Степанов Линейная алгебра.

3 февраля 2024 г.

Содержание

1 02.02.24 1 лекция **1**

1.1 Ранг Матрицы 1

1.2 Минор Матрицы 1

1.3 Теорема об инвариантности ранга при элементарных преобразованиях 2

1.4 Теорема о базисном миноре 3

1 02.02.24 1 лекция

1.1 Ранг Матрицы

A $\in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Строки столбы матрицы могут быть ЛЗ, ЛНЗ.

$a_1,\dots,a_m$ строки ЛЗ $\iff \exists\ \lambda_1,\dots,\lambda_m \in \mathbb{R}\ \lambda_1^2+\dots+\lambda_m^2 \neq 0$

$\lambda_1 a_1+\dots+\lambda_m a_m = 0 = \overbrace{(0,\dots,0)}^{m}$

$r_1(A)$ - строчный ранг матрицы A - максимальное количество ЛНЗ строк матрицы A.
$0 \leq r_1(A) \leq m$

$r_2(A)$ - столбчатый ранг матрицы A - максимальное количество ЛНЗ столбцов матрицы A. 0 $\leq\ r_1(A) \leq n$

1.2 Минор Матрицы

Определение 1. Минором порядка k, где k $1 \leq k \leq min\{m,n\}$ называется определителем матрицы,образованной элементами стоящими на пересечение некоторых выбранных k строк и k столбцов матрицы A.
$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$
$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$

$M_{i_1\dots i_k}^{j_1\dots j_k}$ – минор, обрзованный строками с номерами $i_1,\dots,i_k$ и столбцами $j_1,\dots,j_k$

Пример

$$A_{3,4} = \begin{pmatrix} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 2 & 1 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 0 & -1 \\ \hline 2 & 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \end{pmatrix}$$

$M_2^4 = a_{24} = -1 \qquad M_{13}^{24} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$

Ранг матрицы A, r(A) = максимальный порядок не нулевого минора матрицы A. $r(A) = max\{0 \le k \le min\{m,n\}\} | \exists$ ненулевой минор порядка k в A, но миноры большого порядка либо $\nexists$ либо все не равны 0.

Пример

$M_{123}^{123} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) = 3$

1.3 Теорема об инвариантности ранга при элементарных преобразованиях

Если матрица A' получена из матрицы A последовательностью элементарных преобразований строк и столбцов, то $r_1(A') = r_1(A)$ и $r_2(A') = r_2(A)$

Доказательство после теории размерности векторных пространств.

Следствие 1. $\forall$ матрицы A $r_1(A) = r_2(A)$

Доказательство: Приведем матрицу A к ступенчатому виду

$$A' = \begin{pmatrix} 0 \dots & a_{1j_1} & \dots & a_{1j_{n-1}} & a_{1j_n} \\ 0 \dots & 0 & a_{2j_2} & \dots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \dots & 0 & 0 & 0 & a_{rj_r} \\ 0 \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_r \le n \qquad a_{1j_1}, \ldots, a_{rj_r} \neq 0$$

Далее поделим k-ую строку на a_{kj_k} и переместим столбы $j_1, \dots, j_r$ в начало матрицы.

$$A' \Rightarrow A'' = \begin{pmatrix} 1 & a''_{12} & \dots & a''_{1n} \\ 0 & 1 & a''_{23} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Из второго столбца вычтем первый с коэффициентом $a''_{12} \dots$ из n-го 1-й с коэффициентом a''_{1n} и т.д для 2-го столбца и 2 строки и т.д.

$$A \sim A''' = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$Teop_1 \Rightarrow r_i(A) = r_i(A'''), i = 1,2$

Первые r строк матрицы A''':

$e_1 = (1,0,\dots,0,\dots,0)$

$e_2 = (0,1,\dots,0,\dots,0)$

$\vdots$

$e_r = (0,0,\dots,1,\dots,0)$

Если $\Sigma \lambda_i e_i = 0 = (0,\dots,0) \Rightarrow (\lambda_1,\dots,\lambda_r,\dots,0) \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0 \Rightarrow$ Эти строки ЛНЗ $\Rightarrow r_1(A''') = r$. Аналогично $r_2(A''') = r \Rightarrow r_1(A) = r_2(A)$ Ч.Т.Д.

Замечание Вычисление ранга матрицы методом элементарных преобразований: Нужно привести матрицу A к ступенчатому виду путём преобразований строк. Тогда $r_1(A) = r_2(A) = r$

– количеству ненулевых строк в ступенчатом виде.

Определение 2. Пусть M – некоторый минор матрицы A минор M' матрицы A называется окаймляющим для M если M' получается из M добавлением одной строки и одного столбца.
Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad M = M_{13}^{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

Окаймляющие: M'^{123}_{123}, M'^{134}_{123}

Определение 3 Минор M матрицы A называется базисным если M $\neq 0$, а все его окаймляющие миноры либо $\nexists$, либо равны 0. Строки и столбцы входящие в базисные миноры называются базисными.

1.4 Теорема о базисном миноре

Базисные строки (столбцы) любой матрицы ЛНЗ. Остальные строки(столбцы) линейно выражаются через базисные.
Доказательство: Для строк, для столбцов аналогично. Если базисные строки ЛЗ, то и строки базисного минора ЛЗ $\Rightarrow$ он равен 0 – противоречие.
Будем считать, что базисный минор M = $M^{1,\dots,r}_{1,\dots,r}$ Рассмотрим определители M', которые получаются добавлением к M i-й строки, i > r и $\forall$ столбцов матрицы A.
Если мы добавим j-й столбце с $j \le r$ то в M'два одинаковых столбца $\Rightarrow M' = 0$.
Если $j > r$, то M' – окаймлённный минор для M $\Rightarrow M' = 0$

$$0 = M' = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix} = (\text{Разложим по последнему столбцу}) = A'_{1j} a_1 j + A'_{2j} a2j + \dots + A'_{rj} rj + M a_{ij} = 0$$

$$a_{ij} = -\frac{A'_{1j}}{M} a_{1j} - \ldots - \frac{A'_{rj}}{M} a_{rj} \quad \forall j = 1, \ldots, n \tag{1}$$

Формула (1) выражает элемент i - й строки через соответствующие элементы 1-й, ... , r-й строк. Коэффициенты не зависят от j $\Rightarrow$ i-я строка линейно выражается через базисные строки. ЧТД.

Следствие 2(Теорема о ранге матрицы) $\forall$ матриц A $r_1(A) = r_2(A) = r(A)$ и равны порядку любого базисного минора.

Доказательство $r_1(A) = r_2(A)$ – уже доказано. Пусть M – базисный минор матрицы A. $M^{12\dots r}_{12\dots r}$. (r+1)–я,…,m–я строки – линейная комбинация базисных строк.

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = A' \quad \text{из теоремы 1} \Rightarrow r_1(A) = r_1(A')$$

Строки (1),…,(r) ЛНЗ $\Rightarrow r_1(A') = r$. r – порядок базисного минора. Если M – максимальный по порядку минор $\neq 0$, то он автоматически базисный $\Rightarrow r(A) = r = r_1(A) = r_2(A)$

Определение 4 Рангом матрицы A называется число rkA определённое любым выше указанным эквивалентным способом.