Степанов Линейная алгебра. .

Содержание

1 02.02.24 1 лекция

1.1 Ранг Матрицы

A $\in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Строки столбы матрицы могут быть ЛЗ, ЛНЗ.

$a_1,\dots,a_m$ строки ЛЗ $\iff \exists\ \lambda_1,\dots,\lambda_m \in \mathbb{R}\ \lambda_1^2+\dots+\lambda_m^2 \neq 0$

$\lambda_1 a_1+\dots+\lambda_m a_m = 0 = \overbrace{(0,\dots,0)}^{m}$

$r_1(A)$ - строчный ранг матрицы A - максимальное количество ЛНЗ строк матрицы A.
$0 \leq r_1(A) \leq m$

$r_2(A)$ - столбчатый ранг матрицы A - максимальное количество ЛНЗ столбцов матрицы A. $0 \leq r_1(A) \leq n$

1.2 Минор Матрицы

Определение 1. Минором порядка k, где k $1 \leq k \leq min\{m,n\}$ называется определителем матрицы,образованной элементами стоящими на пересечение некоторых выбранных k строк и k столбцов матрицы A.
$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$
$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$

$M_{i_1\dots i_k}^{j_1\dots j_k}$ – минор, обрзованный строками с номерами $i_1,\dots,i_k$ и столбцами $j_1,\dots,j_k$

Пример

$$A_{3,4} = \begin{pmatrix} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 2 & 1 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 0 & -1 \\ \hline 2 & 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \end{pmatrix}$$

$M_2^4 = a_{24} = -1$ $\qquad$ $M_{13}^{24} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$

Ранг матрицы A, r(A) = максимальный порядок не нулевого минора матрицы A. $r(A) = max\{0 \le k \le min\{m,n\}\}|\exists$ ненулевой минор порядка k в A, но миноры большого порядка либо $\nexists$ либо все не равны 0.

Пример

$M_{123}^{123} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) = 3$

1.3 Теорема об инвариантности ранга при элементарных преобразованиях

Если матрица A' получена из матрицы A последовательностью элементарных преобразований строк и столбцов, то $r_1(A') = r_1(A)$ и $r_2(A') = r_2(A)$

Доказательство после теории размерности векторных пространств.

Следствие 1. $\forall$ матрицы A $r_1(A) = r_2(A)$

Доказательство: Приведем матрицу A к ступенчатому виду

$$A' = \begin{pmatrix} 0 \dots & a_{1j_1} & \dots & a_{1j_{n-1}} & a_{1j_n} \\ 0 \dots & 0 & a_{2j_2} & \dots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \dots & 0 & 0 & 0 & a_{rj_r} \\ 0 \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_r \le n \qquad a_{1j_1}, \ldots, a_{rj_r} \neq 0$$

Далее поделим k-ую строку на a_{kj_k} и переместим столбы $j_1, \ldots, j_r$ в начало матрицы.

$$A' \Rightarrow A'' = \begin{pmatrix} 1 & a''_{12} & \dots & a''_{1n} \\ 0 & 1 & a''_{23} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Из второго столбца вычтем первый с коэффициентом $a''_{12} \dots$ из n-го 1-й с коэффициентом a''_{1n} и т.д для 2-го столбца и 2 строки и т.д.

$$A \sim A''' = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

$Teop_1 \Rightarrow r_i(A) = r_i(A'''), i = 1,2$

Первые r строк матрицы A''':

$e_1 = (1,0,\ldots,0,\ldots,0)$

$e_2 = (0,1,\ldots,0,\ldots,0)$

$\vdots$

$e_r = (0,0,\ldots,1,\ldots,0)$

Если $\Sigma\lambda_i e_i = 0 = (0,\dots,0) \Rightarrow (\lambda_1,\dots,\lambda_r,\dots,0) \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0 \Rightarrow$ Эти строки ЛНЗ $\Rightarrow r_1(A''') = r$. Аналогично $r_2(A''') = r \Rightarrow r_1(A) = r_2(A)$ Ч.Т.Д.

Замечание Вычисление ранга матрицы методом элементарных преобразований: Нужно привести матрицу А к ступенчатому виду путём преобразований строк. Тогда $r_1(A) = r_2(A) = r$ – количеству ненулевых строк в ступенчатом виде.

Определение 2. Пусть М – некоторый минор матрицы А минор M' матрицы А называется окаймляющим для М если M' получается из М добавлением одной строки и одного столбца.
Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad M = M_{13}^{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

Окаймляющие: $M_{123}^{\prime 123}$, $M_{123}^{\prime 134}$

Определение 3 Минор М матрицы А называется базисным если М $\neq$ 0, а все его окаймляющие миноры либо $\nexists$, либо равны 0. Строки и столбцы входящие в базисные миноры называются базисными.

1.4 Теорема о базисном миноре

Базисные строки (столбцы) любой матрицы ЛНЗ. Остальные строки(столбцы) линейно выражаются через базисные.
Доказательство: Для строк, для столбцов аналогично. Если базисные строки ЛЗ, то и строки базисного минора ЛЗ $\Rightarrow$ он равен 0 – противоречие.
Будем считать, что базисный минор М $= M_{1,\dots,r}^{1,\dots,r}$ Рассмотрим определители M', которые получаются добавлением к М i-й строки, i > r и $\forall$ столбцов матрицы А.
Если мы добавим j-й столбце с $j \le r$ то в M'два одинаковых столбца $\Rightarrow M' = 0$.
Если $j > r$, то M' – окаймлённный минор для М $\Rightarrow M' = 0$

$$0 = M' = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix} = (\text{Разложим по последнему столбцу}) = A'_{1j}a_1j + A'_{2j}a2j + \dots + A'_{rj}rj + Ma_{ij} = 0$$

$$a_{ij} = -\frac{A'_{1j}}{M}a_{1j} - \dots - \frac{A'_{rj}}{M}a_{rj} \quad \forall j = 1,\dots,n \tag{1}$$

Формула (1) выражает элемент i - й строки через соответствующие элементы 1-й, ... , r-й строк. Коэффициенты не зависят от j $\Rightarrow$ i-я строка линейно выражается через базисные строки. ЧТД.

Следствие 2(Теорема о ранге матрицы) $\forall$ матриц А $r_1(A) = r_2(A) = r(A)$ и равны порядку любого базисного минора.
Доказательство $r_1(A) = r_2(A)$ – уже доказано. Пусть М – базисный минор матрицы А.

$M^{12\ldots r}_{12\ldots r}$. (r+1)–я,...,m–я строки – линейная комбинация базисных строк.

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = A' \quad \text{из теоремы } 1 \Rightarrow r_1(A) = r_1(A')$$

Строки (1),...,(r) ЛНЗ $\Rightarrow r_1(A') = r$. r – порядок базисного минора. Если M – максимальный по порядку минор $\neq 0$, то он автоматически базисный $\Rightarrow r(A) = r = r_1(A) = r_2(A)$

Определение 4 Рангом матрицы A называется число rkA определённое любым выше указанным эквивалентным способом.

2 09.02.24 2 лекция

2.1 Определение 1. Векторное(линейное) пространство

Векторное(Линейное) пространство – это множество V с введенными на нём двух операций + и $\lambda\cdot$, $\lambda \in \mathbb{R}$ которые удовлетворяют следующим условиям(аксиомам векторного пространства)

1. $\forall x,y,z \in V \; (x+y)+z = x+(y+z)$ – ассоциативность
2. $\forall x,y \in V \; x+y = y+x$ – коммутативность
3. $\exists 0$ –нулевой вектор$: \forall x \in V \; x+0 = x$
4. $\forall x \in V \; \exists -x \in V: \; x+(-x) = -x+x = 0$
   (V,+) – образуют Абелеву группу.
5. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \; \forall x,y \in V \;\; \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$
6. $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in V \;\; (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$
7. $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in V \;\; \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
8. $\forall x \in V \;\; 1 \cdot x = x$

$\boxed{\textbf{Замечание}}$

Аксиома 2 следует из остальных, докажем это

$$(1+1)(x+y) \overset{5}{=} (1+1)x + (1+1)y \overset{6,1}{=} 1\cdot x + 1\cdot x + 1\cdot y + 1\cdot y \overset{8}{=} x+x+y+y \tag{1}$$

$$(1+1)(x+y) \overset{6}{=} 1\cdot(x+y) + 1(x+y) \overset{5,1}{=} 1\cdot x + 1\cdot y + 1\cdot x + 1\cdot y \overset{8}{=} x+y+x+y \tag{2}$$

(1) и (2) равны $\Rightarrow x+x+y+y = x+y+x+y$. Из 4 аксиомы $\exists -x, -y$ прибавим их слева и справа $\Rightarrow 0+x+y+0 = 0+y+x+0 \overset{3}{\Rightarrow} x+y = y+x$

$\boxed{\textbf{Простые следствия из аксиом}}$

1. $0 \in V$ единственный: если $0'$ – второй нулевой вектор. то $0+0' \Rightarrow 0' = 0$
2. $\forall x \in V \quad -x$ тоже единственный: пусть $-x'$ – второй
   $-x + x + (-x') = -x' + 0 = -x'$
   $-x + (x + (-x')) = -x + 0 = -x \Rightarrow -x' = -x$

3. $\forall x \in V\ 0\cdot x = 0:\quad (0+0)x \overset{0+0=0}{=} 0\cdot x = 0\cdot x + 0\cdot x \Rightarrow$ добавим противоположный вектор $0\cdot x \Rightarrow$ $0\cdot x = 0$

4. $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \ \lambda\cdot 0 = 0$ рассмотрим $\lambda\cdot(0+0)$ доказательство аналогично 3)

5. $\forall x \in V\ -x = (-1)x:$ Рассмотрим выражения $(1-1)\cdot x$
   $0\cdot x = 0$ из (3) с другой стороны: $(1-1)\cdot x = 1\cdot x + (-1)x = x + (-1)x \ \Rightarrow\ x + (-1)x = 0 \ \Rightarrow$ из единственности противоположного вектора$(-1)x = -x$

Определим операцию вычитания векторов: $x - y \overset{def}{=} x + (-y)$

Примеры

0. $(V_3,$ x $,\lambda\cdot)$

1. 0 – векторное(линейное) пространство из 1 элемента (нулевое векторное пространство)

2. $\mathbb{R}$ с обычными операциями

3. пусть I – некоторое множество, $(V_i)_{i\in I}$ – семейство векторных пространств

2.2 Определение 2. Прямое произведение

Прямым произведением семейства $(V_i)_{i\in I}$ называется множество
$\prod\limits_{i\in I} V_i = \{x : I \to \bigcup\limits_{i\in I} V_i |\ \forall i \in I\ \ x_i \in V_i\}$ с операциями $(x+y)(i) \overset{def}{=} x(i)+y(i)$ – сумма в V_i и
$(\lambda x)(i) = \lambda x(i)$ – умножение на скаляр в V_i
$\prod V_i, +, \lambda\cdot$ – векторное пространство

Например, докажем что аксиома 5 справедлива в V_i.
$(\lambda\cdot(x+y))(i) = \lambda[(x+y)(i)] = \lambda(x(i)+y(i)) = \lambda\cdot x(i) + \lambda\cdot y(i) = (\lambda x)(i) + (\lambda y)(i) = (\lambda x + \lambda y)(i) \Rightarrow \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$ Ч.Т.Д.

Также докажем что аксиома 3 справедлива для V_i:
0 в $\prod V_i$ – это функция которая $\forall i \in I\ 0(i) = 0\ \in V_i$

Важные частные случаи

a. Пусть все $V_i \in \mathbb{R}$: Тогда $\bigcup\limits_{i\in I} V_i = \mathbb{R}$
   $\prod V_i$ – это множество всех функций из I в $\mathbb{R}$ с обычными операциями.
   Обозначим : $\prod V_i = R^I = \{f : I \to\ \mathbb{R}\}$
   $A = \{a_1, \ldots, a_m\}\quad B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ всего имеем n^m отображений из A в B

b. $I = \{1,2,\ldots,n\},\ V_i = \mathbb{R}\ \forall i$
   Обозначение $R^i = R^n = \{(x_1,\ldots,x_n) | x_1,\ldots,x_n\ \in \mathbb{R}\}$
   $x + y = (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n);\ \lambda\cdot x = (\lambda x_1,\cdots,\lambda x_n)$
   R^n – n-мерное арифметическое пространство

c. $I = \{1,2\},\ V_1 = U,\ V_2 = W$ – два разных пространства
   $\prod\limits_{i\in I} V_i = U \times W$ – прямое произведение
   $U \times W = \{(u,w) u \in U; w \in W\}$

$(u,w)+(u',w')=(u+u',w+w')$ – в такой ситуации $U \times W$ называется прямой суммой U и W и обозначается $\oplus$
$\lambda(u,m)=(\lambda u+\lambda w)$

2.3 Определение 3. Подпространство

V – векторное пространство. Подмножество $U \subseteq V$ называется векторным(линейным) подпространством если выполнены следующие условия

1. $0 \in U$
2. $\forall x,y \in U \quad x+y \in U$
3. $\forall x \in U \quad ,\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda x \in U$

Примеры

1. $\{0\} \subseteq V$ – тривиальное подпространство.
   $V \subseteq V$ – несобственное подпространство.
2. $(V_i)_{i\in I}$ – семейство векторных пространств

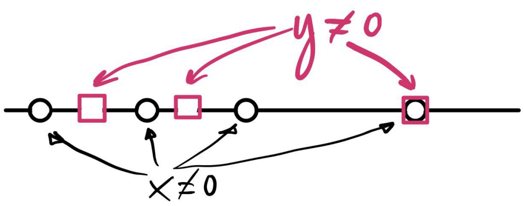
2.4 Определение 4. Прямая сумма семейства

Прямой суммой семейства $(V_i)_{i\in I}$ называется такое подмножество $\bigoplus\limits_{i\in I} V_i = \{X : I \to \bigcup\limits_{i\in I} V_i \mid \forall i \in I \quad x(i) \in V_i$ и множество таких i, что $x(i) \neq 0$, конечно возможно пустое подмножество $\} \subseteq \prod\limits_{i\in I} V_i$

Утверждение: $\bigoplus\limits_{i\in I} V_i$ –подпространство в $\prod\limits_{i\in I} V_i$

Действительно $0 \in \bigoplus\limits_{i\in I} V_i$; если x(i) = 0, то и $\lambda x(i) = 0 \forall i$

x+y:



x+y может быть $\neq 0$ лишь на объединение множества, где $x \neq 0$ и $y \neq 0$
Объединение конечных множеств кончено.
Замечание: если множество I конечно, то $\oplus V_i = \prod_i$ (множества финитных функций)

2.5 Определение 5. Отображение из векторного пространства

Отображение $\phi : V \to W$ из векторного пространства V в векторное пространство V в векторное производство V в векторное пространство W называют линейным если $\forall x, y \in U \quad \lambda, \mu \mathbb{R} \quad \phi(\lambda y + \mu x) = \lambda \phi(x) + \mu \phi(y)$
Если $\phi : V \to V$, то ϕ называется линейным преобразованием или линейным оператором