Τμημα Ηλεκτρολογων Μηχανικων και
Μηχανικων Υπολογιστων

Διαταξεις Υψηλων Συχνοτητων

Σειρά Ασκήσεων 2/2

Συγγραφέας:
Σπυρίδων
Χατζηγεωργίου
ΑΕΜ: 10527
spyrchat@ece.auth.gr

July 4, 2023

1 Άσκηση 1

1.1 Μέτρηση διηλεκτρικής σταθεράς υλικού με κυματοδηγό

Ζητείται η εύρεση της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς κάθε υλικού με βάσει τα δεδομένα των μετρήσεων A και B. Η διηλεκτρική σταθερά, υπολογίζεται κάθε φορά από τον τύπο:

$$\varepsilon_r = (\frac{f_c}{f})^2 - \frac{1 - (\frac{f_c}{f})^2}{\tan{(\frac{2\pi}{\lambda_g} d_{Amin})} \tan{(\frac{2\pi}{\lambda_g} d_{Bmin})}} \tag{1}$$

Η μοντελοποίησή του προβλήματος στην προγραμματιστική πλατφόρμα Matlab φαίνεται παρακάτω:

```
c = 3e8;
m = 1;
n = 0;
f = 9e9;
a = 22.86 * 1e-3;
b = 10.16* 1e-3;
d1 = 1.5e-3;
d2 = 1.517e-3;

%Cutoff Frequency
fc=c/(2*a);


%Measurements Without Dielectric
WD = [48.4, 73.0, 97.5, 122.2] * 1e-3;

lambdaG = 2 * ((WD(2)-WD(1)) + (WD(3)-WD(2)) + (WD(4)-WD(3))) * 1/(length(WD)-1);

%========================Material A=====================%
%Μέτρηση A
SC = [46.9, 71.5, 96.0, 120.7] * 1e-3;
%Μέτρηση B
OC = [55.6, 80.2, 104.7, 129.4] * 1e-3;
```

```
%Υπολογισμός του dAmin
dAmin = 1/3 * (SC(2)-WD(1) + SC(3)-WD(2) + SC(4)-WD(3));

%Υπολογισμός του dBmin
dBmin = 1/4 * (OC(1)-WD(1) + OC(2)-WD(2) + OC(3)-WD(3) + OC(4)-WD(4));

%Υπολογισμός της διηλεκτρικής σταθεράς
er =  (fc/f)^2 - (1-(fc/f)^2)/(tan(2*pi/(lambdaG)*dAmin) *
tan(2*pi/(lambdaG)*dBmin));

%====================Material B=======================%
%Παρόμοια για το υλικό B
SC2 = [46.7, 71.3, 95.8, 120.5] * 1e-3;
OC2 = [52.6, 77.0, 101.7, 126.3] * 1e-3;

dAmin2 = 1/3 * (SC2(2)-WD(1) + SC2(3)-WD(2) + SC2(4)-WD(3));
dBmin2 = 1/4 * (OC2(1)-WD(1) + OC2(2)-WD(2) + OC2(3)-WD(3) + OC2(4)-WD(4));


er2 =  (fc/f)^2 - (1-(fc/f)^2)/(tan(2*pi/(lambdaG)*dAmin2) *
tan(2*pi/(lambdaG)*dBmin2));
```

Ο κώδικας είναι αρκετά απλός. Ορίζει τις παραμέτρους του προβλήματος, καθώς και Μετρήσεις που δίνονται στην εκφώνηση και ακολουθούν απλές αριθμητικές πράξεις, οι οποίες παρουσιάζονται αναλυτικά στην εργαστηριακή αναφορά. Πιο συγκεκριμένα μοντελοποιείται μια κλασική διάταξη υπολογισμού της διηλεκτρικής σταθεράς με χρήση κυματοδηγού.

Από τα παραπάνω προκύπτουν:

- $\varepsilon_r A = 2.3728$
- $\varepsilon_r B = 4.1830$

1.2 Υπολογισμός ε_r κάνοντας χρήση μόνο της ΜέτρησηςA

Θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την διηλεκτρική σταθερά χρησιμοποιώντας μόνο την πρώτη μέτρηση για κάθε υλικό. Πιο συγκεκριμένα γνωρίζουμε ότι:

$$-jZ_0tan(\beta dAmin) = jZ_0'tan(\beta' d) \Rightarrow \frac{-120\pi}{\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r-(\frac{f_c}{f})^2}}tan(\frac{2\pi}{\lambda_g'}d)$$

$$\frac{tan(\frac{2\pi d}{c}f\sqrt{\varepsilon_r-(\frac{f_c}{f})^2})}{\sqrt{\varepsilon_r-(\frac{f_c}{f})^2}} + \frac{tan(\frac{2\pi}{\lambda_g}dAmin)}{\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}} = 0, \quad \text{θέτοντας} \quad x = \frac{2\pi df}{c}\sqrt{\varepsilon_r-(\frac{f_c}{f})^2}$$

προκύπτει:

$$\frac{tan(x)}{x} + \frac{c}{2\pi df}\frac{tan(\frac{2\pi}{\lambda_g}dAmin)}{\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}} \tag{2}$$

και:

$$\varepsilon_r = (\frac{f_c}{f})^2 + (\frac{cx}{2\pi df})^2 \tag{3}$$

Η εξίσωση 2 είναι μια υπερβατική εξίσωση, η οποία για να λυθεί απαιτεί τη χρήση του Matlab. Από τη λύση της εξίσωσης 2 με αντικατάσταση στην 3 προκύπτει η διηλεκτρική σταθερά.

Η συνέχεια του προηγούμενου Matlab script φαίνεται παρακάτω:

```
%====================Only using the first measurment set=============%


%------------------------------Material 1----------------------------%
x = fzero(@(x) (tan(x)/x + c/(2*pi*d1*f)*
tan(2*pi/lambdaG*dAmin)/sqrt(1-(fc/f)^2) ), 2);
er_est = (fc/f)^2+(c*x/(2*pi*d1*f))^2;

%------------------------------Material 2----------------------------%
y = fzero(@(y) (tan(y)/y + c/(2*pi*d2*f)*
tan(2*pi/lambdaG*dAmin2)/sqrt(1-(fc/f)^2) ), 2);
er_est2 = (fc/f)^2+(c*y/(2*pi*d2*f))^2;

%====================================================================%
```

Από το παραπάνω προκύπτει:

- $\varepsilon_r A = 31.395$
- $\varepsilon_r B = 30.707$

Πρέπει να σημειωθεί ότι προφανώς τα αποτελέσματα είναι εσφαλμένα καθώς είναι αρκετά διαφορετικά από αυτά που υπολογίστηκαν στο προηγούμενο ερώτημα. Αυτό μάλλον οφείλεται στην απόσταση d η οποία δίνεται στην εκφώνηση.

2 Άσκηση 2

Στοιχειοκεραία αποτελείται από N=8 παράλληλα κατακόρυφα δίπολα λ/2, με τα δίπολα να διατάσσονται σε οριζόντιο άξονα (x) και με τα κέντρα τους σε αποστάσεις d μεταξύ τους. Η μέγιστη εκπομπή θέλουμε να είναι στο οριζόντιο επίπεδο. Τα ρεύματα μπορεί να είναι είτε όλα ίσα με +I, είτε εναλλάξ +I και -I.

Έστω ότι τα ρεύματα είναι εναλλάξ:

$$E = j60I\frac{e^{-jkr_i}}{r}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \tag{4}$$

$$E = j60I\frac{e^{-jkr_i}}{r}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}|E| = |E_0|\Big|&e^{jk\frac{7d}{2}\cos\varphi\sin\theta} - e^{jk\frac{5d}{2}\cos\varphi\sin\theta} + e^{jk\frac{3d}{2}\cos\varphi\sin\theta} - e^{jk\frac{d}{2}\cos\varphi\sin\theta} \\ &- e^{-jk\frac{7d}{2}\cos\varphi\sin\theta} + e^{-jk\frac{5d}{2}\cos\varphi\sin\theta} - e^{-jk\frac{3d}{2}\cos\varphi\sin\theta} + e^{-jk\frac{d}{2}\cos\varphi\sin\theta}\Big|\end{aligned} \tag{6}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$\begin{aligned}|E| = |E_0|\Big|&2j\sin\left(\frac{7kd}{2}\cos\varphi\sin\theta\right) - 2j\sin\left(\frac{5kd}{2}\cos\varphi\sin\theta\right) \\ &+ 2j\sin\left(\frac{3kd}{2}\cos\varphi\sin\theta\right) - 2j\sin\left(\frac{kd}{2}\cos\varphi\sin\theta\right)\Big|\end{aligned} \tag{7}$$

Εντελώς παρόμοια μοντελοποιείται το πρόβλημα για την περίπτωση ρευμάτων με ίδιες φορές.

Η μοντελοποίηση της άσκησης φαίνεται στο παρακάτω script:

```
% Define the angle in radians
phi = deg2rad(0:0.001:2*180);
theta = deg2rad(0:0.001:180);


%Lambda value
f = 1e9;
lambda = physconst('LightSpeed') / f;

% Dipole length
d = lambda/2;                           % Dipole spacing
k = 2*pi/lambda;                        % Propagation Constant
I = 1;                                  % Current that goes through the Dipole

% Distance from the origin
xi = (-7/2:1:7/2);


%======================Select Modes for the Patterns===========%


n = 0;% 1 for alternating and 0 for non alternating currents
solid = true;% true for 3D radiation pattern
vertical = false;% true for vertical radiation pattern and flase for horizontal


%==============================================================%





%-------Depending on the modes above the "If statements" bellow will output
%the Desired Graph

if n == 0 && vertical == false && solid == false
    theta = pi/2;
    Etotal = 0;
    for i = 1:1:8
        Ei = (cos(pi/2*cos(theta))./sin(theta)).
```

```
        *exp(1j * k * xi(i) * d .* cos(phi) * sin(theta));
        Etotal = Etotal + Ei;
    end
    Etotal = Etotal / max(Etotal(:));
    polarplot(phi,abs(Etotal))
    title('Radiation Pattern')
    subtitle(['d = ',num2str(d/lambda),'λ','  All Currents have the same direction'])

%-----------------------------------------------------------------%

elseif n == 1 && vertical == false && solid == false
    theta = pi/2;
    Etotal = 0;
    for i = 1:1:8
        Ei = (cos(pi/2*cos(theta))./sin(theta)).*cos((i-1)*pi*n).
        *exp(1j * k * xi(i) * d .* cos(phi) * sin(theta));
        Etotal = Etotal + Ei;
    end
    Etotal = Etotal / max(Etotal(:));
    polarplot(phi,abs(Etotal))
    title('Radiation Pattern')
    subtitle(['d = ',num2str(d/lambda),'λ','  Alternating Currents'])

%---------------------------------------------------------------%

elseif n == 0 && vertical == true && solid == false
    theta = deg2rad(0.0001:0.001:360);
    phi = 0;
    Etotal = 0;
    for i = 1:1:8
        Ei = (cos(pi/2*cos(pi/2 - theta))./sin(pi/2 - theta)).
        *exp(1j .* k .* xi(i) .* d .* cos(phi) .* sin(pi/2 - theta));
        Etotal = Etotal + Ei;
    end
    Etotal = Etotal / max(Etotal(:));
    polarplot(theta,abs(Etotal))
    title('Vertical Radiation Pattern')
    subtitle(['d = ',num2str(d/lambda),'λ','  All Currents have the same direction','
    phi =', num2str(phi)])

```

```
%-------------------------------------------------------------%


elseif n == 1 && vertical == true && solid == false
    theta = deg2rad(0.0001:0.001:360);
    phi = pi/2;
    Etotal = 0;
    for i = 1:1:8
        Ei = (cos(pi/2*cos(pi/2 - theta))./sin(pi/2 - theta)).*cos((i-1)*pi*n).
        *exp(1j * k * xi(i) .* d .* cos(phi) .* sin(pi/2 - theta));
        Etotal = Etotal + Ei;
    end
    Etotal = Etotal / max(Etotal(:));
    polarplot(theta,abs(Etotal))
    title('Vertical Radiation Pattern')
    subtitle(['d = ',num2str(d/lambda),'λ','  Alternating Currents','
    phi =', num2str(phi)])

%-----------------------------------------------------------%


elseif n == 0 && solid == true
   theta = linspace(0.001, pi, 360);
   phi = linspace(0, 2*pi, 360);
   [Theta, Phi] = meshgrid(theta, phi);

   Etotal = zeros(length(theta), length(phi));
   for i = 1:length(xi)
        Ei = (exp(1j * k * xi(i) * d .* cos(Phi) )
        .* sin(Theta)).*cos(pi/2cos(Theta))./sin(theta);
        Etotal = Ei + Etotal;
   end

   Dir = Directivity(Etotal,theta,phi);
   fprintf('The Directivity Calculated using
   the Riemann Approximation is: %f\n', Dir)

   E=@(phi,theta) 1/4 * (cos(pi/2*cos(theta))./sin(theta)).
   *abs(2*cos(7/2 .* k .*d.*cos(phi).*sin(theta))
   + 2*cos(5/2 .*k *d.*cos(phi).*sin(theta))
```

```
    + 2*cos(3/2 .*k .*d.*cos(phi).*sin(theta))
    + 2*cos(1/2 .*k *d.*cos(phi).*sin(theta)));
    x=@(phi,theta) E(phi,theta).*cos(phi).*sin(theta);
    y=@(phi,theta) E(phi,theta).*sin(phi).*sin(theta);
    z=@(phi,theta) E(phi,theta).*cos(theta);
    fsurf(x,y,z,[0 2*pi 0 pi]);
    colorbar;
    title(['3D Radiation pattern for d = ', num2str(d/lambda),'λ']);
    subtitle(['All Currents have the same direction']);
    xlabel('X');
    ylabel('Y');
    zlabel('Z');


%--------------------------------------------------------------------%

elseif n == 1 && solid == true

    theta = linspace(0.001, pi, 360);
    phi = linspace(0, 2*pi, 360);
    [Theta, Phi] = meshgrid(theta, phi);
    Etotal = zeros(length(theta), length(phi));

    ctr = 0;
    for i = 1:length(xi)
         Ei = (cos((ctr)*pi).*exp(1j * k * xi(i) * d .* cos(Phi)
         .* sin(Theta))).*cos(pi/2cos(Theta))./sin(theta);
         Etotal = Etotal + Ei;
         ctr = ctr + 1;
    end

    Dir = Directivity(Etotal,theta,phi);
    fprintf('The Directivity Calculated using the Riemann Approximation
    is: %f\n', Dir)

    E=@(phi,theta) 1/4 * (cos(pi/2*cos(theta))./sin(theta))
    .*abs(2j*sin(7/2 .* k .*d.*cos(phi).*sin(theta))
    - 2j*sin(5/2 *k *d.*cos(phi).*sin(theta))
    + 2j*sin(3/2 .*k .*d.*cos(phi).*sin(theta))
    - 2j*sin(1/2 .*k *d.*cos(phi).*sin(theta)));
```

```
    x=@(phi,theta) E(phi,theta).*cos(phi).*sin(theta);
    y=@(phi,theta) E(phi,theta).*sin(phi).*sin(theta);
    z=@(phi,theta) E(phi,theta).*cos(theta);
    fsurf(x,y,z,[0 2*pi 0 pi]);
    colorbar;
    title(['3D Radiation pattern for d = ', num2str(d/lambda),'λ']);
    subtitle(['Alternating Currents']);
    xlabel('X');
    ylabel('Y');
    zlabel('Z');
end
```

2.1 Ερώτημα Α και Β

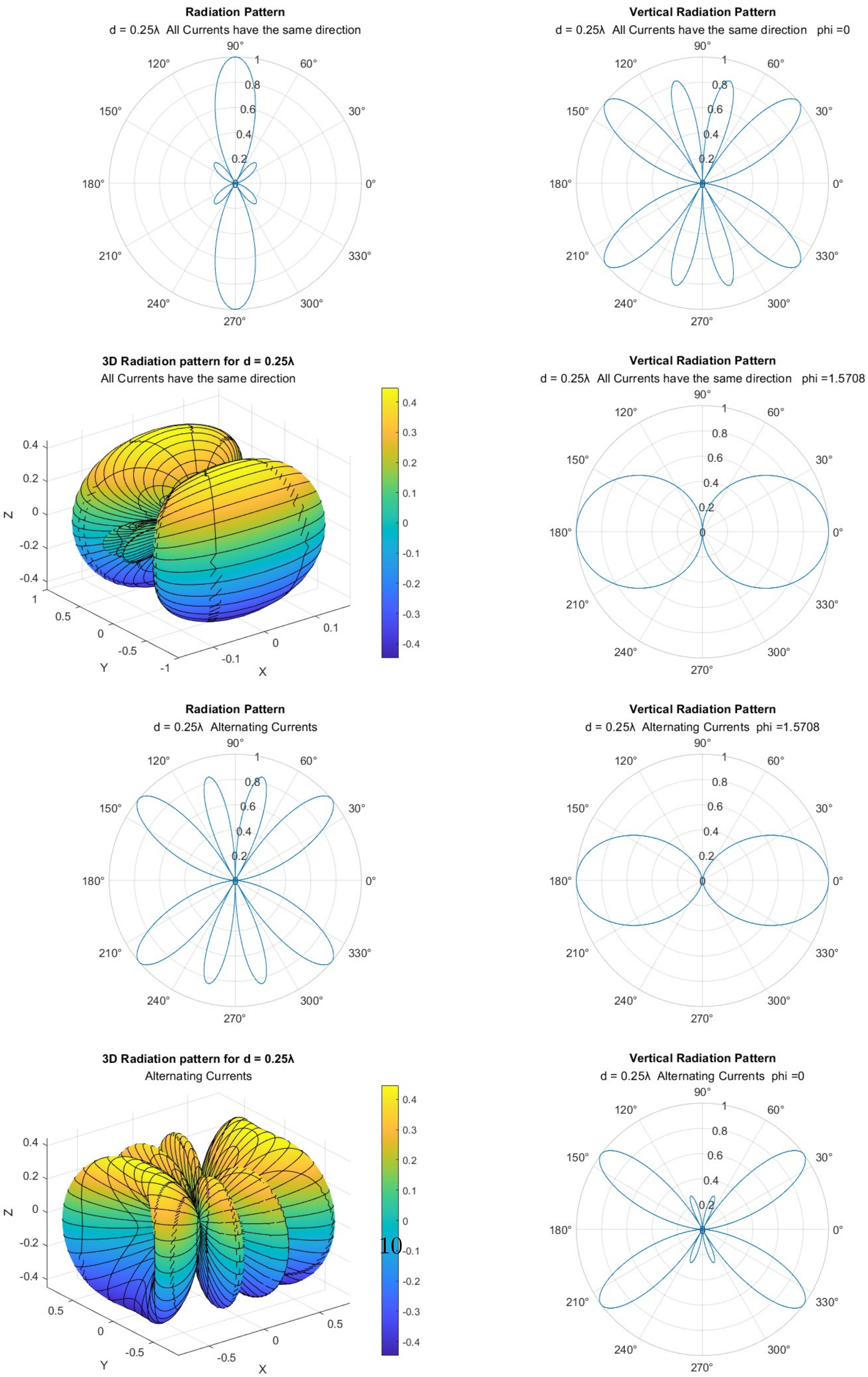


Figure 1: Διαγράμματα Ακτινοβολίας για d=0.25λ

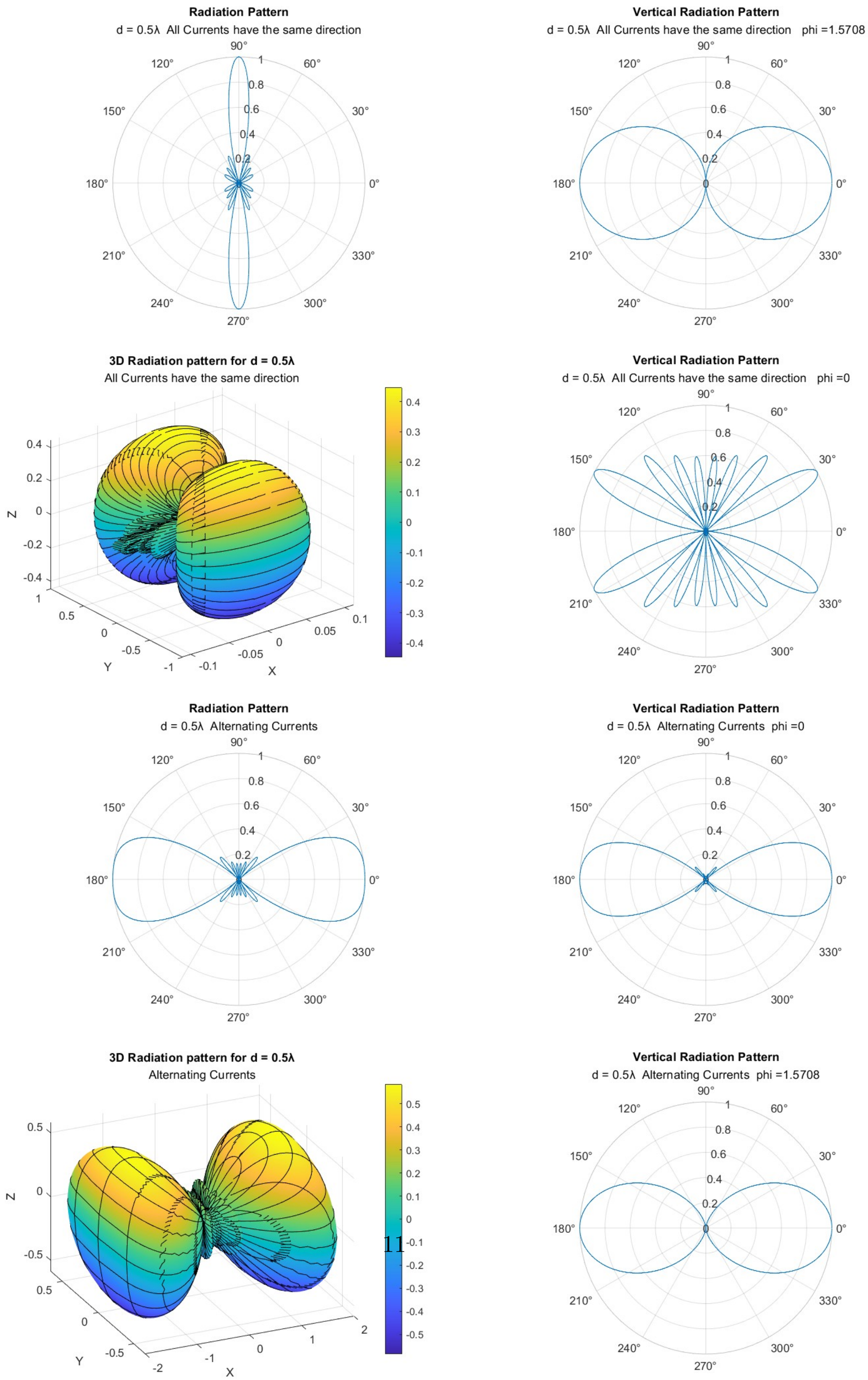


Figure 2: Διαγράμματα Ακτινοβολίας για d=0.5λ

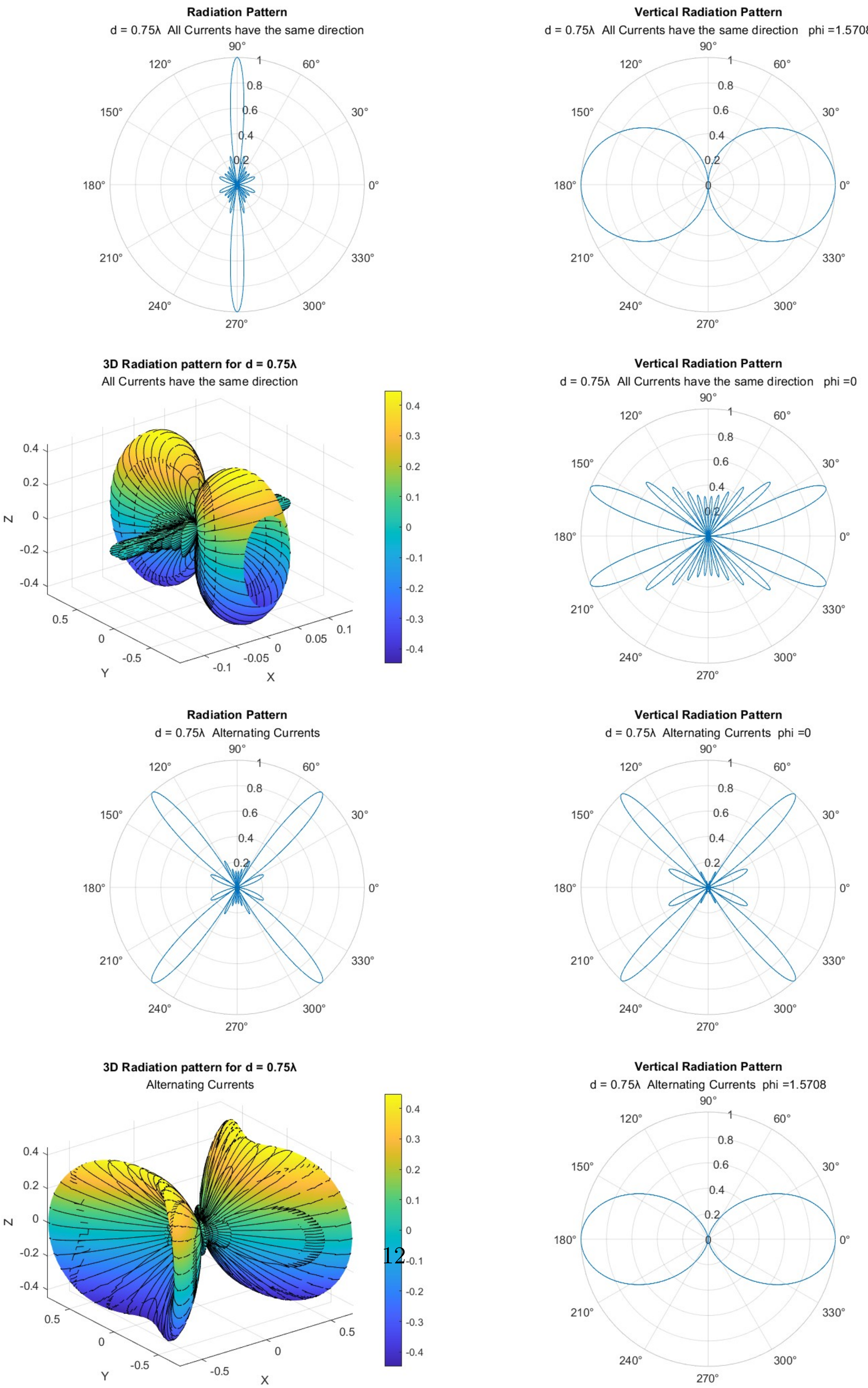


Figure 3: Διαγράμματα Ακτινοβολίας για d=0.75λ

Τα παραπάνω διαγράμματα παράγονται αν τρέξουμε τον κώδικα που αναπτύχθηκε για τις διάφορες επιλογές (modes) όπως φαίνεται στο script. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε είναι η εξής:

- Υπολογισμός Ηλεκτρικού Πεδίου βάσει των εξισώσεων 6 και 7
- Κανονικοποίηση του Ηλεκτρικού Πεδίου ως προς το E_{max}
- Εκτύπωση Κατάλληλων Γραφημάτων για την κάθε περίπτωση

Παρατηρήσεις:

Για το Κατακόρυφο Διάγραμμα της Ακτινοβολίας δίνονται δύο διαγράμματα, για $\varphi = \frac{\pi}{2}$ και για $\varphi = 0$. Ενώ πρέπει να σημειωθεί ότι στον υπολογισμό του πεδίου πρέπει να χρησιμοποιηθεί η γωνία $\frac{\pi}{2} - \theta$, καθώς το Matlab ως ϑ αντιλαμβάνεται την γωνία ανύψωσης (elevation angle) ενώ χρειάζεται για το διάγραμμα η γωνία με τον άξονα z. Για το Στερεό της ακτινοβολίας έγινε χρήση anonymous function E με ορίσματα φ, ϑ, k, d και μετά έγινε κατάλληλη μετατροπή από σφαιρικές σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

2.2 Ερώτημα Γ

Διαπιστώστε ποιοι είναι οι σωστοί συνδυασμοί απόστασής και τροφοδοσίες για ευρύπλευρη ή ακροπυροδοτική λειτουργία (μέγιστο προς τον άξονα y ή τον άξονα x, αντίστοιχα), δικαιολογώντας τη σχετική επιλογή.

Με γνώμονα τα διαγράμματα ακτινοβολίας, φαίνεται ότι για ευρύπλευρη λειτουργία(μέγιστο στον άξονα y) ο καταλληλότερος συνδυασμός(υπάρχουν και άλλοι βέβαια, η επιλογή έγινε με βάση την κατευθυντικότητα) είναι για $d = \frac{\lambda}{2}$ και για ίδιας φοράς ρεύματα, καθώς από το οριζόντιο διάγραμμα φαίνεται να παρουσιάζει μέγιστο E για $\varphi = 90^o$.

Για Ακροπυροδοτική λειτουργία (μέγιστο στον άξονα x) για παρόμοιους λόγους με προηγουμένως, ο καταλληλότερος συνδυασμός, φαίνεται να είναι για $d = \frac{\lambda}{2}$ και για ρεύματα που η φορά τους εναλλάσσεται.

2.3 Ερώτημα Δ

Για τις (δύο) περιπτώσεις αυτές προσδιορίστε υπολογιστικά την κατευθυντικότητα της στοιχειοκεραίας από τον ορισμό (υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα στον παρονομαστή ως διπλό άθροισμα Riemann παίρνοντας ένα μεγάλο αριθμό σημείων υπολογισμού της πυκνότητας ισχύος, π.χ. ανά μία μοίρα τόσο κατά ϑ όσο και κατά φ). Συγκρίνετε με τους θεωρητικούς (προσεγγιστικούς τύπους) για την κατευθυντικότητα: Ευρύπλευρη (broadside): $D = 2Nd/\lambda$ Ακροπυροδοτική (endfire): $D = 4Nd/\lambda$

Για τον υπολογισμό της κατευθυντικότητας δημιουργήθηκε νέα συνάρτηση η οποία δέχεται ως όρισμα το Συνολικό ηλεκτρικό πεδίο καθώς και τα διανύσματα των γωνιών φ και ϑ. Η συνάρτηση καλείται μέσα στο βασικό script για τις περιπτώσεις του στερεού της ακτινοβολίας ώστε να χρησιμοποιηθεί το συνολικό Ηλεκτρικό πεδίο που υπολογίζεται εκεί. Η συνάρτησή Directivity φαίνεται παρακάτω:

```matlab
function D = Directivity(Etotal, theta, phi)
    Pr = (abs(Etotal)).^2 ./(120*pi*2);
    Prmax = max(max(Pr));
    Ptotal = 0;

    [Theta, Phi] = meshgrid(theta, phi);

    for phiIndex = 1:(length(phi)-1)
        for thetaIndex = 1:(length(theta)-1)
            dphi = phi(phiIndex+1) - phi(phiIndex);
            dtheta = theta(thetaIndex+1) - theta(thetaIndex);
            Ptotal = (Ptotal + Pr(phiIndex,thetaIndex)
            .*sin(Theta(thetaIndex,phiIndex)).*dphi.*dtheta);
        end
    end
    D = 4*pi*Prmax/Ptotal;
end
```

Για τους παραπάνω συνδυασμούς η κατευθυντικότητα υπολογίζεται:

- 11.689 - ευρύπλευρη
- 8.2302 - ακροπυροδοτική

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα δεν ταυτίζονται με τους προσεγγιστικούς τύπους, σύμφωνα με τους οποίους η κατευθυντικότητα θα έπρεπε να είναι 16 και 8 αντίστοιχα. Προφανώς κάτι έχει πάει λάθος στο κομμάτι της αριθμητικής ολοκλήρωσής γιατί το πεδίο φαίνεται να υπολογίζεται σωστά. Υπάρχει βέβαια και η περίπτωση οι προσεγγιστικοί τύποι να είναι λανθασμένοι.

Παρατηρήσεις: Για την υλοποίηση της Συνάρτησης υπολογισμού της κατευθυντικότητας, βρέθηκε το ηλεκτρικό πεδίο για κάθε συνδυασμό των ϑ και φ και έπειτα η πυκνότητα της ακτινοβολούμενης ισχύος υπολογίστηκε από το μιγαδικό διάνυσμα Poynting. Έγινε προφανώς χρήση της σχέσης:

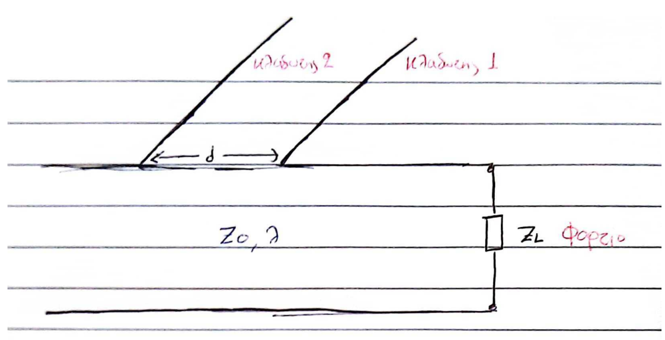
$$\frac{E}{H} = \eta_0 \tag{8}$$

Το ολοκλήρωμα που υπάρχει στον παρονομαστή της σχέσης ορισμού της κατευθυντικότητας υπολογίστηκε προσεγγιστικά με διπλό άθροισμα Riemann για συνολικό δείγμα 360X360 στοιχείων.

3 Άσκηση 3

3.1 Ερώτημα Α

Φορτίο ZL = RL + jXL τροφοδοτείται από γραμμή μεταφοράς χαρακτηριστικής αντίστασης Z0, στην οποία το μήκος κύματος στην κεντρική συχνότητα προσαρμογής είναι λ. Για την προσαρμογή χρησιμοποιείται διπλός παράλληλος κλαδωτής (είτε και οι δύο βραχυκυκλωμένοι είτε και οι δύο ανοιχτοκυκλωμένοι) με Z0 ίδια με αυτήν της κύριας γραμμής. Προσδιορίστε από τα παραπάνω μεγέθη τα μήκη των κλαδωτών (γράψτε μαθηματικές εκφράσεις που προκύπτουν από την επίλυση με βάση τη θεωρία γραμμών μεταφοράς). Το φορτίο είναι τοποθετημένο ακριβώς στο σημείο σύνδεσης με τον δεξιό κλαδωτή. Οι κλαδωτές βρίσκονται σε σταθερή απόσταση d.



Ξεκινάμε από φορτίο ZL. Δεδομένου ότι οι κλαδωτές είναι συνδεδεμένοι παράλληλα στη Γραμμή μεταφοράς, το φορτίο μετατρέπεται σε αγωγιμότητα παρακάτω:

$$Y_A = \frac{1}{Z_L} \Rightarrow \frac{1}{R_L + jX_L} = G_A + jB_A \tag{9}$$

Με διάσπαση του κλάσματος σε πραγματικό και φανταστικό μέρος προκύπτει:

$$G_A = \frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} \qquad B_A = \frac{-X_L}{R_L^2 + X_L^2} \tag{10}$$

Είναι προφανές ότι μετά τον κλαδωτή 1 έχουμε:

$$Y_B = Y_A + jB_{\kappa\lambda 1} = G_A + j(B_{\kappa\lambda 1} + B_A). \tag{11}$$

Συνεπώς, μετατρέποντας πάλι σε αντίσταση έχουμε:

$$Z_B = \frac{1}{Y_B} \Rightarrow \frac{1}{G_A + j(B_{\kappa\lambda 1} + B_A)} = R_B + jX_B \tag{12}$$

Συνολικά ακολουθώντας παρόμοια τεχνική με την εξίσωση 10 προκύπτει:

$$Z_B = \frac{G_A}{G_A^2 + (B + B_{\kappa\lambda 1})^2} - j\frac{B + B_{\kappa\lambda 1}}{G_A^2 + (B + B_{\kappa\lambda 1})^2} \tag{13}$$

Για την Γραμμή Μεταφοράς:

$$Z_\Gamma = Z_0 \frac{Z_B + jZ_0 tan(\beta d)}{Z_0 + jZ_B tan(\beta d)} \tag{14}$$

Με αντικατάσταση:

$$Z_\Gamma = Z_0 \frac{R_B}{(Z_0 - X_B tan(\beta d)) + R_B tan(\beta d)} + jZ_0 \frac{X_B + Z_0 tan(\beta d)}{(Z_0 - X_B tan(\beta d)) + R_B tan(\beta d)} \tag{15}$$

$$Y_\Gamma = \frac{1}{Z_\Gamma} \Rightarrow Y_0 \frac{(Z_0 - X_B tan(\beta d)) + jR_B tan(\beta d)}{R_B + j(X_B + Z_0 tan(\beta d))} = G_\Gamma + jB_\Gamma \tag{16}$$

Αν η εξίσωση 16 διασπαστεί σε πραγματικό και φανταστικό μέρος θα προκύψει:

$$G_\Gamma = Y_0 \frac{Z_0 R_B (1 + tan^2(\beta d))}{R_B^2 + (X_B + Z_0 tan(\beta d))^2} \tag{17}$$

$$B_\Gamma = Y_0 \frac{R_B^2 tan(\beta d) - (X_B + Z_0 tan(\beta d))(Z_0 - X_B tan(\beta d))}{R_B^2 + (X_B + Z_0 tan(\beta d))^2}. \tag{18}$$

Τελικά η αγωγιμότητα μετά τον κλαδωτή 2 είναι: $Y_{in} = Y_\Gamma + j(B_{\kappa\lambda 2} + B_\Gamma)$

Από τη συνθήκη προσαρμογής, έχουμε:

- $Y_{in} = Y_0$
- $G_\Gamma = Y_0$
- $B_{\kappa\lambda 2} = -B_\Gamma$

Για τον υπολογισμό του μήκους των κλαδωτών διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις:

1η περίπτωση — Ανοιχτοκυκλωμένος Κλαδωτής

Από τη σχέση $-jB = -jY_0 tan(\beta l)$ προκύπτει:

$$l_{\kappa\lambda 1} = \frac{1}{2\pi} tan^{-1}(\frac{B_\Gamma}{Y_0})\lambda \tag{19}$$

και το μήκος του κλαδωτή 2 προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης:

$$Z_0(R_\Gamma - Z_0)tan^2(\beta d) - 2Z_0 X_\Gamma tan(\beta d) + (R_\Gamma Z_0 - R_\Gamma^2 - X_\Gamma^2) = 0 \tag{20}$$

2η περίπτωση — Βραχυκυκλωμένος Κλαδωτής

$$-jB = -jY_0 cot(\beta l) \tag{21}$$

Το μήκος του κλαδωτή 1 προκύπτει από

$$l_{\kappa\lambda 2} = \frac{1}{2\pi} arccot(\frac{B_\Gamma}{Y_0})\lambda \tag{22}$$

3.2 Ερώτημα B

Για προσαρμογή φορτίου 10-j70 Ω σε γραμμή μεταφοράς 50 Ω σε κεντρική συχνότητα 5 GHz, χρησιμοποιούμε διπλό κλαδωτή με είτε και τους δύο βραχυκυκλωμένους είτε και τους δύο ανοιχτοκυκλωμένους σε σταθερή απόσταση μεταξύ τους λ/8 (στη συχνότητα των 5 GHz). Απεικονίστε το μέτρο του συντελεστή ανάκλασης (καθαρό αριθμό) για συχνότητες 0 έως 10 GHz, για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις και συγκρίνετέ τις ως προς το εύρος ζώνης καλής προσαρμογής (SWR2).

Το μήκος των δύο κλαδωτών μπορεί να βρεθεί με τη χρήση του διαγράμματος Smith, τόσο για τους ανοιχτοκυκλωμένους, όσο και για τους βραχυκυκλωμένους κλαδωτές. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε ήταν να οραματιστούμε την πορεία του διαγράμματος smith ώστε να καταλήξουμε σε κύκλο σταθερής αντίστασης την μονάδα, προκείμενου με την προσθήκη (ή την αφαίρεση) επιλεκτικότητας για την κάθε περίπτωση, να φτάσουμε στο κέντρο του διαγράμματος, δηλαδή στην προσαρμογή. Συνολικά βρίσκουμε:

- Βραχυκυκλωμένοι Κλαδωτές $\rightarrow \mathrm{l}_1 = 0.214\lambda$ και $l_2 = 0.054\lambda$
- Ανοιχτοκυκλωμένοι Κλαδωτές $\rightarrow \mathrm{l}_1 = 0.106\lambda$ και $l_2 = 0.218\lambda$

Τα διαγράμματα smith για τις δύο περιπτώσεις δίνονται παρακάτω:

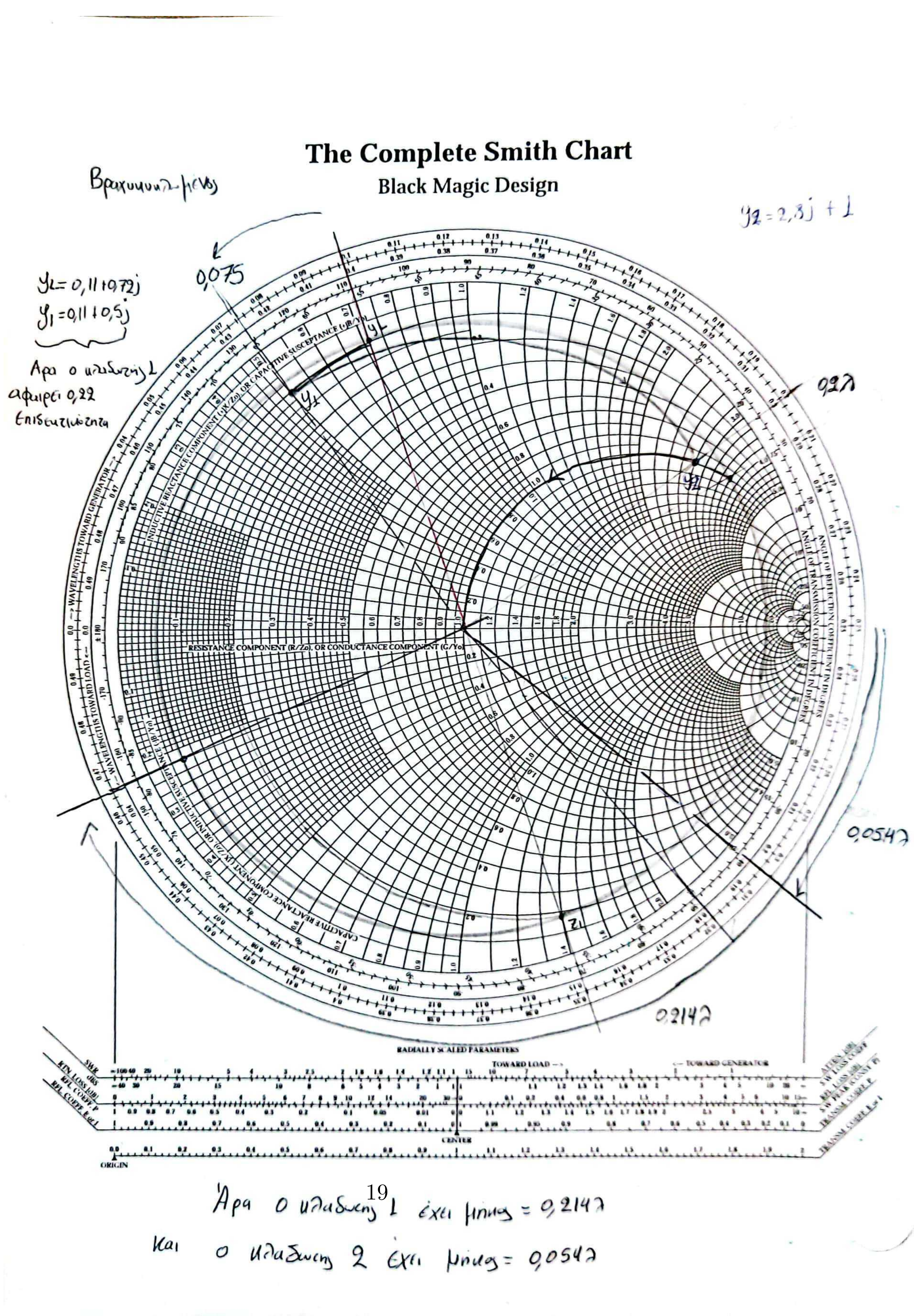


Figure 4: Διάγραμμα Smith για Βραχυκυκλωμένους Κλαδωτές

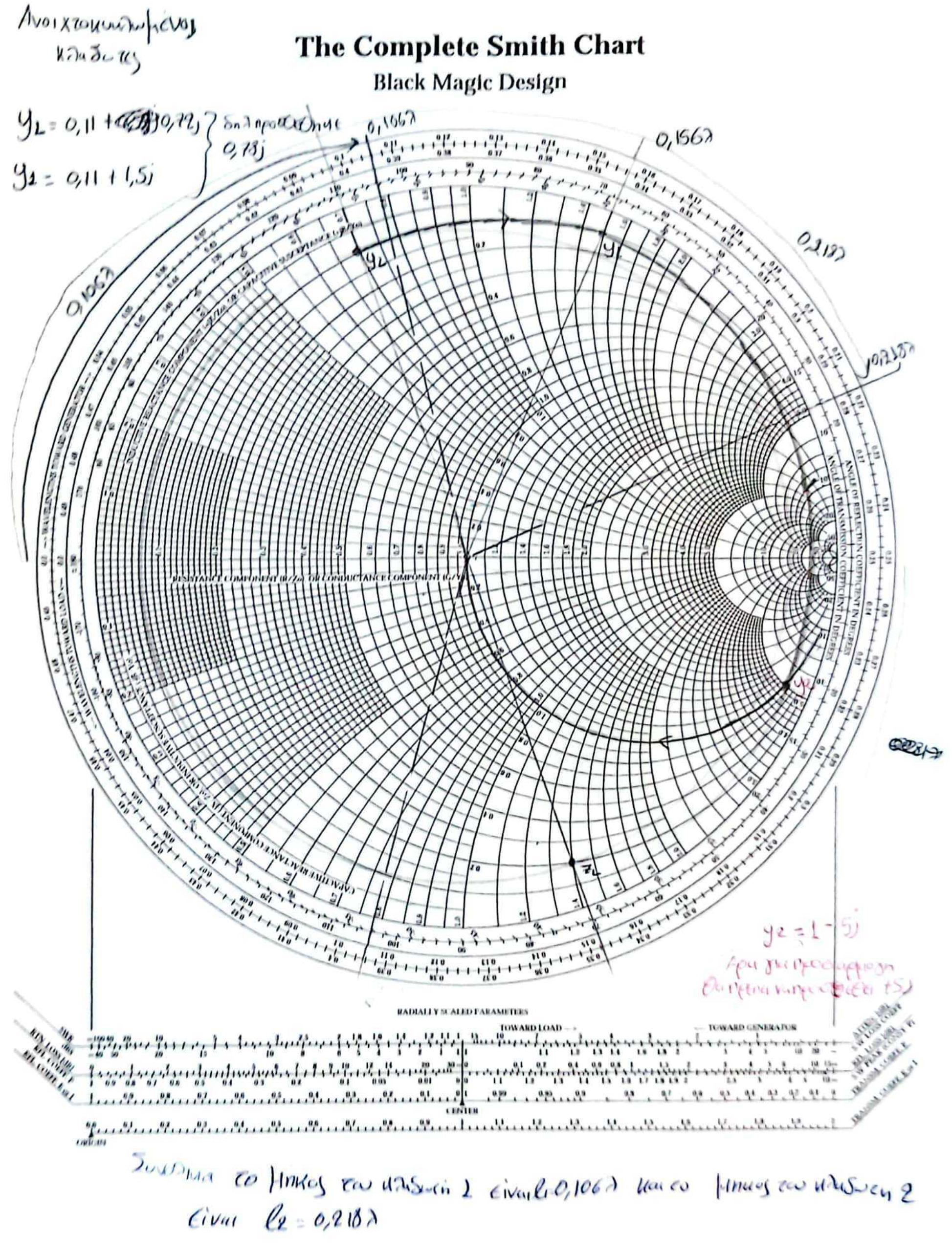


Figure 5: Διάγραμμα Smith για ανοιχτοκυκλωμένους Κλαδωτές

Από την υλοποίηση του κυκλώματος στο Matlab, η οποία φαίνεται ενδεικτικά για την περίπτωση των βραχυκυκλωμένων κλαδωτών παρακάτω:

```
% Constants
Z0 = 50;
Z1 = 50;
Zs2 = 50;
Z3 = 50;
N = 201;
fmin = 0;
fmax = 10e9;
f0 = 5e9;
f = linspace(0, 2*f0, N);
ZL = 10 - 1i*70;

% Calculations for Line 2
betaL2 = 2*pi*0.214*f/f0;
ZinS2 = 1i*Z0.*tan(betaL2);
ZL2 = (ZinS2.*ZL)./(ZinS2 + ZL);

% Calculations for Line 1
betaL1 = 2*pi*0.125*f/f0;
Zin1 = Z0*(ZL2 + 1i*Z0.*tan(betaL1))./(Z0 + 1i.*ZL2.*tan(betaL1));

% Calculations for Line 3
betaL3 = 2*pi*0.054*f/f0;
ZinS3 = 1i*Z0.*tan(betaL3);
ZL3 = (ZinS3.*Zin1)./(Zin1 + ZinS3);

% Calculation of S11 and S11dB
S11 = (ZL3-Z0)./(ZL3+Z0);

plot(f/1e9, abs(S11));
xlabel('Frequency (GHz)');
ylabel('Reflection coefficient');

```

Προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα:

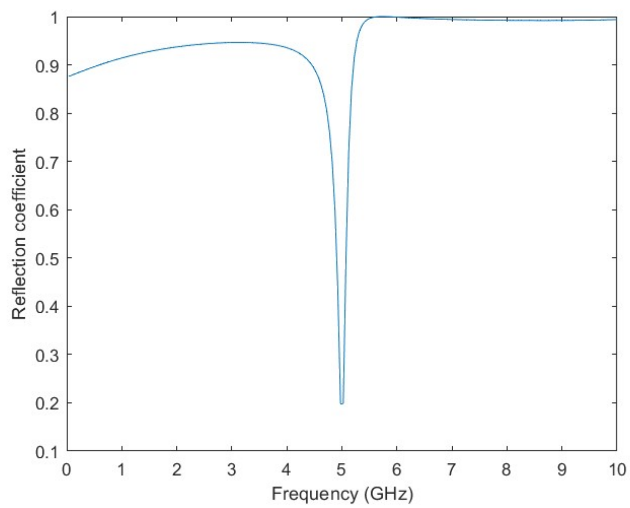


Figure 6: Διάγραμμα Συντελεστή Ανάκλασης για Ανοιχτοκυκλωμένους Κλαδωτές

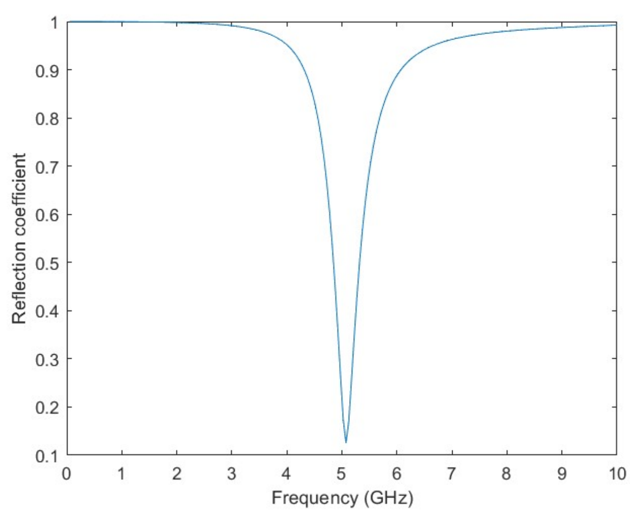


Figure 7: Διάγραμμα Συντελεστή Ανάκλασης για Βραχυκυκλωμένους Κλαδωτές

Ο περιορισμός καλής προσαρμογής $SWR <= 0.2$ σημαίνει ότι

$$\Gamma <= \frac{SWR-1}{SWR+1} = 0.33. \tag{23}$$

Από τα παραπάνω γραφήματα φαίνεται ότι η διάταξη με τους βραχυκυκλωμένους κλαδωτές το πετυχαίνει αυτό για μεγαλύτερο εύρος ζώνης.

3.3 Ερώτημα Γ

Επιχειρήστε να λύσετε το παραπάνω πρόβλημα (β) αν αντί των δύο κλαδωτών χρησιμοποιηθούν δύο πυκνωτές αλλά σε σειρά με τη γραμμή μεταφοράς. Χρησιμοποιήστε για την επίλυση (προσδιορισμό των χωρητικοτήτων τους) το διάγραμμα Smith.

Ξεκινώντας από το ίδιο φορτίο $z_L = 0.2 - 1.4j$ και λαμβάνοντας υπόψιν ότι οι πυκνωτές σε σειρά προσθέτουν αρνητική αντίδραση, δηλαδή ό πρώτος πυκνωτής θα μας οδηγήσει σε κύκλο σταθερού SWR εξωτερικό του υπάρχοντος. Παρατηρούμε λοιπόν ότι είναι αδύνατον με Γραμμή μεταφοράς μήκους λ/8 να οδηγηθούμε σε σήμειο κατάλληλο ώστε με την προσθήκη αρνητικής αντίδρασης του δεύτερου πυκνωτή, να οδηγηθούμε στην προσαρμογή.

4 Άσκηση 4

Κυλινδρικό αντηχείο μήκους d και διαμέτρου 2a με τέλεια αγώγιμα τοιχώματα λειτουργεί σε ρυθμό TM_{010}.

4.1 Ερώτημα Α

Γράψτε τις εκφράσεις του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του. Σχεδιάστε ποιοτικά τις γραμμές του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου. Διαπιστώστε ότι το κυματικό φαινόμενο αναπτύσσεται μόνον στη διατομή του αντηχείου και όχι προς τη διεύθυνση του μήκους του.

Για το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του αντηχείου ισχύουν:

$$E_\rho = \frac{-\beta\alpha}{p_{01}} A J_0'(\frac{p_{01}}{\alpha}\rho) cos(n\varphi) sin(\beta z) \tag{24}$$

Επειδή όμως $\beta = 0$ το $E\rho = 0$

Για παρόμοιο λόγο προκύπτει και το $E_\varphi = 0$

για το E_z:

$$E_z = AJ_0(k_c\rho)cos(n\varphi)cos(\beta z) \Rightarrow E = AJ_0(k_c\rho) \tag{25}$$

Για το Μαγνητικό Πεδίο:

$$H_\rho = \frac{-j\omega\varepsilon}{k_c^2\rho}AJ_0(k_c\rho)sin(n\varphi)cos(\beta z) = 0, \quad n, \beta = 0 \tag{26}$$

$$H_\varphi = \frac{-j\omega\varepsilon n}{k_c}AJ_0'(k_c\rho) \tag{27}$$

Για όλες τις εξισώσεις:

- $k_c = \frac{p_{01}}{\alpha} = \frac{2.405}{\alpha}$
- $\beta = \frac{l\pi}{d} = 0$

Όντως λοιπόν το κυματικό φαινόμενο αναπτύσσεται μόνο στη διατομή του αντηχείου και όχι προς τη διεύθυνση του μήκους του.

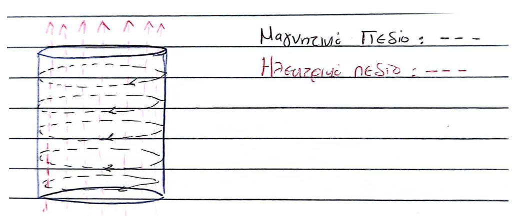


Figure 8: Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού και Μαγνητικού Πεδίου

4.2 Ερώτημα Β

Στο αντηχείο εισάγεται διηλεκτρική πλάκα (χαρακτηριστικών εr και tanδ) πάχους t και διαμέτρου 2a, παράλληλα προς τις βάσεις του αντηχείου έτσι ώστε να εφάπτεται στην παράπλευρη επιφάνεια, και σε κάποια (τυχαία) απόσταση από την μία βάση. Δείξτε ότι η εισαγωγή της διηλεκτρικής πλάκας δεν μεταβάλλει τη μορφή του πεδίου (ηλεκτρικού ή μαγνητικού) στον κενό χώρο του αντηχείου, μεταβάλλει όμως τη σχέση των τιμών του ηλεκτρικού πεδίου εντός και εκτός της διηλεκτρικής πλάκας.

Υποθέτουμε παρόμοια μορφή ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου μέσα στη διηλεκτρική πλάκα. Πιο συγκεκριμένα έστω E:

$$E_z = BJ_0(k_c\rho) \tag{28}$$

Από τη συνέχεια των κάθετων συνιστωσών του Ηλεκτρικού Πεδίου, προκύπτει: $D_1 = D_2 \Rightarrow \varepsilon_r \varepsilon_0 BJ_0(k_c\rho) = \varepsilon_0 AJ_0(k_c\rho) \Rightarrow B = \frac{A}{\varepsilon_r}$ Επομένως αυτό που όντως μεταβάλλεται είναι η σχέση των τιμών του ηλεκτρικού πεδίου. Παρατηρούμε ότι οι οριακές συνθήκες προφανώς ισχύουν και για την συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών του Μαγνητικού Πεδίου $H1 = H2$. Σημειώνεται ότι με δείκτη 1 ορίζεται η το πεδίο μέσα στην πλάκα ενώ με 2 το πεδίο με διηλεκτρικό τον αέρα.

4.3 Ερώτημα Γ

Υπολογίστε το Q του αντηχείου με τη διηλεκτρική πλάκα

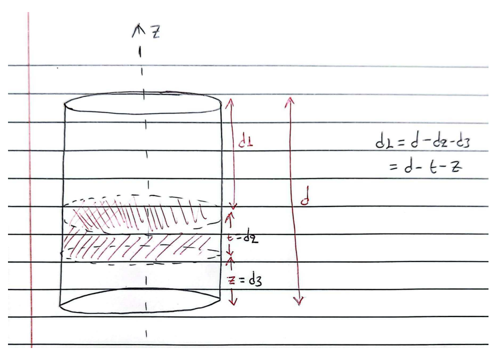


Figure 9: Αντηχείο με Διηλεκτρική Πλάκα

Θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το Q με βάση τον ορισμό:

$$Q = \omega \frac{W_e + W_m}{P_l} = \omega \frac{2W_e}{P_l} \tag{29}$$

Η 28 ισχύει επειδή βρισκόμαστε στον συντονισμό.
Η αποθηκευμένη Ενέργεια Ηλεκτρικού Πεδίου αναγκαστικά θα πρέπει να υπολογιστεί πεδιακά:

$$W_e = \frac{1}{4}\Re(\iiint_{V1} \varepsilon_0 |E|^2 \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz + \iiint_{V2} \varepsilon_0 \varepsilon_r |E|^2 \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz \iiint_{V3} \varepsilon_0 |E|^2 \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz) \tag{30}$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{d_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha} A^2 J_0^2(kc\rho)\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \Rightarrow 2\pi d_1 \underbrace{\int_0^{\alpha} A^2 J_0^2(kc\rho)\rho\, d\rho}_{\text{k}} = 2\pi d1k$$

(31)

Με ανάλογο τρόπο υπολογίζονται και τα χωρικά ολοκληρώματα 2 και 3 και προκύπτει:

$$(2) = \frac{2\pi d_2}{\varepsilon_r^2}k \tag{32}$$

και

$$(3) = 2\pi d_3 k \tag{33}$$

Συνολικά:

$$W_e = \frac{\varepsilon_0 \pi d_1}{2}k + \frac{\varepsilon_0 \pi d_2}{2\varepsilon_r}k + \frac{\varepsilon_0 \pi d_3}{2}k \tag{34}$$

Για την Ισχύ των απωλειών, δεδομένου ότι έχουμε τέλεια αγώγιμα τοιχώματα πέραν της πλάκας, θα πρέπει να υπολογίσουμε την ισχύ των απωλειών στην διηλεκτρική πλάκα. Αυτό θα γίνει με το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$\frac{1}{2}\sigma\int_0^{d_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha} |E|^2 \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \frac{\pi\omega\varepsilon_0 tan\delta d_2 k}{\varepsilon_r} \tag{35}$$

Σε αυτό το σημείο καλό θα ήταν να επισημανθεί ότι:

- $\sigma = \omega\varepsilon_0\varepsilon_r tan\delta$,
- $d_1 = d - t - z$,
- $d_2 = t$,
- $d_3 = z$

Όπως ακριβώς φαίνεται και στο σχήμα.

Συνολικά με αντικατάσταση στην 28 βλέπουμε ότι το ολοκλήρωμα k απλοποιείται και παίρνουμε:

$$Q = \frac{\varepsilon_r(d_1 + d_3) + d_2}{tan(\delta)d_2} = \frac{\varepsilon_r(d-t)+t}{t * tan\delta} \tag{36}$$

4.4 Ερώτημα Δ

Στο αρχικό (κενό) αντηχείο εισάγεται εσωτερικά μεταλλική ράβδος, τέλεια αγώγιμη, διαμέτρου 2a , όπως φαίνεται στο σχήμα. Ποια είναι η χαμηλότερη συχνότητα συντονισμού του;

Πλέον αντί για αντηχείο η διάταξη είναι βραχυκυκλωμένος συντονιστής λ/2 (ομοαξονικό καλώδιο).
Η μικρότερη συχνότητα συντονισμού, μπορεί εύκολα να υπολογιστεί, από τις σχέσεις:

$d = \lambda/2$ και $\lambda = \frac{c_0}{f}$, προκύπτει λοιπόν $d = \frac{c}{2f}$ 'αρα:

$$f = \frac{c_0}{2d} \tag{37}$$

4.5 Ερώτημα Ε

Ο ίδιος μεταλλικός αγωγός εισάγεται αλλά με τρόπο ώστε να ακουμπά μόνο στην αριστερή βάση, αφήνοντας ένα πολύ μικρό διάκενο d με τη δεξιά βάση, όπως φαίνεται στο σχήμα (πλάγια τομή). Αφού κατανοήσετε τη φυσική του προβλήματος, προσπαθήστε να γράψετε τις εξισώσεις για τον υπολογισμό της χαμηλότερης συχνότητας συντονισμού.

Το διάκενο εδώ λειτουργεί ως πυκνωτής παράλληλων πλακών, με διηλεκτρικό τον αέρα και χωρητικότητα, που δίνεται από τη σχέση:

$$C = \varepsilon \frac{S}{d} \tag{38}$$

Το ομοαξονικό καλώδιο θα παίξει τον ρόλο της Γραμμής μεταφοράς, ενώ ο πυκνωτής αυτόν του φορτίου. Η ελάχιστη συχνότητα θα βρεθεί από τον ορισμό του συντονισμού και συγκεκριμένα $Im(Z_{in}) = 0$. Αρχικά υπολογίζουμε το Z_0 της Γραμμής Μεταφοράς, από τους γνωστούς τύπους για TEM Γραμμές. Πιο συγκεκριμένα:

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} ln(\frac{\alpha}{\alpha'}) \tag{39}$$

και:

$$Z_L = \frac{-jd'}{\omega \varepsilon_0 s} \tag{40}$$

το ε_r το θεωρούμε 1 Βρίσκουμε το Zin από τη γνωστή σχέση:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L tan(\beta l)} = Z_0 \frac{\frac{-jd'}{\omega\varepsilon_0 s} + jZ_0 tan(\beta l)}{Z_0 + \frac{d'}{\omega\varepsilon_0 s} tan(\beta l)} = j\frac{\frac{-d'}{\omega\varepsilon_0 s} Z_0 + jZ_0^2 tan(\beta d)}{Z_0 + \frac{d'}{\omega\varepsilon_0 s} tan(\beta d)} \tag{41}$$

Σημειώνεται ότι κανονικά το l είναι $d - d'$ αλλά το d' είναι πολύ μικρότερο οπότε γίνεται αυτή η προσέγγιση. Επίσης $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$
Από τη σχέση ορισμού του συντονισμού:

$$Im(Z_{in}) = 0 \Rightarrow \omega = \frac{d'}{\varepsilon_0 S Z_0 tan(\beta d)} \tag{42}$$

Με αντικατάσταση των $S = \pi\alpha'^2$ και Z_0 από την σχέση 39, προκύπτει:

$$f = \frac{d'}{120\pi^2 \alpha'^2 \varepsilon_0 ln(\frac{\alpha}{\alpha'}) tan(\beta d)} \tag{43}$$