

Chapitre 4: Recherche d'un flot maximal dans un réseau ²⁹

Algo de FORD - FULKERSON

25/03/2019

4.1) Réseau de transport, flot dans un réseau

Un réseau de transport est un graphe fini sans boucle où à chaque arc $u \rightarrow v$ $c(u) \geq 0$ appelé **capacité de l'arc** et où il \exists un sommet x_e et un puits / $I^-(x_e) \neq \emptyset$; x_e représente l'entrée du réseau et où il \exists un sommet x_s / $I^+(x_s) = \emptyset$; x_s représente la sortie du réseau.

Un flot f du réseau est une valeur $f(u)$ associée à chaque arc u du réseau /

$$(1) f(u) \geq 0$$

$$(2) f(u) \leq c(u)$$

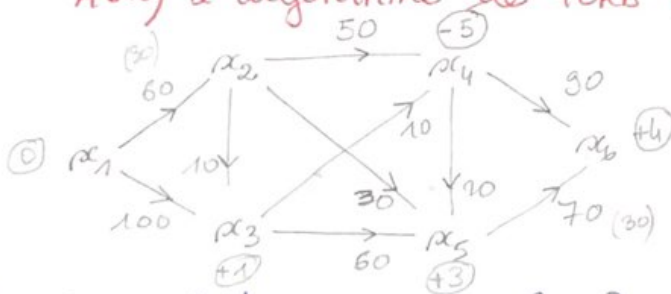
$$(3) \sum_{u \in U_x^-} f(u) - \sum_{u \in U_x^+} f(u) = 0 \quad \text{pour } x \neq x_e \text{ et } x \neq x_s$$

$U_x^- \Rightarrow$ l'ens. des arcs incidents vers l'intérieur à x

$U_x^+ \Rightarrow$ " " " " vers l'extérieur à x

On désigne par $f(x_s)$, l'afflux au sommet x_s ou la valeur du flot dans le réseau. Chercher un flot max. dans un réseau c'est chercher un flot rendant max. l'afflux au sommet x_s . L'algorithme de FORD-FULKERSON permet de résoudre ce problème.

4.2) L'algorithme de FORD FULKERSON



$\circ \rightarrow$ marquage p.r.
Appl. Etape 3

Etape 1: On fait passer dans le réseau, un flot au jugé compatible avec les 3 propriétés. On choisit un chemin: $(x_1, x_2, x_3, x_6) \rightarrow 30$

On regarde la plus petite capacité

Capacité résiduelle d'un arc est la différence entre la capacité de l'arc et le flot sur l'arc.

Etape 2: On cherche un flot complet. Un flot est complet si le chemin allant de x_e à x_s contient au moins un arc saturé i.e. $f(u) = c(u)$
 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \rightarrow 10$

$$(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6) \rightarrow 40$$

$$(x_1, x_3, x_5, x_6) \rightarrow 20$$

$$(x_1, x_2, x_4, x_6) \rightarrow 10$$

(26)

Etape 3: Soit $f_c(x_s)$ un flot complet par une procédure itérative, on va marquer successivement ts ls sommets du graphe où on peut faire parvenir une unité de flot supplémentaire. On marque le sommet x_e avec le coefficient 0.

Si x_i est un sommet marqué: on peut marquer d'autres sommets de 2 façons.

(+i) tt sommet $y \in I^+(x_i)$ non marqué si $C(x_i, y) > 0$

(-i) tt sommet $z \in I^-(x_i)$ non marqué si $f(z, x_i) > 0$

Si avec cette procédure, on parvient à marquer le sommet x_s , il y a entre x_e et x_s , une chaîne Σ dont tt ls sommets x distinctes et marqués avec l'indice du sommet précédent (au signe près)

Application sur le graphe

$$x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_5 \leftarrow x_4 \rightarrow x_6 \quad \text{Chaîne augmentant}$$

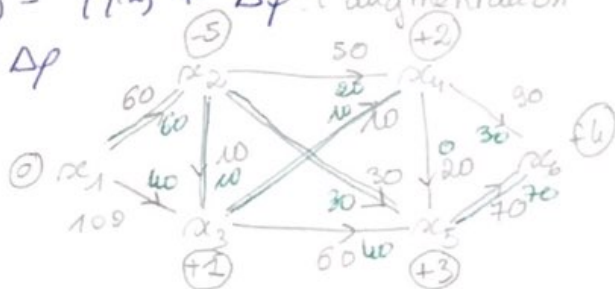
Sur la chaîne, on met la capacité résiduelle pr les arcs orientés dans le sens direct et la valeur saturée pr ceux orientés dans le sens indirect

$$\text{Si } u \notin \sigma \quad f'(u) = f(u)$$

$$\text{Si } u \in \sigma_D: -u \in \sigma_D, \quad f'(u) = f(u) + \Delta f \quad \text{l'augmentation}$$

$$\text{Si } u \in \sigma_I: -u \in \sigma_I, \quad f'(u) = f(u) - \Delta f$$

$$\Delta f = \min_{\substack{u \in \sigma_D \\ v \in \sigma_I}} (C(u, v) - f(u, v))$$



$$\Delta f_1 = \min(80, 40, 20, 80) = 20$$

$$f_2(x_s) = f_c(x_s) + \Delta f_1 = 80 + 20 = 100$$

$$x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_5 \leftarrow x_2 \rightarrow x_4 \rightarrow x_6$$

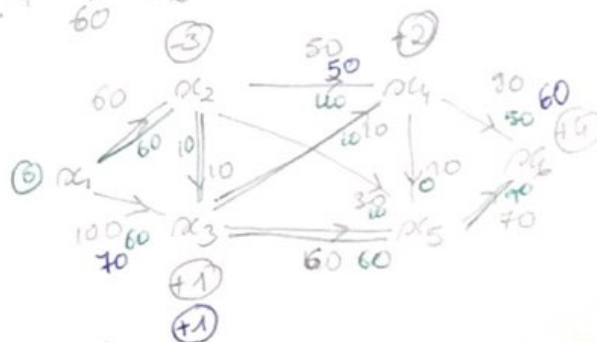
$$\Delta f_2 = \min(60, 20, 30, 30, 60) = 20$$

$$x_1 \rightarrow x_3 \leftarrow x_2 \rightarrow x_4 \rightarrow x_6$$

$$f_3(x_s) = 100 + 20 = 120$$

$$f_4(x_s) = 120 + 10 = 130$$

flot maximal = 130



étape 4: Si par un flot f_* on peut plus améliorer la valeur par la méthode précédente i.e si on peut pas marquer le sommet x_5 , le flot f_* a atteint sa valeur max. on voit facilement dans le cadre de notre ex. qu'il n'est plus possible de marquer la sortie. On a alors un flot maximal.

01/04/2019

4.3) Notion de Coupe

Soit A , un ensemble de sommet du réseau, contenant la sortie x_5 et ne contenant pas l'entrée x_1

L'ens U_A^- des arcs incidents vers l'intérieur à A est une coupe du réseau.

Ex:

$$A = \{x_4, x_5, x_6\}$$

$$U_{A,1}^- = \{(x_2, x_4), (x_3, x_4), (x_2, x_5), (x_3, x_5)\}$$

$$C(U_{A,1}^-) = 50 + 10 + 30 + 60 = 150$$

Comme A contient la sortie, toute unité de matière allant de x_1 à x_5 va emprunter au moins une fois un arc de U_A^- .

∀ un flot f et une coupe U_A^- , on aura :

$$f(x_5) \leq C(U_A^-)$$

S'il ∃ un flot f^* et une coupe V / $f^*(x_5) = C(V)$ on dira que le flot f^* a atteint sa valeur maximale et la coupe V sa capacité minimale.

Ex:

$$f^*(x_5) = 130$$

$$A^* = \{x_2, x_4, x_5, x_6\} \text{ d'ens des sommets non marqués}$$

$$U_{A^*}^- = \{(x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_3, x_5)\}$$

$$C(U_{A^*}^-) = 60 + 10 + 60 = 130$$

Application: Devoir Surveillé

Exo 1: $(p \rightarrow d \rightarrow p); \min \{40; 5; 20\} = 5$

$(p \rightarrow a \rightarrow p); \min \{35; 5; 20\} = 5$

$(p \rightarrow a \rightarrow p); \min \{30; 10; 25\} = 10$

$(p \rightarrow b \rightarrow p); \min \{10; 10; 15\} = 10$

$(p \rightarrow c \rightarrow p); \min \{20; 10; 15\} = 10$

$(p \rightarrow c \rightarrow p); \min \{10; 15; 15\} = 10$

On a flot complet de [50]

3.) Oui, \neq les chemins allant de s à p nt saturés.

Oui la valeur peut être \neq ; un flot peut être complet et pas de valeur maximale.

$$4.) \quad s \xrightarrow{25} a \xrightarrow{5} f \xleftarrow{15} c \xrightarrow{5} e \xrightarrow{10} p$$

$$\Delta f_1 = \min(25, 5, 15, 5, 10) = 5$$

$$f_1 = 45$$

$$f_2 = 45 + 5 = 50 \text{ flot maximal}$$

dorsqu'on reprend le marquage, on pourra pas continuer (on marque que

5.) La coupe est engendrée par les chemins non marqués a)

$$A^* = b, c, d, e, f, p$$

$$u_A = \{(s, b); (s, c); (a, d); (a, e); (a, f)\}$$

$$CU_A = 10 + 20 + 5 + 5 + 10 = 50$$

6.) C'est le flot trouvé en 4

Si on a 2 flots et que les valeurs passées nt \neq donc on aura 2 flots \neq