

2016 年 “深圳杯” 数学建模挑战赛 结题报告 (C 题)

题目:“禁摩限电”前后交通综合状况模拟及效果评估

单位:南开大学数学科学学院

成员:姚智元 唐靖聂 陈方洋

目录

一、题目概论.....1

二、思路探讨.....1

三、假设.....2

四、符号说明.....3

五、建立模型.....4

 1.抽象得到模型来分析题目中变量间关系.....4

 2.将初步数据具体为实际应用中的量.....5

 3.仿真过程.....7

六、模型陈述.....8

七、可改进部分.....8

八、参考文献.....8

【摘要】为了解决深圳市城市道路交通摩托车、电动车参与造成的安全隐患、交通堵塞等问题，深圳市政府出台了“禁摩限电”的政策，来对参与交通的摩托车、电瓶车进行禁止和限制。本题目即为了证明“禁摩限电”政策的合理性，以密度这一综合变量为中心，建立了交通流流体模型，并在此基础上分别代入摩托车是否参与交通的不同情况下的交通密度。此外，我们又从密度出发，检验密度对交通运行效率、道路交通安全性和污染程度的影响。这样就建立了可测量的交通现象参数和政策引起的变量的联系。在这个过程中，我们通过仿真，多项式回归等手段，以及代入现实参数，如事故发生率等，模拟了交通系统运行的过程，为了印证流体模型和安全性在密度变换下引起的变化。最后，我们重新分析了模型的最初假设，评价了模型可改进的部分。

关键词：交通流流体模型 密度 仿真模拟

一、选题意义和题目综述

交通状况的发展与社会经济的发展关系密不可分。在社会多层次的需求和经济多维度的发展下，交通状况也日趋繁复。看似道路交通大发展，其实在这种缺乏规则，过于自由的交通状况下，也滋生很多安全问题，环境问题和交通拥堵问题。如摩托车和电动车的出现，虽然方便了一部分人的出行，但在从宏观的角度来看，黑摩的出现、飞驰在拥堵的车流中的摩托车和不分机动车道、非机动车道的混乱现象都成为了深圳市交通状况的隐患。为了让更多人理解“禁摩限电”政策在宏观层次上的积极意义，设计相应的数学模型，在一些假设下对各种因素进行量化，希望证明这个政策在深圳市的具体交状况下所拥有的正面意义，让更多人赞同和遵守这个政策。

在这个证明的过程中，要求我们从供给侧和需求侧——具体来说是交通资源总量，即道路通行能力、交通需求结构等具体方面分别来讨论交通资源的供需矛盾，还要以生活实际中需要的、贴近实际生活和可持续发展的交通安全、环境保护等因素，进一步讨论政策在这个调解过程中扮演的角色。这个题目也就是要求我们用数学模型来刻画交通系统的运行情况，在这个过程中建立从城市道路交通现状中具体可测的参数，到交通系统对生活与发展具体的安全性、环保性量化评价的紧密联系。在这个预设的系统下，我们用政策的干预与否代入这个模拟的系统，来得出在这样的模拟过程中，“禁摩限电”政策是否对城市交通发展有各方面可见的积极影响。

二、思路探讨

道路交通情况很复杂，车型、车速、道路宽度等因素都会从资源供给和市民需求方面影响道路交通状况。为了更简便地表达交通状况，我们用密度这一个量来概括整合摩托车参与交通前后的交通状态，减少了问题需要假设的理想不变量。影响密度的因素有很多，而且都不是同向影响的，所以我们需要通过几个模型来衡量政策变化对密度这个综合变量的影响，这样就避免了分别评估又不能衡量权重的笼统又复杂的工程量。

具体来说，密度这一概念整合了以下交通主体和行为：

- 1、摩托车、私家轿车和公共交通工具的辆数；
- 2、参与交通的主体的交通行为，如加塞、变道等等。

就密度这一个量的来源，我们又引入了车流量和车速这两个参数。我们借鉴了物理中流体的概念，将高峰期时的车流视为流体，建立直观可测的数据求得密度的路径。这一结论我们还将用仿真的方式模拟。将车流的连贯性（相邻的两车经过同一个点的时间间隔）进行随

机，将这个过程多次重复，每一段时间后截取系统中的数据，来进行回归分析，检验是否符合这个理想公式。

就密度这一个量的外延，我们将密度作为刻画交通拥挤程度的量化参数，来评估“禁摩限电”政策的实用、宏观效果。我们将整个“禁摩限电”政策的外部评估分为三个问题：交通效率，环境友好，安全系数。

1、交通效率

交通效率通过道路承载能力，即最大车流量来衡量。考虑到“禁摩限电”政策的实施，会导致更多以前乘摩托车，电瓶车出门的市民选择轿车或是公共交通，相应的车流量反而会上升，经过讨论后我们将车流量（单位时间通过马路某一截面的车辆数）改为人流量（单位时间通过马路某一截面的人数），用人流量来衡量交通效率。

2、环境友好

我们将环境友好程度分为两个小问题讨论。一个是高峰时段内的油耗程度，另一个是高峰时段内的总废气排放量。两个方面综合得出两种实验状态下的环境友好得分。

3、安全系数

安全系数用事故发生率来刻画，我们从政府数据中收集数据，得到不同交通工具的事故发生率，用来作为量化交通事故发生率的指标。

其中，我们模拟了一个仿真系统，在已知事故率的前提下，将车流的连贯性（辆车经过同一个点的时间间隔）进行随机，将这个过程多次重复，得到因事故而堵塞系统使系统崩溃的时间，来得出摩托车的存在对于安全系数的影响。

考虑到我们第一个流量模型只考虑了最简单的不考虑事故情形下的情况，可以用第三个问题得出的结论来对第一个模型加以补充，建立考虑交通事故对道路承载能力影响的流量模型。

最后综合模拟出的政策实施效果，对两个实验对象的各项指标进行对比，得出最终比较结论。

三、假设

- 1、假设政策实施前后参与交通的人流量没有变化。
- 2、假设交通运行的时间是高峰期，地点是一条主要的城市道路的机动车道。

3、假设参与交通的主体只含有摩托车、家用小轿车和公共交通三种。

4、假设考察时的不可抗力都不存在或者都不会给交通系统的运行造成任何程度的影响，如天气原因等。

5、假设该路段和路口/红绿灯之间距离足够远，即路口交通状况和红绿灯的滞留情况都不再考虑范围之内。同时不考虑外力的干扰，如特殊情况的交通规则和交警的管制。

四、符号说明

符号	意义	单位
q	流量 某时刻内单位时间通过道路指定断面的车辆数	veh/h
v	速度 某时刻通过道路制定断面的车辆速度	km/h
k	密度 某时刻通过道路制定断面单位长度内的车辆数	veh/km
n	人数 指单位时间内需要通过指定断面的人数	个
P_n	实行禁摩限电政策前机动车道上各类车数占比	—
P_n'	实行禁摩限电政策后机动车道上各类车数占比	—
P_1	轿车占比	—
P_2	公共交通工具占比	—
P_3	摩托车电频车及三轮车占比	—
s	表示各类交通工具平均载人数	个
s_1	轿车平均载人数	个
s_2	公共交通工具平均载人数	个
s_3	摩托车电频车平均载人数	个
c_1	轿车耗油	L/辆
c_2	公交车耗油	L/辆
c_3	摩托车耗油	L/辆
d_1	轿车排量	L/辆
d_2	公交车排量	L/辆
d_3	摩托车排量	L/辆
t	相邻两车进入系统的时间间隔	s

r_1	轿车事故发生率	—
r_2	摩托车事故发生率	—
dis	两车车距	m
N	城市干道基本通行能力	veh/h

五、建立模型

1. 抽象得到模型来分析题目中变量间关系

我们建立两个模型分别用于评估实施禁摩限电政策前后深圳市交通通行能力以及交通安全。

借用物理学的概念，将交通流近似看作一辆辆车辆组成的连续的流体，可以用流量，速度，密度这 3 个参数描述交通流的基本特性。

根据物理学的基础知识， q ， v ， k 满足

$$q = vk$$

经验和观测告诉我们，速度和密度之间存在密切关系，当道路上车辆增多，车流密度加大时，司机就被迫降低车速。为了寻找密度与车速之间的关系模型，我们通过分别分析深圳市尚未实行禁摩限电地区与已经实行禁摩限电地区的观测数据，从常识角度出发，我们知道随着 k 的增大， q 呈现出先增后减的趋势。所以我们用三次多项式

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

来拟合我们收集到的流量和密度的数据。

通过对两个不同情况的城市交通环境的数据采集与回归分析，我们得到两个 q 与 k 的函数 $q(k)$ 与 $q'(k)$ ，分别代表实行禁摩限电政策前后流量与密度的关系式。

我们假定城市中每天的出行人数是不变的，在此基础上我们进行定量分析，通过比较在相同出行人数下，实行禁摩限电前后道路密度的变化，藉此反应道路拥堵程度的变化。

我们得到实行前后所需车流量：

$$Q = n / (P_1 \cdot S_1 + P_2 \cdot S_2 + P_3 \cdot S_3)$$

$$Q' = n / (P_1' \cdot S_1 + P_2' \cdot S_2 + P_3' \cdot S_3)$$

将 Q 与 Q' 带入流量与密度关系式，我们比较在 Q 与 Q' 所对应的道路密度，再通过对平均载客量的限定，将车流量化为人流量来考虑，即可评估出交通运行效率。

2.将初步数据具体为实际应用中的量

我们将最终评判比较的社会性综合指标分为两个部分：

- 环境友好
- 安全

我们将安全性量化为事故发生率。由交通统计数据 and 观察得到道路拥挤程度和事故发生频率的正相关关系，设频率等于概率，即可由密度出发得到事故发生概率的比较关系。

我们将污染程度量化为人均用车量，即人流量与车流量之比。通过对两种情况下过程量人流量与车流量的比值比较，得出污染程度更低的策略。

(1) 环境友好

我们从节能和减排两个方面来考虑。

I. 耗油：

依照流量的模型

$$q \cdot (p_1 \cdot c_1 + p_2 \cdot c_2 + p_3 \cdot c_3)$$

得到我们研究路段每单位时间通过截面车的耗油量，和人流量的模型结合，在确定研究时间之内经过截面的人数情况下，即确定了车流量的情况下，做出每天油耗随时间变化函数，积分得到我们研究时间内总油耗。对比两个实验对象（深圳、天津）的油耗。

II. 排量：

与上述耗油量的算法类似。

根据流量模型

$$q \cdot (p_1 \cdot d_1 + p_2 \cdot d_2 + p_3 \cdot d_3)$$

可计算出我们研究路段每单位时间通过截面车的排气量，结合人流量的模型，在以车流量作为不变量时，做出每天排气-时间变化函数，积分得到我们研究时间内总油耗。对比两个对象城市的排气状况，即可比较出优劣。

(2) 安全性

我们的设想是：利用计算机编程，实现道路情况模拟。具体如下：

在特定的交通行为情况下（如超车、转向），通过观察、估计，预先在系统运行体系中，对于系统中存在的各种车型，设置与车辆类型相关、且彼此独立的事故发生率。

在实验过程中，首先对比两个实验对象（两个城市）的事故发生率（利用搜集到的政府数据和一些统计信息）。第二步，根据常识与观察，事故发生时，道路会受阻，具体表现为最大流量（道路通行能力）会降低。这样，就会加剧堵车的情况，导致车流量一定程度上降

低，导致交通受阻。但是这样的受阻不是永久的。我们给各个种类的车辆之间的事故（轿车和摩托之间的，轿车和轿车之间的等）定义一个事故解决时间（可通过试验或者统计数据得到）。

根据上述的数据，我们可以在一定的实验条件下求出道路受阻的概率和受阻时间的期望，从而求出每个研究时间段内，考虑事故的情况下，车流量的期望。根据以上所有的限定，设置一个仿真系统，模拟出在如上的流量状态和事故发生率下，道路受阻的情况。

根据我们搜集到的数据¹，2014 年中：

摩托车交通事故发生数（起）	40185
汽车交通事故发生数（起）	136386
摩托车交通事故受伤人数（人）	49727
摩托车交通事故死亡人数(人)	10411
汽车交通事故受伤人数(人)	141718
汽车交通事故死亡人数(人)	42847

可以得到平均每起事故引起的伤亡数：

摩托车	1.497（人/起）
汽车	1.353（人/起）

这我们的常识是一致的，较为高速、过于灵活的驾驶状态和缺乏保护的、暴露的驾驶环境使每一起事故引起的伤亡都高于有明确保护措施和规则约束的汽车。

同时，调查显示，摩托车的发生率也明显高于汽车。

所以将上述的数据带入系统，得到的运行结果是，在一出现交通事故就造成堵塞、系统崩溃的前提下，有摩托车的交通系统崩溃的时间明显短于仅有汽车的交通系统。这也就证实了有摩托车的系统安全性明显低于仅有汽车的交通系统。

3. 仿真过程：验证流量、密度、车速三者的关系

我们设计了一个单车道的系统，符合上述全部理想假设。在这个系统中，车辆进入系统服从泊松过程，即前一辆车与后一辆车进入系统的间隔时间服从参数为 λ 的指数分布，即进入系统的频率。利用计算机用反函数法生成一个服从参数为 λ 的指数分布随机数 t^i （单位是S），它的物理意义是在一辆车进入系统后下一辆车进入系统的时间间隔，将这个过程离散成以秒的单位的时段，并且每秒采集一次数据。

¹ 数据来源：中国统计局

车辆的位置和速度分别由上一个时间点的速度与位置与前车的安全距离决定

根据姜启源《数学模型》中的公式，我们定义城市干道基本通行能力 N 。有

$$N = 1000v / d_0$$

其中 d_0 为安全距离。它的计算公式为

$$d_0 = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = vt_0 + cv^2 + d_3 + d_4$$

其中 d_1 是在是司机的反应时间 t_0 中行驶的距离， d_2 是刹车时从制动器开始起作用到汽车完全停止的距离，即制动距离。 c 是与车辆自身性质与道路状况有关的系数， d_3 是两车之间的安全距离， d_4 是车辆的标准长度。

所以根据上文的分析，在一个较为拥挤的路况中，车速由与前车的实际车距

$$dis = dis(t)$$

决定，所以我们可以建立一个函数

$$v = v(dis)$$

其中 v 是由前车与该车车距所确定的该车车速。这个车速由系统随时间的状态变化每秒钟更新一次。

我们抽样采集某一分钟的通过该特定断面的车流量和密度，得到流量-密度曲线，再根据公式

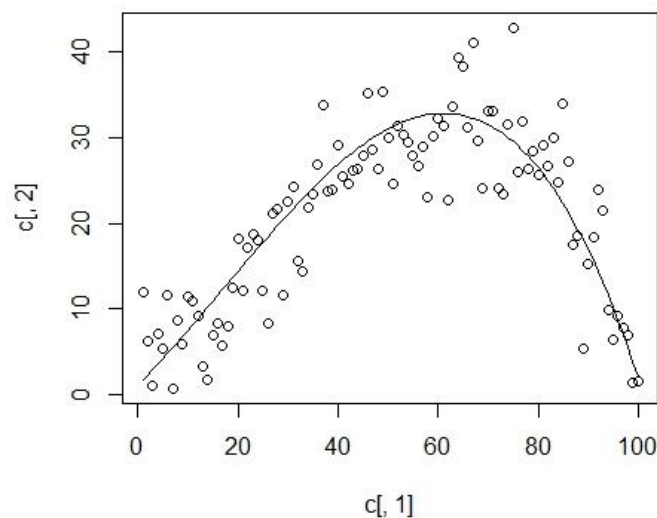
$$q = vk$$

得出流量和车速的关系。根据我们的预估，车流量随着密度的提高先增加后减少。

通过多次数据采集，并且将数据拟合成三次函数

$$y = -0.00012x^3 + 0.0063x^2 + 0.58x + 1.2$$

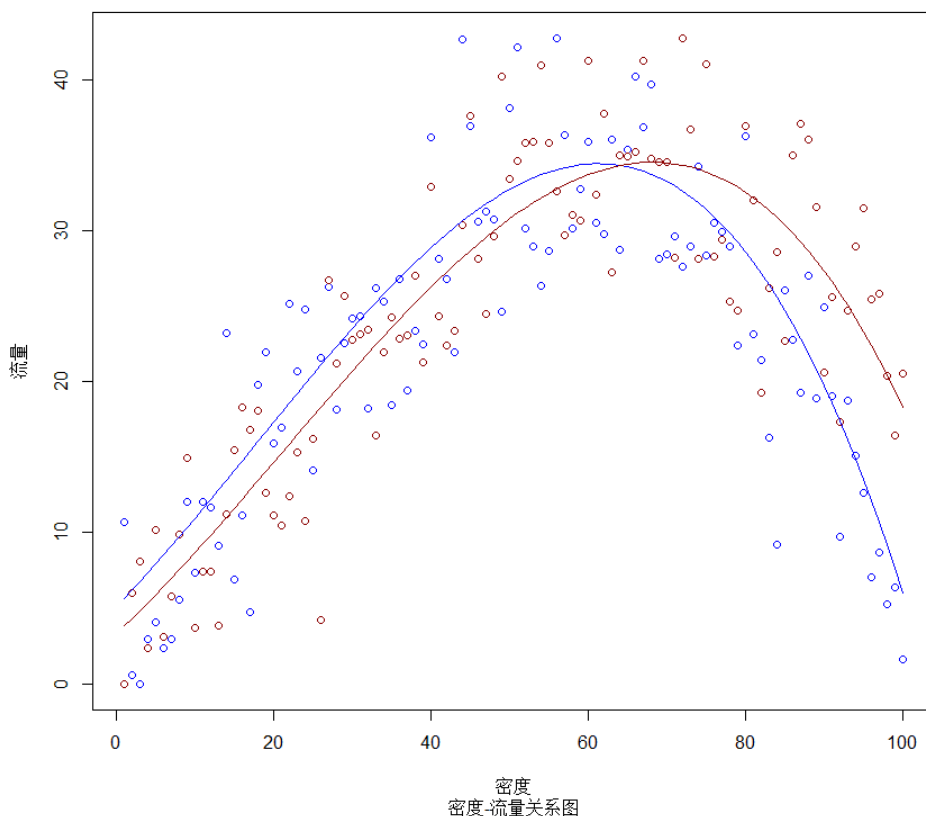
得到图像



(偏差为 4.4188)

大体符合三次函数的图像，验证了交通流流体的流量与密度的关系。

在这个基础上，我们加入了政策的干预，即系统中是否存在摩托车，同时我们还将车流量加工为人流量，建立了人流量与行车密度的关系，对比绘制了政策实施前后流量-密度曲线。



从图中我们可以看到，相同人流量的情况下，有摩托车的系统中车密度比仅有汽车的系统中车密度要大。这就说明了，在人流量总数不变的假设下，“禁摩限电”政策不但不不对市民的出行造成反面的干预，还在保证出行需求被满足的情况下，降低了道路行车密度。行车密度作为拥挤程度的度量，会对后面分析的安全性和环境友好程度造成直接的影响。这也就是定性地证明了“禁摩限电”政策中很重要的一部分积极性和宏观合理性。

我们在这个基础上将交通事故发生率带入系统在固定事故发生率和参与交通者不变的情况下，对进入系统的车之间的时间间隔进行随机，这一系列的时间间隔可以与密度通过函数建立直接的联系。由于单车道的设置，一旦发生事故，系统就会堵塞然后崩溃。在上面的结论下，我们可以进一步推知，在有摩托车的系统中，模拟系统的崩溃时间比仅有汽车的系统更短，也就是摩托车存在的系统安全性相对更差。这也就证明了“禁摩限电”政策对城市交通安全的积极作用。

六、模型陈述

我们借鉴了物理学流体中流速与流量的关系和一个现有的线性模型，通过考察密度与车速、车流量三者之间的关系，并且收集深圳市原来的交通数据，与已经没有摩托车参与的城市交通数据分别进行拟合，得到两个状态下车流量-密度曲线；再通过交通需求（各类交通工具占比），也就是平均载客数，建立人流量与车流量的关系，得到人流量-密度的关系。通过在假设人流量不变的情况下，得到密度之间的差别。最终，我们从密度出发，考虑密度（交通拥挤程度）对安全性（事故发生率）与污染程度（人均用车量）的影响，达成对交通状况的综合评估。在其中我们适当的进行了仿真系统运行，验证了理想的流量-密度关系公式，也验证了摩托车参与交通对安全性的影响。

七、可改进部分

这个模型的假设前提要求较高，也就是说这个模型过于理想，在深入的研究和探讨中还可以补充更具体、更贴近实际的情景。

1、在复杂的城市交通系统中，路口和交通信号灯的密度相当可观，同时遵守每一条具体的交通规则也是必需的，所以更加复杂的交通情景是必须要考虑的。大体思路可以先从假设交通信号灯有固定周期入手，设计一个交通状况循环。来分析一个周期中的流量密度关系以及安全性。

2、由于“禁摩限电”政策还涉及改变社会生活的部分，所以其实人出行流量的变化、各种其他形态的出行方式的变化和影响都是实际存在的。所以只考虑了几种交通主体也是一个较为粗线条的假设。

3、我们的仿真过程又一次对整个分析过程进行了提炼概括，分析过程对人流量前后一致的限定缺失，进一步的研究应更严格的限制这个假设。

八、参考文献

[1]城市干道交通流速度-流量模型(*Greenshields,1935*)

[2]《数学模型（第四版）》-姜启源