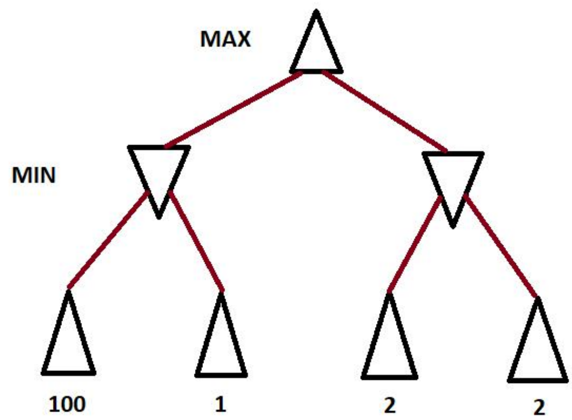
Πρόβλημα 1:

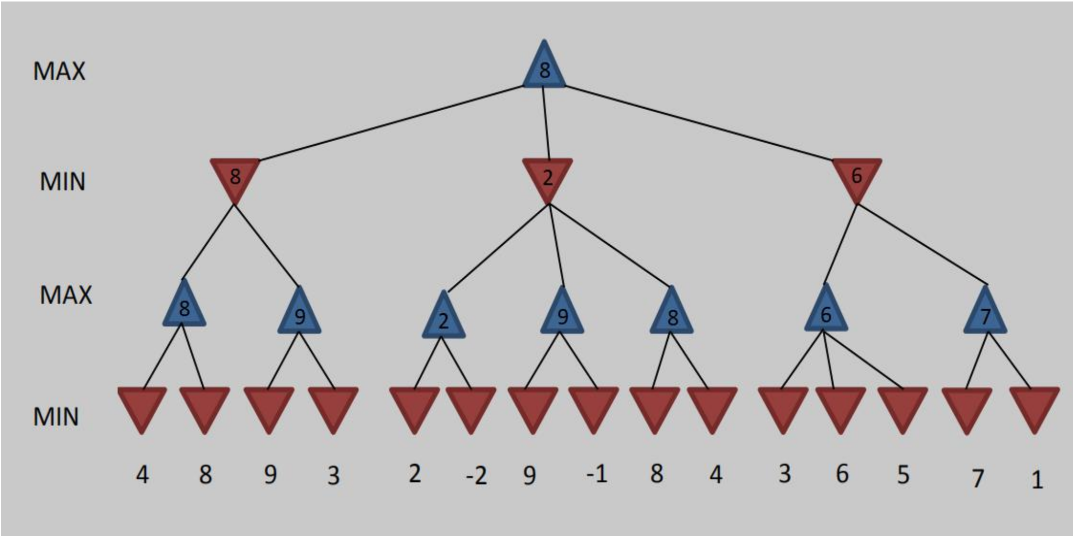
Στον αλγόριθμο minimax ο παίκτης MIN προτιμάει πάντα τις μικρότερες τιμές, διότι αυτές είναι καλύτερες για αυτόν. Έστω ένας βέλτιστος MIN και ένας **μη** βέλτιστος MIN οι οποίοι παίρνουν μια τιμή x και μια τιμή y αντίστοιχα, για κάποιον κόμβο που τα παιδιά του είναι κόμβοι φύλλα. Ο βέλτιστος θα διαλέγει πάντα όσο το δυνατόν μικρότερες τιμές, ενώ ένας μη βέλτιστος θα επιλέγει τιμές μεγαλύτερες από αυτές του βέλτιστου, εφ' όσον δεν παίζει όσο καλύτερα γίνεται και άρα επιλέγει τιμές οι οποίες είναι χειρότερες για αυτόν. Συνεπώς, έχουμε $x < y$, δηλαδή οι τιμές του μη βέλτιστου MIN θα είναι πάντα μεγαλύτερες από του βέλτιστου και σαν αποτέλεσμα οι τιμές του MAX θα είναι κι αυτές με τη σειρά τους μεγαλύτερες από ότι αν έπαιζε εναντίον ενός βέλτιστου. Άρα η χρησιμότητα που παίρνει ο MAX χρησιμοποιώντας αποφάσεις minimax εναντίον ενός μη βέλτιστου MIN δεν είναι ποτέ μικρότερη από τη χρησιμότητα που παίρνει παίζοντας εναντίον ενός βέλτιστου MIN. Εφ' όσον γνωρίζουμε ότι ο MIN δεν θα παίζει βέλτιστα, μπορούμε και ως MAX να κάνουμε κινήσεις οι οποίες μπορεί να δείχνουν κακές αλλά αν ο MIN διαλέξει εκείνη την κίνηση η οποία θα είναι χειρότερη για αυτόν, τότε το αποτέλεσμα για μας (MAX) θα είναι πολύ καλύτερο από ότι αν παίζαμε και οι 2 βέλτιστα. Αν οι κόμβοι φύλλα με τις πιθανές κινήσεις της στρατηγικής που διαλέξαμε έχουν κάποιες μεγάλες τιμές και κάποιες μικρές τότε ο μη βέλτιστος MIN θα επιλέξει τις μεγαλύτερες και εμείς ως MAX αντίστοιχα θα έχουμε καλύτερα αποτελέσματα. Για παράδειγμα στο παρακάτω δέντρο:



Βλέπουμε ότι ως MAX ακολουθάμε μια μη βέλτιστη στρατηγική γιατί βασιζόμαστε στο ότι ο MIN παίζει κι αυτός μη βέλτιστα, και υποθέτουμε ότι θα διαλέξει την κίνηση που πάει στον κόμβο με τιμή 100, το οποίο μας συμφέρει επειδή ο MAX κι αυτός θα διαλέξει τον κόμβο με 100. Αν όμως ο MIN παίξει βέλτιστα θα διαλέξει την κίνηση που δίνει τιμή 1 γιατί αυτό θα τον συμφέρει και εμείς αναγκαστικά θα πάρουμε την κίνηση που μας οδηγεί σε κόμβο με τιμή 2. Οπότε δεν είναι βέλτιστη η στρατηγική, αλλά αν ο MIN παίξει μη βέλτιστα θα έχουμε καλύτερα αποτελέσματα ως MAX.

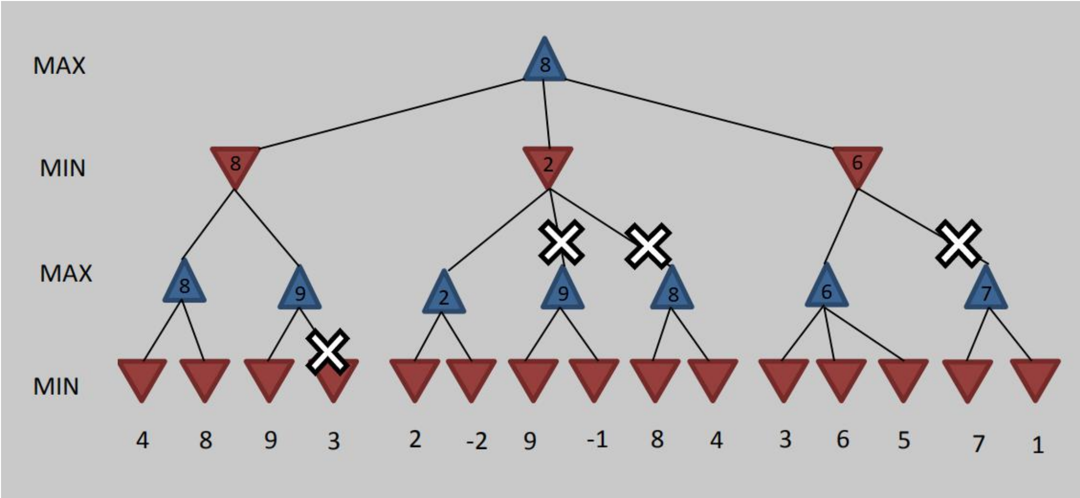
Πρόβλημα 2:

Οι minimax τιμές των κόμβων φαίνονται στην παρακάτω εικόνα:



Άρα ο MAX στη ρίζα ως καλύτερη κίνηση πρέπει να επιλέξει την κίνηση που οδηγεί στον κόμβο αριστερά με τιμή 8.

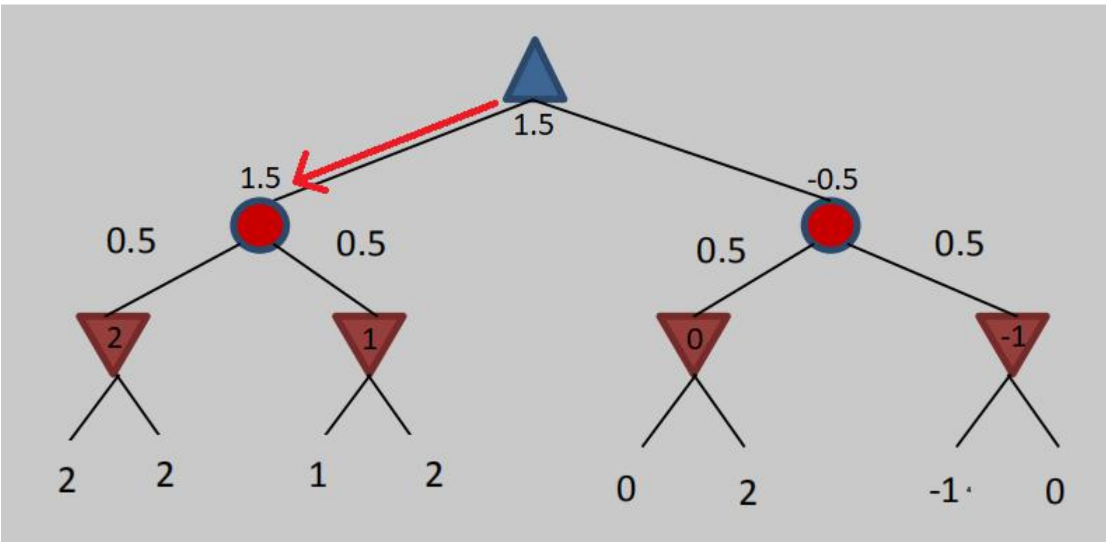
Όσον αφορά τον alpha-beta, ξεκινώντας υποθετικά από τα αριστερά, βρισκόμαστε στον κόμβο MAX με τιμή 8 (που βρήκαμε από τα παιδιά του) στο προτελευταίο επίπεδο αριστερά. Άρα μέχρι στιγμής η καλύτερη επιλογή για τον προηγούμενο MIN, δηλαδή η μικρότερη τιμή μέχρι στιγμής είναι το 8. Μετά πηγαίνοντας στον επόμενο MAX στο ίδιο επίπεδο, βρίσκουμε πρώτα τιμή 9 και επειδή αυτή είναι μεγαλύτερη από 8 που είναι η καλύτερη μέχρι στιγμής για τον MIN δε θα συνεχίσουμε παρακάτω, διότι ο MIN θα επιλέξει κόμβο με τιμή το πολύ 8, δηλαδή δεν έχει νόημα να κοιτάμε κάτι μεγαλύτερο. Οπότε θα κλαδέψουμε τον κόμβο MIN με τιμή 3. Τώρα, λοιπόν ο αριστερός MIN του 2ου επιπέδου παίρνει τιμή 8. Άρα η καλύτερη τιμή για τον MAX της ρίζας μέχρι στιγμής είναι το 8, δηλαδή θα πάρει τουλάχιστον 8. Πηγαίνουμε στο MIN που αποτελεί το δεύτερο παιδί της ρίζας, αλλά δεν ξέρουμε την τιμή του, οπότε πάμε στο πρώτο παιδί του και βλέπουμε ότι παίρνει τιμή 2. Οπότε, ο MIN θα πάρει το πολύ τιμή 2, η οποία είναι μικρότερη του 8, άρα δεν έχει νόημα να συνεχίσουμε παρακάτω, οπότε κλαδεύουμε τα υπόλοιπα παιδιά του, δηλαδή τους κόμβους MAX που παίρνουν κανονικά τιμή 9 και 8. Μετά συνεχίζουμε στο τελευταίο παιδί (MIN) της ρίζας. Βρίσκουμε την τιμή του 1ου παιδιού του, η οποία είναι ίση με 6. Άρα ο MIN θα πάρει τιμή το πολύ 6, η οποία είναι μικρότερη του 8, συνεπώς θα κλαδέψουμε το 2ο παιδί του, δηλαδή τον MAX που κανονικά θα έπαιρνε τιμή 7. Συνολικά, οι κόμβοι οι οποίοι κλαδεύονται φαίνονται καλύτερα στην παρακάτω εικόνα:



Προφανώς, όταν κλαδεύεται ένας κόμβος, κλαδεύονται μαζί και τα παιδιά του.

Πρόβλημα 3:

α) Οι τιμές των κόμβων έχουν συμπληρωθεί στην εικόνα παρακάτω και η καλύτερη κίνηση για τη ρίζα φαίνεται με το κόκκινο βελάκι:

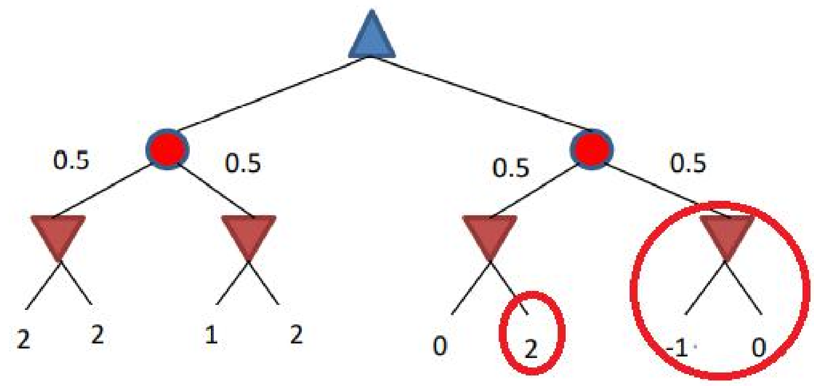


β) Αν μας δώσουν τις τιμές των έξι πρώτων φύλλων, **χρειαζόμαστε** και τις τιμές των δύο τελευταίων γιατί αλλιώς δεν μπορούμε να γνωρίζουμε ποια θα είναι η τιμή του κόμβου τύχης. Εφ' όσον οι τιμές των φύλλων κυμαίνονται από $-\infty$ έως $+\infty$, τότε και οι πιθανές τιμές του δεξιού κόμβου τύχης θα κυμαίνονται στο ίδιο διάστημα και δεν θα μπορούμε να ξέρουμε αν το 1.5 του αριστερού θα είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο για να αποφανθούμε ποια είναι η καλύτερη κίνηση.

Αν μας δώσουν τις τιμές των επτά πρώτων τότε ξέρουμε ότι ο αριστερός κόμβος τύχης παίρνει τιμή 1.5 και το αριστερό παιδί του δεξιού κόμβου τύχης παίρνει 0 ενώ το δεξί παίρνει το πολύ -1, εφ' όσον προτιμάει μικρότερες τιμές. Οπότε ο κόμβος τύχης παίρνει τιμή **y = 0 * 0.5 + x * 0.5, με x <= -1, δηλαδή y <= -0.5** . Οπότε, **δε** χρειάζεται να ξέρουμε και την τιμή του όγδοου φύλλου, αφού η τιμή του δεξιού κόμβου τύχης είναι το πολύ -0.5, η οποία είναι μικρότερη του αριστερού κόμβου τύχης, συνεπώς η καλύτερη κίνηση για τη ρίζα είναι προς τον αριστερό κόμβο τύχης, όπως φαίνεται και στην προηγούμενη εικόνα.

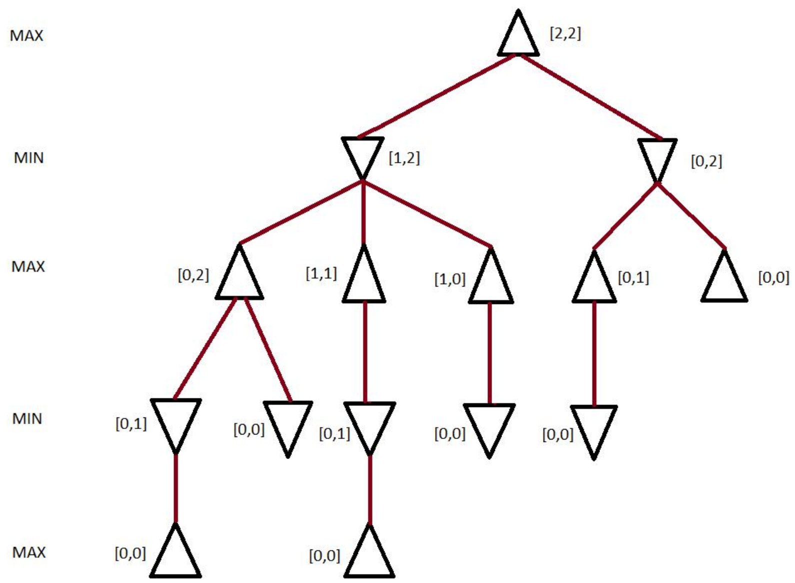
γ) Τα 2 πρώτα φύλλα έχουν τιμές 2 και 2 αντίστοιχα, άρα ο αριστερός κόμβος MIN θα πάρει τιμή ίση με 2. Ο πατέρας του MIN αυτού, δηλαδή ο αριστερός κόμβος τύχης θα πάρει τιμή ίση με y = 2 * 0.5 + min(x1, x2) * 0.5, όπου x1, x2 οι τιμές του 3ου και 4ου φύλλου αντίστοιχα. Εφ' όσον οι τιμές κυμαίνονται στο διάστημα [-2,2] η μικρότερη τιμή που θα μπορούσε να πάρει ο κόμβος MIN (το 2ο παιδί του αριστερού κόμβου τύχης), είναι -2 και η μεγαλύτερη 2. Άρα, αντίστοιχα κι ο αριστερός κόμβος τύχης θα πάρει την μικρότερη τιμή του όταν πάρει κι ο MIN την μικρότερη, δηλαδή y = 2 * 0.5 + (-2 * 0.5) = 1 - 1 = 0 και την μεγαλύτερη του όταν πάρει κι ο MIN την μεγαλύτερη του, δηλαδή
y = 2 * 0.5 + 2 * 0.5 = 1 + 1 = 2. Συνεπώς, οι δυνατές τιμές του αριστερού κόμβου τύχης ανήκουν στο διάστημα [0,2].

δ) Ξεκινώντας από αριστερά, ο κόμβος MIN βλέποντας τις τιμές των φύλλων παίρνει τιμή 2. Επειδή έχουμε ενδιάμεσους κόμβους τύχης, οι οποίοι υπολογίζουν τις τιμές τους από το άθροισμα των τιμών των κόμβων MIN επί της πιθανότητας, θα πρέπει να δούμε και τα επόμενα 2 φύλλα για να βρούμε ποια θα είναι η τιμή του αριστερού κόμβου τύχης, έτσι ώστε να έχουμε μια ιδέα για το ποια θα είναι η πρώτη πιθανή τιμή που θα διαλέξει ο κόμβοσ MAX της ρίζας. Έτσι ο επόμενος κόμβος MIN, βάσει των φύλλων του, παίρνει τιμή 1. Άρα ο κόμβος τύχης παίρνει τιμή 2 * 0.5 + 1 * 0.5 = 1.5. Άρα ο MAX της ρίζας θα πάρει τουλάχιστον τιμή 1.5 . Σε αυτήν τη φάση, επειδή το διάστημα τιμών των φύλλων είναι [-2,2], δεν μπορούμε να αποφανθούμε ακόμα αν μπορούμε να κλαδέψουμε κάποιους κόμβους γιατί υπάρχει και η περίπτωση τα υπόλοιπα φύλλα να έχουν όλα τιμές 2 και έτσι ο δεξής κόμβος τύχης να παίρνει τιμή 2 που είναι μεγαλύτερη του 1.5. Έτσι, συνεχίζουμε πηγαίνοντας στον επόμενο κόμβο MIN, βλέπουμε το πρώτο φύλλο του και καταλαβαίνουμε ότι θα πάρει τιμή το πολύ 0. Αυτό σημαίνει ότι ο κόμβος τύχης θα πάρει τιμή το πολυ 0 + την τιμή του δεξιότερου κόμβου MIN * 0.5 . Οι πιθανές τιμές είναι στο διάστημα [-2,2], άρα στην καλύτερη (για τον MAX) περίπτωση ο τελευταίος κόμβος MIN (δεξιά) θα πάρει τιμή 2, συνεπώς ο κόμβος τύχης θα πάρει τιμή ίση με 2 * 0.5 = 1, μικρότερη του 1.5, οπότε δεν έχει νόημα να ελέγξουμε τα υπόλοιπα φύλλα και τον τελευταίο κόμβο MIN. Τα κλαδέματα φαίνονται καλύτερα στην παρακάτω εικόνα:



Πρόβλημα 4:

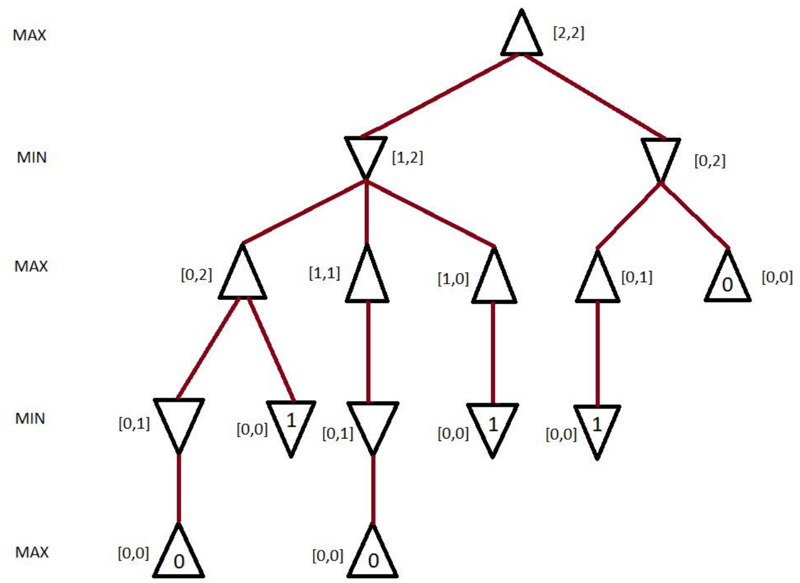
1) Έχουμε 2 στοίβες με 2 όμοια αντικείμενα η καθεμία. Κάθε παίκτης μπορεί να πάρει από 1 έως 2 αντικείμενα, αρκεί να είναι από την ίδια στοίβα. Νικητής είναι αυτός που θα αφαιρέσει το τελευταίο αντικείμενο. Παρακάτω φαίνεται το πλήρες δέντρο παιχνιδιού, όπου δίπλα από κάθε κόμβο αναγράφεται πόσα αντικείμενα μένουν στην κάθε στοίβα, την τωρινή κατάσταση. Αριστερά από το κάθε επίπεδο του δέντρου φαίνεται ποιος παίκτης πρόκειται να κάνει κίνηση σε αυτήν την κατάσταση. Πρώτος παίζει ο MAX.



Προφανώς, στις καταστάσεις [0,0], όπου το παιχνίδι έχει τελειώσει, δε σημαίνει ότι ο παίκτης που φαίνεται στα αριστερά του επιπέδου, θα κάνει κάποια κίνηση. Το όνομα του παίκτη φαίνεται για ενδεικτικούς λόγους και για να ξέρουμε τι τιμή θα δώσουμε στον κόμβο βάσει της συνάρτησης χρησιμότητας. Για παράδειγμα, στους 2 κόμβους του τελευταίου επιπέδου, όπου φαίνεται το όνομα του MAX, ο οποίος κανονικά θα έπαιζε αν δεν είχε τελειώσει το παιχνίδι, θα βάλουμε τιμή 0, αφού νικητής είναι ο MIN, ο οποίος έκανε την κίνηση που μας έφερε σε αυτήν την κατάσταση.

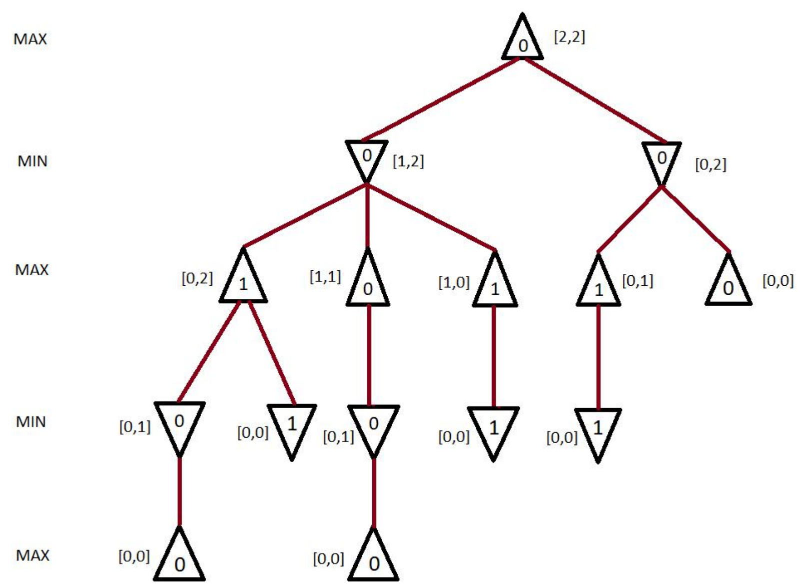
Επίσης, οι συμμετρικές καταστάσεις δε φαίνονται, επειδή δεν έχει σημασία από ποια στοίβα θα αφαιρέσει αντικείμενα κάποιος παίκτης. Για παράδειγμα, στην πρώτη κίνηση ο MAX μπορεί να πάρει 2 αντικείμενα από τη μία στοίβα, όμως δεν έχει σημασία από ποια, αφού αυτό δεν αλλάζει την τροπή του παιχνιδιού. Έτσι, δεν έχω σημειώσει και [0,2] και [2,0]. Το ένα από τα 2 αρκεί.

2) Παρακάτω φαίνεται το πλήρες δέντρο παιχνιδιού, μαζί με τις τιμές στους κόμβους που αντιστοιχούν σε τελικές καταστάσεις:



Ξεκινάμε την εκτέλεση από τα αριστερά προς τα δεξιά. Τα α και β αρχικά ξεκινάνε με τιμή μείον άπειρο και συν άπειρο αντίστοιχα. Στο πρώτο φύλλο του τελευταίου επιπέδου, έχουμε τιμή 0, άρα από πάνω ο MIN στην κατάσταση [0,1] παίρνει τιμή 0, οπότε κι ο MAX από πάνω στην κατάσταση [0,2] παίρνει τιμή 1. Έτσι, η καλύτερη τιμή μέχρι στιγμής για τον MIN στην κατάσταση [1,2] είναι 1, οπότε έχουμε β = 1. Προχωράμε στον επόμενο MAX στην κατάσταση [1,1], για να βρούμε την τιμή του, χρειάζεται να βρούμε πρώτα του κόμβου-παιδιού του. Οπότε πάμε στον MIN στην κατάσταση [0,1] που βρίσκεται ακριβώς από κάτω, ο οποίος παίρνει τιμή 0 αναγκαστικά γιατί έχει ένα παιδί και έτσι με τη σειρά του παίρνει τιμή 0 κι ο MAX από πάνω στην κατάσταση [1,1]. Άρα, τώρα το β γίνεται ίσο με 0, αφού η καλύτερη τιμή για τον MIN στην κατάσταση [1,2] τώρα είναι 0, λόγω του MAX στην [1,1]. Προχωράμε στον MAX στην κατάσταση [1,0], ο οποίος παίρνει τιμή 1 κατευθείαν, αφού έχει μόνο ένα παιδί με τιμή 1. Συνεπώς, ο MIN στην κατάσταση [1,2] παίρνει τιμή 0 και έτσι για τον MAX της ρίζας η καλύτερη τιμή μέχρι στιγμής είναι το 0, άρα έχουμε α = 0. Πάμε στον κόμβο MIN της κατάστασης [0,2] και κοιτάμε το αριστερό παιδί, αλλά δεν έχει τιμή, οπότε την υπολογίζουμε και έτσι ο

MAX στην κατάσταση [0,1] παίρνει τιμή 1, αφού έχει μόνο ένα παιδί με τιμή 1. Έτσι, ο MIN στην κατάσταση [0,2] παίρνει τιμή 0 και ο MAX της ρίζας παίρνει αναγκαστικά τιμή 0. Παρακάτω φαίνονται καλύτερα οι τιμές των κόμβων στην εικόνα:



Λόγω του τρόπου που έχω διαμορφώσει το δέντρο δεν χρειάστηκε κάποιο κλάδεμα καθώς προσπελαύναμε τους κόμβους από αριστερά προς τα δεξιά. Το α από μείον άπειρο άλλαξε μία φορά σε 0 και μετά τελείωσε ο αλγόριθμος. Ενώ το β, από συν άπειρο, πήρε τιμή 1 και μετά τιμή 0. Λόγω του ότι οι δυνατές κινήσεις σε πολλές καταστάσεις ήταν λιγότερες από 2, σε κάποιους κόμβους οι τιμές υπολογίστηκαν κατευθείαν διότι έχουν μόνο ένα παιδί, με αποτέλεσμα να μη γίνουν κλαδέματα, αφού δεν μπορούσαμε να αποφανθούμε αν έχει νόημα να συνεχίσουμε πιο βαθιά, χωρίς να έχουμε βρει μια πιθανή τιμή του κόμβου (μικρότερη ή ίση, μεγαλύτερη ή ίση). Αυτό γίνεται μόνο αν βρούμε την τιμή του πρώτου παιδιού. Συνεπώς, τα α και β χρησιμοποιήθηκαν μόνο για έναν κόμβο το καθένα αντίστοιχα, όμως δε μας βοήθησαν με το να κλαδέψουμε κάποιους κόμβους.

3) Όπως βλέπουμε από την παραπάνω εικόνα αλλά και αν σκεφτούμε λογικά τις πιθανές κινήσεις του παιχνιδιού, καταλαβαίνουμε ότι αν ο κάθε παίκτης παίζει βέλτιστα και αλάνθαστα τότε πάντα θα νικάει ο 2ος παίκτης δηλαδή ο MIN. Αυτό φαίνεται και από τις τιμές των κόμβων του δέντρου. Ο κόμβος της ρίζας έχει τιμή 0, άρα αυτό σημαίνει ότι όποια κίνηση κι αν διαλέξει ο πρώτος παίκτης δηλαδή ο MAX, τότε το παιχνίδι θα έρθει σε μία κατάσταση στην οποία αν ο MIN παίξει βέλτιστα τότε θα νικήσει. Στην αρχική κατάσταση έχουμε 2 αντικείμενα σε 2 στοίβες και κάθε παίκτης πρέπει να αφαιρέσει τουλάχιστον 1 ή το πολύ όλα τα αντικείμενα από τη μία στοίβα. Ο πρώτος παίκτης, λοιπόν, έχει 2 κινήσεις: ή να βγάλει 1 ή 2 από την ίδια στοίβα. Όποια κίνηση και να διαλέξει όμως θα έχει το ίδιο αποτέλεσμα για

αυτόν. Αν πάρει 2 τότε η μία στοίβα αδειάζει και μένουν 2 αντικείμενα στην άλλη και έτσι αν ο MIN παίζει αλάνθαστα, θα πάρει και τα 2 αντικείμενα και θα νικήσει. Αν πάρει ένα αντικείμενο τότε πάλι αν ο MIN παίζει αλάνθαστα, θα διαλέξει να αφαιρέσει ένα αντικείμενο από τη στοίβα με τα 2 αντικείμενα, έτσι ώστε να φέρει το παιχνίδι σε μια κατάσταση, στην οποία απομένουν 1 αντικείμενο σε κάθε στοίβα και ο MAX στην επόμενη κίνηση θα αναγκαστεί να αφαιρέσει 1 μόνο αντικείμενο από μία από τις δύο στοίβες, αφού αυτό του επιτρέπουν οι κανόνες του παιχνιδιού. Έτσι στο παιχνίδι, μετά από την κίνηση του MAX, θα έχει μείνει 1 αντικείμενο μόνο στη μία στοίβα και ο MIN στην επόμενη κίνησή του θα το αφαιρέσει και θα νικήσει. Συνεπώς, δεν έχει καμία σημασία ποια κίνηση από τις 2 θα επιλέξει ο πρώτος παίκτης (MAX), διότι αν ο 2ος παίκτης (MIN) παίζει αλάνθαστα, τότε θα νικήσει και στις 2 περιπτώσεις ο 2ος. Δηλαδή, αν παίζουν και οι 2 παίκτες αλάνθαστα, θα κερδίσει ο 2ος παίκτης (MIN) σίγουρα.