

太阳影子定位模型设计

摘要

利用太阳影子的长度、方向等特征进行定位并确认日期是一项日益成熟的技术。在掌握了一定的地理知识的前提下，本文根据太阳高度角与纬度、时间的关系以及北京时与地方时的换算公式，以杆长、影长、太阳高度角三者的三角函数关系为基础，建立起影长模型，确定了影长关于各个参数的变化规律。根据题目要求，将已知参数代入模型，利用 Mathematica9.0.1 软件绘制出了影长关于时间间隔的变化曲线并求出了曲线最低点对应的值。利用影子顶点坐标，计算出对应时刻太阳方位角的变化幅度，并建立起太阳方向角变化幅度关于赤纬度、时间间隔、纬度的函数，利用 Mathematica9.0.1 软件通过计算方差进行拟合的方法求解出相应的经度、纬度、日期的取值，从而实现对测量地点的粗略定位和测量日期的判断。将模型应用于题中所给的数据，分别推导出各个数据的测量地点和测量时间，验证了模型的可行性。接下来根据从视频截取的数据，建立基于影长模型的拟合模型，计算拍摄地点、日期，实现了模型在实际生活中的应用。在此基础上，对模型进行了客观的评价并提出了模型改进的方向。

关键词：经纬度 影长方程 方差 Mathematica 软件

一、问题重述

如何确定视频的拍摄地点和拍摄日期是视频数据分析的重要方面，太阳影子定位技术就是通过分析视频中物体的太阳影子变化，确定视频拍摄的地点和日期的一种方法。

1. 建立影子长度变化的数学模型，分析影子长度关于各个参数的变化规律，并应用你们建立的模型画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场(北纬 39 度 54 分 26 秒, 东经 116 度 23 分 29 秒) 3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

2. 根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立数学模型确定直杆所处的地点。将你们的模型应用于附件 1 的影子顶点坐标数据，给出若干个可能的地点。

3. 根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立数学模型确定直杆所处的地点和日期。将你们的模型分别应用于附件 2 和附件 3 的影子顶点坐标数据，给出若干个可能的地点与日期。

4. 附件 4 为一根直杆在太阳下的影子变化的视频，并且已通过某种方式估计出直杆的高度为 2 米。请建立确定视频拍摄地点的数学模型，并应用你们的模型给出若干个可能的拍摄地点。

如果拍摄日期未知，根据视频确定出拍摄地点与日期。

二、问题分析

在利用太阳影子定位的问题中，会涉及遮挡物高度（杆长）及阴影长度（影长），同时结合一定的地理知识，引入太阳高度角和太阳方位角两个变量。其中，太阳高度角取决于地理纬度、时间及太阳赤纬角，而太阳赤纬角又与日期有关；太阳方位角可用太阳高度角、赤纬角及时角表示，同时也可以根据几何关系由影子顶点的坐标计算出。另外，在空间的表示上，使用经度和纬度来定位；在时间的表示上，还涉及北京标准时与地方时的转换。通过将上述各个变量结合在一起，即可实现时间和空间的联系，组合出若干方程用于求解。

问题一所给信息比较完备，求影长的变化曲线实为利用已知条件求影长，然后借助 Mathematica 软件绘制出模型相应的曲线。借助一定的地理知识，可以简单的根据几何关系列出等式，再结合现有的相关变量的求解方法，则可整合出最终用于求解影长的模型。在该问的模型应用部分，已知条件比较充分，可直接将已知量代入影长模型，得到影长关于某一变量的函数关系并借助软件绘制曲线。

问题二要求利用影子顶点坐标进行定位，即该问要求的是经度和纬度两个变量的值。由于此问中杆长是未知的，因此不能使用问题一的影长模型进行求解。在已知坐标的情况下，可很容易求得影子长度及太阳方向角的变化情况，而太阳方向角又与太阳方位角有关，进而与纬度相关联。根据对太阳方向角变化量的研究，其变化量存在一定的规律性，因此可想到利用太阳方向角的变化求解纬度。在求经度时，可利用北京时间和地方时的转换来推导。根据上述相关关系，建立太阳方向角的变化关于赤纬角、时间、纬度的函数，将数据导入 Mathematica 软件进行拟合，求出方差最小的点，即可得到测量地点的经纬度信息。附件一中提供了测量日期，可由此获得赤纬角，从而可获得不同纬度下太阳方向角变化关于时间的函数，再导入数据与该函数进行拟合，即可得到拟合后的经度、纬度。

问题三的求解需要建立在问题二模型的基础上。在问题二中，给定了日期，则与日期相对应的赤纬角作为参数出现在模型中，而在此问中，日期应为函数自变量之一，因此该问模型仅是在上一问模型基础上增加了一个自变量。若二问中的模型为 n 元函数，则此处的模型应为 $n+1$ 元函数，同样以方差最小为标准进行拟合，可得出拟合度最高的点对应的经度、纬度和日期。

问题四关于拍摄地点求解的思路应与问题二相似，都是利用给定数据来进行拟合。区别在于需要自己从视频中获取数据。视频提供了不同时间下的影子变化情况，按照一定的时间间隔截图并使用 Photoshop 软件处理可得到图中对应时间的影长、杆长的信息。通过已给定的直杆高度及截图中的测量长度可获得图片的比例尺，进而推算出影长的实际值。基于已知的参数选取合适的模型用于拟合，即可判断出测量地点。

进一步，若拍摄日期未知，则赤纬角未知，将赤纬角作为未知量加入拟合模型，即可得到最佳的经度、纬度及赤纬角组合，而由赤纬角可以推知拍摄日期。

三、基本假设

根据题设条件及模型简化的需要，做出以下假设：

- 1、假设只有地球自转影响影子变化，公转对影子长度及方向的影响可忽略。
- 2、假设物体高度较低，并且测量点地面为光滑平面而非球面。
- 3、假设不存在大气折射对光路的影响。
- 4、假设每年都有 365 天。

- 5、在测量视频截图中的影长时，忽略透视对测试的影响。
- 6、假设地球公转轨道为圆形，地球为一个球面。

四、符号说明

符号	意义
LenthOfShadow	影长
lenth	杆长
h	太阳高度角
ω	太阳时角
wd	观测点纬度
jd	观测点经度
cw	赤纬角
Ltime	地方时下距正午 12 点时间间隔，晚于 12 点取正值，早于 12 点取负值，单位为分钟
Btime	北京时下距正午 12 点时间间隔，晚于 12 点取正值，早于 12 点取负值，单位为分钟
n	日期，1 月 1 日取值为 1，以此类推
γ	太阳方位角

五、模型的构建及求解

1、基础影长模型的建立及问题一求解

由前文分析中已知，影子的长度与杆长、时间和地理位置有关，以此为依据引入一

系列相关变量作为模型推导的基础。在建立模型之前，首先需要掌握一定的地理知识，以便于找到各个变量之间的相关关系。通过查阅文献，我们了解到影子的形成方式及特点如下图所示：

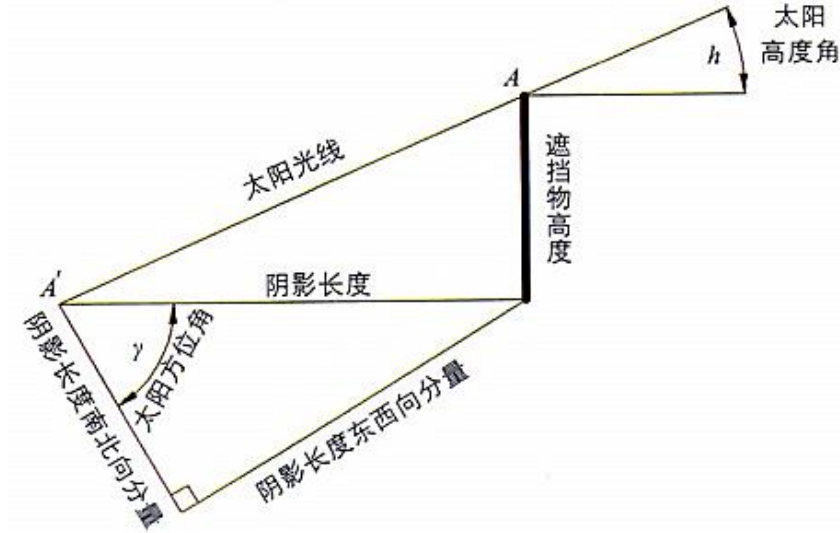


图 1 太阳影子特征示意图^[1]

由图示可知，影长、杆长及太阳高度角三者之间存在简单的三角函数关系，即：

$$\text{LenthOfShadow}(\text{lenth}, h) = \text{lenth} \times \cot(h)$$

杆长为一固定值，不再与前文论及的其他变量相关，那么可以进一步推导的只剩下太阳高度角这一变量，通过查阅资料可知，太阳高度角的计算公式^[1]为：

$$\sinh = \cos(cw)\cos(\omega)\cos(wd) + \sin(cw)\sin(wd)$$

$$\text{Hs}(cw, \text{Ltime}, wd) = \arcsin[\cos(cw)\cos(\omega)\cos(wd) + \sin(cw)\sin(wd)]$$

其中， wd 为测量地的地理纬度， cw 为太阳赤纬角，即太阳和地球中心的连线与地球赤道面的夹角。 ω 表示太阳时角，其大小取决于时间，已知在正午 12:00 时时角为 0，而与正午每间隔 1 小时，时角对应增加或减小 15 度^[1]。进一步，已知赤纬角 cw 及时角 ω 的计算公式^[1]：

$$cw = Cw(n) = 23.45 \sin\left[\frac{2\pi(284+n)}{365}\right]$$

$$\omega = 0.25 \text{Ltime}$$

整理上述公式，可得出作为基础模型的影长模型，考虑到模型简化的需要，令其自变量为赤纬角 cw 、杆长 lenth 、时间间隔 Ltime 及纬度 wd 四个变量，得出下述数学模型：

LenthOfShadow(cw, lenth, Ltime, wd)

$$= \text{lenth} \times \left\{ \frac{\sqrt{1 - \left[\cos(cw) \cos\left(\frac{\pi Ltime}{720}\right) \cos(wd) + \sin(cw) \sin(wd) \right]^2}}{\cos(cw) \cos\left(\frac{\pi Ltime}{720}\right) \cos(wd) + \sin(cw) \sin(wd)} \right\}$$

问题一中天安门的实例给出了日期、杆长、经纬度及时间范围，要求画出影长的变化曲线，分析可知该曲线为影长关于时间的函数。依然采用距正午时间的时间间隔 Ltime 作为时间的代表，利用 Mathematica9.0.1 软件，即可得到变化曲线图。需要注意的是，此处讨论的时间均为地方时，而问题中所给的时间范围为北京时间，即东经 120° 的时间，因此在讨论 Ltime 的取值范围时，还需根据经度的关系进行转换，得到最终 Ltime 的取值为 [-194.434, 165.566]。具体的换算公式如下：

$$\text{Btime2Ltime}(\text{Btime}, \text{jd}) = \text{Btime} + 4 * (\text{jd} - 120)$$

由 Mathematica9.0.1 软件绘出如图 2 所示的影长变化曲线，同时可求出最低点的影子长度为 3.841 米。

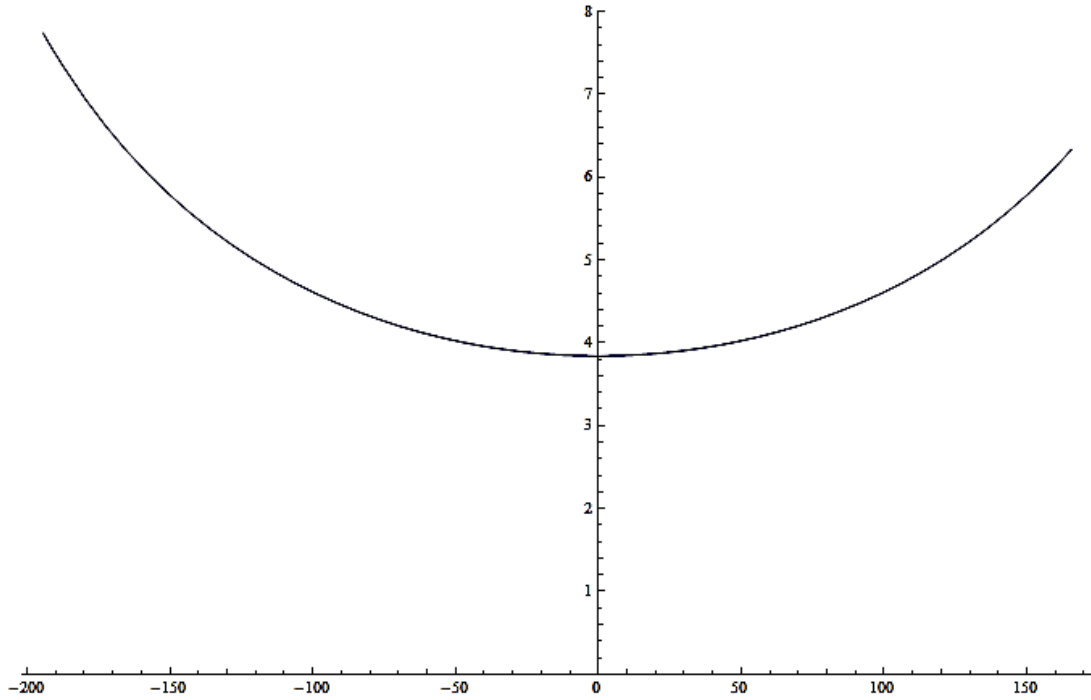


图 2 影长变化曲线

2、太阳方向角变化模型及问题二求解

根据前文的问题分析，在此问中，首先应明确太阳方向角的计算公式^[1]：

$$\sin \gamma = \frac{\cos(cw) \sin(wd)}{\cos(h)}$$

结合上文已提及的太阳高度角的计算公式 $Hs(cw, Ltime, wd)$ 进行整理后, 可得到太阳方向角关于赤纬度、时间和纬度的函数:

$$As2(cw, Ltime, wd) = \arcsin\left[\frac{\cos(cw)\sin(\frac{\pi Ltime}{720})}{\cos[Hs(cw, Ltime, wd)]}\right]$$

根据附件中所给数据的特征, 以 3 分钟为时间间隔, 角度变化的函数可示为:

$$DifferenceOfAs22(Ltime, wd) = As2(cw, Ltime+3, wd) - As2(cw, Ltime, wd)$$

假设一共有 k 个数据, 已知数据中太阳角度的变化值为 $As1_i$ 结合北京时与地方时的转换公式, 进行函数拟合, 根据方差最小求出最优解, Mathematica 软件提供了 Minimize 函数求解最小值。方差的计算公式如下:

$$VarianceOfQ2(wd, jd) = \sum_{i=1}^k \{As1_i - DifferenceOfAs22[Btime2Ltime(Btime, jd), wd]\}^2$$

至此, 我们已经建立起求利用太阳方向角变化定位的数学模型, 利用该模型找出附件一中数据的测量地点, 只需对附件一中的坐标数据进行处理并将其中提供的已知量代入模型进行拟合。根据影子顶点的坐标求解出的太阳方位角变化情况见附件“附件一数据处理”。

将经度和纬度的范围设置在中国的经纬跨度范围内, 即 $jd \in [73.55, 135.08]$, $wd \in [0.066846, 0.934624]$, 其中纬度为弧度制, 得到方差最小的点, 经度为东经 109.545° , 纬度为北纬 18.2335° , 经查询该地为海南省三亚市。

3、问题三求解

在问题二中所述及的太阳方向角的计算模型中, 太阳方向角取决于赤纬角、时间间隔及纬度, 而在求解角度变化时, 由于认为日期已知, 赤纬角作为参数出现在方程中, 所得模型实为二元函数。而当日期未知时, 赤纬角也成为了未知量, 模型变为了三元函数: $As1$

$$DifferenceOfAs23(cw, Ltime, wd) = As2(cw, Ltime+3, wd) - As2(cw, Ltime, wd)$$

$$\text{VarianceOfQ3}(\text{wd}, \text{jd}, n) = \sum_{i=1}^k \{As1_i - \text{DifferenceOfAs23}[\text{Cw}(n), \text{Btime2Ltime}(\text{Btime}, \text{jd}), \text{wd}]\}^2$$

依旧借助 Mathematica 进行运算拟合，可得出满足方差最小的经纬度及日期组合。将附件二和附件三的数据依照附件一的处理方法进行处理，整理后的数据见附件“附件二数据处理”及“附件三数据处理”。

最终结果分别为：附件二数据的经度为东经 79.79° ，纬度为北纬 39.2542° ，经查询测量地为新疆维吾尔自治区和田地区墨玉县，n 值为 140.225，经推算日期为 5 月 20 日；附件三数据的经度为东经 110.181° ，纬度为北纬 29.2537° ，经查询测量地为湖北省张家界市永定区，n 值为 323.271，经推算日期为 11 月 19 日。

根据地理知识可知，数据适用的日期应不只为一天，而是有多个可能值，但是拟合时仅输出最小值对应的一个 n 值，使得其他同等大小的 n 值被忽视，因此需要根据输出的 n 值找出其他值。由赤纬角计算公式知，赤纬角为以 365 为周期的周期函数，其函数图像如下图所示：

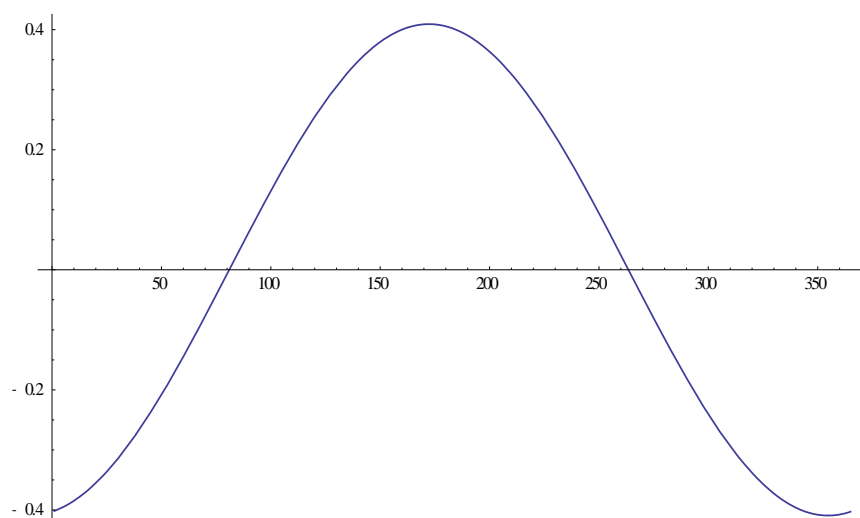


图 3 太阳赤纬角函数图像

由三角函数关系可算出，附件二数据的对应的日期还可以是 7 月 23 日，附件三数据的对应的日期还可以是 1 月 21 日。

4、影长拟合模型的建立及问题四求解

每隔 3 分钟对视频进行截图，使用 PhotoshopCC 软件中的标尺工具测量图中的杆长及影长。。在测量影长时，由于建系后影长的纵坐标值远小于横坐标值，因此透视所产

生的误差不会很大，不再考虑这一误差。通过图示杆长与实际杆长（2 米）的比例求得每张截图的比例尺，借助比例尺可算出实际影长。具体的数据见附件“问题四数据处理”。

沿用问题二和问题三的思路，采用拟合的方法寻找最可能的经度和纬度。由于此问中杆长和影长已知，而角度的变化则不易测量，因此采用问题一中的影长模型进行拟合。通过整合已有的函数，得到以下用于影长拟合模型：

LenthOfShadow(cw, lenth, Btime2Ltime(Btime, jd), wd)

$$= \text{lenth} \times \left\{ \frac{\sqrt{1 - \left[\cos(cw) \cos\left(\frac{\pi \text{Btime2Ltime}(\text{Btime}, \text{jd})}{720}\right) \cos(wd) + \sin(cw) \sin(wd) \right]^2}}{\cos(cw) \cos\left(\frac{\pi \text{Btime2Ltime}(\text{Btime}, \text{jd})}{720}\right) \cos(wd) + \sin(cw) \sin(wd)} \right\}$$

由于视频中提供了日期，可借此计算出赤纬角，另外北京时间与杆长可直接得到，从而赤纬角 cw、杆长 lenth 及北京时间 Btime 三个量均可视为参数并代入数值，原模型变为：

LenthOfShadow(jd, wd)

$$= \text{lenth} \times \left\{ \frac{\sqrt{1 - \left[\cos(cw) \cos\left(\frac{\pi \text{Btime2Ltime}(\text{Btime}, \text{jd})}{720}\right) \cos(wd) + \sin(cw) \sin(wd) \right]^2}}{\cos(cw) \cos\left(\frac{\pi \text{Btime2Ltime}(\text{Btime}, \text{jd})}{720}\right) \cos(wd) + \sin(cw) \sin(wd)} \right\}$$

设测量的影长为 LS_i ，共有 k 个数据，进而计算方差：

$$\text{VarianceOfQ4}(\text{jd}, \text{wd}) = \sum_{i=1}^k [LS_i - \text{LenthOfShadow}(\text{jd}, \text{wd})]^2$$

将测量所得的影长数据代入方差函数，利用 Mathematica 中的 Minimize 函数求出令方差最小的经度、纬度值，结果为北纬 41.727° 、东经 111.346° ，经过查询该地点为内蒙古自治区乌兰察布市四子王旗，即视频的拍摄地点。

问题四进一步提出，若拍摄日期未知，是否可判断出拍摄地点和日期。该小问的思路与问题三相近，同样为在已有拟合模型上增加一个未知量，则原影长拟合模型变为：

LenthOfShadow(cw, jd, wd)

$$= \text{lenth} \times \left\{ \frac{\sqrt{1 - \left[\cos(cw) \cos\left(\frac{\pi \text{Btime2Ltime}(\text{Btime}, \text{jd})}{720}\right) \cos(wd) + \sin(cw) \sin(wd) \right]^2}}{\cos(cw) \cos\left(\frac{\pi \text{Btime2Ltime}(\text{Btime}, \text{jd})}{720}\right) \cos(wd) + \sin(cw) \sin(wd)} \right\}$$

$$\text{VarianceOfQ4}(cw, jd, wd) = \sum_{i=1}^k [LS_i - \text{LenthOfShadow}(cw, jd, wd)]^2$$

代入从视频中获取的其他数据进行拟合,得到令方差最小的纬度值为北纬 41.727° , 经度值为东经 111.346° , 经查询知该地点位于内蒙古自治区乌兰察布市四子王旗; n 值为 167.88, 从而日期为 6 月 17 日, 与视频中显示的日期不一致。这一方面可能是由测量误差引起的, 另一方面, 由于太阳赤纬角的计算公式存在周期性, 因此该视频表现出的影长特征在其他日期也会出现。

六、模型评价

1、影长模型评价

影长模型的基础是基于几何关系建立三角函数公式, 简明易懂。而在对模型的扩展过程中, 用到了太阳高度角、纬度、时间、经度、赤纬角这些变量, 实现了空间和时间的结合, 清楚表明了影长同各个参数的关系。

2、太阳方向角变化模型评价

通过给定的影子顶点坐标可获取两个信息, 一是影长, 二是角度。然而, 由于给定数据建系方式未知, 不能由坐标直接得到太阳方向角的值。建立太阳方向角的变化模型, 巧妙地避开了“摆正”坐标系的困难, 并且使数据隐含的角度信息得到了充分的利用。通过拟合的方法, 克服了直接计算的难点, 便于得到较为准确地经纬度、日期。通过将数据代入模型拟合, 得出了较理想的结果, 验证了模型的可行性。

3、影长拟合模型评价

影长拟合模型集合了问题一中的影长模型与问题二、问题三的严谨思路, 更体现了根据已知参数找用于拟合的方程的思想。其兼具影长模型的简明易懂优点与太阳方向角变化模型全面挖掘数据特征的特性, 而在视频定位和确定日期的应用中更是体现了其实用性。

七、模型改进

出于模型简化的需要, 本文在建立模型之前做了一系列假设, 而这些假设带来的误差实际上是不可忽视的。一方面, 本文假设每年都有 365 天, 尽管每四年才会有一天的误差出现, 但微小的误差经过累积会变得逐渐庞大, 最终使得模型算出的结果精确度越

来越低。未来的深入研究应将每四年一次的闰年考虑进去。另一方面，在使用函数进行拟合时，均使用 Mathematica 软件的 Minimize 函数，而这一函数仅能求出一个最小值，未能将全部满足条件的点输出。未来的改进方向是改用 FindMinimum 函数，在所讨论的经纬度范围内，根据一定标准划分为网格式的多个点，求每一个点附近的局部最小值，设定一个允许的方差最大值，筛选满足条件的最小值。

参考文献

[1] 何银涛. 张梅. 黄华, 垂直单轴跟踪光伏支架方阵间距计算界面设计[J], 太阳能, 2015(7)。

附录

附录一：问题一源程序代码（软件：Mathematica9.0.1）

```
Cw[day_] = 23.45*Sin[2*Pi*(284 + day)/365]*(Pi/180); (*rad*)
Deg2Rad[a_] = a*(Pi/180);
Rad2Deg[b_] = b/(Pi/180);
Cw[295] (*2015.10.22 cw*);
Btime2Ltime[time_, jd_] = time + 4*(jd - 120);(*jd use deg*);
LenthOfShadow[cw_, lenth_, time_, wd_] = lenth*(Sqrt[1 - (Cos[cw] Cos[(\[Pi]
time)/720] Cos[wd] + Sin[cw] Sin[wd])^2]/(Cos[cw] Cos[(\[Pi] time)/720] Cos[wd]
+ Sin[cw] Sin[wd])));
Plot[LenthOfShadow[Cw[295], 3, t, Deg2Rad[39.907222]], {t, Btime2Ltime[-180,
116.391], Btime2Ltime[180, 116.391]}, PlotRange -> {0, All}];
```

附录二：问题二源程序代码（软件：Mathematica9.0.1）

```
Hs[cw_, time_, wd_] = ArcSin[Cos[cw] Cos[(\[Pi] time)/720] Cos[wd] + Sin[cw]
```

```

Sin[wd]]];(*rad*);
As2[cw_, time_, wd_] = ArcSin[(Cos[cw] Sin[(\[Pi] time)/720])/Cos[Hs[cw, time,
wd]]];(*rad*);
DifferenceOfAs22[time_, wd_] = As2[Cw[108], time + 3, wd] - As2[Cw[108], time,
wd];(*cw is set in this question,using Cw[108]*);
Manipulate[Plot[DifferenceOfAs22[t, wd], {t, -180, 180}, PlotRange -> {0,
0.03}], {{wd, 0}, -Pi/2, Pi/2, Appearance->"Labeled"}]

```

```

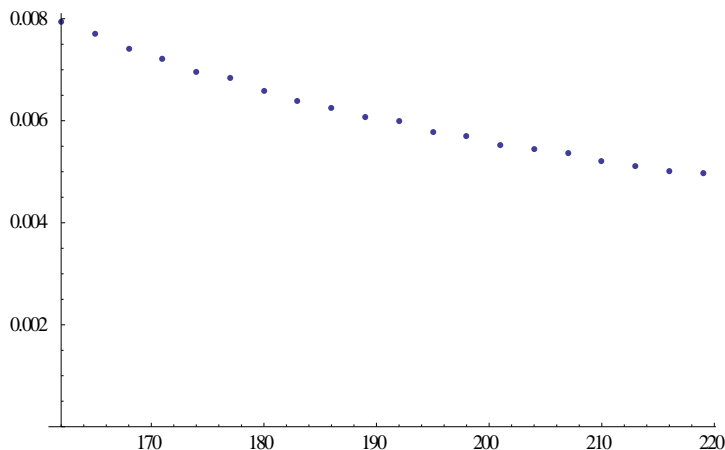
data2={{162.,0.00795058595496384},{165.,0.007695972401062956},{168.,0.
007412339044048477},{171.,0.007219472332709309},{174.,0.006956869727306
4695},{177.,0.00684070037679829},{180.,0.006592454914408796},{183.,0.
006380945660134085},{186.,0.006251411442282417},{189.,0.006075659512740
75},{192.,0.006000646313722213},{195.,0.0057690770253239765},{198.,0.
00569685964242217},{201.,0.005531203552617769},{204.,0.0054448476429697
63},{207.,0.005356513029885768},{210.,0.0052139506500222255},{213.,0.
005109538339072128},{216.,0.005019603569092201},{219.,0.004978720413330
3065}}};

```

```

ListPlot[{data2}, PlotRange -> {0, All}]

```



```

VarianceOfQ2[a_, b_] = Sum[(data2[[i, 2]] - DifferenceOfAs22[Btime2Ltime[data2[[i,
1]], b], a])^2, {i, 20}];

```

```

Minimize[{VarianceOfQ2[a, b], 73.55 < b < 135.08, 0.066846 < a < 0.934624},

```

```
{a, b]} {1.4571613405851857`*^-8, {a->0.318234209363373`, b->109.54526345615984`}}
```

```
Rad2Deg[0.318234](*wd in deg*)
```

```
Plot3D[VarianceOfQ2[a, b], {b, 73.55, 135.08}, {a, 0.066846, 0.934624}, ColorFunction -> Function[{x, y, z}, Hue[z]]]
```

附录三：问题三源程序代码（软件：Mathematica9.0.1）

问题三模型部分：

```
DifferenceOfAs23[cw_, time_, wd_] = As2[cw, time + 3, wd] - As2[cw, time, wd];
VarianceOfQ3[a_, b_, day_, data_] = Sum[(data[[i, 2]] - DifferenceOfAs23[Cw[day], Btime2Ltime[data[[i, 1]], b], a])^2, {i, 20}];
```

附件二数据运算：

```
data31 = {{41., 0.016033005120844906}, {44., 0.016475921522246417}, {47., 0.01687386082008477}, {50., 0.01735148463231756}, {53., 0.017667674068283845}, {56., 0.018271045436084044}, {59., 0.018693268476372454}, {62., 0.019147341420790553}, {65., 0.01967693273445925}, {68., 0.020245752022564623}, {71., 0.0207964512049984}, {74., 0.021389563707455095}, {77., 0.021900191950361858}, {80., 0.0225173639165816}, {83., 0.02324380648008134}, {86., 0.023785878457811216}, {89., 0.024433412796113996}, {92., 0.0252418484681452}, {95., 0.025850198333665864}, {98., 0.026573384457975635}};
```

```
Minimize[{VarianceOfQ3[a, b, day, data31], 73.55 < b < 135.08, 0.066846 < a < 0.934624, 1 < day < 365}, {a, b, day}]
```

```
{3.5614026955442026`*^-8, {a->0.6851158600165773`, b->79.78995925511904`, day -> 140.22489655869725`}}
```

```
Rad2Deg[0.6851158600165773`](*wd in deg*)
```

附件三数据运算：

```
data32={{69.`, 0.01587448588142526`}, {72.`, 0.01581353847866973`}, {75.`, 0.015723198015985984`}, {78.`, 0.015672524168555135`}, {81.`, 0.015586595284870386`}, {84.`, 0.01548398608473378`}, {87.`, 0.015431316425640995`}, {90.`, 0.015306258205292966`}, {93.`, 0.015229250884534862`}, {96.`, 0.015116008472535247`}, {99.`, 0.015013928442537017`}, {102.`, 0.01489923584093189`}, {105.`, 0.014785897718551322`}, {108.`, 0.014683965269984833`}, {111.`, 0.014543151577068425`}, {114.`, 0.014439752240618997`}, {117.`, 0.014310954124751252`}, {120.`, 0.014191568818100575`}, {123.`, 0.014054833007086098`}, {126.`, 0.013938849934660436`}};
```

```
Minimize[{VarianceOfQ3[a, b, day, data32], 73.55 < b < 135.08, 0.066846 < a < 0.934624, 1 < day < 365}, {a, b, day}]  
{1.68529*10^-9, {a -> 0.510574, b -> 110.181, day -> 323.271}}  
Rad2Deg[0.5105738480859334`]
```

绘制赤纬角函数图像：

```
Plot[Cw[day], {day, 1, 365}]
```

附录四：问题四源程序代码（软件：Mathematica9.0.1）

```
data4={{-186.`, 2.3742200061956957`}, {-183.`, 2.33123368098069`}, {-180.`, 2.288247355765685`}, {-177.`, 2.2443464278865304`}, {-174.`, 2.203543347740784`}, {-171.`, 2.1552759297231114`}, {-168.`, 2.123795896089336`}, {-166.`, 2.088480431928484`}, {-163.`, 2.0653203322072904`}, {-160.`, 2.0185870864004487`}, {-157.`, 1.9695230789656137`}, {-154.`, 1.9319653631120095`}, {-151.`, 1.895794302910502`}, {-148.`, 1.8548142028942747`}};  
VarianceOfQ4[a_, b_] = Sum[(data4[[i, 2]] - LenthOfShadow[Cw[194], 2, Btime2Ltime[data4[[i, 1]], b], a])^2, {i, 14}];  
Minimize[{VarianceOfQ4[a, b], 73.55 < b < 135.08, 0.066846 < a < 0.934624}, {a, b}]
```

```

{0.000490428, {a -> 0.728275, b -> 111.346}}
Rad2Deg[0.7282752457923921`]
VarianceOfQ42[a_, b_, day_] = Sum[(data4[[i, 2]] - LenthOfShadow[Cw[day], 2,
Btime2Ltime[data4[[i, 1]], b], a))^2, {i, 14}];
Minimize[{VarianceOfQ4[a, b], 73.55 < b < 135.08, 0.066846 < a < 0.934624, 1
< day < 365}, {a, b, day}]
{0.000490428, {a -> 0.728276, b -> 111.346, day -> 167.88}}

```