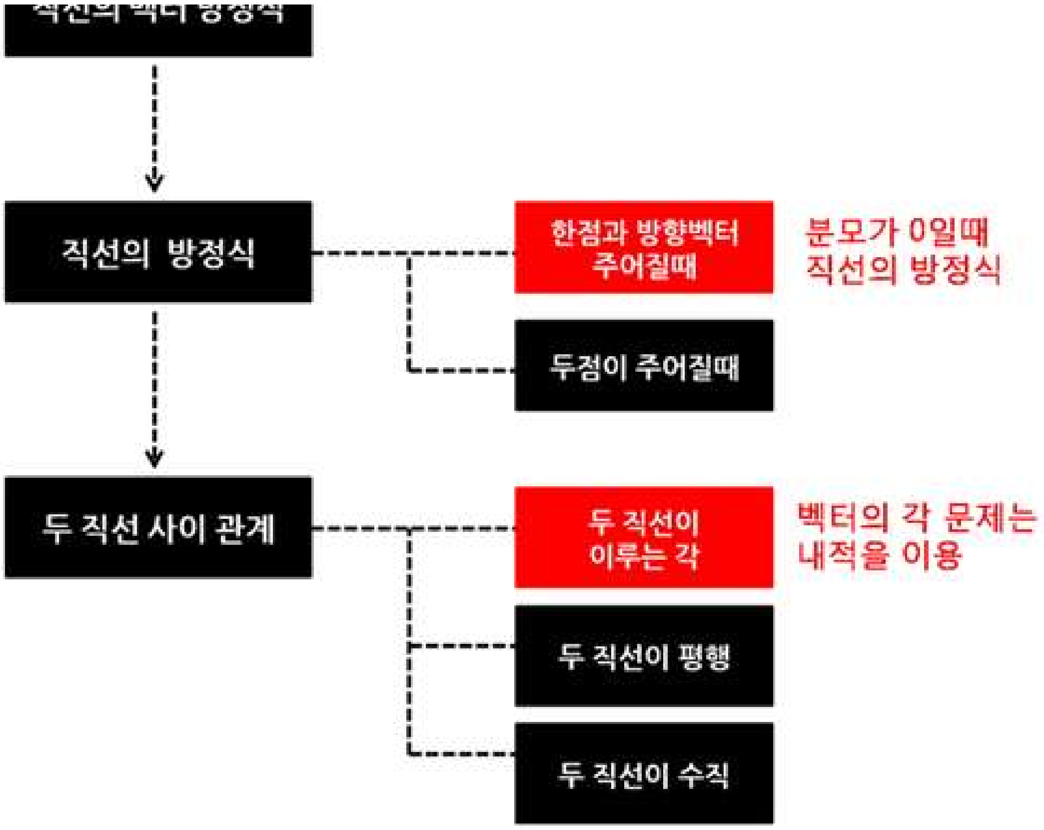
# [기하와 벡터 이론 11탄] 직선의 방정식


## 01. 직선의 방정식을 시작하며...

공간에 있는 직선을 미지수를 통해서 표현하는 방법에 대해서 고등학교에서 벡터를 배우는 주요한 이유 중 하나가 공간에 있는 직선이나 평면을 수식으로 표현하는데 있습니다. 어떤 원리를 통해서 직선과 평면에 대해서 표현할 수 있을까의 관점에서 보면 좀 더 재미있게 공부할 수 있지 않을까? 생각이 듭니다. 별루 어려운 내용이 아니라서 찬찬히 보면 누구나 이해할 수 있습니다.

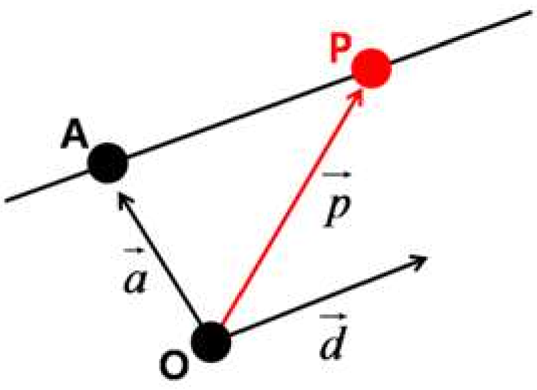
주요내용은 map 으로 확인

winner




# 02. 직선의 벡터방정식

한점을 지나고 $\vec{d}$ 와 평행한 직선의 벡터 방정식




$\overrightarrow{AP} // \vec{d}$ 이기 때문에 $\overrightarrow{AP} = t\vec{d}$ ($t$는 실수) 된다.

따라서 $\overrightarrow{AP} = t\vec{d} \rightarrow \vec{p} - \vec{a} = t\vec{d}$

$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ : 직선의 벡터방정식

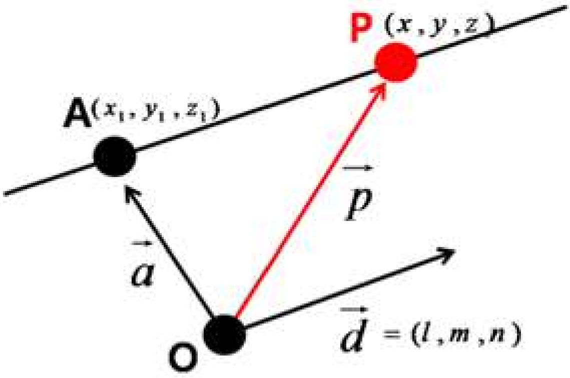
이때 직선과 평행한 벡터 $\vec{d}$ 를 직선의 방향벡터 (direction vector)

winner

# 03.직선의 방정식

## A. 직선위의 한점과 방향벡터가 주어질 때

한점을 지나고 $\vec{d}$ 와 평행한 직선 방정식




한점 $A(x_1, y_1, z_1)$과 직선에 평행한 벡터 $\vec{d} = (l, m, n)$를 두면
직선 위의 임의의 점을 $P(x, y, z)$ 라 두면

직선의 벡터방정식
$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} \rightarrow (x, y, z) = (x_1 + tl, y_1 + tm, z_1 + tn)$$

$$\begin{cases} x = x_1 + tl \\ y = y_1 + tm \\ z = z_1 + tn \end{cases}$$

winner

$$t=\frac{x-x_1}{l},\ t=\frac{y-y_1}{m},\ t=\frac{z-z_1}{n}$$

$$\therefore \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

02) $l,m,n$ 중 하나가 0 인 경우

예를들어 $n=0$인 경우에는

$$\begin{cases} x=x_1+tl \\ y=y_1+tm \\ z=z_1+tn \end{cases} \rightarrow \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m},\ z=z_1$$

의미를 해석 해보면 $xy$ 평면에 평행하고 $z$는 $t$에 상관없이 항상 일정한 값 $z_1$을 갖는다는 뜻이 된다.

03) $l,m,n$ 중 두개가 0 인 경우

예를들어 $m=0, n=0$인 경우에는

$$\begin{cases} x=x_1+tl \\ y=y_1 \\ z=z_1 \end{cases} \rightarrow y=y_1,\ z=z_1$$

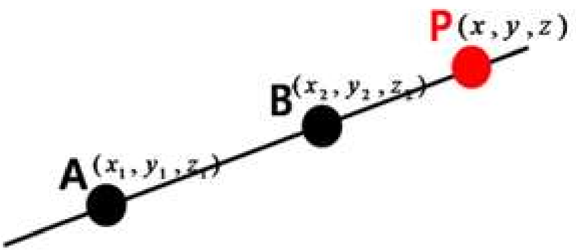
$y,z$좌표가 고정되고 $x$임의의 실수가 되기 때문에 $x$축에 평행한 직선이 만들어지게 된다.

그래서 일반적으로는 $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ 로 알아두고

예외적으로 분모가 0이 되는 경우는 분자도 0이 된다고 생각하면 된다.

winner

두점을 지나는 직선방정식




$\overrightarrow{AB}$는 직선에 평행한 벡터이기 때문에 방향벡터로 사용이 가능

$$\overrightarrow{AB} = \vec{d} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\overrightarrow{AP} \,//\, \overrightarrow{AB} \to \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} \to \vec{p} = \vec{a} + t\vec{b}$$

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases}$$

따라서 직선의 방정식은

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

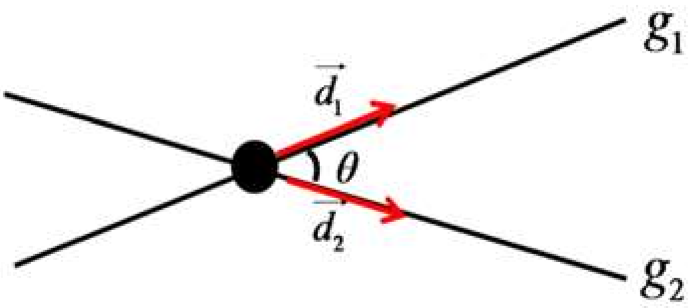
예외는 역시 분모가 0이면 분자도 0으로 해서 방정식을 만들면 된다.

## 04. 두 직선 사이의 관계

winner

기본적이 idea는 두 직선의 관계는 두 직선의 방향벡터의 관계를 이용해서 푼다.


A.두 직선이 이루는 각




위의 그림과 같이 두 직선이 이루는 각은 두 방향벡터가 이루는 각으로 풀수가 있다.

기본조건

01 $\theta$가 예각

02 직선 $g_1$의 방향벡터 $\vec{d_1}=(l_1, m_1, n_1)$

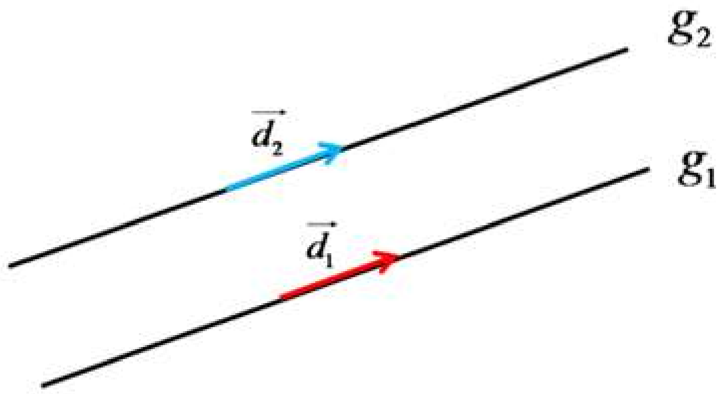
03 직선 $g_2$의 방향벡터 $\vec{d_2}=(l_2, m_{2,} n_2)$

벡터의 내적을 이용하여 각을 구하면 된다.

$$\cos\theta=\frac{\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}}{|\vec{d_1}||\vec{d_2}|}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

각을 구했는데 음수가 나오는 경우가 있는데 이때는 두 직선이 이루는 각중에 둔각을 구한 것이기 때문에 $\pi-\theta$ 를 해주면 됩니다.

winner




기본조건

01 직선 $g_1$의 방향벡터 $\vec{d_1}=(l_1, m_1, n_1)$

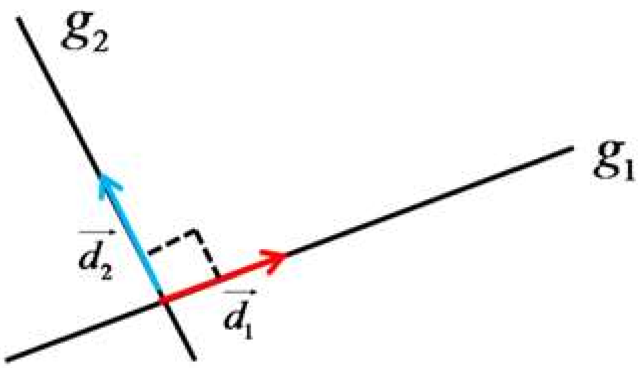
02 직선 $g_2$의 방향벡터 $\vec{d_2}=(l_2, m_2, n_2)$

$g_1//g_2 \rightarrow \vec{d_1}//\vec{d_2} \rightarrow \vec{d_1}=t\vec{d_2}$ ( $t$실수 )

$l_1 = tl_2, m_1 = tm_2, n_1 = tn_2$

$\rightarrow \frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$

winner



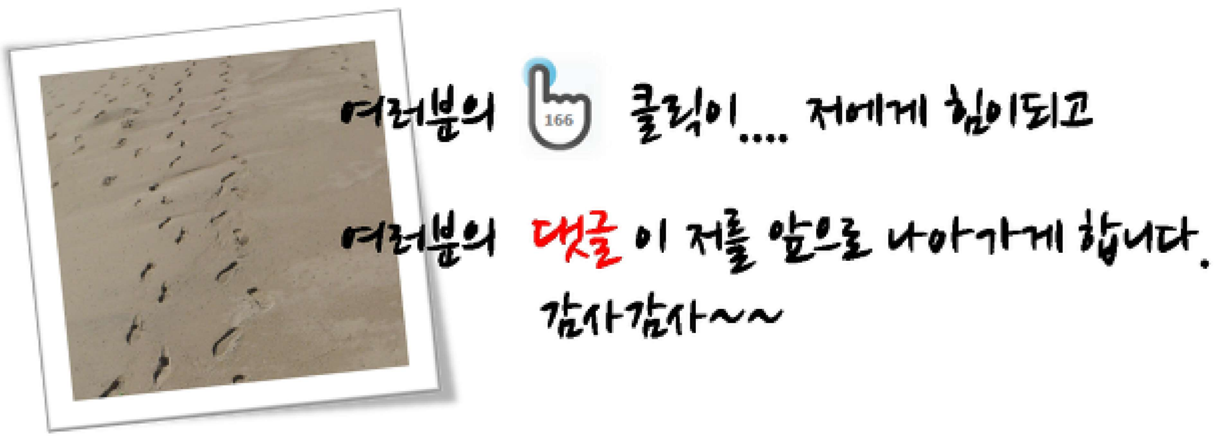

기본조건

01 직선 $g_1$의 방향벡터 $\vec{d_1}=(l_1, m_1, n_1)$

02 직선 $g_2$의 방향벡터 $\vec{d_2}=(l_2, m_2, n_2)$

$$g_1 \perp g_2 \rightarrow \vec{d_1} \perp \vec{d_2} \rightarrow \vec{d_1} \cdot \vec{d_2} = 0$$

$$\rightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$



winner

'math > 기하와 벡터 이론' 카테고리의 다른 글



댓글 0건 트랙백 0건 공유하기

신 다