

## PROJET D'ELEMENTS FINIS

MADELAINE Colin  
Elève - Ingénieur à l'E.N.S.G.

Mai 2024

**Notice analytique**

|  |  |
|--|--|
| Titre du document<br>Document title                            | Rapport d'éléments finis<br>Report of finite element   |
| Cadre et nature du travail<br>Framework and nature of the work | Implémentation de la méthode des éléments finis en C++<br>Implementation of the finite element method in C++   |
| Date de publication<br>Issue date                              | 5/12/2023  |
| Auteurs<br>Authors   | MADELAINÉ Colin  |
| Encadrement<br>Superviser                                      | CUPILLARD Paul   |
| Résumé<br>Summary  | Ecriture d'un code en C++ et validation de ses simulations sur des grilles 2D.<br>Writing of a C++ code and validation of its simulations in 2D grids. |
| Mots-clés<br>Keywords  | Elément fini ; C++ ; simulations<br>Finite element ; C++ ; simulations   |
| Nombres de pages<br>Pages number                               | 11   |
| Annexes<br>Annexes   | 2  |

## Table des matières

|   |    |
|---|----|
| Introduction .....  | 5  |
| Les tests .....   | 5  |
| Les simulations.....  | 5  |
| a) Simulation avec conditions de Dirichlet pur .....                                | 5  |
| b) Simulation avec conditions de Dirichlet nul et terme source unitaire .....       | 6  |
| c) Simulation avec conditions de Dirichlet et terme source de type sinus bump ..... | 7  |
| d) Simulation avec conditions de Neumann .....                                      | 9  |
| e) Simulation sur une géométrie complexe de mug.....                                | 10 |
| Conclusion.....   | 11 |

## Tables des figures

|  |    |
|--|----|
| Figure 1 : résultats de Dirichlet pur .....              | 6  |
| Figure 2 : résultats du problème de source unitaire..... | 7  |
| Figure 3 : Résultats du problème de sinus bump.....      | 8  |
| Figure 4 : Solution analytique du sinus bump .....       | 8  |
| Figure 5 : Erreurs d'approximation du sinus bump.....    | 9  |
| Figure 6 : Résultats du problème de Neumann.....         | 10 |
| Figure 7 : Résultats du problème du mug.....             | 11 |

## Introduction

L'implémentation de la méthode des éléments finis en C++ proposé en ligne sur le repository github ([https://github.com/Themayalabeille/fem2A\\_Madelaine.git](https://github.com/Themayalabeille/fem2A_Madelaine.git)) est complété par l'utilisation du projet Mcredit pour visualiser les résultats des simulations. Les géométries 2D utilisés ont été maillé indépendamment de ce projet. Afin de valider les résultats de notre code, deux approches se complètent. Tout d'abord, des tests internes au code permettent de valider les résultats attendus par les différentes fonctions. Ensuite, la cohérence physique des résultats des simulations sont analysés.

## Les tests

Les tests permettent de vérifier les résultats des fonctions du code en les comparant avec des valeurs attendues fournies. La quadrature qui consiste à calculer l'intégrale des éléments de références est vérifiée avec une valeur attendue de  $\frac{1}{2}$  sur le triangle de référence.

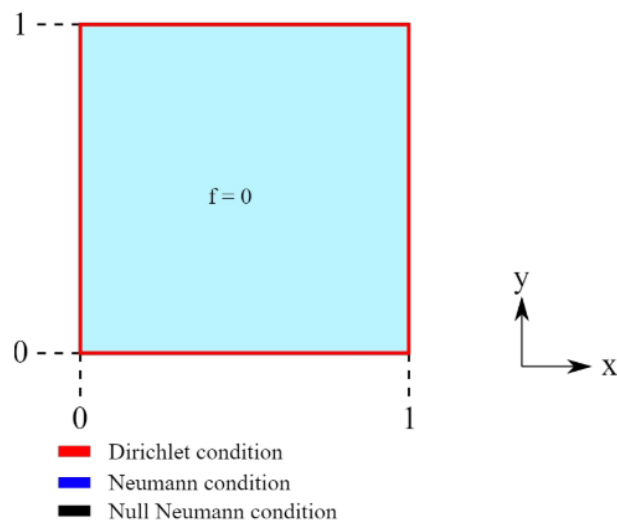
Les tests de la classe ElementMapping permettent de s'assurer que le code utilise correctement les grilles fournies et les utiliser dans le système de coordonnées de références. Des tests vérifient également le calcul du Jacobien et du déterminant.

Les derniers tests vérifient que les vecteurs et matrices manipulés pendant le calcul renvoient les bonnes valeurs.

## Les simulations

### a) Simulation avec conditions de Dirichlet pur

Ce problème simple sur une géométrie carré simple permet d'appréhender sans calcul la forme de la solution attendue et donc d'analyser les résultats.



Voici les conditions pour le problème :

- Conditions de Dirichlet :  $u = x + y$
- Coefficient de diffusion :  $k = 1$  (constant)

Les résultats obtenus ci-dessous sont cohérent entre eux en utilisant deux maillages différents plus et moins grossier. On remarque que la condition  $u = x + y$  au bord est bien respecté et que les valeurs sont

effectivement comprises entre 0 au point (0,0) et 2 au point (1,1). De plus, aucune source autre que la condition de Dirichlet imposé ne semble être présente ce qui est cohérent avec le problème.

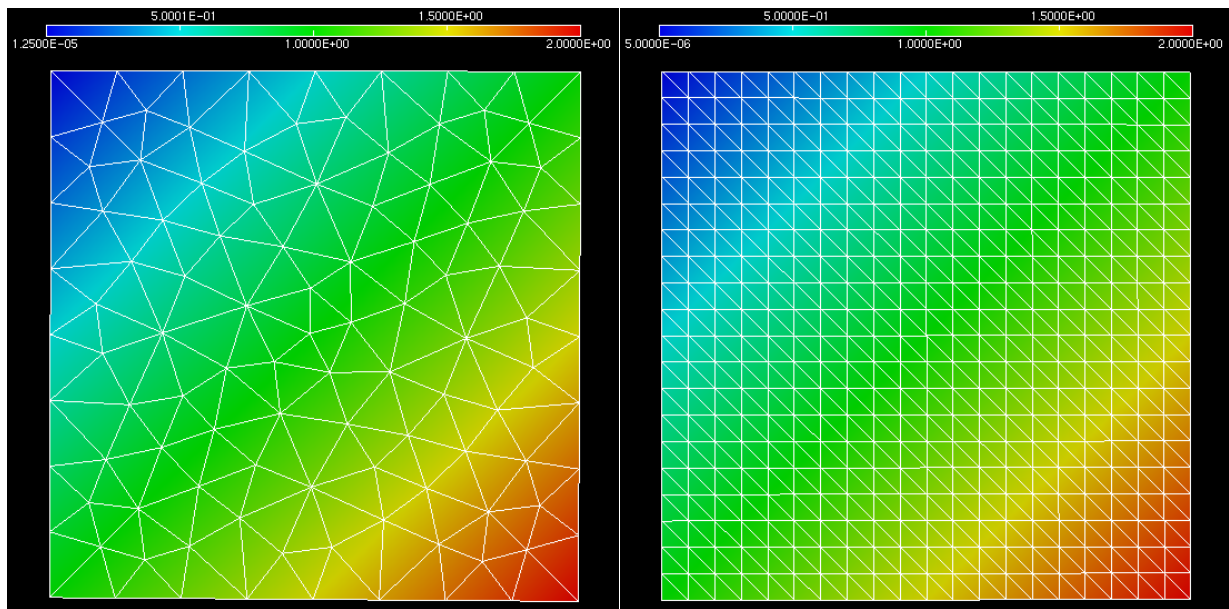
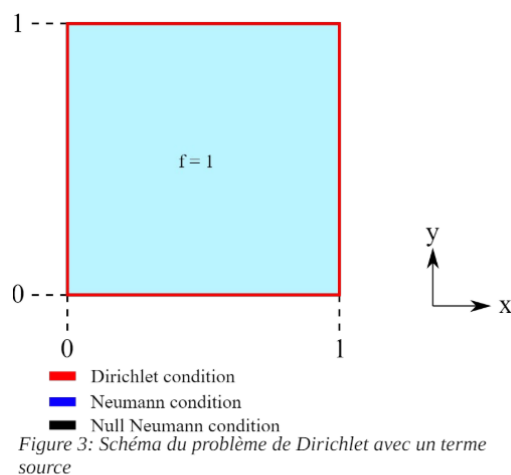


Figure 1 : résultats de Dirichlet pur

### b) Simulation avec conditions de Dirichlet nul et terme source unitaire

Cette simulation simple impose des conditions aux bords nulles avec seulement un terme source unitaire.



Voici les conditions pour le problème :

- Conditions de Dirichlet :  $u=0$
- Coefficient de diffusion :  $k=1$  (constant)
- Terme source :  $f=1$  (constant)

Les résultats obtenus sont également cohérents entre eux pour différents maillages tant en échelle de valeur qu'en répartition. La seule source de chaleur étant le terme source, il est cohérent que les valeurs calculées soient inférieures à 1.

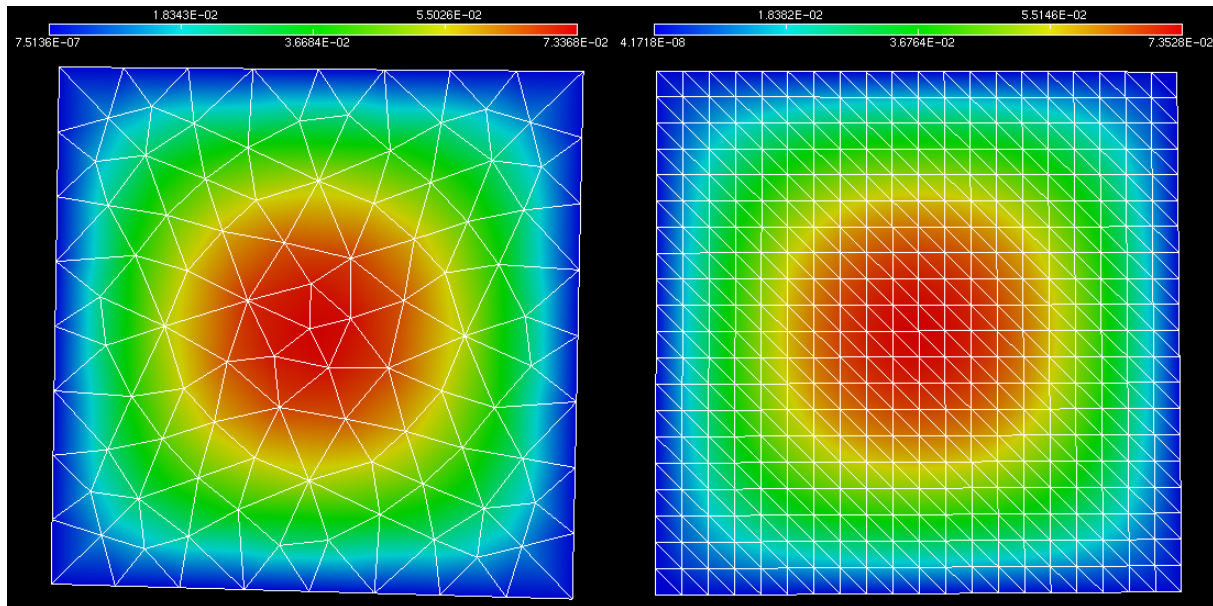


Figure 2 : résultats du problème de source unitaire

### c) Simulation avec conditions de Dirichlet et terme source de type sinus bump

Cette simulation est similaire à la précédente avec un terme source de type sinus bump. On notera l'existence d'une solution analytique simple pour ce problème. Une comparaison entre les résultats des simulations et la solution exacte est donc possible ainsi que l'estimation des erreurs de la simulation. On observe que nos résultats sont très proches de la solution pour les deux maillages carrés.

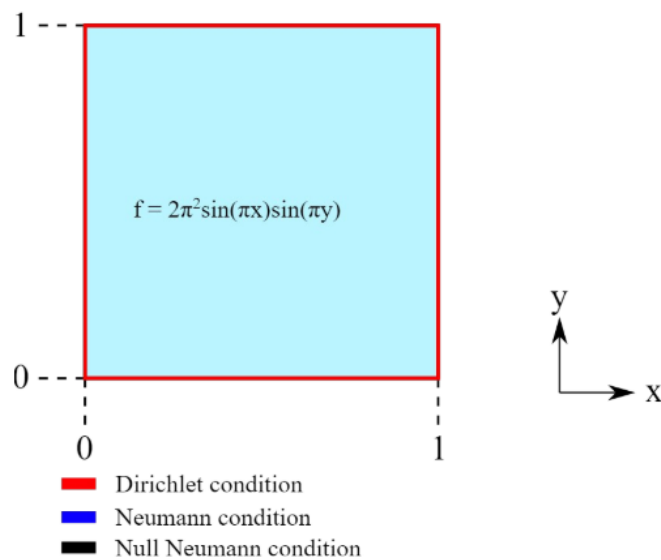


Figure 5: Schéma du problème de Dirichlet avec un terme source

Voici les conditions pour le problème :

- Conditions de Dirichlet :  $u=0$
- Coefficient de diffusion :  $k=1$  (constant)
- Terme source :  $f=2 \cdot \pi^2 \cdot \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y)$

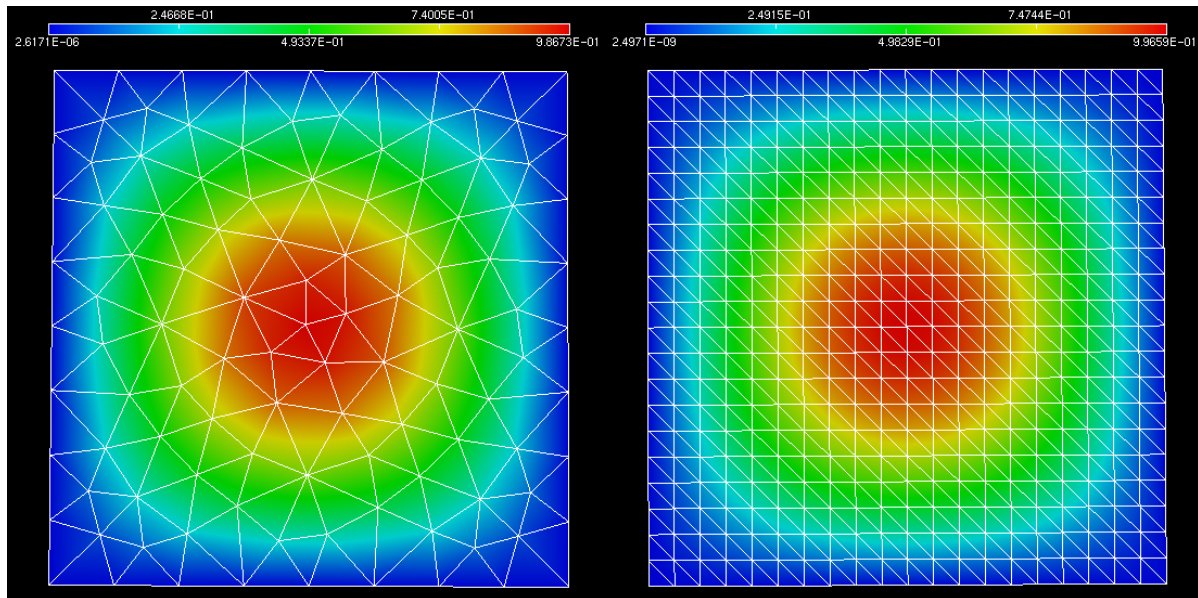


Figure 3 : Résultats du problème de sinus bump

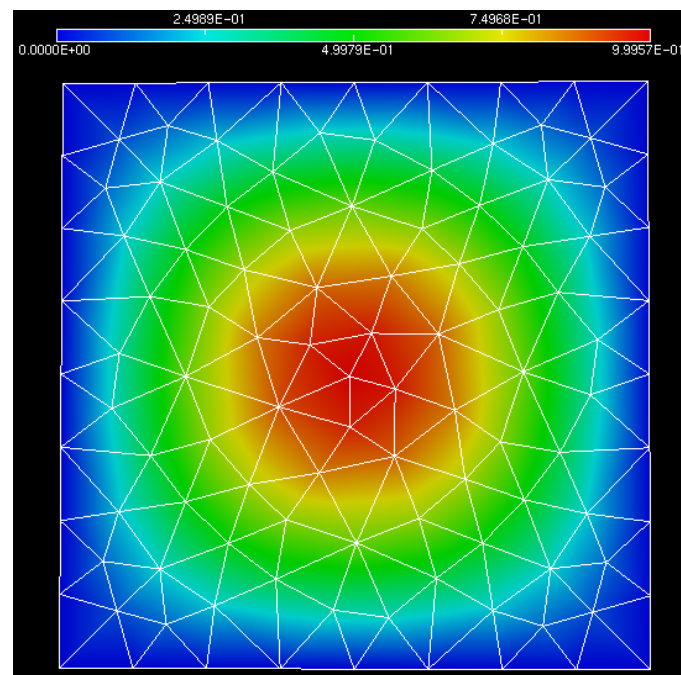


Figure 4 : Solution analytique du sinus bump

Les erreurs d'approximations ne sont pas cohérentes pour le maillage grossier mais sont cohérentes pour le maillage fin. Les erreurs d'estimations restent faibles pour des degrés de quadrature de 0 ou 2. Ces erreurs sont calculées en faisant la différence entre la simulation et la solution à tous les points du maillage.



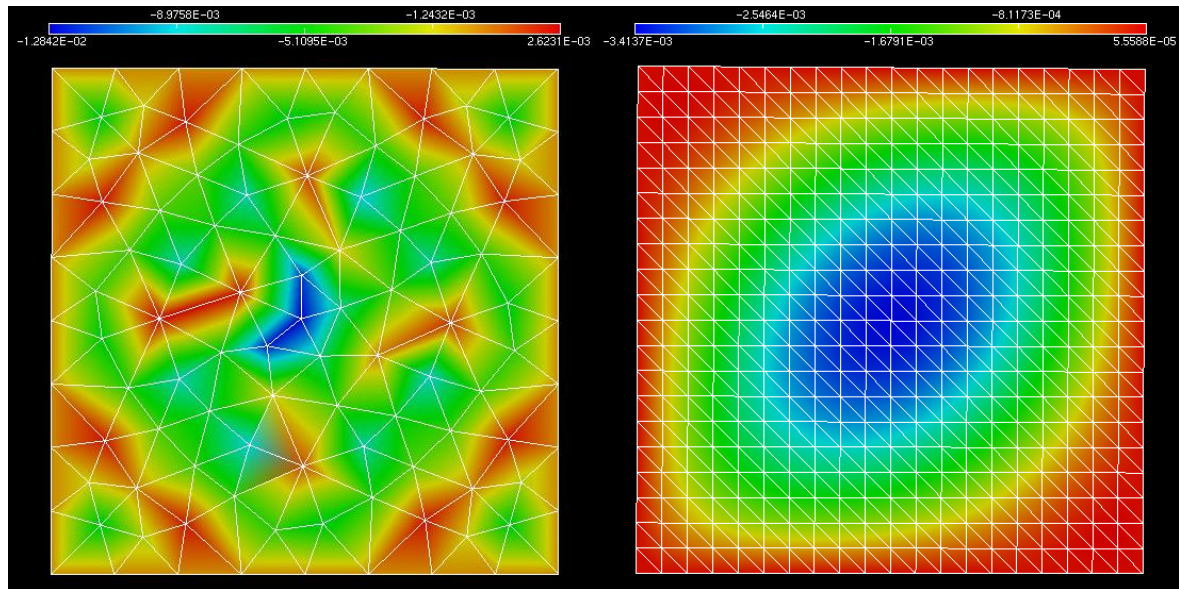


Figure 5 : Erreurs d'approximation du sinus bump

#### d) Simulation avec conditions de Neumann

Les conditions de Neumann permettent d'imposer des conditions de flux aux bords.

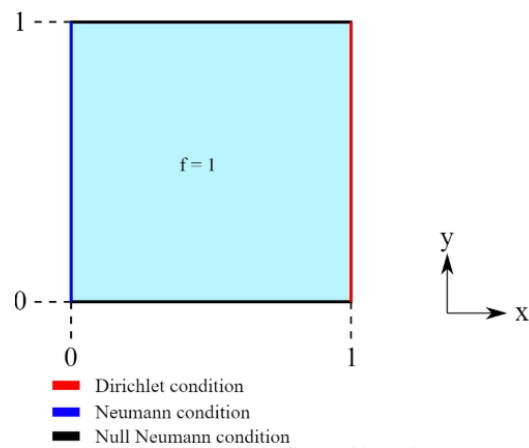


Figure 9: Schéma du problème de Dirichlet et de Neumann

Voici les conditions pour le problème :

- Conditions de Dirichlet :  $u=0$
- Condition de Neumann :  $h=\sin(\pi y)$
- Coefficient de diffusion :  $k=1$  (constant)
- Terme source :  $f=1$  (constant)

On observe que les résultats ne sont pas cohérents entre les deux maillages, les valeurs calculées étant différentes. Cela indique la présence d'un problème de réalisation de cette solution. Cependant, la distribution des valeurs semble cohérente avec les conditions imposés aux bords.

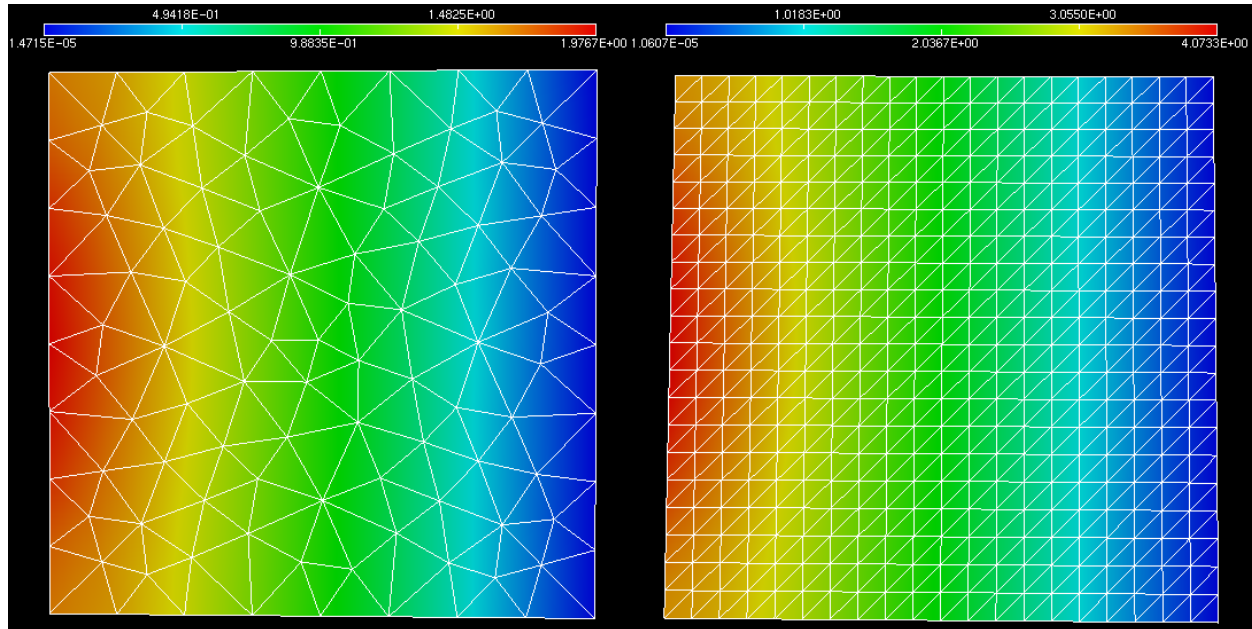


Figure 6 : Résultats du problème de Neumann

### e) Simulation sur une géométrie complexe de mug

Cette simulation combine les résultats des autres simulations en l'appliquant sur une géométrie de mug avec un liquide chaud.

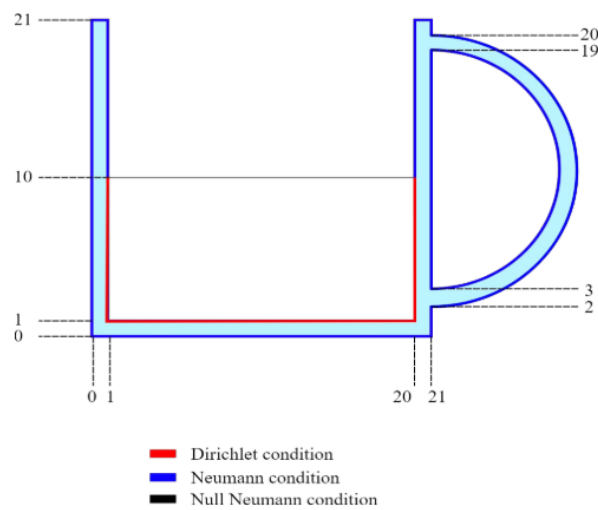


Figure 11: Schéma du problème du mug

Les conditions sont les suivantes :

- Conditions de Dirichlet :  $u=100$
- Condition de Neumann :  $h=-0,1$
- Coefficient de diffusion :  $k=1$  (constant)
- Terme source : aucun

Les résultats obtenus sur les différents maillages sont cohérents entre eux et avec le problème. Les valeurs imposées aux bords par le liquide semblent correctes. On observe également que les valeurs calculées diffèrent le plus entre les maillages au niveau des coins et le plus loin des bords aux valeurs imposés.

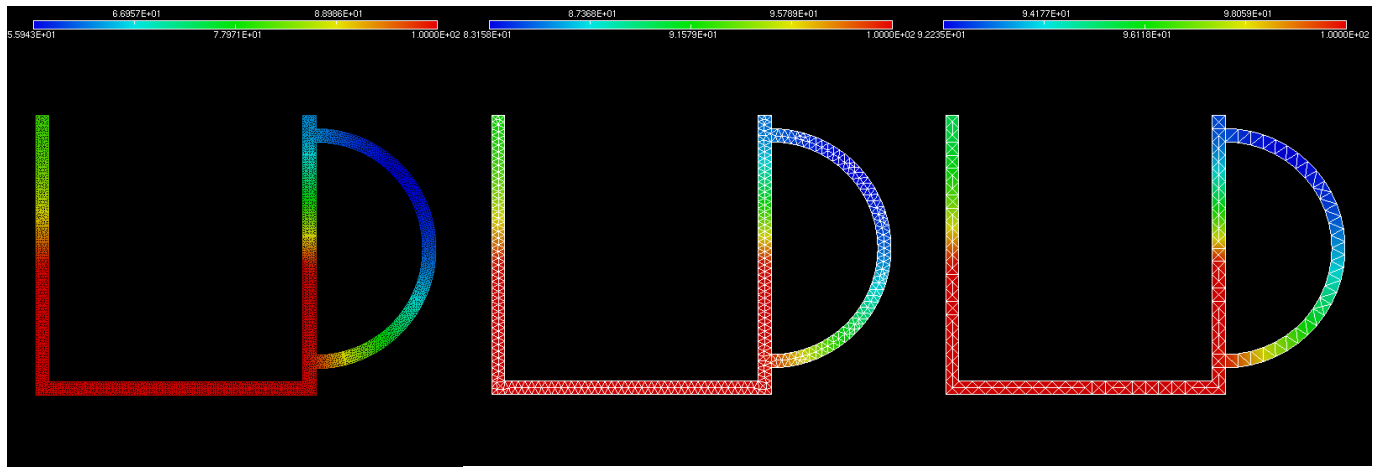


Figure 7 : Résultats du problème du mug

## Conclusion

En conclusion, le programme proposé prend en charge correctement les problèmes avec un terme source et des conditions de Dirichlet pour plusieurs types de maillages. Les problèmes avec des conditions de Neumann ne sont toutefois pas validés mais semblent proches de ce qui est attendu. Finalement, ce programme produit des résultats cohérents et très proches de la solution exacte d'après les résultats de l'analyse des erreurs et ce pour tous les degrés de quadratures implémentés.

## Liste de vérification (checklist) de la conformité de votre rapport avec les consignes de rédaction

La vérification point par point de la conformité de votre rapport finalisé avec chacun des éléments de cette checklist vous permet de vous assurer que votre rapport répond, au moins dans sa forme, aux consignes de rédaction des rapports réalisés dans le cadre de votre scolarité à l'ENSG.

Cette vérification doit être effectuée point par point juste avant l'impression et/ou l'enregistrement au format pdf. Elle doit être intégrée dans les annexes de votre rapport. **Chaque case ne doit être cochée que si votre rapport est bel et bien conforme avec la recommandation associée à la case.** Toutes les cases doivent être obligatoirement cochées lorsque vous rendez votre rapport.

### Forme générale et structuration du rapport

- ☒ Le rapport comporte une **page de couverture**, une **notice analytique** et un **sommaire** (se reporter aux documents disponibles sur la page Arche de la Direction des études).
- ☒ Le rapport comporte un **titre** court, explicite et qui reflète bien le contenu du rapport (évitez les titres imprécis tels que "Stage de terrain 1A").
- ☒ La **mise en page** a été **vérifiée juste avant** son impression et/ou son enregistrement au format pdf (pas de page blanche en recto, pas de page trop partiellement remplie, pas de titre en bas de page, pas de figure en tout début de partie ou sous-partie, *etc.*).
- ☒ Les **pages** sont **numérotées** et leur nombre n'excède pas la limite imposée (le cas échéant).
- ☒ Le rapport est **structuré**, avec différentes **parties** et **sous-parties** comprises entre une **introduction** et une **conclusion**.
- ☒ Les titres des parties et sous-parties sont facilement distinguables du corps du texte.
- ☒ Le rapport est **bien illustré**.

### Le texte du rapport

- ☒ Le texte est écrit dans un **français correct** et le **rapport a été relu** dans son intégralité avant son impression et/ou enregistrement au format pdf.
- ☒ Le texte est écrit dans un **style scientifique** (pas de style personnel avec l'utilisation abusive d'expressions comme "nous observons..." ou "on en a déduit que..." ; pas de style trop littéraire ou télégraphique ; préférez les phrases courtes, concises et précises aux phrases longues et peu informatives ; *etc.*).

### L'iconographie du rapport

- ☒ Les figures (ou tableaux) sont toutes bien **lisibles** (assez grandes, non pixellisées, absence de flou, *etc.*).
- ☒ Les figures (ou tableaux) sont toutes **informatives** et illustrent systématiquement des informations détaillées dans le texte du rapport.
- ☒ Les figures (ou tableaux) ont toutes un **intitulé** précis, concis et qui décrit correctement la figure.
- ☒ Les figures (ou tableaux) sont toutes **citées** dans le texte de votre rapport.
- ☒ Les figures (ou tableaux) sont toutes **numérotées** en suivant l'ordre dans lequel elles sont citées dans le texte.
- ☒ L'ordre d'apparition des figures correspond à leur numérotation.
- ☒ Les figures (ou tableaux) et leurs intitulés doivent tous être **comprises d'une manière autonome** sans qu'il ne soit indispensable de lire le texte associé.

### Le fond du rapport

- ☒ Les interprétations s'appuient sur des observations, descriptions et/ou des données factuelles détaillées au préalable dans le rapport.
- ☒ Les caractères généraux sont toujours décrits avant les points de détail.

### **Honnêteté intellectuelle**

- ☒ Le **rapport est original**. Le texte et les figures **ne sont pas plagiés** (le plagiat consiste notamment à s'accaparer des extraits de texte, des images, des données, *etc.* provenant de sources externes ou de rapports des années précédentes et à les intégrer à son propre travail sans en mentionner la provenance).