n\le U_{n+1}$ (respectivement $U_n\ge U_{n+1}$).

La suite U est dite croissante (respectivement décroissante) à partir d'un entier n_0 lorsque pour tout entier naturel $n\ge n_0$ on a : $U_n\le U_{n+1}$ (respectivement $U_n\ge U_{n+1}$).

La suite U est dite monotone lorsqu'elle est soit croissante soit décroissante.

Exemples: Etudier le sens de variation de U dans chaque cas :

i) $U_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$ ii) $U_n = n^2 - 8n + 1$ iii) $U_n = \frac{n^2}{2^n}$ iv) $U_0 = 2$ et pour tout n, $U_{n+1} = \sqrt{4U_n + 1}$

Résolution

Pour le i) , la différence $U_{n+1} - U_n$ est égale à $\frac{1}{(k+1)!}$ qui est positif ; donc U est croissante.

Pour le ii) , la différence $U_{n+1} - U_n$ est égale à $2n - 7$ qui est positif dès que $n > 3$ et négatif pour $n < 4$.La suite U est donc croissante à partir de 4.

Pour le iii) , la différence $U_{n+1} - U_n$ est égale à $\frac{-n^2 + 2n + 1}{2^{n+1}}$; donc a même signe que $-n^2+2n+1$.

Soit alors $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ pour tout réel x. Le trinôme f(x) s'annule si $x = -1 - \sqrt{2}$ ou si $x = -1 + \sqrt{2}$. Alors f(x) est négatif pour x élément de $]-\infty ; -1-\sqrt{2}\,] \cup [\,-1+\sqrt{2} ; +\infty[$. En particulier f(n) est négatif dés que $n > 0$. La suite U est donc décroissante à partir de 1.

Remarque :

Puisque tous les termes sont strictement positifs ; cela revient au même de comparer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1.

car $\frac{U_{n+1}}{U_n} - 1 = \frac{-n^2 + 2n + 1}{2n^2}$ qui a même signe que $-n^2+2n+1$ donc est négatif pour $n > 0$. Donc $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ i.e. $U_{n+1} < U_n$ pour tout $n \geq 1$.

Pour le iv) la différence $U_{n+1} - U_n$ vaut $\frac{4(U_n - U_{n-1})}{\sqrt{4U_n + 1} + \sqrt{4U_{n-1} + 1}}$ Donc $U_{n+1} - U_n$ et $U_n - U_{n-1}$ ont même signe . Cela suggère qu'on procède par récurrence .

On vérifie d'abord pour n = 0. On a $U_1 = \sqrt{7}$ donc $U_1 - U_0 > 0$. Supposons alors pour un entier n que l'on ait $U_{n+1} - U_n > 0$. Alors d'après l'égalité précédente $U_{n+2} - U_{n+1} > 0$.

Donc pour tout n on a : $U_{n+1} - U_n > 0$. La suite U est donc croissante.

Exercice 5 Etudier le sens de variation des suites dont le terme général est donné :

a) $U_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ b) $U_n = \frac{n!}{n^4}$ c) $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = \frac{1}{3}(U_n^2 - 2U_n + 4)$

Théorème

Soit U une suite numérique récurrente de premier ordre définie par $U_0 = a$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ où f est une fonction monotone.

1er cas : Si f est croissante, alors :

- (U_n) est croissante si $U_0 \le U_1$
- (U_n) est décroissante si $U_0 \ge U_1$

2ème cas : Si f est décroissante, alors (U_n) n'est pas monotone

Preuve (*Exercice* 6)

b) Majoration- minoration

- **Suite majorée , minorée , bornée**

- La suite U est dite majorée s'il existe un réel M tel que pour tout n on ait : $U_n \le M$. -La suite U est dite minorée s'il existe un réel m tel que pour tout n on ait : $U_n \ge m$

-La suite U est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples :

La suite U telle que $U_n = 2\cos n$ est bornée car pour tout n : $-1 \le \cos n \le 1$ donc $-2 \le U_n \le 2$.

La suite V telle que $V_n = 5^n - 7^n$ est majorée (par 0 par exemple) mais non minorée

La suite W telle que $W_n = n^2 - 5$ est minorée et non majorée.

- Suite majorante, suite minorante

Une suite V est dite majorante (respectivement minorante) de la suite U si à partir d'un certain rang on a $U_n \le V_n$ (respectivement $V_n \le U_n$)

Exemple : Soit $U_n = \frac{\cos n}{n+1}$. On sait que $-1 \le \cos n \le 1$; donc $\frac{-1}{n+1} \le U_n \le \frac{1}{n+1}$

Les suites V et W de terme général respectif donc $\frac{-1}{n+1}$ et $\frac{1}{n+1}$ sont des suites minorante et majorante respectivement de la suite U.

Exercice 7

Dire si la suite est majorée, minorée ou bornée :

a) $U_n = n\sqrt{5} - 7$, b) $V_n = \frac{2+n}{n+4}$ c) $W_n = 2^{-n}$ d) $S_n = \tan(n)$ e) $T_n = (\sin(n))^n$

f) $R_{n+1} = \sqrt{2 + R_n}$ pour tout n et $R_0 = 1$.

<u>Exercice 8</u> Soit U la suite de terme général $U_n = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} k!}{n!}$. Montrer que $\sum_{k=1}^{k=n} k! \,\square\, (n-2)(n-2)!$. En déduire une suite majorante de la suite U.

<u>Exercice</u> *9*

Soit $U_n = (2^n - 4^n)(3 + \sin n)$. Trouver une suite majorante et une suite minorante de U.

c) <u>Suites périodiques</u>

- *Définition*

Une suite U est périodique lorsqu'il existe un entier naturel p non nul tel que $U_{n+p} = U_n$. Le plus petit entier vérifiant cette relation est appelé la période de la suite U.

- *Exemples :*

La suite U est de terme général $U_n = (-1)^n$. On a : $(-1)^{n+2} = (-1)^n(-1)^2 = (-1)^n$. La suite U est donc périodique de période 2 .

Soit $U_n = \cos(\frac{2n\pi}{11})$. On a $U_{n+11} = U_n$ Donc la suite U est périodique et 11 est une de ses périodes.

- *Premières propriétés des suites périodiques:*

- Une suite périodique n'est ni croissante ni décroissante.
- Une suite périodique est bornée car si p est la période de la suite U , elle prend exactement p valeurs distinctes U_k avec $0 \leq k \leq p-1$ parmi lesquelles il y a un plus grand élément et un plus petit élément.

Exercice 10

Soit V la suite définie par : $V_0 = 0$ et pour tout n $V_{n+1} = \frac{2V_n - 1}{V_n - 2}$ pour tout n . Montrer que V est périodique .Montrer que la suite U telle que

$U_n = n - 3\,E\left(\frac{n}{3}\right)$,où E est la fonction partie entière, est périodique.

II - Convergence de suites numériques

1) Limites d'une suite

- limite réelle d'une suite

U est une suite numérique réelle ; l un nombre réel donné. On dit que la suite U tend vers l ou que l est la limite de la suite U et on note $\lim U_n = l$, lorsque tout intervalle ouvert contenant l , contient tous les termes de la suite U sauf un nombre fini d'entre eux . Ceci se traduit par :

Pour tout réel $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver un entier naturel p tel que

si n > p on a $|U_n - l| < \varepsilon$.

Exemple : Prouvons que la suite U telle que $U_n = \frac{n+1}{3n+2}$ tend vers $\frac{1}{3}$.

On a : $U_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3(3n+2)}$; donc $\left|U_n - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{9n}$.

Soit alors $\varepsilon > 0$ donné ; pour avoir $\left|U_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$; il suffit de choisir n tel que $\frac{1}{9n} < \varepsilon$ c'est à dire $n > \frac{1}{9\varepsilon}$. Et comme IR est archimédien il existe un entier naturel p tel que $p > \frac{1}{9\varepsilon}$. Donc si n > p alors $\left|U_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$.

- Suites tendant vers $+\infty$

La suite U tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle $]a, +\infty[$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini de termes, on note alors $\lim U_n = +\infty$. Ceci se traduit par : *Pour tout réel positif M donné, on peut trouver un entier naturel p tel que si n > p on a $U_n > M$*

Exemple : Prouvons que la suite U de terme général $U_n = n^2 - 2n$ tend vers $+\infty$.

Soit M un réel donné . On sait que $n^2 - 2n = n(n-2)$donc si n > 2 on a $n^2 - 2n > (n-2)^2$. Prenons alors un entier p tel que $p > 2 + \sqrt{M}$. Alors n > p entraîne $U_n > M$

- Suite convergente

Une suite est dite convergente lorsqu'elle admet une solution réelle l ; sinon elle est dite divergente

Exemples :

$\lim\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)=\frac{1}{3}$ donc la suite de terme général $U_n = \frac{n+1}{3n+2}$ est convergente.

$\lim(n^2 - 2n) = +\infty$, donc la suite de terme général $U_n = n^2 - 2n$ est divergente.

$\lim(-1)^n$ n'existe pas ; donc la suite de terme général $(-1)^n$ est divergente

- Limites des suites de référence

Soit α un réel strictement positif et b un réel.

- Les suites de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ sont convergentes ; leur limite est zéro.
- Les suites de terme général n^α ont pour limite $+\infty$
- Si $(-1) < b < 1$ alors $\lim(b^n) = 0$; si $b > 1$, $\lim(b^n) = +\infty$ et si b□ (-1) alors $\lim(b^n)$ n'existe pas.

Exercice 11

a) Pour quelles valeurs de b la suite de terme général (b^n) est-elle convergente ?
b) La suite de terme général U_n est-elle convergente ? Sinon pourquoi ?

$U_n = \frac{1}{n}$; $U_n = \sqrt{n}$, $U_n = \frac{2^{2n}}{(-8)^n}$; $U_n = 1{,}0001^n$; $U_n = \sqrt{n^3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{n^{10}}}$

2) Premières propriétés des suites convergentes

a) Unicité de la limite

Théorème :

La limite d'une suite , si elle existe, est unique

Preuve : par l'absurde

Supposons donnée une suite U tendant à la fois vers les réels distincts a et b.

Prenons $\varepsilon = \frac{|b-a|}{4}$, alors $\varepsilon > 0$.

Puisque $\lim U_n = a$, il existe un entier p tel que si n > p ; on a $|U_n - a| \le \varepsilon$.

Puisque limU_n = b, il existe un entier p' tel que si n > p' ; on a $|U_n - b| \leq \varepsilon$.

Or, $|b-a| \leq |U_n - a| + |U_n - b|$. En particulier si n > sup (p ; p') on a

$|U_n - a| \leq \frac{|b-a|}{4}$ et $|U_n - b| \leq \frac{|b-a|}{4}$ alors on doit avoir $|b-a| \leq \frac{|b-a|}{4} + \frac{|b-a|}{4}$ soit

$|b-a| \leq 2\frac{|b-a|}{4}$ donc b – a = 0 ce qui est contraire à l'hypothèse b et a distincts.

La limite d'une suite , si elle existe donc est unique.

b)Une suite convergente est bornée

Soit l la limite d'une suite convergente U. Prenons $\varepsilon = 1$. Il existe un entier p tel que pour tout n > p , on a $|U_n - l| \leq 1$. Donc l'intervalle [l – 1 ; l + 1] contient tous les termes d'indices supérieurs à p . Soit alors E l'ensemble $\{U_0, U_1, ..., U_p, l-1; l+1\}$; il contient un plus grand élément M et un plus petit élément m, et alors pour tout terme U_n de la suite on a: $m \leq U_n \leq M$.

c) Opérations sur les limites de suite

Si limU_n = l et limV_n = l' alors :

lim($U_n + V_n$)= l + l'

lim($U_n.V_n$)= l.l'

lim($\frac{U_n}{V_n}$) = $\frac{l}{l'}$ si l' est non nul.

Ces résultats s'étendent aux cas de limites infinies pourvu que les opérations ainsi posées ne conduisent pas à des indéterminées.

Exemples : Soit à calculer lim U_n lorsque $U_n = \frac{1}{2^n}$ -3n ; $U_n = \frac{n^2+2n+5}{5n-4}$.

On a lim($\frac{1}{2^n}$) = 0 et lim (-3n) = $-\infty$ donc lim [$\frac{1}{2^n}$ -3n] = $-\infty$

On a $\lim(n^2 + 2n + 5) = +\infty$ et $\lim(5n - 4) = +\infty$ On a donc une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. En divisant le numérateur et le dénominateur par n on obtient : $U_n = \frac{n + 2 + \frac{5}{n}}{5 - \frac{4}{n}}$. On reprend le calcul avec cette nouvelle expression de U_n pour établir que $\lim \frac{n^2 + 2n + 5}{5n - 4} = +\infty$

Exercice 12

Déterminer lim U_n dans chaque cas :

$U_n = 2^n - 3$, $U_n = \frac{n^2 + n - 1}{3n^2 + n - 5}$ $U_n = (0,6)^n + (-0,6)^n$ $U_n = (n+1)(\frac{1}{n^3} + \frac{5}{n^2})$

$U_n = 1,00001^n$ $U_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n+1}$ $U_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n - 1$

3) Théorèmes de convergence

a) <u>Utilisation d'inégalités</u>

<u>Théorème :</u>

a. Soient U et V deux suites telles que $U_n \leq V_n$ à partir d'un certain rang :

- Si $\lim U_n = +\infty$ alors $\lim V_n = +\infty$
- Si $\lim V_n = -\infty$ alors $\lim U_n = -\infty$

b. Soient U,V et W trois suites telles que $U_n \leq V_n \leq W_n$ à partir d'un certain rang :

Si $U_n = \lim W_n = l$ (avec l réel) alors $\lim V_n = l$.

<u>Exemples</u> : Etudions la limite des suites U et V avec $U_n = 2 + \frac{\sin n}{n}$ et $V_n = n^2 + n\sin(n)$

On sait que pour tout entier n , on a : $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ donc $2 - \frac{1}{n} \leq U_n \leq 2 + \frac{1}{n}$. Or les suites de terme général $2 - \frac{1}{n}$ et $2 + \frac{1}{n}$ tendent vers 2 ; alors $\lim U_n = 2$.

Pour la suite V, on a pour tout n , : $V_n > n^2 - n$ et que $\lim(n^2 - n) = +\infty$ alors $\lim V_n = +\infty$.

Exercice 13

Soit $U_n = \frac{n^3}{n!}$. Montrer que pour tout entier $n \geq 4$, on a: $n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3)$

En déduire que $\lim U_n = 0$.

b) <u>Critère de Cauchy</u>

- Définition d'une suite de Cauchy

La suite U est dite suite de Cauchy lorsque la différence entre des termes quelconques de la suite peut être rendue aussi petite que l'on veut à condition de choisir leurs rangs suffisamment grands. Ce que l'on traduit par :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel m tel que si q et p sont deux entiers tels que $q > m$ *et* $p > m$ *on ait :* $\left|U_q - U_p\right| \le \varepsilon$.

Exemple : Soit U la suite de terme général $U_n = \frac{n+2}{n-1}$

On a : $U_p - U_q = \frac{3(p-q)}{(p-1)(q-1)}$; donc $\left|U_q - U_p\right| < 3\left|\frac{q-p}{pq}\right| = 3\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| < 3(\frac{1}{p} + \frac{1}{q})$

Soit alors $\varepsilon > 0$ donné, on sait qu'il existe un entier naturel m tel que $m\varepsilon > 6$ i.e. $m > \frac{6}{\varepsilon}$.

Donc pour p > m et q > m, on a : $\frac{1}{p} < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{6}$ et $\frac{1}{q} < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{6}$; par suite $\left|U_q - U_p\right| \le \varepsilon$

- **Théorème**

  Toute suite convergente est une suite de Cauchy

Preuve

Soit U une suite dont la limite est le réel l . Soit alors $\varepsilon > 0$ donné. Par définition il existe un entier m tel que pour tout n vérifiant n > m on ait : $\left|U_n - l\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Donc si on prend 2 entiers q et p tels que q > m et p > m alors $\left|U_q - l\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$ et $\left|U_p - l\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$ .Et comme

$\left|U_q - U_p\right| \le \left|U_p - l\right| + \left|U_q - l\right|$, on en déduit donc que $\left|U_q - U_p\right| \le \varepsilon$.

La suite U est donc une suite de Cauchy.

Application : Etudier la convergence de la suite U telle que $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$

On a : $U_{2n} - U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$. Puisque chacun des n termes de cette somme est supérieure à $\frac{1}{2n}$; alors la somme sera supérieure à $n \times \frac{1}{2n}$ c'est à dire que $U_{2n} - U_n > 1/2$.

La suite U n'est donc pas une suite de Cauchy, donc elle n'est pas convergente.

Remarque : On montre avec la propriété des segments emboîtés que toute suite de Cauchy de réels converge dans IR. Ce n'est pas le cas lorsqu'on se place dans l'ensemble Q des rationnels ; On trouve des suites de rationnels qui sont des suites de Cauchy mais qui n'ont pas de limite dans Q. C'est par exemple le cas de toutes les suites de rationnels dont la limite dans IR est un nombre irrationnel comme $\sqrt{2}$, π ou le nombre d'Euler e.

----

c) Convergence des suites monotones

Théorème :

Toute suite croissante et majorée converge.

Toute suite décroissante et minorée converge.

Application : Soit U la suite définie par $U_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$. On a déjà montré que la suite U est croissante. On sait aussi que pour $k \geq 2$, $k! \geq 2^{k-1}$ donc $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ et alors

$U_n \leq 1+1+\frac{1}{2}+ \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$. Or cette somme est égale à $1+\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$

c'est à dire $3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ qui est majorée par 3 . La suite U est croissante et majorée par 3 donc elle converge

On prouvera que sa limite est le nombre e , base du logarithme népérien . C'est là un exemple de suite de rationnels qui ne converge pas dans Q

Conséquence

Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$ et toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Exercice 14

Soit U la suite numérique telle que $U_0 = 1$ et pour tout entier n ; on a : $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$.

Montrer que $0 \leq U_n \leq 2$.Montrer que la suite U est croissante. Que peut-on en déduire pour la suite (U_n) .

d) Suites adjacentes

- Définition

Deux suites U et V sont dites adjacentes lorsque l'une est une suite croissante, l'autre décroissante et $\lim(U_n - V_n) = 0$

- Propriétés

i) *Si U et V sont 2 suites adjacentes où U est la suite croissante on a : $U_n \leq V_n$ pour tout n.*

Sinon supposons qu'il existe un entier k tel que $U_k > V_k$.

Alors pour tout entier $n \geq k$, on a $U_n \geq U_k$ et $V_n \leq V_k$ donc $U_n - V_n \geq U_k - V_k$;

donc $(U_n - V_n)$ ne tend pas vers 0.

Par suite :$U_n \leq V_n$ pour tout n.

---

ii) Si U et V sont 2 suites adjacentes où U est la suite croissante on a : $U_n \leq V_p$ pour tous entiers naturels n et p.

C'est une conséquence du i) précédent .

iii) Deux suites adjacentes convergent ; elles ont la même limite

Si U est la suite croissante et V la suite décroissante, alors d'après ii) $U_n \leq V_0$ pour tout entier n ; la suite U est croissante et majorée ; donc elle converge.

Toujours d'après ii) $U_0 \leq V_n$ pour tout entier n ; la suite V est donc décroissante et minorée ; donc elle converge.

Puisque U et V sont convergentes $\lim(U_n - V_n) = \lim U_n - \lim V_n$; et comme cette limite est nulle alors $\lim U_n = \lim V_n$

Exercice 15

Soient U et V les suites définies par $U_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$ et $V_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \times n!}$.

Montrer que les suites U et V convergent et ont même limite

e) Composée de suites et de fonctions

- Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et U une suite dont les termes sont des réels de I. Si la limite de U_n est a et que la limite de f en a est b alors la limite de la suite de terme général $f(U_n)$ est b.

Ce théorème est un cas particulier de la limite d'une fonction composée.

Exemple : Soit U_n la suite définie par $U_n = \sin(\frac{\pi n - 1}{4n + 1})$

On peut écrire $U_n = f(V_n)$ où $V_n = (\frac{\pi n - 1}{4n + 1})$ et f (x) = sin (x). Puisque la limite de la suite V est $\frac{\pi}{4}$ et que la limite en $\frac{\pi}{4}$ de f est $\sqrt{2}$ alors la limite de la suite U est $\sqrt{2}$.

Conséquence : Cas des suites $U_{n+1} = f(U_n)$

Soit f une fonction numérique , U la suite définie par la relation $U_{n+1} = f(U_n)$. Si la suite U a pour limite le réel l et que f est continue en l ; alors l est solution de l'équation f(x) = x.

Exemple1 : U est la suite telle que $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$.

On a $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = \sqrt{2+x}$. La limite l de la suite , si elle converge , vérifie alors $l = \sqrt{2+l}$

équation qui admet l'unique solution l = 2.

Il reste cependant à prouver que la suite U est croissante ! (elle l'est car croissante et majorée).

Exemple 2 :U est la suite telle que $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = 4 U_n + 6$.

La limite possible de U est le réel l tel que l = 4l +6 soit l = -2

Mais si on considère la suite V telle que $V_n = U_n + 2$; on montre que V est une suite géométrique de raison 3 donc sa limite est $+\infty$; donc $\lim U_n = +\infty$. La suite U est donc divergente.

Exercice 16

Soit U la suite définie par $U_0 = 0,2$ et pour tout n ; $U_{n+1} = U_n^2 + 3/16$

a) Vérifier que l'intervalle] 0 ; ¼[contient tous les termes de la suite U
b) Montrer que la suite U est monotone
c) En déduire qu'elle converge et trouver sa limite.

f) Convergence et suite extraite

Théorème :

a) Soit (U_n) une suite numérique convergente. Alors toute suite (V_n) extraite de (U_n) est convergente et converge vers la même limite.

b) Soit (U_n) une suite numérique. Si les deux suites extraites (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont convergentes et convergent vers la même limite l, alors (U_n) est convergente et converge vers l.

Preuve (exercice 17)

Application. Soit (U_n) la suite définie $U_n = (-1)^n$. On a $U_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ et $U_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$.

Les deux suites extraites (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont convergentes et convergent vers deux limites différentes 1 et -1. Donc, (U_n) n'est pas convergente.
