COURS D'ANALYSE : CHAPITRE 3 – APPROXIMATION D'UNE FONCTION NUMERIQUE (THEOREMES DE TAYLOR)

Objectif général : Connaitre les fondamentaux sur les l'approximation polynomiale et le développement limite.

Objectifs spécifiques :

A la fin de ce chapitre l'étudiant doit être capable de :

- connaître et savoir utiliser les notions d'infiniment petit et d'infiniment grand
- restituer le développement limite des fonctions usuelles ;
- effectuer les opérations sur les développements limités
- utiliser le développement limite pour calculer des limites

I – Comparaison de deux fonctions

1) Définitions

a) S étant un voisinage de x_0, f et deux fonctions numériques définies sur S

On dira que g est négligeable au voisinage de x_0 (fini ou infini) devant f et l'on notera $g = o(f)$ s'il existe une fonction ε définie sur S telle que $g(x) = f(x)\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

b) On dira que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 et on note $f \sim g$ lorsque $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)/g(x)] = 1$

2) Propriétés

- Si $g = o(f)$ et $h = o(g)$, alors, $h = o(f)$
- Si $g = o(f)$ et si h est bornée, alors, $gh = o(f)$

c) Exemples

- $x^{n+1} = o(x^n)$ au voisinage de 0 si $n \in \mathbb{N}$
- Si $\alpha > 0$, $\ln(x) = o(x^{\alpha})$ au voisinage de $+\infty$
- Si $p \in \mathbb{N}$, alors, $x^p = o(e^x)$ au voisinage de $+\infty$

II – Développement limité au voisinage de 0

1) Définitions

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 sauf peut être en 0.

On dira que f(x) admet un développement limité (on notera D.L)d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un intervalle de centre 0 et un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que :

$\forall x \in I$, $x \neq 0$, $f(x) = P_n(x) + \varepsilon(x)x^n$ où ε est une fonction définie sur I avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

$P_n(x)$ est appelée partie régulière du D.L et $\varepsilon(x)x^n$ le reste

Remarque :

On a $\varepsilon(x)x^n = o(x^n)$ donc $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$

2) Propriétés

i) Si f admet un DL au voisinage de 0 et si la partie régulière $P_n(x)$ est non nulle, alors, f(x) est équivalente à $P_n(x)$ au voisinage de 0

ii) Si f(x) admet un DL d'ordre n au voisinage de 0, alors, elle admet au voisinage du même point un DL d'ordre q, $q<n$

iii) Si f(x) admet un DL d'ordre n au voisinage de 0, la fonction n'étant pas supposé définie en 0, on a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = P_n(0)$ et l'on pourra prolonger f par continuité en 0

---

iv) Soit f une fonction définie au voisinage de 0 et continue en 0. Si f admet un DL d'ordre n ($n>0$) en 0, alors, f est dérivable en 0 et $f'(0) = P_n'(0)$

v) Si f admet un DL d'ordre n,($n>0$), alors sa partie régulière $P_n(x)$ est unique

vi) Si f est impaire, alors, les termes de degré pair dans $P_n(x)$ sont nuls

vii) Si f est paire, alors, les termes de degré impair dans $P_n(x)$ sont nuls

3)- Développement limité obtenu à partir de la formule de Mac- Laurin

a) Théorème et définition

Si f, f',…, $f^{(n)}$ sont définies et continues dans un voisinage V de 0 et si $f^{(n+1)}$ est définie et bornée dans V, alors on a la formule suivante dite de Mac- Laurin :

$$\boxed{f(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) \quad + \quad \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \quad (0 < \theta < 1)}$$

En posant $\varepsilon(x) = \dfrac{x}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$, on a $\varepsilon(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0

Par suite, f admet un DL d'ordre n en 0 et sa partie régulière n'est autre que son polynôme de TAYLOR $P_n(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0)$

Ainsi, au voisinage de 0, $\boxed{f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) \quad + \quad x^n \varepsilon(x)}$, $\varepsilon(x)$ tendant vers 0 en 0 .

b) Conséquences

On suppose que f admet un DL à l'ordre n obtenu à l'aide de la formule de Mac- Laurin . La fonction dérivée g = f' vérifie les hypothèses de a) à l'ordre n-1 ;

D'où : $g(x) = g(0) + xg'(0) + \ldots + \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n-1)}(0) + x^{n-1} \varepsilon_1(x)$

En revenant à f : $f'(x) = f'(0) + xf''(0) + \ldots + \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(0) + x^{n-1} \varepsilon_1(x)$

On peut donc conclure que si f admet un DL d'ordre n, alors, f' admet un DL d'ordre n-1 et sa partie régulière est obtenue par dérivation de la partie régulière du DL de f.

De même, toute primitive F de f vérifie les hypothèses de a) l'ordre n+1,d'où

$$F(x) = F(0) + xF'(0) + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(0) + x^{n+1}\varepsilon_2(x)$$

En revenant à f, $F(x) = F(0) + xf(0) + \frac{x^2}{2}f'(0) + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n)}(0) + x^{n+1}\varepsilon_2(x)$

Donc, si f admet un DL d'ordre n, toute primitive F de f admet un DL d'ordre n+1 et sa partie régulière est la primitive de la partie régulière de f qui, pour x = 0, prend la valeur F(0)

4)- Développements limites usuels au voisinage de 0

- $(1+x)^a = 1 + ax \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

<u>Exercice corrigé</u>

1) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^n\varepsilon(x)$

On en déduit par dérivation :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon_1(x)$$

2) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$

On en déduit par intégration :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)} + x^{n+1}\varepsilon_2(x)$$

----

5) Opérations sur les développements limités

a) Somme

Règle : Si f et g admettent un DL d'ordre n au voisinage de 0,alors,f + g admet un DL d'ordre n au voisinage de 0 et sa partie régulière est la somme des parties régulières des DL de f et g.

Exercice corrigé :

$$e^x = 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\,\varepsilon_1(x) \qquad e^{-x} = 1 - x + \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + x^n\,\varepsilon_2(x)$$

D'où, $$e^x + e^{-x} = 2 + 2\left(\frac{x^2}{2!}\right) + \ldots + 2\left(\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) + x^{2n}\,\varepsilon_3(x)$$

Par suite, $$\boxed{ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \left(\frac{x^2}{2!}\right) + \ldots + \left(\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) + x^{2n}\,\varepsilon_4(x)}$$

b) Produit

Rappel : Si dans un polynôme P(x) de degré $\leq$ n on supprime les termes de degré > q, on obtient un polynôme de degré $\leq q$; on dit qu'on a tronqué p(x) à l'ordre q et on écrit :$Q(x) = D_q(\overline{P}(x))$

Règle : Si f et g admettent un DL d'ordre n au voisinage de 0,alors,f.g admet un DL d'ordre n au voisinage de 0 et sa partie régulière est le produit des parties régulières des DL de f et g tronqué à l'ordre n.

Exercice corrigé : Donner un DL en 0 de $f(x) = (x^3 + x^2 + 1)\ln(1+x)$ à l'ordre 4

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\,\varepsilon_1(x)$$

$$\text{d'où, } f(x) = \left[(1 + x^2 + x^3)(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4})\right] + x^4\varepsilon_2(x)$$

$$\boxed{f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + x^4\varepsilon_2(x)}$$

c) Quotient

Règle : Si f et g admettent un DL d'ordre n au voisinage de 0 et si g(x) ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0,alors,f/g admet un DL d'ordre n au voisinage de 0 et sa partie régulière s'obtient en divisant suivant les puissances croissantes à l'ordre n, la partie régulière de f par la partie régulière de g.

Exercice corrigé : Donner un DL d'ordre 2 de f(x) = $\dfrac{\sin x}{\ln(1+x)}$ au voisinage de 0

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)$ $\qquad \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + x^3\,\varepsilon_2(x)$

$$\frac{\sin x}{\ln(1+x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x)} = \frac{1 - \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon_1(x)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon_2(x)} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + x^2\varepsilon(x)$$

d) Composé

Règle : La partie régulière du DL de F(x) = f(u(x)) s'obtient en remplaçant u, dans la partie régulière du DL de f(x), par la partie régulière de u(x), le tout tronqué à l'ordre n

Exercice corrigé :DL à l'ordre 4 de F(x) = ln(cosx) au voisinage de 0

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x) = 1 + u(x)$ avec $u(x) = -\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)$

D'où F(x) = ln(1 +u(x)) avec $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$

On obtient alors : $\ln(\cos x) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} + x^4\varepsilon(x)$

III - Développement limité en $x_0 \neq 0$ et à l'infini

1) Développement limité en x_0

a) Définition :

Une fonction f admet un DL d'ordre n au voisinage de x_0 si la fonction F définie par $F(x) = f(x-x_0)$ admet un DL d'ordre n au voisinage de 0.

b) Exercice corrigé : Donner un DL à l'ordre 3 de $f(x) = e^x$ au voisinage de 1

$$F(x) = f(1+x) = e^{1+x} = e.e^x = e\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)\right]$$

D'où, $\boxed{e^x = e\left[1 + (x-1) + \dfrac{(x-1)^2}{2!} + \dfrac{(x-1)^3}{3!} + (x-1)^3\varepsilon(x-1)\right]}$

2) Développement limité à l'infini

---

a) <u>Définition</u>

Une fonction f admet un DL d'ordre n au voisinage de l'infini si la fonction F définie par F(x) = f(1/x) admet un DL d'ordre au voisinage de 0

b) <u>Exercice corrigé</u> :

Donner le DL de $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x}$ d'ordre 2 au voisinage de l'infini

Solution

$$F(x) = f(1/x) = \frac{1-x^2}{1+2x} = (1-x^2)\,(1-2x+4x^2+x^2\varepsilon(x) = 1-2x+3x^2+x^2\varepsilon(x)$$

D'où, $\boxed{\frac{x^2-1}{x^2+2x} = 1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x})}$

IV - <u>Généralisation des développements limités</u>

1) Définition

Soit f une fonction définie au voisinage de 0 (sauf peut être en 0). On suppose que f n'admet pas de DL au voisinage de 0 mais qu'il existe k>0 tel que $\Phi(x)=x^k f(x)$ admet un DL au voisinage de 0. Dans ce cas :

$x^k f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + x^n\ \varepsilon(x)$

d'où, $f(x) = x^{-k}[a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + x^n\ \varepsilon(x)]$

L'expression ainsi obtenue de f(x) au voisinage de 0 s'appelle DL généralisé de f(x) au voisinage de 0

2) Exemples

a) Développement limité généralisé de $f(x) = \frac{1}{x-x^2}$ au voisinage de 0

f n'admet pas de DL au voisinage de 0 car $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$; par contre,

$$xf(x) = \frac{1}{x-1} = 1+x+x^2+x^3+x^3\ \varepsilon(x)$$

d'où, $\boxed{\frac{1}{x-x^2} = \frac{1}{x}[1+x+x^2+x^3+x^3\ \varepsilon(x)]}$

b) Développement limité généralisé de f(x) = cotg(x)

f n'admet pas de DL au voisinage de 0 car $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$; par contre,

----

$$x.\text{cotg}x = \frac{x\cos x}{\sin x} = \frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon(x)}{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+x^4\varepsilon(x)}$$

Donc, $x.\text{cotg}x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + x^4\varepsilon(x)$

D'où $\boxed{\text{cotg}x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + x^3\varepsilon(x)}$

V - <u>Application à la recherche de limites</u>

Lorsque la règle de l'Hôpital ne donne pas des résultats immédiats, on utilise alors les DL pour lever certaines formes indéterminées

<u>Exercice 1</u> : Trouver $\lim\limits_{x\to 0} (2-x)^{\frac{1}{\sin \pi x}}$ (forme 1^∞)

Solution

On se ramène au voisinage de 0 en posant x = 1 + X

$$f(1+X) = (1-X)^{\frac{1}{\sin\pi(1+X)}} = (1-X)^{-\frac{1}{\sin\pi X}} = e^{-\frac{\ln(1-X)}{\sin\pi X}} = e^{-\frac{-X+X\varepsilon_1(X)}{\pi X+X\varepsilon_2(X)}}$$

d'où, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{X\to 0} f(1+X) = e^{\frac{1}{\pi}}$

Exercice 2 :Trouver lim ($\frac{1}{x} - \cot gx$) quand x tend vers 0

Solution

On a $\text{cotg}(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + x^3\varepsilon(x)$

d'où $\frac{1}{x} - \cot gx = \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + x^3\varepsilon(x)$ et lim ($\frac{1}{x} - \cot gx$) = 0 quand x tend vers 0
