
系泊系统的设计与工作状态分析

摘要

第一问，我们先通过整体法和分解法对整个系统进行受力分析，当题设条件给定时，系统各个状态都可由浮标吃水深度 h 表示出。利用系统总深度等于水深求解出 h ，从而解出该问题。在对锚链的分析过程中，我们利用了两种方法：悬链线模型和迭代模型，后者将锚链看作数个刚性硬杆进行迭代求出锚链的状态。值得注意的是，在对不同风速求解时需要注意锚链是否发生拖地情况，针对不同情况，应用不同的模型。

第二问，同第一问类似，但由于悬链线方程中有超越函数，对问题的求解带来了很大的麻烦，故在第二问求解中只用到了迭代模型。将重物球的质量作为变量，在题目中要求的各个角度满足约束的条件下，得出最优的重物球质量。第三问，由于题目中涉及大量变量，但我们只需系统在极限情况下仍然能正常工作，故先用定性分析确定一部分变量的值从而方便问题的求解。然后重新对整个系统做整体的和分解的受力分析，对方程进行求解即可。

关键字：悬链线方程 迭代方程 受力分析 方程组求解

1 问题分析

1.1 建立物理模型进行受力分析

问题一是考虑在系统外力只有风力，浮力和地面拉力的情况。我们可以建立物理模型分别对浮标，钢管，装载设备的钢桶，锚链进行局部受力分析，设浮标的吃水深度 h 为变量，并根据力平衡原理分别用 h 表示出每一节钢管以及钢桶受到拉力的方向，并依据刚体平衡的条件用 h 表示出每一节钢管和钢桶的倾斜角度。

1.2 使用悬链线方程来模拟锚链模型

根据题目描述，问题一中锚链长22.05米，而单节链环长度仅为0.105米，因此我们可以将锚链视为一条质量均匀的绳子，使用悬链线方程来计算锚链的接地情况。

1.3 使用迭代方程在构建锚链模型

为了更加精确地反映锚链模型，我们可以结合受力分析，运用迭代的方式计算锚链每一节链环的倾斜角度。

1.4 综合考虑水深度，风力和水疏力对系泊系统的影响

为了方便计算，我们对风速，水流速度以及水深度对系泊系统的工作状态的影响进行定性分析，从而找出能够在极限环境下正常工作的系泊系统锚链的型号、长度和重物球的质量需要满足的条件。

2 问题假设

为了简化问题，我们做出如下假设：

1. 浮标受到钢管的拉力时不会产生倾斜角度，而是均匀下沉。
2. 锚链体积忽略不计，不受浮力影响，锚链形状可由悬链线模型表示出。
3. 重物球体积忽略不计，不受浮力影响。
4. 钢管视为质量均匀的刚性杆。

5. 钢管连接处长度忽略不计。
6. 浮标由力矩产生的倾斜角度忽略不计。

3 符号说明

符号	说明	单位
F_{fl}	浮标受浮力	N
F_{sfl}	浮标对整个系统提供的额外浮力	N
F_0	浮标受风作用的水平方向力	N
M_0	浮标质量	kg
m_0	每节链环质量	kg
m	钢管质量	kg
M	重物球质量	kg
m'	钢桶及设备重量	kg
g	重力加速度	kg
ρ	海水密度	kg/m^3
ρ'	锚链密度	kg/m
H	浮标高	m
h	浮标吃水深度	m
r	浮标上下地面半径	m
v	风速	m/s^2
v'	水速	m/s^2
α_i	第 <i>i</i> 节钢管（钢桶）受第 <i>i</i> -1节钢管拉力方向	deg
β_i	第 <i>i</i> 节钢管（钢桶）倾斜角度（与水平方向）	deg
γ_i	第 <i>i</i> 节钢管在其重心收到的重力和洋流力方向	deg
f	钢管所受浮力	N
l	钢管长度	m
l'	钢桶长度	m
D	海水深度	m
γ	锚链末端与水平方向的夹角	rad
F_{si}	第 <i>i</i> 个钢管受到的来自水流水平方向的推力	N

4 模型的建立与求解

4.1 在海水静止的情况下对系泊系统进行受力分析

我们对系统整体进行受力分析，再分别对系泊系统中的浮标，钢管，承载设备的钢桶和锚链进行受力分析，他们均处于力平衡状态。为了方便计算，我们定义如下概念：物体的等效重力=物体实际所受重力-物体所受浮力。对于钢管、承载设备的钢桶我们均使用等效重力进行计算；对于浮标，因其部分露出水面而不受到海水浮力，故仍使用实际重力进行计算。

4.1.1 对系统进行受力分析

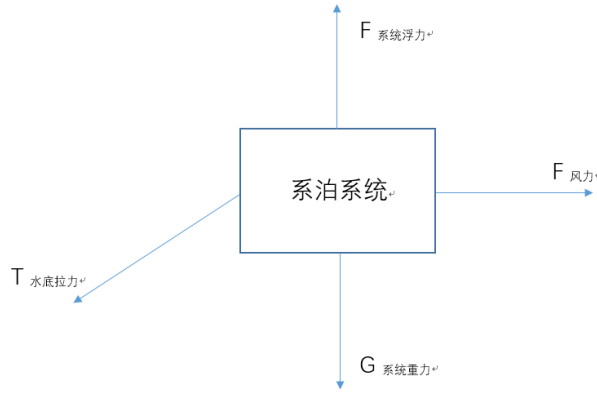


图 1: 系统受力分析图

4.1.2 对浮标进行受力分析

浮标受到水平方向的风力 F_0 ，对整个系统提供的额外浮力 F_{sfl} ，还有来自钢管向斜下方的拉力。

$$F_{sfl} = F_{fl} - M_0g = \rho gV - M_0g = \rho gh\pi r^2 - M_0g$$

$$F_0 = 0.625 \cdot S \cdot v^2 = 0.625 \cdot (H - h) \cdot 2r \cdot v^2$$

$$F_1 \cdot \cos \alpha_1 = -F_{sfl}$$

$$F_1 \cdot \sin \alpha_1 = -F_0$$

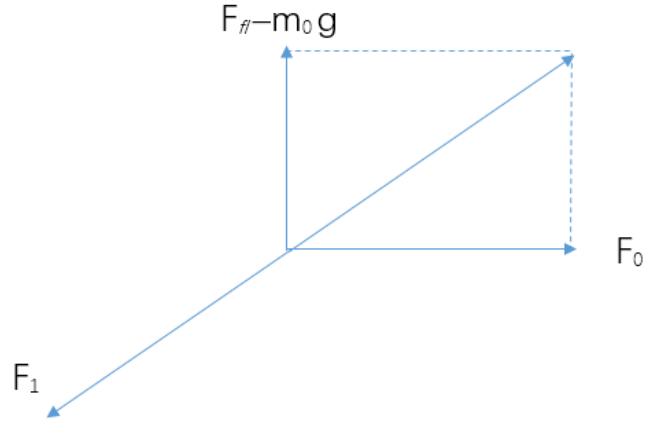


图 2: 浮标受力分析图

4.1.3 对钢管进行受力分析

以第一节钢管为例，由于钢管可被看作质量均匀的刚性硬杆，故可视为其重心在杆的几何中心处，等效重力 $mg - f$ 作用在钢管中点，钢管受到来自浮标的向斜上方的拉力 $-F_1$ ，易知 $-F_1$ 的大小等于上述浮标提供的额外浮力和风力的合力大小。钢管下端还受到来自第二节钢管的拉力。由于是平衡态，钢管应受力平衡。

即水平方向上：

$$F_2 \cdot \cos \alpha_2 = -F_1 \cdot \cos \alpha_1 = F_0$$

竖直方向上：

$$F_2 \cdot \sin \alpha_2 = -F_1 \cdot \sin \alpha_1 - (mg - f) = F_{sfl} - (mg - f)$$

其他几节钢管受力分析与之类似。

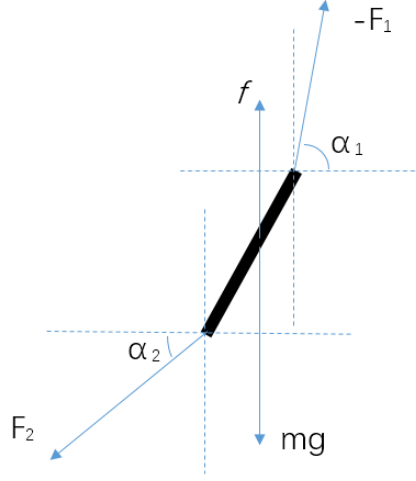


图 3: 钢管受力分析图

4.1.4 对钢桶进行受力分析

与钢管类似，将装有设备的钢桶看作一个密度均匀的圆柱体，于是钢桶的几何中心即为重心，钢桶在此处受到等效重力 $m'g - f'$ ，其中 f' 为钢桶所受浮力。钢桶的上端受到来自钢管的拉力 $-F_5$ ，下端受到来自锚链的拉力 F_6 和来自重物球向下的拉力 Mg 。值得注意的是，根据对锚链的假设，此处 F_6 的方向应与锚链钢桶连接处的切线方向一致。将 F_6 和 Mg 合成，得到 F'_6 。

水平方向上：

$$F'_6 \cdot \cos \alpha'_6 = -F_5 \cdot \cos \alpha_5 = F_0$$

竖直方向上：

$$F'_6 \cdot \sin \alpha'_6 = -F_5 \cdot \sin \alpha_5 - (m'g - f') = F_{sfl} - 4(mg - f) - (m'g - f')$$

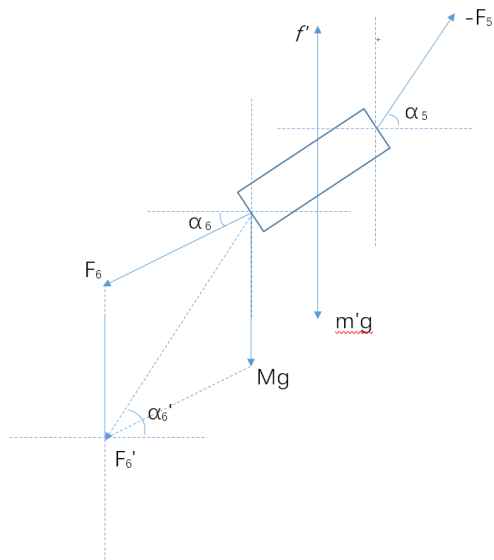


图 4: 钢桶受力分析图

4.1.5 对锚链进行受力分析

因锚链有更多的节数且每一段链环长度都较短，我们将锚链视作理想的悬链线模型。

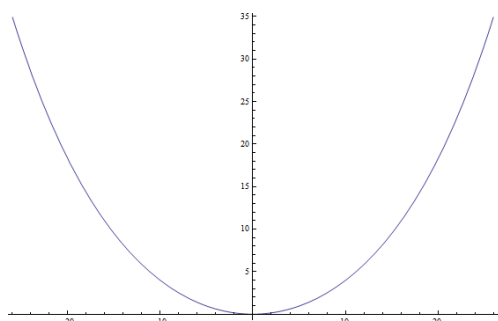


图 5: 悬链线示意图

根据静力平衡原理，悬链的二阶微分方程为：

$$F_0 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \rho' g \frac{dl}{dx}$$

由于：

$$\frac{dl}{dx} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

故：

$$F_0 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\rho' g}{\cos \alpha}$$

其中， dl 表示悬链上的一个微元， ρ' 为悬链的密度， F_0 为水平方向分力， α 为微元的切线与水平面夹角。

在给定一定边界条件求解上述微分方程，得：

$$y = \frac{F_0}{\rho' g} \cdot \cosh\left(\frac{\rho' g}{F_0} x\right) - \frac{F_0}{\rho' g}$$

悬链线的长度计算：对于一个微元有：

$$\frac{dl}{dx} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

其中：

$$\alpha = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

故

$$dl = \frac{dx}{\cos\left(\arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)}$$

$$l_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\cos\left(\arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)}$$

4.2 根据受力分析用浮漂吃水深度表示钢管与钢桶的倾斜角度

4.2.1 钢管倾斜角的计算

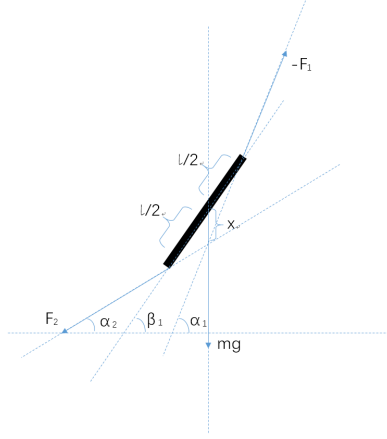


图 6: 钢管倾斜角的计算

由之前的受力分析，我们可得出钢管之间拉力方向满足如下关系：

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \arctan\left(\frac{F_{sfl}}{F_0}\right) \\ \alpha_2 &= \arctan\left(\frac{F_{sfl} - (mg - f)}{F_0}\right) \\ \alpha_3 &= \arctan\left(\frac{F_{sfl} - 2(mg - f)}{F_0}\right) \\ \alpha_4 &= \arctan\left(\frac{F_{sfl} - 3(mg - f)}{F_0}\right) \\ \alpha_5 &= \arctan\left(\frac{F_{sfl} - 4(mg - f)}{F_0}\right) \\ \alpha_6 &= \arctan\left(\frac{F_{sfl} - 4(mg - f) - (m'g - f') - Mg}{F_0}\right) \\ \alpha'_6 &= \arctan\left(\frac{F_{sfl} - 4mg - m'g}{F_0}\right)\end{aligned}$$

由三力交汇原理和正弦定理，可列出下列方程：

$$\frac{x}{\sin(\beta_1 - \alpha_2)} = \frac{\frac{l}{2}}{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha_2)}$$

$$\frac{x}{\sin(\alpha_1 - \beta_1)} = \frac{\frac{l}{2}}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha_1)}$$

两式相除并化简后得：

$$\beta_i = \arctan\left(\frac{\sin \alpha_i + A_i \cdot \sin \alpha_{i+1}}{\cos \alpha_i + A_i \cdot \cos \alpha_{i+1}}\right)$$

其中：

$$A_i = \frac{\sin(\pi/2 - \alpha_i)}{\sin(\pi/2 + \alpha_{i+1})} = \frac{\cos \alpha_i}{\cos \alpha_{i+1}} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

4.2.2 钢桶倾斜角的计算

特殊的，由对装载设备的钢桶的受力分析，我们将锚链给钢桶的拉力和重物球对钢桶向下的拉力进行合成，仍然可由三力交汇原理得：

$$\beta_5 = \arctan\left(\frac{\sin \alpha_5 + A_5 \cdot \sin \alpha'_6}{\cos \alpha_5 + A_5 \cdot \cos \alpha'_6}\right)$$

其中：

$$A_5 = \frac{\cos \alpha_5}{\cos \alpha'_6}$$

4.3 模型一：利用悬链线模型建立海水静止情况下系统力平衡模型

我们代入不同的吃水深度 h 值进行计算。对于每一个固定的 h 值，我们可以计算出每一节钢管和钢桶的倾斜角度，并得到钢管和钢桶在竖直方向上的投影长度之和，将其记为 $L1 - h$ 。

$$L1 = l \cdot (\sin \beta_1 + \sin \beta_2 + \sin \beta_3 + \sin \beta_4) + l' \cdot \sin \beta_5 + h$$

在钢桶的倾斜角计算中，我们得到钢桶受到锚链拉力的角度 α_6 。我们将计算得出的锚链顶点倾斜角 α_6 ，系统的水平分力 F_0 以及锚链密度 ρ_2 代入悬链线标准方程，就能得到锚链顶点，即 (x_2, y_2) 点的坐标。（注意，此坐标系的O点为理论锚链线最低点，而

非锚实际所处高度)。

我们得到在该 h 值情况下，海底与锚链顶点的竖直长度为 $(D - L1)$ ，海床平面在我们建立的坐标系中的解析式为 $y = y_2 - (D - L1)$ ，我们称之为基准线。

4.3.1 临界风速

为了方便分析，我们求出在本题题目要求下的临界风速 v_s ，当风速大于该临界值时该锚链无拖地情况，当风速小于临界值时，有拖地情况发生。

假设悬链线最低点恰好与海底相切，在其他条件都确定的情况下， $L1$ 和 y_2 均可表示为变量为 h 和 v 的二元函数。

由

$$L1(h, v) + y_2(h, v) = D$$

$$l_0^{x_2} = \int_0^{x_2} \frac{dx}{\cos(\arctan(\frac{dy}{dx}))} = 22.05$$

显然 y 是一个以 h 和 v 为参数的关于 x 的函数。所以 $l_0^{x_2}$ 也是一个关于 h 和 v 的二元函数。利用数学软件解出上述方程，得到临界风速为 23.7486 m/s

4.3.2 在锚链底部出现拖地情况下的力平衡模型

第一问中风速若为 12 m/s 小于临界值，则锚链底部出现拖地情况。

$$depth = y_2 + L1$$

令

$$depth = D = 18$$

解得 $h_1 = 0.600159$, $h_2 = 0.667738$

代入长度方程 $l_1 = -15.6495$, $l_2 = 15.4383$ ，由于有一部分锚链拖地，求出的长度应在区间 $(0, 22.05)$ 之内。故 $l_2 = 15.4383$ 符合要求，此时吃水深度 h 应等于 0.667738 。

使用悬链线模型在有部分锚链拖地的情况下计算结果与本文之后会使用的迭代模型计算出的结果（ $h = 0.6725 \text{ m}$ ）有差别，这是由于悬链线模型将实际的离散模型连续化造成的误差。当锚链未拖地时，锚链实际更接近与悬链线理论模型，因此迭代模型计算结果与悬链线模型计算结果基本吻合。

4.3.3 在锚链底部不拖地的情况下的力平衡模型

当风速为24 m/s 时，大于临界风速。此时锚链底部应不拖地。
基准线 $y = y_2 - (D - L_1)$ ，求出基准线与悬链线的正交点，即求解：

$$y_2 - (D - L_1) = \frac{F_0}{\rho'g} \cdot \cosh\left(\frac{\rho'g}{F_0}x\right) - \frac{F_0}{\rho'g}$$

解得的 x_1 应是一个以 h 为参数的值。令

$$l_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\cos\left(\arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)} = 22.05$$

可解得 $h = 0.682459$

4.3.4 根据求解出的h来求出半径和倾斜角度

在之前的计算中我们已经得出了在两种不同的风速 v 的条件下浮标的吃水深度，代入 β_i 中运算即得到每一节钢管和钢桶的倾斜角度。当 $v = 12m/s$ 时， $h = 0.667738m$ ，每节钢管和钢桶与水平方向的夹角如下图所示

第n节钢管或钢桶	符号	倾斜角度
1	β_1	1.54945 rad
2	β_2	1.54930 rad
3	β_3	1.54915 rad
4	β_4	1.54900 rad
5	β_5	1.55063 rad

因浮标部分拖地，故浮标的浮动半径 $r_{v=12m/s}$ = 锚链的拖地距离+未拖地锚链在水平方向上的分量+钢管和钢桶在水平方向上的分量，即

$$r_{v=12m/s} = (22.05 - l_2) + x_2 + \sum_{i=1}^5 \cos\beta_i * 1 = 14.3774 m$$

当 $v = 24m/s$ 时， $h = 0.682459m$ ，每节钢管和钢桶与水平方向的夹角如下图所示

第n节钢管或钢桶	符号	倾斜角度
1	β_1	1.48988 <i>rad</i>
2	β_2	1.48933 <i>rad</i>
3	β_3	1.48878 <i>rad</i>
4	β_4	1.48823 <i>rad</i>
5	β_5	1.49416 <i>rad</i>

因浮标不拖地，故浮标的浮动半径 $r_{v=24m/s}$ = 锚链在水平方向上的分量+钢管和钢桶在水平方向上的分量，即

$$r_{v=24m/s} = (x_2 - x_1) + \sum_{i=1}^5 \cos \beta_i * 1 = 17.5594 \text{ m}$$

4.4 模型二：利用迭代法构建锚链状态模型

4.4.1 风速为 36m/s 时计算锚链和钢桶的倾斜角

在第一问的条件下，我们将 $v = 36m/s$ 代入第一问模型中求解，得到锚链末端与水平方向的夹角 $\gamma_{v=36m/s} = 0.33rad$ ，即19.10度。每节钢管与钢桶与水平方向的夹角如下表所示

第n节钢管或钢桶	符号	倾斜角度
1	β_1	1.40338 <i>rad</i>
2	β_2	1.40234 <i>rad</i>
3	β_3	1.40128 <i>rad</i>
4	β_4	1.40022 <i>rad</i>
5	β_5	1.41164 <i>rad</i>

即得到钢桶的倾斜角为80.88度，即与竖直方向的夹角为9.12度，浮标的游动半径为18.8275米，不符合系泊系统要求的钢桶与锚链所需要的倾斜角度要求。

4.4.2 使用迭代法寻找吃水深度h

在第一问中我们使用了悬链线模型来近似地模拟锚链线，但在计算过程中我们发现这样的做法涉及到解积分方程，不利于求解第二问中调节重物的质量。因此，我们使用迭代法分别计算锚链上每一节链环的倾斜角，从而计算锚链在竖直方向上的投影。

假设我们继续使用题目一型号的锚链，则锚链一共有 $n = 22.05/0.105 = 210$ 节链环，每节链环的质量为 $m_0 = 7 \cdot 0.105 \text{ kg}$ ，每节链环的长度记为 $l_0 = 0.105 \text{ m}$ 。我们用 $\alpha(i)$ ($i = 1, 2, \dots, 210$) 来分别表示这210节链环以及锚上端所受到的拉力， $\beta(i)$ ($i = 1, 2, \dots, 210$) 来表示这210节链环与水平面的夹角，其中 $\gamma = \beta(210)$ 即为锚点与海床的夹角。与对钢管的分析类似，我们可以得到如下的迭代式

$$\alpha(i+1) = \arctan\left(\frac{F_{fl} - 4 \cdot (10 \cdot g - f_1) - (M + 100) \cdot g - f_2 - i \cdot m_0 \cdot g}{F_0}\right)$$

$$A(i) = \frac{\cos(\alpha(i))}{\cos(\alpha(i+1))}$$

$$\beta(i) = \arctan\left(\frac{\sin(\alpha(i)) + A(i) \cdot \sin(\alpha(i+1))}{\cos(\alpha(i)) + A(i) \cdot \cos(\alpha(i+1))}\right)$$

根据以上迭代式，我们可以得到方程

$$\sum_{i=1}^{210} l_0 \cdot \sin(\beta(i)) + \sum_{i=1}^5 l \cdot \sin(\beta_i) + h = D$$

我们可以使用mathematica中的FindRoot函数求解上述方程，通过不同的重物质量 M 来获得在该风速下钢桶倾斜角 β_5 与锚链和海床的夹角 γ 。通过不断增大 M 的值来寻找使得 β_5 和 γ 均满足条件的最小质量。（注意，上式只在锚链不拖地的情况下成立。由于在问题二中我们探究的是不拖地的边界情况，因此可以直接用上式求解）我们可以分别画出在该风速下 β_5 和 γ 随 M 变化的函数图像

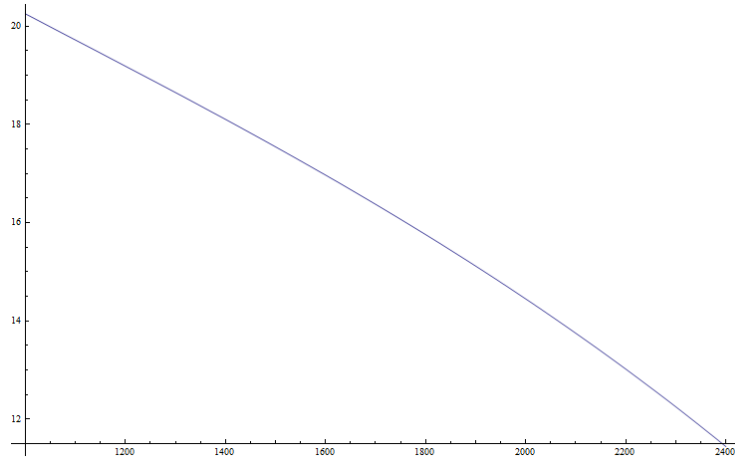


图 7: $\gamma(Deg)$ 随 M 变化的函数图像

从而计算出当 $M = 1760.45 \text{ kg}$ 时, $\gamma = 16 \text{ Deg}$ 以及

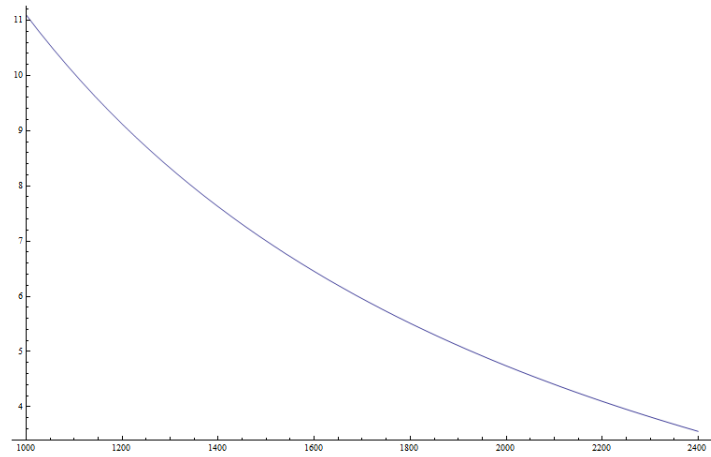


图 8: $\beta_5(Deg)$ 随 M 变化的函数图像

当 $M = 1928.61 \text{ kg}$ 时, $\beta_5 = 5 \text{ Deg}$ 因此为了使系泊系统能够正常工作, 应满足 $M > 1928.61 \text{ kg}$ 。

我们继续得到 h 随 M 变化的函数图像

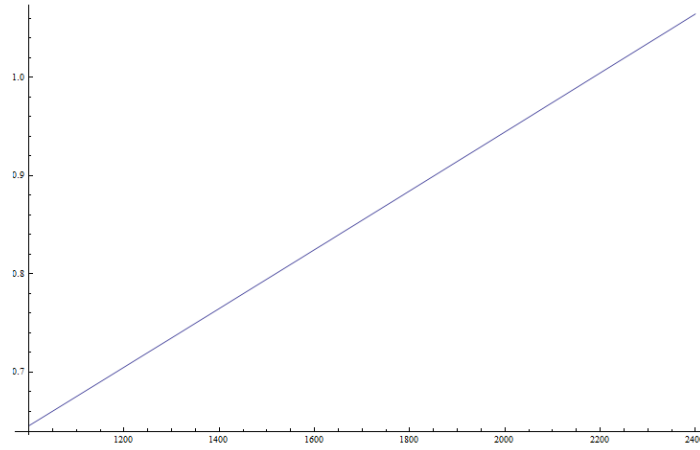


图 9: h 随 M 变化的函数图像

由图可以看出, h 随 M 的增大而增大, 而系泊系统浮标的吃水深度要尽量小。我们假设浮标的吃水深度不超过 1m 。当 $M = 2185.25\text{ kg}$ 时, $h = 1\text{ m}$ 为了使系泊系统能正常工作, 应满足 $M < 2185.61\text{ kg}$ 故重物质量的调解范围是

$$1928.61 < M < 2185.61$$

4.5 模型三: 综合考虑风力, 流力及水深的系泊系统模型

4.5.1 对临界条件的定性分析

为了分析不同情况下钢桶、钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域, 我们只需保证系泊系统在极限情况下处于正常的运行状态, 所以对风速、水流速和水深等条件对系泊系统状态的定性分析可以很大程度上减轻我们的计算难度。

1. 当水速和风速达到最大值并且方向一致时, 会最大程度地影响到系泊系统的工作状态。故我们只分析水速和风速方向一致, 且水速为 1.5m/s 风速为 36m/s 的情况;
2. 为了控制浮标活动范围尽量小, 我们应控制锚链末端与锚的连接处的切线方向与海床的夹角在极限情况下恰好达到或接近 16° 。
3. 由之前的计算可知, 随着水深 D 的增加, 钢桶与水平方向的夹角 β_5 和锚链末端切线方向与海床的夹角 γ 也随之增大。故水深为 20m 时, γ 应小于 16° 。当水深

为16m时， β_5 应大于85度。

4. 由第二问计算，随着重物球质量 M 的增加， β_5 会随之增大， γ 会随之减小，但是会增加浮标的吃水深度 h 。

4.5.2 对浮标考虑水流力的受力分析

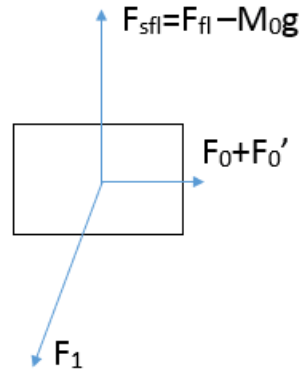


图 10: 浮标受力分析图

浮标受到水平方向的风力 F_0 和水流力 F_{0s} ，根据假设，可忽略不计浮标的倾斜，故风力和水流力可等效视为作用在其重心，即几何中心。浮标还对整个系统提供的额外浮力 F_{sfl} ，还有来自钢管向斜下方的拉力。

4.5.3 对单节钢管考虑水流力的受力分析

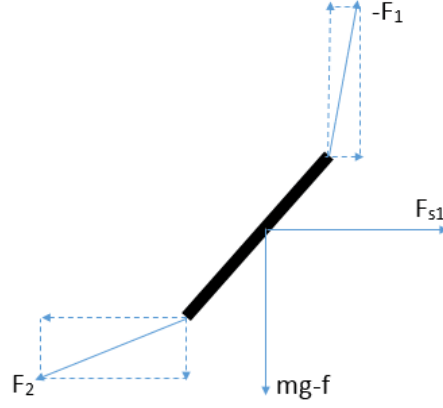


图 11: 钢管受力分析图

钢管受到四个力的作用，分别是来自浮标或者上方钢管的拉力，来自下方钢管或者钢桶的拉力，等效重力以及水流力。以第一节钢管为例，与水流速度为0的情况相似，可以得到

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{F_{sfl}}{F_0 + F'_0}\right) \quad (1)$$

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{F_{sfl} - (mg - f)}{F_0 + F'_0 + F_{s1}}\right) \quad (2)$$

$$\gamma_1 = \arctan\left(\frac{f - mg}{F_{s1}}\right) \quad (3)$$

其中

$$F'_0 = 374 \cdot 2r \cdot h \cdot v^2$$

$$F_{s1} = 374 \cdot 2r \cdot l \cdot \sin\beta_1 \cdot v'^2$$

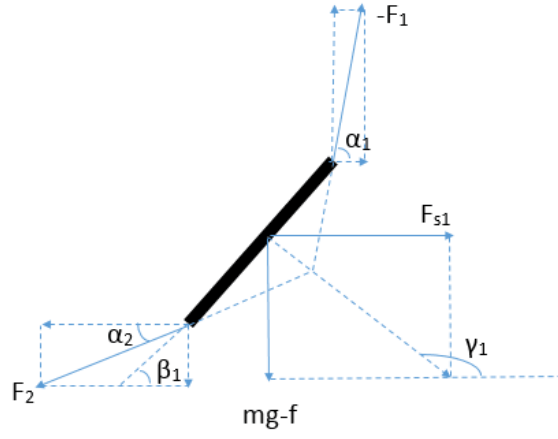


图 12: 钢管倾斜角的计算

由三力交汇原理和正弦定理，可得

$$\frac{x}{\sin(\alpha_1 - \beta_1)} = \frac{\frac{l}{2}}{\sin(\gamma_1 - \alpha_1)} \quad (4)$$

$$\frac{x}{\sin(\beta_1 - \alpha_2)} = \frac{-\frac{l}{2}}{\sin(\alpha_2 - \gamma_1)} \quad (5)$$

由方程(1)-(5)，可以解得 β_1 ,即如果风速、水速和重物球质量等条件确定时，可得出 β_1 关于 h 的函数。

4.5.4 对钢桶考虑水流力的受力分析

与第一问对钢桶的处理方式类似。我们将 F_6 和 Mg 合成，得到 F'_6 。

$$\alpha_5 = \arctan\left(\frac{F_{sfl}}{F_0 + F'_0}\right) \quad (6)$$

$$\alpha'_6 = \arctan\left(\frac{F_{sfl} - 4(mg - f) - m_0g}{F_0 + F'_0 + F_{s1}}\right) \quad (7)$$

$$\gamma_5 = \arctan\left(\frac{f - mg}{F_{s5}}\right) \quad (8)$$

$$\frac{x}{\sin(\alpha_5 - \beta_5)} = \frac{\frac{l}{2}}{\sin(\gamma_5 - \alpha_5)} \quad (9)$$

$$\frac{x}{\sin(\beta_5 - \alpha'_6)} = \frac{-\frac{l}{2}}{\sin(\alpha'_6 - \gamma_5)} \quad (10)$$

5 附录

5.1 参考文献

1. 郑瑞杰, 锚泊系统受力分析; 大连理工大学, 1-2, 2006

5.2 软件及代码

使用软件: Mathematica 9.0; Matlab 2014a;
Mathematica 9.0:

```
v = 24; (*风速*)
g = 9.8;
rho = 1.025*10^3; (*海水密度*)
rho2 = 7; (*锚链密度, 单位: kg/m *)
volume1 = 1*0.025^2*Pi; (*钢管体积*)
volume2 = 1*0.3^2*Pi; (*设备体积*)
f1 = rho*volume1*g; (*单个钢管所受浮力*)
f2 = rho*volume2*g; (*设备所受浮力*)
M = 1200; (*M为重物球质量*)
H = 18; (*水深*)
Ffl[h_] := rho*g*Pi*h - 1000*g; (*浮标提供的额外浮力*)
F0[h_] := 0.625*(2 - h)^2*v^2; (*水平分力*)
alpha1[h_] := ArcTan[Ffl[h]/F0[h]];
alpha2[h_] := ArcTan[(Ffl[h] - (10*g - f1))/F0[h]];
alpha3[h_] := ArcTan[(Ffl[h] - 2*(10*g - f1))/F0[h]];
alpha4[h_] := ArcTan[(Ffl[h] - 3*(10*g - f1))/F0[h]];
alpha5[h_] := ArcTan[(Ffl[h] - 4*(10*g - f1))/F0[h]];
alpha6[h_] :=
  ArcTan[(Ffl[h] - 4*(10*g - f1) - ((M + 100)*g - f2))/F0[h]];
alpha61[h_] := ArcTan[(Ffl[h] - 4*(10*g - f1) - ((100)*g - f2))/F0[h]];
A1[h_] := Cos[alpha1[h]]/Cos[alpha2[h]];
A2[h_] := Cos[alpha2[h]]/Cos[alpha3[h]];
```

```

A3[h_] := Cos[alpha3[h]]/Cos[alpha4[h]];
A4[h_] := Cos[alpha4[h]]/Cos[alpha5[h]];
A5[h_] := Cos[alpha5[h]]/Cos[alpha61[h]];
beta1[h_] :=
  ArcTan[(Sin[alpha1[h]] + A1[h]*Sin[alpha2[h]])/(Cos[alpha1[h]] +
    A1[h]*Cos[alpha2[h]])];
beta2[h_] :=
  ArcTan[(Sin[alpha2[h]] + A2[h]*Sin[alpha3[h]])/(Cos[alpha2[h]] +
    A2[h]*Cos[alpha3[h]])];
beta3[h_] :=
  ArcTan[(Sin[alpha3[h]] + A3[h]*Sin[alpha4[h]])/(Cos[alpha3[h]] +
    A3[h]*Cos[alpha4[h]])];
beta4[h_] :=
  ArcTan[(Sin[alpha4[h]] + A4[h]*Sin[alpha5[h]])/(Cos[alpha4[h]] +
    A4[h]*Cos[alpha5[h]])];
beta5[h_] :=
  ArcTan[(Sin[alpha5[h]] + A5[h]*Sin[alpha61[h]])/(Cos[alpha5[h]] +
    A5[h]*Cos[alpha61[h]])];
line[x_, h_] := (F0[h]/(rho2*g))*
  Cosh[x/(F0[h]/(rho2*g))] - (F0[h]/(rho2*g));
l1[h_] :=
  1*(Sin[beta1[h]] + Sin[beta2[h]] + Sin[beta3[h]] + Sin[beta4[h]]) +
  1*Sin[beta5[h]] + h;
x2[h_] := Solve[D[line[x, h], x] == Tan[alpha6[h]], x][[1, 1, 2]];
nu = 22.05/0.105;
ma = (22.05*7)/nu;
chain[h_, n_] := {

  alpha = Table[0, {i, n + 1}];
  A = Table[0, {i, n}];
  beta = Table[0, {i, n}];

```

```

alpha[[1]] = alpha6[h];
For[i = 1, i < 211,
  i++, {alpha[[i + 1]] =
    ArcTan[(Ffl[h] - 4*(10*g - f1) - ((M + 100)*g - f2) - (i)*ma*g)/
      F0[h]];
  A[[i]] = Cos[alpha[[i]]]/Cos[alpha[[i + 1]]];
  beta[[i]] =
    ArcTan[(Sin[alpha[[i]]] +
      A[[i]]*Sin[alpha[[i + 1]])/(Cos[alpha[[i]]] +
      A[[i]]*Cos[alpha[[i + 1]])]];
  If[alpha[[i + 1]] < 0, Print["break!"]; Print[i]; Break[]];
  s = 0;
  For[i = 1, i < 211, i++,
    s = s + Sin[beta[[i]]]*0.105];
  s, alpha
  }
root = FindRoot[chain[h, 210][[1]] + l1[h] == 18, {h, 0.65}][[1, 2]]
chain[root, 210][[2]]*180/Pi
(Pi/2 - beta5[root])*180/Pi
(*functions*)
solve[u_, d_, f_] := {a = u; b = d; i = 0;
  While[Abs[a - b] > 0.0000000000000001, temp = (a + b)/2;
    If[f[a]*f[temp] < 0, b = temp, a = temp];
    i = i + 1;
    If[i == 100000, Break, Continue]];
  (a + b)/2
  }
(*case 1 锚链拖地*)
y1[h_] := line[x2[h], h];
l1[h_] :=
  1*(Sin[beta1[h]] + Sin[beta2[h]] + Sin[beta3[h]] + Sin[beta4[h]]) +

```

```

1*Sin[beta5[h]] + h;
depth1[h_] := y1[h] + l1[h];
f[h_] := depth1[h] - 18;
Plot[f[h], {h, 0, 1}]
te1 = N[solve[0.55, 0.65, f][[1]]]
Integrate[1/(Cos[ArcTan[D[line[x, te1], x]]]), {x, 0, x2[te1]}]
te2 = N[solve[0.65, 0.75, f][[1]]]
NIntegrate[1/(Cos[ArcTan[D[line[x, te2], x]]]), {x, 0, x2[te2]}]
(*case 2 锚链不拖地*)
y2[h_] := 18 - l2[h];
l2[h_] :=
1*(Sin[beta1[h]] + Sin[beta2[h]] + Sin[beta3[h]] + Sin[beta4[h]]) +
1*Sin[beta5[h]] + h;
te = 0.7;
x1[h_] := Solve[line[x, h] == y1[h] - y2[h], x][[2, 1, 2]]
(*Plot[x1[h], {h, -1, 2}])
dline[x_, h_] := D[line[x, h], x]
l[x_, h_] := 1/(Cos[ArcTan[dline[x, h]]])
f3[h_] := NIntegrate[l[x, h], {x, x1[h], x2[h]}] - 22.05
Plot[f3[h], {h, 0.5, 1}]
f3[0.6824575]
solve[0.6824575, 0.72, f3][[1]]
(*第二题*)
whole[Ma_] := {v = 36; (*风速*)
g = 9.8;
rho = 1.025*10^3; (*海水密度*)
rho2 = 7; (*锚链密度, 单位: kg/m *)
volume1 = 1*0.025^2*Pi; (*钢管体积*)
volume2 = 1*0.3^2*Pi; (*设备体积*)
f1 = rho*volume1*g; (*单个钢管所受浮力*)
f2 = rho*volume2*g; (*设备所受浮力*)

```



```

M = Ma;(*M为重物球质量*)
H = 18;(*水深*)
Ff1[h_] := rho*g*Pi*h - 1000*g;(*浮标提供的额外浮力*)
F0[h_] := 0.625*(2 - h)^2*v^2;(*水平分力*)
alpha1[h_] := ArcTan[Ff1[h]/F0[h]];
alpha2[h_] := ArcTan[(Ff1[h] - (10*g - f1))/F0[h]];
alpha3[h_] := ArcTan[(Ff1[h] - 2*(10*g - f1))/F0[h]];
alpha4[h_] := ArcTan[(Ff1[h] - 3*(10*g - f1))/F0[h]];
alpha5[h_] := ArcTan[(Ff1[h] - 4*(10*g - f1))/F0[h]];
alpha6[h_] :=
  ArcTan[(Ff1[h] - 4*(10*g - f1) - ((M + 100)*g - f2))/F0[h]];
alpha61[h_] :=
  ArcTan[(Ff1[h] - 4*(10*g - f1) - ((100)*g - f2))/F0[h]];
A1[h_] := Cos[alpha1[h]]/Cos[alpha2[h]];
A2[h_] := Cos[alpha2[h]]/Cos[alpha3[h]];
A3[h_] := Cos[alpha3[h]]/Cos[alpha4[h]];
A4[h_] := Cos[alpha4[h]]/Cos[alpha5[h]];
A5[h_] := Cos[alpha5[h]]/Cos[alpha61[h]];
beta1[h_] :=
  ArcTan[(Sin[alpha1[h]] + A1[h]*Sin[alpha2[h]])/(Cos[alpha1[h]] +
    A1[h]*Cos[alpha2[h]])];
beta2[h_] :=
  ArcTan[(Sin[alpha2[h]] + A2[h]*Sin[alpha3[h]])/(Cos[alpha2[h]] +
    A2[h]*Cos[alpha3[h]])];
beta3[h_] :=
  ArcTan[(Sin[alpha3[h]] + A3[h]*Sin[alpha4[h]])/(Cos[alpha3[h]] +
    A3[h]*Cos[alpha4[h]])];
beta4[h_] :=
  ArcTan[(Sin[alpha4[h]] + A4[h]*Sin[alpha5[h]])/(Cos[alpha4[h]] +
    A4[h]*Cos[alpha5[h]])];
beta5[h_] :=

```

```

ArcTan[(Sin[alpha5[h]] + A5[h]*Sin[alpha61[h]])/(Cos[alpha5[h]] +
      A5[h]*Cos[alpha61[h]])];
line[x_,
  h_] := (F0[h]/(rho2*g))*
  Cosh[x/(F0[h]/(rho2*g))] - (F0[h]/(rho2*g));
x2[h_] := Solve[D[line[x, h], x] == Tan[alpha6[h]], x][[1, 1, 2]];
l1[h_] :=
  1*(Sin[beta1[h]] + Sin[beta2[h]] + Sin[beta3[h]] +
    Sin[beta4[h]]) + 1*Sin[beta5[h]] + h;
nu = 22.05/0.105;
ma = (22.05*7)/nu;
chain[h_, n_] := {

  alpha = Table[0, {i, n + 1}];
  A = Table[0, {i, n}];
  beta = Table[0, {i, n}];
  alpha[[1]] = alpha6[h];
  For[i = 1, i < 211,
    i++, {alpha[[i + 1]] =
      ArcTan[(Ffl[h] -
        4*(10*g - f1) - ((M + 100)*g - f2) - (i)*ma*g)/F0[h]];
    A[[i]] = Cos[alpha[[i]]]/Cos[alpha[[i + 1]]];
    beta[[i]] =
      ArcTan[(Sin[alpha[[i]]] +
        A[[i]]*Sin[alpha[[i + 1]])/(Cos[alpha[[i]]] +
        A[[i]]*Cos[alpha[[i + 1]])]}}];
  s = 0;
  For[i = 1, i < 211, i++,
    s = s + Sin[beta[[i]]]*0.105];
  s, beta[[-1]]
};

```

```

root = FindRoot[chain[h, 210][[1]] + 11[h] == 18, {h, 0.7}][[1, 2]],
chain[root, 210][[2]]*180/Pi,
(Pi/2 - beta5[root])*180/Pi}
Plot[whole[x][[3]], {x, 1000, 2400}]Plot[whole[x][[2]], {x, 1000, 2400}]
Plot[whole[x][[1]], {x, 1000, 2400}]
solve[u_, d_, f_, j_] := {a = u; b = d; i = 0;
While[Abs[a - b] > j, temp = (a + b)/2;
If[f[a]*f[temp] < 0, b = temp, a = temp];
i = i + 1;
If[i == 100000, Break, Continue]];
(a + b)/2
}
f[x_] := whole[x][[2]] - 16
N[solve[1200, 2400, f, 1][[1]]]
f[x_] := whole[x][[1]] - 1
N[solve[1200, 2400, f, 1][[1]]]
f[x_] := whole[x][[3]] - 5
N[solve[1200, 2400, f, 1][[1]]]

```

Matlab 2014a:

```

function take=fun(x)
%迭代函数
h=x(1);
v=36;
g=9.8;
rho=1.025*10^3;
rho2=7;
volumn1=0.025^2*pi;
volumn2=0.3^2*pi;
f1=rho*volumn1*g;

```

```

f2=rho*volumn2*g;
H=18;
M=1200;
m0=7*0.105;
Ffl=rho*g*pi*h-1000*g;
F0=0.625*(2-h)*2*v^2;
alpha1=atan(Ffl/F0);

alpha2=atan((Ffl-(10*g-f1))/F0);
alpha3=atan((Ffl-2*(10*g-f1))/F0);
alpha4=atan((Ffl-3*(10*g-f1))/F0);
alpha5=atan((Ffl-4*(10*g-f1))/F0);
alpha6=atan((Ffl-4*(10*g-f1)-((M+100)*g-f2))/F0);
alpha61=atan((Ffl-4*(10*g-f1)-(100*g-f2))/F0);

A1=cos(alpha1)/cos(alpha2);
A2=cos(alpha2)/cos(alpha3);
A3=cos(alpha3)/cos(alpha4);
A4=cos(alpha4)/cos(alpha5);
A5=cos(alpha5)/cos(alpha61);

beta1=atan((sin(alpha1)+A1*sin(alpha2))/(cos(alpha1)+A1*cos(alpha2)));
beta2=atan((sin(alpha2)+A2*sin(alpha3))/(cos(alpha2)+A2*cos(alpha3)));
beta3=atan((sin(alpha3)+A3*sin(alpha4))/(cos(alpha3)+A3*cos(alpha4)));
beta4=atan((sin(alpha4)+A4*sin(alpha5))/(cos(alpha4)+A4*cos(alpha5)));
beta5=atan((sin(alpha5)+A5*sin(alpha61))/(cos(alpha5)+A5*cos(alpha61)));
L1=sin(beta1)+sin(beta2)+sin(beta3)+sin(beta4)+sin(beta5)+h;
alpha(1)=alpha6;
for n=1:210
    alpha(n+1)=atan((Ffl-4*(10*g-f1)-((M+100)*g-f2)-n*m0*g)/F0);
    A(n)=cos(alpha(n))/cos(alpha(n+1));

```

```

        beta(n)=atan((sin(alpha(n))+A(n)*sin(alpha(n+1)))/(cos(alpha(n))+A(n)*cos(alpha(n+1))))
    end
    y1=0;
    for n=1:210
        y1=y1+sin(beta(n))*0.105;
    end
    take(1)=y1+L1-16;
    end
    h=fsolve('fun',[0.6])
    v=36;
    g=9.8;
    rho=1.025*10^3;
    rho2=7;
    volumn1=0.025^2*pi;
    volumn2=0.3^2*pi;
    f1=rho*volumn1*g;
    f2=rho*volumn2*g;
    M=1200;
    H=18;
    m0=7*0.105;
    Ffl=rho*g*pi*h-1000*g;
    F0=0.625*(2-h)^2*v^2;
    alpha1=atan(Ffl/F0);

    alpha2=atan((Ffl-(10*g-f1))/F0);
    alpha3=atan((Ffl-2*(10*g-f1))/F0);
    alpha4=atan((Ffl-3*(10*g-f1))/F0);
    alpha5=atan((Ffl-4*(10*g-f1))/F0);
    alpha6=atan((Ffl-4*(10*g-f1)-((M+100)*g-f2))/F0);
    alpha61=atan((Ffl-4*(10*g-f1)-(100*g-f2))/F0);

```

```

A1=cos(alpha1)/cos(alpha2);
A2=cos(alpha2)/cos(alpha3);
A3=cos(alpha3)/cos(alpha4);
A4=cos(alpha4)/cos(alpha5);
A5=cos(alpha5)/cos(alpha61);

beta1=atan((sin(alpha1)+A1*sin(alpha2))/(cos(alpha1)+A1*cos(alpha2)));
beta2=atan((sin(alpha2)+A2*sin(alpha3))/(cos(alpha2)+A2*cos(alpha3)));
beta3=atan((sin(alpha3)+A3*sin(alpha4))/(cos(alpha3)+A3*cos(alpha4)));
beta4=atan((sin(alpha4)+A4*sin(alpha5))/(cos(alpha4)+A4*cos(alpha5)));
beta5=atan((sin(alpha5)+A5*sin(alpha61))/(cos(alpha5)+A5*cos(alpha61)));
L1=cos(beta1)+cos(beta2)+cos(beta3)+cos(beta4)+cos(beta5);
alpha(1)=alpha6;
for n=1:210
    alpha(n+1)=atan((Ff1-4*(10*g-f1)-((M+100)*g-f2)-n*m0*g)/F0);
    A(n)=cos(alpha(n))/cos(alpha(n+1));
    beta(n)=atan((sin(alpha(n))+A(n)*sin(alpha(n+1)))/(cos(alpha(n))+A(n)*cos(alpha(n+1))));
end
y1=0;
for n=1:210
    y1=y1+cos(beta(n))*0.105;
end
function morefun=take(x)
%计算有流体力情况下的钢管受力平衡

alpha1=x(1);
alpha2=x(2);
beta1=x(3);
gamma1=x(4);
g=9.8;
h=0.8;

```

```

rho=1.025*10^3;
rho2=7;
volumn1=0.025^2*pi;
volumn2=0.3^2*pi;
f1=rho*volumn1*g;
f2=rho*volumn2*g;
m=10;
Fsfl=rho*g*pi*h-1000*g;
F0=0.625*(2-h)^2*36^2;
F01=374*2*h*1.5^2;
FS1=374*2*sin(beta1)*1.5^2;
take(1)=sin(beta1-alpha2)/sin(alpha1-beta1)-(tan(gamma1)*cos(alpha2)-sin(alpha2))/(tan(gamma1)-sin(alpha2));
take(2)=tan(gamma1)-(f1-m*g)/(758*0.025*sin(beta1)*1.5^2);
take(3)=alpha1-atan((Fsfl-1000*g)/(F0+F01));
take(4)=alpha2-atan((Fsfl-(m*g-f1))/(F0+F01+FS1));
end
[a,b,c,d]=fsovle('morefun',[1.2,1.2,1.2,1.2]);

```